



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

# STUDIO DEL COMPORTAMENTO AUXETICO DI MATERIALI COMPOSITI LAMINATI

Relatore: Prof. Zaccariotto Mirco

Correlatore: Prof. Galvanetto Ugo

Laureando: Tessari Marco 1012858

Anno Accademico: 2012/2013



## **Ringraziamenti**

Desidero esprimere un particolare ringraziamento al Prof. Zaccariotto Mirco per il sempre puntuale e concreto supporto fornitomi nel corso della stesura del presente elaborato.

Un affettuoso grazie è inoltre rivolto alla mia Famiglia e ad Arianna per l'inestimabile contributo garantito in questi miei anni di Università.



*A Nereo, Nadia, Giacomo e Arianna*



# SOMMARIO

<b>1.INTRODUZIONE.....</b>	<b>16</b>
1.1. Presentazione della tesi .....	16
<b>2. I MATERIALI AUXETICI TRADIZIONALI.....</b>	<b>17</b>
2.1. Caratteristiche macroevidenti .....	17
2.2. Struttura e meccanismi di deformazione .....	18
2.3. Principali applicazioni dei materiali auxetici .....	20
2.3.1. Settore militare: materiali protettivi.....	21
2.3.2. Dispositivi di fissaggio e rivetti .....	21
2.3.3. Strutture.....	22
2.3.4. Limitazioni .....	22
2.3.4. Sviluppi futuri .....	22
<b>3. I LAMINATI COMPOSITI CON COEFFICIENTE DI POISSON NEGATIVO LUNGO LO SPESSORE.....</b>	<b>24</b>
3.1. I coefficienti della meccanica del continuo: il coefficiente di Poisson .....	24
3.2. La produzione di schiume polimeriche e fibre auxetiche .....	26
3.3. Opportuna scelta del lay-up delle lamine: esempi di laminati compositi con coefficiente di Poisson negativo lungo lo spessore .....	30
3.3.1. Resistenza all' indentazione statica e agli impatti .....	31
3.4. Le proprietà lungo lo spessore dei laminati .....	33
3.4.1. Il calcolo di $\nu_{13}$ e $\nu_{23}$ .....	34
3.4.2. Il calcolo di $E_3$ .....	39
<b>4. DETERMINAZIONE DEI VALORI DI <math>\nu_{13}</math>, <math>\nu_{23}</math> ED <math>E_3</math> DI LAMINATI CON FIBRE DI VETRO, KEVLAR E CARBONIO.....</b>	<b>42</b>
4.1. Presentazione del problema: caratteristiche dei pre-pregs .....	42
4.2. Calcolo delle proprietà elastiche nel piano del laminato .....	43
4.3. Calcolo di $\nu_{13}$ e $\nu_{23}$ ed $E_3$ .....	44
<b>5. MODELLAZIONE FEM.....</b>	<b>105</b>
5.1. Il problema del buckling .....	105
5.2. Il buckling di piastre piane ortotrope .....	106
5.2.1. Equazioni di rigidezza .....	109
5.3. Simulazioni numeriche.....	112
5.3.1. Modellazione 2D piastra auxetica .....	113
5.3.2. Modellazione 3D piastra auxetica .....	115
5.3.3 Risultati ottenuti .....	116
<b>6. CONCLUSIONI.....</b>	<b>126</b>

<b>7. APPENDICI.</b> .....	127
<b>7.1. APPENDICE A: programmi MATLAB</b> .....	127
<b>7.2. APPENDICE B: tabelle valori</b> .....	132
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	147



## ELENCO FIGURE

Fig. 2-1 Meccanismo di deformazione in seguito a una forza che tende a “stirare” la struttura. .....	18
Fig. 2-2 Materiale non auxetico (a) confrontato con un materiale auxetico (b) dove sono identificabili le celle fondamentali [7]. .....	18
Fig. 2-3 Esempi di strutture elementari la cui ripetibilità garantisce un comportamento auxetico globale del materiale [5-6-7-8-9-10]. .....	19
Fig. 2-4 Rappresentazione di un sensore piezoelettrico in cui la matrice polimerica tradizionale viene sostituita da una di tipo auxetico. ....	23
Fig. 3-1 Definizione dei moduli elastici e dei coefficienti di Poisson per un materiale costituito da lamine isotrope uguali [25]. .....	26
Fig. 3-2 Definizione dei moduli elastici e dei coefficienti di Poisson per un materiale ortotropo[25]. .....	26
Fig. 3-3 Schematica rappresentazione di un dispositivo impiegato per la produzione di fibre di polipropilene auxetiche; 1: Serbatoio; 2: Riscaldatore; 3: Bullone di sicurezza dello stampo; 4: Termocoppia; 5: Stantuffo in acciaio con estremità di ottone; 6: Stampo per tranciatura; 7: Piastra isolante [27-28-29]. .....	28
Fig. 3-4 Schematica rappresentazione di un estrusore a fusione usato per produrre fibre di polipropilene auxetiche in modo continuativo; 1: Magazzino di alimentazione del polimero; 2: Guida a spirale; 3: Serbatoio; 4: Zona di alimentazione; 5: Zona di compressione; 6: Zona di dosatura; 7: Zona di miscelamento e prestampaggio; 8: Zona di stampaggio; 9: Cilindro di raffreddamento; 10: Cilindro di assottigliamento; 11: Tranciatura con aria; 12, 13, 14, 15: Cilindri di guida; 16: Zona di avvolgimento [27-28-29]. .....	29
Fig. 3-5 Scansione al microscopio elettronico (SEM) della microstruttura del politetrafluoroetilene (PTFE) espanso [27]. .....	29
Fig. 3-6 Sistema di riferimento di un laminato composito in cui ogni <i>ply</i> ha una specifica orientazione. ....	31
Fig. 3-7 Porzione di area danneggiata, rispetto alla totale del laminato, rilevata durante il test di indentazione; (a): laminato con $\nu_{13} = 0.086$ ; (b): laminato con $\nu_{13} = -0.156$ ; (c): laminato con $\nu_{13} = 0.187$ [35]. .....	32
Fig. 3-8 Immagini, ottenute mediante frattografia, della rottura dei laminati con $\nu_{13} = 0.086$ (a), $\nu_{13} = -0.156$ (b) e con $\nu_{13} = 0.187$ (c) [35]. .....	33
Fig. 3-9 Deformazioni nel sistema di riferimento del laminato e rispetto al <i>j-esimo ply</i> ruotato di $\theta^j$ [41] .....	34
Fig. 3-10 Rappresentazione dell'andamento di $\nu_{13}$ del laminato in funzione di $\nu_{13}$ e $\nu_{23}$ del singolo <i>ply</i> . .....	38
Fig. 3-11 Rappresentazione dell'andamento di $\nu_{23}$ del laminato in funzione di $\nu_{13}$ e $\nu_{23}$ del singolo <i>ply</i> . .....	38
Fig. 4-1 <i>Lay-up</i> di un laminato con relativo sistema di riferimento. ....	44
Fig. 4-2 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 1 con fibre di vetro. ....	45
Fig. 4-3 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 1 con fibre di vetro. ....	45
Fig. 4-4 Grafico di $E_3$ nel modello 1 con fibre di vetro. ....	46
Fig. 4-5 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 1 con fibre di kevlar. ....	46
Fig. 4-6 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 1 con fibre di kevlar. ....	47
Fig. 4-7 Grafico di $E_3$ nel modello 1 con fibre di kevlar. ....	47
Fig. 4-8 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 1 con fibre di carbonio. ....	48
Fig. 4-9 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 1 con fibre di carbonio. ....	48
Fig. 4-10 Grafico di $E_3$ nel modello 1 con fibre di carbonio. ....	49
Fig. 4-11 Sovrapposizione dei $\nu_{13}$ dei laminati con diverse fibre del modello 1. ....	49

Fig. 4-12 Sovrapposizione dei $\nu_{23}$ dei laminati con diverse fibre del modello 1.....	50
Fig. 4-13 Sovrapposizione degli $E_3$ dei laminati con diverse fibre del modello 1.....	50
Fig. 4-14 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 2 con fibre di vetro.....	51
Fig. 4-15 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 2 con fibre di vetro.....	51
Fig. 4-16 Grafico di $E_3$ nel modello 2 con fibre di vetro.....	52
Fig. 4-17 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 2 con fibre di kevlar.....	52
Fig. 4-18 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 2 con fibre di kevlar.....	53
Fig. 4-19 Grafico di $E_3$ nel modello 2 con fibre di kevlar.....	53
Fig. 4-20 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 2 con fibre di carbonio.....	54
Fig. 4-21 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 2 con fibre di carbonio.....	54
Fig. 4-22 Grafico di $E_3$ nel modello 2 con fibre di carbonio.....	55
Fig. 4-23 Sovrapposizione dei $\nu_{13}$ dei laminati con diverse fibre del modello 2.....	55
Fig. 4-24 Sovrapposizione dei $\nu_{23}$ dei laminati con diverse fibre del modello 2.....	56
Fig. 4-25 Sovrapposizione degli $E_3$ dei laminati con diverse fibre del modello 2.....	56
Fig. 4-26 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 3 con fibre di vetro.....	57
Fig. 4-27 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 3 con fibre di vetro.....	57
Fig. 4-28 Grafico di $E_3$ nel modello 3 con fibre di vetro.....	58
Fig. 4-29 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 3 con fibre di kevlar.....	58
Fig. 4-30 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 3 con fibre di kevlar.....	59
Fig. 4-31 Grafico di $E_3$ nel modello 3 con fibre di kevlar.....	59
Fig. 4-32 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 3 con fibre di carbonio.....	60
Fig. 4-33 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 3 con fibre di carbonio.....	60
Fig. 4-34 Grafico di $E_3$ nel modello 3 con fibre di carbonio.....	61
Fig. 4-35 Sovrapposizione dei $\nu_{13}$ dei laminati con diverse fibre del modello 3.....	61
Fig. 4-36 Sovrapposizione dei $\nu_{23}$ dei laminati con diverse fibre del modello 3.....	62
Fig. 4-37 Sovrapposizione degli $E_3$ dei laminati con diverse fibre del modello 3.....	62
Fig. 4-38 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 4 con fibre di vetro.....	63
Fig. 4-39 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 4 con fibre di vetro.....	63
Fig. 4-40 Grafico di $E_3$ nel modello 4 con fibre di vetro.....	64
Fig. 4-41 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 4 con fibre di kevlar.....	64
Fig. 4-42 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 4 con fibre di kevlar.....	65
Fig. 4-43 Grafico di $E_3$ nel modello 4 con fibre di kevlar.....	65
Fig. 4-44 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 4 con fibre di carbonio.....	66
Fig. 4-45 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 4 con fibre di carbonio.....	66
Fig. 4-46 Grafico di $E_3$ nel modello 4 con fibre di carbonio.....	67
Fig. 4-47 Sovrapposizione dei $\nu_{13}$ dei laminati con diverse fibre del modello 4.....	67
Fig. 4-48 Sovrapposizione dei $\nu_{23}$ dei laminati con diverse fibre del modello 4.....	68
Fig. 4-49 Sovrapposizione degli $E_3$ dei laminati con diverse fibre del modello 4.....	68
Fig. 4-50 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 5 con fibre di vetro.....	69
Fig. 4-51 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 5 con fibre di vetro.....	69
Fig. 4-52 Grafico di $E_3$ nel modello 5 con fibre di vetro.....	70
Fig. 4-53 Rappresentazione di $\nu_{13}$ nel modello 5 con fibre di kevlar.....	70
Fig. 4-54 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 5 con fibre di kevlar.....	71
Fig. 4-55 Grafico di $E_3$ nel modello 5 con fibre di kevlar.....	71
Fig. 4-56 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 5 con fibre di carbonio.....	72
Fig. 4-57 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 5 con fibre di carbonio.....	72
Fig. 4-58 Grafico di $E_3$ nel modello 5 con fibre di carbonio.....	73
Fig. 4-59 Sovrapposizione dei $\nu_{13}$ dei laminati con diverse fibre del modello 5.....	73
Fig. 4-60 Sovrapposizione dei $\nu_{23}$ dei laminati con diverse fibre del modello 5.....	74
Fig. 4-61 Sovrapposizione degli $E_3$ dei laminati con diverse fibre del modello 5.....	74

Fig. 4-62 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 6 con fibre di vetro.....	75
Fig. 4-63 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 6 con fibre di vetro.....	75
Fig. 4-64 Grafico di $E_3$ nel modello 6 con fibre di vetro.....	76
Fig. 4-65 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 6 con fibre di kevlar.....	76
Fig. 4-66 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 6 con fibre di kevlar.....	77
Fig. 4-67 Grafico di $E_3$ nel modello 6 con fibre di kevlar.....	77
Fig. 4-68 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 6 con fibre di carbonio.....	78
Fig. 4-69 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 6 con fibre di carbonio.....	78
Fig. 4-70 Grafico di $E_3$ nel modello 6 con fibre di carbonio.....	79
Fig. 4-71 Sovrapposizione dei $\nu_{13}$ dei laminati con diverse fibre del modello 6.....	79
Fig. 4-72 Sovrapposizione dei $\nu_{23}$ dei laminati con diverse fibre del modello 6.....	80
Fig. 4-73 Sovrapposizione degli $E_3$ dei laminati con diverse fibre del modello 6.....	80
Fig. 4-74 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 7 con fibre di vetro.....	81
Fig. 4-75 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 7 con fibre di vetro.....	81
Fig. 4-76 Grafico di $E_3$ nel modello7 con fibre di vetro.....	82
Fig. 4-77 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 7 con fibre di kevlar.....	82
Fig. 4-78 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 7 con fibre di kevlar.....	83
Fig. 4-79 Grafico di $E_3$ nel modello 7 con fibre di kevlar.....	83
Fig. 4-80 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 7 con fibre di carbonio.....	84
Fig. 4-81 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 7 con fibre di carbonio.....	84
Fig. 4-82 Grafico di $E_3$ nel modello7 con fibre di carbonio.....	85
Fig. 4-83 Sovrapposizione dei $\nu_{13}$ dei laminati con diverse fibre del modello 7.....	85
Fig. 4-84 Sovrapposizione dei $\nu_{23}$ dei laminati con diverse fibre del modello 7.....	86
Fig. 4-85 Sovrapposizione degli $E_3$ dei laminati con diverse fibre del modello 7.....	86
Fig. 4-86 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 8 con fibre di vetro.....	87
Fig. 4-87 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 8 con fibre di vetro.....	87
Fig. 4-88 Grafico di $E_3$ nel modello 8 con fibre di vetro.....	88
Fig. 4-89 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 8 con fibre di kevlar.....	88
Fig. 4-90 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 8 con fibre di kevlar.....	89
Fig. 4-91 Grafico di $E_3$ nel modello 8 con fibre di kevlar.....	89
Fig. 4-92 Grafico di $\nu_{13}$ nel modello 8 con fibre di carbonio.....	90
Fig. 4-93 Grafico di $\nu_{23}$ nel modello 8 con fibre di carbonio.....	90
Fig. 4-94 Grafico di $E_3$ nel modello 8 con fibre di carbonio.....	91
Fig. 4-95 Sovrapposizione dei $\nu_{13}$ dei laminati con diverse fibre del modello 8.....	91
Fig. 4-96 Sovrapposizione dei $\nu_{23}$ dei laminati con diverse fibre del modello 8.....	92
Fig. 4-97 Sovrapposizione degli $E_3$ dei laminati con diverse fibre del modello 8.....	92
Fig. 4-98 Confronto dei $\nu_{13}$ dei vari laminati con diverso <i>lay-up</i> ; la fibra considerata è quella di vetro.....	94
Fig. 4-99 Confronto dei $\nu_{13}$ dei vari laminati con diverso <i>lay-up</i> ; la fibra considerata è quella di kevlar.....	94
Fig. 4-100 Confronto dei $\nu_{13}$ dei vari laminati con diverso <i>lay-up</i> ; la fibra considerata è quella di carbonio.....	95
Fig. 4-101 Confronto dei $\nu_{23}$ dei vari laminati con diverso <i>lay-up</i> ; la fibra considerata è quella di vetro.....	95
Fig. 4-102 Confronto dei $\nu_{23}$ dei vari laminati con diverso <i>lay-up</i> ; la fibra considerata è quella di kevlar.....	96
Fig. 4-103 Confronto dei $\nu_{23}$ dei vari laminati con diverso <i>lay-up</i> ; la fibra considerata è quella di carbonio.....	96
Fig. 4-104 Grafico dei $\nu_{13}$ ottenibili utilizzando laminati con fibre di carbonio e kevlar. Viene indicato il valore minimo.....	97

Fig. 4-105 Grafico dei $\nu_{23}$ ottenibili utilizzando laminati con fibre di carbonio e Kevlar. Viene indicato il valore minimo.....	98
Fig. 4-106 Andamento dei $\nu_{13}$ nei modelli $[\pm\alpha/\pm\theta]_s$ con fibre di vetro.....	99
Fig. 4-107 Andamento dei $\nu_{23}$ nei modelli $[\pm\alpha/\pm\theta]_s$ con fibre di vetro.....	99
Fig. 4-108 Andamento dei $\nu_{13}$ nei modelli $[\pm\alpha/\pm\theta]_s$ con fibre di kevlar.....	100
Fig. 4-109 Andamento dei $\nu_{23}$ nei modelli $[\pm\alpha/\pm\theta]_s$ con fibre di kevlar.....	100
Fig. 4-110 Andamento dei $\nu_{13}$ nei modelli $[\pm\alpha/\pm\theta]_s$ con fibre di carbonio.....	101
Fig. 4-111 Andamento dei $\nu_{23}$ nei modelli $[\pm\alpha/\pm\theta]_s$ con fibre di carbonio.....	101
Fig. 4-112 Andamento di $\nu_{13}$ al variare del rapporto tra i moduli elastici, nel piano, della lamina con fibre di vetro nella configurazione $[\pm 20^\circ]_{2s}$ .....	102
Fig. 4-113 Andamento di $\nu_{13}$ al variare del rapporto tra i moduli elastici, nel piano, della lamina con fibre di kevlar nella configurazione $[\pm 20^\circ]_{2s}$ .....	103
Fig. 4-114 Andamento di $\nu_{13}$ al variare del rapporto tra i moduli elastici, nel piano, della lamina con fibre di carbonio nella configurazione $[\pm 20^\circ]_{2s}$ .....	103
Fig. 4-115 Confronto tra gli andamento di $\nu_{13}$ al variare dei rapporto tra i moduli elastici, nel piano, delle lamine con fibre di vetro, Kevlar, carbonio nella configurazione $[\pm 20^\circ]_{2s}$ .....	104
Fig. 5-1 Definizione del carico di buckling per un'asta [44].	105
Fig. 5-2 Buckling di una piastra piana; il valore del carico critico è legato alle dimensioni, al tipo di carico assegnato e ai vincoli della piastra stessa [44].	106
Fig. 5-3 Piastra con i lati lunghi a e b rispettivamente incastrati e appoggiati, soggetta a stato tensionale uniforme biassiale [50].	107
Fig. 5-4. Parametri per il buckling uniassiale di piastre ortotrope [50].	108
Fig. 5-5 Convenzione dei versi positivi delle tensioni risultanti su una piastra [50].	111
Fig. 5-6 Convenzione dei versi positivi dei momenti risultanti su una piastra [50].	111
Fig. 5-7. Piastra con 100x50 elementi con i bordi lunghi incastrati, quelli corti appoggiati e in cui si nota la forza nodale di 1N.	113
Fig. 5-8 Visualizzazione tramite MSC Patran dei valori delle proprietà del laminato. I moduli elastici sono espressi in Pascal; in rosso è evidenziato il fatto che i coefficienti di Poisson lungo lo spessore non vengono considerati e quindi eventuali auxeticità non sono contemplate in questo tipo di modellazione.	114
Fig. 5-9 Visualizzazione tramite MSC Patran dei valori delle proprietà del laminato. I moduli elastici sono espressi in Pascal; si nota come siano calcolati anche i valori dei coefficienti di Poisson lungo lo spessore.	116
Fig. 5-10 Visualizzazione tramite il software MSC Patran dei coefficienti di rigidità. Si evidenziano i termini $D_{ij}$ utilizzati nel calcolo teorico del carico critico di buckling.	117
Fig. 5-11 Rappresentazione, con evidenziato l' <i>EXIT NUMBER</i> , di avvenuta convergenza per il modello tridimensionale con 110x90x8 elementi.	119
Fig. 5-12 Rappresentazione della deformata della piastra nel modello 2D, 440x320 elementi	120
Fig. 5-13 Vista in pianta della parete inferiore della piastra nel modello 2D, 440x320 elementi	120
Fig. 5-14 Rappresentazione della deformata della piastra nel modello 2D, 100x50 elementi	121
Fig. 5-15 Vista in pianta della parte superiore della piastra nel modello 2D, 100x50 elementi	121
Fig. 5-16 Rappresentazione della deformata nella parte superiore della piastra nel modello 3D, 120x100x8 elementi.	122

Fig. 5-17 Rappresentazione della deformata nella parte inferiore della piastra nel modello 3D, 120x100x8 elementi.....	122
Fig. 5-18 Rappresentazione della deformata nella parte superiore della piastra nel modello 3D,110x90x8 elementi.....	123
Fig. 5-19 Rappresentazione della deformata nella parte inferiore della piastra nel modello 3D, 110x90x8 elementi.....	123
Fig. 5-20 Rappresentazione della deformata nella parte superiore della piastra nel modello 3D, 100x80x8 elementi. ....	124
Fig. 5-21 Rappresentazione della deformata della parte superiore della piastra nel modello 3D, 100x90x8 elementi. ....	124

## ELENCO TABELLE

Tab. 2-1 Confronto tra il comportamento di un materiale convenzionale e auxetico soggetto a diversi tipi di carico.....	17
Tab. 2-2 Principali settori e tipi di applicazioni dei materiali auxetici. ....	20
Tab. 3-1 Moduli elastici e coefficienti di Poisson, lungo le tre direzioni principali, di tre laminati con differente disposizione delle lamine. ....	31
Tab. 3-2 Caratteristiche del singolo <i>ply</i> in fibra di carbonio. ....	37
Tab. 4-1 Caratteristiche delle singole lamine utilizzate nella realizzazione dei laminati simmetrici.....	42
Tab. 4-2 Disposizione delle lamine nel laminato. ....	43
Tab. 5-1 Caratteristiche del singolo <i>ply</i> utilizzate nella modellazione 2D.....	114
Tab. 5-2 Caratteristiche del singolo <i>ply</i> utilizzate nella modellazione 3D.....	115
Tab. 5-3 Coefficienti $D_{ij}$ impiegati nel calcolo teorico. ....	117
Tab. 5-4 Geometria delle piastre modellate. ....	117
Tab. 5-5 Tabelle in cui sono riportati i valori del carico critico di buckling, ottenuto dalla simulazione e teorico, per ogni modello analizzato. ....	118



# 1.INTRODUZIONE

## 1.1. Presentazione della tesi

Nella presente tesi si è studiato come si può ottenere un comportamento auxetico, ossia un coefficiente di Poisson negativo, utilizzando dei materiali compositi. In modo particolare sono stati considerati dei laminati, costituiti da differenti fibre e da una matrice epossidica, nei quali una determinata disposizione delle lamine è in grado di garantire un coefficiente di Poisson minore di zero lungo lo spessore. Il vantaggio di avere una tale proprietà si traduce in una maggiore resistenza agli impatti e all'indentazione statica, semplicemente utilizzando dei materiali *off-the-shelf* e che quindi non richiedono complesse tecniche produttive. Si sono infatti presi in considerazione dei *pre-pregs* comunemente utilizzati nell'industria aerospaziale o in settori dove devono essere garantite elevate prestazioni e pesi contenuti.

Non tutte le fibre però garantiscono che il laminato progettato abbia un coefficiente di Poisson negativo, ma solo quelle che dispongono di una maggiore anisotropia: per tale ragione le fibre di carbonio risultano essere più idonee rispetto a quelle di kevlar o di vetro; inoltre realizzare dei laminati ibridi, ossia che prevedono la sovrapposizione di lamine differenti, non consente di aumentare il comportamento auxetico.

Si sono quindi considerati differenti laminati e si è visto, analizzando in ambiente MATLAB, quali siano le configurazioni in grado di garantire un materiale composito con coefficiente di Poisson negativo lungo lo spessore e si è notato come gli accoppiamenti, che si vengono a creare tra i vari strati, non possono essere trascurati. Nella teoria classica dei laminati infatti le deformazioni e le tensioni lungo lo spessore sono trascurate, ma nei problemi tridimensionali e per un'accurata analisi agli elementi finiti, bisogna conoscerle o stimarle con sufficiente accuratezza. Per capire l'importanza delle proprietà lungo lo spessore, e in particolar modo del coefficiente di Poisson, è stata eseguita un'analisi FEM, tramite l'utilizzo dei software MSC Patran, MSC Nastran e MSC Marc Mentat. La simulazione è stata effettuata considerando il problema del buckling di piastre ortotrope, confrontando una simulazione eseguita con elementi bidimensionali con una invece costituita da elementi tridimensionali, confrontando il carico critico di buckling previsto dalle simulazioni stesse con quello invece calcolato teoricamente. Il lavoro nel capitolo 2 descrive brevemente quali siano le principali caratteristiche di un materiale auxetico tradizionale, ossia progettato con una opportuna geometria o con delle tecniche mirate alla trasformazione di schiume o fibre di tipo convenzionale in auxetiche. Vengono messi in evidenza quali siano i principali comportamenti, se sottoposto a determinati carichi, i settori di principale applicazione e i possibili sviluppi futuri.

Successivamente nel capitolo 3 si entra nel dettaglio dei laminati con coefficiente di Poisson negativo lungo lo spessore, mettendo in evidenza come con una sovrapposizione opportuna di lamine anisotrope si riesca a ottenere un effetto normalmente possibile solo utilizzando lunghe e costose tecniche di produzione. Sono inoltre fornite le formule necessarie per il calcolo delle proprietà lungo lo spessore del laminato e un'analisi di sensibilità nel caso dalla letteratura non fossero forniti tutti i parametri necessari.

Nel capitolo 4 sono analizzati nel dettaglio otto modelli di laminati, differenti sia per il tipo di fibra di cui sono costituiti, sia per la disposizione delle lamine e viene messo in risalto, anche con diversi grafici comparativi, quale sia il modo ottimale per ottenere l'effetto auxetico.

Nel capitolo 5 si affronta il problema del buckling di piastre ortotrope, offrendo prima una breve descrizione teorica e passando poi a una modellazione FEM che preveda il confronto tra una modellazione con elementi 2D rispetto a una effettuata con elementi 3D. Seguono poi nel capitolo 6 commenti finali e conclusioni. Nel capitolo 7 si riportano i principali programmi MATLAB sviluppati e i risultati numerici dei grafici ottenuti nel capitolo 4.



## 2. I MATERIALI AUXETICI TRADIZIONALI.

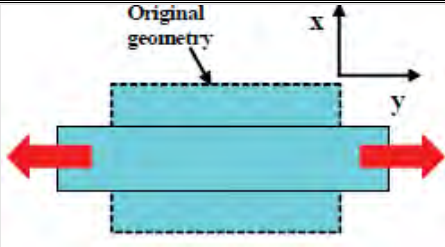
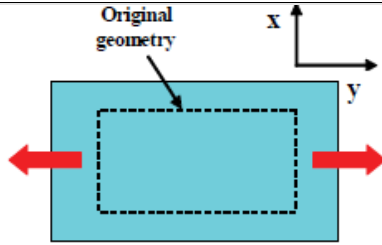
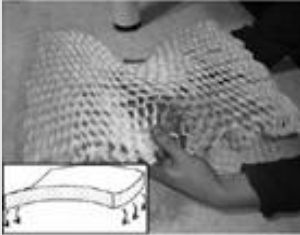
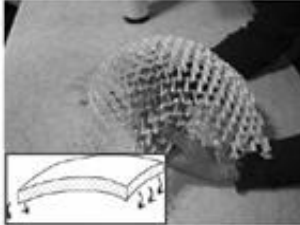
### 2.1. Caratteristiche macroevidenti

Uno studio approfondito dei materiali auxetici, ossia che esibiscono un coefficiente di Poisson  $\nu$  negativo, risale a metà degli anni ottanta, ma una loro descrizione ha avuto inizio già a partire dalla fine della Seconda guerra mondiale [1].

La caratteristica macroevidente di questi materiali, che li rende diversi dalla quasi totalità di quelli che ci circondano, è quella di esibire un'espansione o una contrazione laterale se sottoposti rispettivamente a una trazione o a una compressione longitudinale.

Il termine auxetico deriva dal greco  $\alpha\upsilon\chi\eta\tau\iota\kappa\omicron\varsigma$  (auxeticos) ovvero "che tende a crescere" e fu coniato per la prima volta da Evans e dal suo gruppo di lavoro [2-3-4] durante uno studio per la produzione di polietilene microporoso con coefficiente di Poisson negativo.

Un comportamento inaspettato si verifica comunque non solo in compressione o in trazione, ma anche in flessione dove la curvatura anticlastica è rimpiazzata da una di tipo sinclastico. Tale concetto può essere così descritto: se soggetto a flessione un materiale di tipo convenzionale mostra una deformata di tipo a sella, mentre un materiale con comportamento auxetico tende ad alzarsi nella zona centrale conformandosi adeguatamente alla curvatura.

<p><b>Comportamento convenzionale (carico di trazione)</b></p>	
<p><b>Comportamento auxetico (carico di trazione)</b></p>	
<p><b>Comportamento convenzionale anticlastico (carico flessionale)</b></p>	
<p><b>Comportamento auxetico sinclastico (carico flessionale)</b></p>	

Tab. 2-1 Confronto tra il comportamento di un materiale convenzionale e auxetico soggetto a diversi tipi di carico.

## 2.2. Struttura e meccanismi di deformazione

Per capire come sia possibile che un materiale quando viene “stirato” possa espandere lateralmente risulta utile basarsi su delle rappresentazioni (Fig. 2-1).

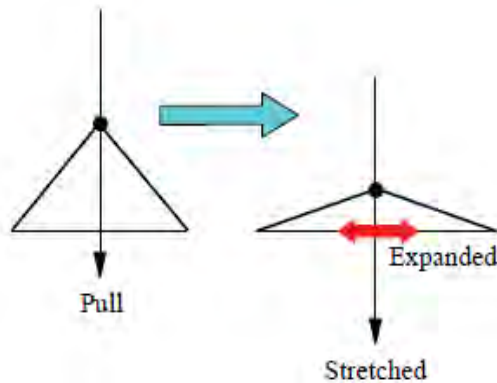


Fig. 2-1 Meccanismo di deformazione in seguito a una forza che tende a “stirare” la struttura.

Quando la forza tira la struttura in una direzione, ad esempio verticalmente, si ha una contemporanea apertura o espansione orizzontale e quindi perpendicolarmente alla direzione del carico.

Il ragionamento può essere esteso a una struttura più complessa (Fig. 2-2), composta da un numero molto elevato di celle fondamentali che obbediscono al seguente meccanismo di deformazione. Un tale materiale può essere pensato come costituito da una serie di *array* regolari connessi per mezzo di fibrille che guidano l'intera deformazione.

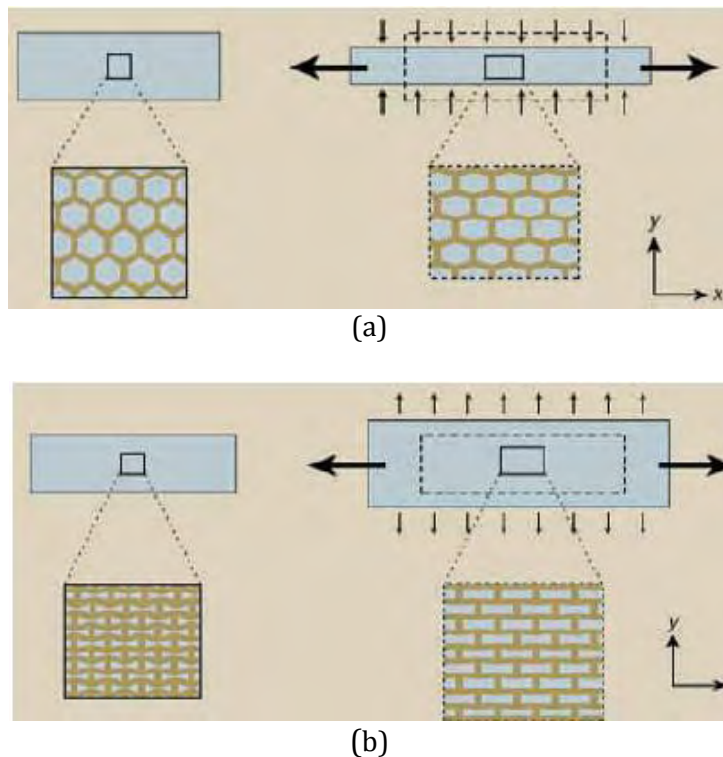
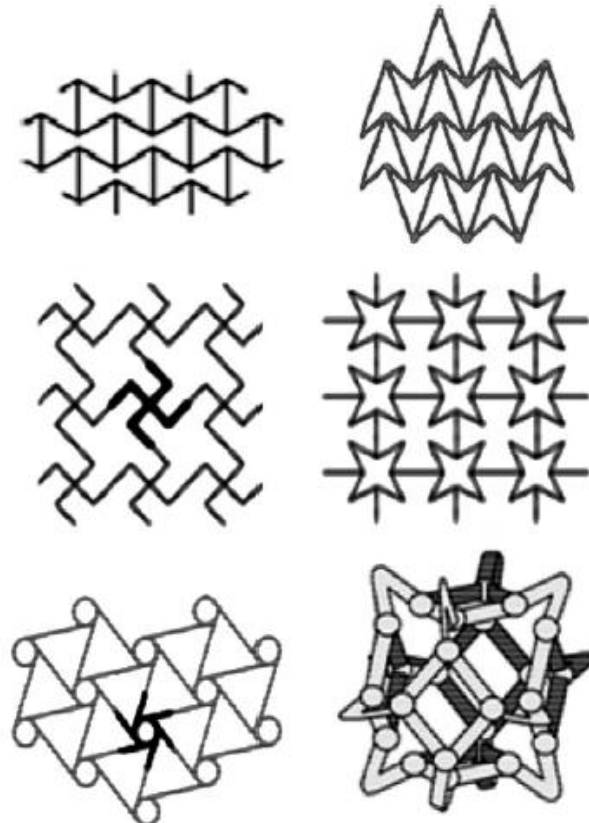


Fig. 2-2 Materiale non auxetico (a) confrontato con un materiale auxetico (b) dove sono identificabili le celle fondamentali [7].

Per una geometria di tipo aperto (Fig. 2-2(a)) le celle si allungano lungo la direzione di applicazione del carico e conseguentemente si contraggono trasversalmente, offrendo quindi al materiale un coefficiente di Poisson positivo. Per una geometria auxetica (Fig. 2-2(b)) invece, all'allungamento delle celle in una direzione ne corrisponde anche uno perpendicolare, dando così nel complesso un comportamento poco intuitivo, quello auxetico per l'appunto, ma oggi giorno sempre più studiato.

La produzione attuale di materiali auxetici riguarda soprattutto schiume, fibre e compositi. A livello molecolare inoltre numerosi polimeri sono stati sinterizzati e un loro impiego è sempre più diffuso. Bisogna però ricordare che non esistono solo materiali auxetici prodotti dall'uomo, ma ne esistono anche di naturali, che non necessitano di nessuna trasformazione per manifestare il loro poco intuitivo ma sorprendente comportamento; ne sono un esempio la grafite pirolitica, alcuni minerali ricchi di silicio come la  $\alpha$ -Cristobalite ( $SiO_2$ ) o la pirite ( $FeS_2$ ), ma questi non trovano applicazioni in quanto non è possibile avere un controllo delle loro proprietà meccaniche e le loro deformazioni avvengono su scala atomica rendendo difficile se non impossibile una replicabilità stabile dei fenomeni.

Le celle elementari che costituiscono la struttura base della maggior parte dei materiali auxetici possono avere diverse forme [5-6-7-8-9-10] delle quali si è in grado, con delle formule trigonometriche, di calcolare la rotazione delle singole pareti di ogni cella in relazione al carico applicato e quindi di avere un'idea di come prevedere più accuratamente il comportamento auxetico complessivo della struttura.



**Fig. 2-3 Esempi di strutture elementari la cui ripetibilità garantisce un comportamento auxetico globale del materiale [5-6-7-8-9-10].**

### 2.3. Principali applicazioni dei materiali auxetici

Date le caratteristiche precedentemente descritte (paragrafi 2.1.-2.2.) i materiali auxetici, spesso citati con l'acronimo *NPR (Negative Poisson's ratio)*, offrono nuove direzioni di ricerca indirizzate a migliorare principalmente le prestazioni meccaniche dei materiali già esistenti. Recenti studi infatti, supportati e finanziati dalla NASA e da Boeing, hanno dimostrato che si ha un generale miglioramento delle proprietà meccaniche come una maggior resistenza al taglio [11-12], all'indentazione [13-14] e un aumento della tenacità [15]; ma non solo: anche le proprietà acustiche e di assorbimento delle vibrazioni migliorano nettamente se si impiegano materiali che esibiscono un coefficiente di Poisson negativo [16-17].

In generale si può quindi dire che le applicazioni più significative si hanno in quei campi dove una o più delle seguenti caratteristiche sono richieste:

- Aumento della rigidità
- Resistenza alle sollecitazioni di taglio
- Minore propagazione delle cricche all'interno del materiale stesso
- Buone proprietà acustiche associate a un efficiente assorbimento delle vibrazioni
- Tenacità e modulo di resilienza elevati

La tabella seguente (Tab. 2-2) riassume quali siano i settori in cui al giorno d'oggi vengono impiegati maggiormente i materiali auxetici [18].

<b>Campo di applicazione</b>	<b>Tipo di applicazione</b>
Aerospaziale	Protezioni termiche, assorbitori di suono e vibrazioni, rivetti, palette per motori a turbina, estremità fusoliere aerei, profili alari.
Automotive	Paraurti, cuscinetti, dispositivi di fissaggio, componenti con elevata resistenza a sforzi di taglio.
Biomedico	<i>STENT</i> , bende, <i>TR-BAND</i> , pelle artificiale, protesi.
Industria tessile	Fibre, tessuti, stoffe.
Materiali compositi	Fibre, matrici.
Militare (difesa)	Giubbetti antiproiettile, elmetti, rivestimenti ad alto assorbimento di energia.
Sensoristica	Idrofoni, dispositivi piezoelettrici, sensori di vario genere (il basso modulo di comprimibilità $K$ li rende più sensibili alla pressione idrostatica).

**Tab. 2-2 Principali settori e tipi di applicazioni dei materiali auxetici.**

Un'applicazione recente, e che merita di essere approfondita, deriva dal fatto che si è riusciti ad ottenere delle fibre auxetiche [19] che si prestano molto bene ad un accoppiamento con una matrice, non necessariamente auxetica ma anche di tipo tradizionale, per poter così realizzare un materiale composito. Questo accoppiamento fa sì che il lavoro di *pull-out* della fibra sia molto maggiore, riuscendo così a rendere l'interfaccia con la matrice più resistente; l'effetto può essere così descritto: nel momento in cui la fibra viene tirata tende ad espandersi perpendicolarmente alla direzione di applicazione del carico, andando così a bloccarsi nella matrice e conseguentemente aumenta la forza necessaria per estrarla.

Dei test sono stati condotti utilizzando una macchina da trazione Instron 4200, dotata di celle di carico da 100N, su dei provini di dimensioni 10x50x2mm con delle fibre auxetiche e non al loro interno. I provini sono stati poi rotti usando dell'azoto liquido e i frammenti sono stati esaminati al microscopio. È stata quindi registrata la curva spostamento-forza necessaria a far sì che la fibra fosse uscita dalla matrice e si è riscontrato che l'energia necessaria per avere il *pull-out* della fibra auxetica è pari a 8.3mJ, di quasi tre volte superiore ai 2.5mJ di una fibra convenzionale.

### **2.3.1. Settore militare: materiali protettivi**

Il settore militare è in prima fila per l'utilizzo dei materiali auxetici e in particolare per quanto riguarda indumenti e armature a protezione degli organi vitali.

I materiali protettivi più impiegati, come ad esempio giubbotti antiproiettile, necessitano di alcuni centimetri di spessore e quindi sono in generale pesanti e poco flessibili.

Realizzando una protezione in materiale auxetico si è in grado di garantire una buona protezione unita a un minor ingombro e a una maggiore leggerezza.

Il fatto inoltre che sottoposti a flessione questi materiali manifestano una deformazione sinclastica (paragrafo 2.1.) garantisce un maggior comfort al personale militare.

Date le loro maggiori proprietà di assorbimento degli urti rispetto a un materiale tradizionale [20], si trova un loro impiego anche come rivestimento di elmetti: in seguito infatti a un impatto localizzato il materiale sarebbe in grado di fluire da zone limitrofe a quella colpita, prevenendo così lesioni alla scatola cranica.

Nel settore del trasporto aereo inoltre è sempre più largamente utilizzato un materiale auxetico costituito da un *honeycomb*, con uno spessore del *core* pari a 75mm, in grado di dissipare un'enorme quantità di energia e di diminuire le accelerazioni in seguito a contatti del carico trasportato con la fusoliera o con altri oggetti.

### **2.3.2. Dispositivi di fissaggio e rivetti**

Ricordando che una delle principali caratteristiche dei materiali che esibiscono un coefficiente di Poisson negativo è quella di espandersi lateralmente se sottoposti a una trazione assiale (paragrafo 2.1.) una loro ideale applicazione si ha nei dispositivi di fissaggio. L'inserimento di tali dispositivi sarebbe infatti facilitato dalla contrazione laterale che si ha in seguito alla compressione, mentre una eventuale rimozione sarebbe ostacolata garantendo una maggiore aderenza al foro. È stato infatti constatato [21] che durante l'inserimento, la curva spostamento-carico che ne deriva presenta un tratto ascendente iniziale ma poi la pendenza tende a diminuire gradatamente fino a che il dispositivo non è completamente inserito. Durante la rimozione invece si nota un significativo aumento della resistenza a tale tipologia di carico e ciò è testimoniato dal fatto che, la stessa curva presenti un elevato coefficiente angolare e quindi per realizzare un piccolo spostamento la forza necessaria deve essere molto elevata.

### 2.3.3. Strutture

Le proprietà meccaniche degli *honeycomb* auxetici sono molto sensibili ai parametri geometrici delle celle fondamentali della loro microstruttura [22]. Questa caratteristica, se pienamente compresa e tradotta in formule matematiche, potrebbe essere impiegata per la progettazione di nuove strutture *sandwich*; un *honeycomb* costituito da celle esagonali regolari ad esempio non è impiegabile dove è richiesto un assorbimento efficiente delle onde di pressione. Selezionando però accuratamente una combinazione di proprietà microstrutturali, ottenute variando la disposizione delle celle stesse, si ha come effetto una diminuzione della dispersione con conseguente aumento del segnale ricevuto.

### 2.3.4. Limitazioni

Le potenziali e reali applicazioni dei materiali auxetici sono in rapido aumento [23], ma una loro diffusione sembra a volte ostacolata dal fatto che questo sia un nuovo settore di ricerca e i fenomeni non sempre sia ben chiari o comunque non sempre descrivibili con delle formule matematiche di facile utilizzo.

I costi di produzione sono inoltre molto alti (paragrafo 3.2.) e si preferisce quindi utilizzare dei materiali tradizionali seppur di prestazioni inferiori. Una possibile soluzione a questo problema, di cui se ne parlerà diffusamente nella presente tesi, è quella di impiegare materiali *off-the-shelf*, come ad esempio dei *pre-pregs* in fibra di carbonio e matrice epossidica, e per mezzo di una determinata disposizione delle lamine garantire le prestazioni auxetiche nella direzione di interesse.

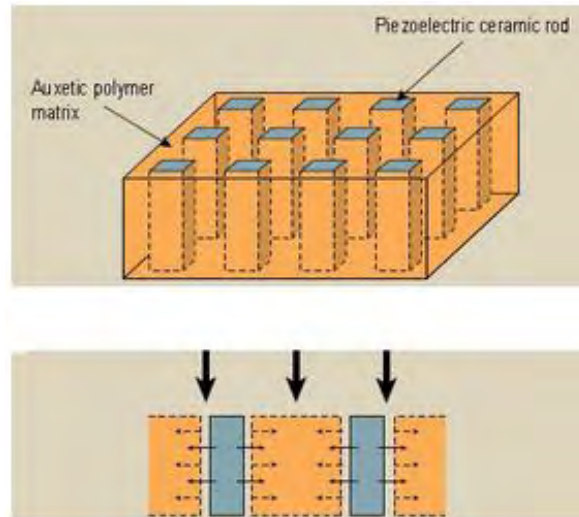
Un'altra limitazione è dovuta al fatto che un materiale per manifestare un comportamento auxetico richiede una porosità diffusa in quanto i meccanismi di deformazione molecolare necessitano di spazio, tra una unità elementare e l'altra, per avvenire. Questo fa sì che quindi sia complessivamente meno rigido rispetto al materiale omogeneo equivalente e quindi non si presti bene a essere impiegato come supporto meccanico.

### 2.3.4. Sviluppi futuri

Un trasduttore piezoelettrico è in grado di convertire una tensione meccanica in un segnale elettrico e viceversa. Esso consiste principalmente in delle barre piezoelettriche ceramiche immerse in una matrice polimerica che influisce in maniera sostanziale sulle caratteristiche del dispositivo. Questo è quello che oggi viene utilizzato, ma studi condotti da Wallace Smith del Dipartimento di Ricerca Navale americano [24] evidenziano come la sensibilità di un ricevitore sonar possa essere aumentata di un ordine di grandezza rimpiazzando la matrice polimerica con una di tipo auxetico (Fig. 2-4).

Questo quindi permetterebbe di aumentare la potenza del segnale ricevuto/trasmesso e di ridurre conseguentemente le dimensioni e pesi di antenne.

Sempre più frequentemente inoltre si "annegano" all'interno di strutture dei sensori in grado di determinare l'avanzamento di una eventuale cricca; con questi nuovi materiali si potrebbe quindi prevedere con più facilità e in largo anticipo l'avanzamento del danneggiamento e quindi procedere con la sostituzione o la riparazione del pezzo.



**Fig. 2-4 Rappresentazione di un sensore piezoelettrico in cui la matrice polimerica tradizionale viene sostituita da una di tipo auxetico.**

Per un concreto sviluppo futuro sono comunque necessarie delle simulazioni FEM che poi siano verificate mediante dei test sperimentali in laboratorio.

Particolarmente importante risulta essere inoltre la necessità di collaborare con i ricercatori del settore tessile, chimico e biologico evidenziando come un'applicabilità efficace dei materiali auxetici coinvolga numerose discipline e non solo l'ambito ingegneristico.

### 3. I LAMINATI COMPOSITI CON COEFFICIENTE DI POISSON NEGATIVO LUNGO LO SPESSORE.

#### 3.1. I coefficienti della meccanica del continuo: il coefficiente di Poisson

Avendo visto nel capitolo 2 come i materiali auxetici presentino un coefficiente di Poisson negativo, risulta indispensabile entrare nel dettaglio dando delle definizioni e delle correlazioni con gli altri coefficienti utilizzati nella meccanica del continuo.

Il coefficiente di Poisson  $\nu$  è così chiamato perché fu introdotto da Simeon Dennis Poisson (1787-1840), un matematico francese che lo definì come il rapporto tra la deformazione trasversale  $\varepsilon_t$  e la deformazione longitudinale  $\varepsilon_l$  rispetto alla direzione della forza applicata:

$$\nu_{lt} = - \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} \quad (3.1)$$

Ricordando che una deformazione di trazione è considerata positiva, mentre una di compressione negativa, la maggior parte dei materiali presenta un coefficiente di Poisson positivo.

L'anomalo comportamento dei materiali auxetici fa sì invece che il loro coefficiente di Poisson risulti negativo.

Dal punto di vista microstrutturale la ragione dell'usuale coefficiente di Poisson positivo è dovuta al fatto che i legami interatomici si allineano alla direzione di deformazione; per consentire ciò il sistema tende a mantenere la sua densità e questo si traduce in una contrazione laterale rispetto alla direzione del carico.

La correlazione tra il coefficiente di Poisson e la densità è ben nota: per i materiali atomicamente molto densi, come ad esempio l'oro, il coefficiente tende al limite isotropico superiore di 0.5 mentre i metalli cristallini che sono dal punto di vista atomico meno densi, come ad esempio l'acciaio, hanno un coefficiente di circa 0.3.

Per paragonare le comuni strutture cristalline cubico a facce centrate (*fcc*), esagonale compatto (*hcp*), cubico a corpo centrato (*bcc*) e diamante (*d*), il loro coefficiente di Poisson si trova nella seguente sequenza:

$$\nu_{fcc,hcp} \geq \nu_{bcc} \geq \nu_d \quad (3.2)$$

Per la stessa ragione materiali ceramici, vetro e semiconduttori esibiscono un  $\nu$  che va da 0.25 a 0.42.

I materiali comunemente usati in ingegneria hanno un modulo di taglio  $G$  più basso rispetto al modulo di comprimibilità  $K$ . Cambiando la loro microstruttura in modo tale che  $\nu$  sia più basso, i valori di  $K$  e  $G$  possono essere alterati, se il modulo elastico  $E$  è mantenuto costante. Quando infatti  $\nu$  tende a zero o a valori negativi questo si traduce in un contemporaneo aumento del modulo di taglio rispetto a quello di comprimibilità.

Le relazioni tra  $E$ ,  $G$  e  $K$  sono:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.3)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (3.4)$$



Combinando le equazione (3.3) e la (3.4) si arriva a :

$$\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} = \frac{3K}{2G} \quad (3.5)$$

Solitamente i valori di  $K$  sono maggiori di quelli di  $G$  e si può concludere che:

$$\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \geq \frac{3}{2} \quad (3.6)$$

Questo fa in modo che solitamente per un materiale convenzionale  $\nu$  sia  $\geq 1/8$  mentre, per avere un valore negativo, il modulo di comprimibilità deve essere minore di quello di taglio. L'equazione (3.5) può essere anche espressa come:

$$2G(1+\nu) = 3K(1-2\nu) \quad (3.7)$$

oppure:

$$\nu = \frac{(3K - 2G)}{(2G + 6K)} \quad (3.8)$$

Si può anche prevedere un approccio di tipo dinamico e un'altra espressione del coefficiente di Poisson è data per mezzo della velocità del suono:

$$\nu_d = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{v_t}{v_l} \right)^2 - 1}{\left( \frac{v_t}{v_l} \right)^2 - 1} \quad (3.9)$$

dove  $v_t$  è la velocità trasversale o la velocità di taglio dell'onda di pressione,  $v_l$  è la velocità longitudinale e  $\nu_d$  è il coefficiente di Poisson dinamico.

Per esempio un liquido con una velocità trasversale di  $v_t = 0$  avrebbe un  $\nu_d = 0.5$ , in accordo con l'equazione (3.9).

Un ulteriore definizione può essere data usando il concetto di lunghezza dell'onda di Rayleigh. Il rapporto ( $\alpha$ ) tra la velocità di Rayleigh dell'onda ( $V_g$ ) rispetto alla velocità di taglio dell'onda stessa ( $V_t$ ) dipende solo dal valore del coefficiente di Poisson del mezzo e può essere trovato prendendo la parte reale e positiva delle radici della seguente equazione:

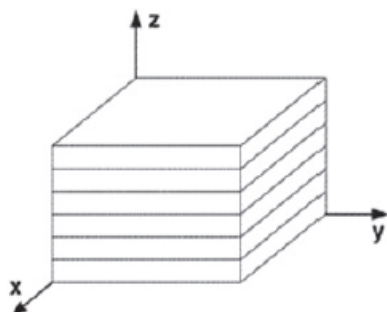
$$\alpha^6 - 8\alpha^4 + 8 \left( \frac{2-\nu_d}{1-\nu_d} \right) \alpha^2 - \frac{8}{(1-\nu_d)} = 0 \quad (3.10)$$

Questo concetto impedisce ancora una volta però a  $\nu_d$  di essere di essere negativo.

Sia per i materiali isotropi che per quelli ortotropi si ha inoltre la necessità di definire non solo un unico coefficiente di Poisson, ma bisogna considerare tutte e tre le direzioni principali (Fig. 3.1-3.2) [25].

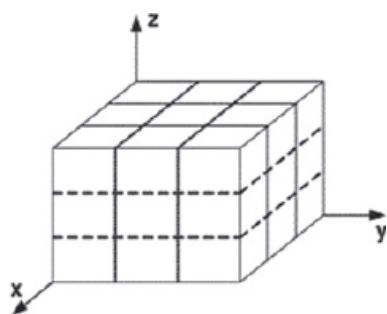
Si deve ricordare che vi sono comunque delle limitazioni energetiche che non consentono ad un materiale, soggetto ad esempio ad una forza longitudinale, di espandersi o restringersi lateralmente oltre un certo limite.

Nonostante ciò ricercatori ed ingegneri hanno ritrovato in questo coefficiente un campo di studio molto interessante, la cui comprensione rende possibile la creazione di nuovi materiali, tra cui gli auxetici, e da questi la conseguente applicazione in diversi settori e in modo particolare quello aerospaziale, medico, sportivo e dove in generale sono richieste prestazioni elevate e pesi contenuti.



Tensioni non nulle	Moduli elastici	Coefficienti di Poisson
$\sigma_x$	$E_1 = \sigma_x / \varepsilon_x$	$\nu_1 = -\varepsilon_y / \varepsilon_x ; \nu_3 = -\varepsilon_z / \varepsilon_x$
$\sigma_y$	$E_1 = \sigma_y / \varepsilon_y$	$\nu_1 = -\varepsilon_x / \varepsilon_y ; \nu_3 = -\varepsilon_z / \varepsilon_y$
$\sigma_z$	$E_2 = \sigma_z / \varepsilon_z$	$\nu_2 = -\varepsilon_x / \varepsilon_z = -\varepsilon_y / \varepsilon_z$
$\tau_{xy}$	$G_1 = \tau_{xy} / (2\varepsilon_{xy})$	.
$\tau_{yz}$	$G_2 = \tau_{yz} / (2\varepsilon_{yz})$	.
$\tau_{zx}$	$G_2 = \tau_{zx} / (2\varepsilon_{zx})$	.

Fig. 3-1 Definizione dei moduli elastici e dei coefficienti di Poisson per un materiale costituito da lamine isotrope uguali [25].



Tensioni non nulle	Moduli elastici	Coefficienti di Poisson
$\sigma_x$	$E_x = \sigma_x / \varepsilon_x$	$\nu_{xy} = -\varepsilon_y / \varepsilon_x ; \nu_{xz} = -\varepsilon_z / \varepsilon_x$
$\sigma_y$	$E_y = \sigma_y / \varepsilon_y$	$\nu_{yz} = -\varepsilon_z / \varepsilon_y ; \nu_{yx} = -\varepsilon_x / \varepsilon_y$
$\sigma_z$	$E_z = \sigma_z / \varepsilon_z$	$\nu_{zx} = -\varepsilon_x / \varepsilon_z ; \nu_{zy} = -\varepsilon_y / \varepsilon_z$
$\tau_{xy}$	$G_{xy} = \tau_{xy} / (2\varepsilon_{xy})$	.
$\tau_{yz}$	$G_{yx} = \tau_{yz} / (2\varepsilon_{yz})$	.
$\tau_{zx}$	$G_{zx} = \tau_{zx} / (2\varepsilon_{zx})$	.

Fig. 3-2 Definizione dei moduli elastici e dei coefficienti di Poisson per un materiale ortotropo [25].

### 3.2. La produzione di schiume polimeriche e fibre auxetiche

La produzione di schiume e fibre auxetiche risulta spesso difficile e costosa in quanto sono numerosi i parametri che bisogna controllare ai fini di ottenere dei materiali con coefficiente di Poisson sufficientemente negativo.

A seconda del tipo di schiuma auxetica che si vuole ottenere esistono diverse procedure di fabbricazione. Per quando riguarda le schiume polimeriche termoplastiche il metodo oggi più impiegato consiste in quattro fasi:

- Compressione
- Riscaldamento
- Raffreddamento
- Rilassamento

Per trasformare una schiuma convenzionale in una auxetica usando questa tecnica è richiesto che sia compressa uniformemente, forzando così le pareti delle celle ad andare in buckling. Entrando più nel dettaglio, si riportano i passaggi fondamentali per ottenere un provino polimerico auxetico [26].

- Preriscaldamento dello stampo, opportunamente scelto, fino a 170°C
- Lubrificazione opportuna con olio vegetale, evitando l'uso di un lubrificante derivato dal petrolio
- Riempimento dello stampo con la schiuma e applicazione di una depressione per il livellamento dei corrugamenti
- Compressione controllata in velocità
- Sistemazione in un forno in cui si lascia la schiuma per un tempo che si aggira intorno ai 17-18 minuti
- Rimozione e raffreddamento completo del provino e applicazione di opportuni carichi lungo le tre direzioni principali

La densità della schiuma di partenza deve essere inoltre particolarmente bassa (anche fino a 0.043g/cm<sup>3</sup>) in quanto se la frazione di volume di solido è elevata non si permetterebbe alla struttura, in fase di compressione, di raggiungere una deformazione permanente.

Questo permette di capire che polimeri formati da celle chiuse risultano essere più difficili da rendere auxetici.

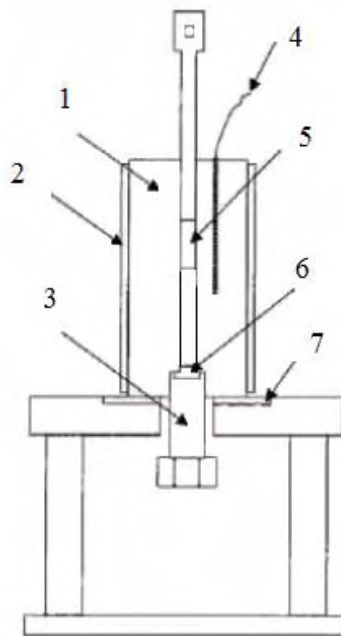
Si riescono inoltre convertire anche schiume metalliche, mediante una procedura che prevede successivi piccoli incrementi di deformazione plastica nelle tre direzioni principali del materiale di partenza, ma il tutto risulta essere più complesso in quanto i carichi devono essere applicati in opportune direzioni e ad ogni *step* si deve avere un preciso valore di deformazione percentuale rispetto all'intero volume di materiale.

I macchinari (Fig. 3-3) utilizzati per la produzione di fibre auxetiche risultano essere invece ancora più complessi e i passaggi principali possono così essere riassunti [27-28-29]:

- Riscaldamento del dispositivo fino a una temperatura di 80°C
- Inserimento della polvere di polipropilene nel serbatoio; la dimensione media delle particelle deve essere dai 50 ai 300µm
- Applicazione di una pressione alla velocità controllata di 20mm/min

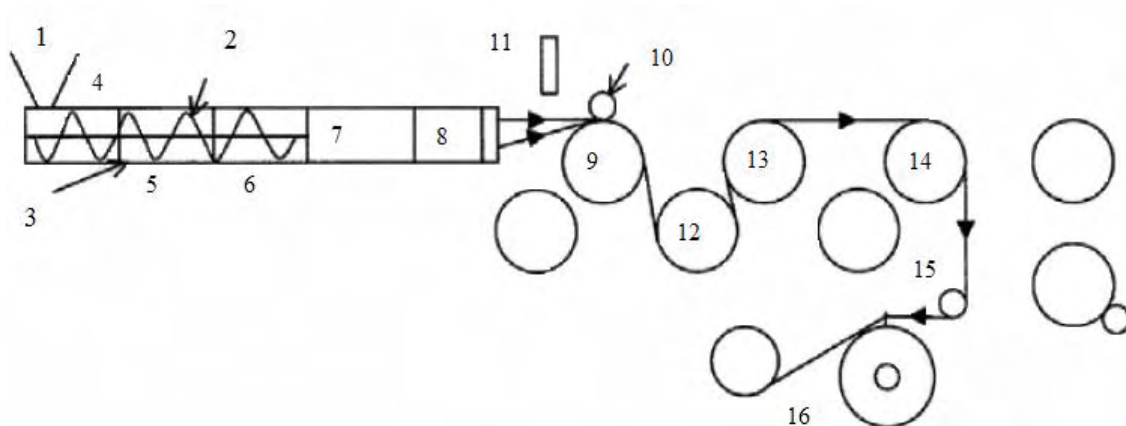
- Mantenimento della pressione a 20MPa per una ventina di minuti
- Rimozione del dispositivo di compattazione dal serbatoio e raffreddamento con aria
- Riscaldamento del tutto, compreso l'estrusore, fino a una temperatura di 159°C
- Reinsediamento del materiale compattato nel serbatoio
- Sinterizzazione per 20 minuti
- Estrusione immediata alla velocità di 500mm/min e alla temperatura costante di 159°C  
Tipica geometria dello stampo: diametro di ingresso di 9mm, semiangolo del *core* interno di 30° e lunghezza capillare di 3.4mm

Seguendo quanto riportato, si è in grado di produrre una fibra auxetica di diametro inferiore al mm e avente coefficiente di Poisson pari a -0.22.



**Fig. 3-3 Schematica rappresentazione di un dispositivo impiegato per la produzione di fibre di polipropilene auxetiche; 1: Serbatoio; 2: Riscaldatore; 3: Bullone di sicurezza dello stampo; 4: Termocoppia; 5: Stantuffo in acciaio con estremità di ottone; 6: Stampo per tranciatura; 7: Piastra isolante [27-28-29].**

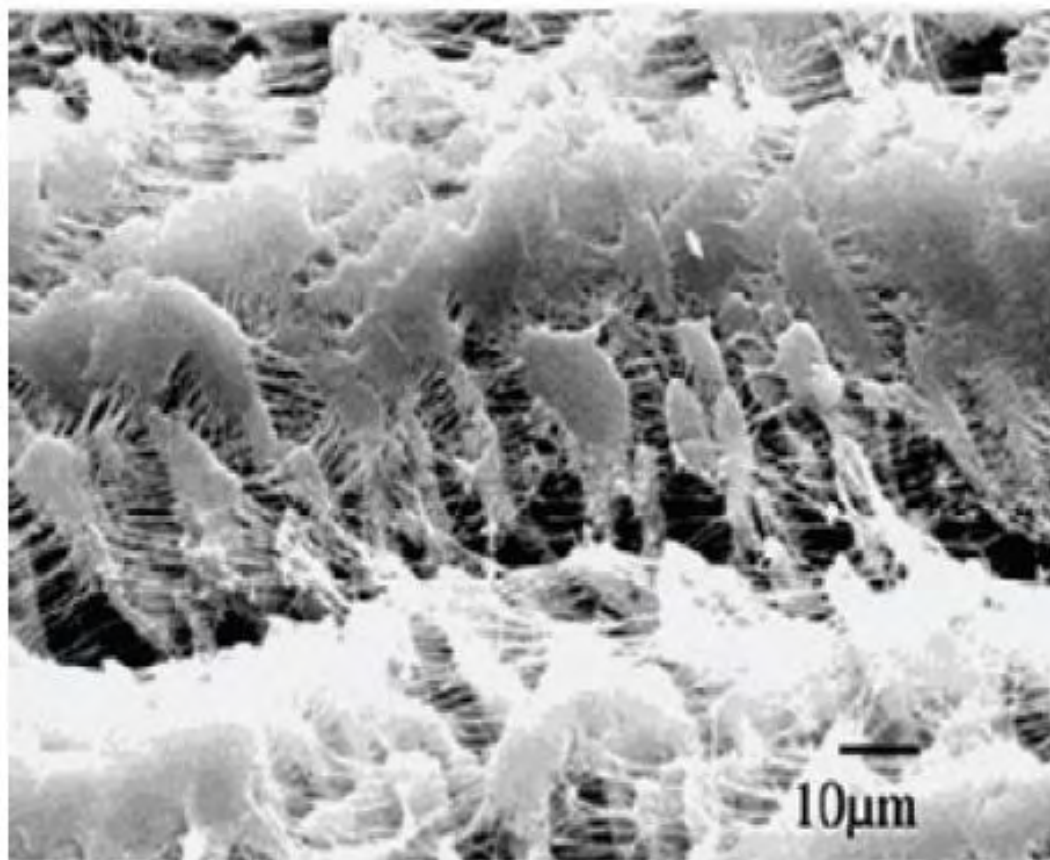
Mediante un processo continuativo (Fig. 3-4) si è in grado invece di produrre una fibra dal diametro di soli 280µm, mettendo in risalto come per ottenere un comportamento auxetico sia necessario partire da un opportuna geometria e applicare dei ben precisi meccanismi di deformazione del materiale.



**Fig. 3-4** Schematica rappresentazione di un estrusore a fusione usato per produrre fibre di polipropilene auxetiche in modo continuativo; 1: Magazzino di alimentazione del polimero; 2: Guida a spirale; 3: Serbatoio; 4: Zona di alimentazione; 5: Zona di compressione; 6: Zona di dosatura; 7: Zona di miscelamento e prestampaggio; 8: Zona di stampaggio; 9: Cilindro di raffreddamento; 10: Cilindro di assottigliamento; 11: Tranciatura con aria; 12, 13, 14, 15: Cilindri di guida; 16: Zona di avvolgimento [27-28-29].

Per quanto riguarda i polimeri microporosi, come ad esempio il politetrafluoroetilene (PTFE), la tecnica di produzione si basa principalmente su tre passaggi che consistono nella compattazione, sinterizzazione ed estrusione della polvere polimerica.

In questo modo si riesce a creare un materiale con coefficiente di Poisson negativo grazie anche al fatto che la microstruttura consiste di una “rete” di interconnessioni di particelle e fibrille delle dimensioni dell’ordine della decina di micrometri (Fig. 3-5).



**Fig. 3-5** Scansione al microscopio elettronico (SEM) della microstruttura del politetrafluoroetilene (PTFE) espanso [27].

Come si può notare da quanto descritto, i tempi e i costi per la produzione sia di fibre che di matrici auxetiche rappresentano un problema che ostacola la diffusione di questi materiali, nonostante i loro potenziali vantaggi, rispetto ai materiali tradizionalmente usati in ambito ingegneristico.

Numerosi gruppi di lavoro hanno quindi cercato di capire se fosse possibile l'ottenimento del comportamento auxetico almeno lungo certe direzioni o comunque utilizzando dei materiali già esistenti.

I materiali compositi rappresentano, in questo senso, un punto di partenza e si è visto come mediante un opportuno *lay-up* di lamine tradizionali sia possibile ottenere, nella direzione dello spessore un effetto auxetico con conseguenti miglioramenti delle proprietà meccaniche del laminato.

I capitoli successivi entrano nel merito del seguente argomento analizzando quali siano le disposizioni delle lamine e tipo di fibre più idonee per l'ottenimento di un coefficiente di Poisson negativo lungo lo spessore.

### **3.3. Opportuna scelta del *lay-up* delle lamine: esempi di laminati compositi con coefficiente di Poisson negativo lungo lo spessore**

L'utilizzo di laminati compositi tradizionali è molto diffuso in settori ingegneristici dove sono richieste elevate tenacità e rigidità specifiche.

Un problema da non sottovalutare è dovuto al fatto che, soggetti a particolari condizioni di carico, possono essere facilmente delaminati o in caso di impatti non previsti la loro capacità di assorbire energia possa essere notevolmente ridotta.

L'idea quindi di progettare dei laminati con una maggiore resistenza all'indentazione [30], all'impatto [31] e con una maggiore tenacità [32], risulta essere una importante area di ricerca.

Una classe di materiali che può offrire delle importanti soluzioni a questi problemi è rappresentata proprio dai materiali auxetici dove si è potuto prevedere che alcune proprietà meccaniche siano migliorate.

Come analizzato (paragrafo 3.2.) un'ampia classe di materiali sintetici auxetici, fibre o matrici, può essere prodotta, ma spesso vengono richiesti dei *post-processing*, come nel caso della trasformazione di schiume polimeriche tradizionali, o il raggiungimento di temperature vicine a quelle di fusione dei polimeri, come nella produzione delle fibre.

Nonostante ciò si possono progettare dei materiali auxetici utilizzando componenti già disponibili, *off-the-shelf*, e tecniche di produzione già collaudate, come la combinazione del sacco a vuoto e dell'autoclave impiegata per la realizzazione dei materiali compositi più performanti [33].

La progettazione di un laminato composito auxetico, tramite l'utilizzo di materiali che non manifestano tale comportamento, richiede due caratteristiche fondamentali:

- Una particolare sequenza del posizionamento delle lamine
- Il materiale di cui è costituito il singolo *ply* sia fortemente anisotropo

Per quest'ultima ragione la maggior parte dei lavori di ricerca [34] si è concentrata su delle lamine in fibra di carbonio che, rispetto a quelle di vetro e kevlar ad esempio, presentano una più marcata anisotropia, ossia il modulo elastico lungo la direzione delle fibre,  $E_1$ , risulta essere molto diverso rispetto a quello in direzione ortogonale alle fibre,  $E_2$ .

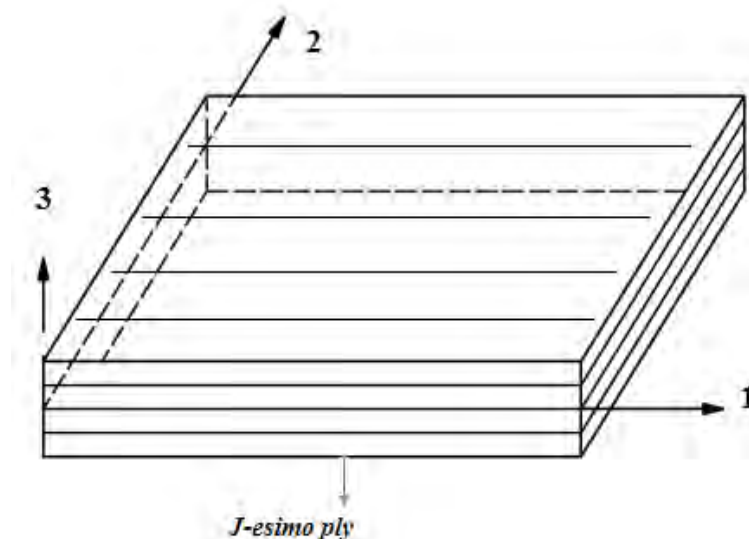


Fig. 3-6 Sistema di riferimento di un laminato composito in cui ogni *ply* ha una specifica orientazione.

Le fibre di carbonio risultano quindi essere le più adatte a raggiungere un coefficiente di Poisson negativo lungo lo spessore del laminato,  $\nu_{13} < 0$ .

Progettando dei laminati con questa caratteristica si è visto come la tenacità, la resistenza all'indentazione e alle basse velocità d'impatto risulti essere aumentata rispetto a dei laminati con lo stesso modulo elastico lungo lo spessore,  $E_3$ , ma tali per cui  $\nu_{13}$  sia positivo.

### 3.3.1. Resistenza all' indentazione statica e agli impatti

Per capire il vantaggio di avere dei laminati auxetici lo studio più approfondito è stato svolto da K. L. Alderson e V. L. Coenen [35], i quali hanno considerato tre laminati con le seguenti caratteristiche:

<i>Lay-up</i> [°]	$E_1$ [GPa]	$E_2$ [GPa]	$E_3$ [GPa]	$\nu_{13}$
$[0/-45/5/40]_{3s}$	7.53e+1	2.01e+1	9.6	0.086
$[\pm 30]_{6s}$	4.96e+1	1.19e+1	9.5	- 0.156
$[35/-20/25/40/-85/40/25/-45/35/-15/25/40]_{2s}$	4.98e+1	2.50e+1	9.6	0.187

Tab. 3-1 Moduli elastici e coefficienti di Poisson, lungo le tre direzioni principali, di tre laminati con differente disposizione delle lamine.

Vi sono quindi 24 lamine per ogni laminato. I provini impiegati sono costituiti da dei *pre-pregs* unidirezionali epossidici in fibra di carbonio, IM7/5882, di dimensioni 80x80x3mm.

Per produrli si è utilizzata la tecnica del sacco a vuoto in cui è stata applicata una pressione di 0.8bar per 12 ore; successivamente sono stati inseriti in un forno, in cui la temperatura è stata aumentata di 2-3°C/min fino a 180°C, per circa due ore. Il forno è stato poi lentamente raffreddato, la pressione rimossa e il sacco aperto.

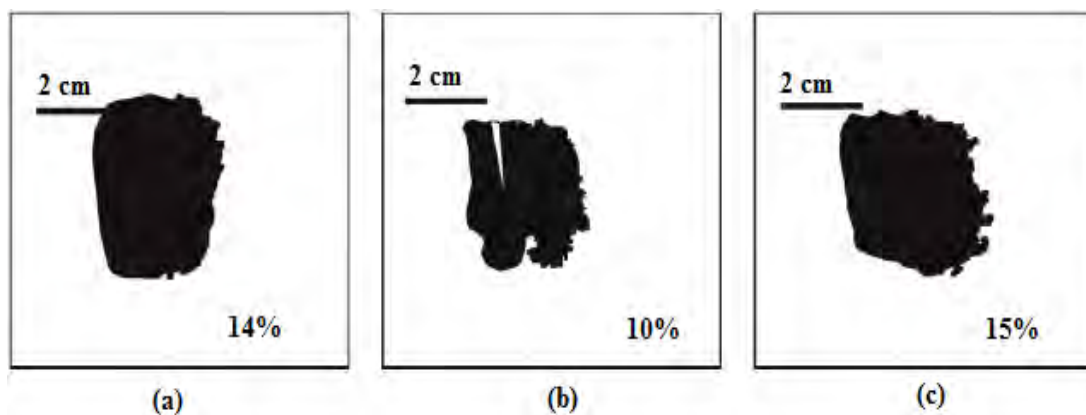
In questo modo indesiderate presenze di bolle d'aria tra un *ply* e il successivo sono state eliminate, garantendo una buona adesione tra le lamine.

Il test è stato eseguito mediante l'apparecchiatura *DARTEC UNIVERSAL HYDRAULIC TESTING*, settata in compressione e dotata di un indentatore semisferico di 12.7mm di diametro, in cui il carico è stato applicato direttamente nel centro del provino a una velocità di 2mm/min fino a una profondità di 5mm.

Riportando una curva sforzo-deformazione si è visto come al momento del *failure*, ossia nell'istante di rottura, il laminato auxetico presentava un carico maggiore se confrontato con quello degli altri due laminati non auxetici, evidenziando il fatto che è in grado di assorbire una maggiore quantità di energia.

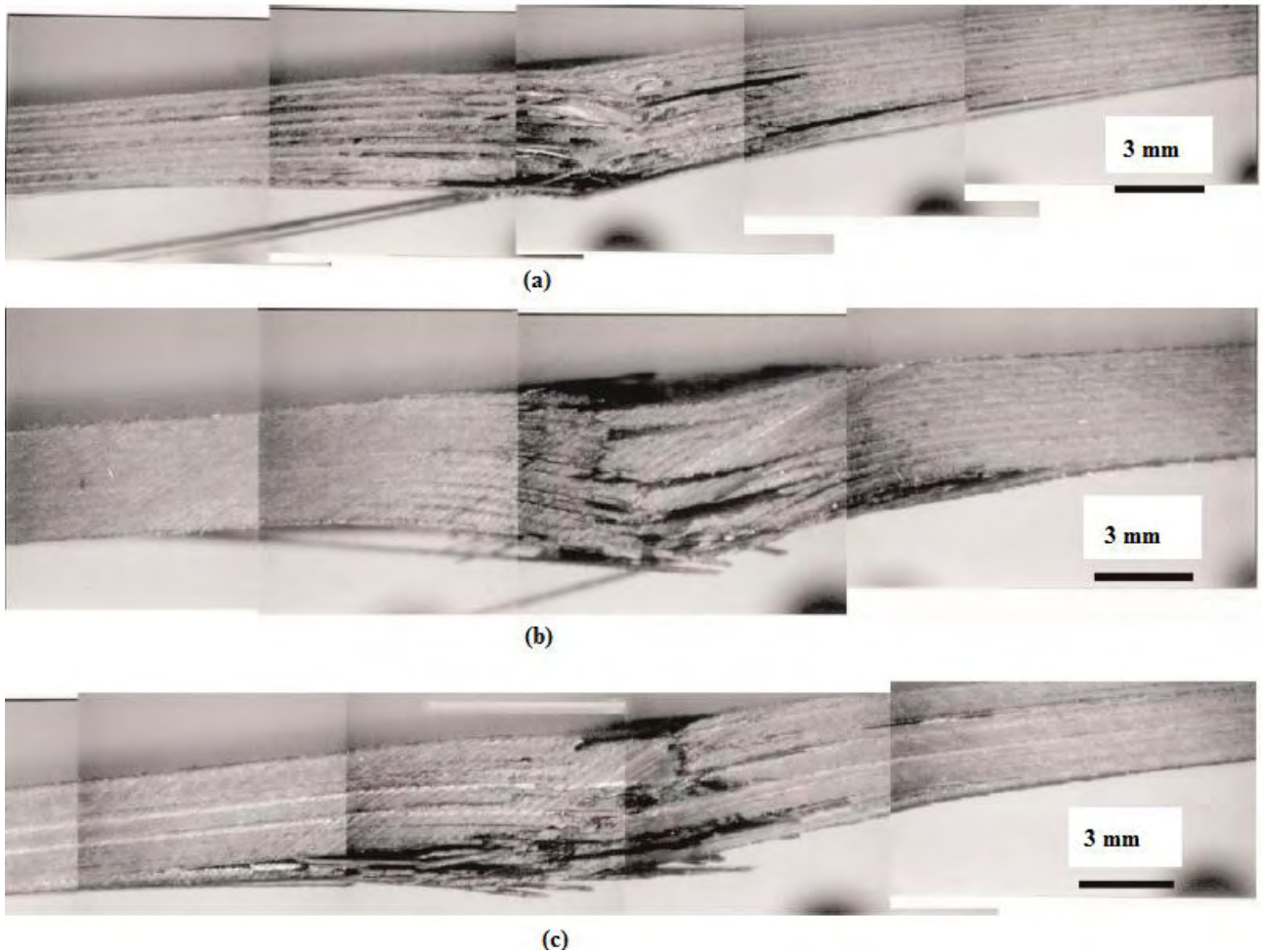
Analizzando i provini dopo la prova si è inoltre potuto constatare che:

- Il laminato con  $\nu_{13} = 0.086$  era interessato da diverse delaminazioni lungo lo spessore e l'estensione visibile del danno era molto ampia.
- Il laminato auxetico non presentava delaminazioni e la rottura delle fibre era molto localizzata, in prossimità del punto di contatto con l'indentatore; inoltre la grandezza dell'area danneggiata, visualizzata per mezzo di una tecnologia C-SCAN da 2MHz, risultava essere più contenuta.
- Il laminato con  $\nu_{13} = 0.187$ , confrontato con quello del primo caso, presentava delle delaminazioni più contenute, localizzate soprattutto nella parte inferiore del componente, e una percentuale di area di danneggiamento circa uguale.



**Fig. 3-7** Porzione di area danneggiata, rispetto alla totale del laminato, rilevata durante il test di indentazione; (a): laminato con  $\nu_{13} = 0.086$ ; (b): laminato con  $\nu_{13} = -0.156$ ; (c): laminato con  $\nu_{13} = 0.187$  [35].





**Fig. 3-8** Immagini, ottenute mediante frattografia, della rottura dei laminati con  $\nu_{13} = 0.086$  (a),  $\nu_{13} = -0.156$  (b) e con  $\nu_{13} = 0.187$  (c) [35].

Anche la resistenza agli impatti [36], e quindi ai carichi dinamici, è stata oggetto di analisi e sulla base dei risultati ottenuti nella prova di indentazione statica precedentemente descritta, sono stati selezionati quattro livelli energetici (4J-7J-12J-18J) corrispondenti ad altrettante velocità (1.5m/s - 2.8m/s - 3.7m/s - 4.5m/s).

Un impattatore di massa 1.76 kg e dallo stesso diametro del caso precedente è stato fatto cadere sui tre laminati mediante una specifica apparecchiatura. Si è potuto osservare come il laminato auxetico presenti una migliore resistenza e un carico di *failure* maggiore, alle basse velocità e per bassi contenuti energetici, presentando però delle proprietà meccaniche residue post-impatto inferiori rispetto al caso dei laminati con coefficiente di Poisson positivo o prossimo allo zero.

### 3.4. Le proprietà lungo lo spessore dei laminati

La teoria dei laminati, soggetti a uno stato di tensione piana, è largamente impiegata per il calcolo delle proprietà di un materiale composito sottoposto a una determinata condizione di carico.

Sebbene le tensioni e le deformazioni lungo lo spessore siano, in questo approccio, considerate non significative e quindi trascurate, vi sono in realtà molte situazioni in cui queste quantità, e le costanti elastiche che le controllano è necessario determinarle.

Questo tipo di trattazione può essere impiegata in problemi tridimensionali con dei carichi locali applicati, come ad esempio nel caso di indentazione di superfici, o per il calcolo dello sforzo di taglio lungo lo spessore in materiali soggetti a flessione.

Anche un'accurata analisi agli elementi finiti richiede l'impiego di elementi tridimensionali e quindi di questi parametri, nonostante a volte, erroneamente, il loro effetto sia trascurato.

Spesso una stima di primo tentativo di queste costanti è eseguita mediante una media delle costanti lungo lo spessore di ogni singolo *ply* che compone il laminato [37].

Si è però visto che seguendo questa strada i valori del modulo di taglio trovati potrebbero essere anche ragionevoli, ma questo non è valido invece per i valori di  $\nu_{13}$  e  $\nu_{23}$ .

Frequentemente inoltre il valore di  $E_3$  del laminato è uguagliato a quello di un singolo *ply*, ma anche in questo caso si commette un errore perché si trascurano gli effetti di irrigidimento dovuto all'accoppiamento tra i vari piani.

Nonostante l'importanza dell'argomento però in letteratura non si riscontra una sufficientemente trattazione e solo pochi autori hanno approfondito lo studio teorico [38-39-40]; spesso però la trattazione non risulta essere di immediata applicabilità e nuove trattazioni [41] si sono rilevate più coincise ed estendibili anche a laminati non simmetrici, non bilanciati o costituiti da *layers* di materiale diverso.

### 3.4.1. Il calcolo di $\nu_{13}$ e $\nu_{23}$

Il primo fondamentale passaggio per il calcolo delle proprietà lungo lo spessore è quello di calcolare le costanti elastiche nel piano del laminato, impiegando la teoria classica dei materiali composti [42].

Si consideri il *j-esimo ply* di un laminato e si supponga che sia ruotato di un angolo  $\theta^j$  rispetto alla direzione 1 del laminato (Fig. 3-9).

Se il laminato è soggetto a una tensione nel piano  $\sigma_1$ , si hanno delle deformazioni rispettivamente nelle direzioni 1 e 2.

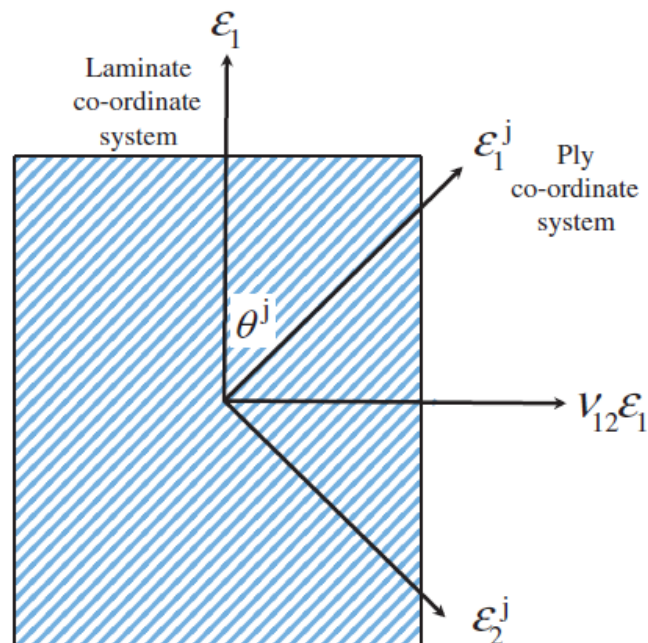


Fig. 3-9 Deformazioni nel sistema di riferimento del laminato e rispetto al *j-esimo ply* ruotato di  $\theta^j$  [41].

Le deformazioni risultanti, ottenute attraverso una trasformazione di coordinate, in direzione parallela,  $\varepsilon_1^j$ , e perpendicolare,  $\varepsilon_2^j$ , al *ply* stesso sono date da:

$$\varepsilon_1^j = \varepsilon_1 (\cos^2\theta^j - \nu_{12} \sin^2\theta^j) \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_2^j = \varepsilon_1 (\sin^2\theta^j - \nu_{12} \cos^2\theta^j) \quad (3.12)$$

Queste deformazioni del *ply* possono essere scomposte in due componenti: la prima data dalla deformazione in seguito a una tensione nel piano del *ply*, *j,Direct*, mentre la seconda data dalla deformazione conseguente alla tensione perpendicolare al *ply*, *j,Poisson*.

In questo modo si può scrivere:

$$\varepsilon_1^j = \varepsilon_1^{j,Direct} + \varepsilon_1^{j,Poisson} = \varepsilon_1^{j,Direct} - \nu_{21}^j \varepsilon_2^{j,Direct} \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_2^j = \varepsilon_2^{j,Direct} + \varepsilon_2^{j,Poisson} = \varepsilon_2^{j,Direct} - \nu_{12}^j \varepsilon_1^{j,Direct} \quad (3.14)$$

Riarrangiando le seguenti equazioni si può scrivere:

$$\varepsilon_1^{j,Direct} = \varepsilon_1^j + \nu_{21}^j \varepsilon_2^{j,Direct} \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_2^{j,Direct} = \varepsilon_2^j + \nu_{12}^j \varepsilon_1^{j,Direct} \quad (3.16)$$

$$\varepsilon_1^j = \varepsilon_1^{j,Direct} - \nu_{21}^j (\varepsilon_2^j + \nu_{12}^j \varepsilon_1^{j,Direct}) \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_2^j = \varepsilon_2^{j,Direct} - \nu_{12}^j (\varepsilon_1^j + \nu_{21}^j \varepsilon_2^{j,Direct}) \quad (3.18)$$

e quindi si ottiene:

$$\varepsilon_1^{j,Direct} = \frac{\varepsilon_1^j + \nu_{21}^j \varepsilon_2^j}{1 - \nu_{12}^j \nu_{21}^j} \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_2^{j,Direct} = \frac{\varepsilon_2^j + \nu_{12}^j \varepsilon_1^j}{1 - \nu_{12}^j \nu_{21}^j} \quad (3.20)$$

Sostituendo le equazioni (3.11) e (3.12) rispettivamente nelle equazioni (3.19) e (3.20) si ottiene:

$$\varepsilon_1^{j,Direct} = \frac{\varepsilon_1 (\cos^2\theta^j - \nu_{12} \sin^2\theta^j + \nu_{21}^j \sin^2\theta^j - \nu_{21}^j \nu_{12} \cos^2\theta^j)}{1 - \nu_{12}^j \nu_{21}^j} \quad (3.21)$$

e

$$\varepsilon_2^{j,Direct} = \frac{\varepsilon_1 (\sin^2\theta^j - \nu_{12} \cos^2\theta^j + \nu_{12}^j \cos^2\theta^j - \nu_{12}^j \nu_{12} \sin^2\theta^j)}{1 - \nu_{12}^j \nu_{21}^j} \quad (3.22)$$

Osservando che si può scrivere

$$\varepsilon_3^j = -\varepsilon_1^{j,Direct} \nu_{13}^j - \varepsilon_2^{j,Direct} \nu_{23}^j \quad (3.23)$$

si può quindi ricavare, dopo semplici passaggi matematici:

$$\varepsilon_3^j = \frac{-\varepsilon_1}{1 - \nu_{12}^j \nu_{21}^j} (\nu_{13}^j (\cos^2 \theta^j (1 - \nu_{21}^j \nu_{12}^j)) + \sin^2 \theta^j (\nu_{21}^j - \nu_{12}^j)) + \nu_{23}^j (\sin^2 \theta^j (1 - \nu_{12}^j \nu_{12}^j) + \cos^2 \theta^j (\nu_{21}^j - \nu_{12}^j)) \quad (3.24)$$

Quindi il coefficiente di Poisson lungo lo spessore del laminato può essere determinato dalla sommatoria:

$$\nu_{13} = \sum_j V_j \frac{\varepsilon_3^j}{\varepsilon_1} \quad (3.25)$$

Dove  $V_j$  è la frazione di volume del  $J$ -esimo ply.

Conseguentemente si può ottenere che:

$$\nu_{13} = \sum_j \frac{V_j}{1 - \nu_{12}^j \nu_{21}^j} (\nu_{13}^j (\cos^2 \theta^j (1 - \nu_{21}^j \nu_{12}^j)) + \sin^2 \theta^j (\nu_{21}^j - \nu_{12}^j)) + \nu_{23}^j (\sin^2 \theta^j (1 - \nu_{12}^j \nu_{12}^j) + \cos^2 \theta^j (\nu_{21}^j - \nu_{12}^j)) \quad (3.26)$$

L'altro coefficiente di Poisson lungo lo spessore,  $\nu_{23}$ , può essere determinato con una procedura simile, applicando una tensione  $\sigma_2$ , e si ottiene:

$$\nu_{23} = \sum_j \frac{V_j}{1 - \nu_{12}^j \nu_{21}^j} (\nu_{13}^j (\sin^2 \theta^j (1 - \nu_{21}^j \nu_{12}^j)) + \cos^2 \theta^j (\nu_{21}^j - \nu_{12}^j)) + \nu_{23}^j (\cos^2 \theta^j (1 - \nu_{12}^j \nu_{12}^j) + \sin^2 \theta^j (\nu_{21}^j - \nu_{12}^j)) \quad (3.27)$$

Le relazioni (3.26) e (3.27) possono essere applicate a laminati compositi di ogni tipo, incluso quelli in cui la le lamine sovrapposte siano di materiale diverso.

In alcuni casi si può inoltre considerare, senza commettere errori significativi, che ogni *ply* abbia un'isotropia trasversale rispetto alla direzione della fibra e in questo caso  $\nu_{13}^j = \nu_{12}^j$ .

Vi sono comunque delle eccezioni dovute al fatto che si possono interporre, all'interno dello stesso *ply*, degli irrigidimenti lungo lo spessore e quindi questa semplificazione non è più valida.

Nel caso di laminati *angle-ply*  $[\pm\theta]$  e *cross-ply*  $[0^\circ/90^\circ]$  le espressioni (3.26) e (3.27) possono essere semplificate:

### Angle-ply

$$\nu_{13} = \frac{\nu_{13}^j (\cos^2 \theta^j (1 - \nu_{21}^j \nu_{12}^j) + \sin^2 \theta^j (\nu_{21}^j - \nu_{12}^j)) + \nu_{23}^j (\sin^2 \theta^j (1 - \nu_{12}^j \nu_{12}^j) + \cos^2 \theta^j (\nu_{21}^j - \nu_{12}^j))}{1 - \nu_{12}^j \nu_{21}^j} \quad (3.28)$$

$$v_{23} = \frac{v_{13}^j \left( \sin^2 \theta^j (1 - v_{21}^j v_{21}) + \cos^2 \theta^j (v_{21}^j - v_{21}) \right) + v_{23}^j \left( \cos^2 \theta^j (1 - v_{12}^j v_{21}) + \sin^2 \theta^j (v_{12}^j - v_{21}) \right)}{1 - v_{12}^j v_{21}^j} \quad (3.29)$$

### Cross-ply

$$v_{13} = V_0 \frac{v_{13}^j (1 - v_{21}^j v_{12}) + v_{23}^j (v_{12}^j - v_{12})}{1 - v_{12}^j v_{21}^j} + V_{90} \frac{v_{13}^j (v_{21}^j - v_{12}) + v_{23}^j (1 - v_{12}^j v_{12})}{1 - v_{12}^j v_{21}^j} \quad (3.30)$$

$$v_{23} = V_0 \frac{v_{13}^j (v_{21}^j - v_{21}) + v_{23}^j (1 - v_{12}^j v_{21})}{1 - v_{12}^j v_{21}^j} + V_{90} \frac{v_{13}^j (1 - v_{21}^j v_{21}) + v_{23}^j (v_{12}^j - v_{21})}{1 - v_{12}^j v_{21}^j} \quad (3.31)$$

Sulla base delle formule viste per il calcolo dei coefficienti  $v_{13}$  e  $v_{23}$  del laminato si nota come vi sia una dipendenza dai coefficienti di Poisson  $v_{13}$  e  $v_{23}$  del singolo *ply*.

Molto spesso però la conoscenza di questi parametri non è molto diffusa, in quanto ritenuti di secondaria importanza rispetto a quelli nel piano.

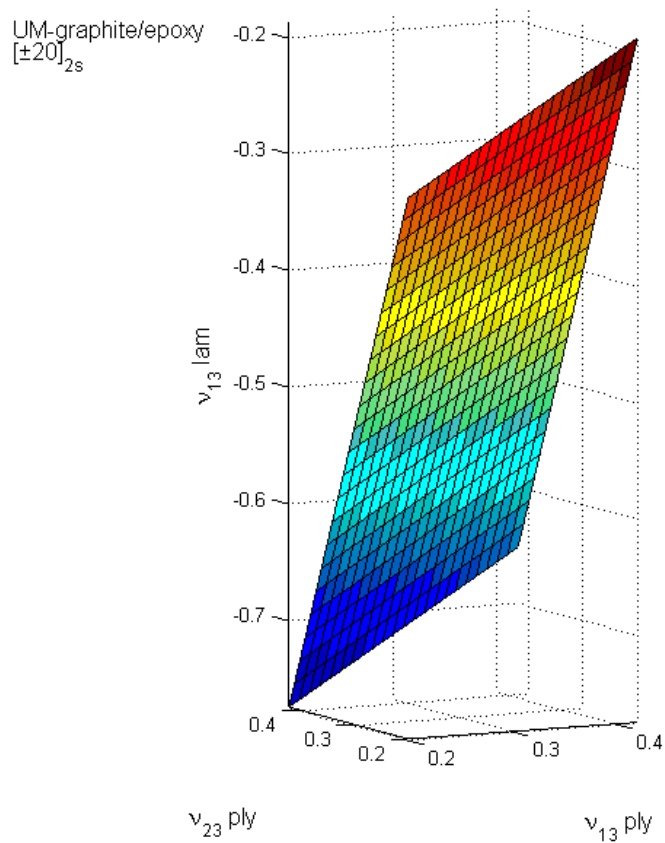
Con l'obiettivo di indagare maggiormente sui valori di questi coefficienti, è stata eseguita un'analisi di sensibilità, mediante il software MATLAB, nella quale si può vedere la dipendenza dei coefficienti di Poisson lungo lo spessore del laminato rispetto a quelli del singolo strato.

Per eseguire tale simulazione si è considerata una disposizione delle lamine del tipo  $[\pm 20^\circ]_{2s}$ , ossia un laminato simmetrico costituito da otto lamine dallo spessore di 0.25mm ciascuna, disposte secondo l'orientazione indicata.

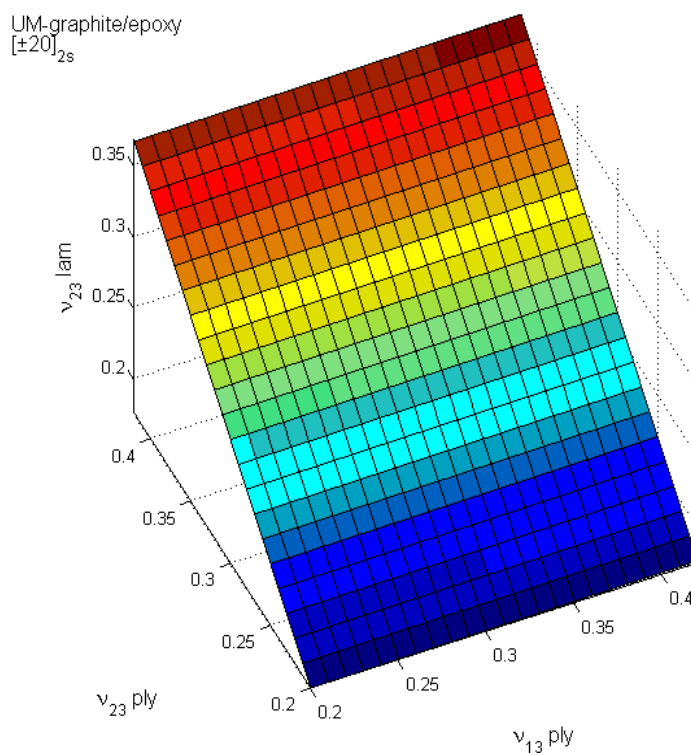
Per singolo *ply* sono state scelte le fibre di carbonio (grafite), in grado di garantire un'elevata anisotropia, immerse in una matrice epossidica. La frazione del volume di fibre è pari al 70%.

	<b>UM- graphite/epoxy</b>
<b><math>E_1</math> [Pa]</b>	2.897e+11
<b><math>E_2</math> [Pa]</b>	6.207e+9
<b><math>\nu_{12}</math></b>	0.25
<b><math>G_{12}</math> [Pa]</b>	4.828e+9

Tab. 3-2 Caratteristiche del singolo *ply* in fibra di carbonio.



**Fig. 3-10** Rappresentazione dell'andamento di  $\nu_{13}$  del laminato in funzione di  $\nu_{13}$  e  $\nu_{23}$  del singolo *ply*.



**Fig. 3-11** Rappresentazione dell'andamento di  $\nu_{23}$  del laminato in funzione di  $\nu_{13}$  e  $\nu_{23}$  del singolo *ply*.

Sulla base dei risultati ottenuti si può vedere come l'andamento sia lineare e la relazione tra i coefficienti di Poisson lungo lo spessore del singolo *ply* e quelli lungo lo spessore del laminato sia rappresentata da dei piani a pendenza costante.

Questo andamento trova riscontro dal punto di vista analitico nelle formule (3.28) e (3.29): fissato infatti l'angolo  $\theta$  di orientazione e le caratteristiche del singolo *ply*, la quantità a destra dell'uguale delle due equazioni è costante, garantendo quindi un unico valore di  $\nu_{13}$  e  $\nu_{23}$  del laminato.

### 3.4.2. Il calcolo di $E_3$

Il modulo di Young lungo lo spessore del laminato,  $E_3$ , risulta essere maggiore rispetto a quello del singolo *ply*, in seguito alla presenza di tensioni di accoppiamento, *coupling*, tra i vari strati e vi sono delle situazioni in cui l'irrigidimento che ne consegue risulta essere molto significativo.

Le deformazioni nel piano  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  risultanti in seguito all'applicazione di una tensione  $\sigma_3$  lungo lo spessore, risultano essere:

$$\varepsilon_1 = \frac{-\sigma_3 \nu_{13}}{E_3} = \frac{-\sigma_3 \nu_{13}}{E_1} \quad (3.32)$$

e

$$\varepsilon_2 = \frac{-\sigma_3 \nu_{23}}{E_3} = \frac{-\sigma_3 \nu_{23}}{E_2} \quad (3.33)$$

Le deformazioni in ogni *ply* possono essere determinate nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^j &= \varepsilon_1 \cos^2 \theta^j + \varepsilon_2 \sin^2 \theta^j = \frac{-\sigma_3 (\nu_{31} \cos^2 \theta^j + \nu_{32} \sin^2 \theta^j)}{E_3} \\ &= -\sigma_3 \left( \frac{\nu_{13} \cos^2 \theta^j}{E_1} + \frac{\nu_{23} \sin^2 \theta^j}{E_2} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^j &= \varepsilon_1 \sin^2 \theta^j + \varepsilon_2 \cos^2 \theta^j \\ &= -\sigma_3 \left( \frac{\nu_{13} \sin^2 \theta^j}{E_1} + \frac{\nu_{23} \cos^2 \theta^j}{E_2} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Queste deformazioni possono essere viste come il risultato della combinazione delle deformazioni di Poisson, che si hanno in seguito a  $\sigma_3$ , e di deformazioni aggiuntive dovute all'accoppiamento tra i diversi strati.

Per le deformazioni non dovute all'accoppiamento si può semplicemente scrivere:

$$\varepsilon_1^j = \frac{-\sigma_3 \nu_{31}^j}{E_3^j} = \frac{-\sigma_3 \nu_{13}^j}{E_1^j} \quad (3.36)$$

e

$$\varepsilon_2^j = \frac{-\sigma_3 v_{32}^j}{E_3^j} = \frac{-\sigma_3 v_{23}^j}{E_2^j} \quad (3.37)$$

Le deformazioni dovute all'accoppiamento possono così essere determinate come la differenza tra le (3.34),(3.35) e le (3.36),(3.37) ottenendo in questo modo:

$$\varepsilon_1^{j,coupling} = -\sigma_3 \left( \frac{v_{13} \cos^2 \theta^j}{E_1} + \frac{v_{23} \sin^2 \theta^j}{E_2} - \frac{v_{13}^j}{E_1^j} \right) \quad (3.38)$$

e

$$\varepsilon_2^{j,coupling} = -\sigma_3 \left( \frac{v_{13} \sin^2 \theta^j}{E_1} + \frac{v_{23} \cos^2 \theta^j}{E_2} - \frac{v_{23}^j}{E_2^j} \right) \quad (3.39)$$

Questi accoppiamenti inoltre producono delle deformazioni di Poisson lungo lo spessore date da:

$$\varepsilon_3^{j,coupling} = v_{13}^j \varepsilon_1^{j,coupling} + v_{23}^j \varepsilon_2^{j,coupling} \quad (3.40)$$

Questo si può riscrivere come

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^{j,coupling} = \sigma_3 \left( - \frac{v_{13} v_{13}^j \cos^2 \theta^j}{E_1} - \frac{v_{23} v_{13}^j \sin^2 \theta^j}{E_2} + \frac{(v_{13}^j)^2}{E_1^j} + \right. \\ \left. - \frac{v_{13} v_{23}^j \sin^2 \theta^j}{E_1} - \frac{v_{23} v_{23}^j \cos^2 \theta^j}{E_2} + \frac{(v_{23}^j)^2}{E_2^j} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Le deformazioni lungo lo spessore del laminato, in assenza di accoppiamento tra i diversi strati, sarebbero semplicemente date da  $\sigma_3 / E_3^j$ . In questo modo la deformazione effettiva

lungo lo spessore la si può determinare sottraendo da questo valore il contributo delle deformazioni di accoppiamento di tutti i *plies*, ottenendo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \sigma_3 \sum_j V_j \left( \frac{1}{E_3^j} + \frac{v_{13} v_{13}^j \cos^2 \theta^j}{E_1} + \frac{v_{23} v_{13}^j \sin^2 \theta^j}{E_2} - \frac{(v_{13}^j)^2}{E_1^j} + \right. \\ \left. + \frac{v_{13} v_{23}^j \sin^2 \theta^j}{E_1} + \frac{v_{23} v_{23}^j \cos^2 \theta^j}{E_2} - \frac{(v_{23}^j)^2}{E_2^j} \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

In questo modo si può arrivare alla relazione generale del modulo elastico lungo lo spessore del laminato:



$$E_3 = \left( \sum_j V_j \left( \frac{1}{E_3^j} - \frac{(v_{13}^j)^2}{E_1^j} - \frac{(v_{23}^j)^2}{E_2^j} + \frac{v_{13}}{E_1} (v_{13}^j \cos^2 \theta^j + v_{23}^j \sin^2 \theta^j) + \frac{v_{23}}{E_2} (v_{13}^j \sin^2 \theta^j + v_{23}^j \cos^2 \theta^j) \right) \right)^{-1} \quad (3.43)$$

Si nota come nell'espressione (3.43) compaiono sia il termine  $v_{13}$  che il termine  $v_{23}$  del laminato, che possono essere rispettivamente calcolati usando le equazioni (3.26) e (3.27). Nel caso di laminati *angle-ply*  $[\pm\theta]$  e *cross-ply*,  $[0^\circ/90^\circ]$ , l'espressione (3.43) può essere semplificata:

*Angle-ply*

$$E_3 = \left( \frac{1}{E_3^j} - \frac{(v_{13}^j)^2}{E_1^j} - \frac{(v_{23}^j)^2}{E_2^j} + \frac{v_{13}}{E_1} (v_{13}^j \cos^2 \theta^j + v_{23}^j \sin^2 \theta^j) + \frac{v_{23}}{E_2} (v_{13}^j \sin^2 \theta^j + v_{23}^j \cos^2 \theta^j) \right)^{-1} \quad (3.44)$$

*Cross-ply*

$$E_3 = \left( \frac{1}{E_3^j} - \frac{(v_{13}^j)^2}{E_1^j} - \frac{(v_{23}^j)^2}{E_2^j} + V_0 \left( \frac{v_{13} v_{13}^j}{E_1} + \frac{v_{23} v_{23}^j}{E_2} \right) + V_{90} \left( \frac{v_{23} v_{13}^j}{E_2} + \frac{v_{13} v_{23}^j}{E_1} \right) \right)^{-1} \quad (3.45)$$

## 4. DETERMINAZIONE DEI VALORI DI $\nu_{13}$ , $\nu_{23}$ ED $E_3$ DI LAMINATI CON FIBRE DI VETRO, KEVLAR E CARBONIO.

### 4.1. Presentazione del problema: caratteristiche dei *pre-pregs*

La valutazione delle proprietà lungo lo spessore (capitolo 3.) è stata compiuta su tre laminati costituiti da fibre diverse:

- Fibre di vetro di tipo E, *E-glass*.
- Fibre di kevlar, *Kevlar-49*.
- Fibre di carbonio (grafite) ad alto modulo, *UM-graphite*.

La scelta è stata fatta con l'obiettivo di determinare quale fosse il materiale più idoneo a ottenere un coefficiente di Poisson lungo lo spessore negativo.

Ogni laminato, indipendentemente dalle fibre utilizzate, è simmetrico e costituito da otto *plies* aventi ciascuno lo spessore di 0.25mm, per uno spessore totale di 2mm: questa è una tipica configurazione che si trova in pannelli sandwich.

Per i tre laminati si ha inoltre una frazione di volume di fibre del 70% e una matrice di resina epossidica.

Le caratteristiche elastiche di ogni singola lamina sono fornite dalla seguente tabella [43]:

	<u>Tipo di fibra e matrice</u>		
	<i>E-glass/epoxy</i>	<i>Kevlar-49/epoxy</i>	<i>UM-graphite/epoxy</i>
$E_1$ [Pa]	4.483e+10	7.586e+10	2.897e+11
$E_2$ [Pa]	1.241e+10	5.517e+9	6.207e+9
$E_3$ [Pa]	1.241e+10	5.517e+9	6.207e+9
$G_{12}$ [Pa]	5.517e+9	2.069e+9	4.828e+9
$G_{13}$ [Pa]	5.517e+9	2.069e+9	4.828e+9
$G_{23}$ [Pa]	3.598e+9	1.543e+9	2.657e+9
$\nu_{12}$	0.28	0.34	0.25
$\nu_{13}$	0.28	0.34	0.25
$\nu_{23}$	0.36	0.47	0.42

Tab. 4-1 Caratteristiche delle singole lamine utilizzate nella realizzazione dei laminati simmetrici.

Le configurazioni dei laminati studiate sono invece riassunte di seguito:

	<b>Lay-up [°]</b>
<b>Modello 1</b>	$[\pm\theta]_{2s}$
<b>Modello 2</b>	$[0_2/\pm\theta]_s$
<b>Modello 3</b>	$[\pm 20/\pm\theta]_s$
<b>Modello 4</b>	$[\pm 25/\pm\theta]_s$
<b>Modello 5</b>	$[\pm 30/\pm\theta]_s$
<b>Modello 6</b>	$[\pm 35/\pm\theta]_s$
<b>Modello 7</b>	$[\pm 45/\pm\theta]_s$
<b>Modello 8</b>	$[\pm 60/\pm\theta]_s$

**Tab. 4-2** Disposizione delle lamine nel laminato.

I valori di  $\theta$  sono stati fatti variare da  $5^\circ$  a  $70^\circ$ , per comprendere così un'ampia casistica, con passi variabili da modello a modello: in questo modo nell'intorno dei punti di minimo, di ogni grafico ottenuto, è possibile apprezzare quale sia l'effetto di un eventuale errore nel posizionamento del *ply* da parte dell'operatore.

#### **4.2. Calcolo delle proprietà elastiche nel piano del laminato**

Come si può notare dalle formule (3.26), (3.27) e (3.43) per calcolare le proprietà lungo lo spessore del laminato è necessario conoscere  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  del laminato.

Le lamine considerate sono sistemate secondo un certo angolo e quindi bisogna essere in grado di calcolare le caratteristiche meccaniche della lamina rispetto a una generica sollecitazione.

Per fare ciò nell'implementazione del codice in ambiente MATLAB (APPENDICE A) si sono utilizzate le formule della teoria classica dei materiali compositi.

Per passare poi dalle lamine orientate secondo una certa direzione ai laminati si è ipotizzato che:

- Tra le lamine vi sia un legame perfetto
- Lo spessore nella zona di legame sia nullo e quindi le fibre tra uno strato e l'altro siano praticamente a contatto.

- L'insieme delle lamine complessivamente è ancora sottile e quindi può essere applicata la teoria valida per la singola lamina.

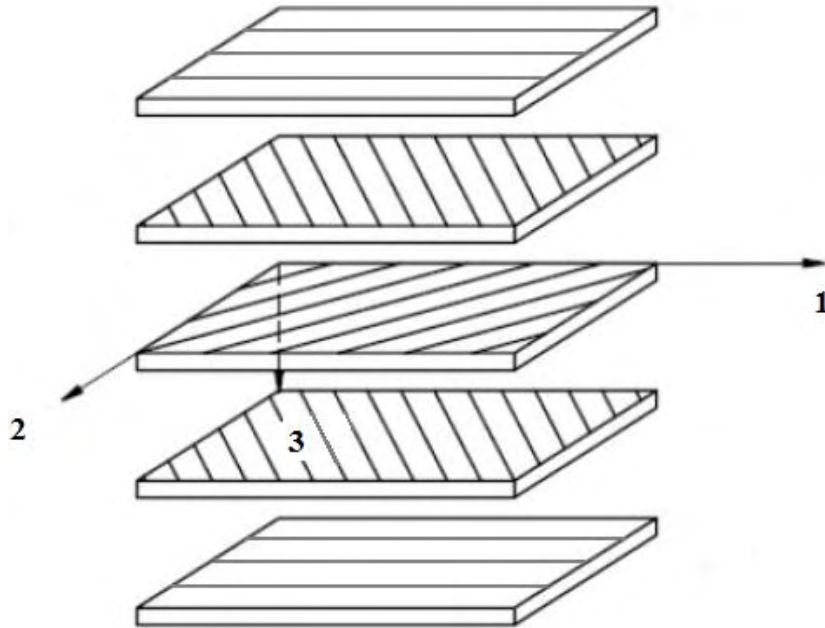


Fig. 4-1 Lay-up di un laminato con relativo sistema di riferimento.

Per determinare successivamente le proprietà del laminato si devono calcolare i singoli termini della matrice di elasticità ridotta  $[Q]^L$  del laminato stesso:

$$Q_{ij}^L = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k V_k$$

Dove  $n$  rappresenta il numero di lamine del laminato,  $V_k$  la frazione di volume della lamina  $K$ -esima e  $\bar{Q}_{ij}^k$  è la combinazione delle  $Q_{ij}$  delle singole lamine.

Calcolata quindi  $[Q]^L$  la si può invertire, ottenendo la matrice di cedevolezza  $[S]^L$ , dalla quale ricavare direttamente le costanti ingegneristiche  $E_1, E_2$  e i coefficienti di Poisson  $\nu_{12}$  e  $\nu_{21}$  del laminato.

#### 4.3. Calcolo di $\nu_{13}$ e $\nu_{23}$ ed $E_3$

Seguendo i modelli presentati (paragrafo 4.1.) si sono implementati diversi codici MATLAB (APPENDICE A) con lo scopo di determinare le proprietà lungo lo spessore del laminato.

Il valore numerico per ogni modello può essere consultato in APPENDICE B.

Si riportano ora i diversi grafici ottenuti per i coefficienti di Poisson lungo lo spessore  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{23}$  e per il modulo elastico  $E_3$  dei diversi laminati.

# Modello 1

E-glass/epoxy

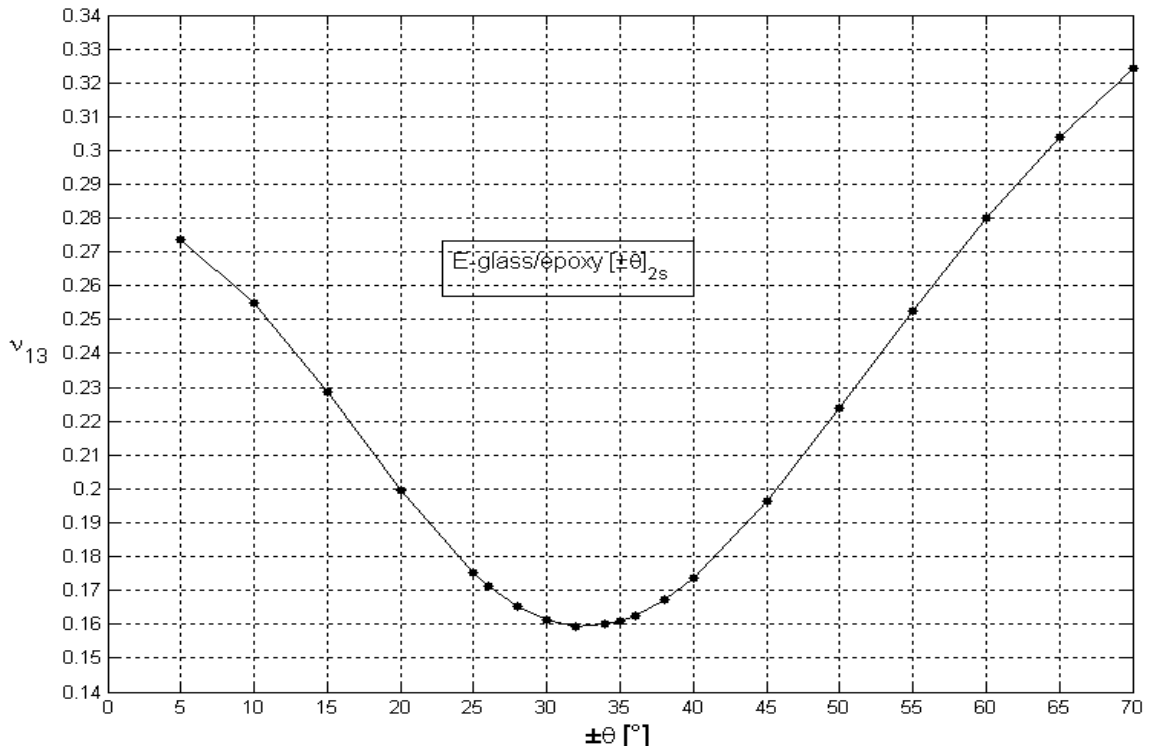


Fig. 4-2 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 1 con fibre di vetro.

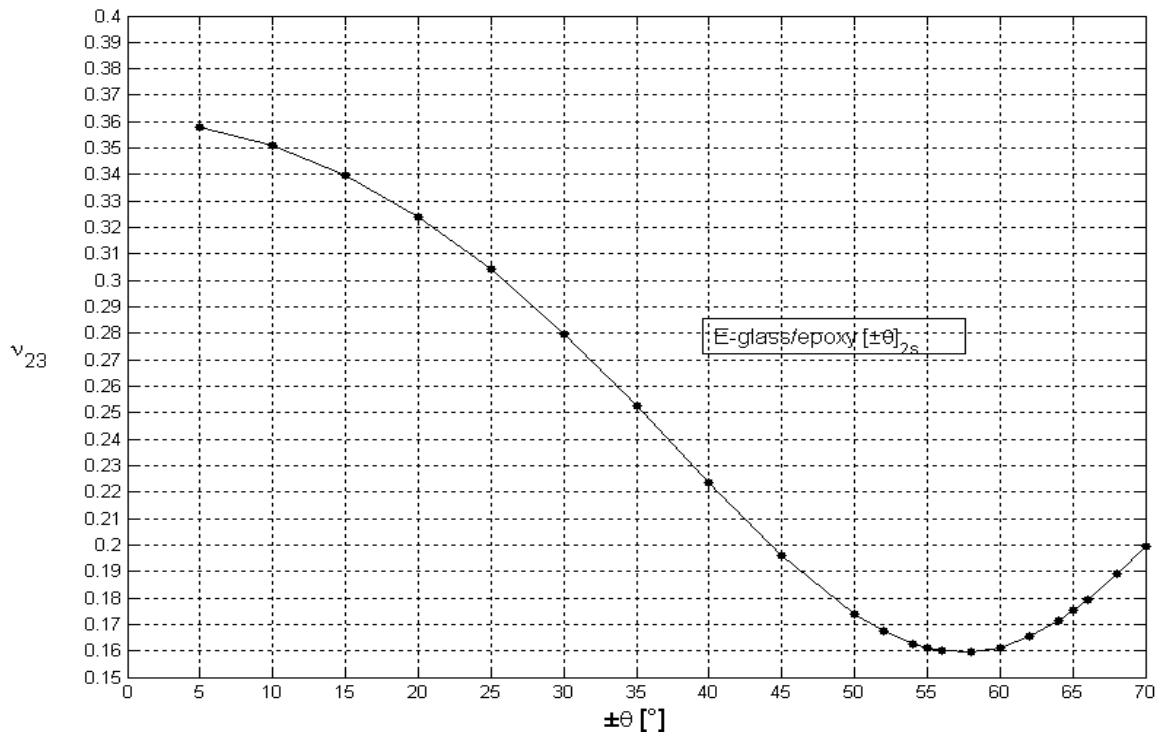


Fig. 4-3 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 1 con fibre di vetro.

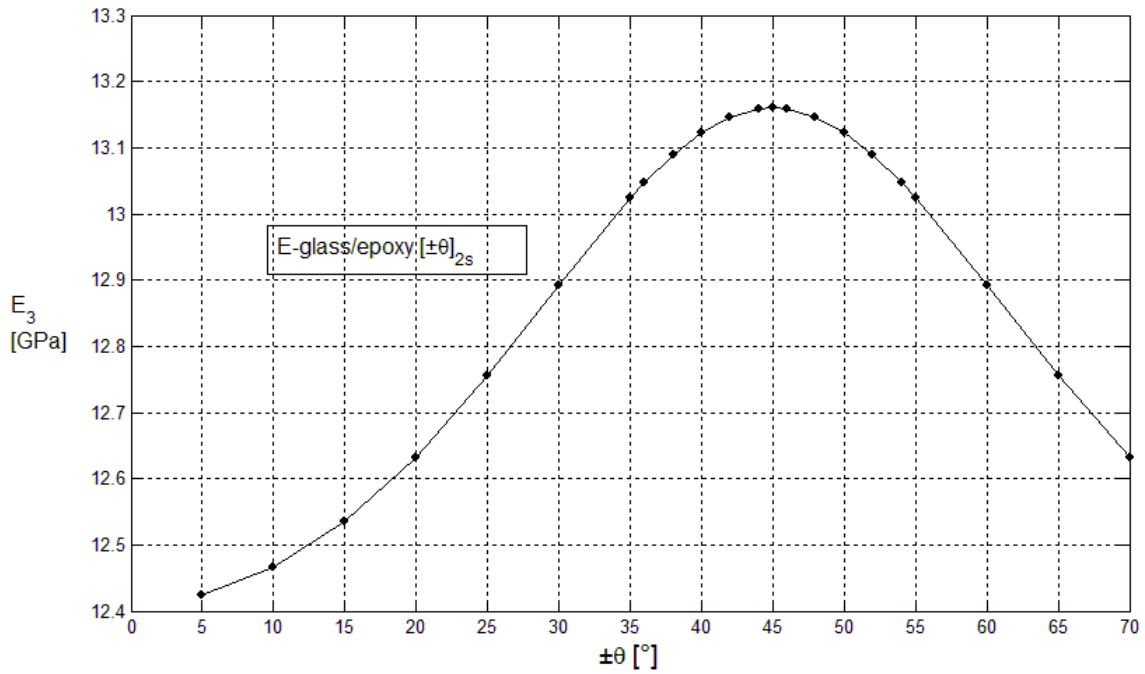


Fig. 4-4 Grafico di  $E_3$  nel modello 1 con fibre di vetro.

**Kevlar- 49/epoxy**

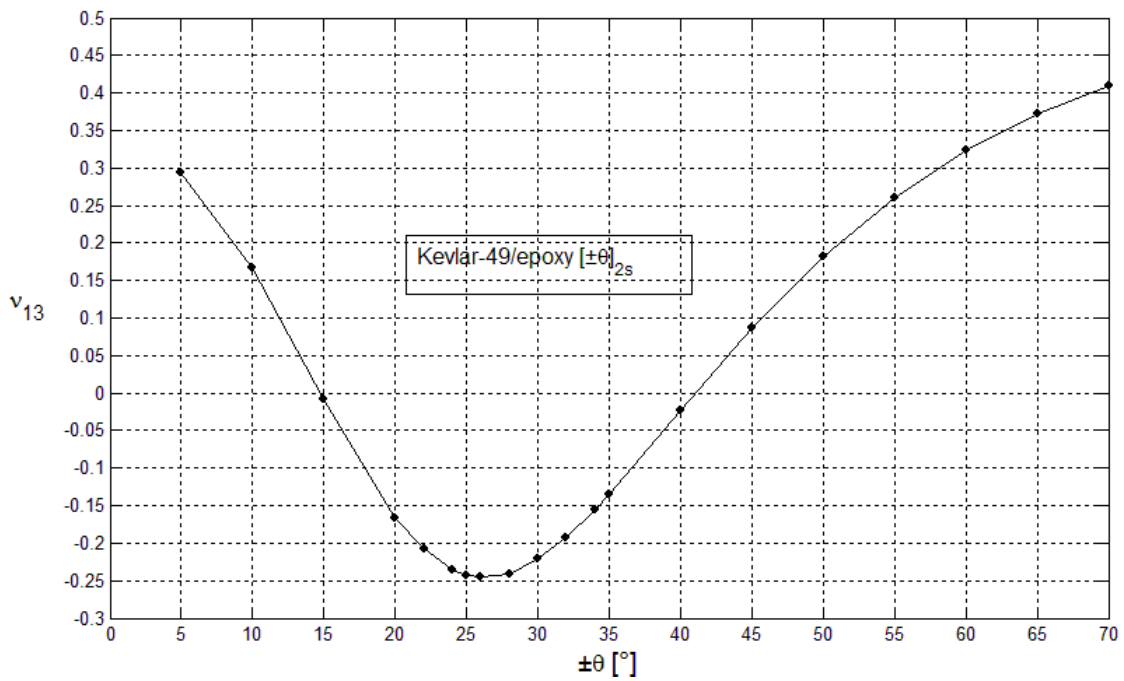


Fig. 4-5 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 1 con fibre di kevlar.

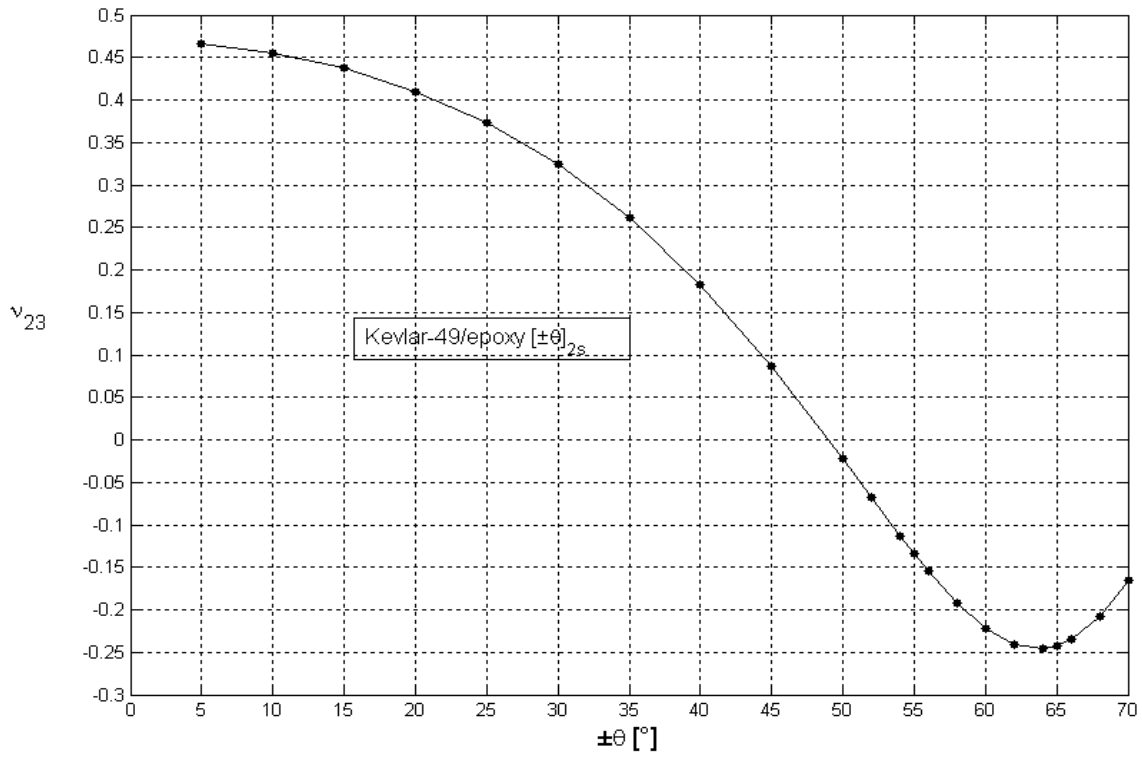


Fig. 4-6 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 1 con fibre di kevlar.

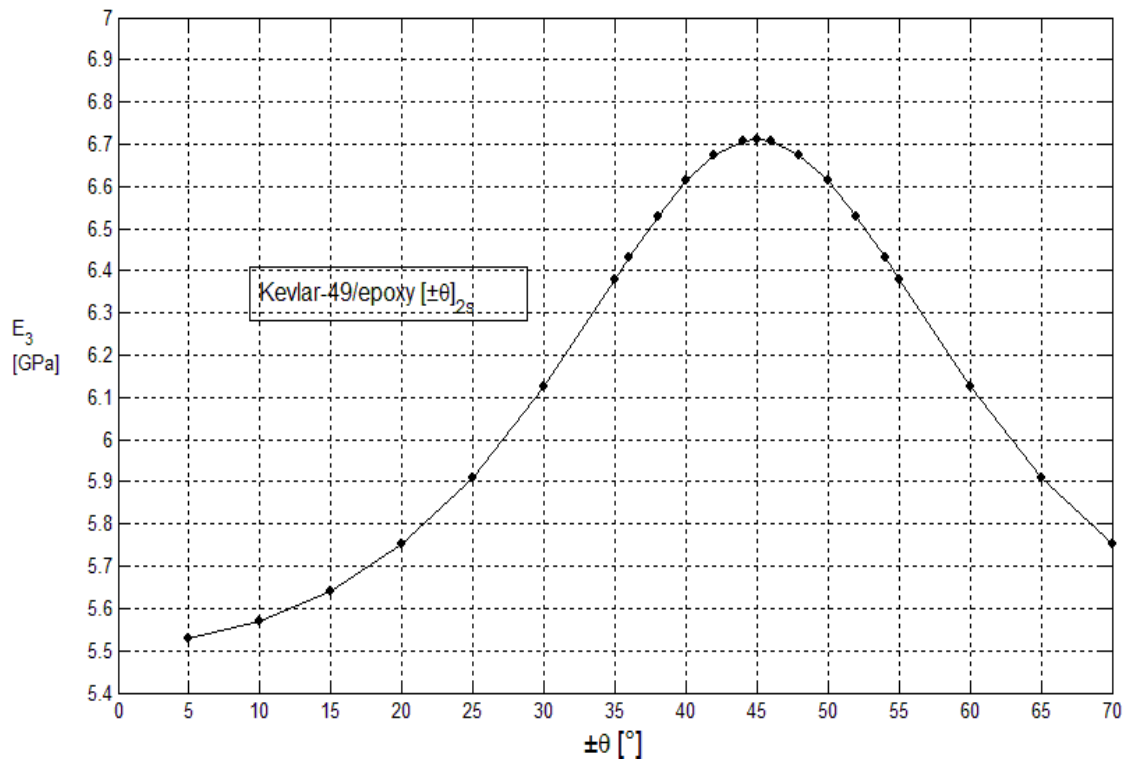
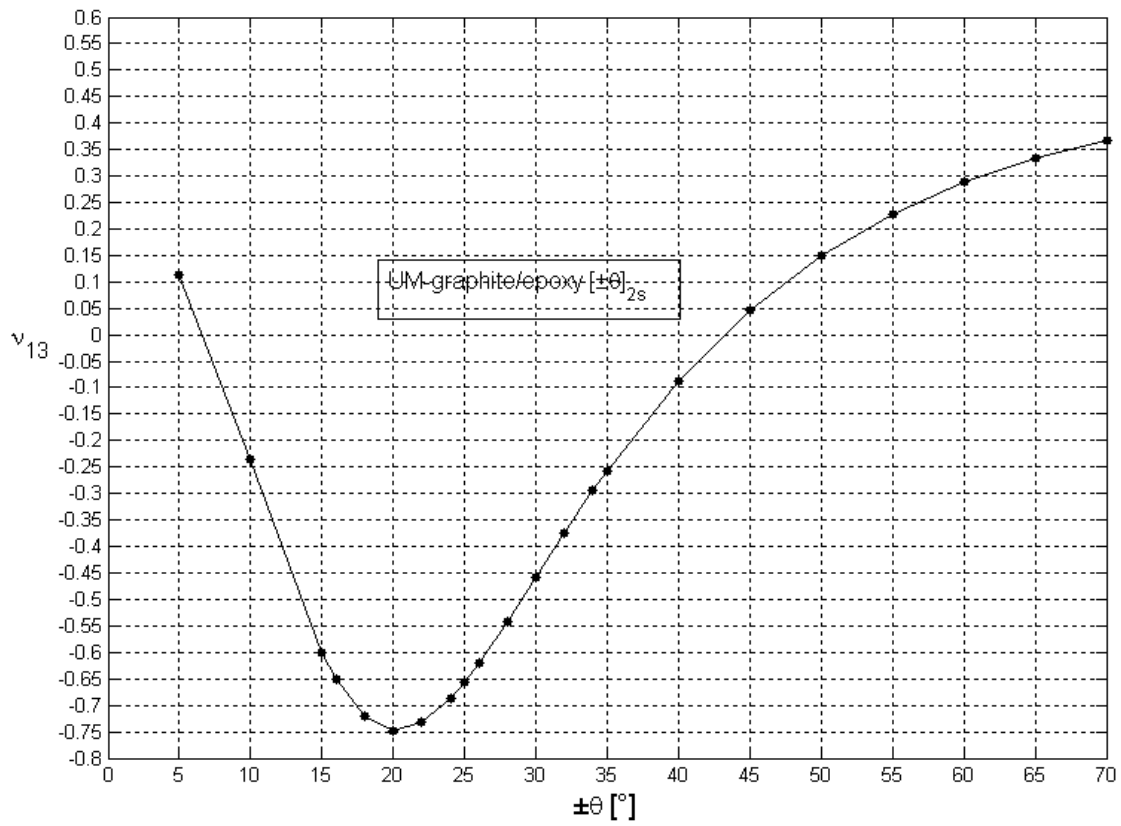
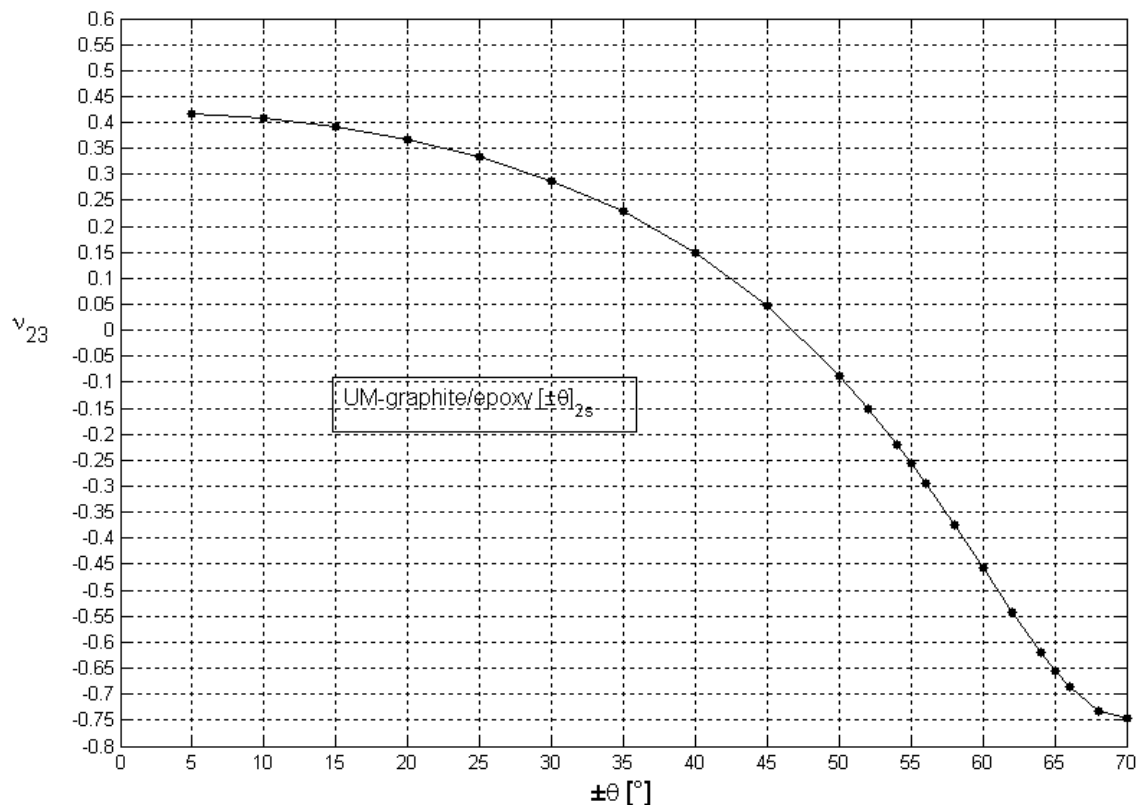


Fig. 4-7 Grafico di  $E_3$  nel modello 1 con fibre di kevlar.

**UM- graphite/epoxy**



**Fig. 4-8 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 1 con fibre di carbonio.**



**Fig. 4-9 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 1 con fibre di carbonio.**



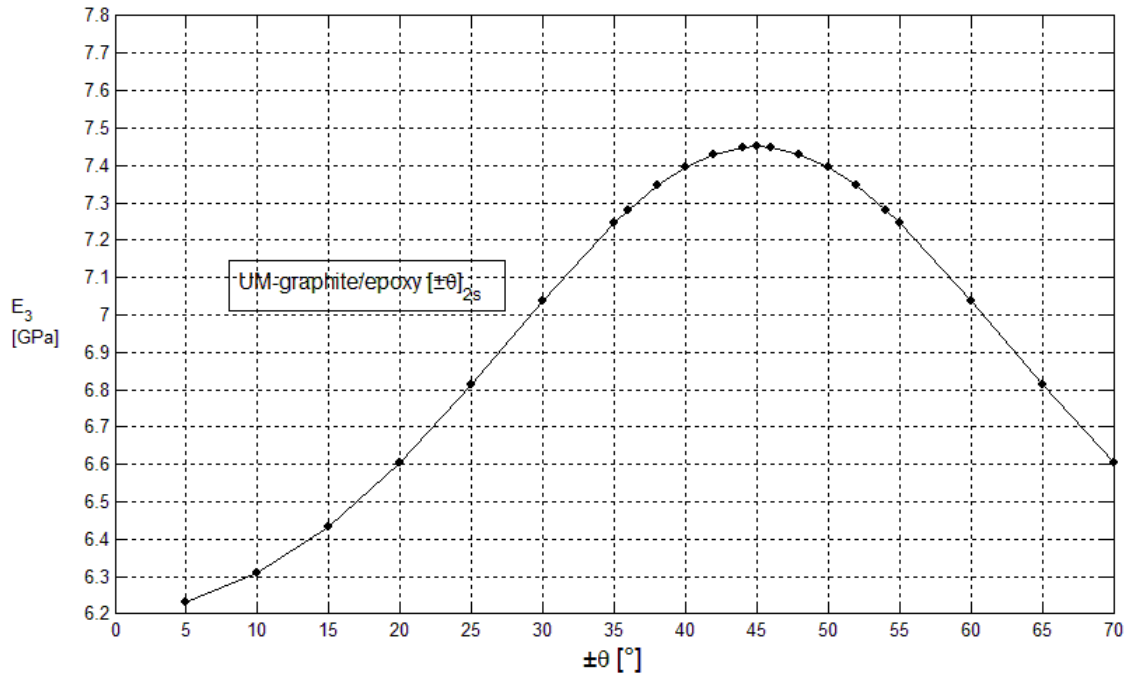


Fig. 4-10 Grafico di  $E_3$  nel modello 1 con fibre di carbonio.

### Grafici comparativi modello 1

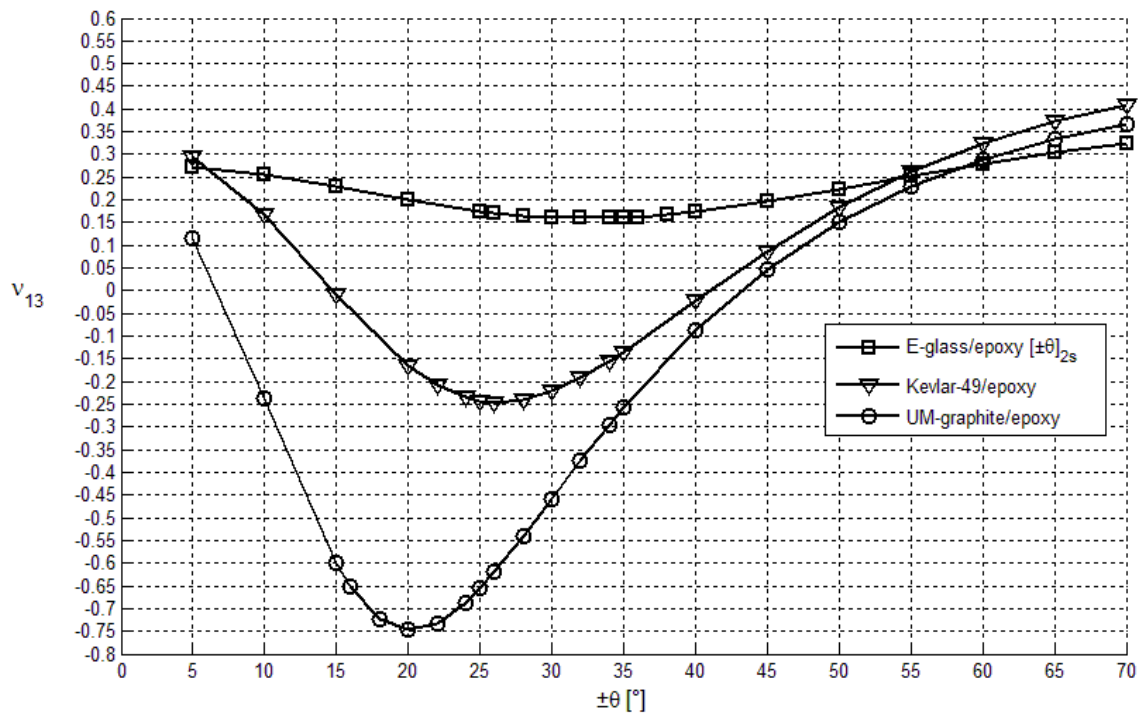


Fig. 4-11 Sovrapposizione dei  $\nu_{13}$  dei laminati con diverse fibre del modello 1.

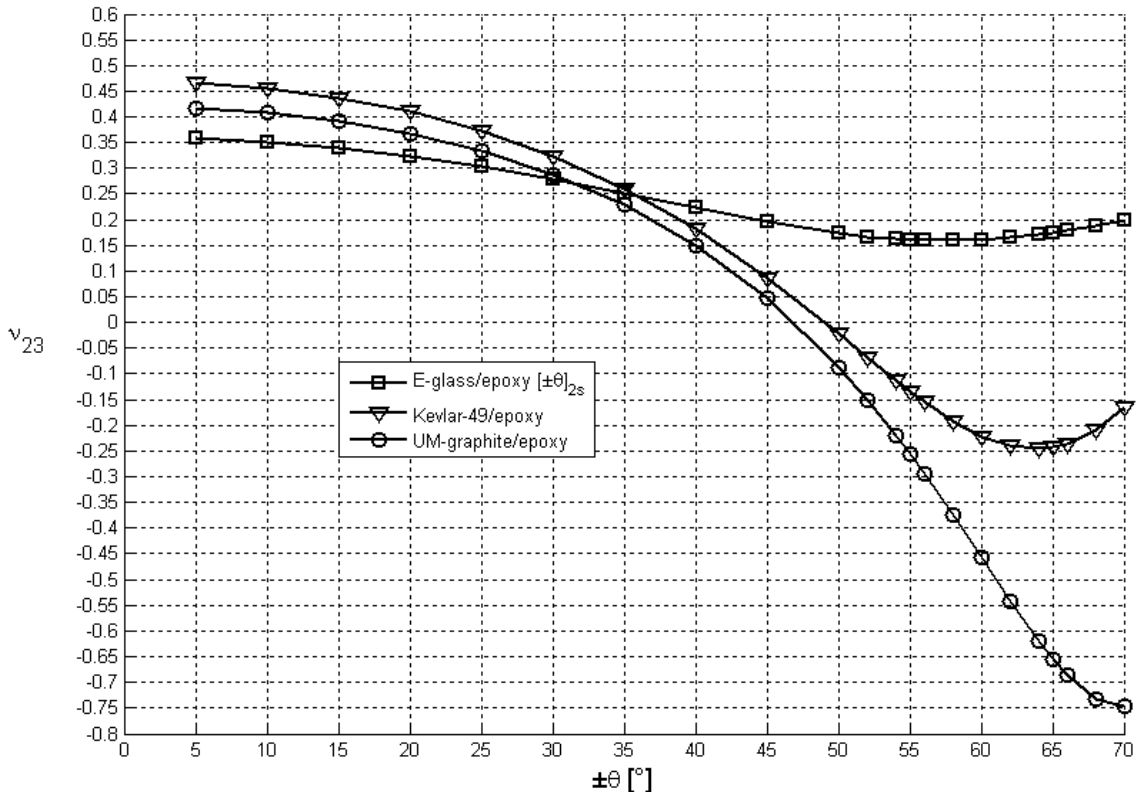


Fig. 4-12 Sovrapposizione dei  $\nu_{23}$  dei laminati con diverse fibre del modello 1.

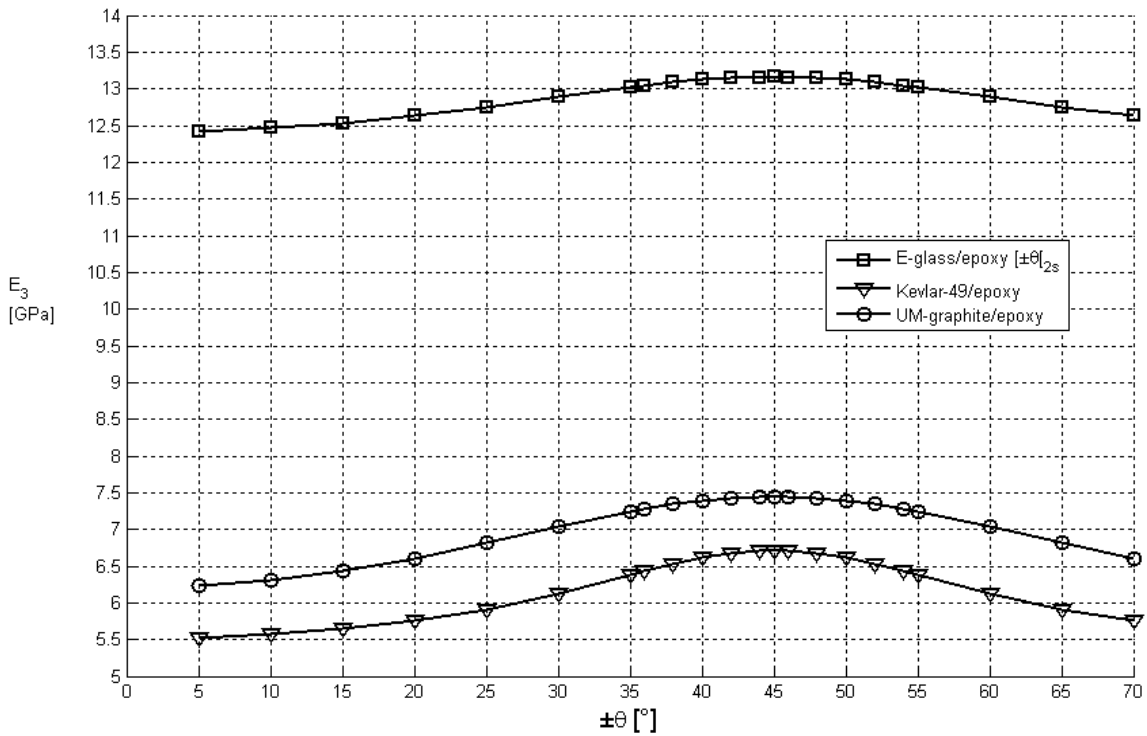


Fig. 4-13 Sovrapposizione degli  $E_3$  dei laminati con diverse fibre del modello 1.

## Modello 2

*E-glass/epoxy*

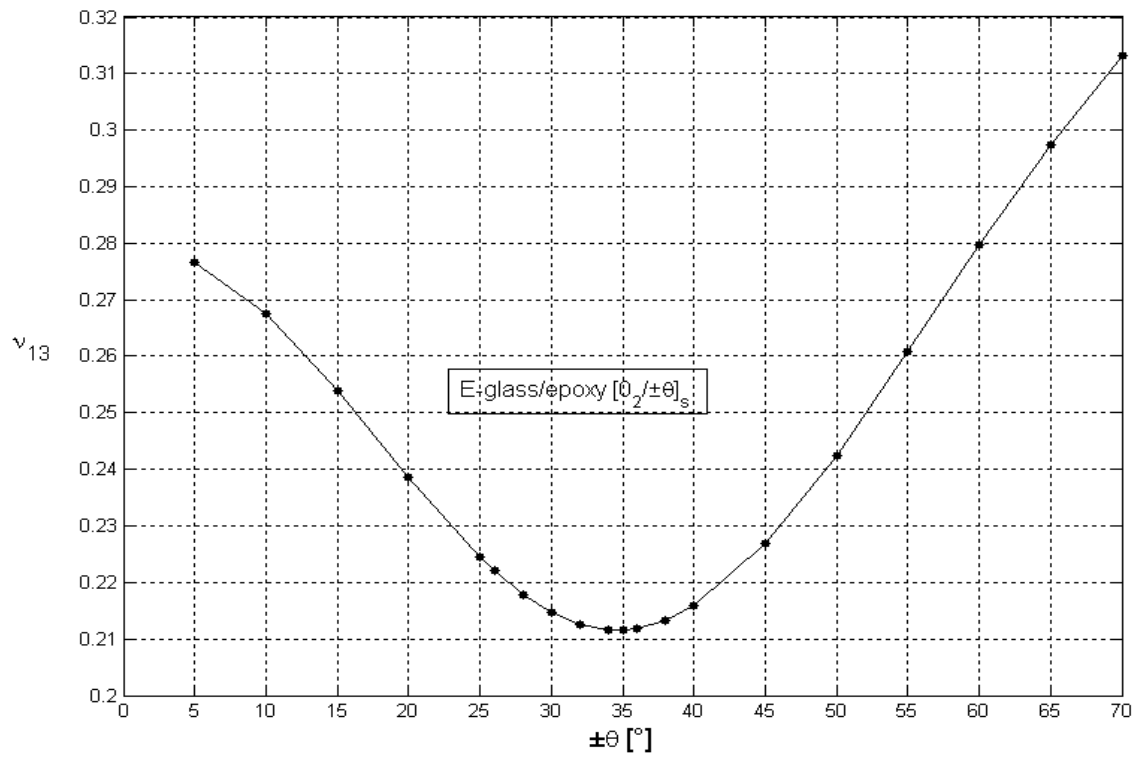


Fig. 4-14 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 2 con fibre di vetro.

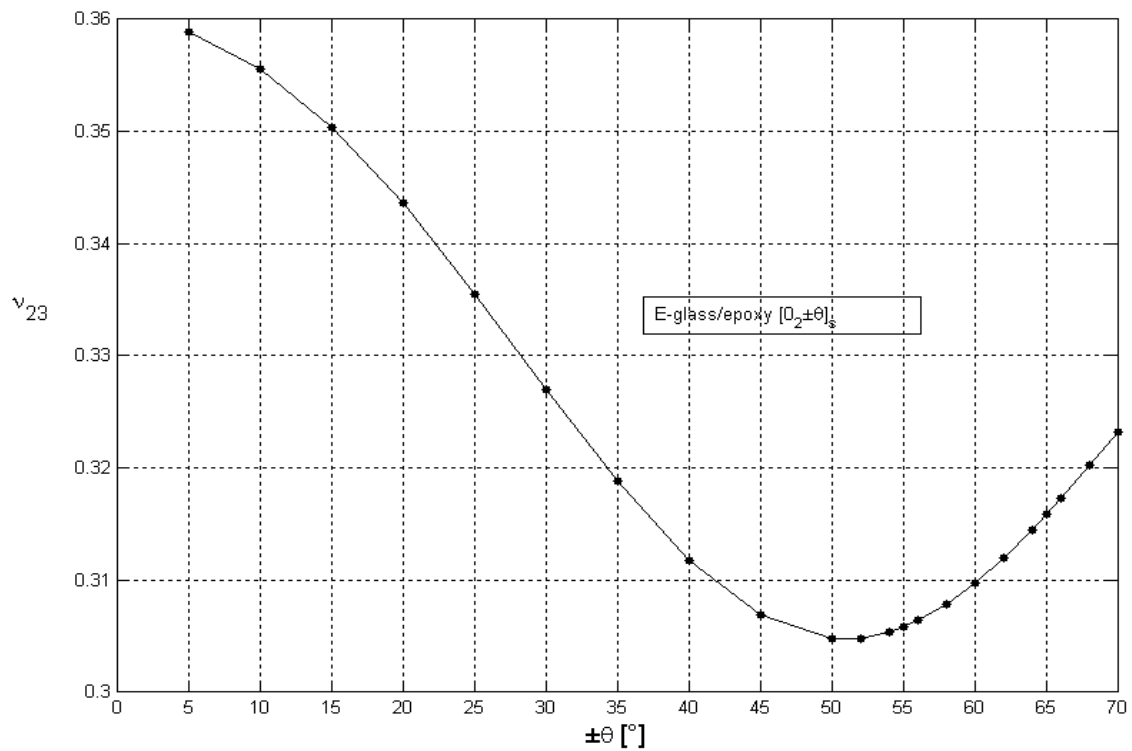


Fig. 4-15 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 2 con fibre di vetro.

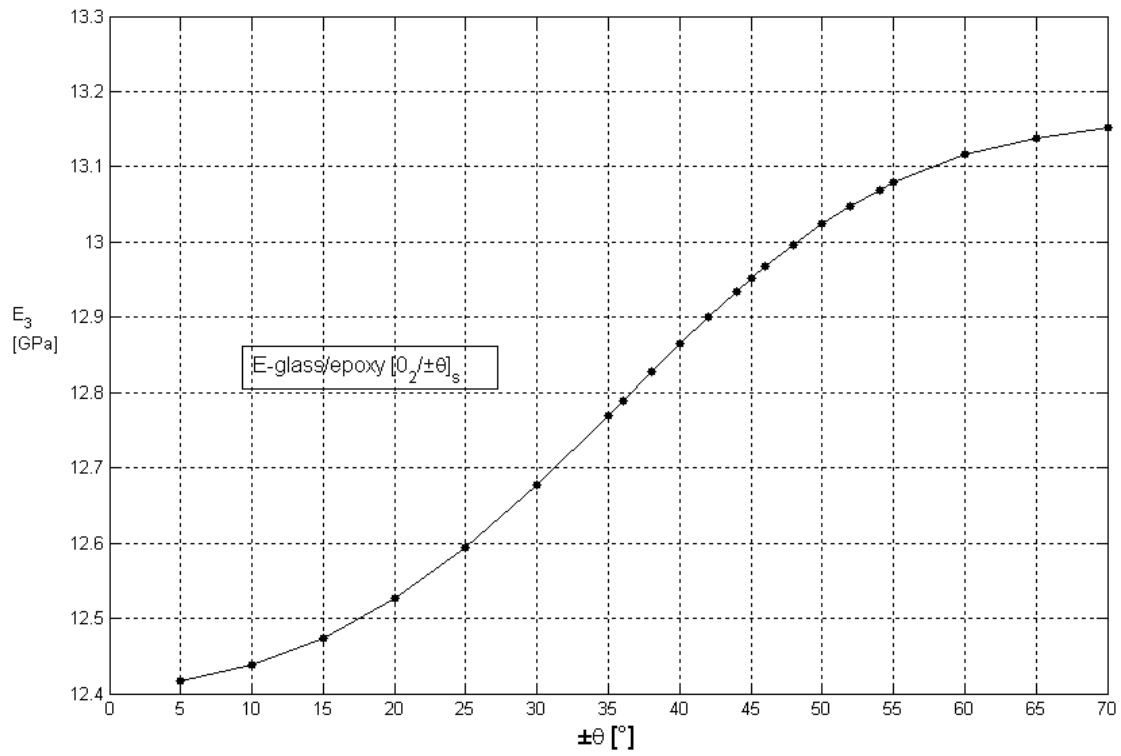


Fig. 4-16 Grafico di  $E_3$  nel modello 2 con fibre di vetro.

**Kevlar-49/epoxy**

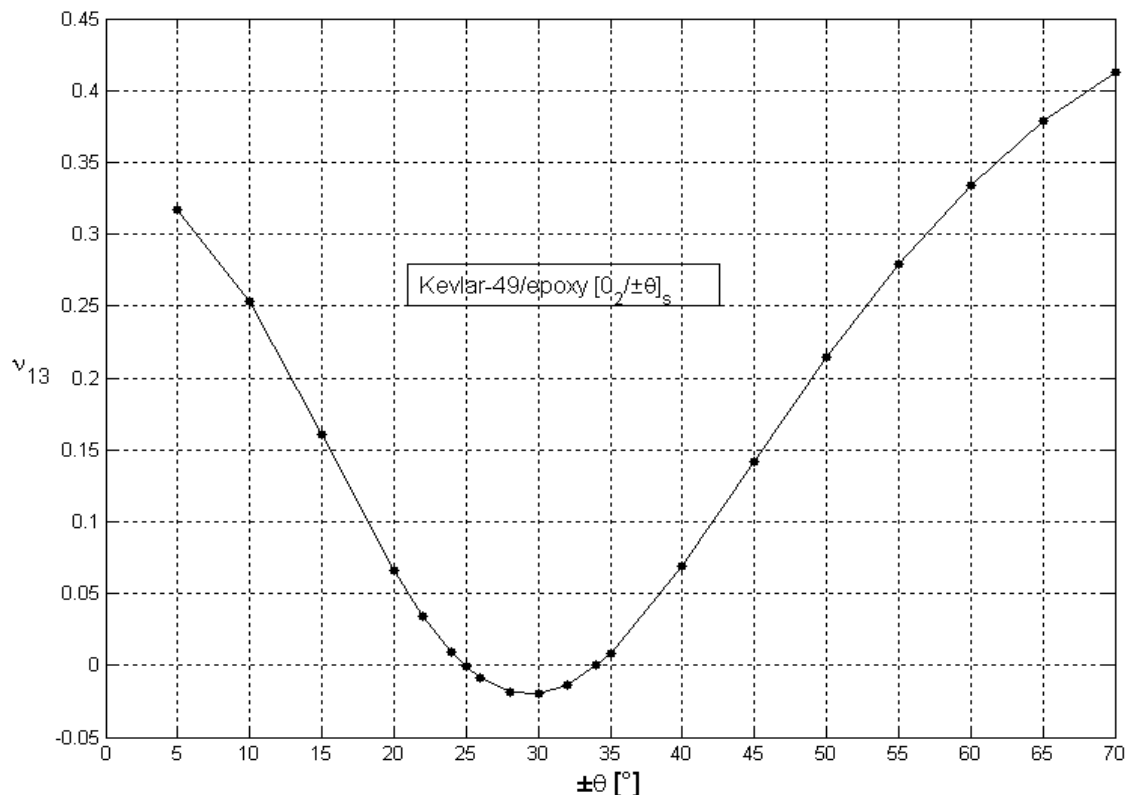


Fig. 4-17 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 2 con fibre di kevlar.

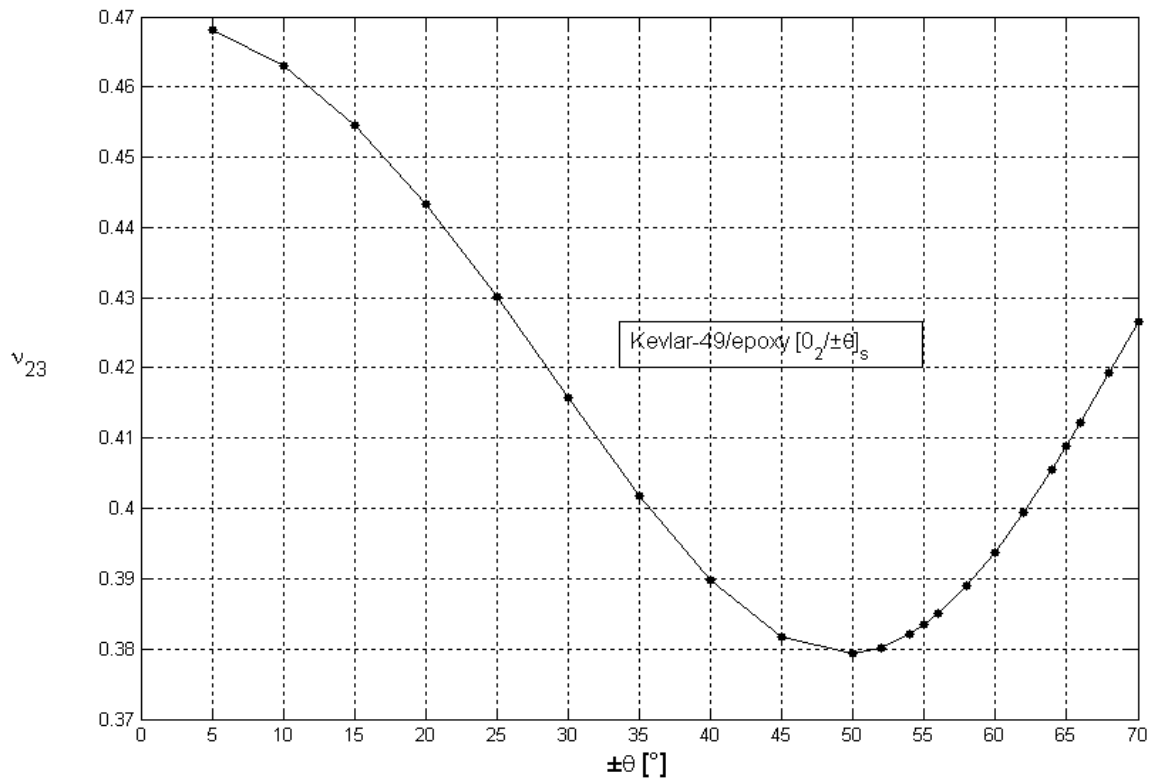


Fig. 4-18 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 2 con fibre di kevlar.

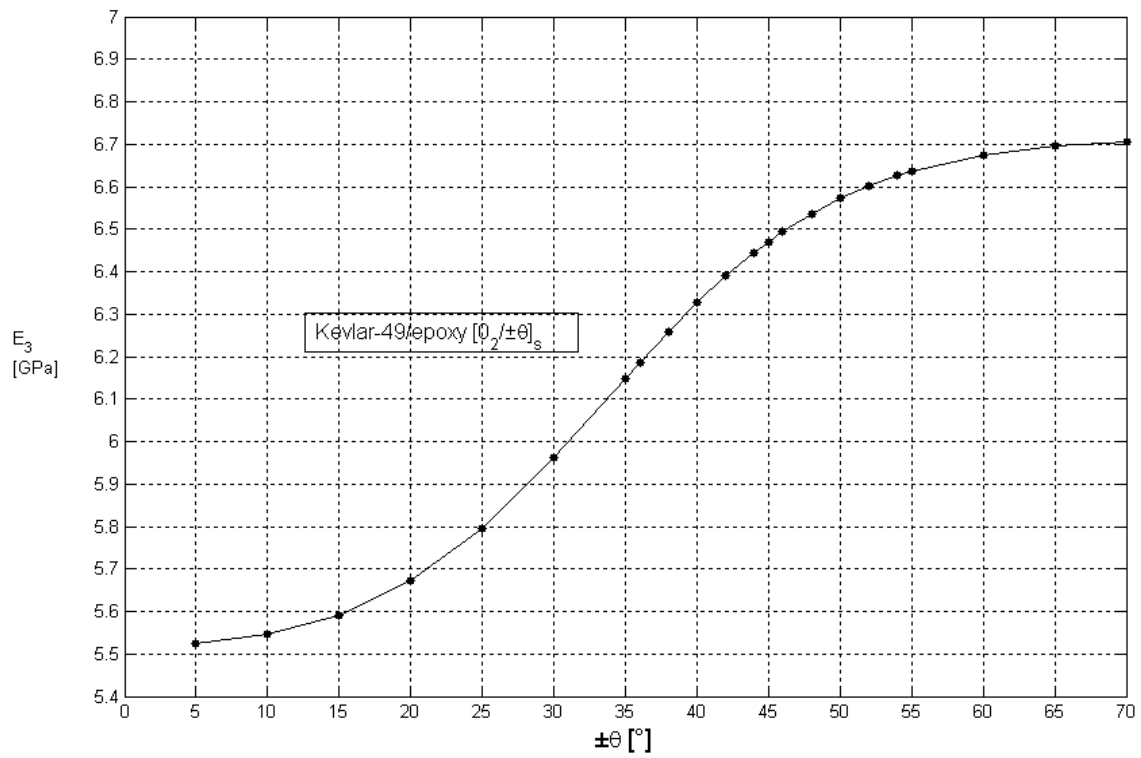
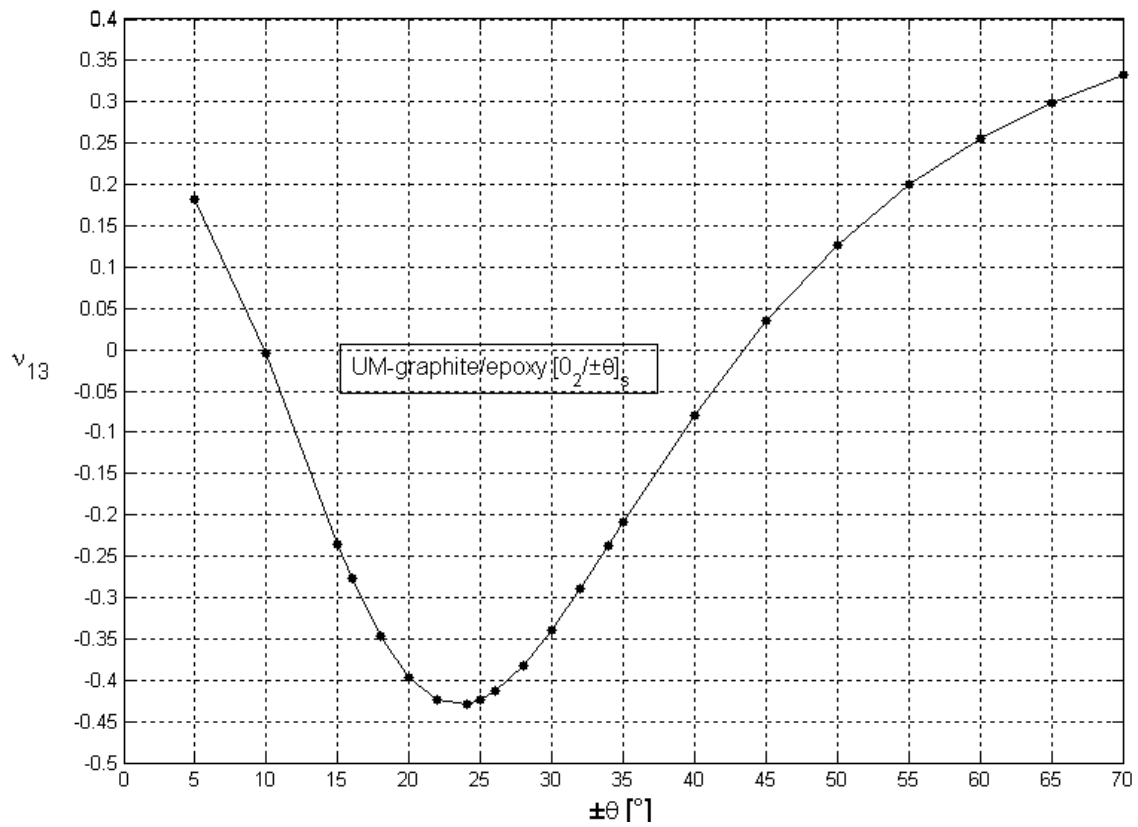
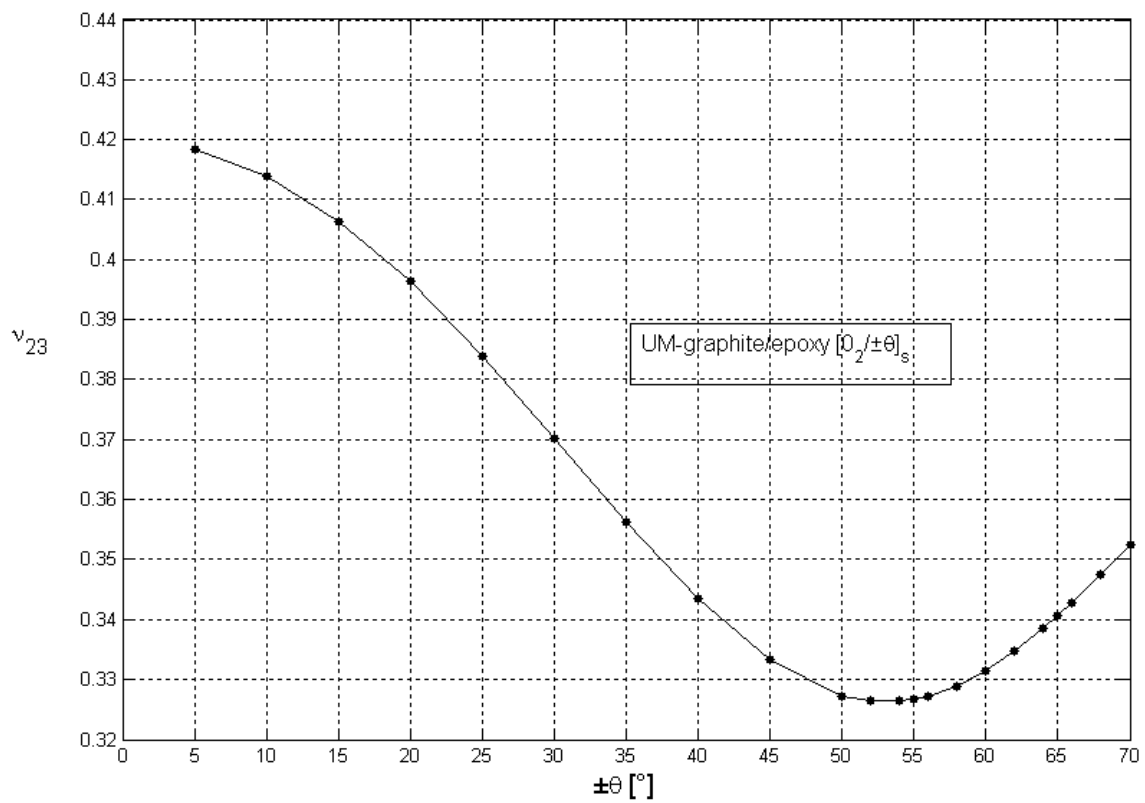


Fig. 4-19 Grafico di  $E_3$  nel modello 2 con fibre di kevlar.

**UM- graphite/epoxy**



**Fig. 4-20** Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 2 con fibre di carbonio.



**Fig. 4-21** Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 2 con fibre di carbonio.

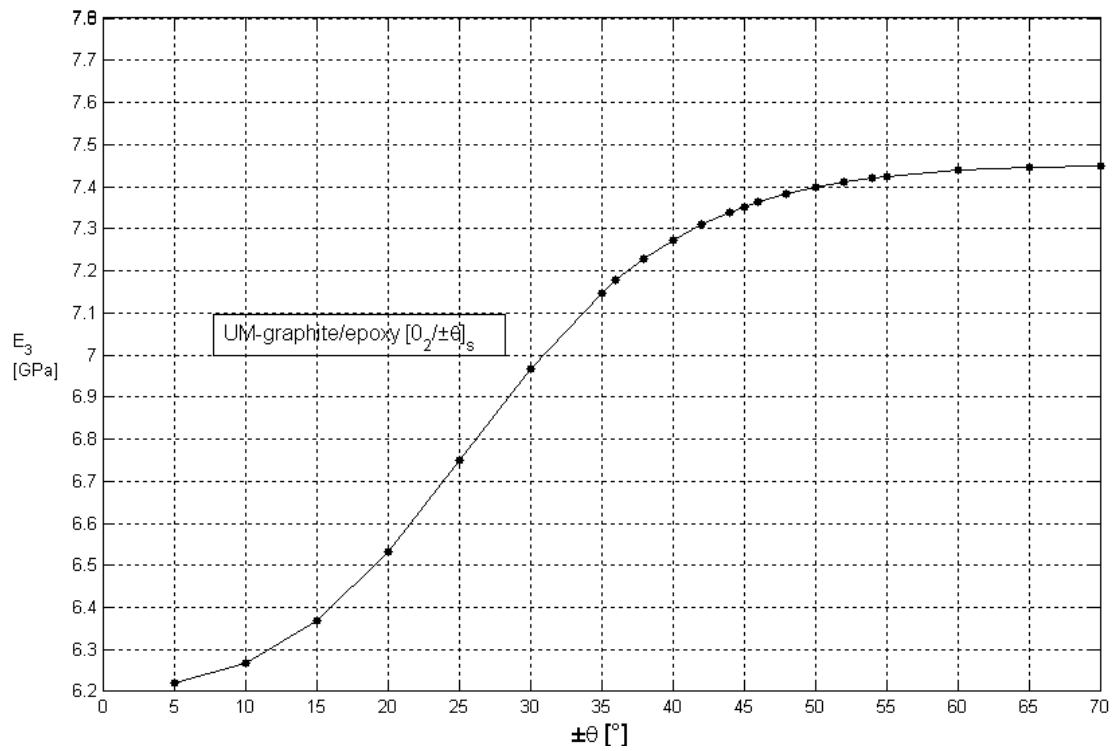


Fig. 4-22 Grafico di  $E_3$  nel modello 2 con fibre di carbonio.

### Grafici comparativi modello 2

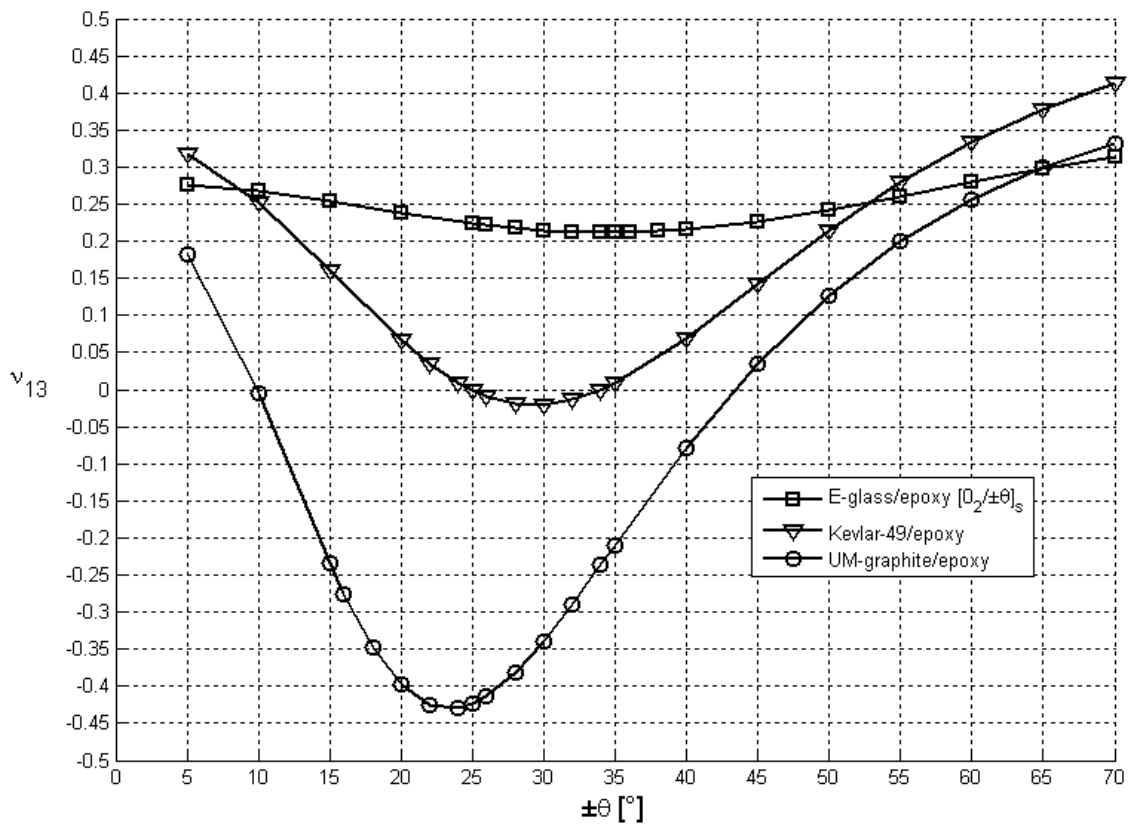


Fig. 4-23 Sovrapposizione dei  $\nu_{13}$  dei laminati con diverse fibre del modello 2.

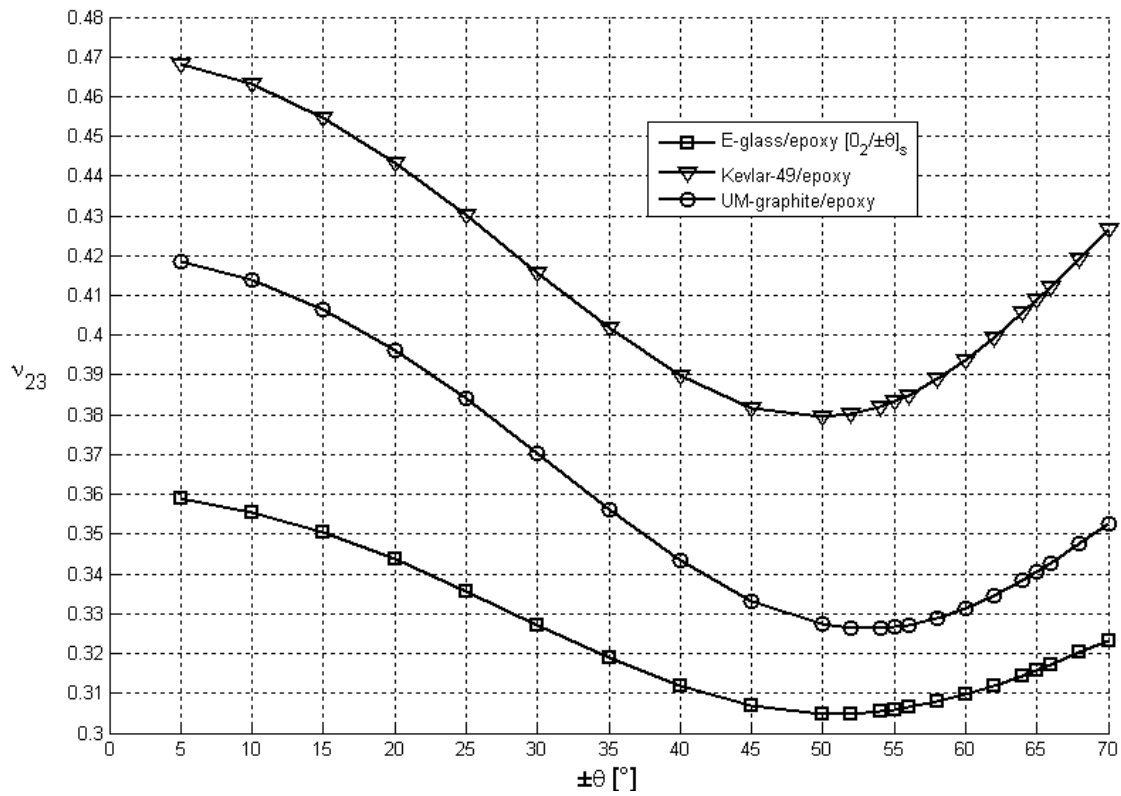


Fig. 4-24 Sovrapposizione dei  $v_{23}$  dei laminati con diverse fibre del modello 2.

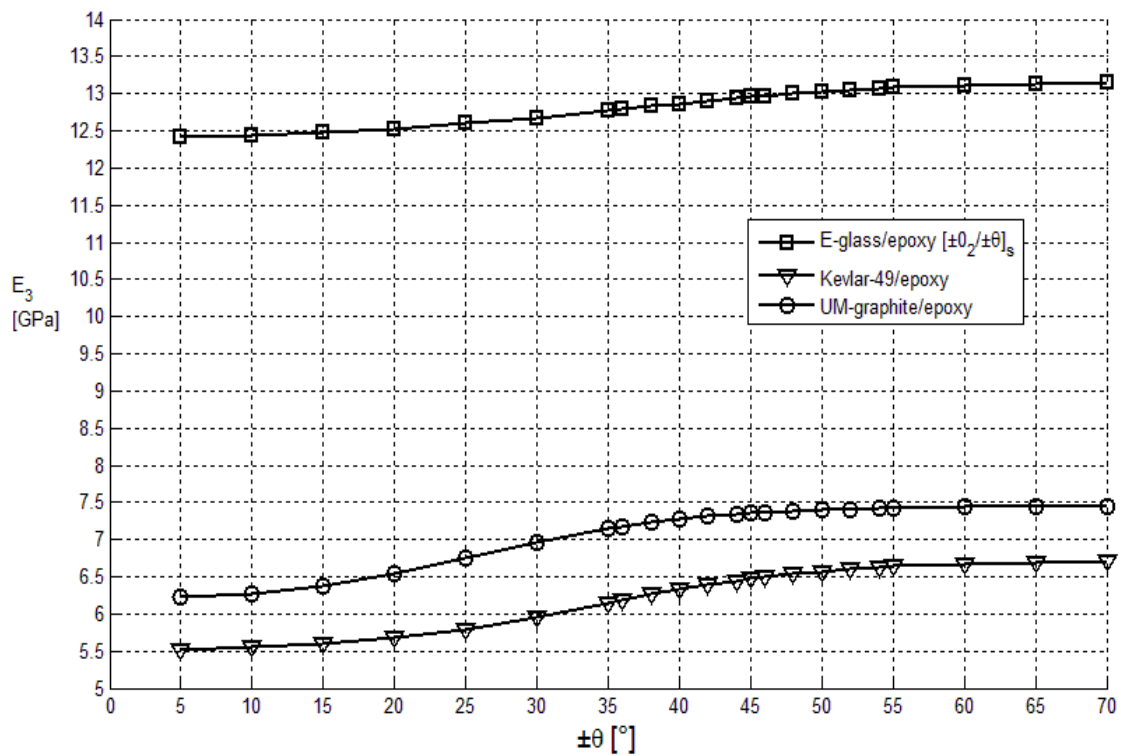


Fig. 4-25 Sovrapposizione degli  $E_3$  dei laminati con diverse fibre del modello 2.



## Modello 3

*E-glass/epoxy*

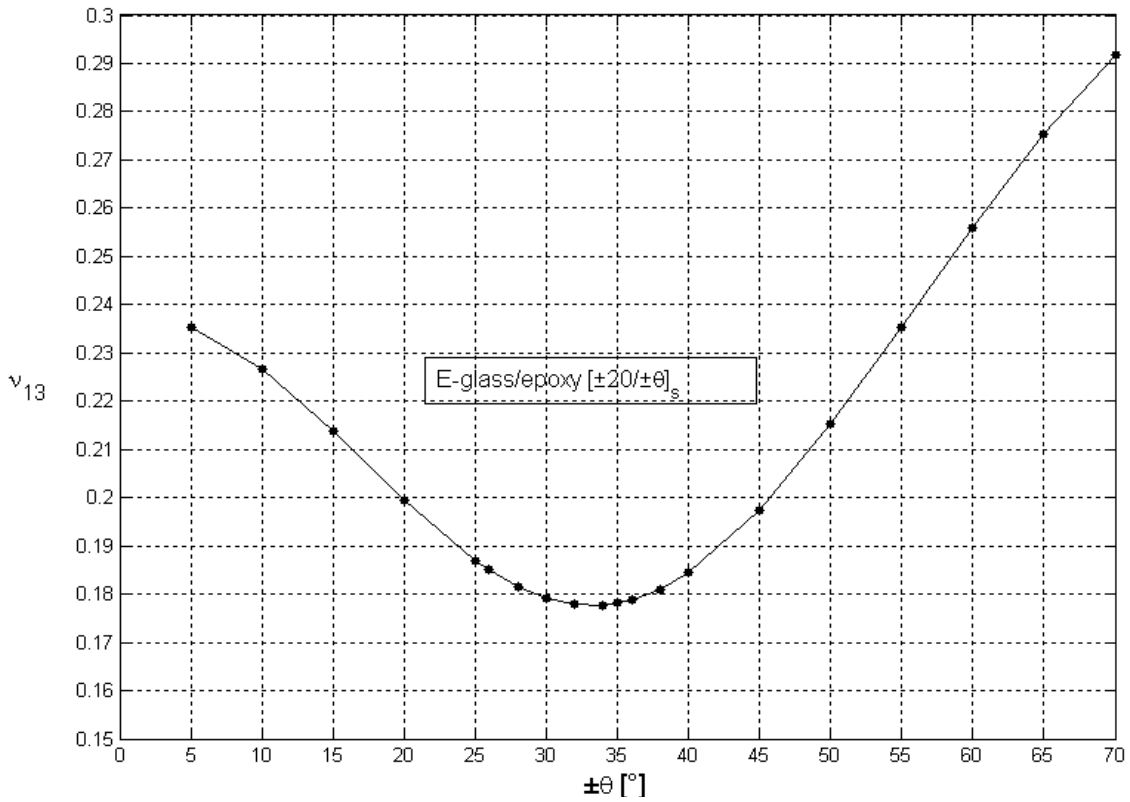


Fig. 4-26 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 3 con fibre di vetro.

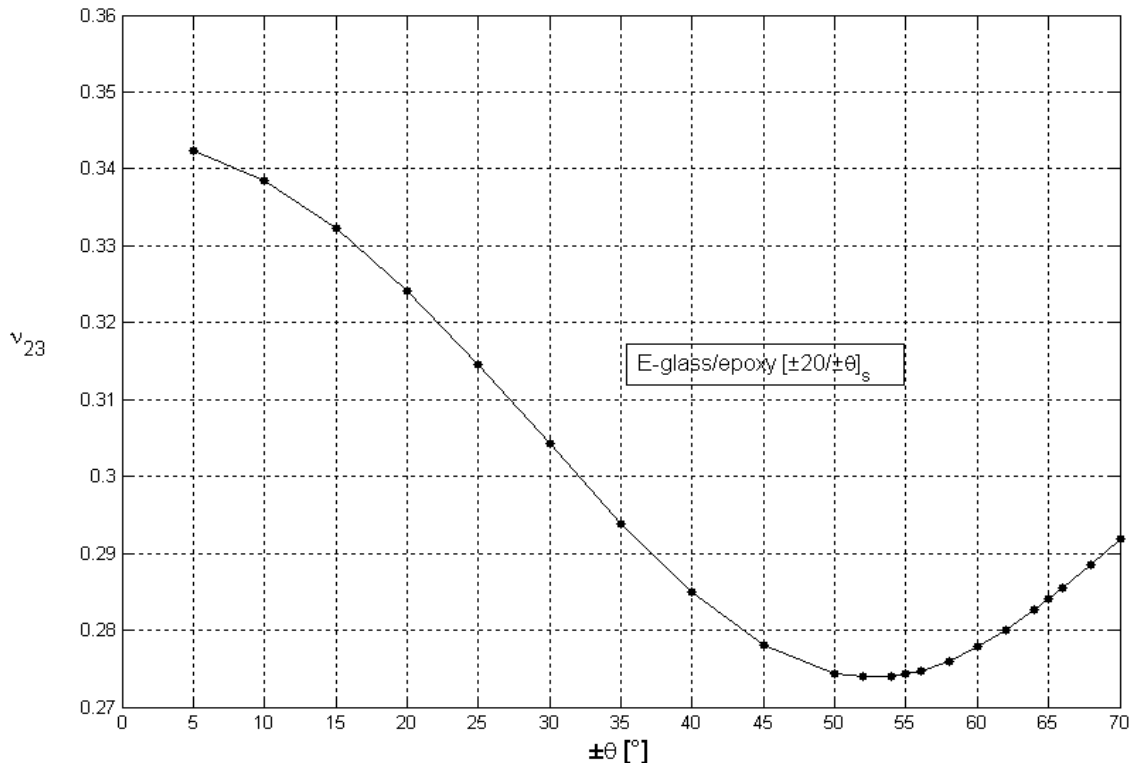


Fig. 4-27 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 3 con fibre di vetro.

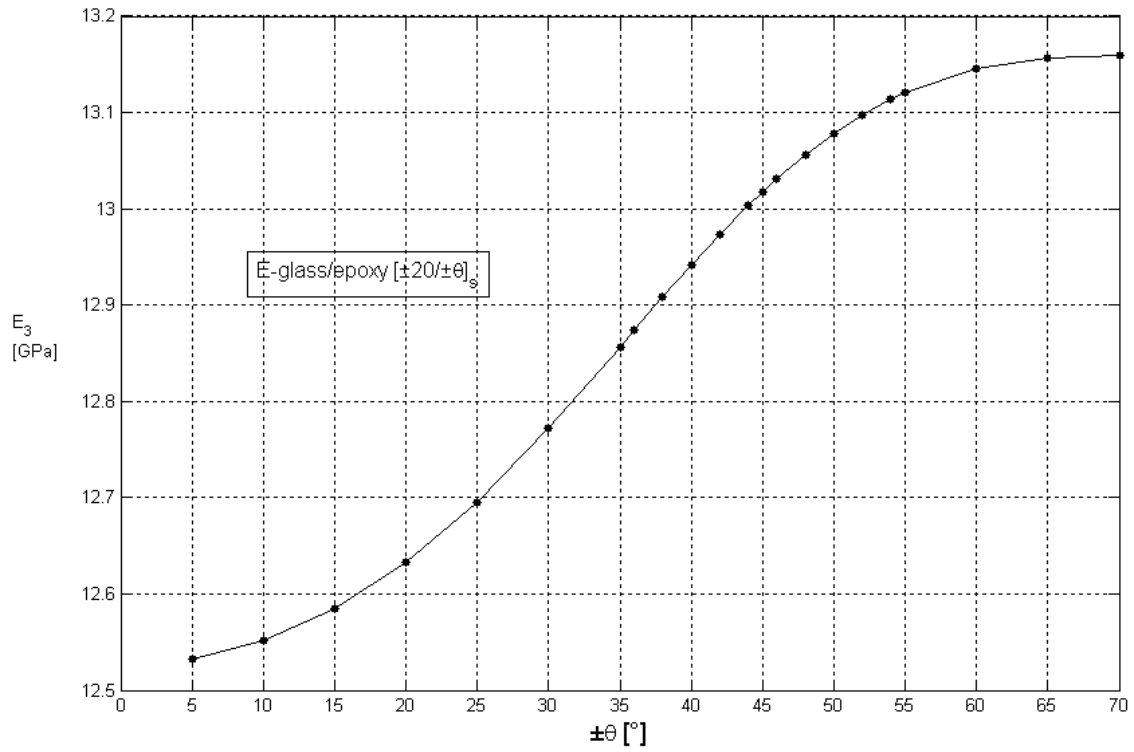


Fig. 4-28 Grafico di  $E_3$  nel modello 3 con fibre di vetro.

**Kevlar- 49/epoxy**

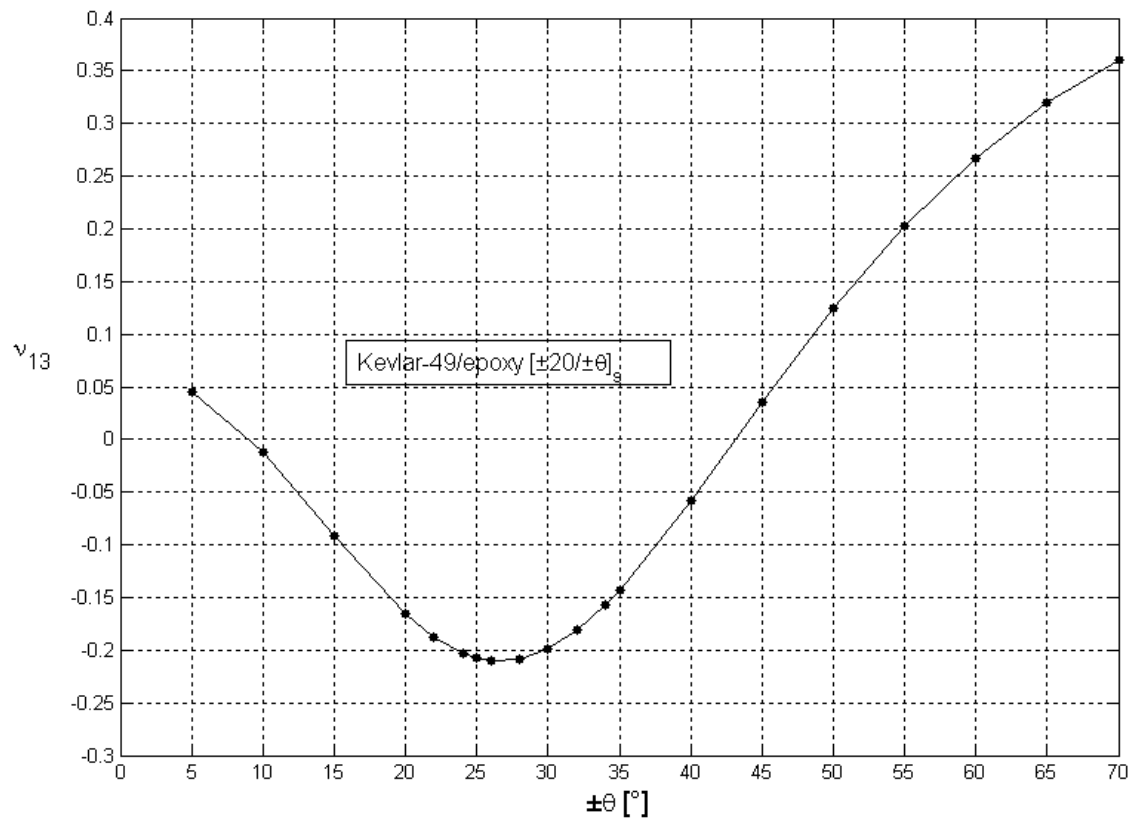


Fig. 4-29 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 3 con fibre di kevlar.

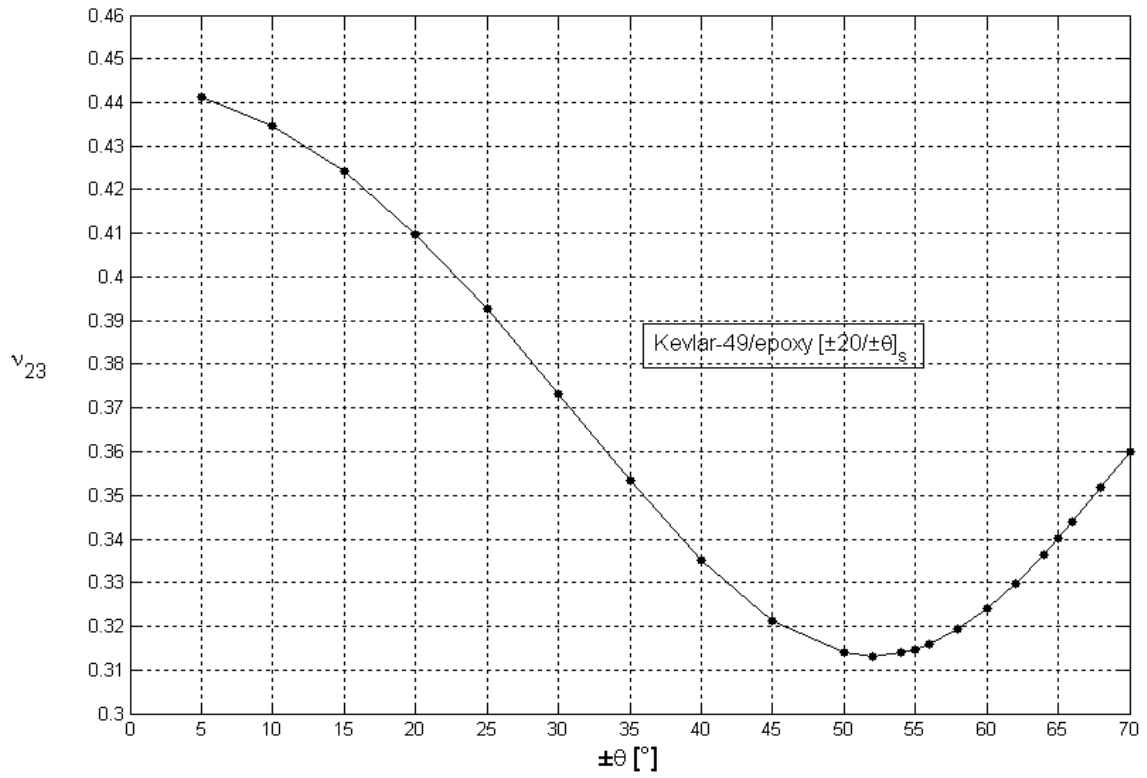


Fig. 4-30 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 3 con fibre di kevlar.

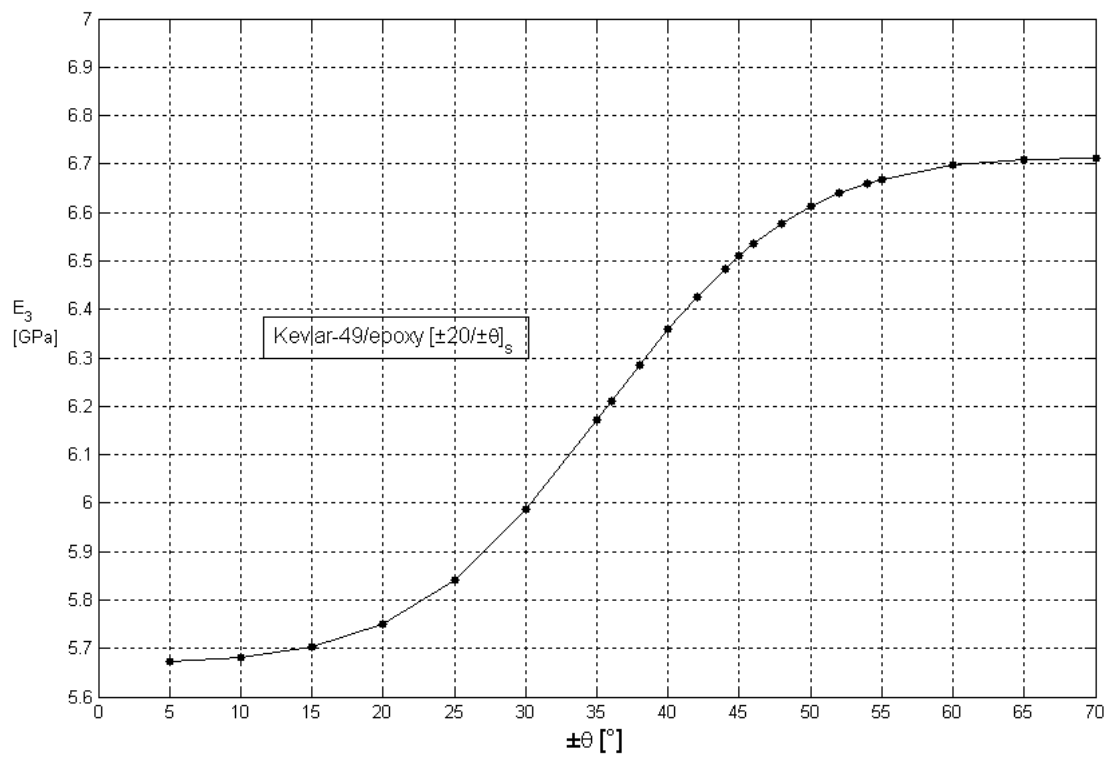
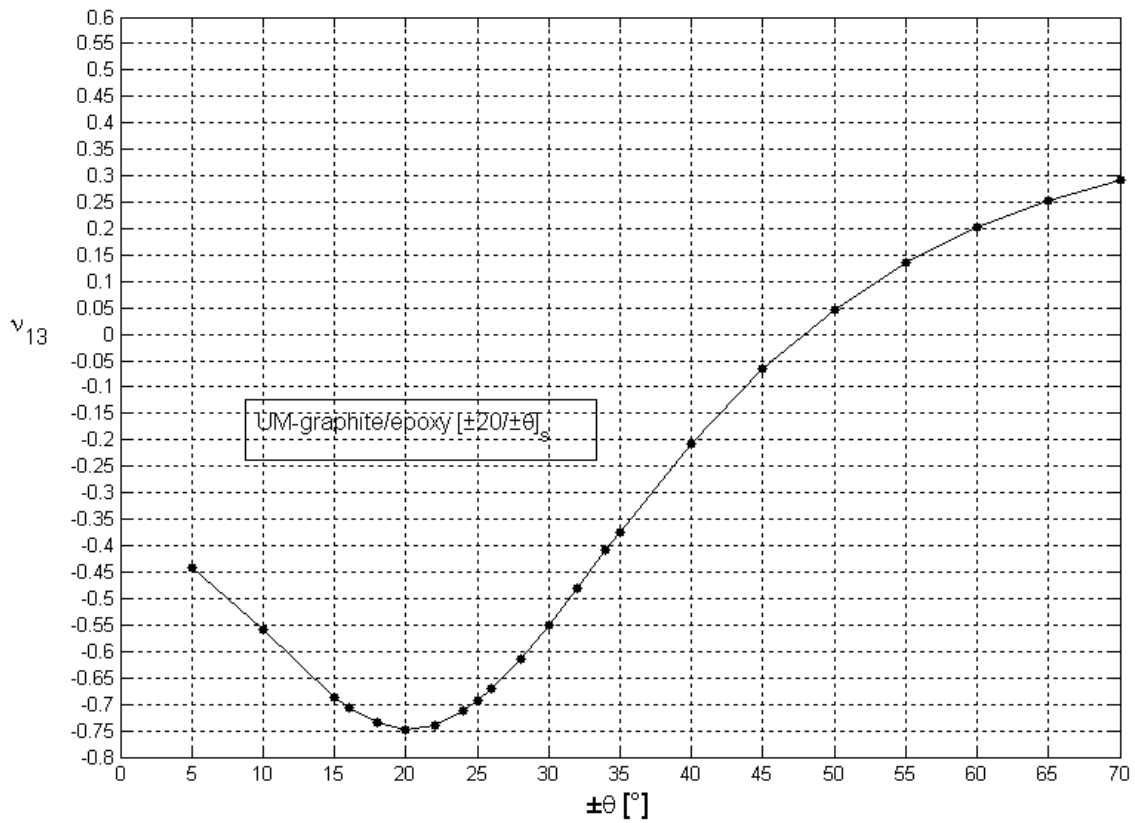
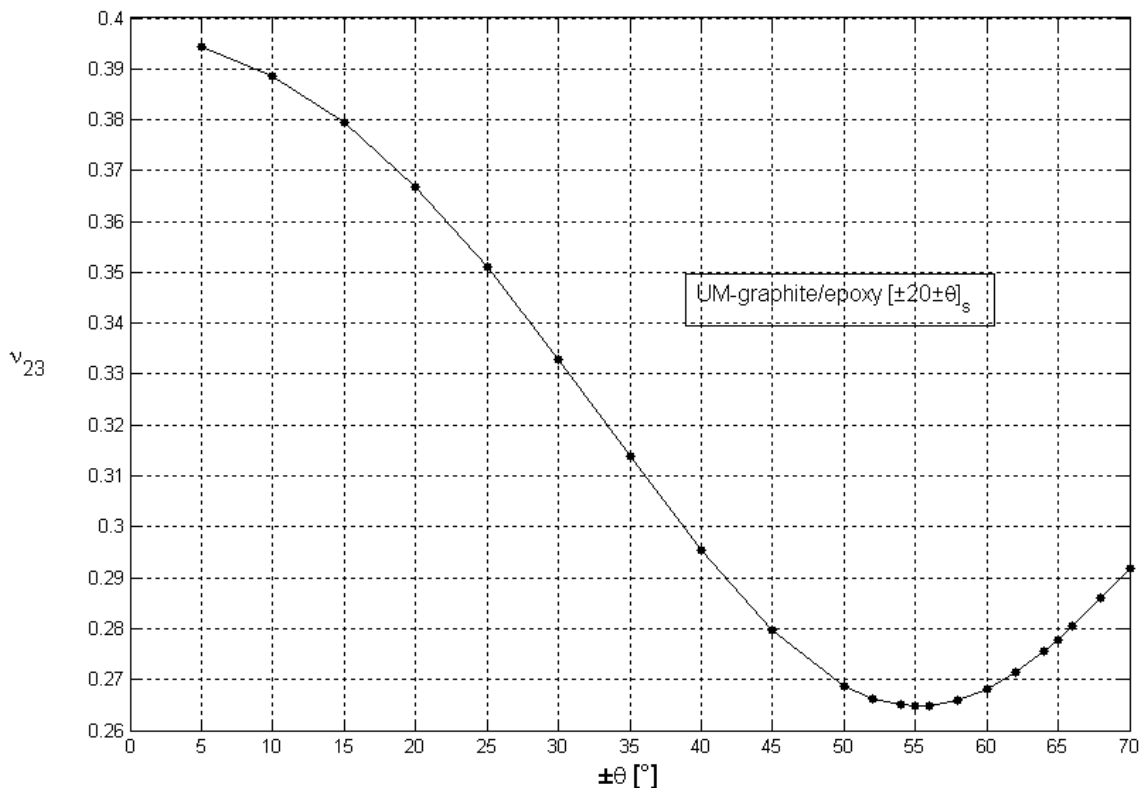


Fig. 4-31 Grafico di  $E_3$  nel modello 3 con fibre di kevlar.

**UM- graphite/epoxy**



**Fig. 4-32** Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 3 con fibre di carbonio.



**Fig. 4-33** Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 3 con fibre di carbonio.

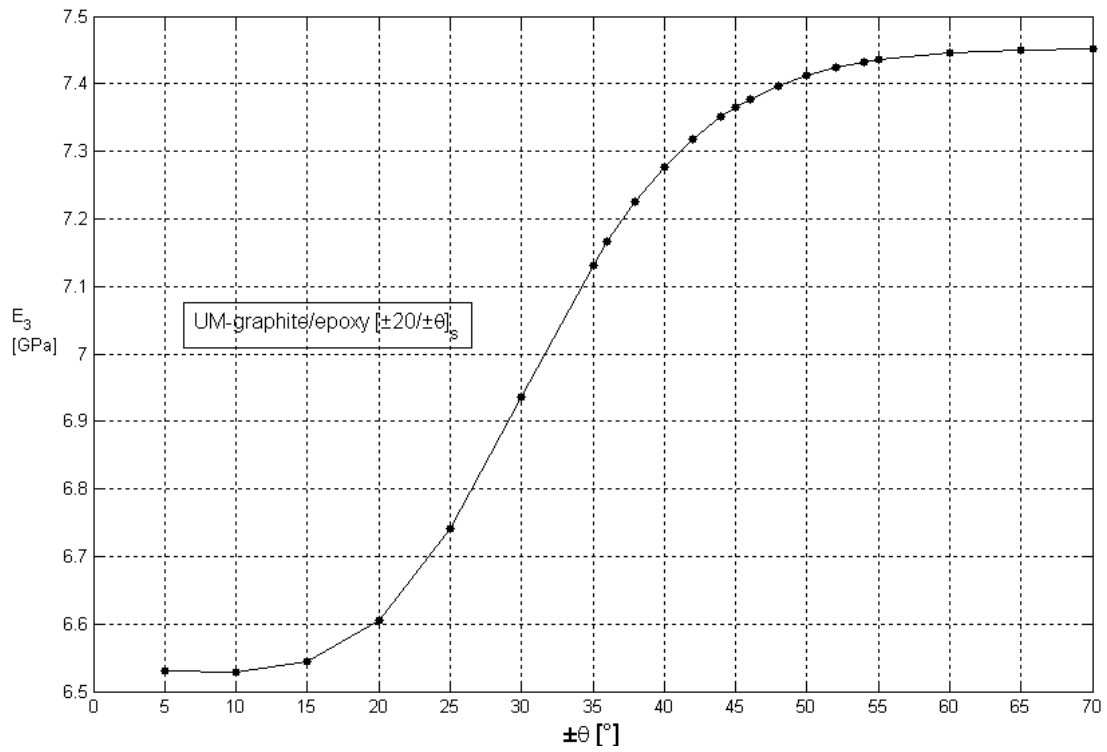


Fig. 4-34 Grafico di  $E_3$  nel modello 3 con fibre di carbonio.

### Grafici comparativi modello 3

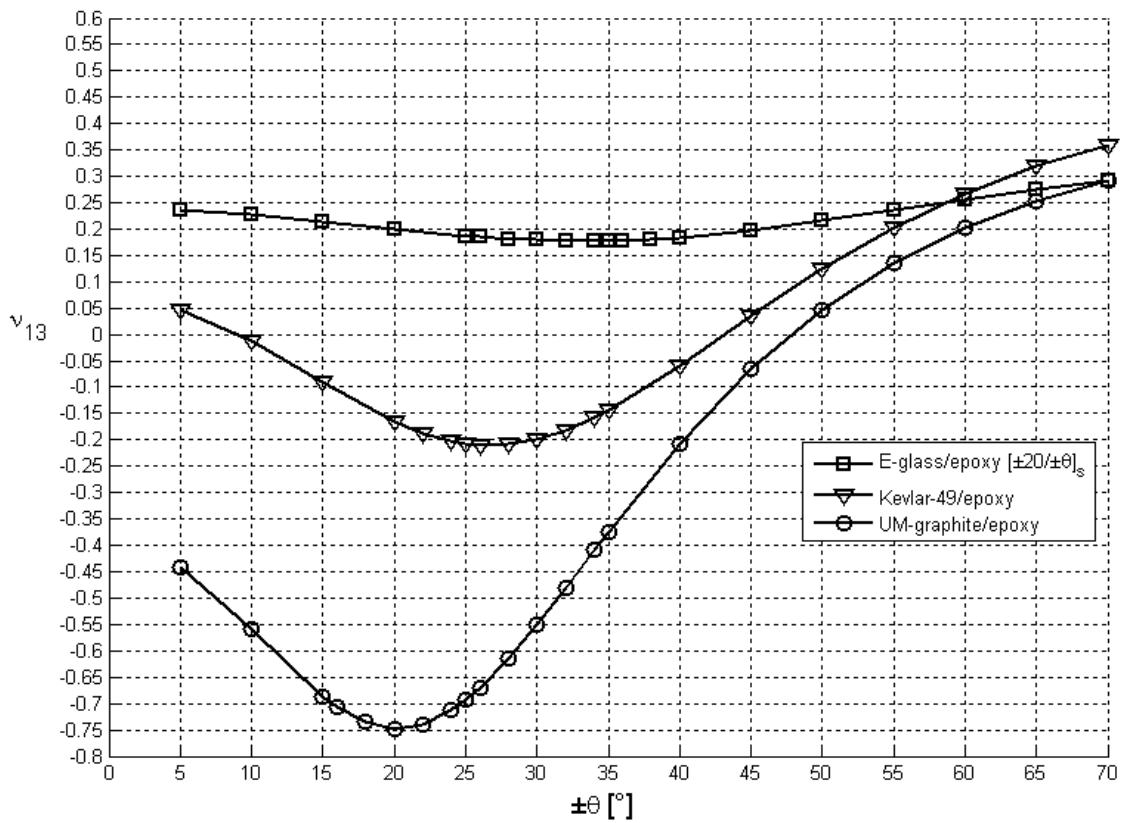


Fig. 4-35 Sovrapposizione dei  $\nu_{13}$  dei laminati con diverse fibre del modello 3.

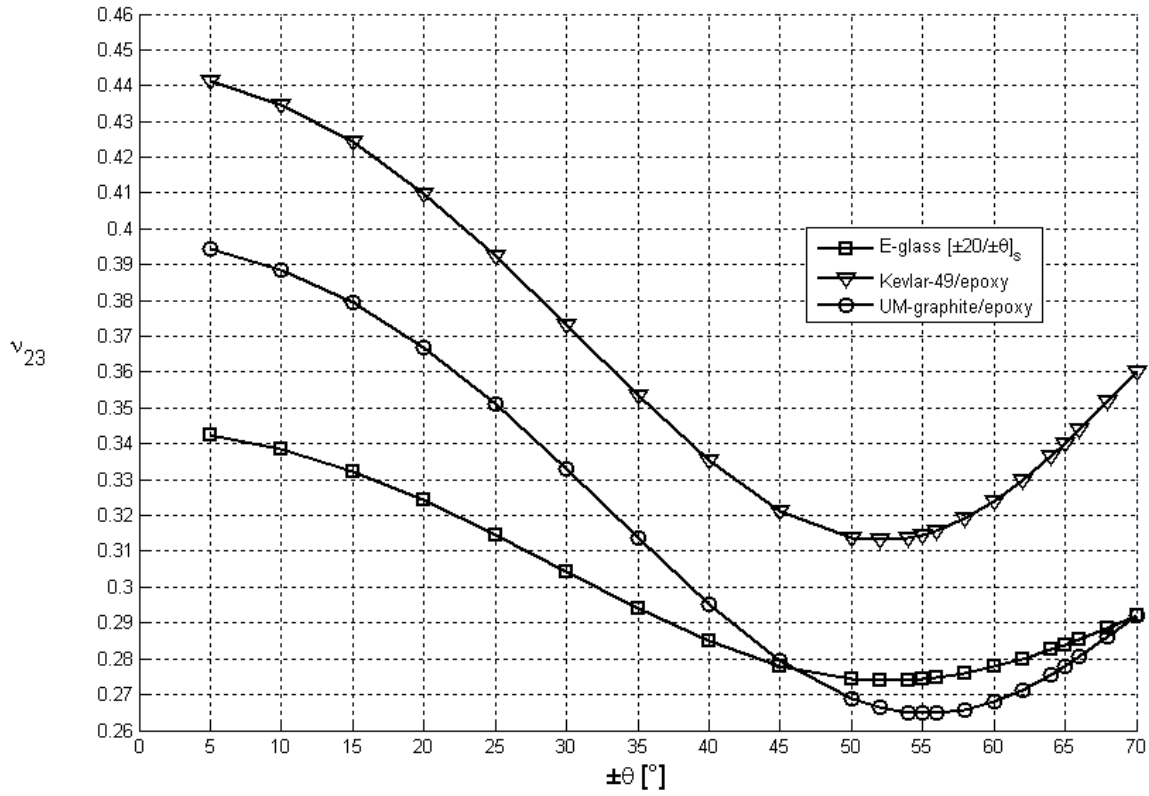


Fig. 4-36 Sovrapposizione dei  $\nu_{23}$  dei laminati con diverse fibre del modello 3.

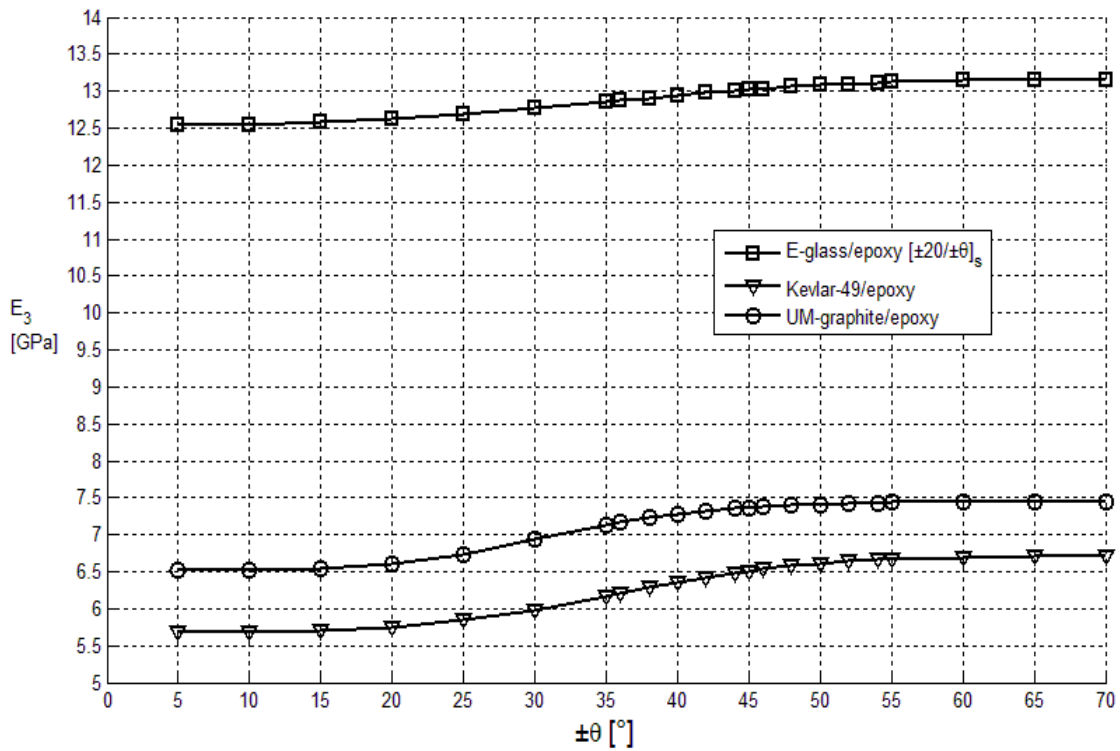


Fig. 4-37 Sovrapposizione degli  $E_3$  dei laminati con diverse fibre del modello 3.

## Modello 4

*E-glass/epoxy*

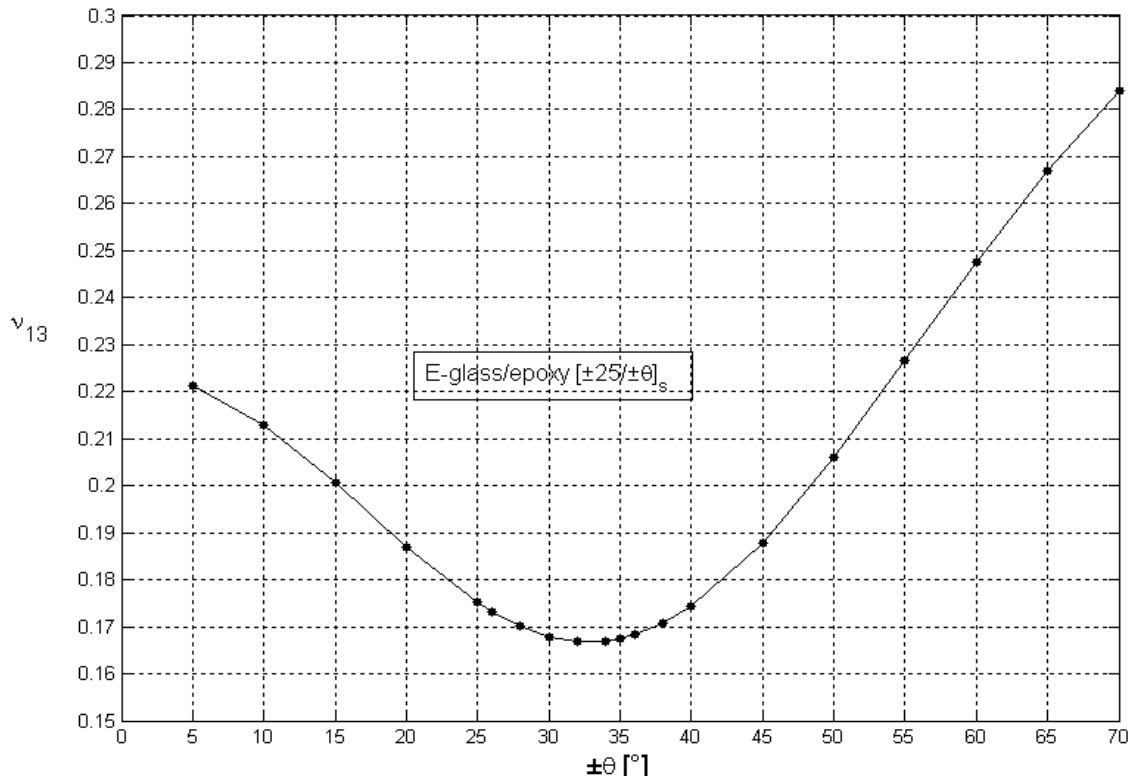


Fig. 4-38 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 4 con fibre di vetro.

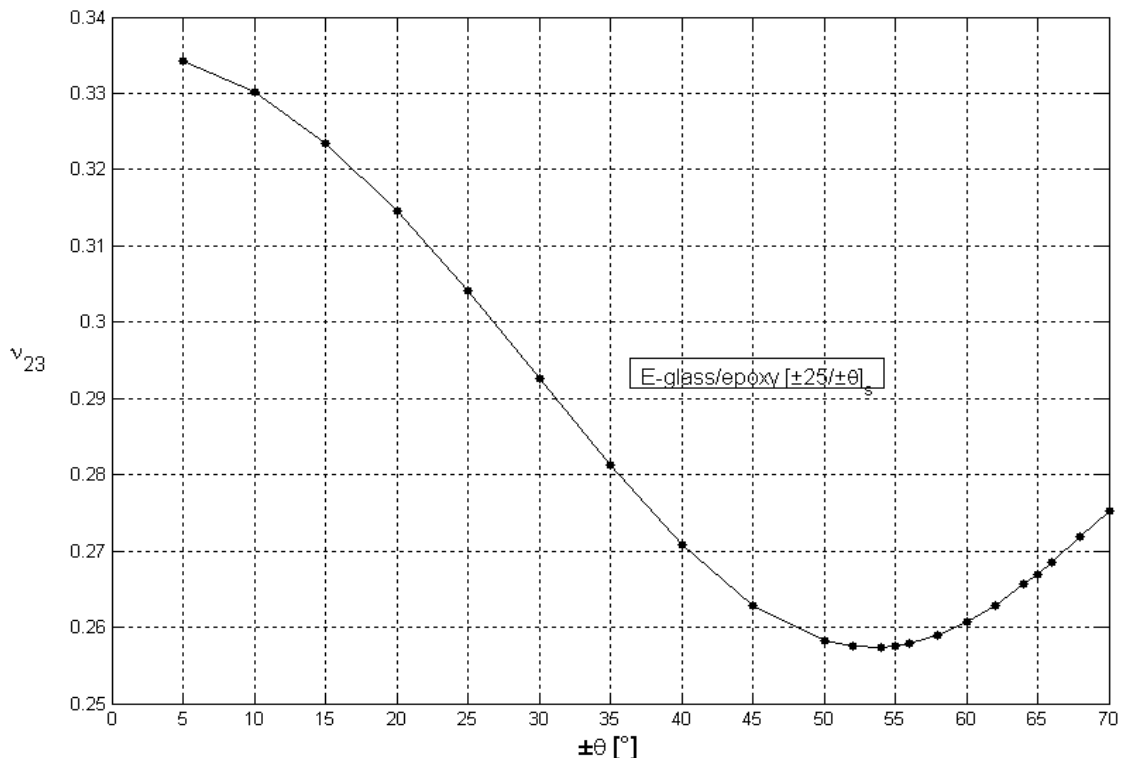


Fig. 4-39 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 4 con fibre di vetro.

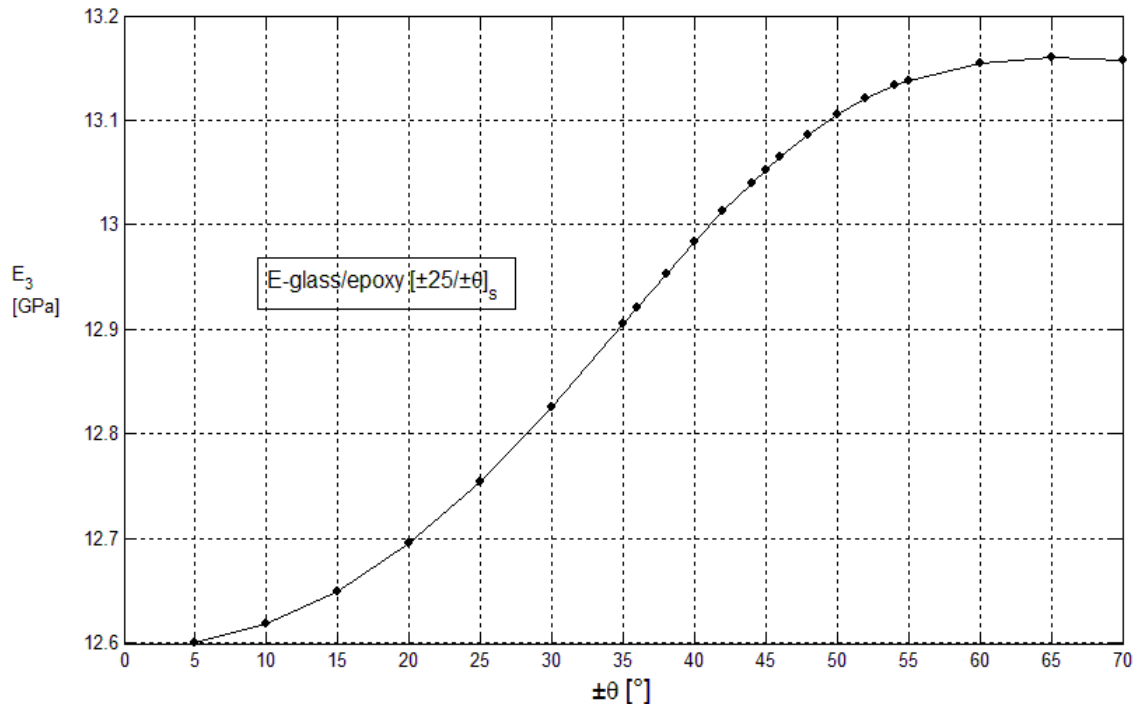


Fig. 4-40 Grafico di  $E_3$  nel modello 4 con fibre di vetro.

**Kevlar- 49/epoxy**

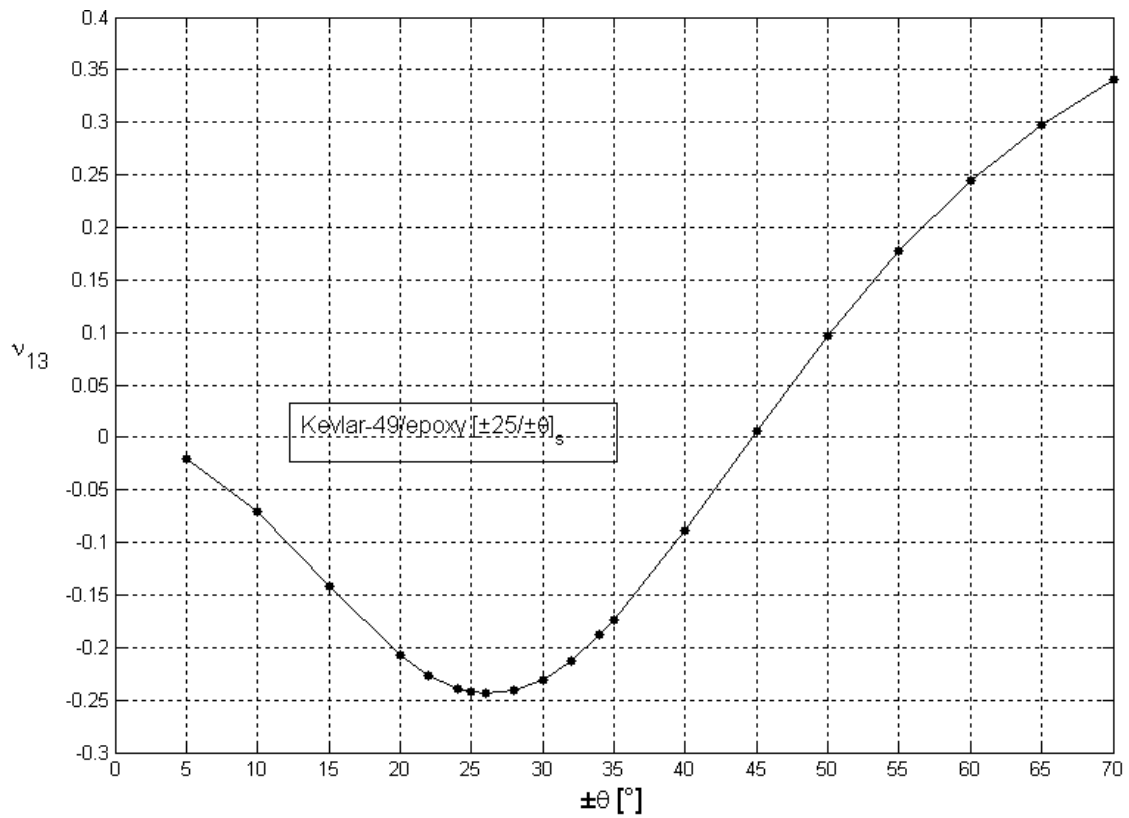


Fig. 4-41 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 4 con fibre di kevlar.



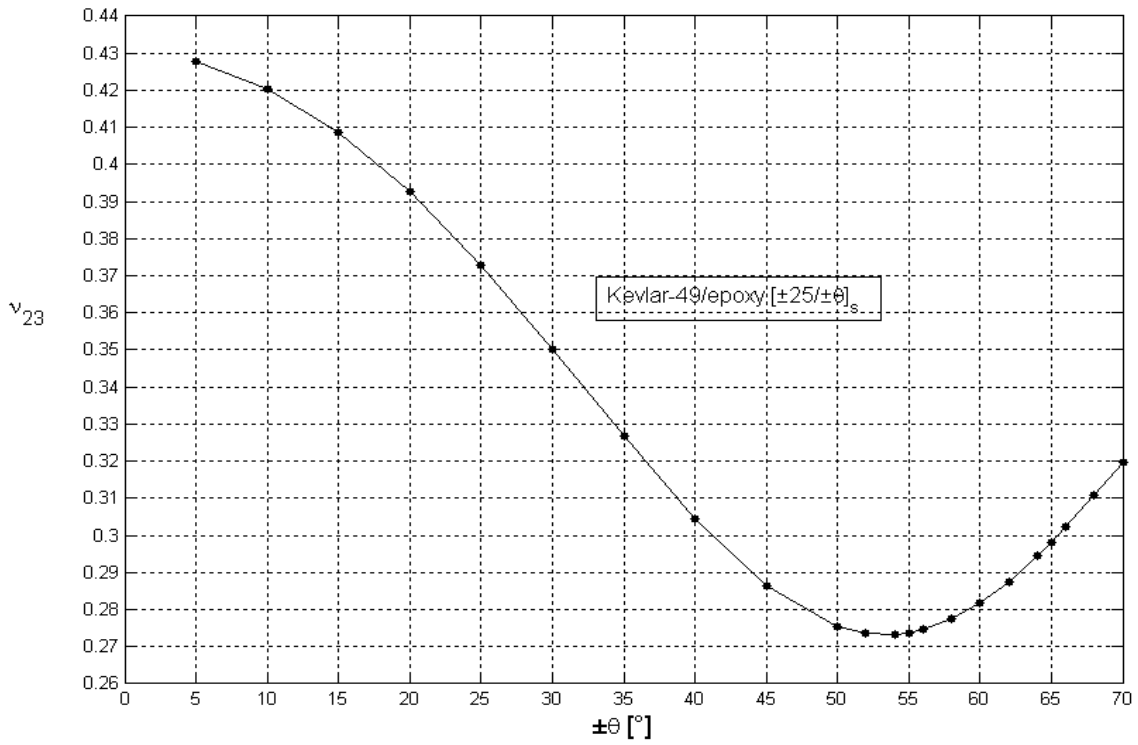


Fig. 4-42 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 4 con fibre di kevlar.

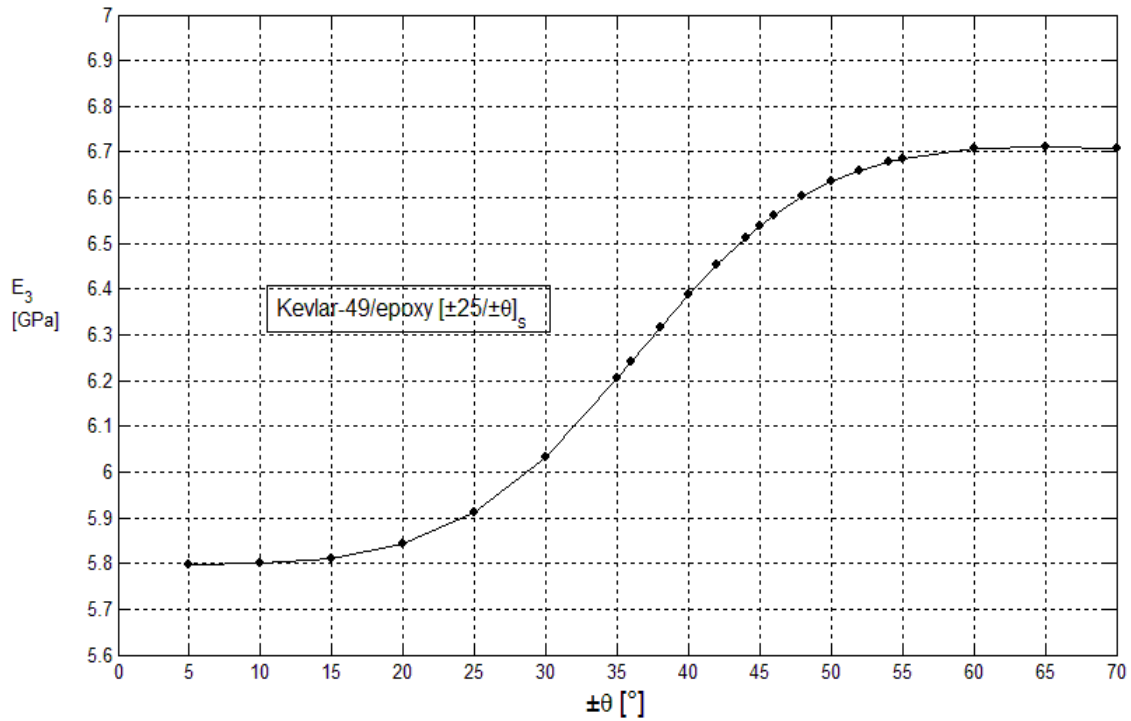


Fig. 4-43 Grafico di  $E_3$  nel modello 4 con fibre di kevlar.

## UM- graphite/epoxy

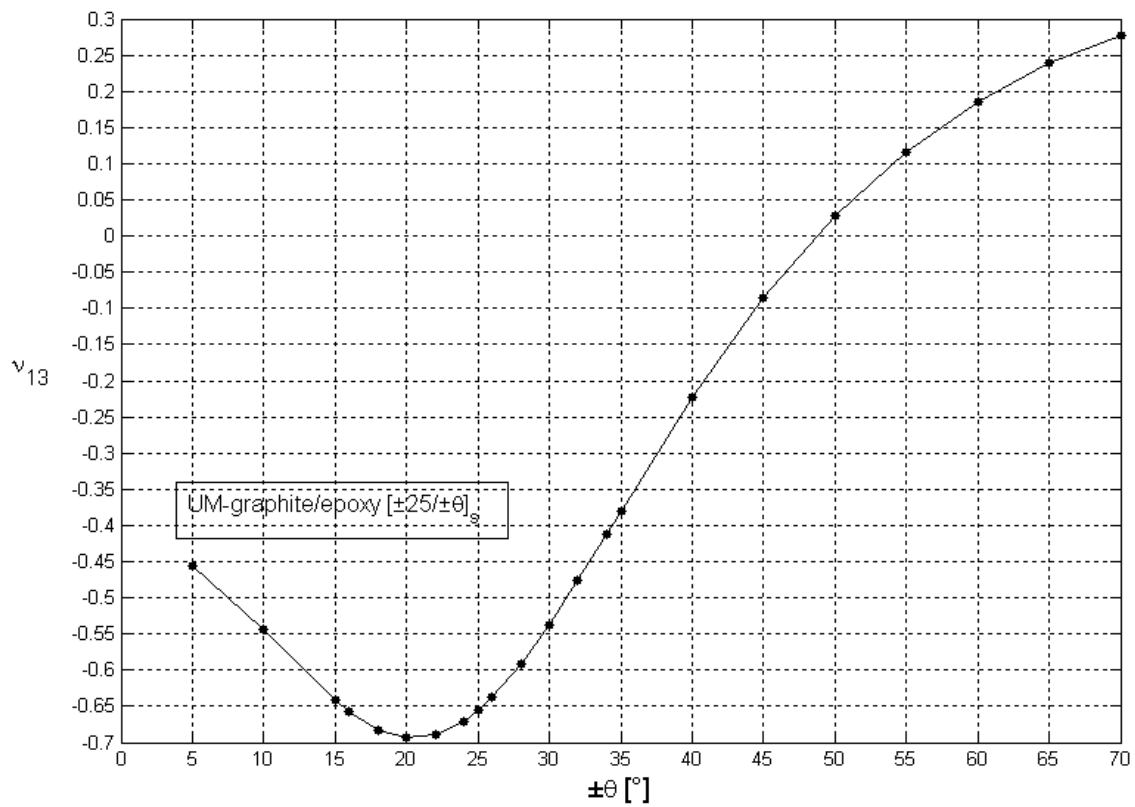


Fig. 4-44 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 4 con fibre di carbonio.

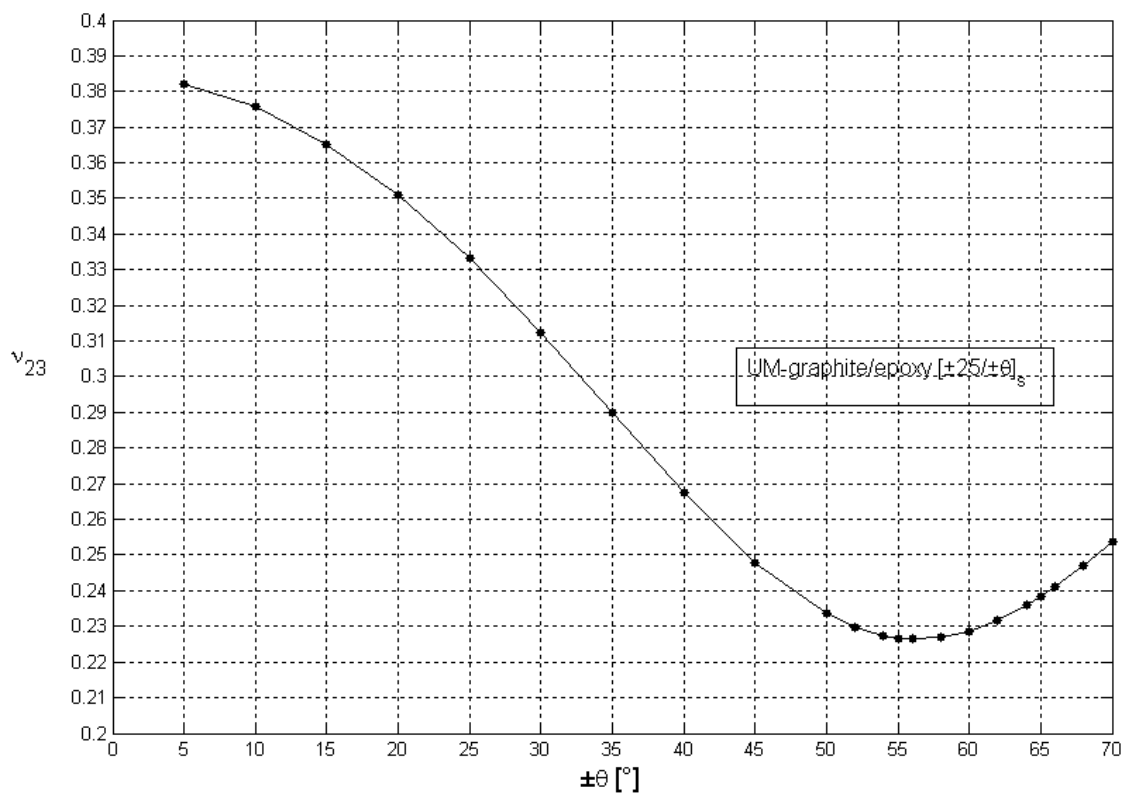


Fig. 4-45 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 4 con fibre di carbonio.

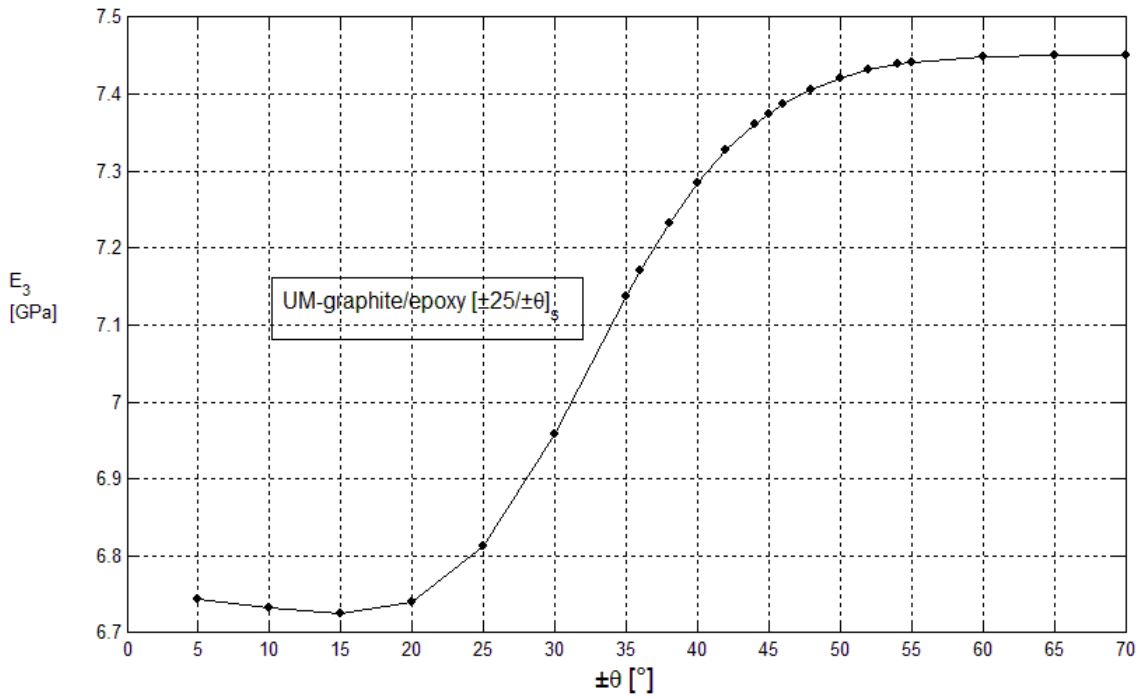


Fig. 4-46 Grafico di  $E_3$  nel modello 4 con fibre di carbonio.

### Grafici comparativi modello 4

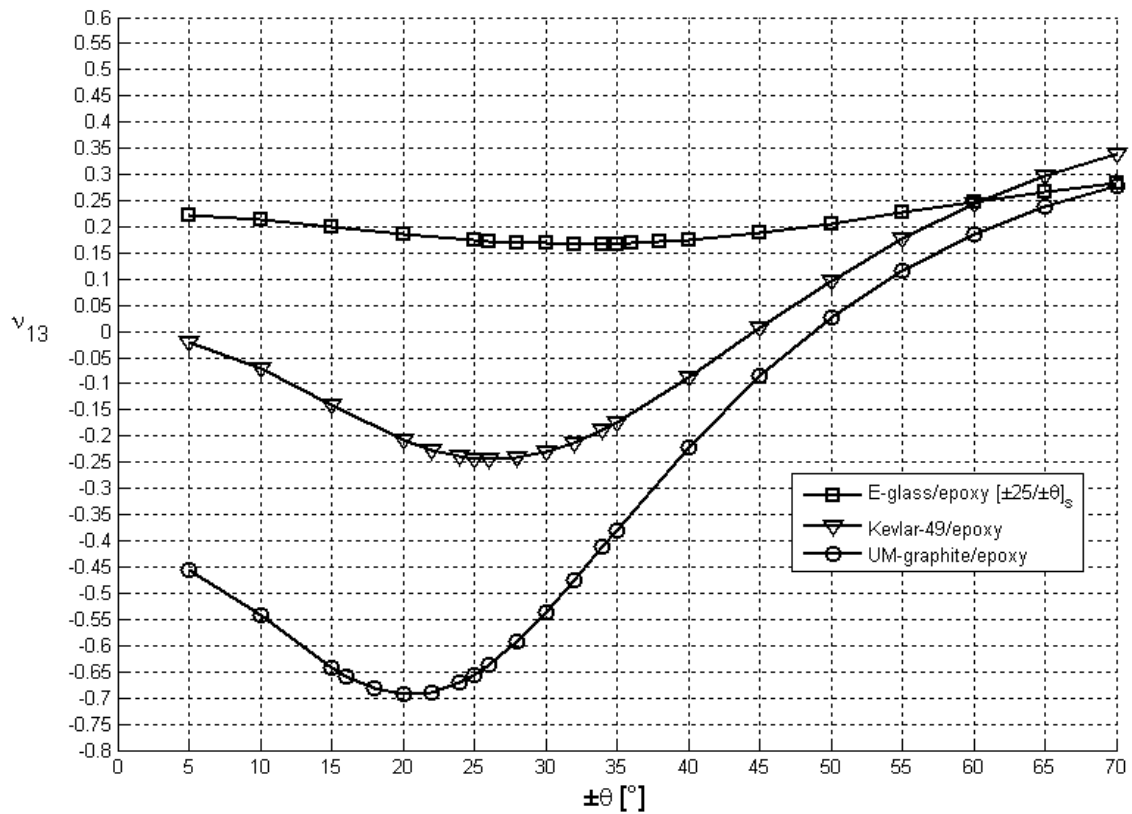


Fig. 4-47 Sovrapposizione dei  $\nu_{13}$  dei laminati con diverse fibre del modello 4.

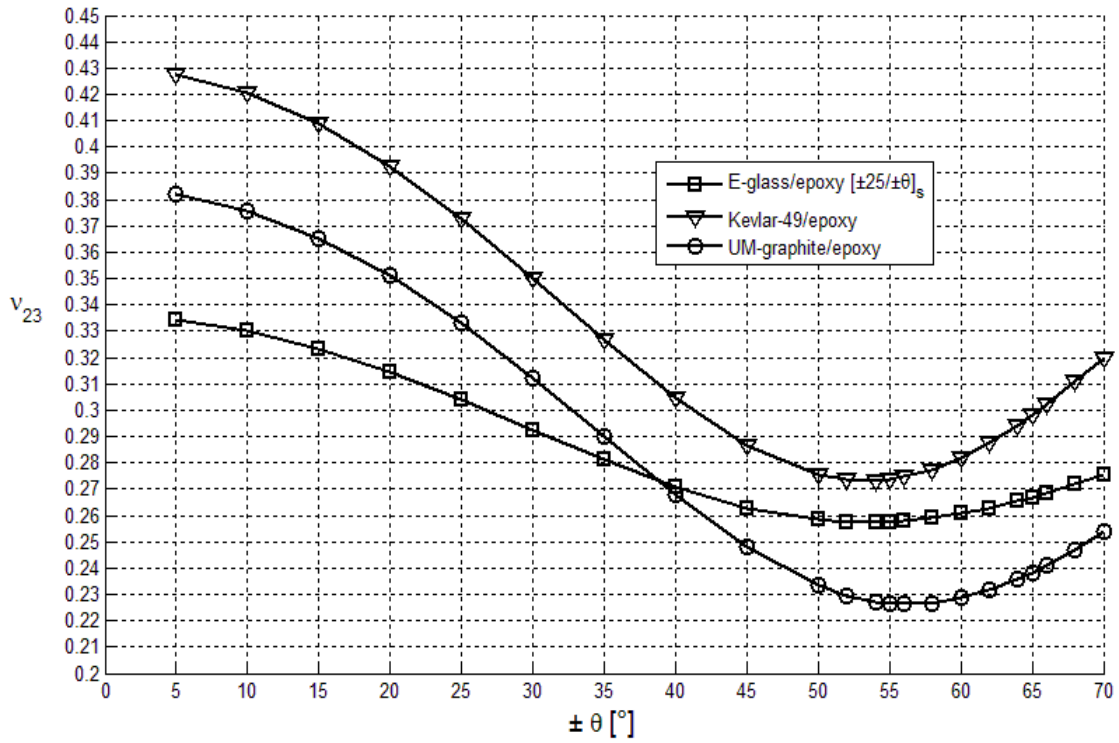


Fig. 4-48 Sovrapposizione dei  $\nu_{23}$  dei laminati con diverse fibre del modello 4.

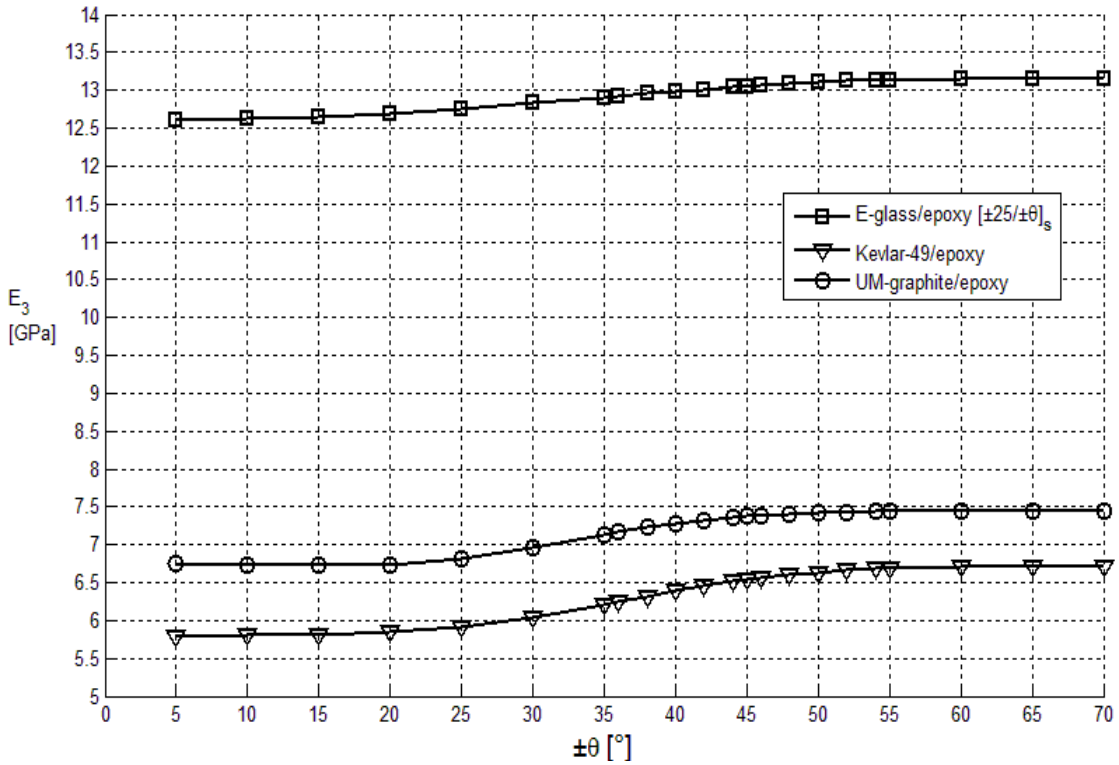


Fig. 4-49 Sovrapposizione degli  $E_3$  dei laminati con diverse fibre del modello 4.

## Modello 5

*E-glass/epoxy*

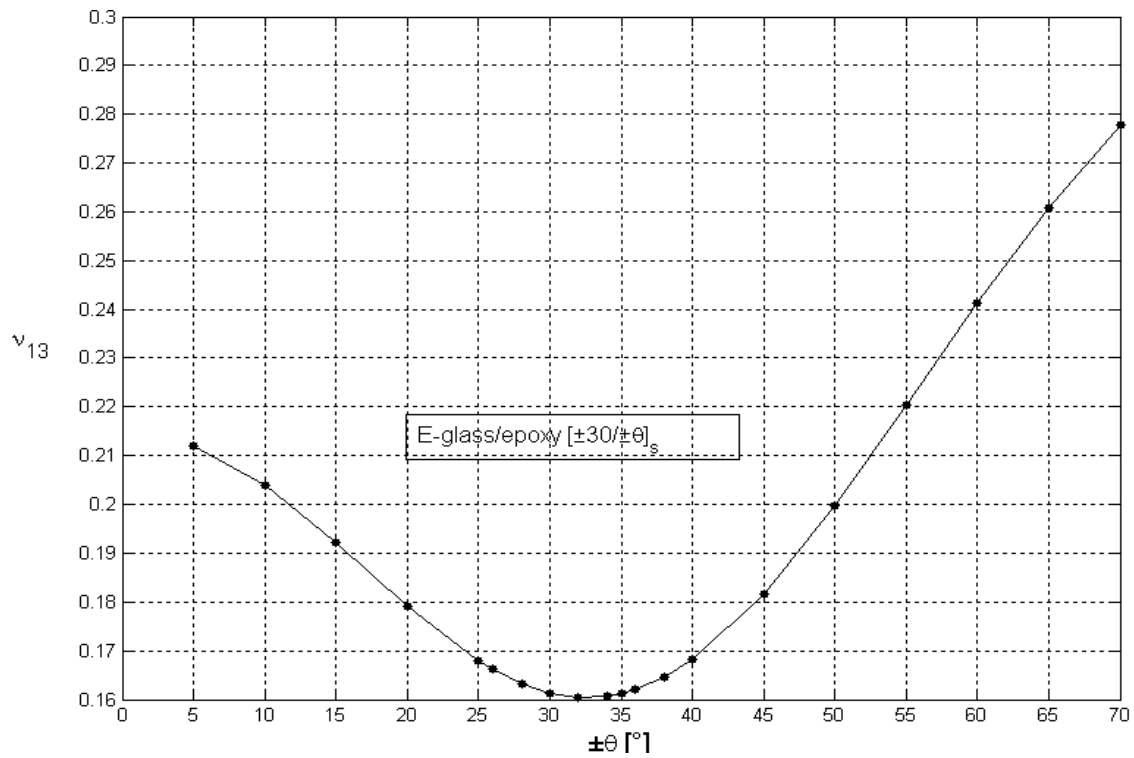


Fig. 4-50 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 5 con fibre di vetro.

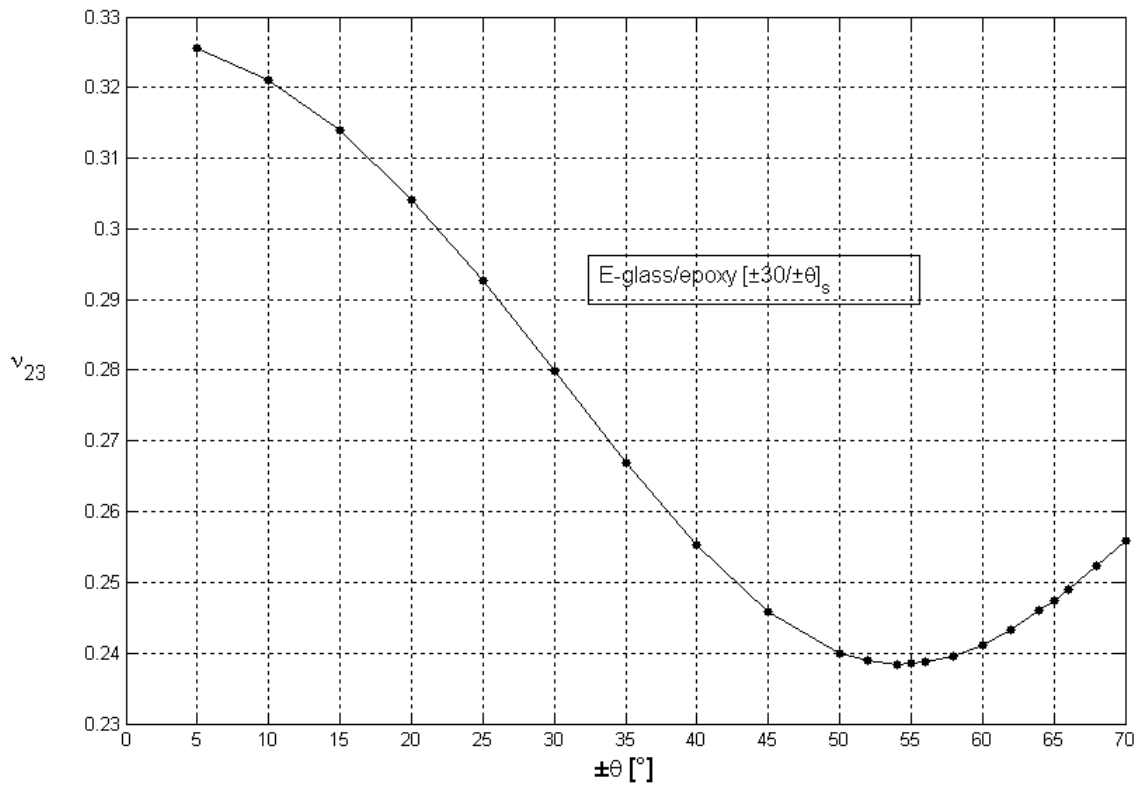


Fig. 4-51 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 5 con fibre di vetro.

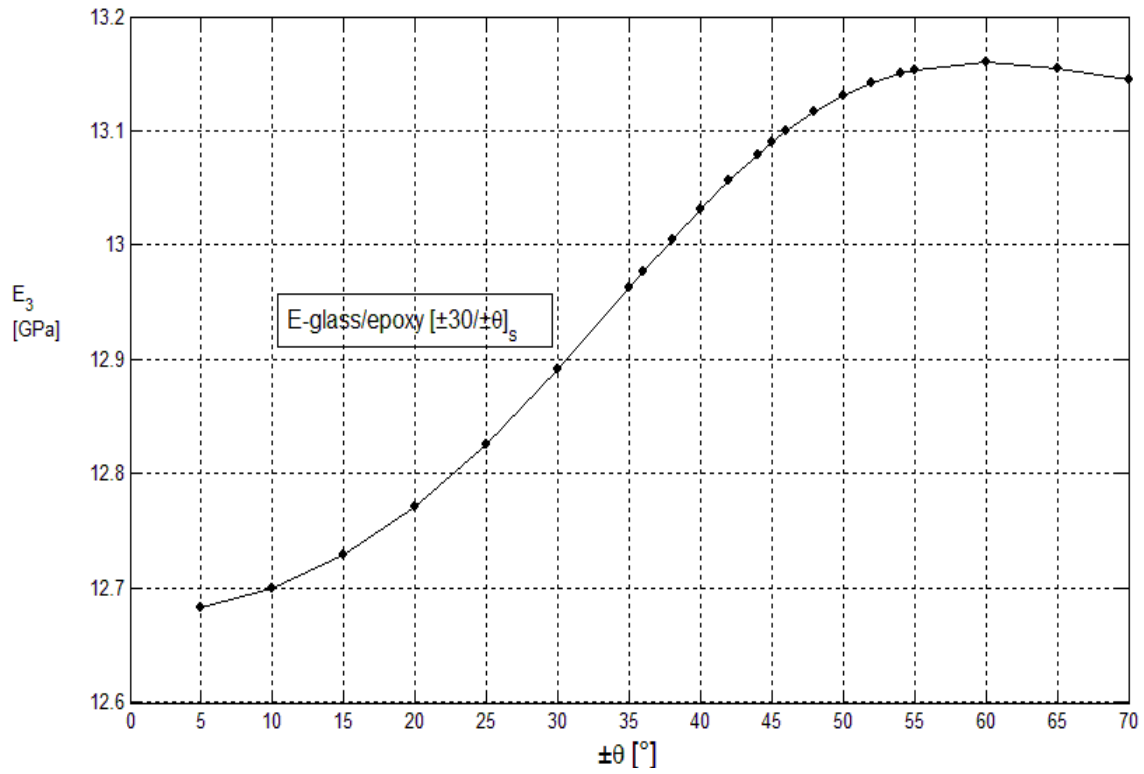


Fig. 4-52 Grafico di  $E_3$  nel modello 5 con fibre di vetro.

**Kevlar- 49/epoxy**

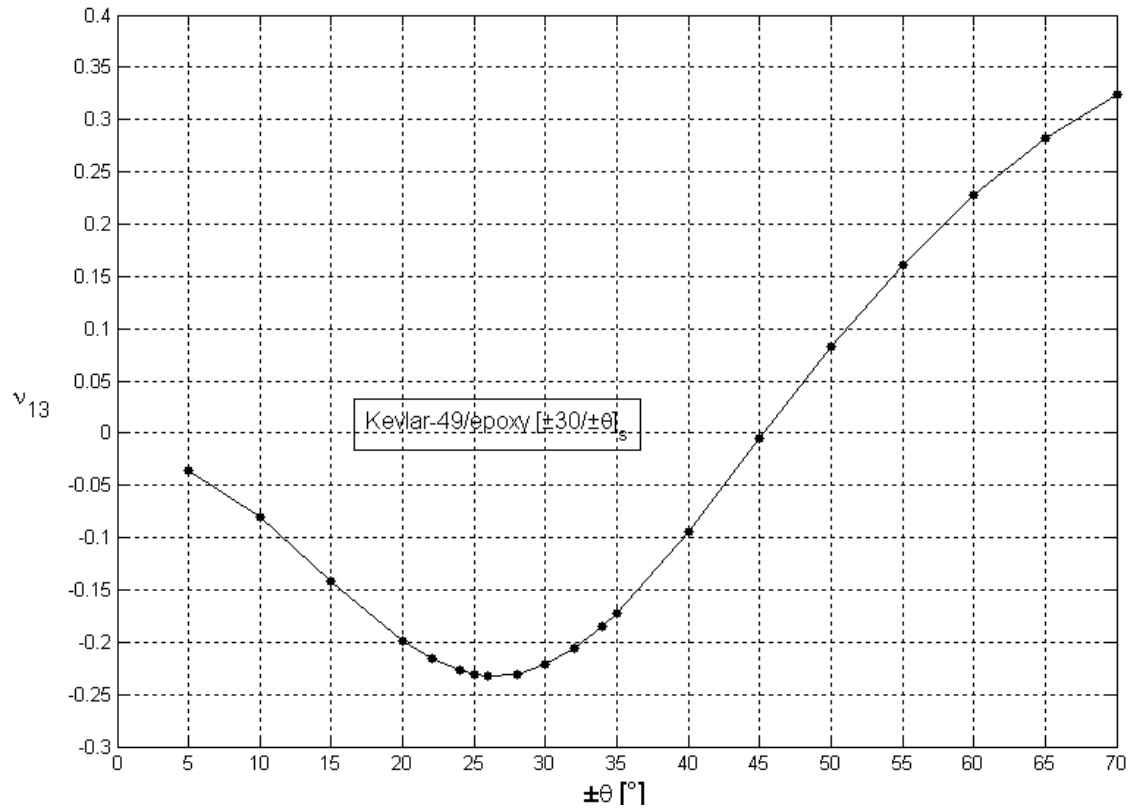


Fig. 4-53 Rappresentazione di  $\nu_{13}$  nel modello 5 con fibre di kevlar.

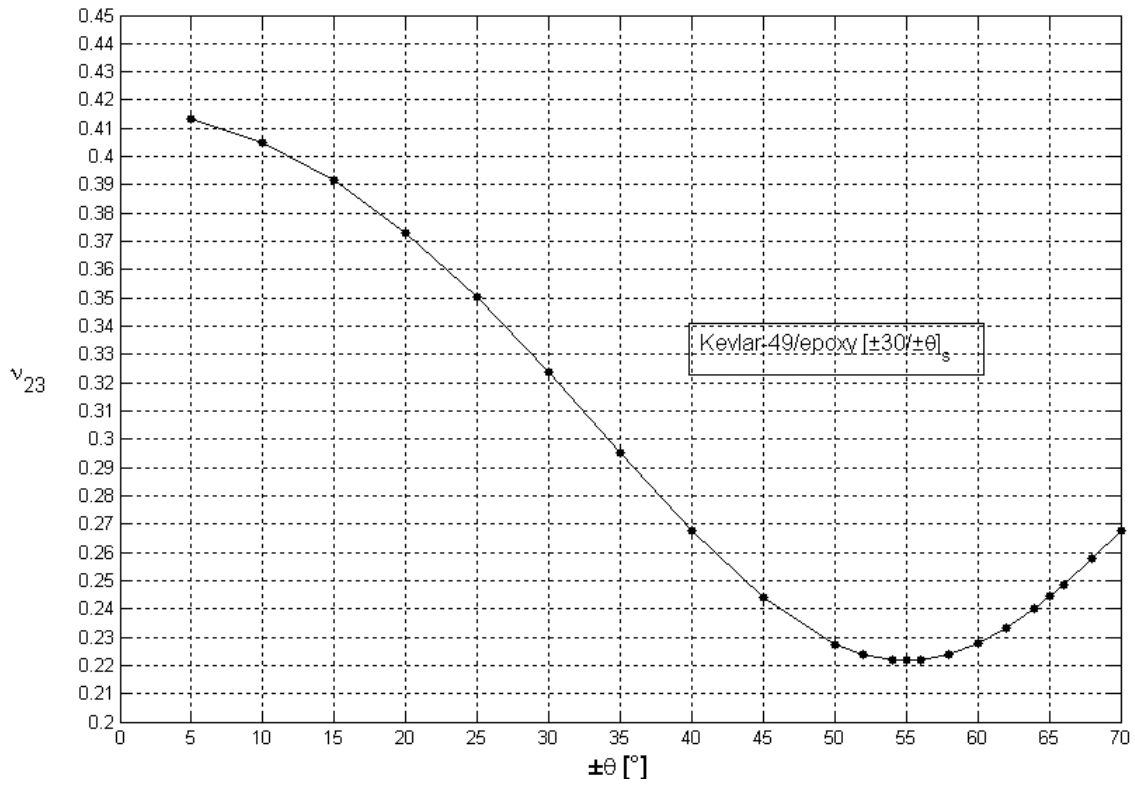


Fig. 4-54 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 5 con fibre di kevlar.

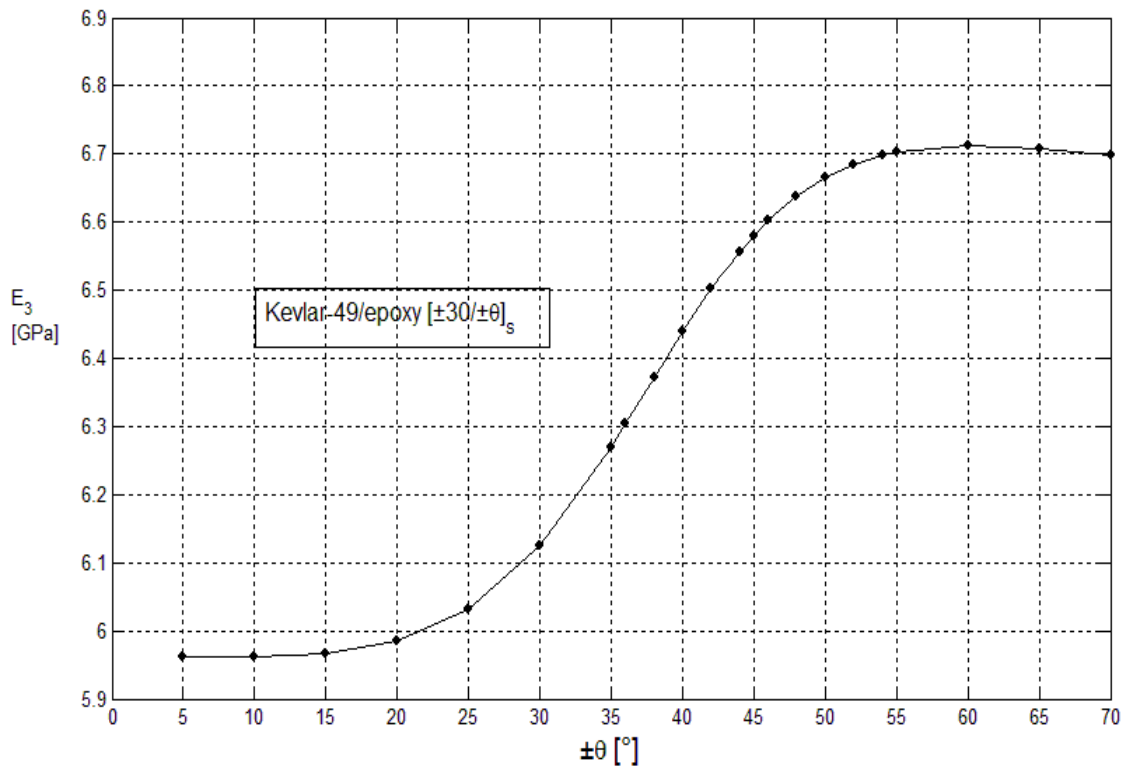
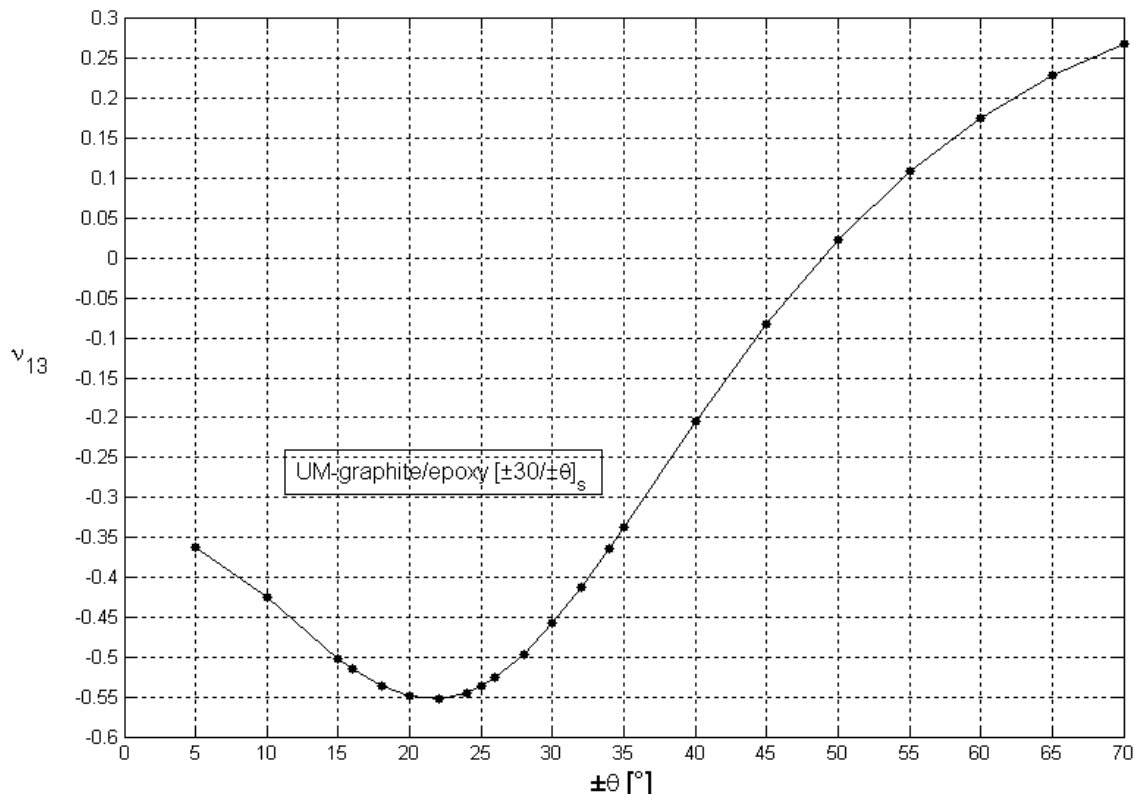
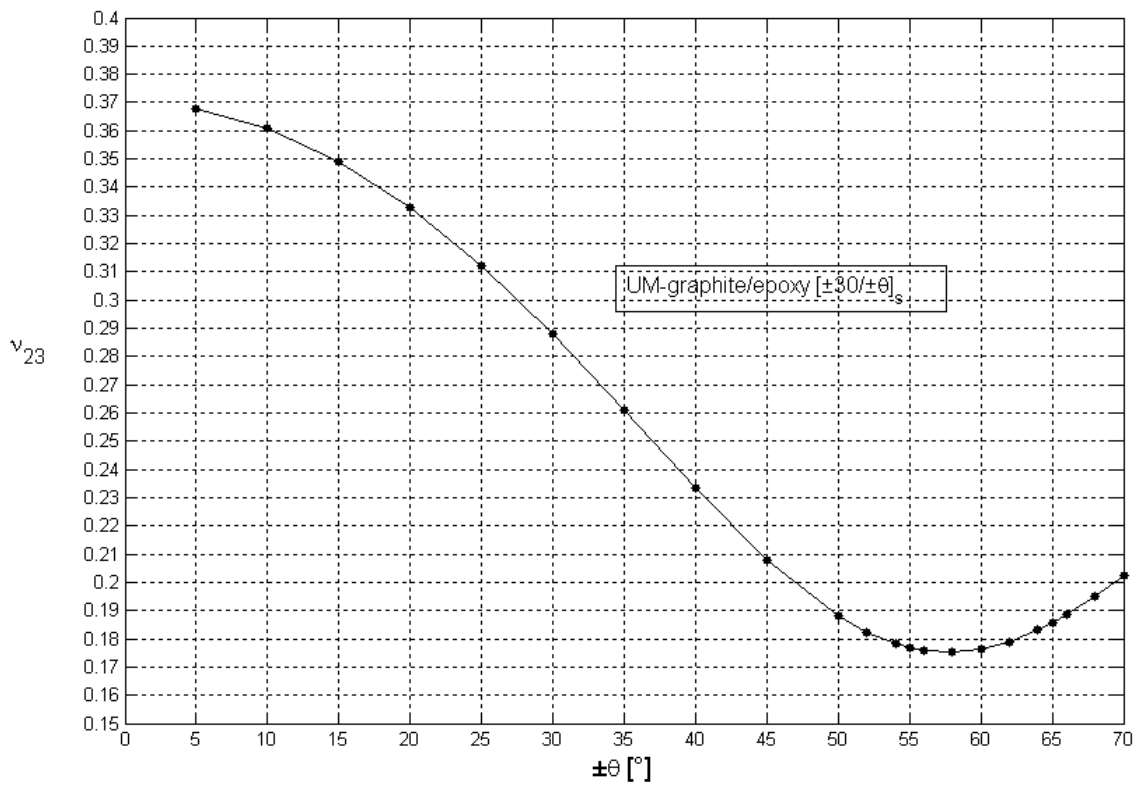


Fig. 4-55 Grafico di  $E_3$  nel modello 5 con fibre di kevlar.

**UM- graphite/epoxy**



**Fig. 4-56** Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 5 con fibre di carbonio.



**Fig. 4-57** Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 5 con fibre di carbonio.



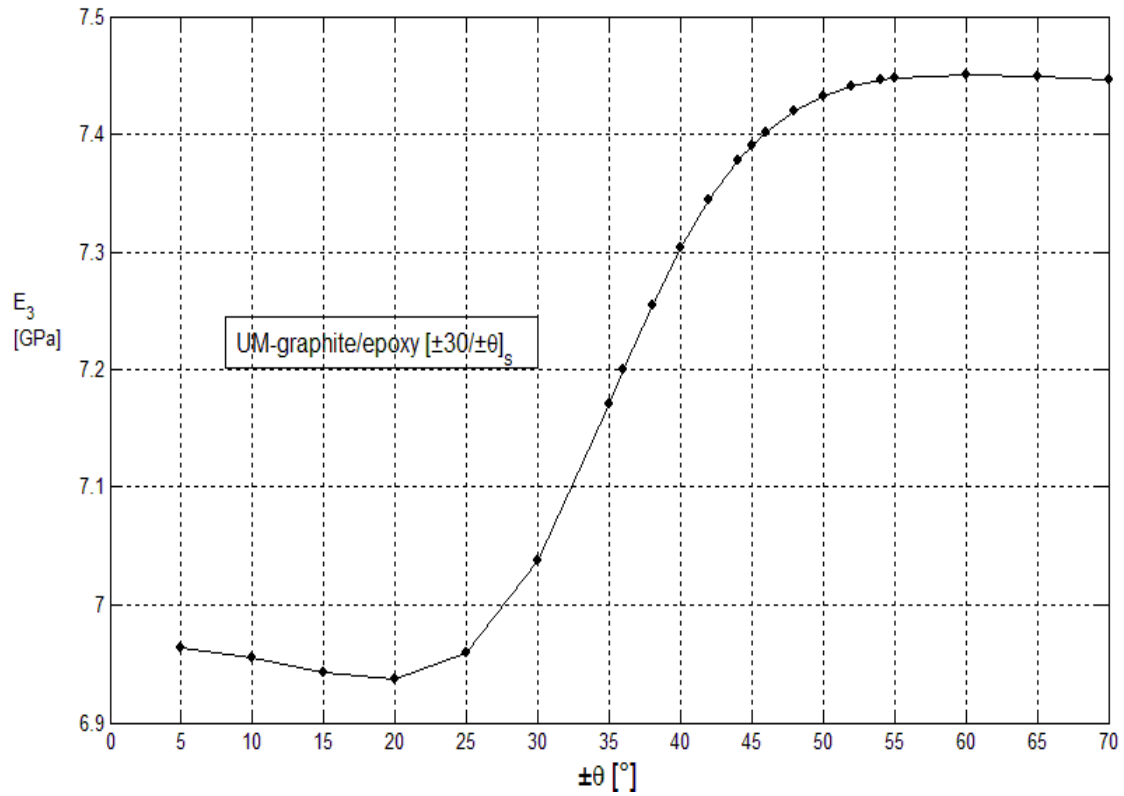


Fig. 4-58 Grafico di  $E_3$  nel modello 5 con fibre di carbonio.

### Grafici comparativi modello 5

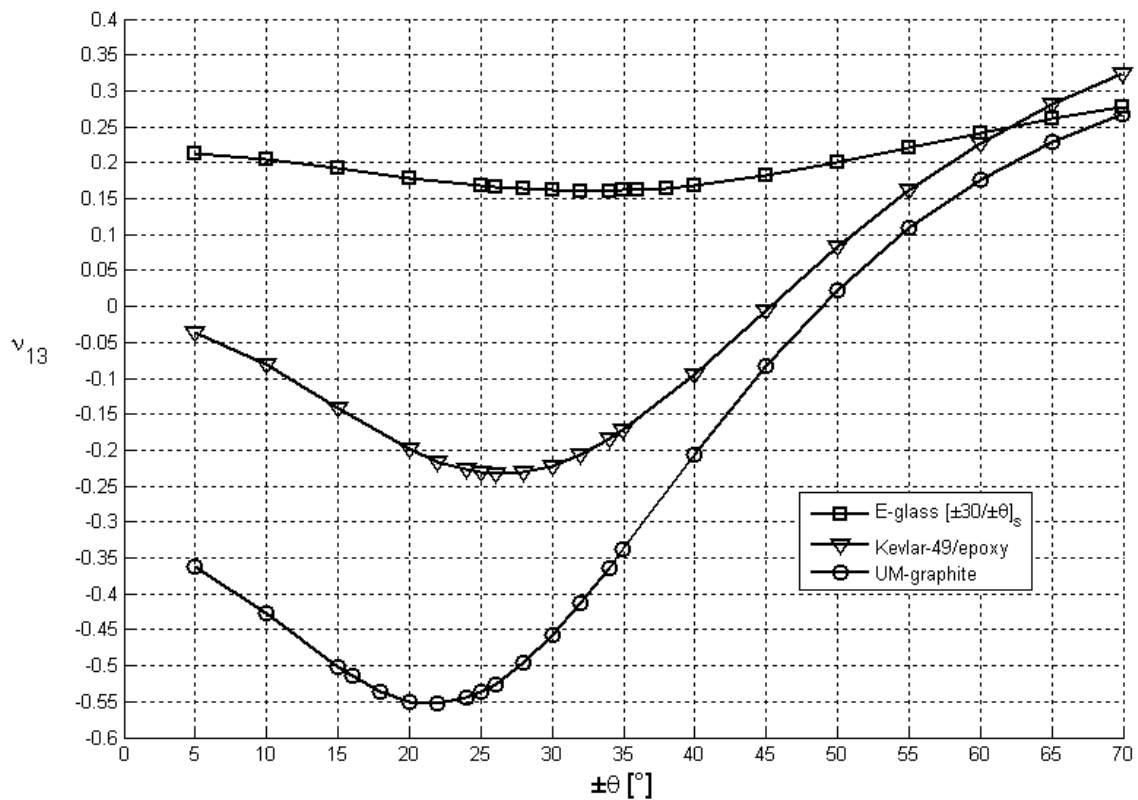


Fig. 4-59 Sovrapposizione dei  $\nu_{13}$  dei laminati con diverse fibre del modello 5.

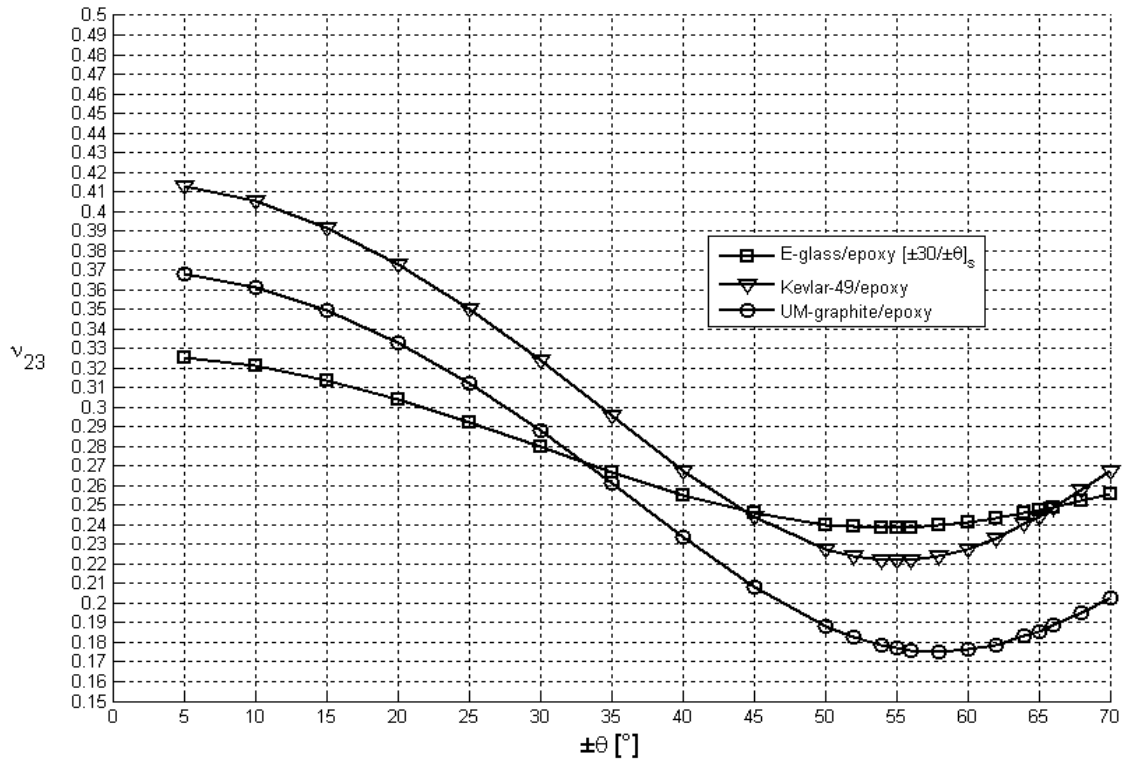


Fig. 4-60 Sovrapposizione dei  $\nu_{23}$  dei laminati con diverse fibre del modello 5.

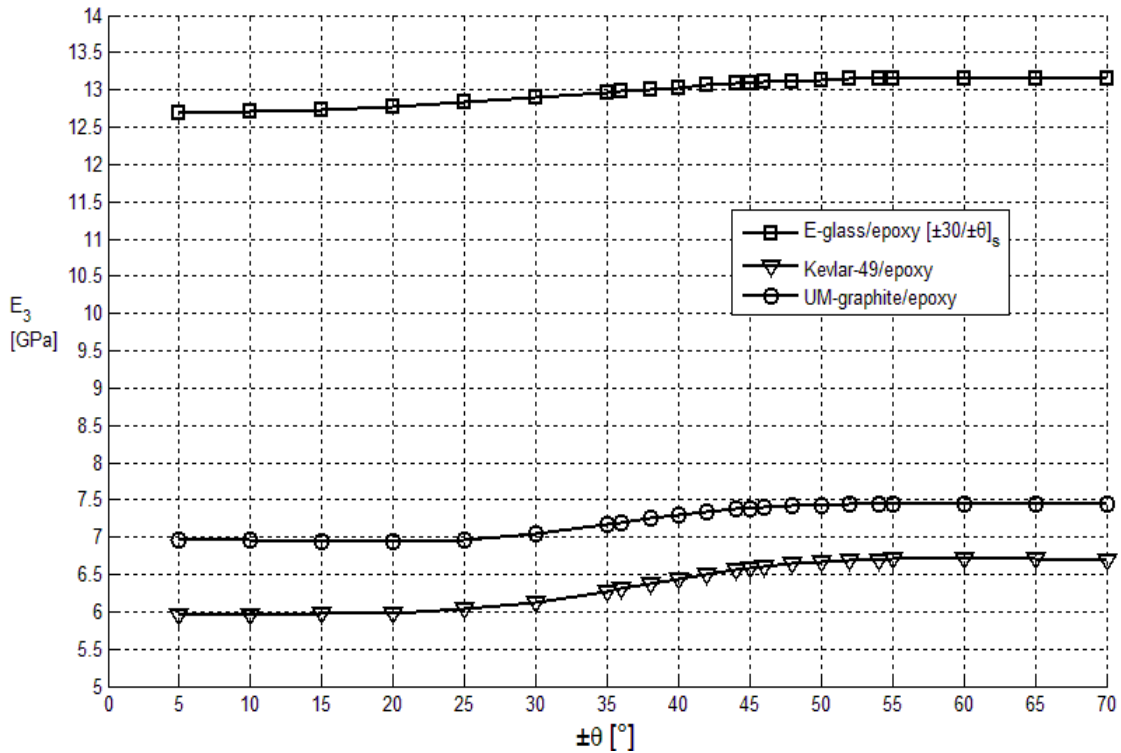


Fig. 4-61 Sovrapposizione degli  $E_3$  dei laminati con diverse fibre del modello 5.

## Modello 6

*E-glass/epoxy*

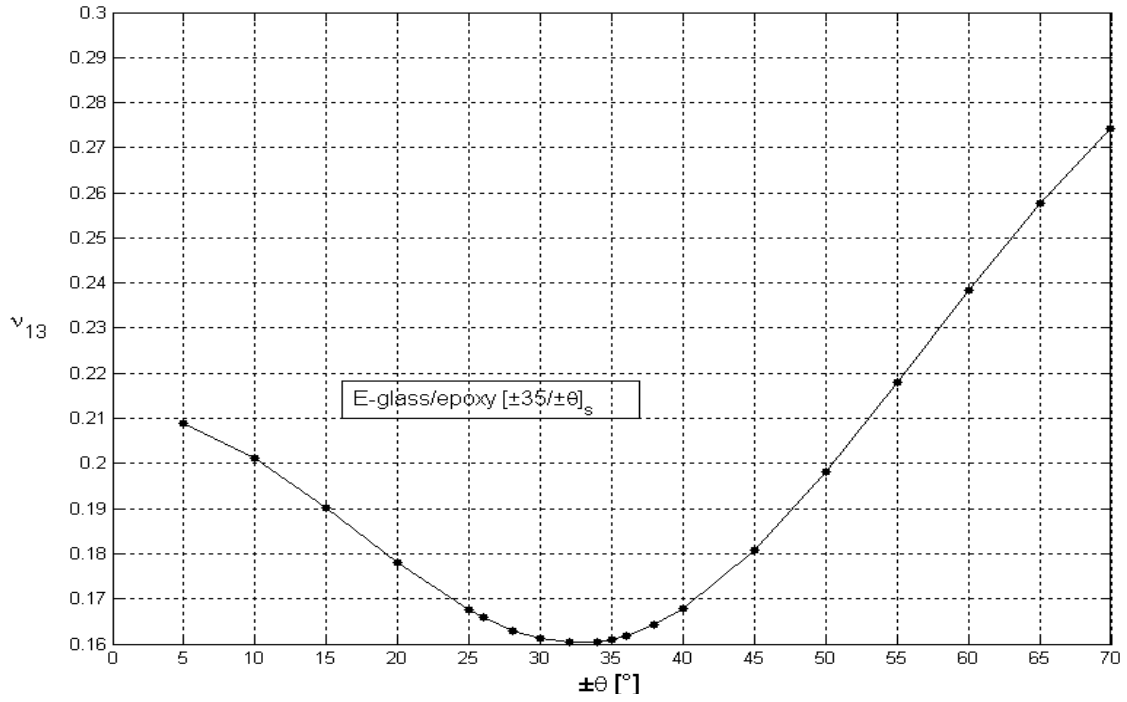


Fig. 4-62 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 6 con fibre di vetro.

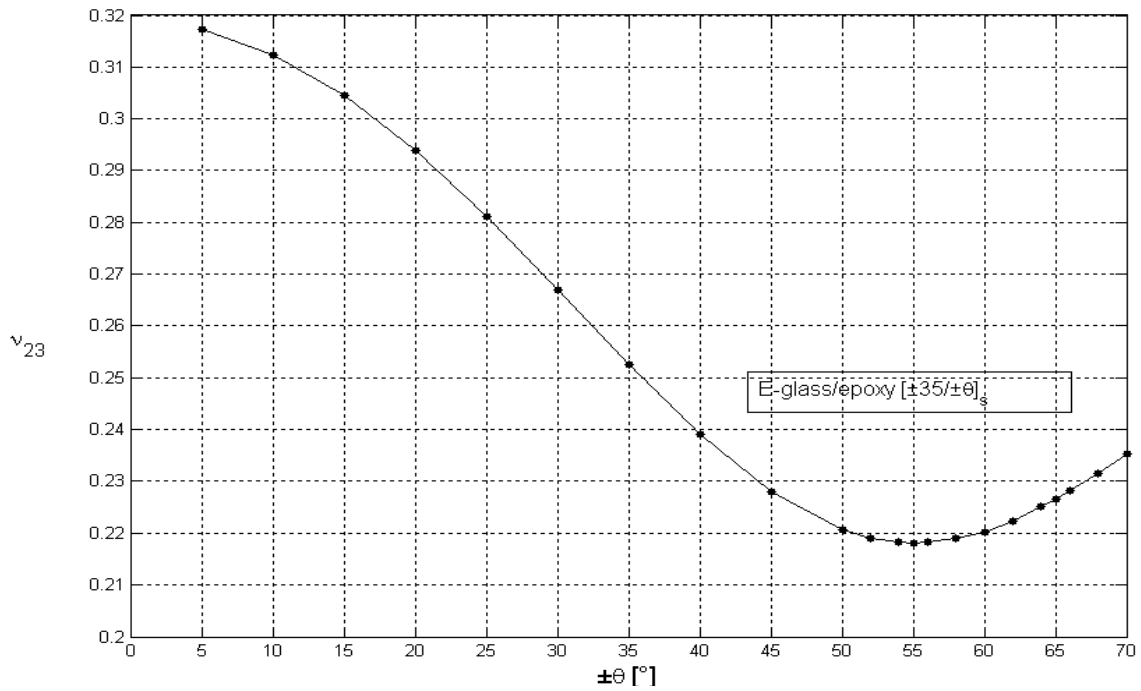


Fig. 4-63 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 6 con fibre di vetro.

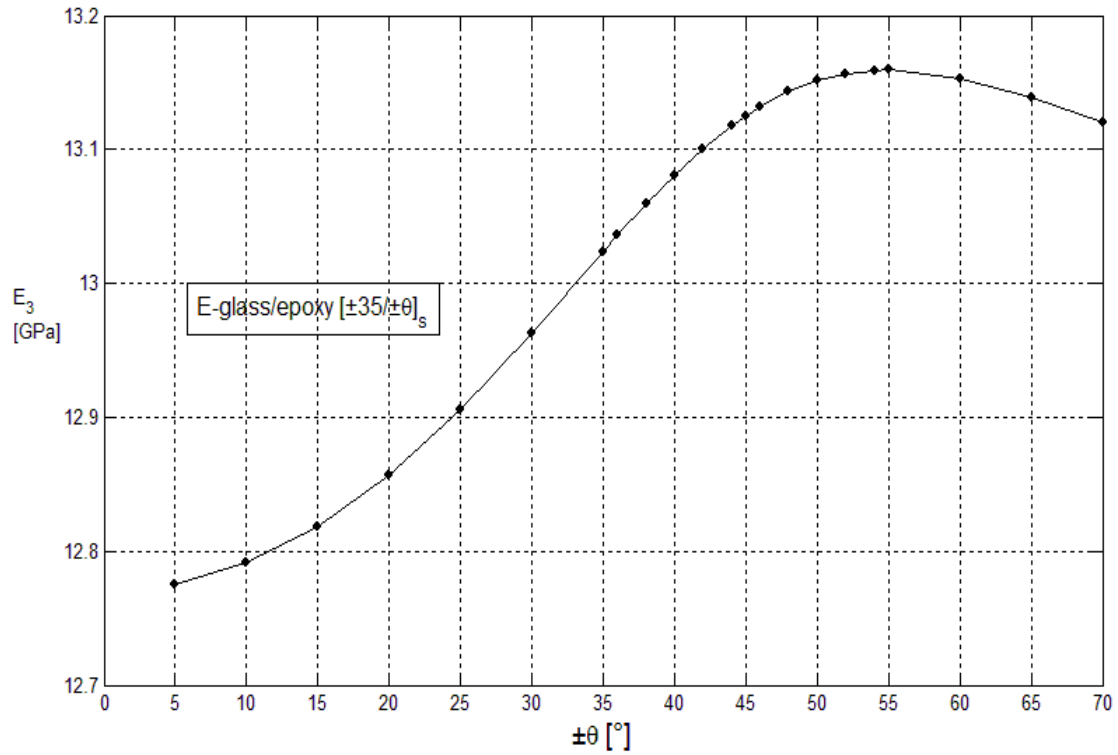


Fig. 4-64 Grafico di  $E_3$  nel modello 6 con fibre di vetro.

**Kevlar- 49/epoxy**

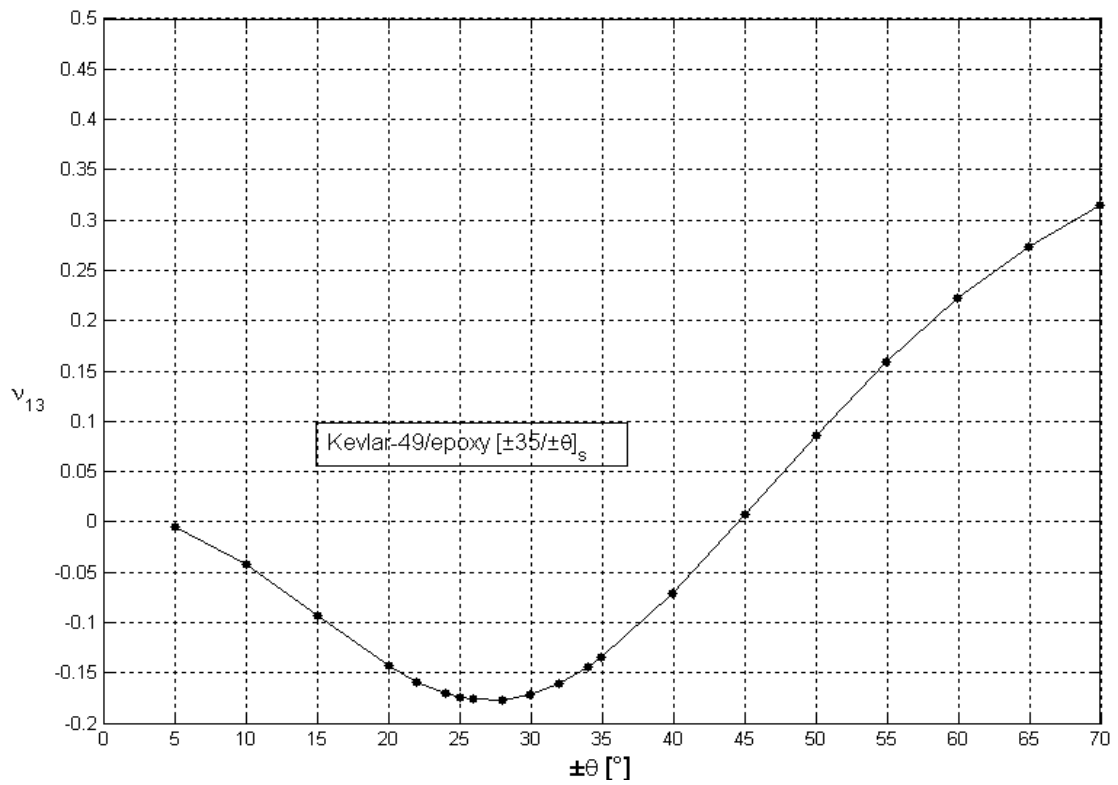


Fig. 4-65 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 6 con fibre di kevlar.

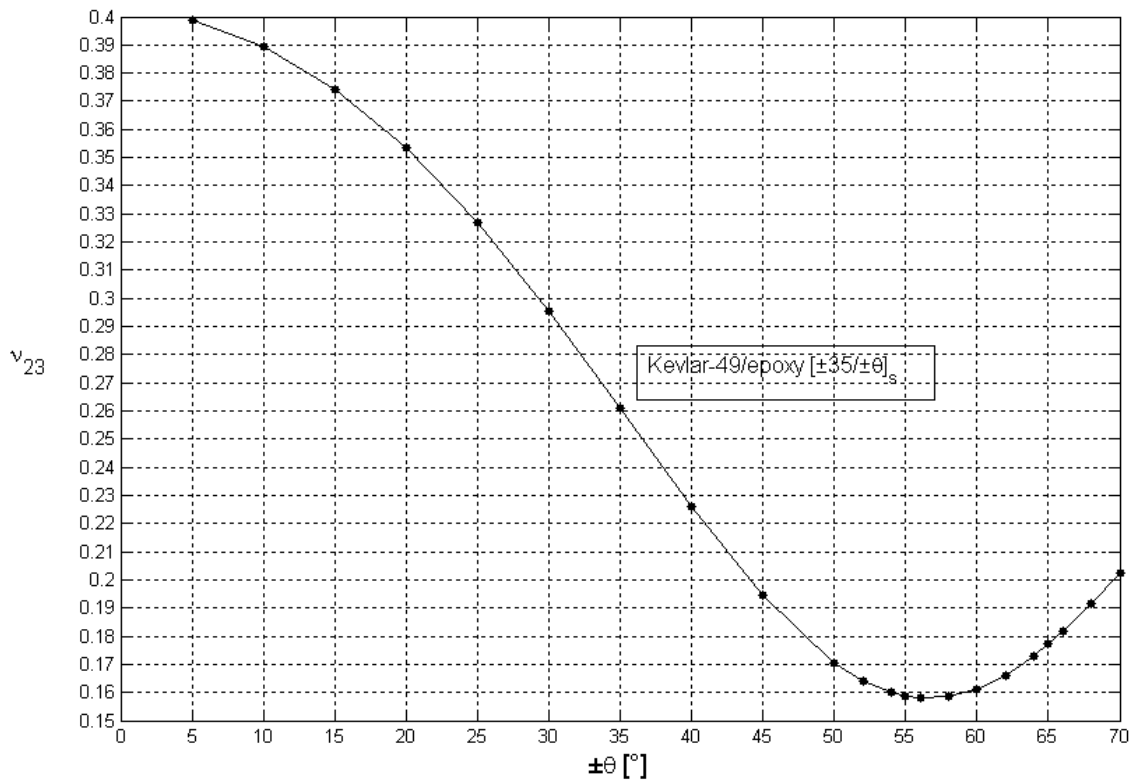


Fig. 4-66 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 6 con fibre di kevlar.

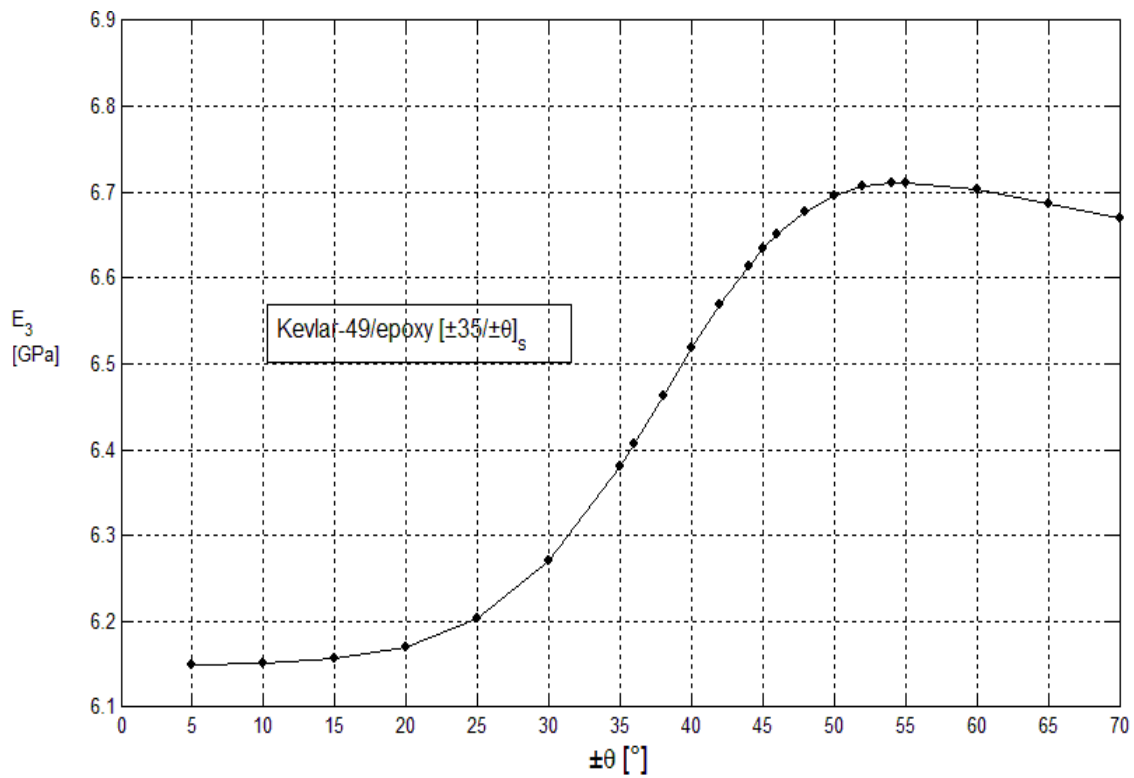
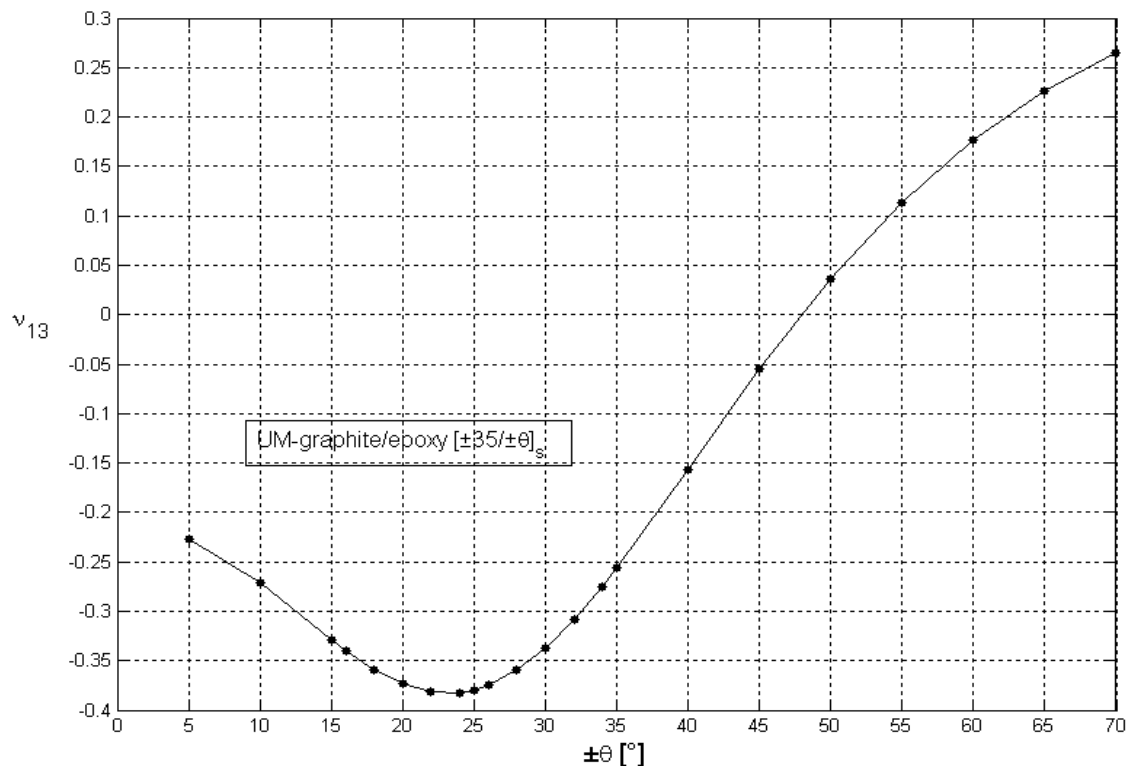
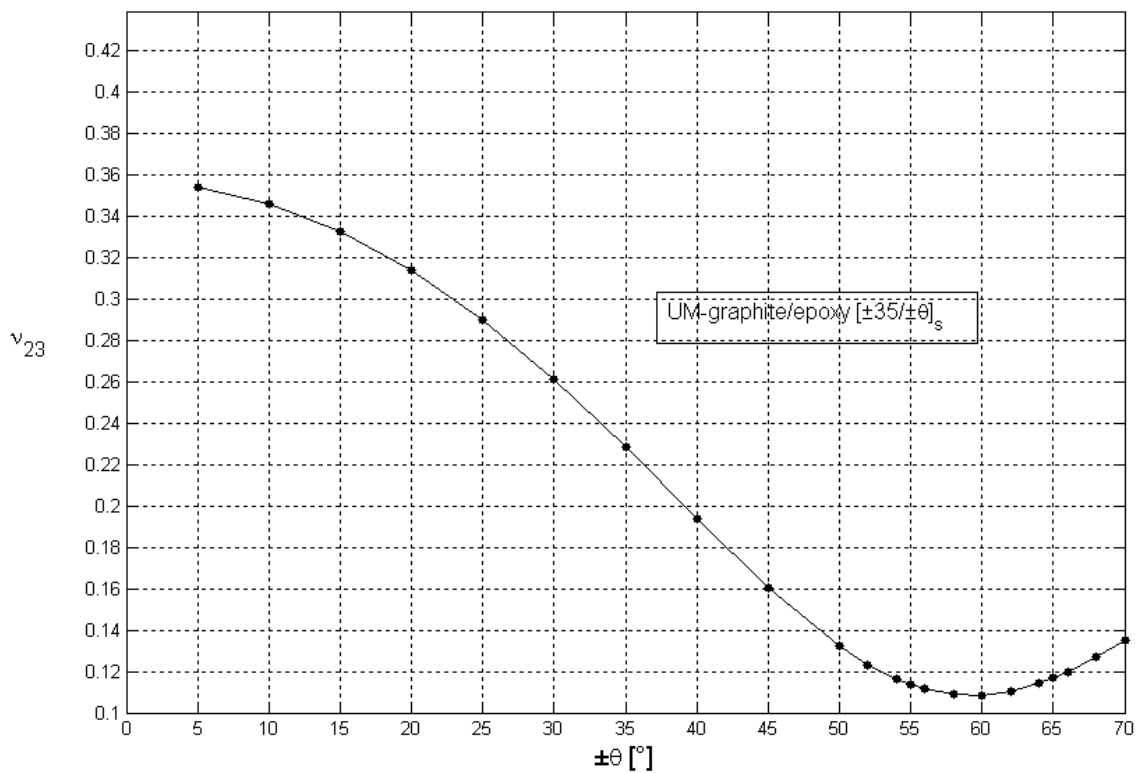


Fig. 4-67 Grafico di  $E_3$  nel modello 6 con fibre di kevlar.

**UM- graphite/epoxy**



**Fig. 4-68** Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 6 con fibre di carbonio.



**Fig. 4-69** Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 6 con fibre di carbonio.

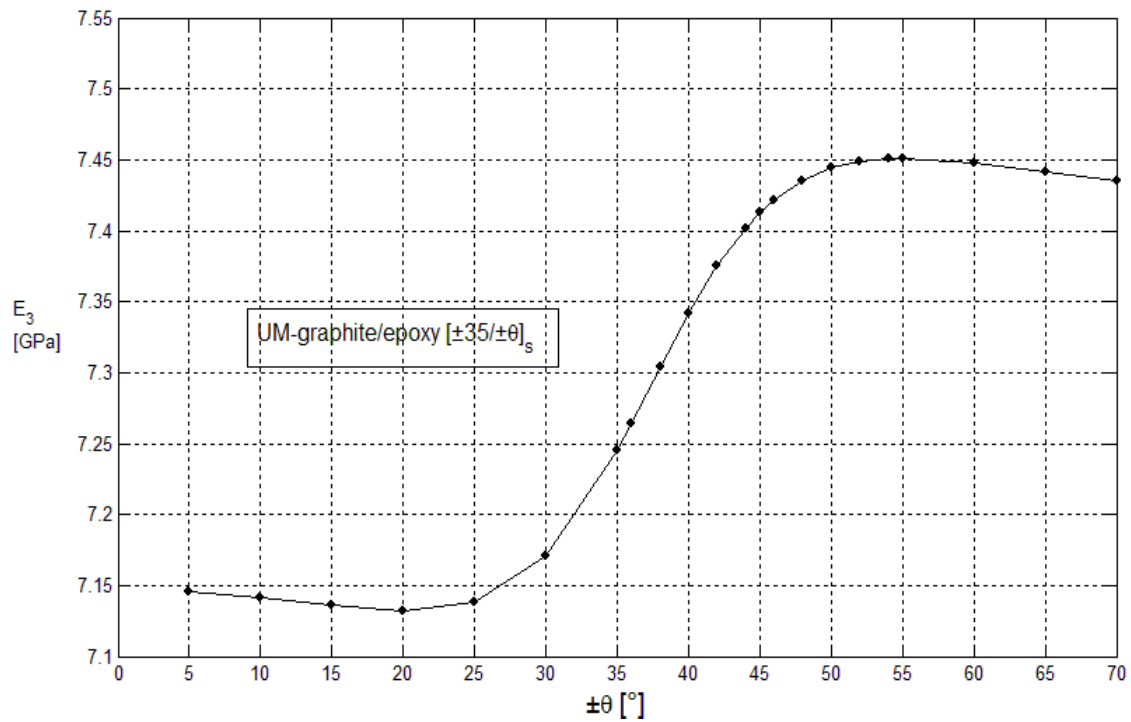


Fig. 4-70 Grafico di  $E_3$  nel modello 6 con fibre di carbonio.

### Grafici comparativi modello 6

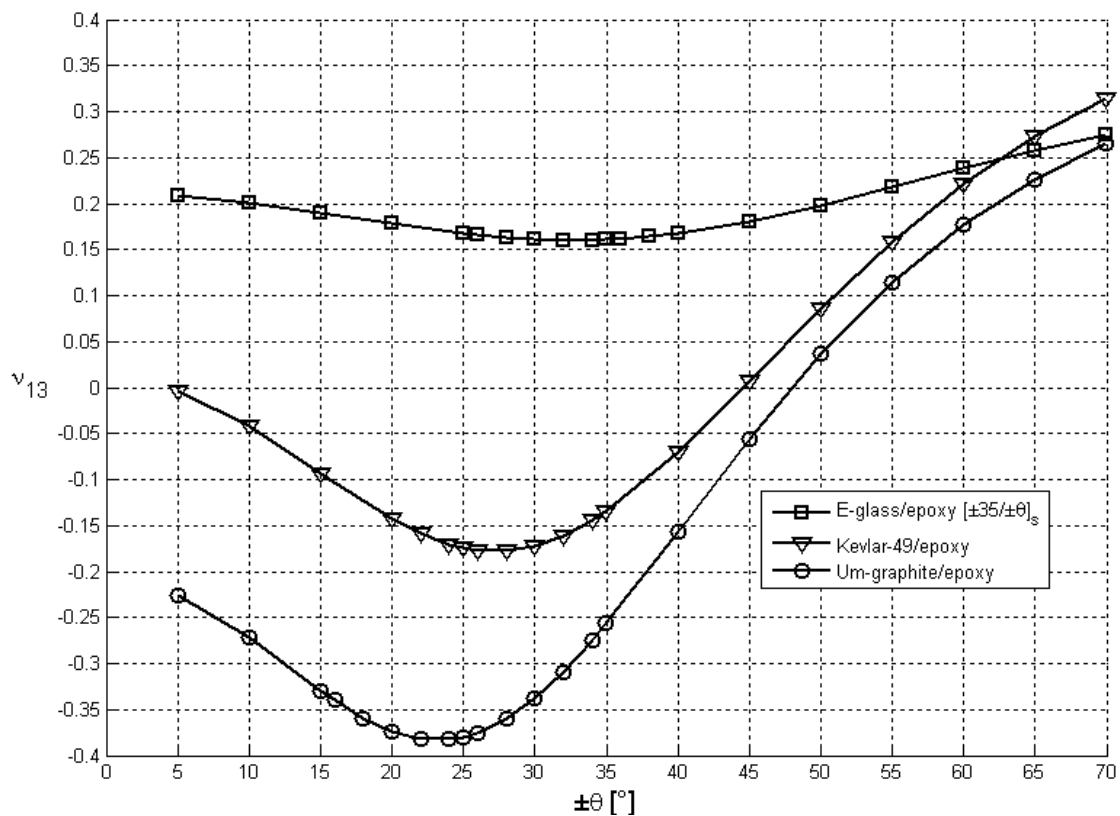


Fig. 4-71 Sovrapposizione dei  $\nu_{13}$  dei laminati con diverse fibre del modello 6.

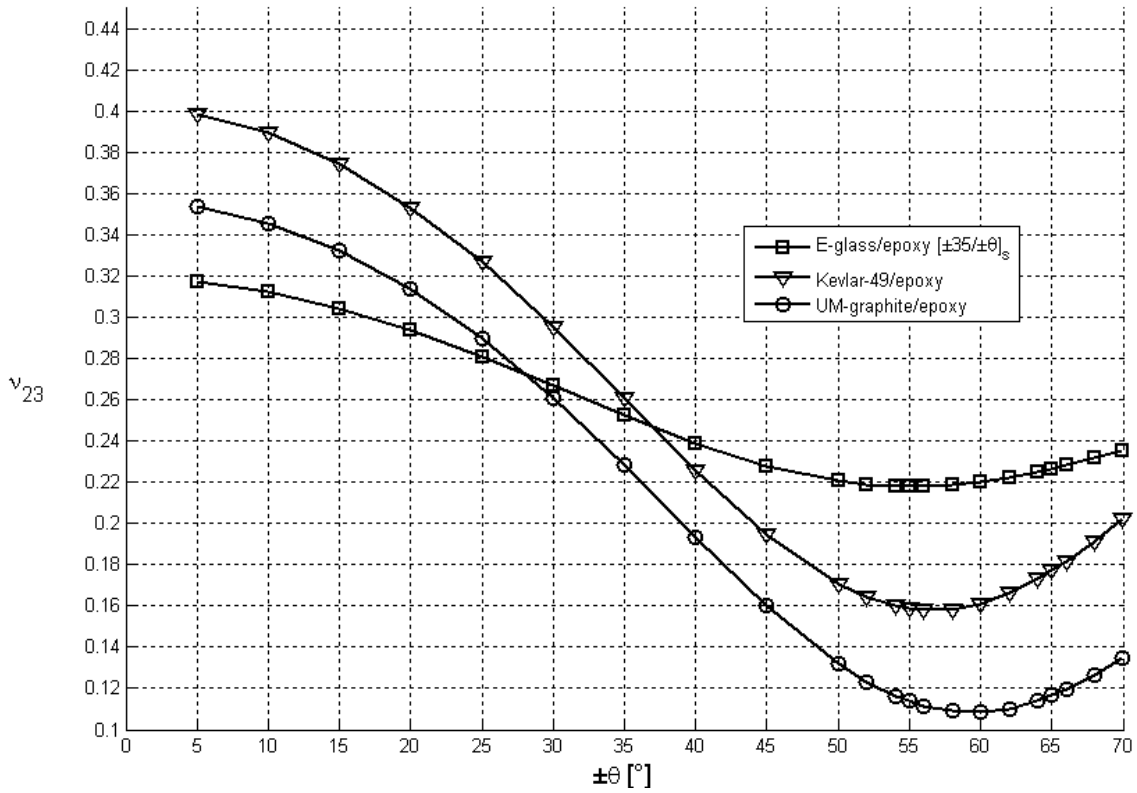


Fig. 4-72 Sovrapposizione dei  $v_{23}$  dei laminati con diverse fibre del modello 6.

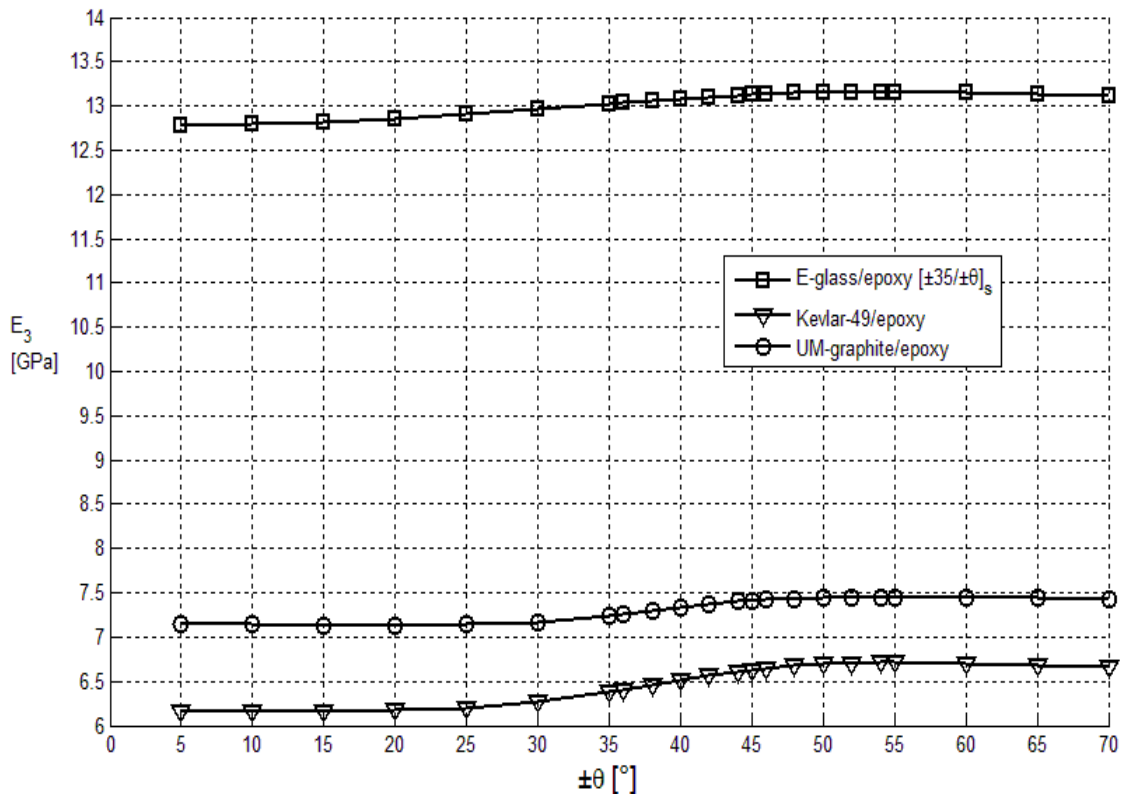


Fig. 4-73 Sovrapposizione degli  $E_3$  dei laminati con diverse fibre del modello 6.



## Modello 7

*E-glass/epoxy*

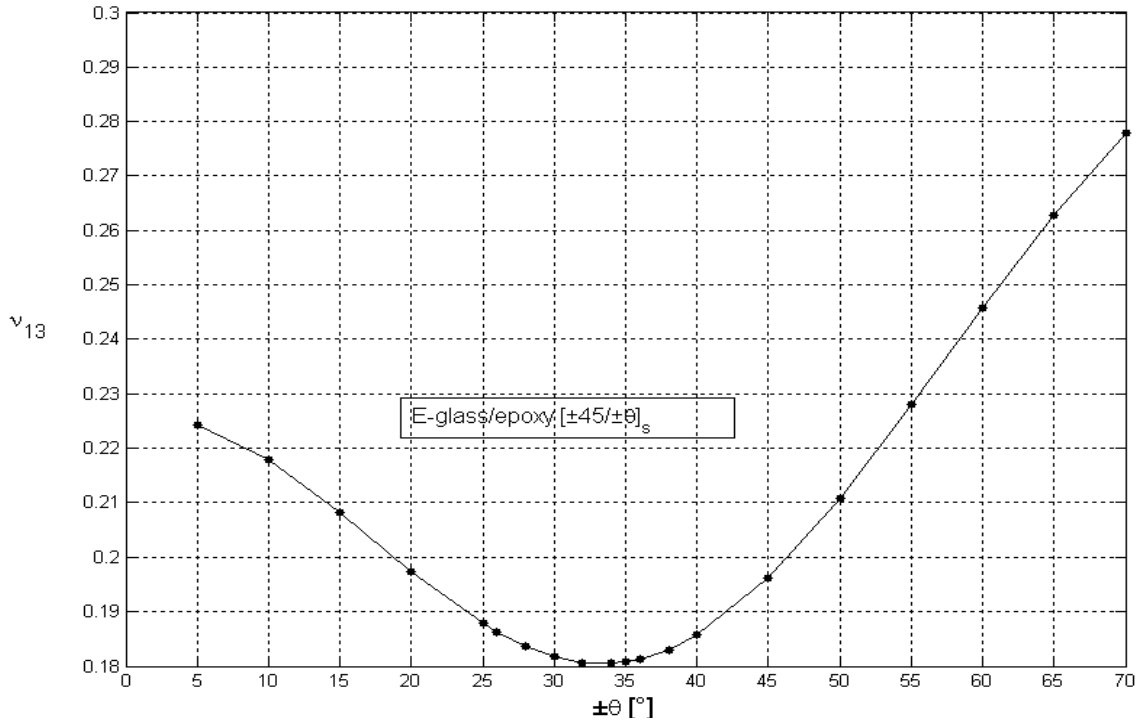


Fig. 4-74 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 7 con fibre di vetro.

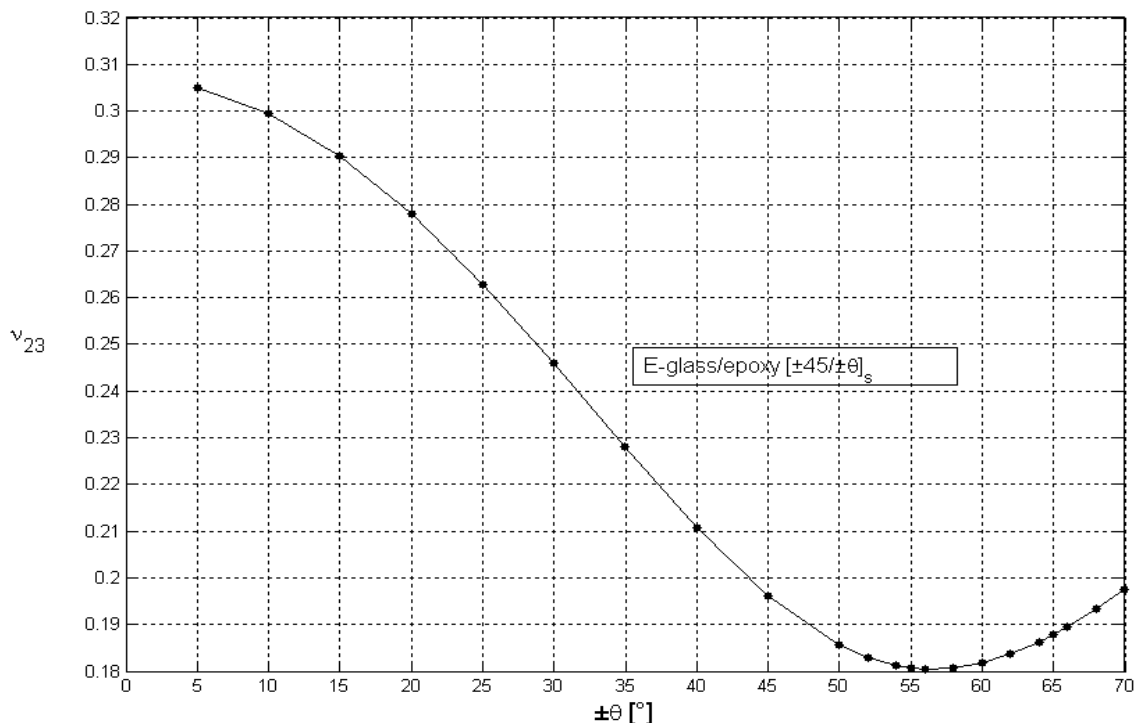


Fig. 4-75 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 7 con fibre di vetro.

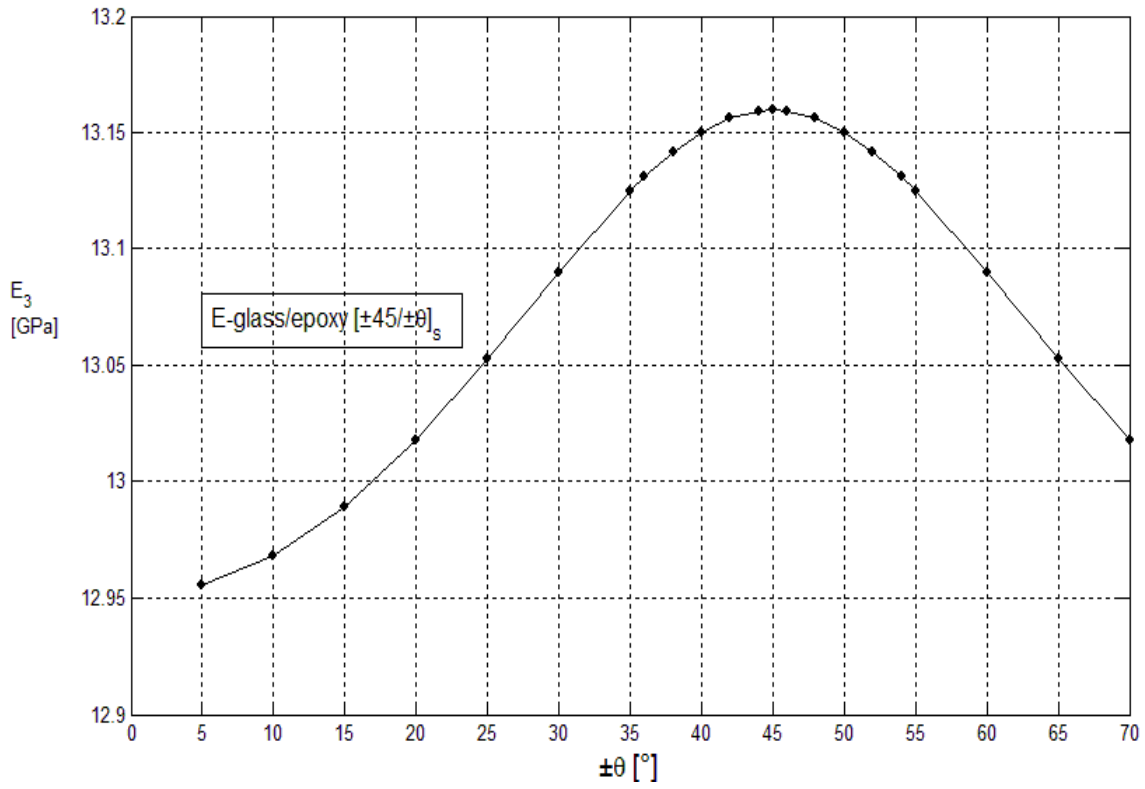


Fig. 4-76 Grafico di  $E_3$  nel modello7 con fibre di vetro.

**Kevlar- 49/epoxy**

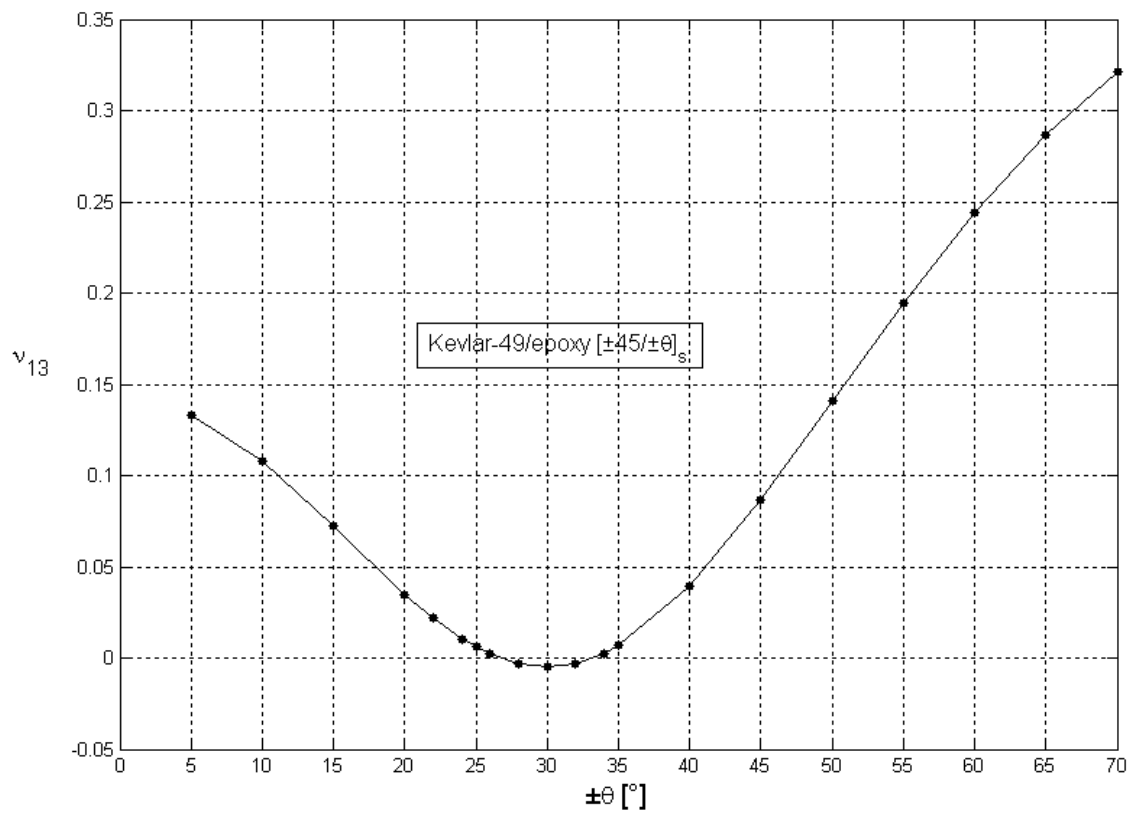


Fig. 4-77 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 7 con fibre di kevlar.

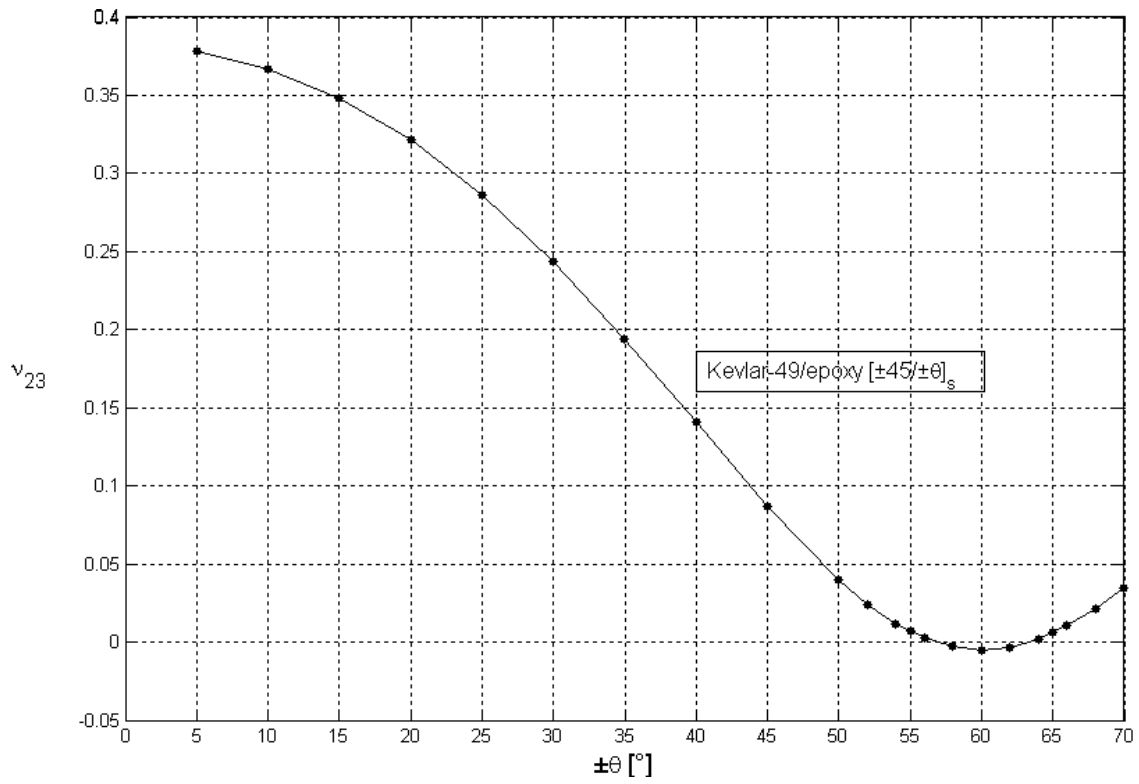


Fig. 4-78 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 7 con fibre di kevlar.

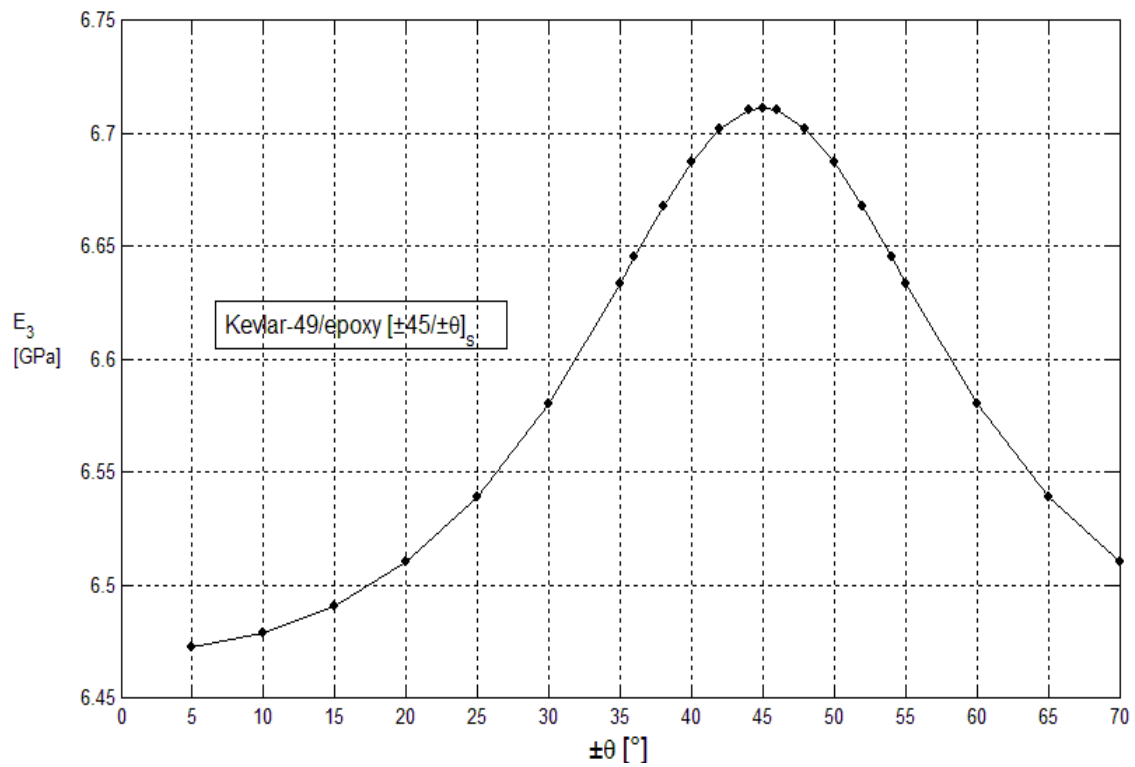
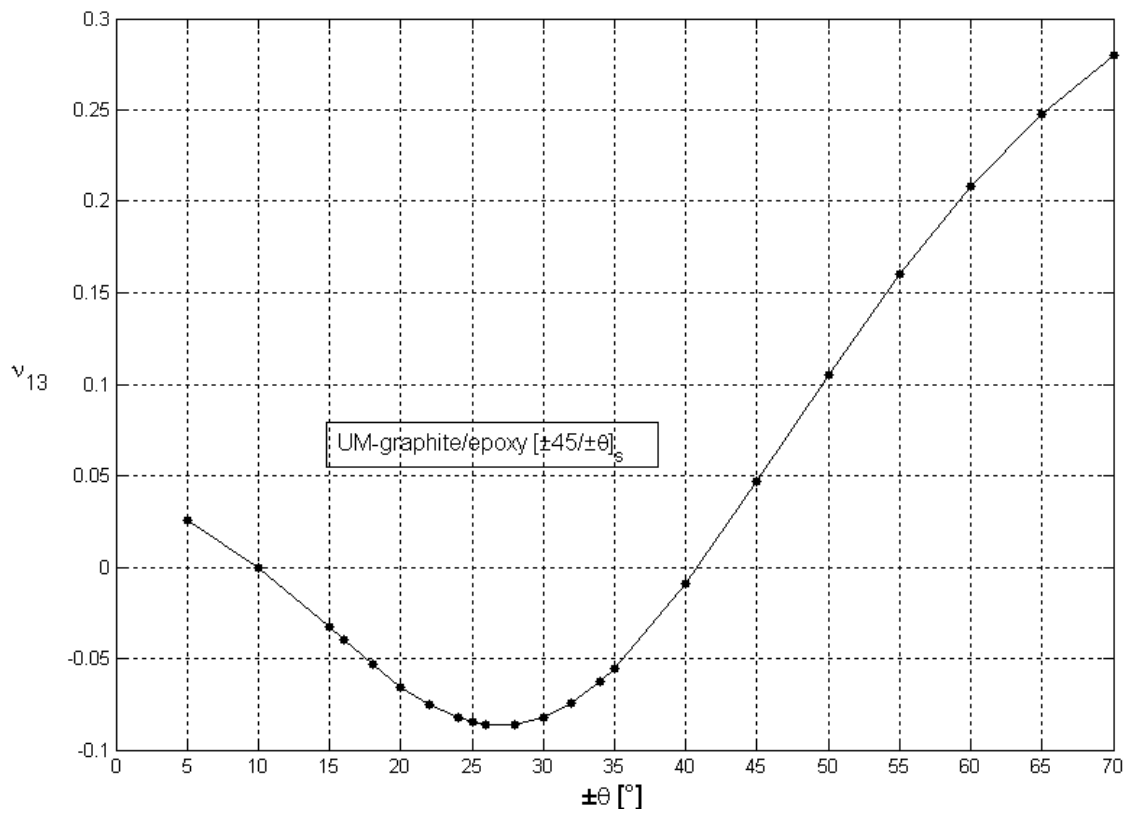
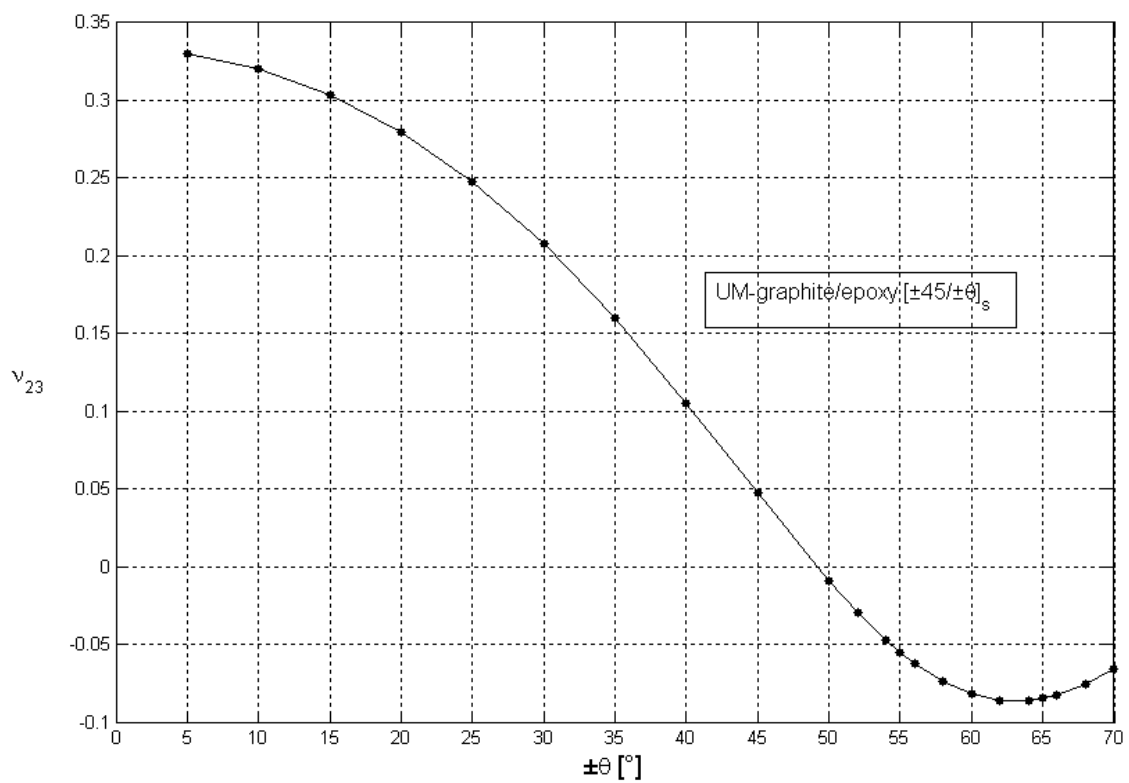


Fig. 4-79 Grafico di  $E_3$  nel modello 7 con fibre di kevlar.

**UM- graphite/epoxy**



**Fig. 4-80 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 7 con fibre di carbonio.**



**Fig. 4-81 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 7 con fibre di carbonio.**

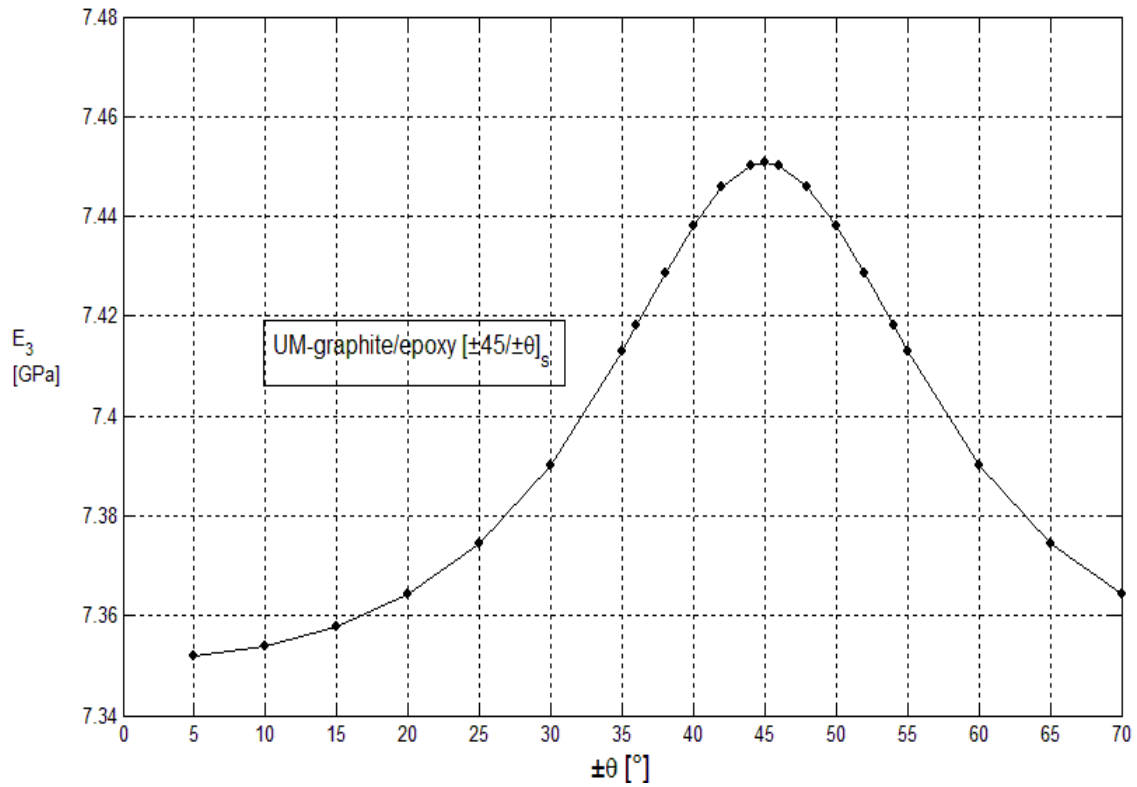


Fig. 4-82 Grafico di  $E_3$  nel modello7 con fibre di carbonio.

### Grafici comparativi modello 7

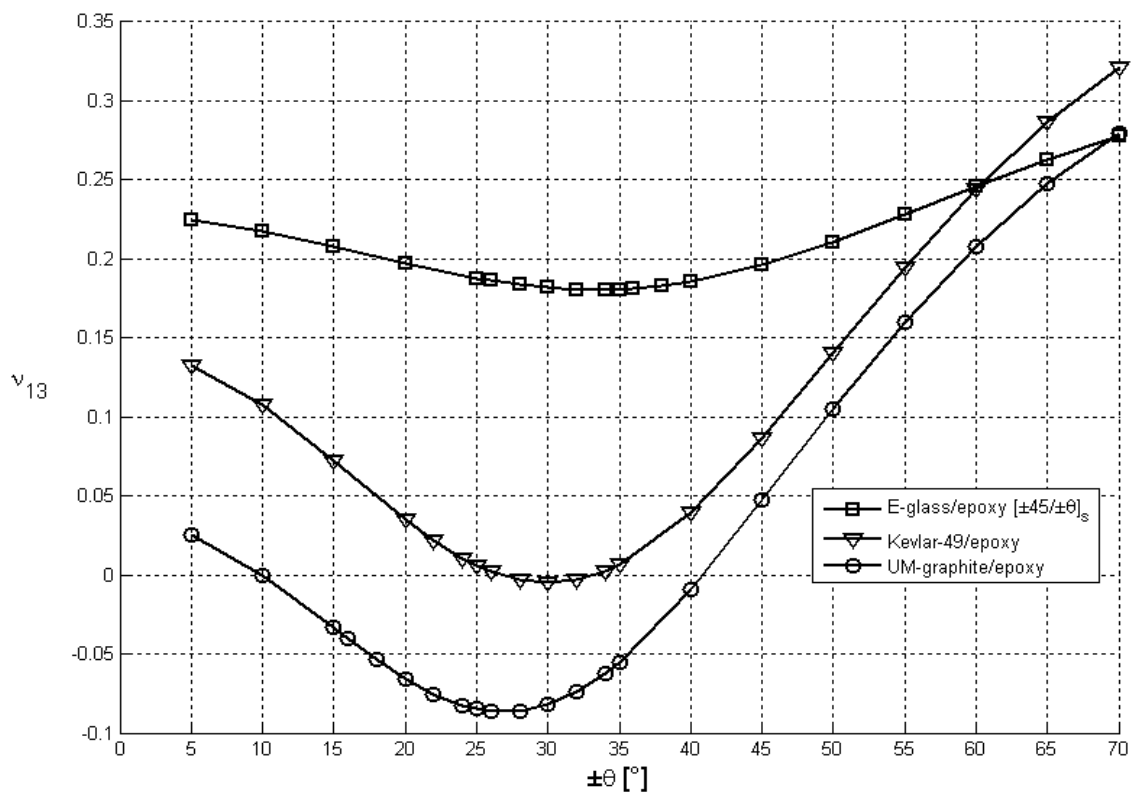


Fig. 4-83 Sovrapposizione dei  $v_{13}$  dei laminati con diverse fibre del modello 7.

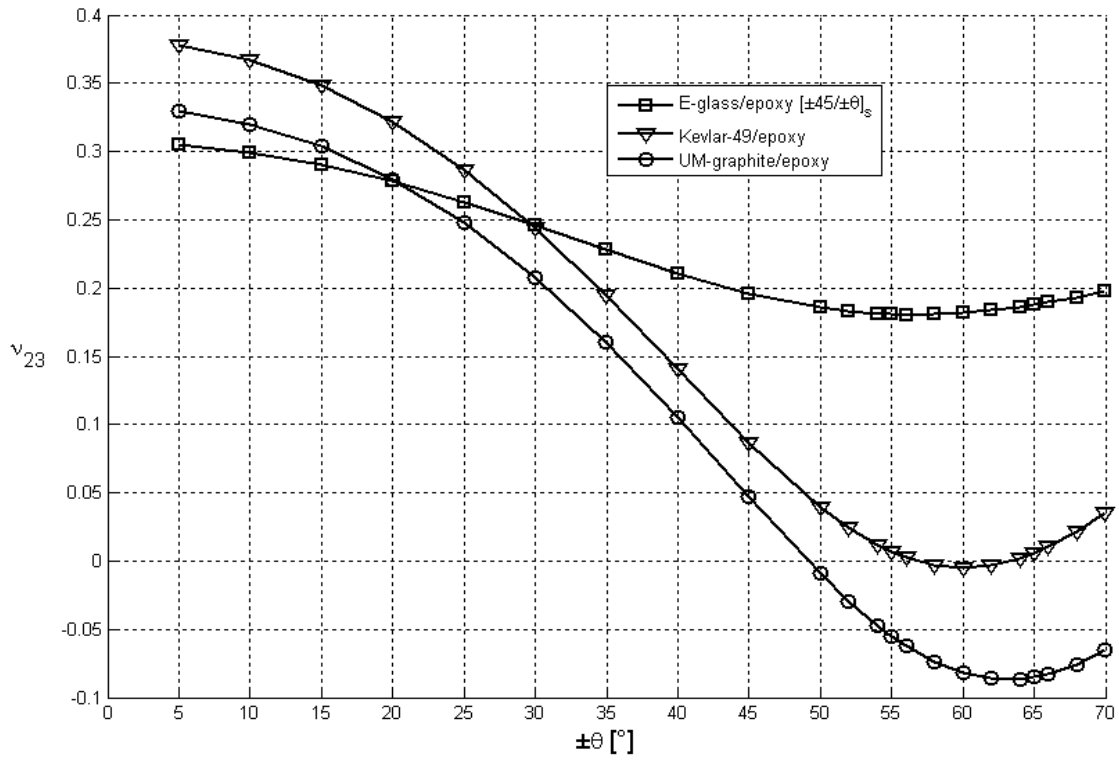


Fig. 4-84 Sovrapposizione dei  $v_{23}$  dei laminati con diverse fibre del modello 7.

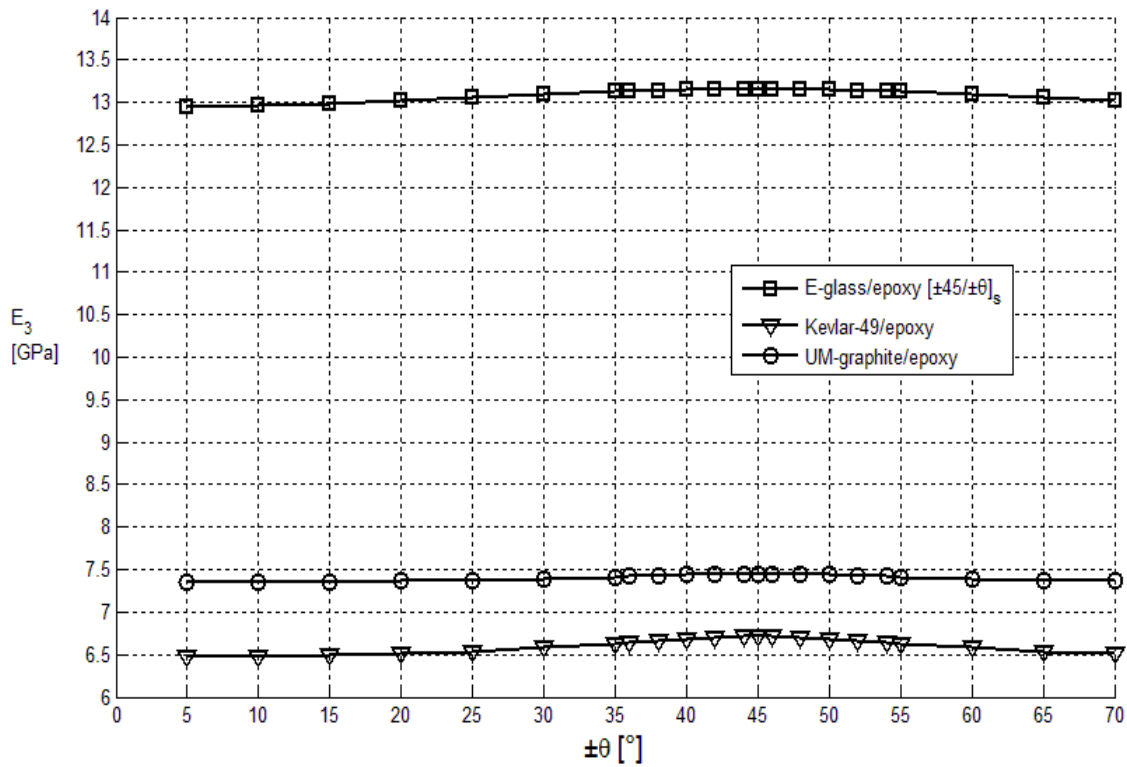


Fig. 4-85 Sovrapposizione degli  $E_3$  dei laminati con diverse fibre del modello 7.

## Modello 8

*E-glass/epoxy*

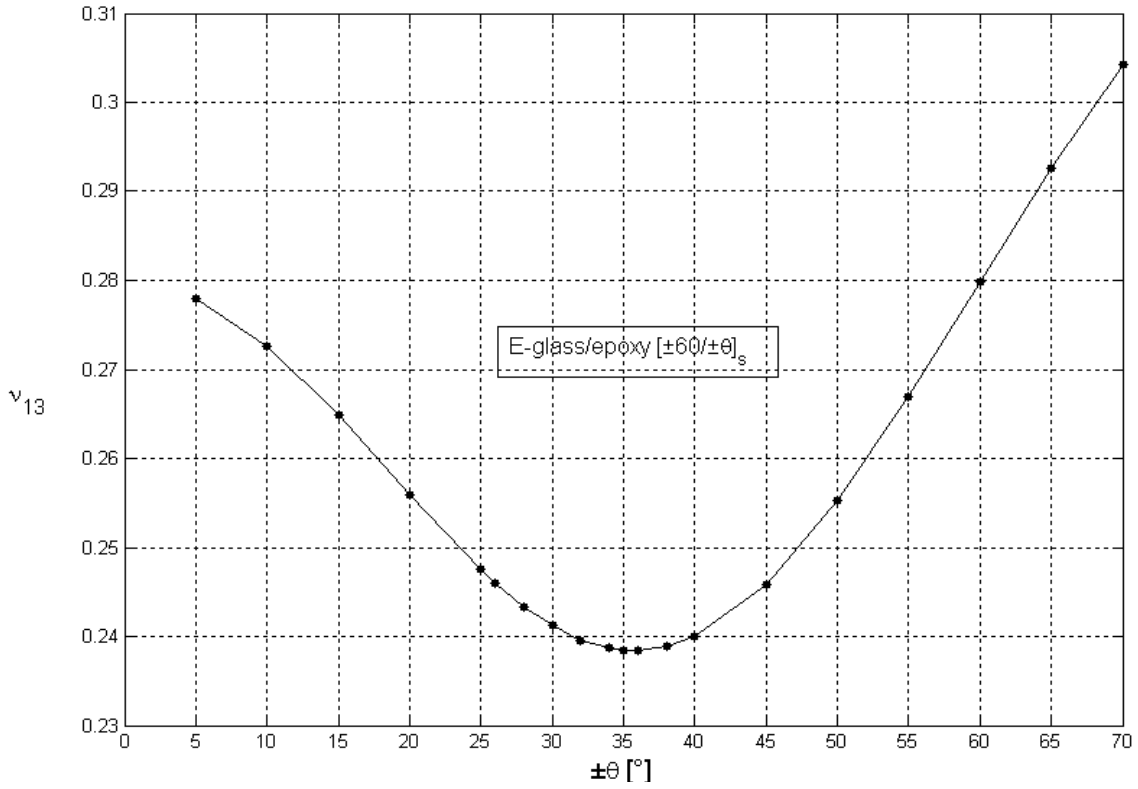


Fig. 4-86 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 8 con fibre di vetro.

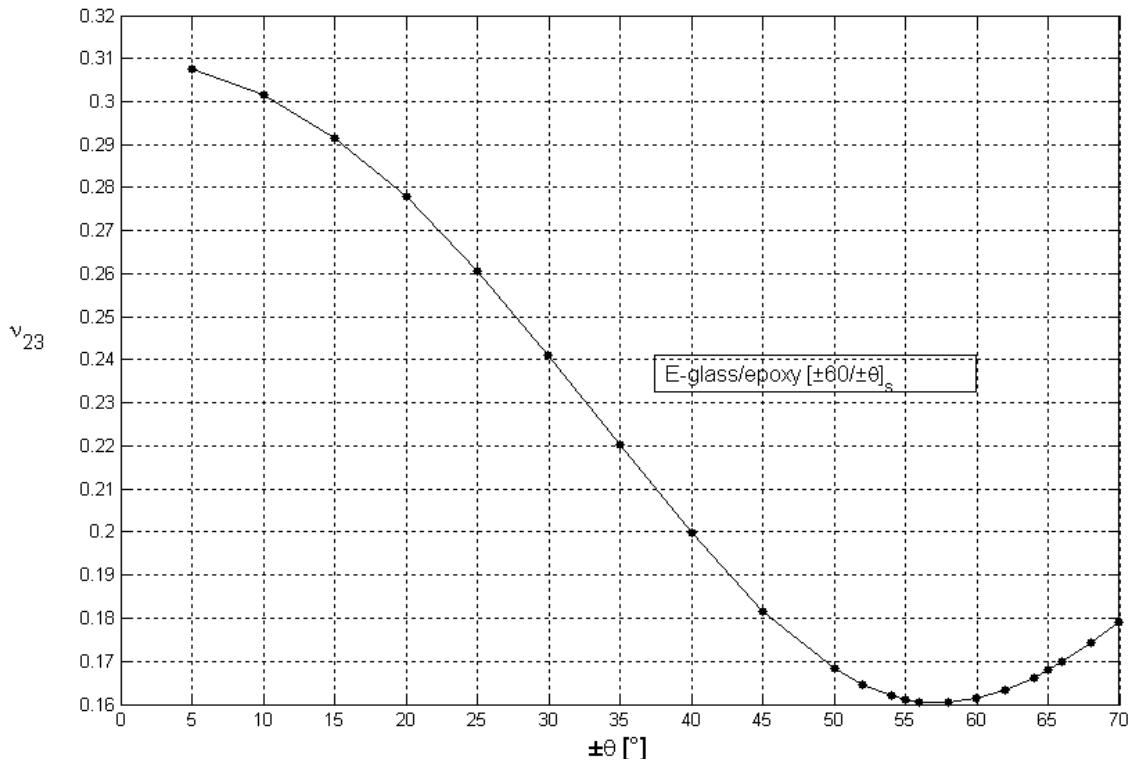


Fig. 4-87 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 8 con fibre di vetro.

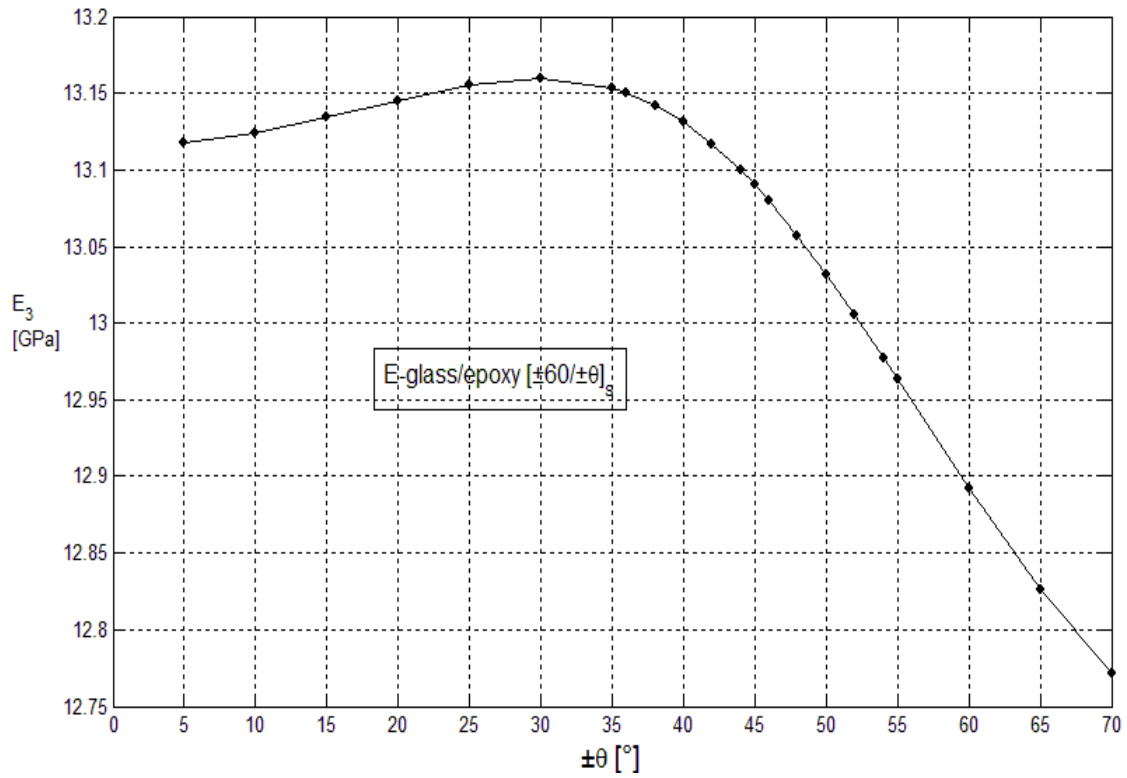


Fig. 4-88 Grafico di  $E_3$  nel modello 8 con fibre di vetro.

**Kevlar-49/epoxy**

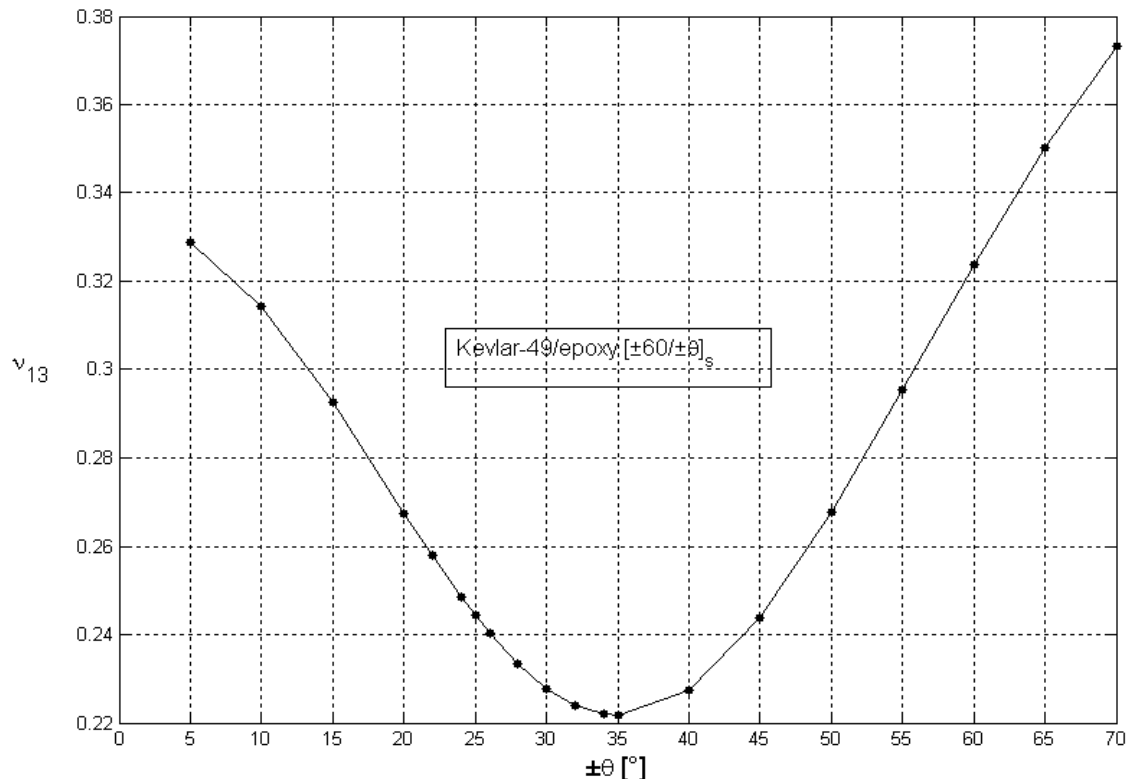


Fig. 4-89 Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 8 con fibre di kevlar.



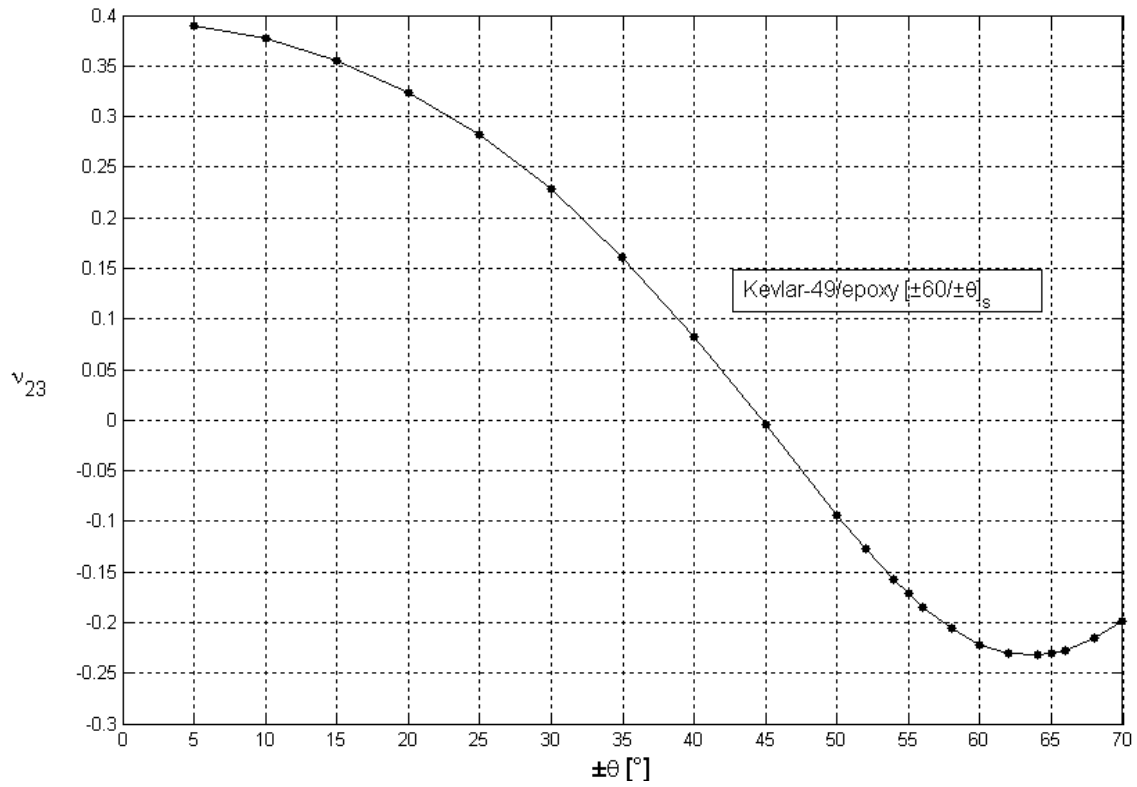


Fig. 4-90 Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 8 con fibre di kevlar.

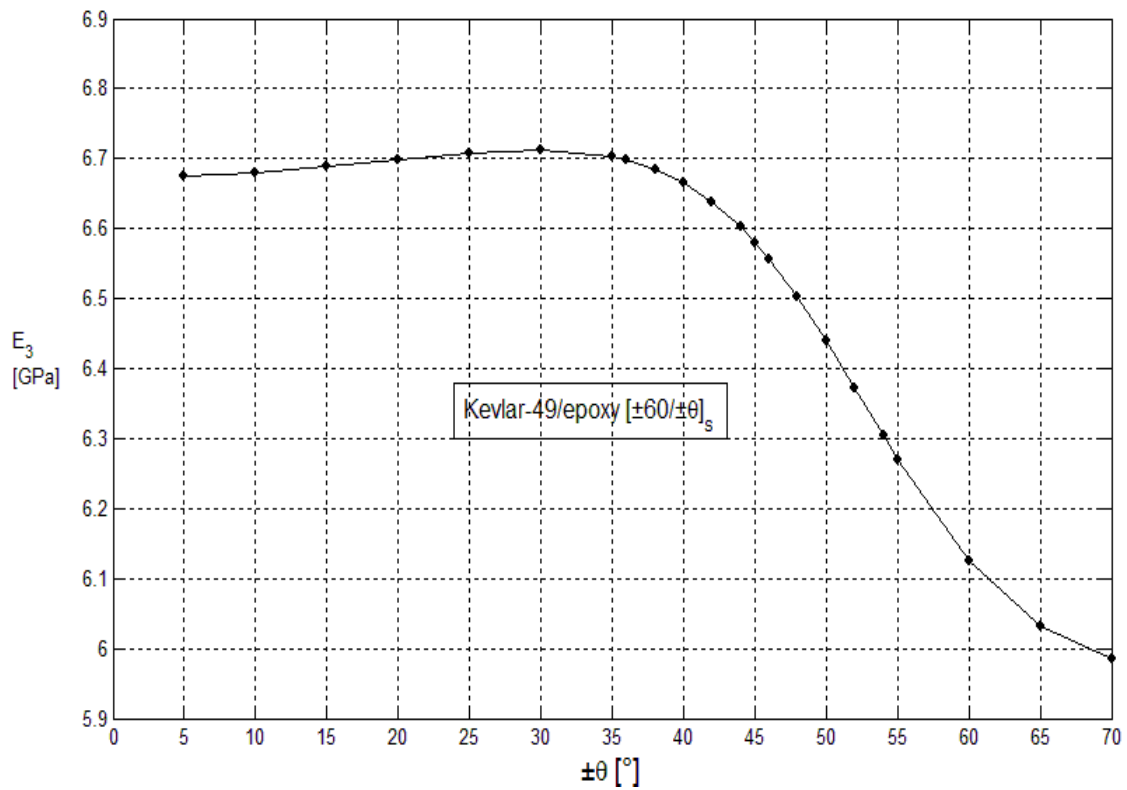
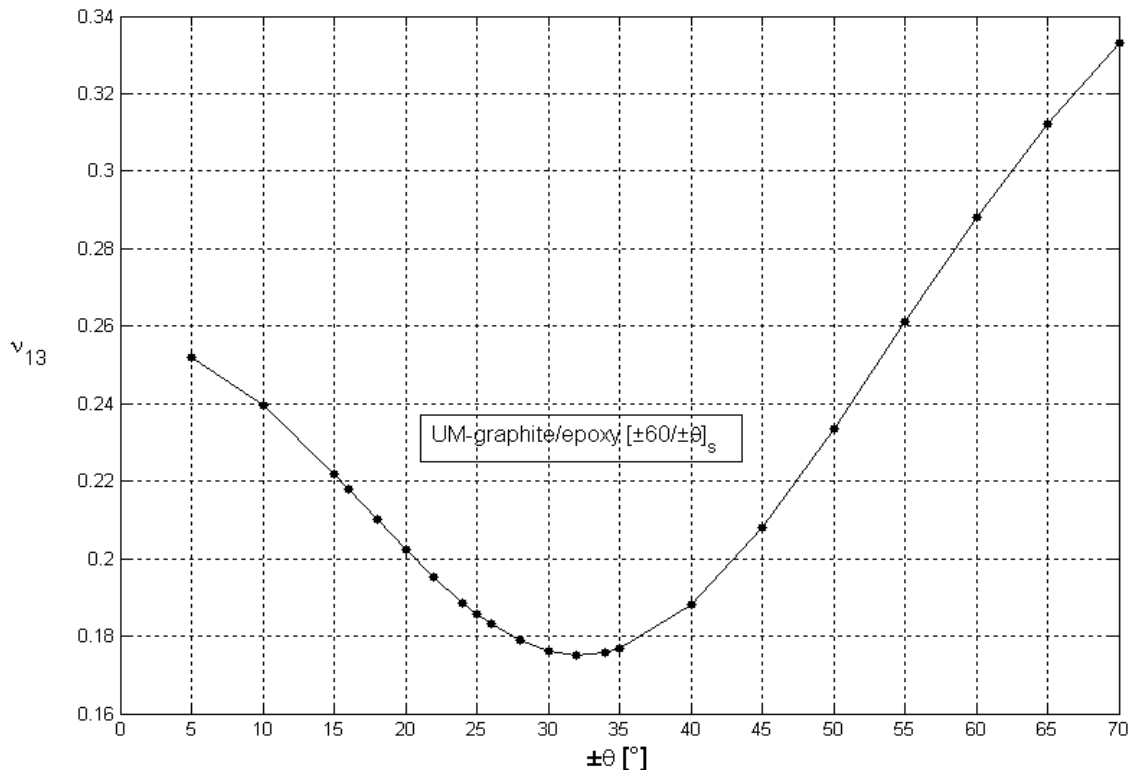
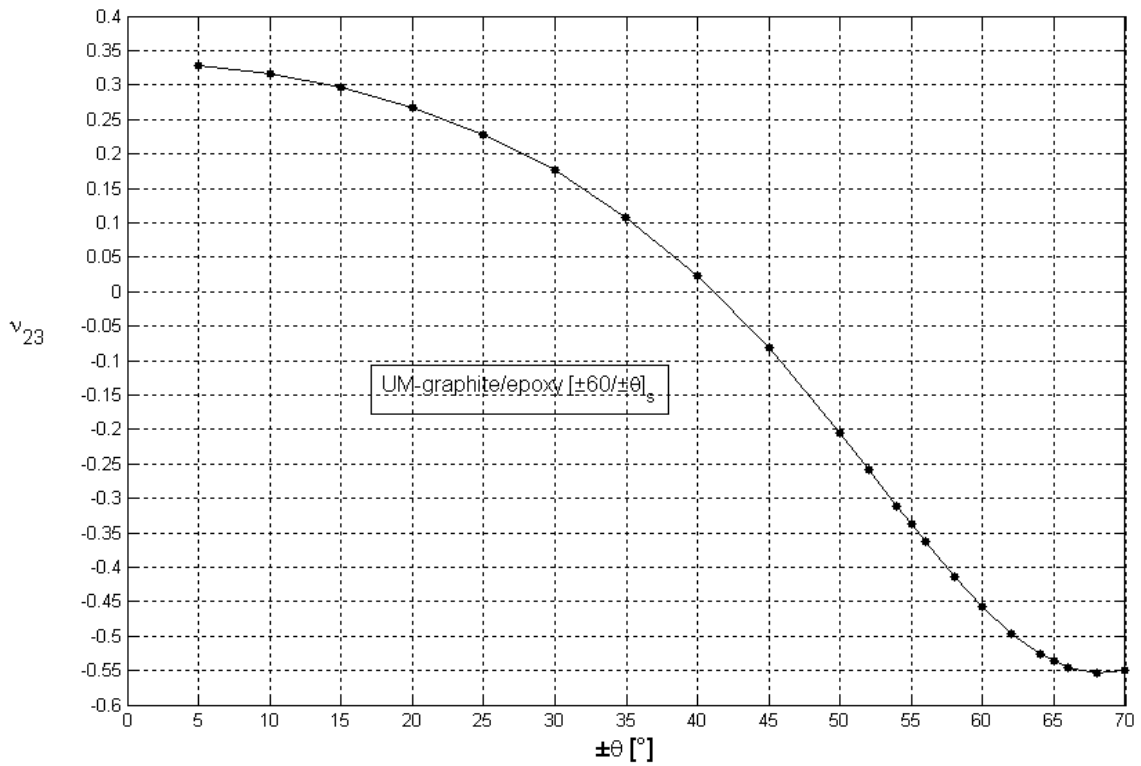


Fig. 4-91 Grafico di  $E_3$  nel modello 8 con fibre di kevlar.

**UM- graphite/epoxy**



**Fig. 4-92** Grafico di  $\nu_{13}$  nel modello 8 con fibre di carbonio.



**Fig. 4-93** Grafico di  $\nu_{23}$  nel modello 8 con fibre di carbonio.

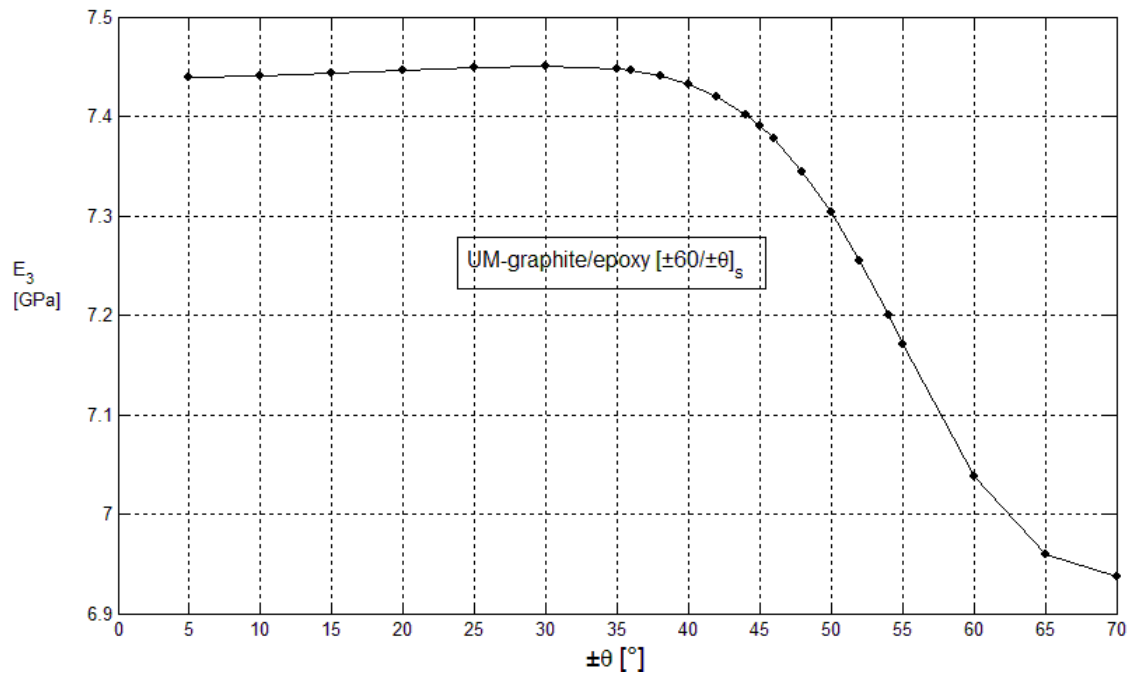


Fig. 4-94 Grafico di  $E_3$  nel modello 8 con fibre di carbonio.

### Grafici comparativi modello 7

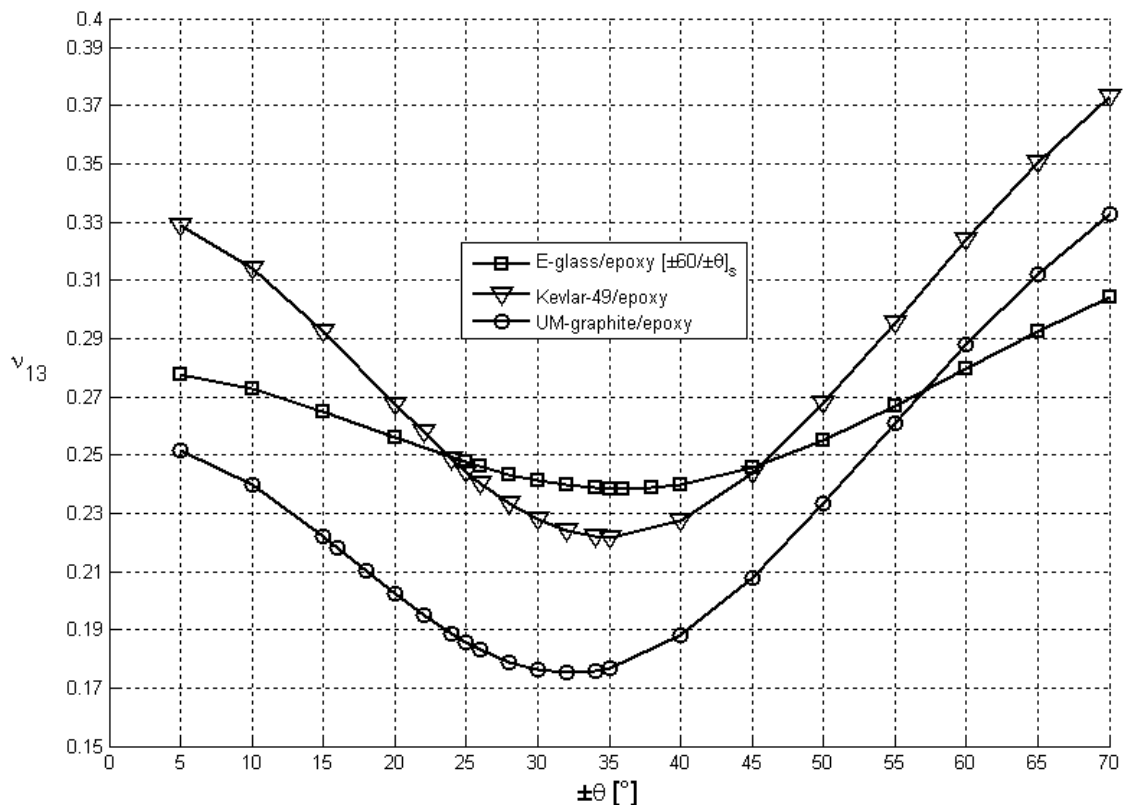


Fig. 4-95 Sovrapposizione dei  $\nu_{13}$  dei laminati con diverse fibre del modello 8.

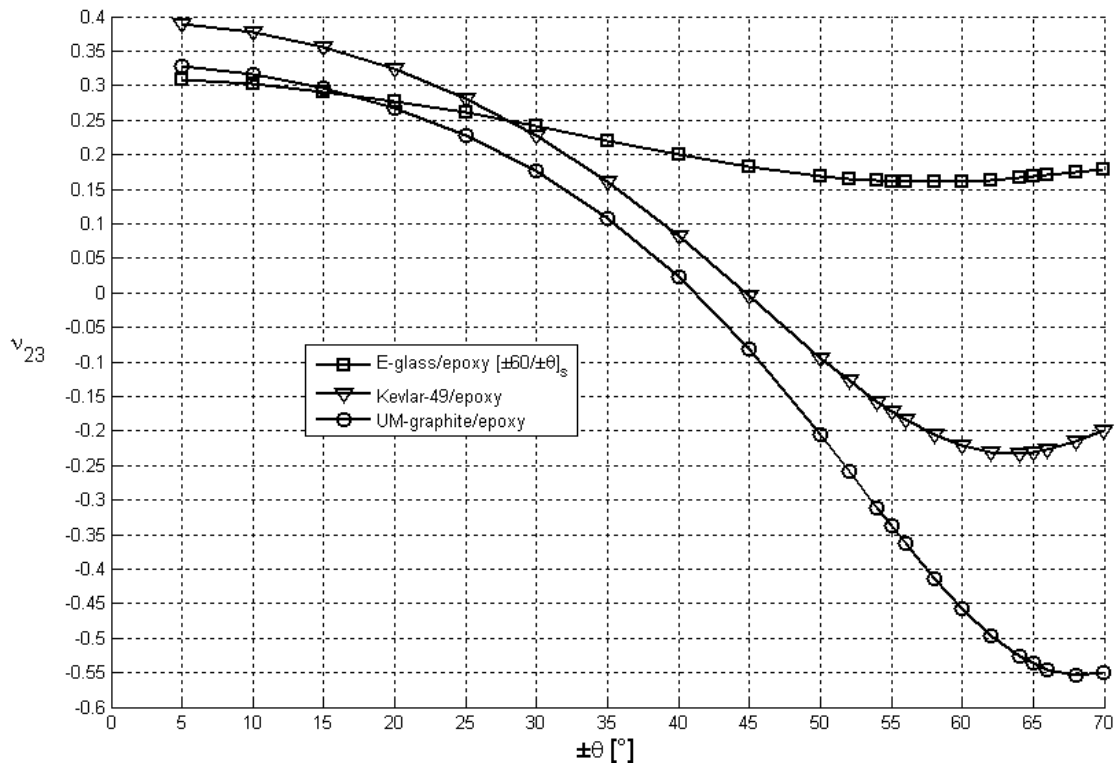


Fig. 4-96 Sovrapposizione dei  $\nu_{23}$  dei laminati con diverse fibre del modello 8.

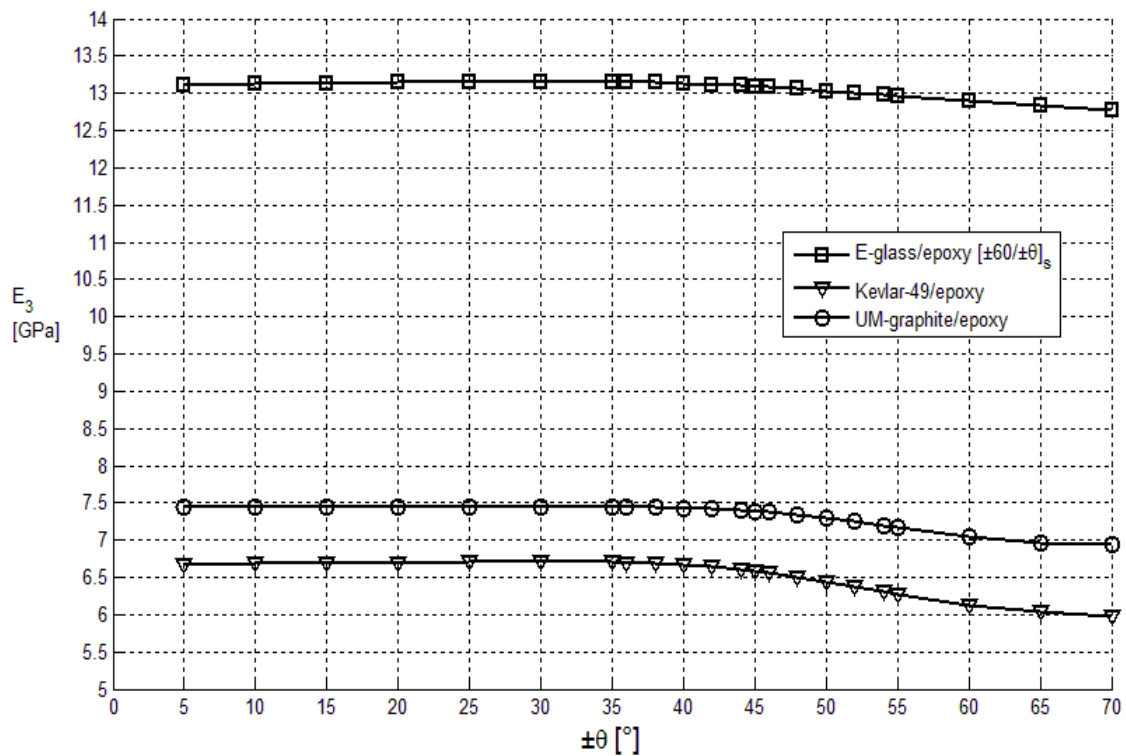


Fig. 4-97 Sovrapposizione degli  $E_3$  dei laminati con diverse fibre del modello 8.

Dalle simulazioni svolte su laminati costituiti da diverse fibre e configurazioni risulta evidente che:

- La fibra di carbonio ad alto modulo è la più idonea per far sì che il laminato abbia complessivamente un comportamento auxetico lungo lo spessore, seguita dalla fibra di kevlar e da quella di vetro: questo, come più volte ribadito nel corso della tesi, è dovuto soprattutto al fatto di manifestare un comportamento più anisotropo rispetto alle altre due.
- Il valore più negativi ottenuti dei coefficienti di Poisson sono  $\nu_{13} = \nu_{23} = -0.7471$ , ottenuti rispettivamente con una configurazione  $[\pm 20^\circ]_{2s}$  e  $[\pm 70^\circ]_{2s}$  utilizzando fibre di grafite ad alto modulo. Anche con il kevlar si possono ottenere dei valori dei coefficienti negativi, fino a  $\nu_{13} = \nu_{23} = -0.2456$  nelle configurazioni  $[\pm 26^\circ]_{2s}$  e  $[\pm 64^\circ]_{2s}$ ; con il vetro non si è in grado con nessuna configurazione di far in modo che i coefficienti siano negativi.
- Nei modelli analizzati non si è in grado di ottenere dei valori negativi per entrambi i coefficienti di Poisson: fissata una configurazione di *lay-up* delle lamine, se  $\nu_{13} < 0$  allora sicuramente  $\nu_{23} > 0$  e viceversa.
- La configurazione più auxetica è quella che prevede un laminato *angle-ply* del tipo  $[\pm\theta]_{2s}$  mentre inserire delle lamine a  $0^\circ$  consente ancora di ottenere dei valori negativi di  $\nu_{13}$  ma di modulo inferiore, mentre  $\nu_{23}$  risulta sempre positivo.
- Le forze di accoppiamento tra i vari strati, come evidenziato nelle formule dei paragrafi 3.4.1 e 3.4.2, risultano essere fondamentali nella previsione dei valori di  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{23}$  ed  $E_3$  del laminato; trascurarle determinerebbe dei risultati lontani dalla realtà. I valori dei coefficienti Poisson risultano essere quindi fortemente influenzati da questi effetti.
- Nelle simulazioni si è assunto che il modulo elastico lungo lo spessore del *ply*,  $E_3^j$ , sia uguale a  $E_2^j$ , così come  $\nu_{12}^j = \nu_{13}^j$ ; dato che ogni lamina è molto sottile, queste approssimazioni non si discostano molto dalla realtà e possono essere tranquillamente utilizzate.
- Nelle simulazioni si nota come il modulo elastico lungo lo spessore del laminato,  $E_3$ , sia molto maggiore nel caso di fibre di vetro. Questo lo si può capire dalla formula (3.43) dove il termine che pesa maggiormente è  $E_3^j$ , posto uguale a  $E_2^j$  per quanto detto al precedente punto; per il vetro questo termine risulta essere un ordine di grandezza maggiore rispetto alle fibre di kevlar e carbonio e ne consegue quindi un maggiore valore di  $E_3$  del laminato.

Si riportano ora dei grafici di confronto, in cui il tipo di fibra che costituisce i vari laminati è sempre la medesima, ma variano i modelli.

In questo modo risulta più evidente quali *lay-up* forniscano i valori di  $\nu_{13}$  e di  $\nu_{23}$  negativi e quali invece non manifestano comportamento auxetico lungo lo spessore del laminato.

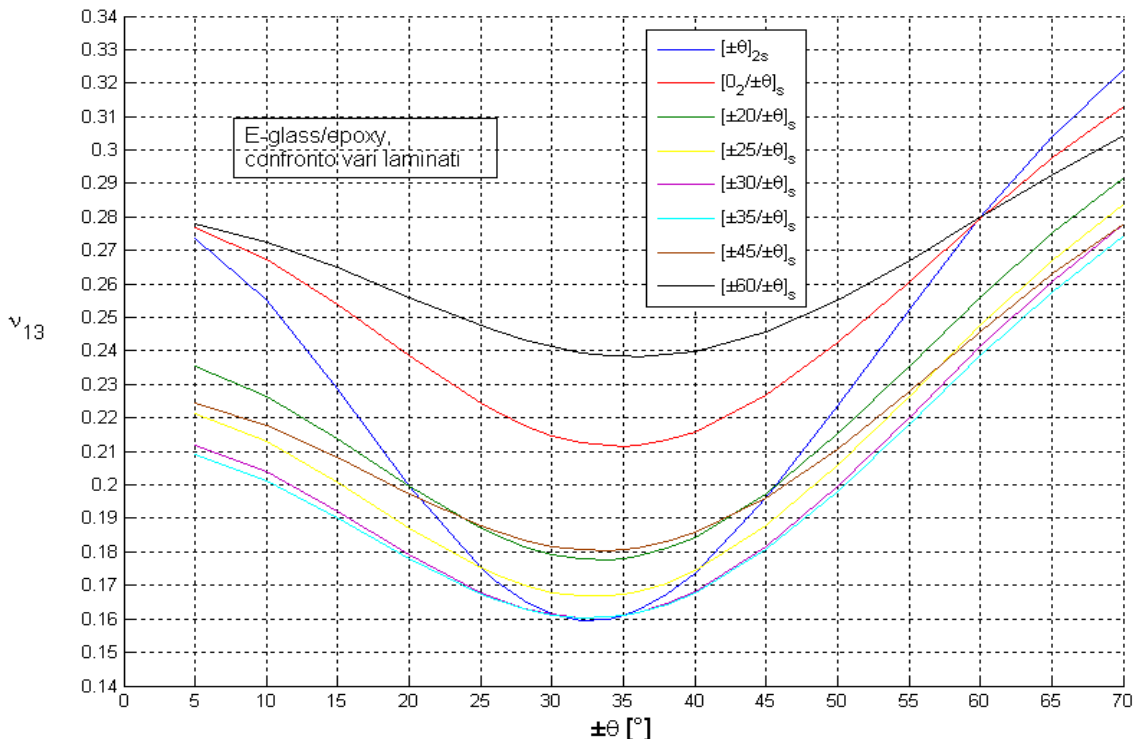


Fig. 4-98 Confronto dei  $\nu_{13}$  dei vari laminati con diverso *lay-up*; la fibra considerata è quella di vetro.

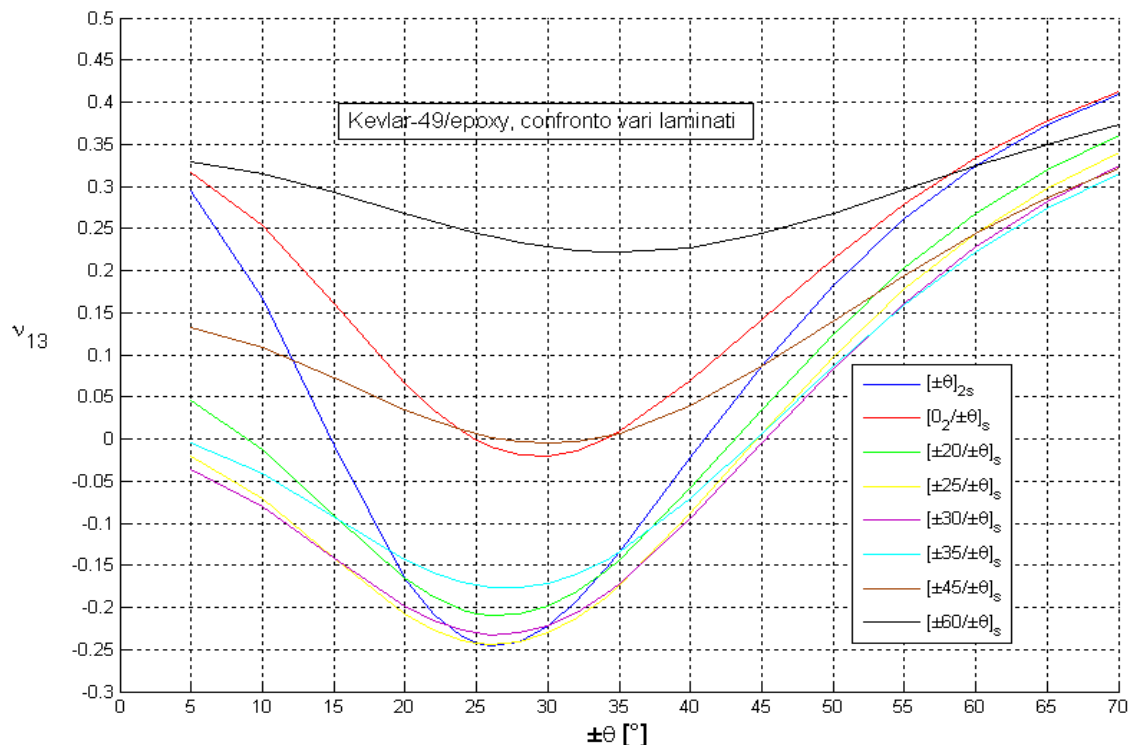


Fig. 4-99 Confronto dei  $\nu_{13}$  dei vari laminati con diverso *lay-up*; la fibra considerata è quella di kevlar.

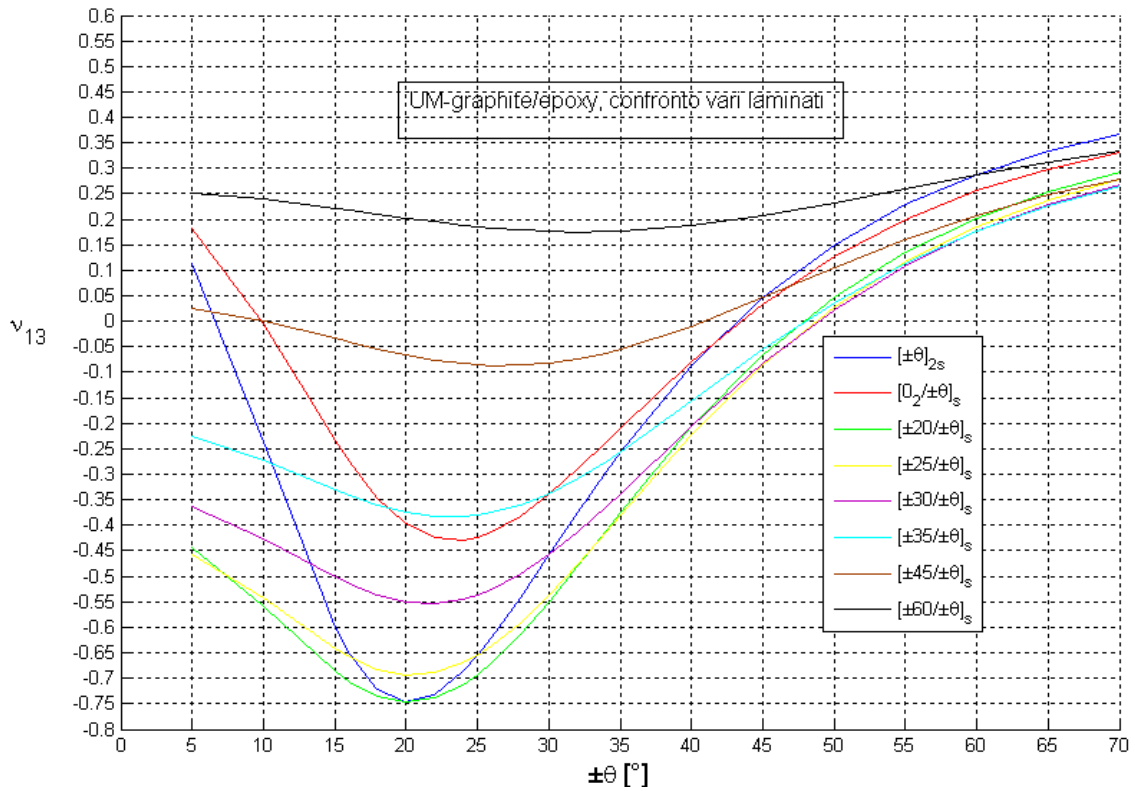


Fig. 4-100 Confronto dei  $\nu_{13}$  dei vari laminati con diverso *lay-up*; la fibra considerata è quella di carbonio.

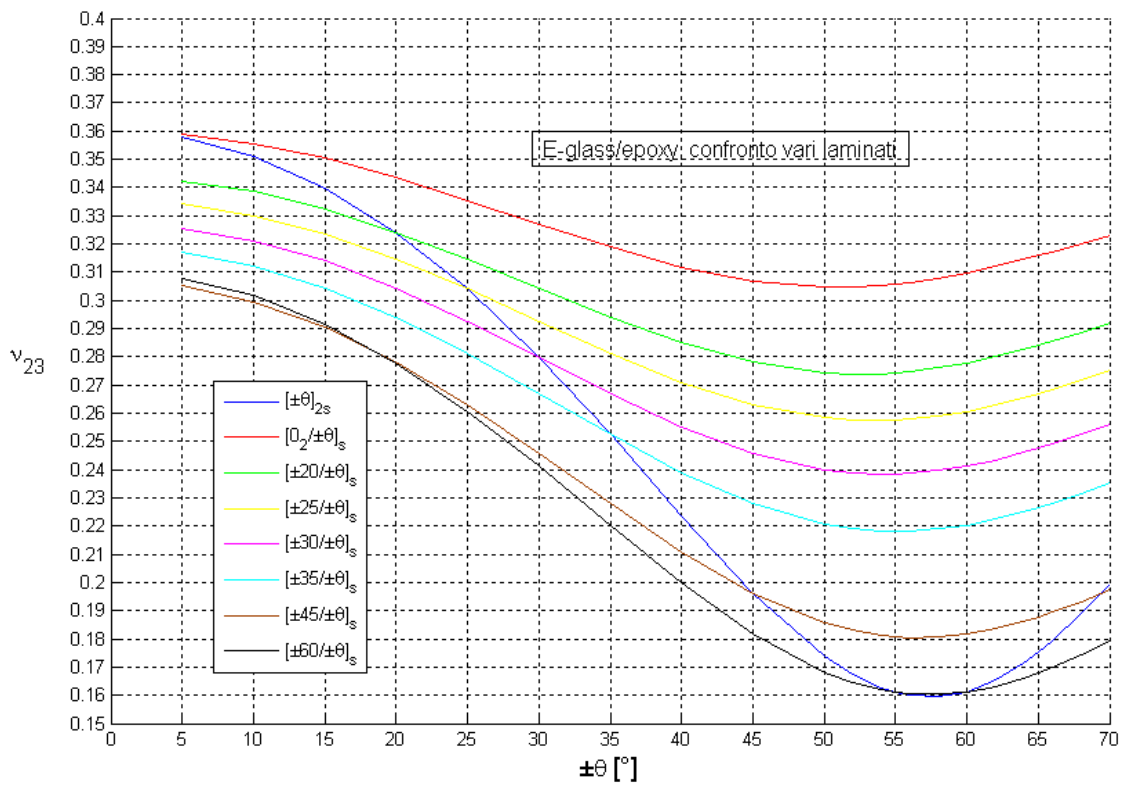
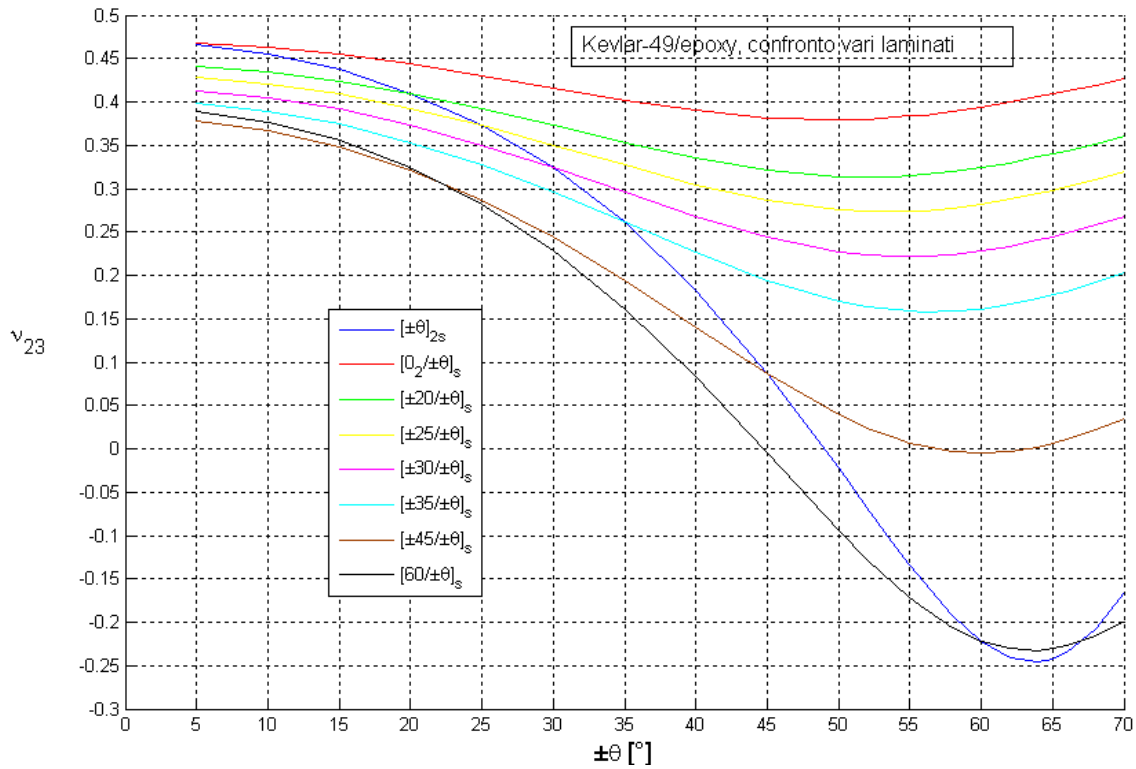
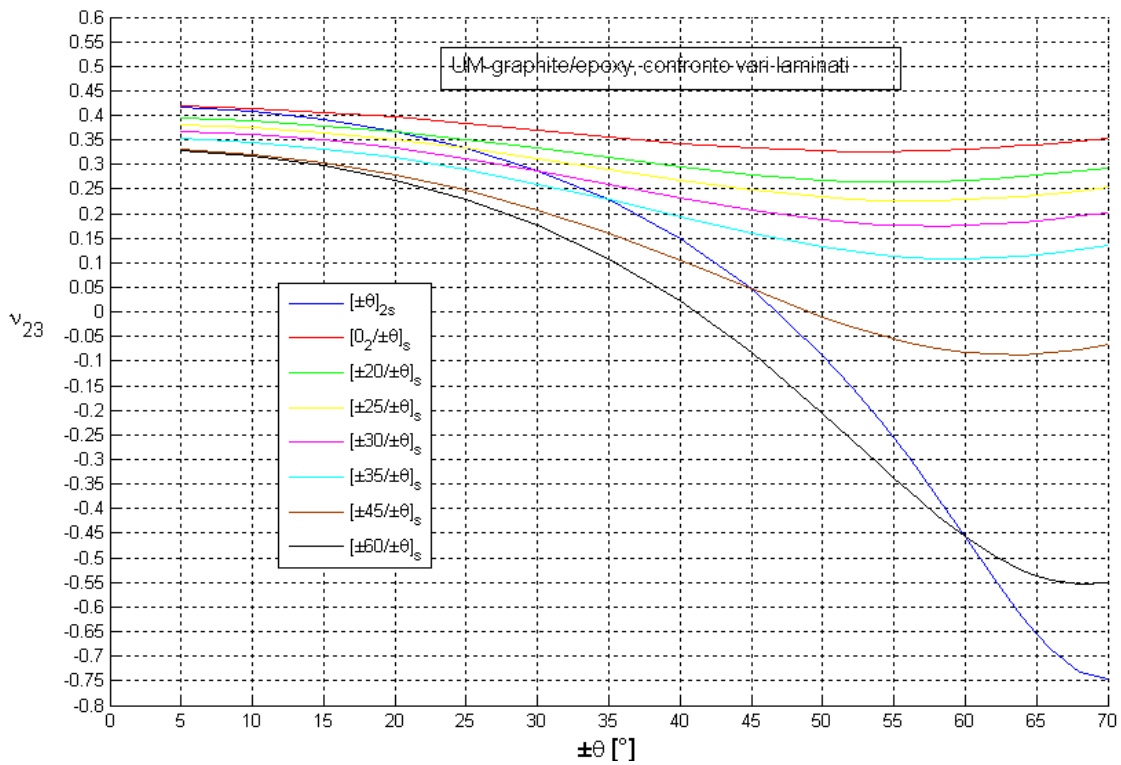


Fig. 4-101 Confronto dei  $\nu_{23}$  dei vari laminati con diverso *lay-up*; la fibra considerata è quella di vetro.



**Fig. 4-102** Confronto dei  $\nu_{23}$  dei vari laminati con diverso *lay-up*; la fibra considerata è quella di kevlar.



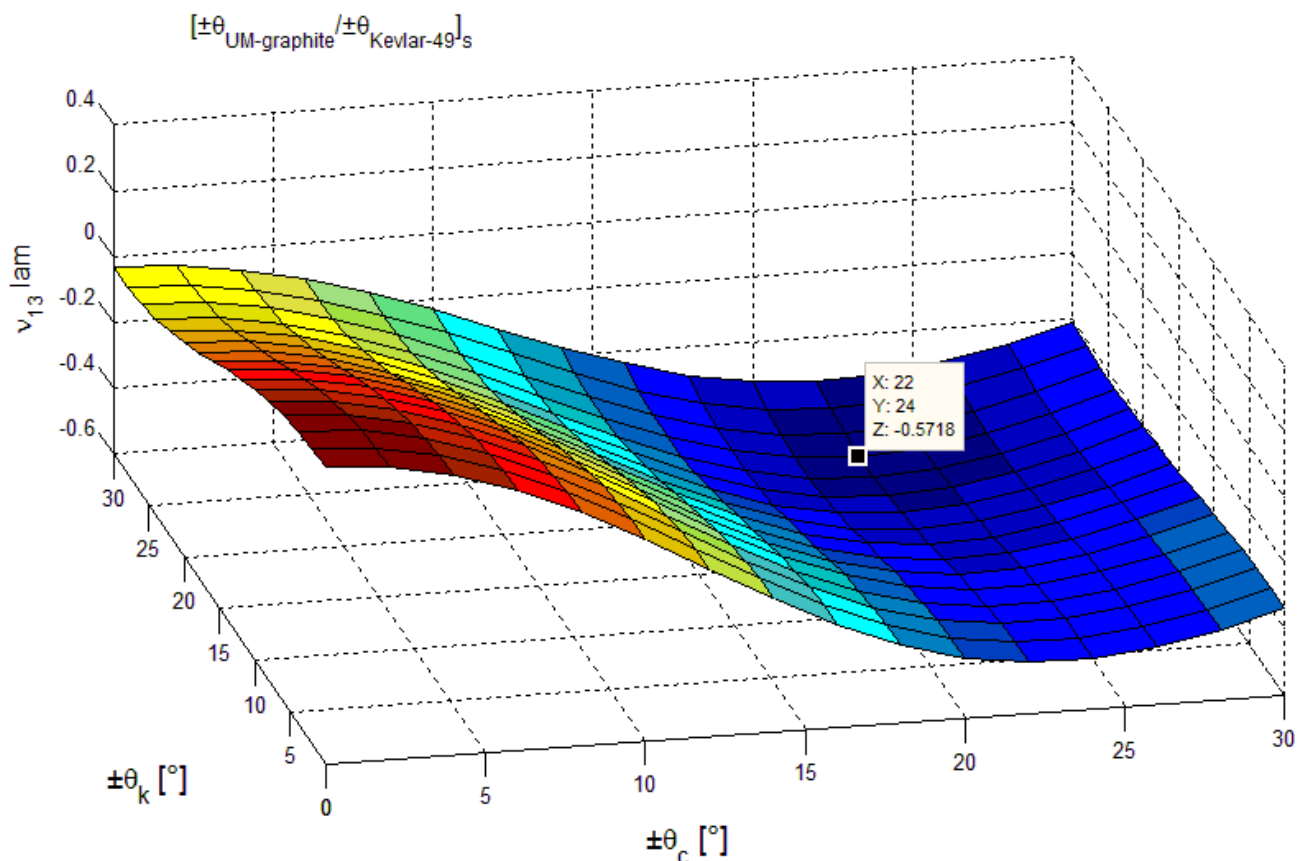
**Fig. 4-103** Confronto dei  $\nu_{23}$  dei vari laminati con diverso *lay-up*; la fibra considerata è quella di carbonio.



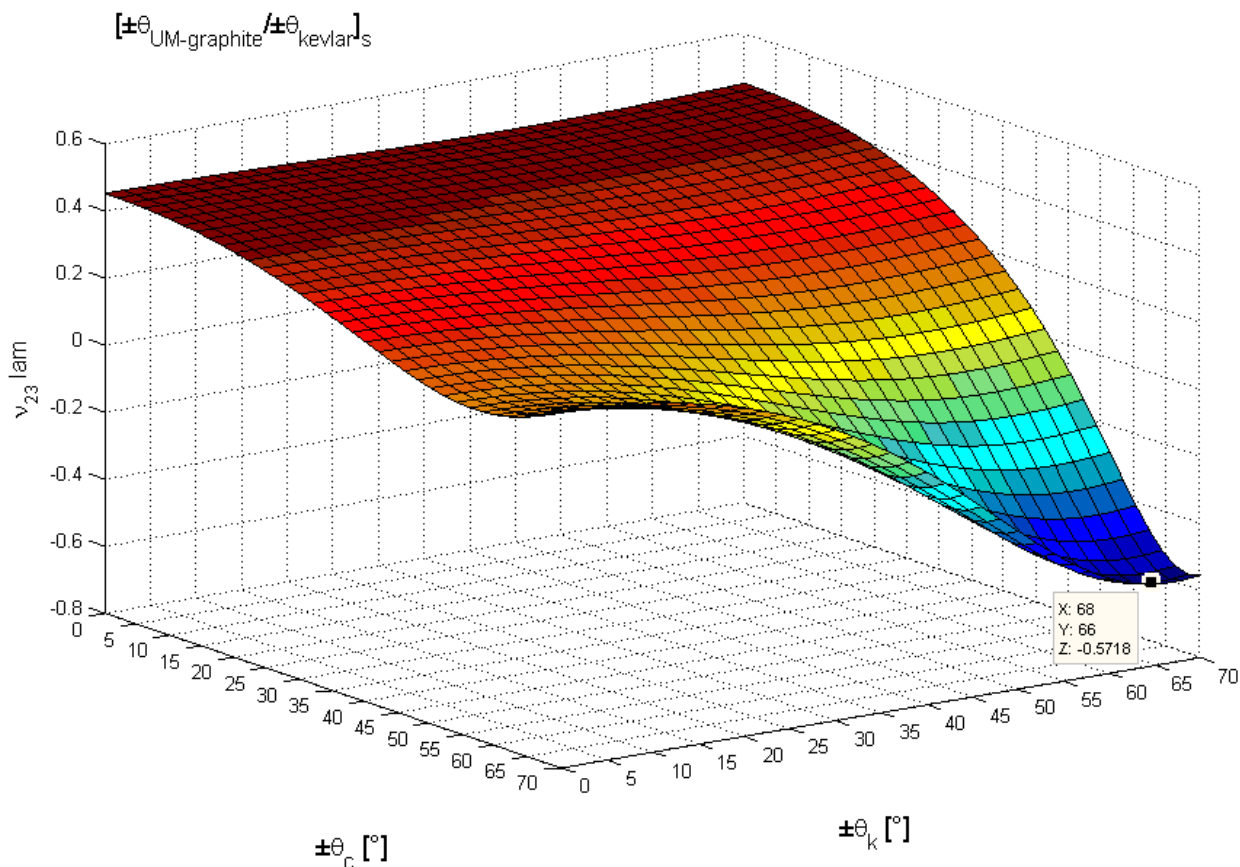
Dalle rappresentazioni risulta ancora più evidente come con la fibra di carbonio si riesca a raggiungere valori più negativi del coefficiente di Poisson lungo lo spessore e che la soluzione più efficace per ottenere tale risultato sia quella di progettare un laminato simmetrico *angle-ply* con otto lamine a  $\pm 20^\circ$ , per avere il minimo  $\nu_{13}$  e otto lamine a  $\pm 70^\circ$ , per avere il minimo  $\nu_{23}$ .

Anche con le fibra di kevlar si possono raggiungere valori negativi del coefficiente di Poisson, mentre la fibra di vetro possiede una marcata isotropia che non consente di raggiungere valori negativi.

A seguito di tali conclusioni, ribadendo che le fibre di carbonio e kevlar sono le più idonee per ottenere il risultato prefissato di avere i coefficienti di Poisson più negativi possibili, si è andati ad analizzare una configurazione ibrida per vedere se con un laminato costituito da diverse fibre vi fosse modo di aumentare l'auxeticità. I risultati ottenuti per  $\nu_{13}$  e  $\nu_{23}$  sono di seguito rappresentati.



**Fig. 4-104** Grafico dei  $\nu_{13}$  ottenibili utilizzando laminati con fibre di carbonio e kevlar. Viene indicato il valore minimo.



**Fig. 4-105** Grafico dei  $\nu_{23}$  ottenibili utilizzando laminati con fibre di carbonio e Kevlar. Viene indicato il valore minimo.

Dalle figure 4-104 e 4-105 si nota come il punto di minimo per i coefficienti di Poisson si raggiunge nell'intorno delle due configurazioni che prese singolarmente fornivano il minimo, ossia  $[\pm 22^\circ_{UM-graphite}/\pm 24^\circ_{Kevlar-49}]_{2S}$  per  $\nu_{13}$  e  $[\pm 68^\circ_{UM-graphite}/\pm 66^\circ_{Kevlar-49}]_{2S}$  per  $\nu_{23}$ .

L'aver usato un laminato ibrido costituito da lamine con due diversi tipi di fibra non ha inoltre aumentato il comportamento auxetico compressivo.

Si raggiunge infatti un punto di minimo di  $\nu_{13} = -0.5718$  mentre ricordiamo che nel caso di  $UM-graphite [\pm 20^\circ]_{2S}$  si raggiungeva il valore di  $\nu_{13} = -0.7471$ .

Questo evidenzia il fatto che sovrapporre delle lamine con fibre di kevlar a delle lamine di carbonio, rende meno anisotropo l'intero laminato andando conseguentemente a calare l'auxeticità lungo lo spessore.

Per rendere più leggibili le figure dalla 4-98 alla 4-103, si sono costruiti dei grafici che rendono ancora più evidente il fatto che la fibra di carbonio risulti essere la più adatta per ottenere un laminato con il comportamento auxetico lungo lo spessore, mentre utilizzando fibre di vetro non si riesca a raggiungere valori negativi.

Si riportano i grafici per i modelli 2, 3, 4, 5, 6, 7 ed 8.

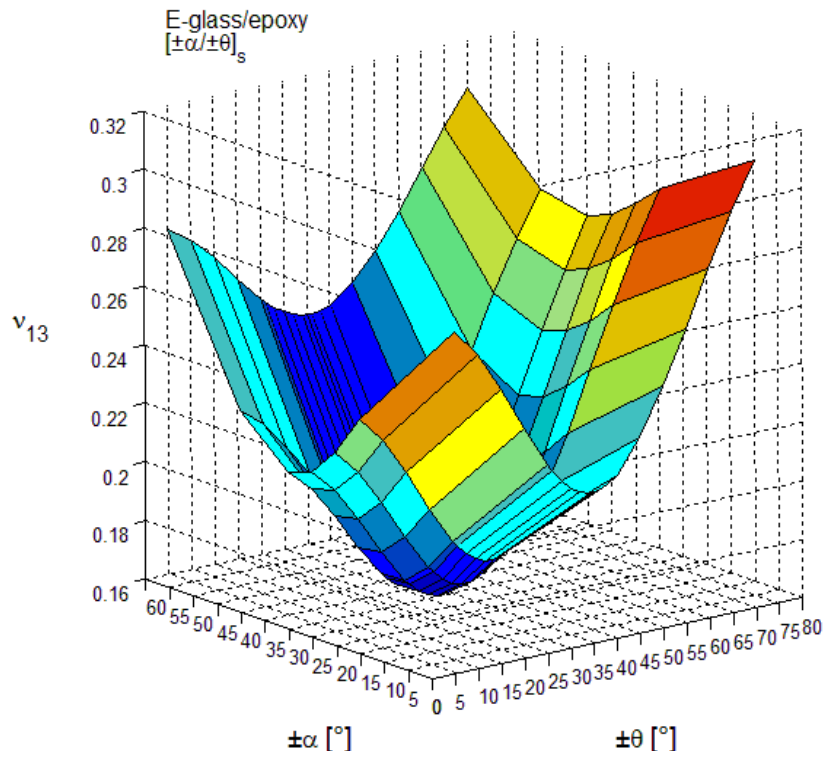


Fig. 4-106 Andamento dei  $\nu_{13}$  nei modelli [ $\pm\alpha/\pm\theta$ ]<sub>s</sub> con fibre di vetro.

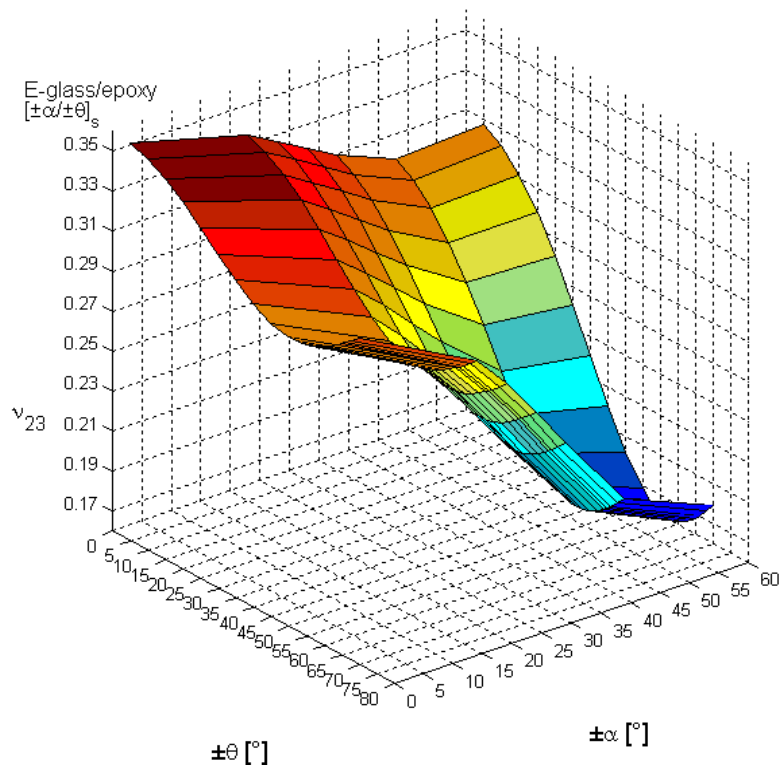


Fig. 4-107 Andamento dei  $\nu_{23}$  nei modelli [ $\pm\alpha/\pm\theta$ ]<sub>s</sub> con fibre di vetro.

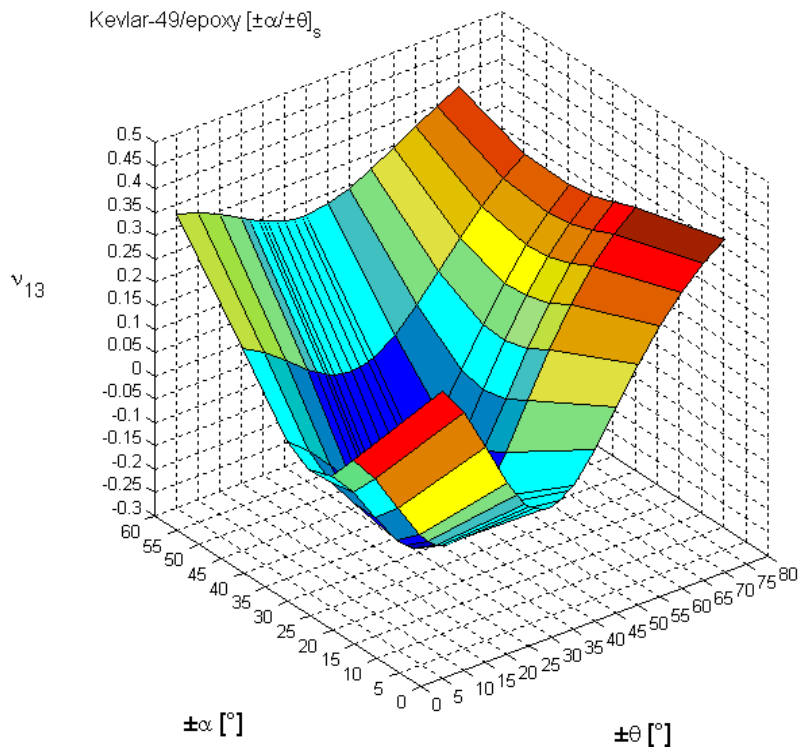


Fig. 4-108 Andamento dei  $\nu_{13}$  nei modelli  $[\pm\alpha/\pm\theta]_s$  con fibre di kevlar.

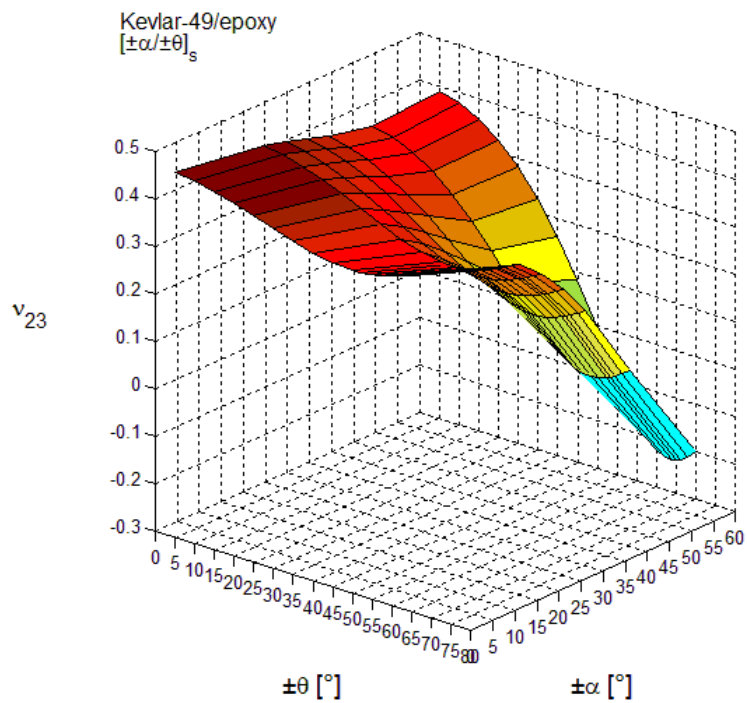


Fig. 4-109 Andamento dei  $\nu_{23}$  nei modelli  $[\pm\alpha/\pm\theta]_s$  con fibre di kevlar.

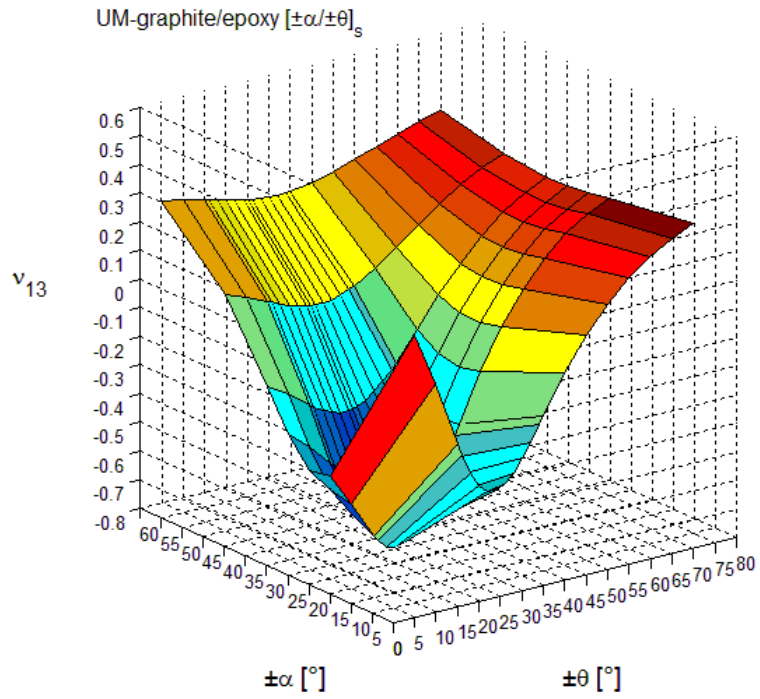


Fig. 4-110 Andamento dei  $v_{13}$  nei modelli  $[\pm\alpha/\pm\theta]_s$  con fibre di carbonio.

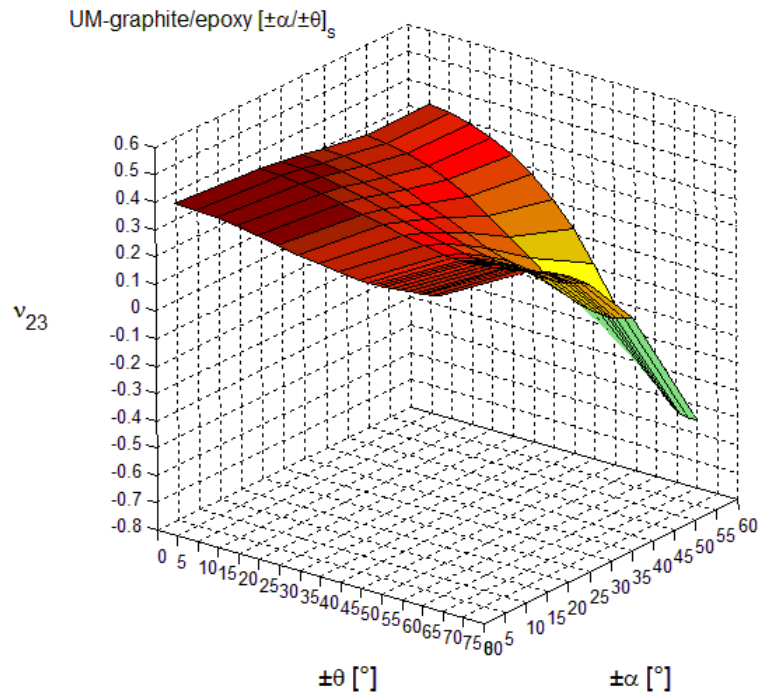


Fig. 4-111 Andamento dei  $v_{23}$  nei modelli  $[\pm\alpha/\pm\theta]_s$  con fibre di carbonio.

Ricordando che uno degli aspetti fondamentali per ottenere un coefficiente di Poisson negativo lungo lo spessore è quello di avere una marcata anisotropia del singolo *ply*, che renda poi il più possibile anisotropo l'intero laminato, si è cercato di capire se esiste un valore minimo del rapporto tra i moduli elastici della lamina,  $E_2^{ply}/E_1^{ply}$  tale per cui questo sia possibile.

Questo è stato studiato considerando l'orientazione delle lamine fisse nella disposizione  $[\pm 20^\circ]_{2s}$ , indipendentemente dal tipo di fibra, e mantenendo costante i valori di  $E_1^{ply}$ ,  $G_{12}^{ply}$  e  $\nu_{12}^{ply}$ .

Si è supposto che  $E_1^{ply} = \alpha E_2^{ply}$ , con  $\alpha$  variabile da 0.01 a 0.5 con passi costanti di valore 0.01.

In questo modo si sono ottenuti una serie di punti che sono poi stati opportunamente interpolati (Fig. 4-112, 4-113, 4-114).

Il grafico di figura 4-115 confronta invece i vari modelli.

Per quanto riguarda il valore di  $\nu_{23}$  si potrebbe fare un discorso analogo e se ad esempio fissiamo una configurazione degli strati di  $[\pm 70^\circ]_{2s}$ , che permette di ottenere il valore minimo con la fibra di grafite, si otterrebbero dei valori, per simmetria dei grafici, del tutto analoghi a quelli di  $\nu_{13}$ .

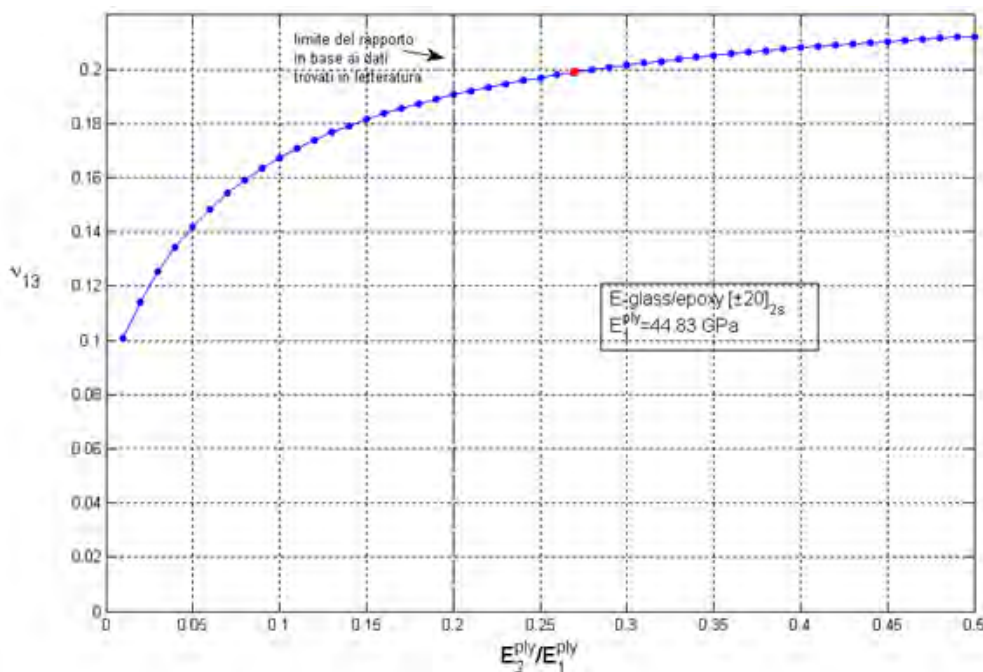


Fig. 4-112 Andamento di  $\nu_{13}$  al variare del rapporto tra i moduli elastici, nel piano, della lamina con fibre di vetro nella configurazione  $[\pm 20^\circ]_{2s}$ .

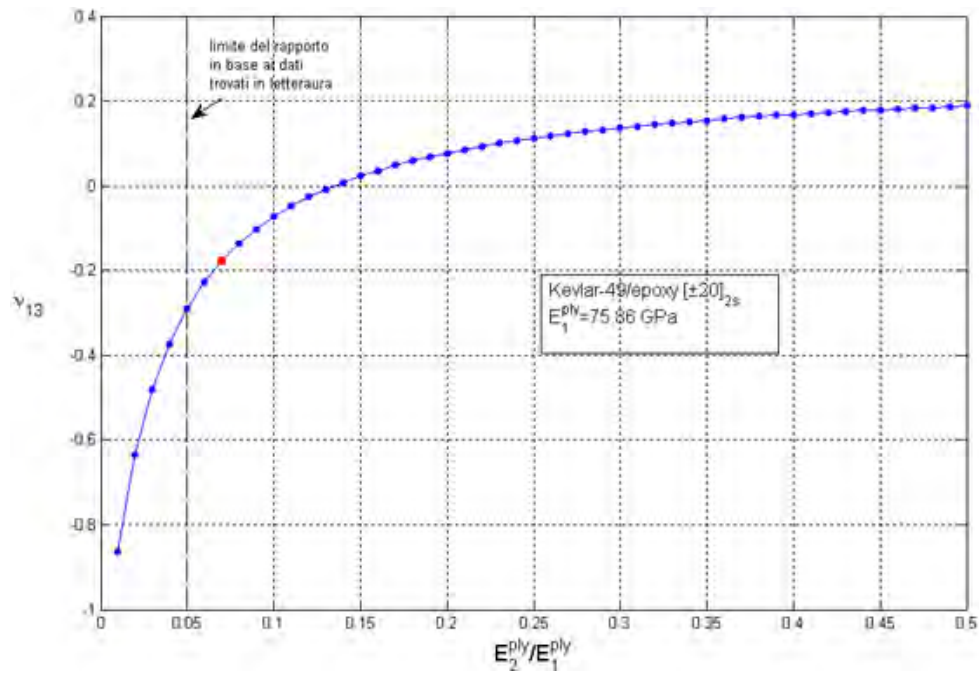


Fig. 4-113 Andamento di  $\nu_{13}$  al variare del rapporto tra i moduli elastici, nel piano, della lamina con fibre di kevlar nella configurazione  $[\pm 20]_{2s}$ .

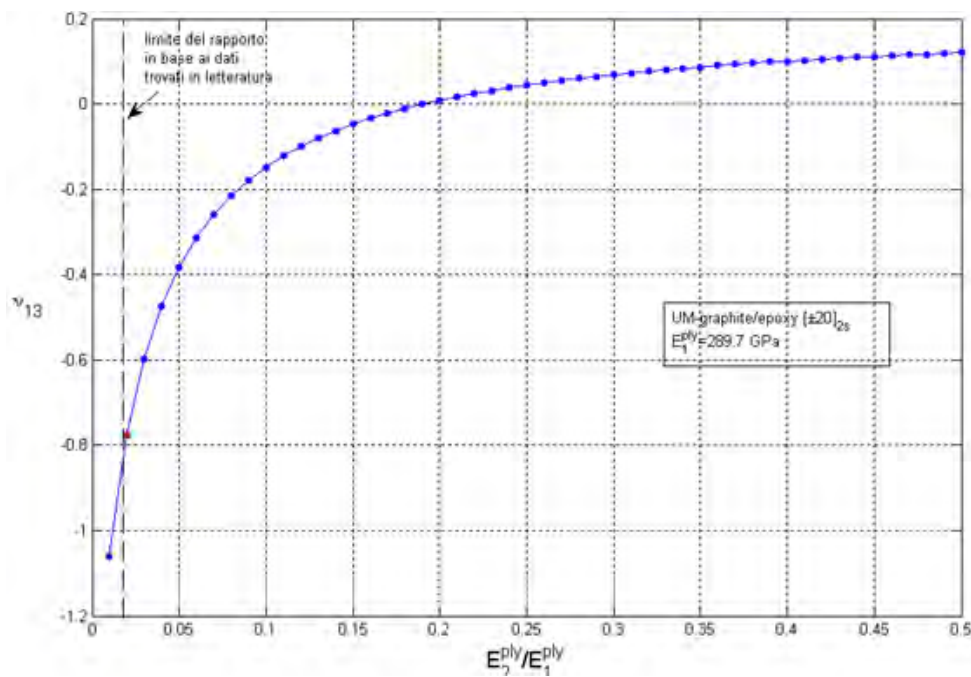


Fig. 4-114 Andamento di  $\nu_{13}$  al variare del rapporto tra i moduli elastici, nel piano, della lamina con fibre di carbonio nella configurazione  $[\pm 20]_{2s}$ .

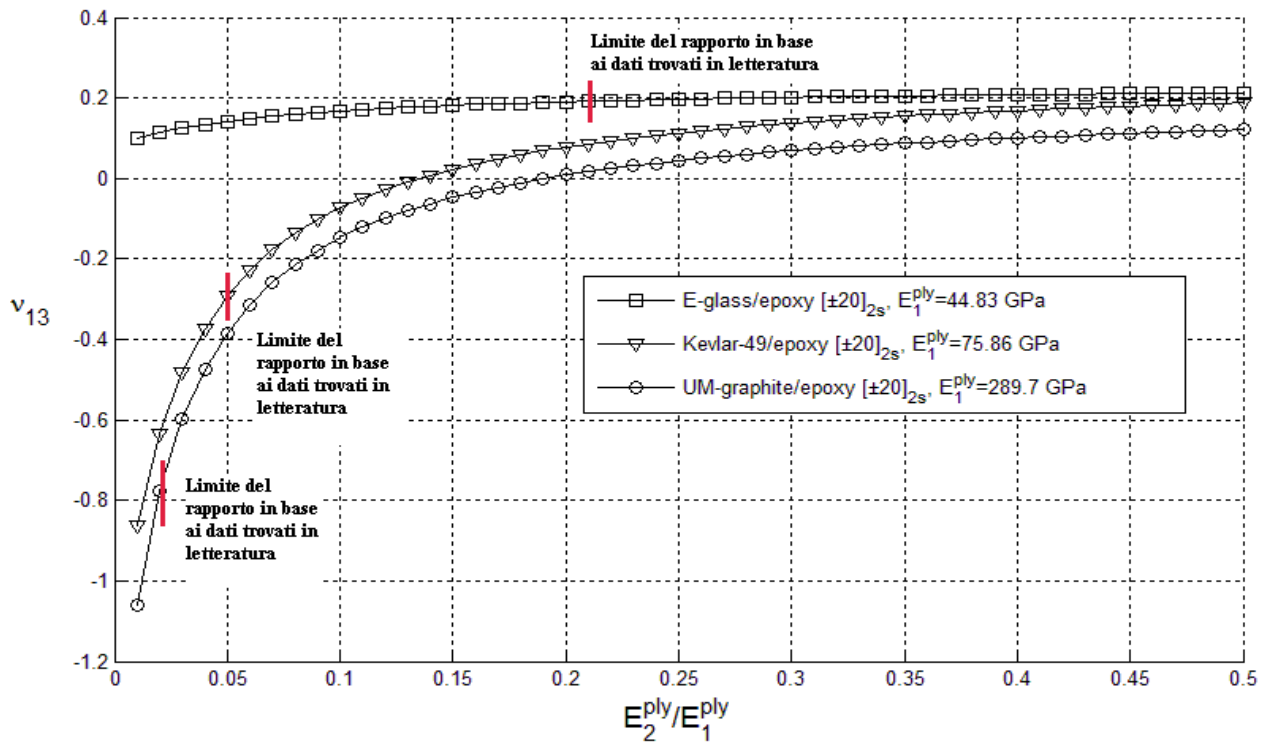


Fig. 4-115 Confronto tra gli andamenti di  $\nu_{13}$  al variare del rapporto tra i moduli elastici, nel piano, delle lamine con fibre di vetro, Kevlar, carbonio nella configurazione  $[\pm 20]_{2s}$ .

Nelle figure presentate viene indicato anche il limite del rapporto  $E_2^{ply}/E_1^{ply}$  in base ai dati disponibili in letteratura, ossia considerando i diversi materiali compositi oggi prodotti. Si nota come la fibra di vetro sia la meno adatta per ottenere valori bassi del rapporto a causa della sua marcata isotropia, mentre con il Kevlar, ma soprattutto con il carbonio, si riesce a scendere fino a valori del rapporto inferiori a 0.05.

Kevlar e carbonio ad alto modulo sono quindi i più adatti ad ottenere un effetto auxetico e la grafite offre un *range* di possibili valori più ampio, consentendo di avere dei valori negativi di  $\nu_{13}$  per un intervallo del rapporto  $E_2^{ply}/E_1^{ply}$  maggiormente esteso rispetto al kevlar.

Nelle figure 4-112, 4-113 e 4-114, i punti rossi rappresentano gli intorno, del valore del rapporto tra i moduli elastici, utilizzati nella simulazione con gli otto modelli e, come si poteva aspettare, per la grafite il rapporto è minore rispetto al kevlar e al vetro: questo rimarca ancora una volta il fatto che una delle caratteristiche indispensabili che consente di raggiungere valori negativi del coefficiente di Poisson lungo lo spessore sia l'anisotropia del *ply*, ossia che la lamina possieda un modulo elastico  $E_2^{ply}$  il più possibile diverso da  $E_1^{ply}$ ; il fatto però di avere una lamina fortemente anisotropa non è però da considerarsi esclusivamente positivo; bisogna infatti prestare molta attenzione alla direzione della sollecitazione alla quale è soggetta l'intera struttura progettata, evitando che agisca secondo orientazioni in cui il modulo elastico abbia un valore troppo basso.

Inoltre, si è potuto constatare che il fatto di avere laminati costituiti da solo fibre di carbonio sia più vantaggioso rispetto ad avere insieme anche altri tipi di fibra: questo è vero per ciò che riguarda l'auxeticità complessiva ma non vale per tutte le altre proprietà; ad esempio la tenacità risulta essere maggiore per un laminato costituito da carbonio e kevlar piuttosto che uno con lamine di solo carbonio.



## 5. MODELLAZIONE FEM.

### 5.1. Il problema del buckling

Dopo aver analizzato nel capitolo 4 come si possa ottenere un comportamento auxetico semplicemente con una opportuna scelta del materiale e una precisa disposizione delle lamine, si affronta il problema del buckling di laminati compositi auxetici, confrontando una modellazione FEM con elementi 2D con una costituita da elementi 3D.

Per capire il problema del buckling si può far riferimento a una comune esperienza: se si prende un'asta, sufficientemente lunga, e la si sottopone ad un carico assiale di compressione crescente (Fig. 5-1), si nota come arrivati a un determinato valore del carico stesso, l'asta tenda a piegarsi, a curvarsi secondo una certa direzione laterale.

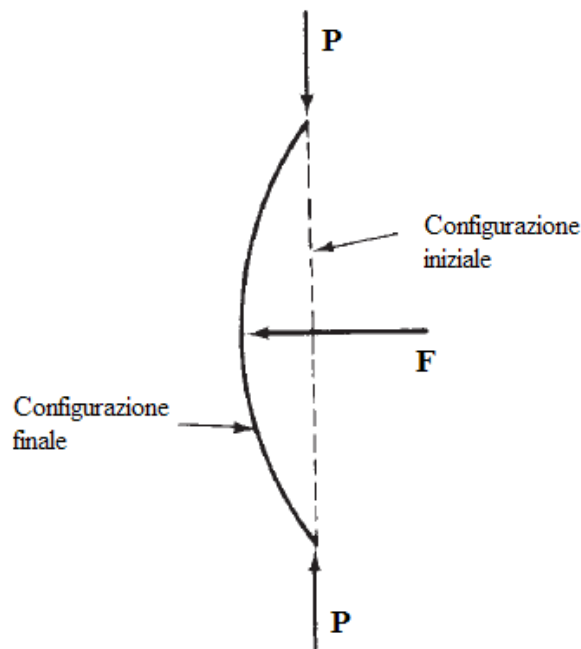


Fig. 5-1 Definizione del carico di buckling per un'asta [44].

Se l'asta è soggetta a un carico di compressione  $P$  che tende solo ad accorciare la struttura stessa non si presenta nessun problema, ma se si ha uno spostamento rispetto alla direzione rettilinea, in seguito alla forza laterale  $F$ , allora possono verificarsi due situazioni:

- Per valori di  $P$  inferiori al carico critico di buckling,  $P_{cr}$ , la rimozione della forza  $F$  si traduce in un ritorno alla configurazione iniziale indisturbata, indicando in questo modo uno stato di equilibrio.
- Raggiunto il carico critico lo spostamento laterale non sparisce e l'asta rimane in una qualunque configurazione deformata, purchè lo spostamento sia piccolo.

In questo modo il carico critico di buckling  $P_{cr}$  è associato con uno stato di equilibrio neutrale. Per  $P > P_{cr}$  lo spostamento laterale imposto aumenta e l'asta risulta instabile.

Il problema del buckling può essere affrontato anche considerando geometrie differenti da aste o cilindri, come ad esempio nel caso di piastre.

Una piastra sottile potrebbe curvarsi in diversi modi che dipendono dalle sue dimensioni, dai carichi e da come essa è vincolata [44]. Inoltre i carichi di buckling sono di solito molto inferiori a quelli che possono causare un *failure* del materiale di cui è costituita la piastra stessa.

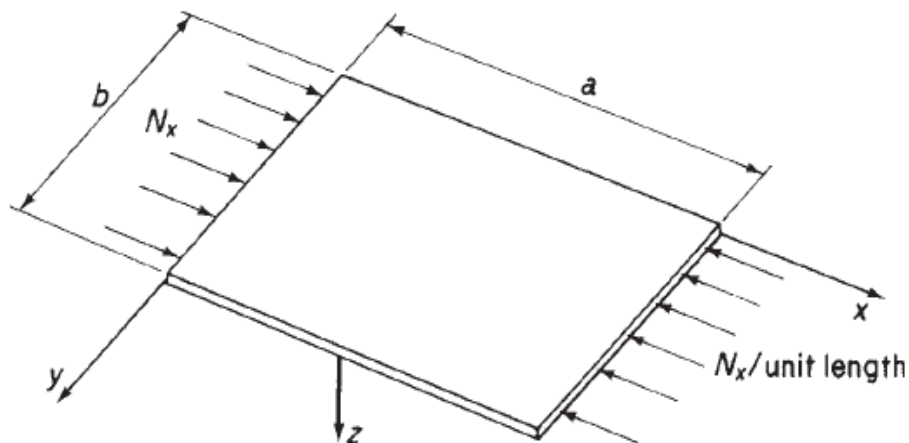


Fig. 5-2 Buckling di una piastra piana; il valore del carico critico è legato alle dimensioni, al tipo di carico assegnato e ai vincoli della piastra stessa [44].

## 5.2. Il buckling di piastre piane ortotrope

Il buckling di piastre omogenee isotrope è un campo di studio piuttosto vasto e una soluzione teorica del problema iniziò verso nella seconda metà del XIX secolo. Da allora numerose pubblicazioni si sono susseguite e tra le più complete si possono citare quelle di Timoshenko e Gere [45] e di Volmir [46-47].

Una delle ragioni del gran numero di articoli che si possono trovare è dovuta alla grande varietà di geometrie, condizioni di carico e vincoli che possono essere considerate per la piastra stessa.

Con il sempre più diffuso utilizzo dei materiali compositi, soprattutto nel campo aeronautico e spaziale, si è però dovuto affrontare il problema con delle equazioni diverse rispetto al caso delle piastre isotrope e, in questo modo, prevedere con maggior precisione possibile il comportamento nel caso di carico di buckling anche per questa nuova classe di materiali.

Come si è più volte ricordato nella presente tesi, i materiali compositi laminati sono costituiti da un determinato numero di *plies*, ognuno dei quali è costituito da fibre immerse in una matrice (nel caso dei modelli analizzati si è utilizzata una matrice di tipo epossidico).

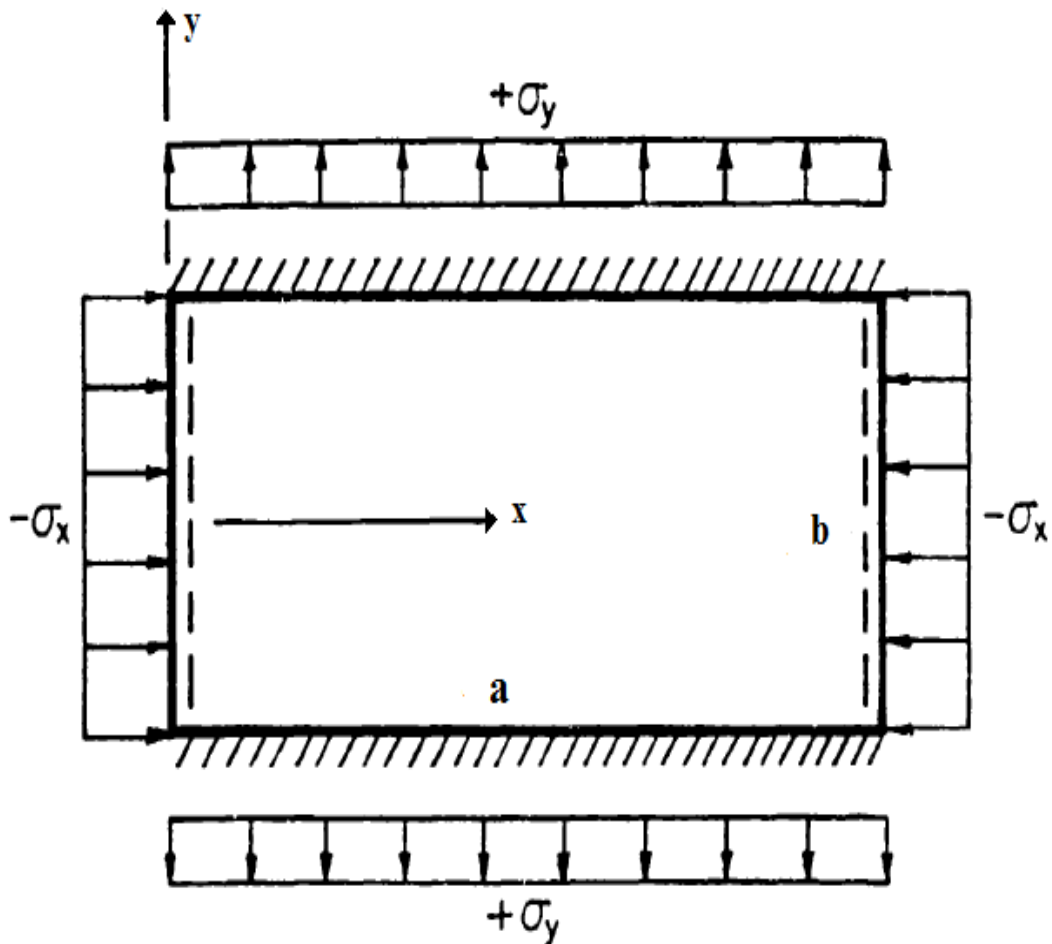
Si è inoltre visto come mediante una opportuna orientazione delle lamine si è in grado di ottenere un comportamento auxetico in direzione dello spessore, con i relativi vantaggi che ne conseguono soprattutto riguardanti la maggior resistenza agli impatti e all'indentazione.

Ogni *ply* può comunque essere considerato come un materiale omogeneo ortotropo che ha un determinato valore del modulo di Young  $E$ , considerevolmente più grande nella direzione longitudinale rispetto alle due direzioni trasversali.

La procedura standard per la determinazione dei valori teorici per i carichi di buckling, anche nel caso dei laminati, è quindi quella di risolvere un problema matematico agli autovalori, governato da delle equazioni differenziali e da delle condizioni al contorno.

In molti casi inoltre si impiegano delle procedure approssimate utilizzando, ad esempio, le serie di Galerkin, metodi agli elementi finiti o alle differenze finite.

In seguito al fatto che il problema del buckling dipende dal carico e dalle condizioni al contorno, si consideri la piastra di figura 5-3, dove due lati opposti (quelli di lunghezza  $b$ ) sono appoggiati, mentre gli altri due (quelli di lunghezza  $a$ ) sono incastrati. I carichi risultano essere costanti e pari a  $-\sigma_x$  (il segno meno è dovuto al fatto che si tratta di un carico di compressione) e  $\sigma_y$ .



**Fig. 5-3 Piastra con i lati lunghi  $a$  e  $b$  rispettivamente incastrati e appoggiati, soggetta a stato tensionale uniforme biassiale [50].**

Brunelle e Oyibo [48-49] hanno risolto questo problema nel caso di carico uniassiale, e quindi  $\sigma_x = \text{costante}$ ,  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ , esprimendo un parametro di buckling  $k_0$  dato da:

$$k_0 = - \frac{\sigma_x h b^2}{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}} \quad (5.1)$$

Dove  $h$  è lo spessore della piastra,  $b$  la larghezza, mentre il significato dei termini  $D_{11}$ ,  $D_{22}$  e in generale dei termini  $D_{iy}$  sarà chiarito nel paragrafo 5.2.1.

Il parametro critico di buckling può essere graficato in funzione del rapporto tra i lati della piastra e dei termini  $D_{iy}$  [50]:

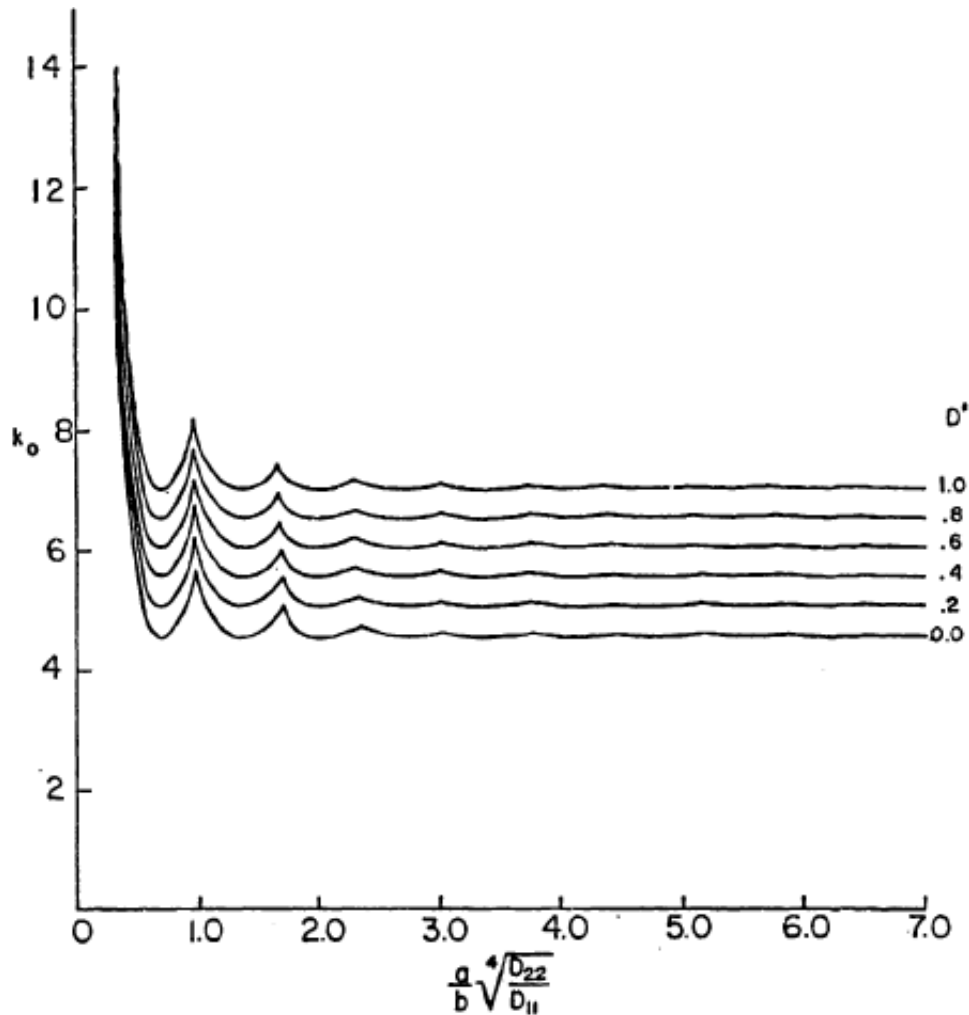


Fig. 5-4. Parametri per il buckling uniassiale di piastre ortotrope [50].

La procedura per il calcolo della tensione critica di buckling,  $\sigma_{x,cr}$ , e quindi del carico critico,  $P_{cr}$ , prevede di entrare in figura 5-4, una volta noti i valori di  $a$ ,  $b$ ,  $D_{11}$ ,  $D_{22}$  e  $D^*$ . Quest'ultimo termine è dato da:

$$D^* = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} \quad (5.2)$$

Si è quindi in grado di determinare per via grafica il valore del parametro di buckling  $k_0$ . Conoscendo questo parametro si è in grado di determinare il valore della tensione critica direttamente invertendo la relazione (5.1):

$$\sigma_{x,cr} = - \frac{k_0 \pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}{h b^2} \quad (5.3)$$

Moltiplicando successivamente il valore di  $\sigma_{x,cr}$  per l'area della sezione dove è applicato il carico di buckling, si può determinare il carico critico  $P_{cr}$ .

### 5.2.1. Equazioni di rigidità

La teoria che sta alla base del problema del buckling dei laminati compositi è considerevolmente più complicata rispetto alla teoria classica per le piastre omogenee isotrope; questo lo si potrebbe vedere più chiaramente considerando dei laminati non simmetrici, dove risulta evidente anche un accoppiamento tra la deformazione flessionale e il carico di trazione.

L'ipotesi alla base della teoria delle piastre, che vale anche nel caso di quelle laminate, è quella di Kirchhoff secondo la quale le normali al piano medio rimangono dritte e perpendicolari anche al termine della deformazione. Si considerino inoltre gli assi  $x$  e  $y$  di un sistema di riferimento rettangolare che giacciono nel piano medio, mentre l'asse  $z$  in direzione dello spessore della piastra.

Il comportamento cinematico della piastra, descritto dalle ipotesi di Kirchhoff, può essere espresso mediante le seguenti relazioni:

$$u = u_0 - z \frac{\delta w}{\delta x} \quad (5.4)$$

$$v = v_0 - z \frac{\delta w}{\delta y} \quad (5.5)$$

dove  $u$ ,  $v$  e  $w$  sono le componenti dello spostamento di un punto della piastra, mentre  $u_0$  e  $v_0$  sono gli spostamenti di un punto nel piano medio. Inoltre  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w$  sono funzioni solo di  $x$  e  $y$ .

Usando le relazioni tra le deformazioni e lo spostamento della teoria dell'elasticità classica,

$$\varepsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x} \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y} \quad (5.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \quad (5.8)$$

dove  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  sono le deformazioni normali nel piano e  $\gamma_{xy}$  è la deformazione di taglio nel piano, le equazioni (5.4) e (5.5) possono essere riscritte come:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z k_x \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - z k_y \quad (5.10)$$

Inoltre

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 - z k_{xy} \quad (5.11)$$

Nelle espressioni  $\varepsilon_x^0$ ,  $\varepsilon_y^0$  e  $\gamma_{xy}^0$  sono le deformazioni del piano medio, mentre  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_{xy}$  sono le variazioni della curvatura nel piano medio durante la deformazione. Queste quantità sono anch'esse funzione di  $x$  e  $y$  solamente e sono date da:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\delta u_0}{\delta x} \quad (5.12)$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\delta v_0}{\delta y} \quad (5.13)$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\delta v_0}{\delta x} + \frac{\delta u_0}{\delta y} \quad (5.14)$$

$$k_x = \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \quad (5.15)$$

$$k_y = \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \quad (5.16)$$

$$k_{xy} = 2 \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \quad (5.17)$$

Le tensioni risultanti nel piano  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_{xy}$  (forze per unità di lunghezza) e i momenti risultanti  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  (momenti per unità di lunghezza), sono calcolati per mezzo dei seguenti integrali nello spessore:

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz \quad (5.18)$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dz \quad (5.19)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dz \quad (5.20)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz \quad (5.21)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz \quad (5.22)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz \quad (5.23)$$

Nelle espressioni  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  sono le tensioni normali nel piano, mentre  $\tau_{xy}$  è lo stress di taglio, sempre nel piano. Il verso positivo delle tensioni e dei momenti e delle tensioni trasversali di taglio risultanti  $Q_x$  e  $Q_y$ , è visualizzato in Fig. 5-5 e in Fig. 5-6.

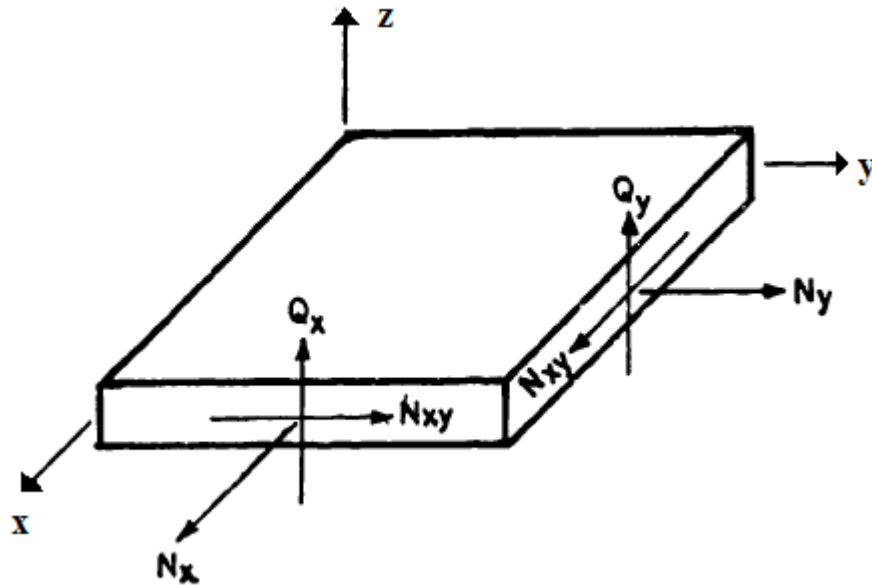


Fig. 5-5 Convenzione dei versi positivi delle tensioni risultanti su una piastra [50].

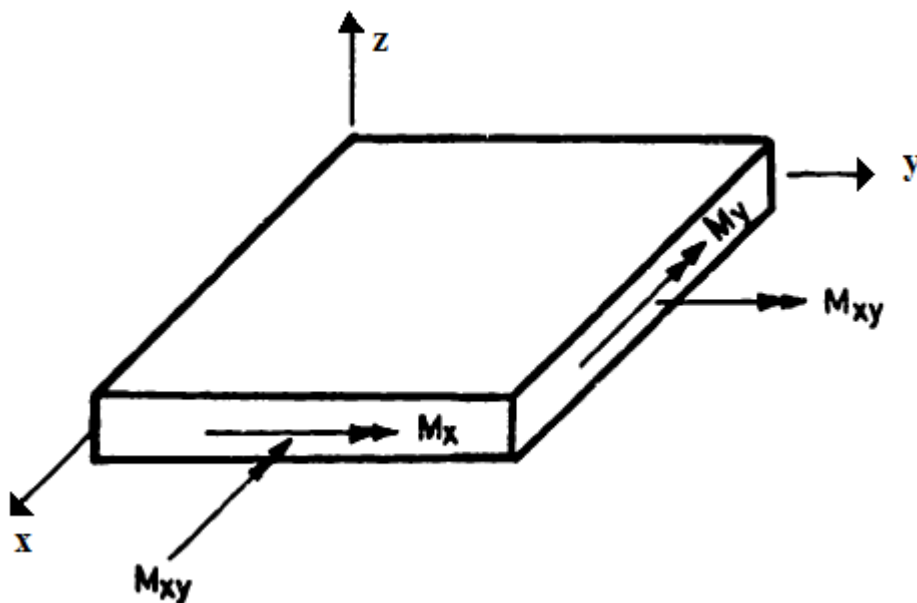


Fig. 5-6 Convenzione dei versi positivi dei momenti risultanti su una piastra [50].

Per le piastre laminate il calcolo degli integrali dal (5.18) al (5.23) deve essere effettuato considerando tutti gli strati.

Inoltre, per una tipica lamina costituita da fibre parallele immerse in una matrice, con le fibre che giacciono con un angolo  $\theta$  rispetto alla direzione dell'asse  $x$  della piastra, le relazioni ortotrope tra tensioni e deformazioni devono essere trasformate mediante dei tensori, in modo tale da essere coerenti con gli assi  $x$  e  $y$  della piastra stessa.

Eseguendo ciò si è in grado di relazionare le tensioni e i momenti risultanti, alle deformazioni e alle curvature del piano medio:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ -k_x \\ -k_y \\ -k_{xy} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

dove  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  e  $D_{ij}$  sono dei coefficienti di rigidezza che derivano dal calcolo dei seguenti integrali:

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{+h/2} c_{ij} dz \quad (5.25)$$

$$B_{ij} = \int_{-h/2}^{+h/2} c_{ij} z dz \quad (5.26)$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{+h/2} c_{ij} z^2 dz \quad (5.27)$$

I termini  $c_{ij}$  sono delle costanti che variano da un *ply* all'altro durante l'integrazione.

Si può osservare come non è solo la matrice 6x6 della formula (5.24) ad essere simmetrica, ma lo sono anche le 3x3 sottomatrici  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  e  $D_{ij}$ .

Risulta essere inoltre importante capire le implicazioni che determinano i coefficienti di rigidezza dell'equazione (5.26). In modo particolare i coefficienti  $B_{ij}$  sono responsabili dell'accoppiamento tra la flessione e la trazione nella piastra se soggetta a spostamenti trasversali.

Un altro tipo di accoppiamento può essere visto dalla presenza dei termini  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $B_{16}$ ,  $B_{26}$ ,  $D_{16}$  e  $D_{26}$ : questi coefficienti indicano accoppiamenti tra la trazione e il taglio e/o tra la flessione e la torsione durante la deformazione della piastra.

### 5.3. Simulazioni numeriche

Con l'obiettivo di verificare i risultati previsti dalla teoria del buckling di piastre piane ortotrope, si sono condotte delle simulazioni FEM mediante l'utilizzo dei software MSC Patran, MSC Nastran e MSC Marc Mentat.

Le analisi hanno preso in esame una piastra composita laminata con una disposizione degli strati tale da far sì che si manifesti un comportamento auxetico lungo lo spessore, e in modo particolare che  $\nu_{13}$  sia negativo. Questo lavoro è stato effettuato confrontando dei modelli costituiti da elementi *2D Solid* con dei modelli in cui invece si sono utilizzati elementi *3D Solid*. Per ognuno dei modelli creati si è andati a verificare il valore del carico critico di buckling e lo si è confrontato con quello previsto dalla teoria (paragrafo 5.2).

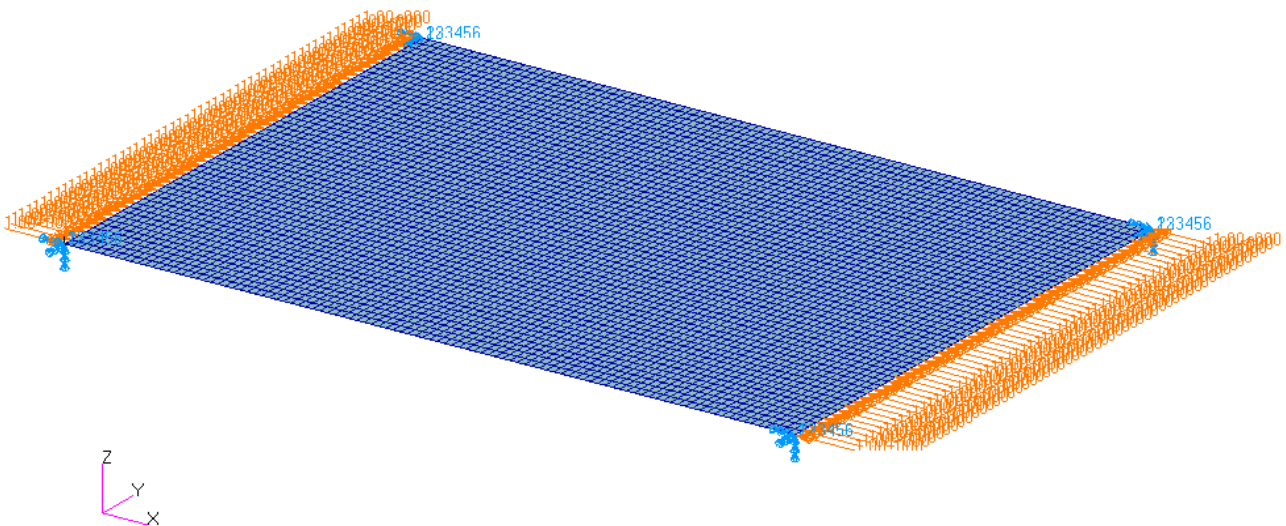


### 5.3.1. Modellazione 2D piastra auxetica

La seguente modellazione è stata effettuata utilizzando il software MSC Patran come pre/post processore, MSC Nastran come processore e ha previsto la creazione di due modelli differenti per il numero di elementi:

1. Piastra rettangolare di dimensioni 0.11x0.08m, 440 elementi sul lato lungo e 320 su quello corto.
2. Piastra rettangolare con le stesse dimensioni della precedente, ma con 50 elementi sul lato corto e 100 su quello lungo.

Modellata la geometria piana e la mesh, costituita da elementi quadrangolari a quattro nodi Quad4, si è riprodotto il caso di figura 5.3, in cui ai lati lunghi sono state impediti sia le traslazioni che le rotazioni, mentre a quelli corti si è lasciata libera la traslazione in direzione della forza e le rotazioni. La forza è stata creata di tipo nodale dal valore di 1N e applicata ai lati corti, mentre quelli più lunghi non sono stati caricati riproducendo così il caso di  $\sigma_x =$  costante e  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ .



**Fig. 5-7. Piastra con 100x50 elementi con i bordi lunghi incastrati, quelli corti appoggiati e in cui si nota la forza nodale di 1N.**

Utilizzando le seguenti condizioni al contorno si è potuto utilizzare la formula di Brunelle e Oyibo (5.1), e il relativo grafico (Fig. 5-4), per il calcolo teorico del carico critico di buckling e confrontarlo così con quello ottenuto dalle simulazioni.

Il materiale è stato creato per mezzo dell'opzione *2d Orthotropic* inserendo le caratteristiche del singolo *ply* in fibra di carbonio e poi creando il materiale composito laminato, scelto in maniera tale che ci sia un comportamento auxetico lungo lo spessore.

Si sono quindi inserite per il singolo *ply* le seguenti caratteristiche:

	<b>UM- graphite/epoxy</b>
<b><math>E_1</math> [Pa]</b>	2.897e+11
<b><math>E_2</math> [Pa]</b>	6.207e+9
<b><math>\nu_{12}</math></b>	0.25
<b><math>G_{12}</math> [Pa]</b>	4.828e+9
<b><math>G_{23}</math> [Pa]</b>	2.657e+9
<b><math>G_{23}</math> [Pa]</b>	4.828e+9

Tab. 5-1 Caratteristiche del singolo *ply* utilizzate nella modellazione 2D.

La disposizione degli strati scelta per il materiale composito è  $[\pm 10/\pm 20]_s$ .

Si hanno quindi otto lamine dallo spessore di 0.25mm ciascuna, per uno spessore totale del laminato di 2mm.

Il valore dei coefficienti di Poisson lungo lo spessore del laminato, per questo tipo di configurazione sono pari a  $\nu_{13}=-0.557$  e  $\nu_{23}=0.389$  e si tratta degli stessi valori calcolati nel modello 3 del paragrafo 4.3.

Se si sceglie però di visualizzare direttamente con MSC Patran le suddette proprietà ci si accorge di come esse siano in realtà poste a zero:

E11,22,33	NU12,23,13
2.08E+011	2.20E+000
7.40E+009	0.00E+000
0.00E+000	0.00E+000

Fig. 5-8 Visualizzazione tramite MSC Patran dei valori delle proprietà del laminato. I moduli elastici sono espressi in Pascal; in rosso è evidenziato il fatto che i coefficienti di Poisson lungo lo spessore non vengono considerati e quindi eventuali auxeticità non sono contemplate in questo tipo di modellazione.

La proprietà è stata assegnata a tutti gli elementi mediante l'opzione *Laminate* e si è fatto in modo che l'orientazione di ogni singolo *ply* fosse data rispetto alla direzione della forza di buckling.

Per l'analisi si è scelta la *Solution Type BUCKLING (Sol 105)* e per i risultati dei due modelli e i relativi commenti si fa riferimento al paragrafo 5.4.

### 5.3.2. Modellazione 3D piastra auxetica

La seguente modellazione è stata effettuata utilizzando il software MSC Patran come pre/post processore, MSC Marc Mentat come processore e si sono analizzati complessivamente tre modelli:

1. Piastra rettangolare di dimensioni 0.11x0.08x0.002 m, 120 elementi sul lato lungo, 100 su quello corto e 8 lungo lo spessore.
2. Piastra della stessa geometria con 110 elementi sul lato lungo, 90 su quello corto e 8 lungo lo spessore.
3. Piastra con geometria analoga alle due precedenti con 100 elementi sul lato lungo, 80 su quello corto e 8 lungo lo spessore.

Per ottenere un modello tridimensionale si è adottato il metodo dell'estrusione e in questo modo si sono convertiti gli elementi da Quad4 a elementi tridimensionali del tipo Hex8.

Come per il modello 2D si sono assegnati i vincoli di incastro lungo i lati più lunghi mentre a quelli corti si è lasciata libera la traslazione in direzione della forza e le rotazioni. La forza, sempre dal valore di 1N, è stata assegnata a tutti i nodi della sezione costituita dai lati più corti e in questo modo si è potuto ancora utilizzare la formula di Brunelle e Oyibo (5.1) e il relativo grafico (5-4), per il calcolo teorico del valore del carico critico di buckling, che ovviamente risulta essere uguale a quello della modellazione 2D precedente.

Il materiale questa volta è stato creato mediante l'opzione *3D Orthotropic* dove le caratteristiche del singolo *ply* inserite, sono di seguito riassunte:

	<i>UM-graphite/epoxy</i>
$E_1$ [Pa]	2.897e+11
$E_2$ [Pa]	6.207e+9
$E_3$ [Pa]	6.207e+9
$\nu_{12}$	0.25
$\nu_{23}$	0.42
$\nu_{31}$	0.005356
$G_{12}$ [Pa]	4.828e+9
$G_{23}$ [Pa]	2.657e+9
$G_{31}$ [Pa]	4.828e+9

Tab. 5-2 Caratteristiche del singolo *ply* utilizzate nella modellazione 3D.

Importante da sottolineare è come non sia richiesto il valore di  $\nu_{13}$  del singolo *ply* ma di  $\nu_{31}$  che deve essere quindi determinato:

$$\nu_{31} = \nu_{31} \frac{E_3}{E_1} \quad (5.28)$$

La disposizione degli strati scelta per il materiale composito è analoga al caso 2D ossia  $[\pm 10/\pm 20]_s$ .

Si hanno quindi otto lamine dallo spessore di 0.25mm ciascuna per uno spessore totale del laminato di 2mm.

Questa volta, a differenza della modellazione 2D il software riesce a calcolare il valore dei coefficienti di Poisson lungo lo spessore in maniera corretta, come previsto dal modello 3 del paragrafo 4.3.

E11,22,33	NU12,23,13
2.08E+011	2.20E+000
7.40E+009	3.89E-001
6.53E+009	-5.5E-001

**Fig.5-9 Visualizzazione tramite MSC Patran dei valori delle proprietà del laminato. I moduli elastici sono espressi in Pascal; si nota come siano calcolati anche i valori dei coefficienti di Poisson lungo lo spessore.**

La proprietà è stata creata di tipo *3D Solid* mediante l'opzione *Laminated Composite*, dove si è anche stabilita che la direzione dello spessore fosse lungo la direzione dell'asse z di ogni elemento.

Nella finestra di analisi *Load Step Parameters* si è scelto una *Solution Type* di *Buckling* e il file *.dat* che ne risultava è stato processato mediante MSC Marc Mentat, andando a controllare che tutti i parametri nel passaggio tra i due software fossero correttamente importati.

A tale proposito è importante ricordare che, avendo scelto come processore MSC Marc Mentat, la definizione del sistema di coordinate dell'elemento è diversa tra MSC Marc e MSC Patran.

Al fine di evitare errori nel posizionamento dei diversi strati risulta molto importante per i diversi modelli creati, far riferimento al corrispondente sistema di coordinate.

Per i risultati dei tre modelli e i relativi commenti si fa riferimento al paragrafo 5.4.

### 5.3.3 Risultati ottenuti

Per il calcolo del valore teorico del carico critico di buckling è stata utilizzata la procedura descritta nel paragrafo 5.2.

I coefficienti di rigidezza  $D_{ij}$  sono stati presi, nel momento della creazione del materiale, direttamente dal software MSC Patran, il quale li calcola in automatico e ne consente la visualizzazione:

		Membrane			Bending	
	5.02E+008	3.94E+007	0.00E+000	1.17E-002	2.20E-003	9.77E-004
Membrane	3.94E+007	1.79E+007	0.00E+000	2.20E-003	8.54E-004	0.00E+000
	0.00E+000	0.00E+000	4.60E+007	9.77E-004	0.00E+000	2.93E-003
	1.17E-002	2.20E-003	9.77E-004	1.79E+002	8.07E+000	1.36E+001
Bending	2.20E-003	8.54E-004	0.00E+000	8.07E+000	4.87E+000	1.17E+000
	9.77E-004	0.00E+000	2.93E-003	1.36E+001	1.17E+000	1.02E+001

High Precision Value

Composite Property Display Options

A, B, and D Matrices       3D Flexibility Matrix       Thermal: Kij, Ni, and Mi

3D Elasticity Matrix       E's, NU's, G's, and Qij's       CTE's, CME's and Others

**Fig. 5-10** Visualizzazione tramite il software MSC Patran dei coefficienti di rigidità. Si evidenziano i termini  $D_{ij}$  utilizzati nel calcolo teorico del carico critico di buckling.

Sono quindi stati utilizzati i seguenti coefficienti:

	Valore
$D_{11}$	1.79e+2
$D_{22}$	4.87e+0
$D_{12}$	8.07e+0
$D_{66}$	1.02e+1

**Tab. 5-3** Coefficienti  $D_{ij}$  impiegati nel calcolo teorico.

I parametri geometrici impiegati invece sono quelli con cui si modella la piastra e in particolare  $a$ ,  $b$  e  $h$  ossia la lunghezza, la larghezza e lo spessore della piastra sono:

	Valore [m]
$a$	0.11
$b$	0.08
$h$	0.002

**Tab. 5-4** Geometria delle piastre modellate.

In questo modo utilizzando la formula (5.2) si è ottenuto un valore di  $D^*=0.96$ . Entrando quindi nel grafico di figura (5-4) si è assunto un valore del parametro critico di buckling  $k_0=7$ .

Mediante l'equazione (5.3) si è quindi ottenuto un valore della tensione critica di buckling pari a  $1.59e+8\text{Pa}$  (il segno meno è stato trascurato in quanto risulta evidente, da quanto spiegato, che il carico è stato applicato in compressione).

Moltiplicando il seguente valore per l'area totale della sezione, dove sono applicate le forze unitarie, si è determinato il valore teorico del carico critico di buckling,  $P_{cr}=50880\text{N}$ .

Questo risultato è stato confrontato con il *Factor*, ottenuto dell'analisi di buckling, moltiplicato per il numero di nodi sui quali è applicata la forza unitaria.

I risultati delle diverse simulazioni, sia quelle con una modellazione bidimensionale che quelle con una modellazione tridimensionale sono indicati nelle seguenti tabelle:

<b><u>Modellazione 2D</u></b>			
<b>Modello [n° elementi]</b>	<b><i>Factor</i> x n° nodi = <math>P_{cr}</math> [N]</b>	<b><math>P_{cr}</math> teorico [N]</b>	<b>Variazione [%]</b>
440x320	$70.26 \times 642 = 45106.92$	50880	11.3
100x50	$449.18 \times 102 = 45816.36$	50880	9.9

<b><u>Modellazione 3D</u></b>			
<b>Modello [n° elementi]</b>	<b><i>Factor</i> x n° nodi = <math>P_{cr}</math> [N]</b>	<b><math>P_{cr}</math> teorico [N]</b>	<b>Variazione [%]</b>
120x100x8	$7.48 \times 1818 = 13598.64$	50880	73.2
110x90x8	$8.59 \times 1638 = 14070.42$	50880	72.3
100x80x8	$10.07 \times 1458 = 14682.06$	50880	71.1

**Tab. 5-5** Tabelle in cui sono riportati i valori del carico critico di buckling, ottenuto dalla simulazione e teorico, per ogni modello analizzato.

Nella modellazione con elementi tridimensionali, avendo impiegato come processore MSC Marc Mentat, si è verificato che tutti i dati fossero correttamente importati da MSC Patran, usato nella modellazione, e che al termine di ogni analisi fosse raggiunta la convergenza, rappresentata da un *EXIT NUMBER 3004*.

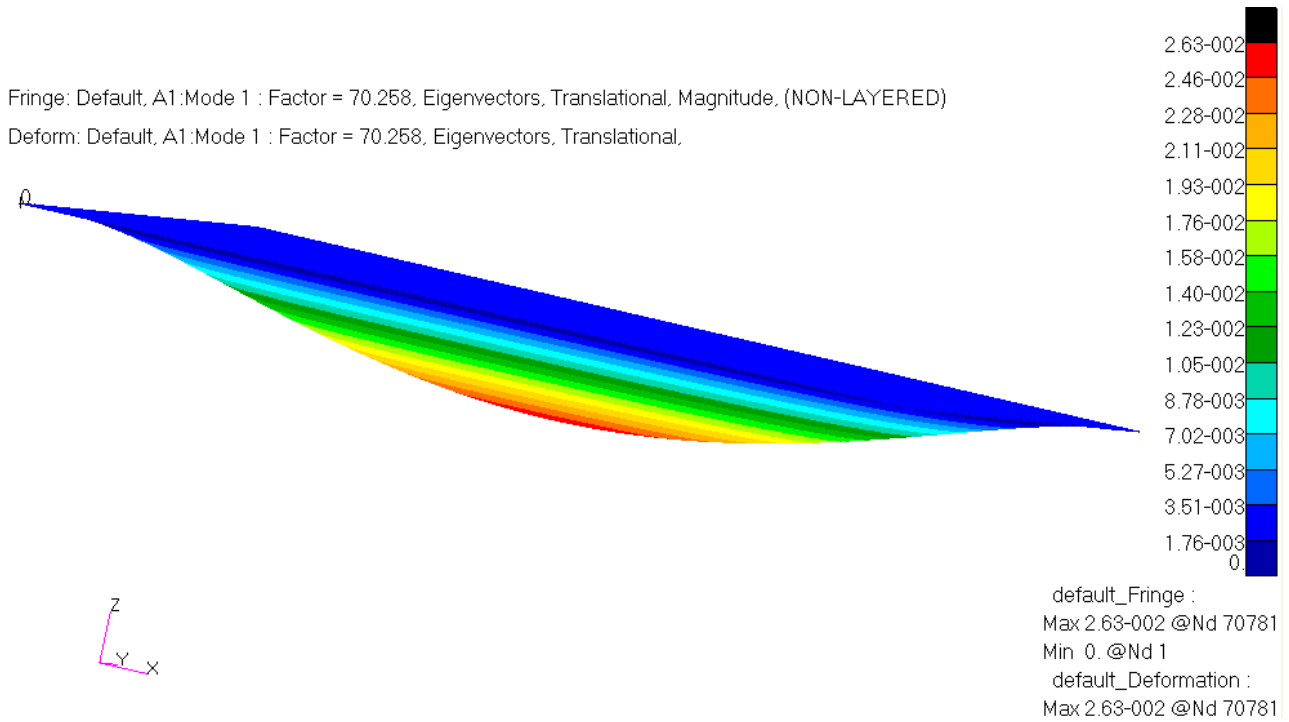


**Fig. 5-11** Rappresentazione, con evidenziato l'*EXIT NUMBER*, di avvenuta convergenza per il modello tridimensionale con 110x90x8 elementi.

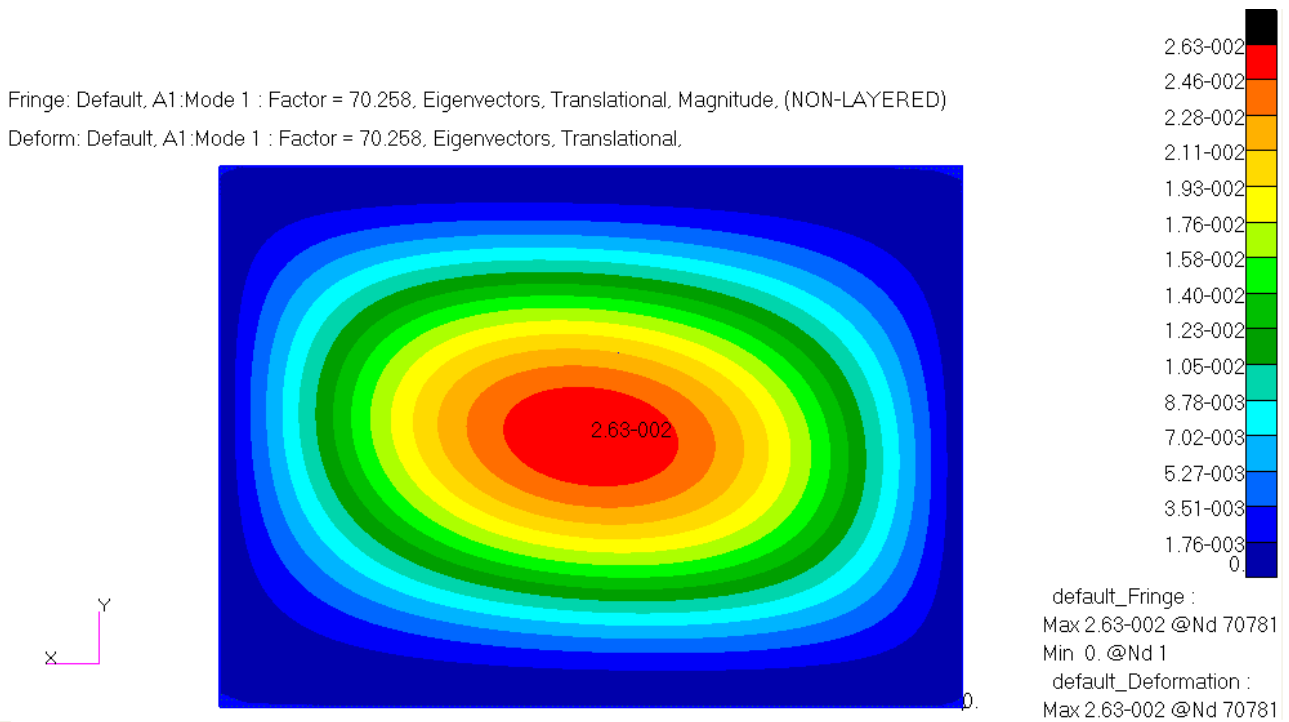
Si riportano ora i risultati ottenuti nelle simulazioni con i modelli 2D e 3D, presentati sopra, con diverso numero di elementi.

Sarà visualizzato il valore del *Factor* ottenuto e la deformata traslazionale. Per ragioni di visualizzazione, dato il numero particolarmente elevato di elementi, non sono rappresentate inoltre le forze unitarie e i vincoli, ma si fa comunque riferimento a quanto scritto nei paragrafi 5.3.1., 5.3.2. e alla figura 5-7.

È opportuno ricordare che, nei modelli con più elementi, le simulazioni hanno impiegato un tempo piuttosto lungo convergere, sottolineando il fatto che per effettuare un'analisi il più possibile accurata sono comunque richiesti processori particolarmente potenti.



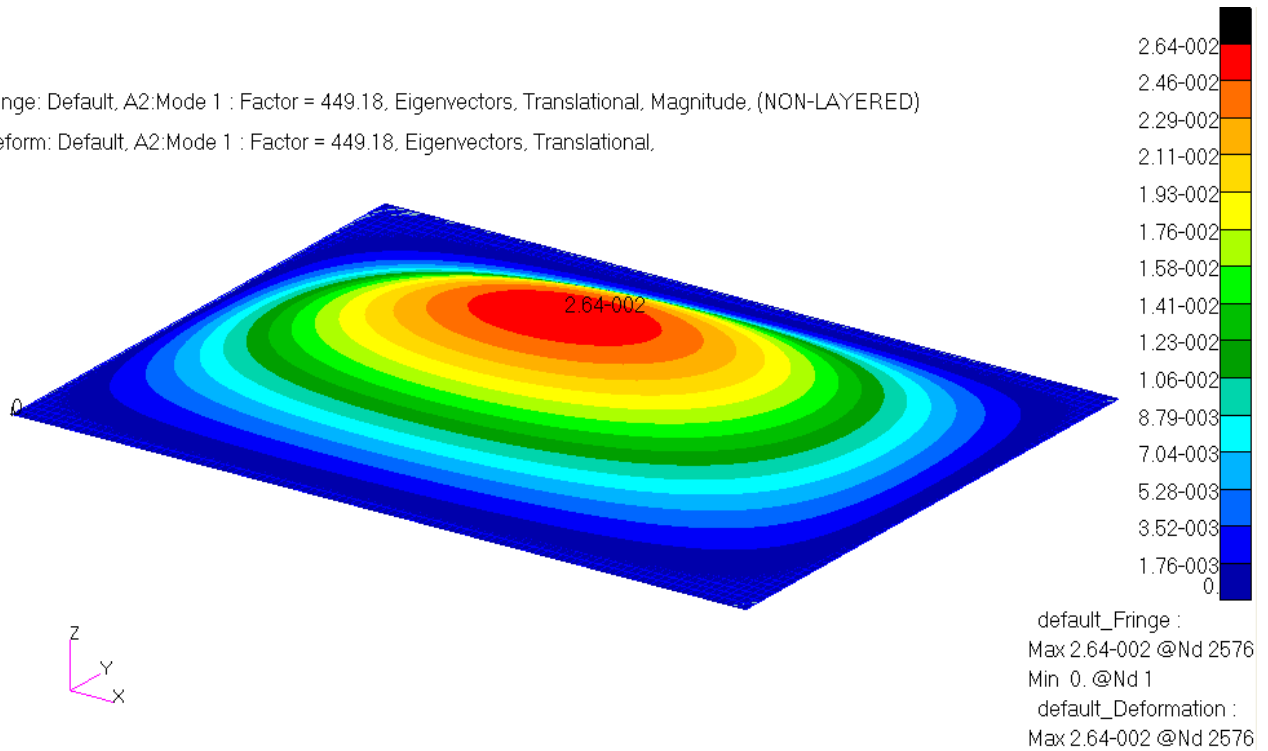
**Fig. 5-12 Rappresentazione della deformata della piastra nel modello 2D, 440x320 elementi.**



**Fig. 5-13 Vista in pianta della parete inferiore della piastra nel modello 2D, 440x320 elementi.**



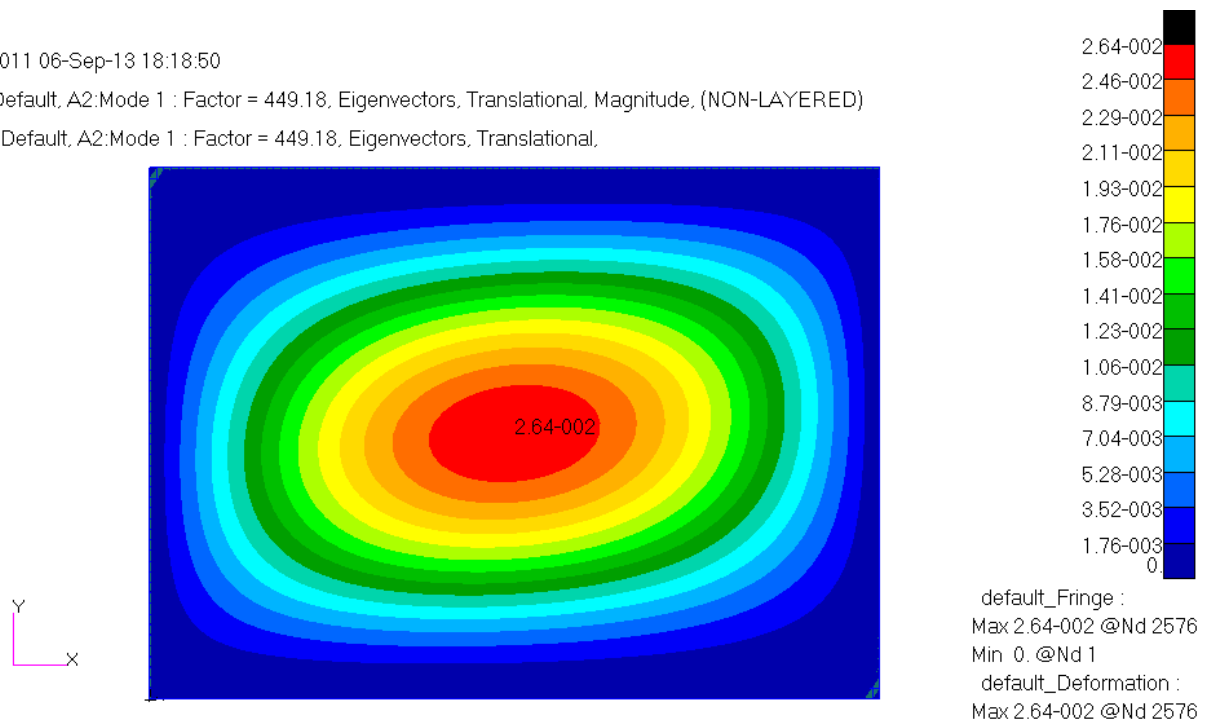
Fringe: Default, A2:Mode 1 : Factor = 449.18, Eigenvectors, Translational, Magnitude, (NON-LAYERED)  
Deform: Default, A2:Mode 1 : Factor = 449.18, Eigenvectors, Translational,



**Fig. 5-14 Rappresentazione della deformata della piastra nel modello 2D, 100x50 elementi.**

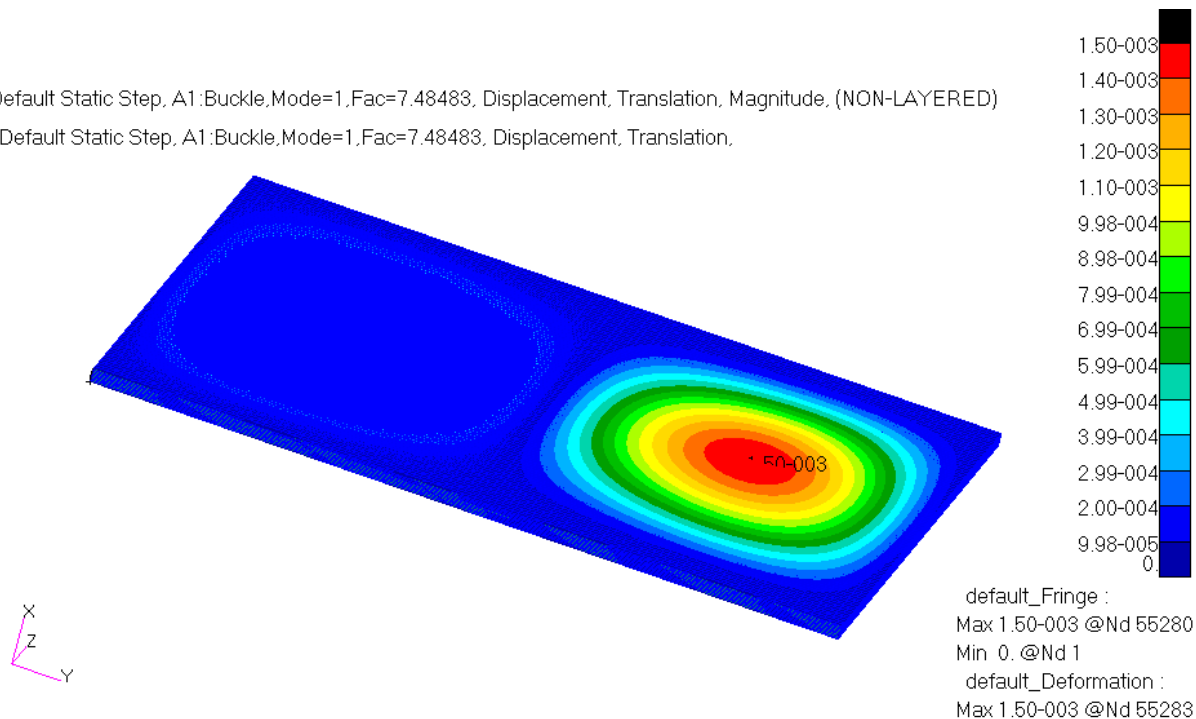
Patran 2011 06-Sep-13 18:18:50

Fringe: Default, A2:Mode 1 : Factor = 449.18, Eigenvectors, Translational, Magnitude, (NON-LAYERED)  
Deform: Default, A2:Mode 1 : Factor = 449.18, Eigenvectors, Translational,



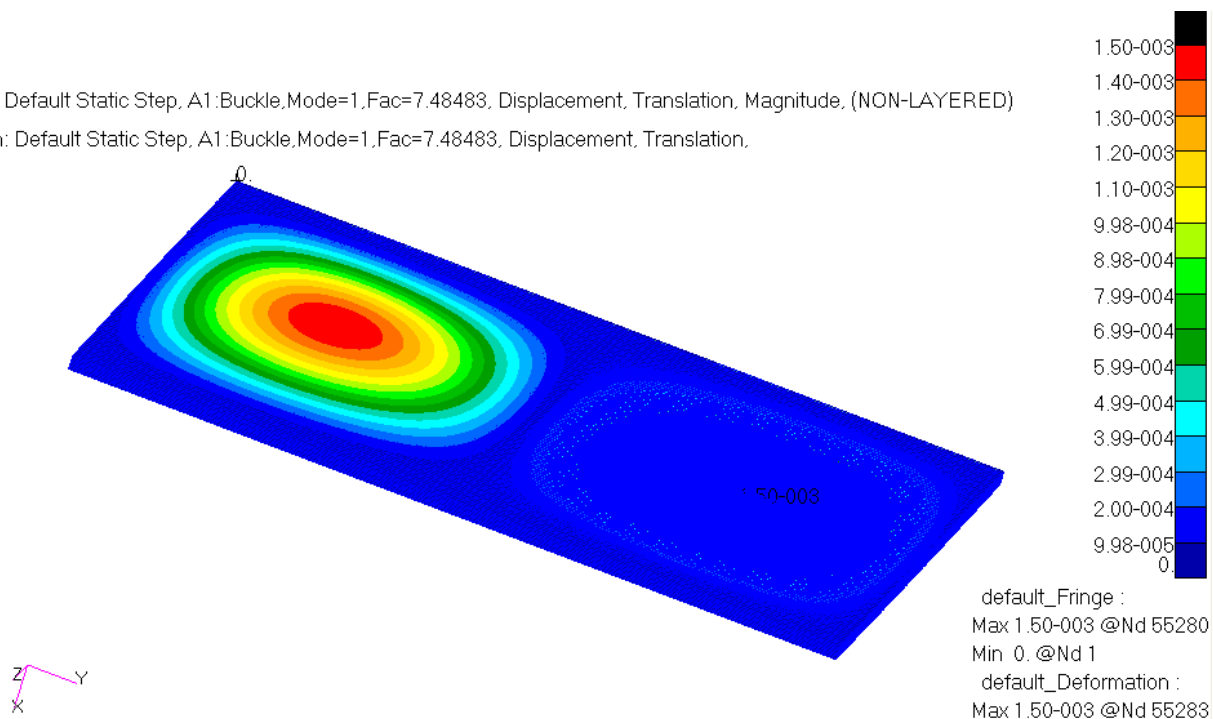
**Fig. 5-15 Vista in pianta della parte superiore della piastra nel modello 2D, 100x50 elementi.**

Fringe: Default Static Step, A1:Buckle,Mode=1,Fac=7.48483, Displacement, Translation, Magnitude, (NON-LAYERED)  
Deform: Default Static Step, A1:Buckle,Mode=1,Fac=7.48483, Displacement, Translation,

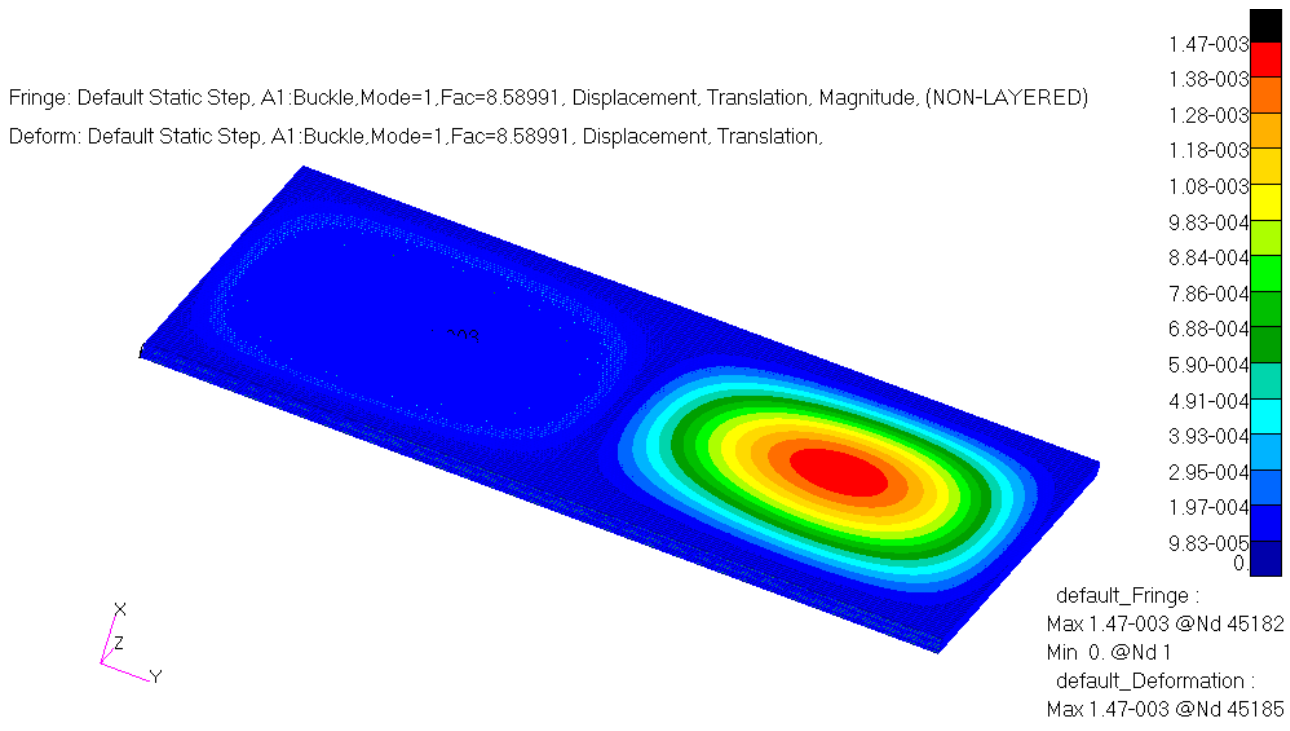


**Fig. 5-16 Rappresentazione della deformata nella parte superiore della piastra nel modello 3D, 120x100x8 elementi.**

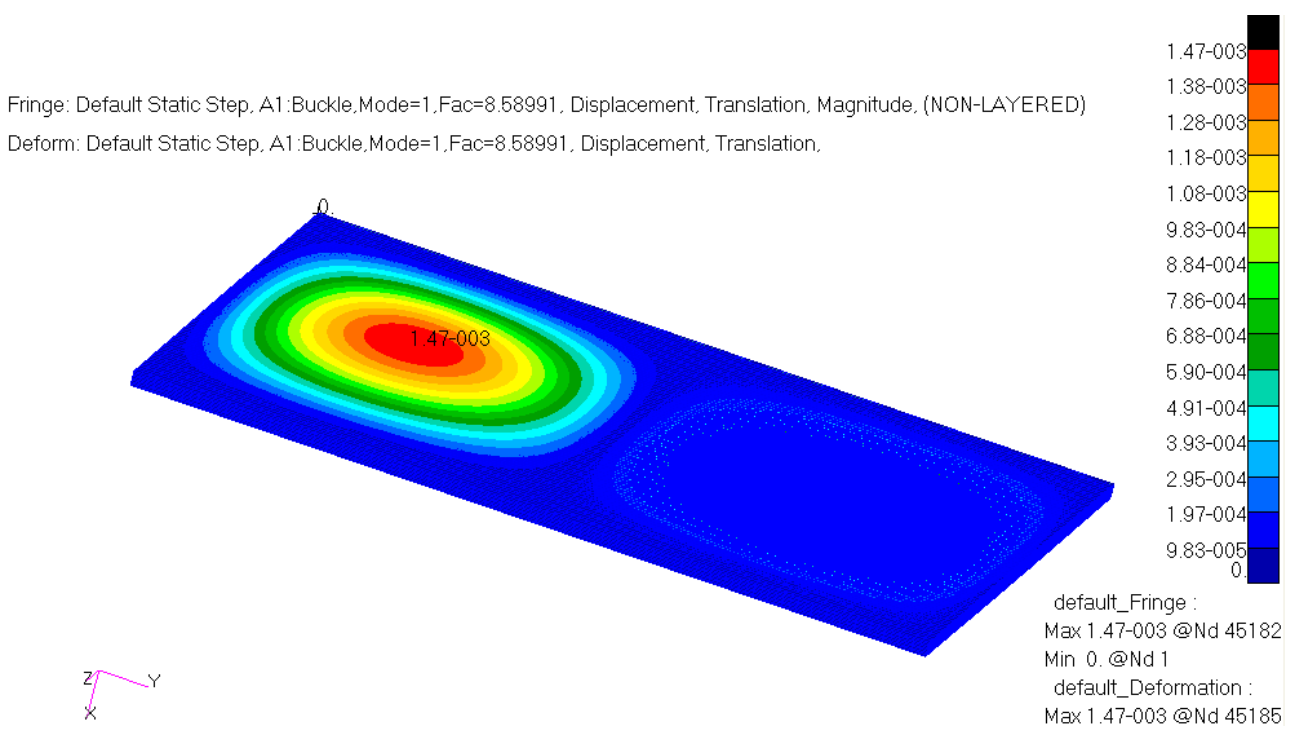
Fringe: Default Static Step, A1:Buckle,Mode=1,Fac=7.48483, Displacement, Translation, Magnitude, (NON-LAYERED)  
Deform: Default Static Step, A1:Buckle,Mode=1,Fac=7.48483, Displacement, Translation,



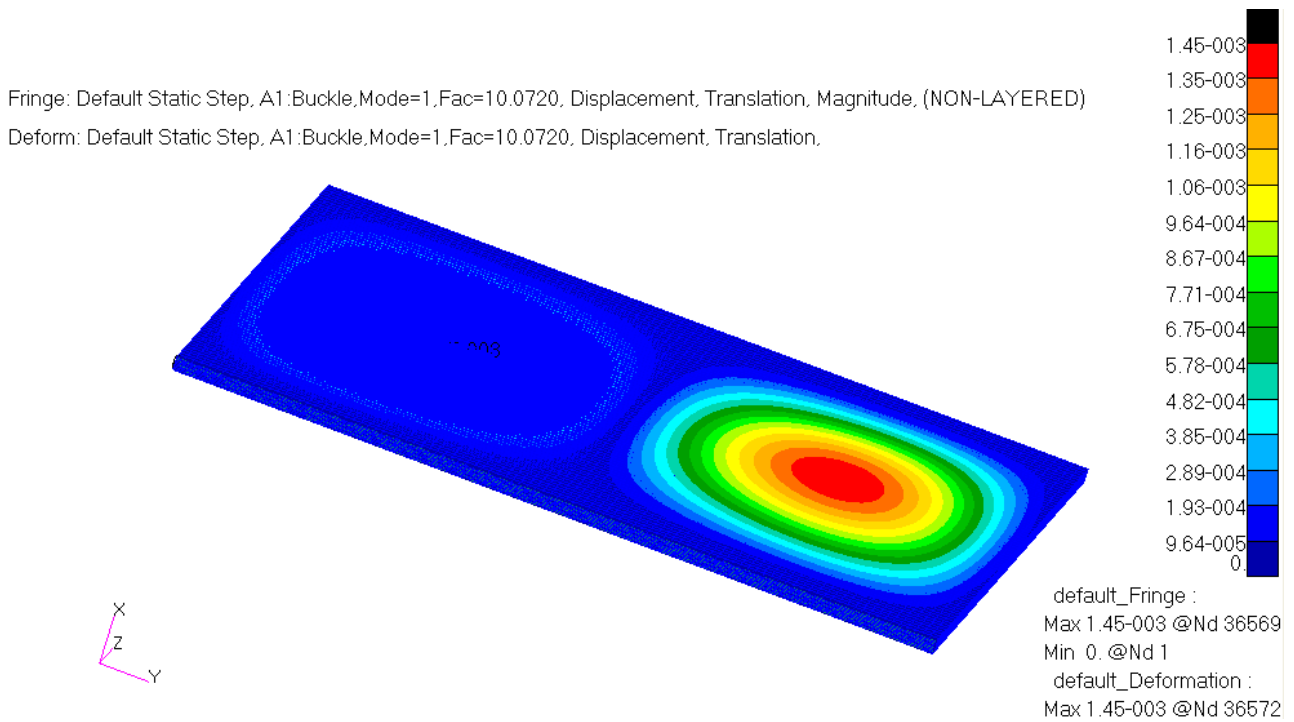
**Fig. 5-17 Rappresentazione della deformata nella parte inferiore della piastra nel modello 3D, 120x100x8 elementi.**



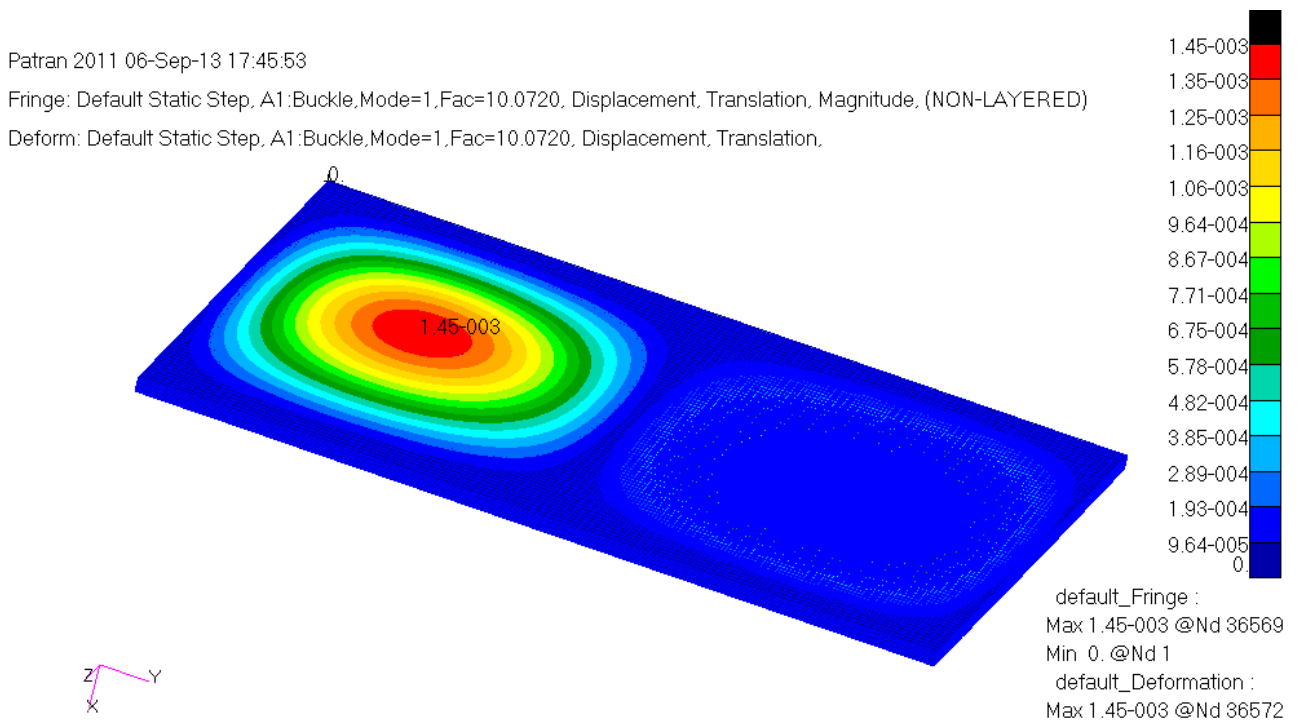
**Fig. 5-18** Rappresentazione della deformata nella parte superiore della piastra nel modello 3D, 110x90x8 elementi.



**Fig. 5-19** Rappresentazione della deformata nella parte inferiore della piastra nel modello 3D, 110x90x8 elementi.



**Fig. 5-20 Rappresentazione della deformata nella parte superiore della piastra nel modello 3D, 100x80x8 elementi.**



**Fig. 5-21 Rappresentazione della deformata della parte superiore della piastra nel modello 3D, 100x90x8 elementi.**

Dalle analisi svolte si nota come all'interno della stessa modellazione, 2D o 3D, seppur variando il numero di elementi, non si hanno grandi variazioni percentuali del valore del carico critico di buckling; infatti pur essendo il valore del *Factor* differente bisogna ricordare che varia anche il numero di nodi su cui è applicata la forza unitaria, e in questo modo si ottiene un valore finale che non differisce di molto.

Confrontando sempre la stessa modellazione si nota inoltre come la configurazione deformata attesa sia pressoché analoga e anche i valori degli spostamenti non evidenziano significative variazioni.

Una minima differenza si nota confrontando la figura 5-12 con la figura 5-14, dove la simulazione prevede deformate da parti opposte, quelle definite come parti superiori e inferiori della piastra; si ricorda però che il laminato progettato è di tipo simmetrico e in ogni caso il valore degli spostamenti previsti è della stessa entità.

Significative e importanti differenze si riscontrano invece tra la modellazione 2D e la 3D.

La modellazione 2D per il carico critico di buckling  $P_{cr}$  porta a dei risultati molto diversi, anche di oltre il 60%, rispetto alla modellazione 3D e questo è motivato dal fatto che in quest'ultima è considerato, nel momento in cui si crea il materiale composito, il coefficiente di Poisson negativo lungo lo spessore ( Fig. 5-9) e quindi è contemplato anche il comportamento auxetico del laminato progettato.

Sia nella trattazione teorica del problema del buckling (paragrafo 5.2.), sia nella modellazione bidimensionale (Fig. 5-8) non viene invece considerato il fatto di avere  $\nu_{13}$  (o  $\nu_{23}$ ) negativo e questa considerazione è confermata dalle simulazioni effettuate, dove la differenza percentuale rispetto al valore teorico è intorno al 10%, rispetto all'oltre il 70% del caso tridimensionale.

Quindi nel caso siano progettati dei laminati tali per cui le caratteristiche dei singolo *ply* siano tali da avere un effetto auxetico bisogna prestare particolare attenzione perché nella modellazione 2D, e quindi secondo quanto previsto dalla teoria classica, questo effetto non è considerato e, ad esempio nel caso del problema del buckling, si riscontra una significativa variazione del risultato rispetto ad una simulazione che invece consideri questo effetto, come nel caso 3D.

Si ricorda inoltre come questi laminati non siano ottenuti mediante le costose tecniche di produzione dei materiali auxetici (paragrafo 3.2.), ma l'effetto è ottenuto tramite l'utilizzo di componenti che possiamo definire *off-the-shelf* e in particolare *pre-pregs* unidirezionali in fibra di carbonio e matrice epossidica, posizionati secondo una certa orientazione.

Il progettista che si occupa della realizzazione di un componente, impiegando la tecnologia dei materiali compositi, potrebbe quindi avere a che fare inconsapevolmente con un laminato auxetico e quindi seguire una trattazione teorica dove questo effetto, seppur presente, viene trascurato.

In ogni caso comunque per la determinazione del corretto valore del carico critico di buckling, data anche la limitata presenza di dati disponibili in letteratura, si ha la necessità di effettuare delle prove in laboratorio e quindi confrontare i dati previsti dalle simulazioni FEM con quelli invece ottenuti per via sperimentale.

## 6. CONCLUSIONI.

Dallo studio effettuato nella presente tesi si è evidenziato come sia possibile ottenere un comportamento auxetico semplicemente utilizzando dei laminati compositi.

Le caratteristiche fondamentali che consentono di ottenere un coefficiente di Poisson negativo, e quindi di superare il problema degli elevati costi e lunghi tempi di produzione delle fibre e schiume auxetiche, sono quelle di avere delle lamine dal comportamento anisotropo, posizionate secondo una certa orientazione.

I vantaggi principali di progettare un tale laminato sono quelli di rafforzare le proprietà meccaniche di resistenza all'indentazione, all'assorbimento di energia in seguito agli impatti e la tenacità.

Nel calcolo delle proprietà lungo lo spessore, non può essere trascurato l'effetto dell'irrigidimento dovuto all'accoppiamento tra i vari strati e si sono quindi ricavate delle formule in grado di prevedere i valori del modulo elastico  $E_3$  e di  $\nu_{13}$  e  $\nu_{23}$ .

Risulta importante anche conoscere i valori del coefficiente di Poisson lungo lo spessore del singolo *ply*, ma questi dati spesso in letteratura non vengono forniti; l'analisi di sensibilità svolta ha però permesso di capire come i coefficienti del *ply* influenzano quelli del laminato, evidenziando un andamento di tipo lineare.

Il materiali che più si prestano all'ottenimento di un coefficiente di Poisson negativo lungo lo spessore sono dei *pre-pregs*, unidirezionali, in fibra di carbonio con una matrice epossidica, tali per cui il modulo elastico nella direzione delle fibre,  $E_1$ , sia particolarmente elevato, ma anche molto differente, fino a due ordini di grandezza, da quello in direzione perpendicolare  $E_2$ . Utilizzando una tale materiale per realizzare un laminato simmetrico costituito da otto *plies* dallo spessore di 0.25mm ciascuno, ossia una tipica configurazione che si trova nei pannelli sandwich, si è in grado di raggiungere coefficienti di Poisson particolarmente negativi. Con una disposizione delle lamine del tipo  $[\pm 20^\circ]_{2s}$  e  $[\pm 70^\circ]_{2s}$  si possono ottenere rispettivamente  $\nu_{13}$  e  $\nu_{23}$  pari a -0.7471.

La fibra di vetro, data la sua marcata isotropia, non è invece adatta all'ottenimento di coefficienti di Poisson negativi, mentre con un *ply* costituito da fibre di kevlar si possono ottenere  $\nu_{13}$  e  $\nu_{23}$  pari a -0.2456 con una *lay-up* rispettivamente di  $[\pm 26^\circ]_{2s}$  e  $[\pm 64^\circ]_{2s}$ .

Se si progettano invece dei laminati ibridi, costituiti da lamine sovrapposte di kevlar e carbonio, il comportamento auxetico risulta essere meno marcato rispetto al massimo ottenibile utilizzando solo fibre di carbonio.

L'importanza di non trascurare le proprietà lungo lo spessore, e in particolar modo del coefficiente di Poisson negativo, è risultata evidente nell'analisi FEM del problema del buckling di un laminato auxetico.

Il confronto è stato eseguito tra una modellazione 2D, dove analogamente alla teoria classica non è considerata l'eventualità di avere un coefficiente di Poisson minore di zero, e una modellazione 3D, che invece considera questa possibilità.

Dopo aver analizzato le formule delle piastre ortotrope, si è visto come il modello costituito da elementi bidimensionali, riesca a prevedere il valore del carico critico teorico con una variazione massima del 11.3%, mentre una modellazione con elementi tridimensionali porta a dei risultati molto diversi, con una variazione percentuale di oltre il 70% rispetto al valore teorico.

Quindi nel caso siano progettati dei laminati, tali da manifestare un comportamento auxetico lungo lo spessore si deve sapere che una modellazione, in cui non sia prevista la possibilità di avere un coefficiente di Poisson negativo, porta a dei risultati diversi rispetto al caso in cui questo effetto sia considerato.

## 7. APPENDICI.

### 7.1. APPENDICE A: programmi MATLAB

In questa appendice si riportano i principali programmi MATLAB con i quali sono state sviluppate le figure dalla 4-2 alla 4-97.

Questo codice implementa il calcolo di  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{23}$  ed  $E_3$  nella configurazione prevista nel modello 1, ossia  $[\pm\theta]_{2s}$ , costituito da lamine con fibre di vetro.

La funzione prevede come dati in input i valori di  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$  e  $\theta$  del singolo *ply* e fornisce come output i valori di interesse lungo lo spessore del laminato. Da questi risultati sono poi state sviluppate delle funzioni di *plot* ottenendo i corrispondenti grafici di ogni modello.

- Codice modello 1 fibra di vetro

```
function prop_elastiche_laminato(E_1,E_2,G_12,nu_12_pl,theta)

nu_21_pl= E_2/E_1*nu_12_pl;
theta= theta*pi/180;
%Frazione di volume lamina
V_ply = 0.5;

Q_11= E_1/(1-nu_12_pl*nu_21_pl);
Q_22= E_2/(1-nu_12_pl*nu_21_pl);
Q_12= (nu_21_pl*E_1)/(1-nu_12_pl*nu_21_pl);
Q_66= G_12;

%Matrice Q Laminato sdr fibre
Q=[Q_11, Q_12, 0;
   Q_12, Q_22, 0;
   0,    0    Q_66];

m= cos(theta);
n= sin(theta);

T=[m^2, n^2, 2*m*n;
   n^2, m^2, -2*m*n;
   -m*n, m*n, m^2-n^2];

R=[m^2, n^2, m*n;
   n^2, m^2, -m*n;
   -2*m*n, 2*m*n, m^2-n^2];

%Q segnato +theta
Qs_plus= T*Q*R^-1;

m= cos(-theta);
n= sin(-theta);
```

```

T= [m^2, n^2, 2*m*n;
    n^2, m^2, -2*m*n;
    -m*n, m*n, m^2-n^2];

R= [m^2, n^2, m*n;
    n^2, m^2, -m*n;
    -2*m*n, 2*m*n, m^2-n^2];

%Q segnato -theta
Qs_minus= T*Q*R^-1;

%Q laminato
Q_lam= Qs_plus*V_ply+Qs_minus*V_ply;

%Matrice S
S= Q_lam^-1;

%Proprietà laminato
E_11= 1/S(1,1);
E_22= 1/S(2,2);
nu_12_lam= -E_11*S(1,2);
nu_21_lam= -E_22*S(1,2);

%Assegniamo i valori del ply caratteristici di una E-glass/epoxy
nu_13_pl= 0.28;
nu_23_pl= 0.36;

%Calcoliamo le proprietà lungo lo spessore del laminato

nu_13_lam= (nu_13_pl*(cos(theta)^2*(1-nu_21_pl*nu_12_lam)+
sin(theta)^2*(nu_21_pl- nu_12_lam))+nu_23_pl*(sin(theta)^2*...
(1-nu_12_pl*nu_12_lam)+cos(theta)^2*(nu_12_pl-nu_12_lam)))/...
(1-nu_12_pl*nu_21_pl)

nu_23_lam= (nu_13_pl*(sin(theta)^2*(1-nu_21_pl*nu_21_lam)+...
cos(theta)^2*(nu_21_pl-nu_21_lam))+nu_23_pl*( cos(theta)^2*...
(1-nu_12_pl*nu_21_lam)+sin(theta)^2*(nu_12_pl-nu_21_lam)))/...
(1-nu_12_pl*nu_21_pl)

E_3_lam = (1/E_2-nu_13_pl^2/E_1-nu_23_pl^2/E_2+...
nu_13_lam/E_11*(nu_13_pl*cos(theta)^2+nu_23_pl*sin(theta)^2)+...
nu_23_lam/E_22*(nu_13_pl*sin(theta)^2+nu_23_pl*cos(theta)^2))^-1

```



Il codice successivo consente di trattare un laminato ibrido, ovvero costituito da lamine con diverso tipo di fibre, e di ottenere la Fig. 4-104. La funzione prevede come dati in input i valori di  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$  caratteristici di un *pre-preg* con fibre di graphite e di uno con fibre di kevlar e viene analizza la configurazione delle lamine del tipo  $[\pm\theta_{UM-graphite}/\pm\theta_{Kevlar-49}]_s$ .

- Codice per il plottaggio del grafico di  $\nu_{13}$  in funzione dell'orientazione degli strati

```
function prop_elastiche_laminato(E_1_c,E_2_c,G_12_c,nu_12_pl_c,...
                                E_1_k,E_2_k,G_12_k,nu_12_pl_k)

nu_21_pl_c= E_2_c/E_1_c*nu_12_pl_c;
%Frazione di volume lamina a  $\pm\theta$  di UM-graphite/epoxy
V_ply_c= 0.25;

%Lamina di Kevlar
nu_21_pl_k= E_2_k/E_1_k*nu_12_pl_k;
%Frazione di volume lamina a  $\pm\theta$  di Kevlar-49/epoxy
V_ply_k= 0.25;
%Creazione matrici coordinate dominio per plottare superficie
[X,Y]= meshgrid(0:2:30,0:2:30);

%Preallocazione matrici risultati
nu_13= zeros(size(X,1));

%Iteriamo sugli indici delle matrici
for i=1:size(X,1)
    for j=1:size(X,1)

        %Gli angoli vengono presi dalle matrici coordinate
        theta_c= X(i,j)*pi/180;
        theta_k= Y(i,j)*pi/180;

        Q_11= E_1_c/(1-nu_12_pl_c*nu_21_pl_c);
        Q_22= E_2_c/(1-nu_12_pl_c*nu_21_pl_c);
        Q_12= (nu_21_pl_c*E_1_c)/(1-nu_12_pl_c*nu_21_pl_c);
        Q_66= G_12_c;

        %Matrice Q Laminato sdr fibre
        Q= [Q_11, Q_12, 0;
            Q_12, Q_22, 0;
            0,    0,    Q_66];

        m= cos(theta_c);
        n= sin(theta_c);
```

```

T= [m^2, n^2, 2*m*n;
    n^2, m^2, -2*m*n;
    -m*n, m*n, m^2-n^2];

R= [m^2, n^2, m*n;
    n^2, m^2, -m*n;
    -2*m*n, 2*m*n, m^2-n^2];

%Q segnato +theta carbonio
Qs_plus_c= T*Q*R^-1;

m= cos(-theta_c);
n= sin(-theta_c);

T= [m^2, n^2, 2*m*n;
    n^2, m^2, -2*m*n;
    -m*n, m*n, m^2-n^2];

R= [m^2, n^2, m*n;
    n^2, m^2, -m*n;
    -2*m*n, 2*m*n, m^2-n^2];

%Q segnato -theta carbonio
Qs_minus_c= T*Q*R^-1;

%Kevlar

Q_11= E_1_k/(1-nu_12_pl_k*nu_21_pl_k);
Q_22= E_2_k/(1-nu_12_pl_k*nu_21_pl_k);
Q_12= (nu_21_pl_k*E_1_k)/(1-nu_12_pl_k*nu_21_pl_k);
Q_66= G_12_k;

%Matrice Q Laminato sdr fibre
Q= [Q_11, Q_12, 0;
    Q_12, Q_22, 0;
    0, 0, Q_66];

m= cos(theta_k);
n= sin(theta_k);

T= [m^2, n^2, 2*m*n;
    n^2, m^2, -2*m*n;
    -m*n, m*n, m^2-n^2];

R= [m^2, n^2, m*n;
    n^2, m^2, -m*n;
    -2*m*n, 2*m*n, m^2-n^2];

%Q segnato +theta kevlar
Qs_plus_k= T*Q*R^-1;

```

```

m= cos(-theta_k);
n= sin(-theta_k);

T= [m^2, n^2, 2*m*n;
    n^2, m^2, -2*m*n;
    -m*n, m*n, m^2-n^2];

R= [m^2, n^2, m*n;
    n^2, m^2, -m*n;
    -2*m*n, 2*m*n, m^2-n^2];

%Q segnato -theta kevlar
Qs_minus_k= T*Q*R^-1;

%Q laminato
Q_lam= Qs_plus_c*V_ply_c+Qs_minus_c*V_ply_c+...
        Qs_plus_k*V_ply_k+Qs_minus_k*V_ply_k ;

%Matrice S
S= Q_lam^-1;

%Proprietà laminato
E_11= 1/S(1,1);
E_22= 1/S(2,2);
nu_12_lam= -E_11*S(1,2);
nu_21_lam= -E_22*S(1,2);

nu_13_pl_c= 0.25;
nu_23_pl_c= 0.42;
nu_13_pl_k= 0.34;
nu_23_pl_k= 0.47;

%Calcoliamo v13 del laminato
nu_13_lam= 2*V_ply_c*(nu_13_pl_c*(cos(theta_c)^2*...
(1-nu_21_pl_c*nu_12_lam)+sin(theta_c)^2*...
(nu_21_pl_c-nu_12_lam))+nu_23_pl_c*(sin(theta_c)^2*...
(1-nu_12_pl_c*nu_12_lam)+ cos(theta_c)^2*...
(nu_12_pl_c-nu_12_lam)))/(1-nu_12_pl_c*nu_21_pl_c)+2*...
V_ply_k*(nu_13_pl_k*(cos(theta_k)^2*...
(1-nu_21_pl_k*nu_12_lam)+sin(theta_k)^2*...
(nu_21_pl_k-nu_12_lam))+nu_23_pl_k*(sin(theta_k)^2*...
(1-nu_12_pl_k*nu_12_lam)+ cos(theta_k)^2*...
(nu_12_pl_k-nu_12_lam)))/(1-nu_12_pl_k*nu_21_pl_k);

%Memorizzazione di v13 laminato nelle matrici risultati
nu_13(i,j) = nu_13_lam;
end
end
figure('Name','\nu_{13}');surf(X,Y,nu_13);xlabel('\pm\theta_c');
ylabel('\pm\theta_k');zlabel('\nu_{13} lam');

```

## 7.2. APPENDICE B: tabelle valori

Si riportano i valori di  $\theta$ ,  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{23}$  ed  $E_3$ , ottenuti come output dai programmi MATLAB, per i diversi modelli e utilizzati nella costruzione delle figure dalla 4-3 alla 4-103 del paragrafo 4.2.

### Modello 1

#### *E-glass/epoxy*

$[\pm\theta]_{2s}$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±26	±28	±30	±32
	±34	±35	±36	±38	±40	±45	±50	±55	±60
	±65	±70							
$\nu_{13}$	0.2735	0.2551	0.2286	0.1996	0.1752	0.1714	0.1653	0.1613	0.1595
	0.1600	0.1611	0.1627	0.1673	0.1738	0.1962	0.2237	0.2525	0.2799
	0.3041	0.3242							

$[\pm\theta]_{2s}$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35	±40	±45
	±50	±52	±54	±55	±56	±58	±60	±62	±64
	±65	±66	±68	±70					
$\nu_{23}$	0.3578	0.3511	0.3399	0.3242	0.3041	0.2799	0.2525	0.2237	0.1962
	0.1738	0.1673	0.1627	0.1611	0.1600	0.1595	0.1613	0.1653	0.1714
	0.1752	0.1794	0.1889	0.1996					

$[\pm\theta]_{2s}$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	12.4237	12.4652	12.5350	12.6327	12.7549	12.8919	13.0240
	13.0474	13.0892	13.1226	13.1460	13.1580	13.1595	13.1580
	13.1460	13.1226	13.0892	13.0474	13.0240	12.8919	12.7549
	12.6327						

#### *Kevlar-49/epoxy*

$[\pm\theta]_{2s}$ [°]	±5	±10	±15	±20	±22	±24	±25
	±26	±28	±30	±32	±34	±35	±40
	±45	±50	±55	±60	±65	±70	
$\nu_{13}$	0.2944	0.1669	-0.0079	-0.1658	-0.2085	-0.2354	-0.2425
	-0.2456	-0.2404	-0.2216	-0.1922	-0.1551	-0.1346	-0.0228
	0.0867	0.1823	0.2610	0.3238	0.3727	0.4099	

$[\pm\theta]_{2s}$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.4665	0.4557	0.4372	0.4099	0.3727	0.3238	0.2610
	0.1823	0.0867	-0.0228	-0.0683	-0.1130	-0.1346	-0.1551
	-0.1922	-0.2216	-0.2404	-0.2456	-0.2425	-0.2354	-0.2085
	-0.1658						

$[\pm\theta]_{2s}$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	5.5297	5.5693	5.6405	5.7509	5.9105	6.1253	6.3806
	6.4321	6.5294	6.6128	6.6744	6.7071	6.7113	6.7071
	6.6744	6.6128	6.5294	6.4321	6.3806	6.1253	5.9105
	5.7509						

**UM-graphite/epoxy**

$[\pm\theta]_{2s}$ [°]	±5	±10	±15	±16	±18	±20	±22
	±24	±25	±26	±28	±30	±32	±34
	±35	±40	±45	±50	±55	±60	±65
	±70						
$\nu_{13}$	0.1142	-0.2361	-0.6008	-0.6521	-0.7219	-0.7471	-0.7322
	-0.6865	-0.6551	-0.6198	-0.5414	-0.4581	-0.3748	-0.2947
	-0.2564	-0.0866	0.0471	0.1499	0.2283	0.2880	0.3331
	0.3667						

$[\pm\theta]_{2s}$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.4169	0.4074	0.3910	0.3667	0.3331	0.2880	0.2283
	0.1499	0.0471	-0.0866	-0.1501	-0.2195	-0.2564	-0.2947
	-0.3748	-0.4581	-0.5414	-0.6198	-0.6551	-0.6865	-0.7322
	-0.7471						

$[\pm\theta]_{2s}$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	6.2323	6.3082	6.4337	6.6052	6.8129	7.0371	7.2452
	7.2813	7.3451	7.3956	7.4306	7.4486	7.4509	7.4486
	7.4306	7.3956	7.3451	7.2813	7.2452	7.0371	6.8129
	6.6052						

**Modello 2**

**E-glass/epoxy**

$[0_2/\pm\theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±26	±28	±30	±32
	±34	±35	±36	±38	±40	±45	±50	±55	±60
	±65	±70							
$\nu_{13}$	0.2767	0.2675	0.2539	0.2385	0.2244	0.2220	0.2179	0.2147	0.2126
	0.2117	0.2116	0.2119	0.2133	0.2159	0.2268	0.2425	0.2608	0.2797
	0.2975	0.3131							

$[0_2/\pm\theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35	±40	±45
	±50	±52	±54	±55	±56	±58	±60	±62	±64
	±65	±66	±68	±70					
$\nu_{23}$	0.3589	0.3556	0.3504	0.3436	0.3355	0.3270	0.3188	0.3118	0.3069
	0.3048	0.3048	0.3054	0.3058	0.3064	0.3078	0.3097	0.3120	0.3145
	0.3159	0.3173	0.3202	0.3232					

$[0_2/\pm\theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	12.4169	12.4379	12.4740	12.5263	12.5948	12.6777	12.7701
	12.7891	12.8270	12.8643	12.9004	12.9348	12.9513	12.9671
	12.9969	13.0239	13.0480	13.0691	13.0786	13.1159	13.1387
	13.1512						

**Kevlar-49/epoxy**

$[0_2/\pm\theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±22	±24	±25
	±26	±28	±30	±32	±34	±35	±40
	±45	±50	±55	±60	±65	±70	
$\nu_{13}$	0.3172	0.2528	0.1606	0.0658	0.0342	0.0088	-0.0011
	-0.0091	-0.0187	-0.0200	-0.0135	0	0.0087	0.0688
	0.1417	0.2142	0.2791	0.3340	0.3784	0.4131	

$[0_2/\pm\theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.4682	0.4631	0.4546	0.4434	0.4301	0.4158	0.4017
	0.3898	0.3818	0.3794	0.3802	0.3821	0.3835	0.3850
	0.3890	0.3938	0.3994	0.4056	0.4089	0.4123	0.4193
	0.4265						

$[0_2/\pm\theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	5.5235	5.5458	5.5915	5.6720	5.7963	5.9622	6.1495
	6.1868	6.2592	6.3272	6.3896	6.4454	6.4707	6.4944
	6.5365	6.5722	6.6019	6.6263	6.6368	6.6746	6.6951
	6.7051						

**UM-graphite/epoxy**

$[0_2/\pm\theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±16	±18	±20	±22
	±24	±25	±26	±28	±30	±32	±34
	±35	±40	±45	±50	±55	±60	±65
	±70						
$\nu_{13}$	0.1816	-0.0040	-0.2347	-0.2762	-0.3470	-0.3973	-0.4244
	-0.4287	-0.4231	-0.4131	-0.3817	-0.3391	-0.2896	-0.2365
	-0.2095	-0.0790	0.0343	0.1266	0.1994	0.2561	0.2996
	0.3323						

$[0_2/\pm\theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.4185	0.4139	0.4064	0.3963	0.3840	0.3703	0.3563
	0.3435	0.3333	0.3273	0.3264	0.3264	0.3267	0.3272
	0.3289	0.3314	0.3347	0.3385	0.3406	0.3428	0.3476
	0.3525						

$[0_2/\pm\theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	6.2203	6.2678	6.3677	6.5331	6.7485	6.9676	7.1472
	7.1766	7.2287	7.2725	7.3088	7.3386	7.3513	7.3627
	7.3821	7.3977	7.4100	7.4197	7.4238	7.4380	7.4453
	7.4487						

**Modello 3**

**E-glass/epoxy**

$[\pm 20/\pm\theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±26	±28	±30	±32
	±34	±35	±36	±38	±40	±45	±50	±55	±60
	±65	±70							
$\nu_{13}$	0.2354	0.2266	0.2138	0.1996	0.1870	0.1850	0.1816	0.1792	0.1778
	0.1777	0.1781	0.1787	0.1810	0.1844	0.1974	0.2152	0.2354	0.2559
	0.2752	0.2919							

$[\pm 20/\pm\theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35	±40	±45
	±50	±52	±54	±55	±56	±58	±60	±62	±64
	±65	±66	±68	±70					
$\nu_{23}$	0.3423	0.3385	0.3323	0.3242	0.3146	0.3042	0.2939	0.2849	0.2780
	0.2744	0.2739	0.2740	0.2743	0.2747	0.2760	0.2778	0.2800	0.2826
	0.2840	0.2855	0.2886	0.2919					

$[\pm 20/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	12.5325	12.5518	12.5848	12.6327	12.6956	12.7718	12.8563
	12.8736	12.9079	12.9414	12.9735	13.0036	13.0178	13.0314
	13.0564	13.0785	13.0975	13.1136	13.1205	13.1452	13.1567
	13.1595						

**Kevlar-49/epoxy**

$[\pm 20/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±22	±24	±25
	±26	±28	±30	±32	±34	±35	±40
	±45	±50	±55	±60	±65	±70	
$\nu_{13}$	0.0452	-0.0122	-0.0910	-0.1658	-0.1878	-0.2029	-0.2075
	-0.2100	-0.2085	-0.1988	-0.1813	-0.1573	-0.1431	-0.0587
	0.0350	0.1242	0.2025	0.2675	0.3197	0.3601	

$[\pm 20/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.4413	0.4348	0.4242	0.4099	0.3926	0.3732	0.3534
	0.3352	0.3213	0.3139	0.3132	0.3139	0.3147	0.3159
	0.3193	0.3240	0.3297	0.3364	0.3401	0.3439	0.3519
	0.3601						

$[\pm 20/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	5.6738	5.6817	5.7031	5.7509	5.8419	5.9860	6.1708
	6.2096	6.2859	6.3584	6.4249	6.4838	6.5102	6.5345
	6.5769	6.6115	6.6390	6.6604	6.6692	6.6975	6.7088
	6.7113						

**UM-graphite/epoxy**

$[\pm 20/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±16	±18	±20	±22
	±24	±25	±26	±28	±30	±32	±34
	±35	±40	±45	±50	±55	±60	±65
	±70						
$\nu_{13}$	-0.4420	-0.5579	-0.6866	-0.7066	-0.7356	-0.7471	-0.7393
	-0.7128	-0.6931	-0.6698	-0.6141	-0.5496	-0.4801	-0.4089
	-0.3735	-0.2065	-0.0655	0.0472	0.1350	0.2024	0.2537
	0.2919						



$[\pm 20/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.3944	0.3887	0.3794	0.3667	0.3510	0.3330	0.3139
	0.2954	0.2796	0.2688	0.2663	0.2650	0.2648	0.2649
	0.2659	0.2681	0.2714	0.2755	0.2779	0.2805	0.2860
	0.2919						

$[\pm 20/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	6.5308	6.5288	6.5437	6.6052	6.7407	6.9367	7.1318
	7.1656	7.2259	7.2764	7.3176	7.3506	7.3643	7.3765
	7.3965	7.4118	7.4233	7.4319	7.4353	7.4459	7.4500
	7.4509						

#### Modello 4

##### *E-glass/epoxy*

$[\pm 25/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±26	±28	±30	±32
	±34	±35	±36	±38	±40	±45	±50	±55	±60
	±65	±70							
$\nu_{13}$	0.2214	0.2130	0.2007	0.1870	0.1752	0.1733	0.1701	0.1679	0.1669
	0.1670	0.1675	0.1683	0.1707	0.1744	0.1878	0.2060	0.2266	0.2475
	0.2670	0.2840							

$[\pm 25/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35	±40	±45
	±50	±52	±54	±55	±56	±58	±60	±62	±64
	±65	±66	±68	±70					
$\nu_{23}$	0.3342	0.3301	0.3234	0.3146	0.3041	0.2926	0.2812	0.2709	0.2629
	0.2583	0.2575	0.2574	0.2576	0.2579	0.2590	0.2607	0.2629	0.2656
	0.2670	0.2685	0.2718	0.2752					

$[\pm 25/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	12.6007	12.6190	12.6503	12.6956	12.7549	12.8265	12.9054
	12.9214	12.9531	12.9838	13.0129	13.0400	13.0526	13.0645
	13.0862	13.1049	13.1205	13.1332	13.1384	13.1551	13.1595
	13.1567						

**Kevlar-49/epoxy**

$[\pm 25/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±22	±24	±25
	±26	±28	±30	±32	±34	±35	±40
	±45	±50	±55	±60	±65	±70	
$\nu_{13}$	-0.0198	-0.0713	-0.1416	-0.2075	-0.2265	-0.2390	-0.2425
	-0.2441	-0.2413	-0.2306	-0.2126	-0.1882	-0.1739	-0.0888
	0.0060	0.0970	0.1772	0.2443	0.2982	0.3401	

$[\pm 25/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.4277	0.4205	0.4087	0.3926	0.3727	0.3503	0.3268
	0.3045	0.2865	0.2755	0.2736	0.2733	0.2737	0.2746
	0.2774	0.2818	0.2875	0.2944	0.2982	0.3023	0.3108
	0.3197						

$[\pm 25/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	5.7966	5.7994	5.8106	5.8419	5.9105	6.0325	6.2039
	6.2414	6.3162	6.3882	6.4545	6.5130	6.5390	6.5627
	6.6035	6.6358	6.6605	6.6789	6.6861	6.7067	6.7113
	6.7088						

**UM-graphite/epoxy**

$[\pm 25/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±16	±18	±20	±22
	±24	±25	±26	±28	±30	±32	±34
	±35	±40	±45	±50	±55	±60	±65
	±70						
$\nu_{13}$	-0.4565	-0.5433	-0.6421	-0.6580	-0.6821	-0.6931	-0.6893
	-0.6702	-0.6551	-0.6368	-0.5913	-0.5367	-0.4760	-0.4121
	-0.3797	-0.2225	-0.0849	0.0277	0.1167	0.1857	0.2384
	0.2779						

$[\pm 25/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.3819	0.3756	0.3653	0.3510	0.3331	0.3123	0.2899
	0.2676	0.2479	0.2335	0.2297	0.2273	0.2267	0.2264
	0.2268	0.2286	0.2317	0.2359	0.2384	0.2412	0.2472
	0.2537						

$[\pm 25/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	6.7441	6.7333	6.7251	6.7407	6.8129	6.9588	7.1379
	7.1714	7.2325	7.2845	7.3270	7.3606	7.3745	7.3866
	7.4062	7.4207	7.4312	7.4386	7.4414	7.4492	7.4509
	7.4500						

### Modello 5

#### *E-glass/epoxy*

$[\pm 30/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±26	±28	±30	±32
	±34	±35	±36	±38	±40	±45	±50	±55	±60
	±65	±70							
$\nu_{13}$	0.2119	0.2038	0.1921	0.1792	0.1679	0.1662	0.1632	0.1613	0.1604
	0.1606	0.1612	0.1620	0.1646	0.1682	0.1817	0.1998	0.2203	0.2412
	0.2607	0.2778							

$[\pm 30/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35	±40	±45
	±50	±52	±54	±55	±56	±58	±60	±62	±64
	±65	±66	±68	±70					
$\nu_{23}$	0.3255	0.3211	0.3139	0.3042	0.2926	0.2799	0.2670	0.2552	0.2459
	0.2400	0.2389	0.2384	0.2385	0.2387	0.2396	0.2412	0.2433	0.2460
	0.2475	0.2490	0.2524	0.2559					

$[\pm 30/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	12.6833	12.7004	12.7297	12.7718	12.8265	12.8919	12.9630
	12.9773	13.0052	13.0320	13.0570	13.0797	13.0901	13.0998
	13.1170	13.1311	13.1421	13.1502	13.1532	13.1595	13.1551
	13.1452						

#### *Kevlar-49/epoxy*

$[\pm 30/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±22	±24	±25
	±26	±28	±30	±32	±34	±35	±40
	±45	±50	±55	±60	±65	±70	
$\nu_{13}$	-0.0361	-0.0805	-0.1413	-0.1988	-0.2157	-0.2272	-0.2306
	-0.2323	-0.2305	-0.2216	-0.2061	-0.1846	-0.1718	-0.0941
	-0.0049	0.0827	0.1613	0.2278	0.2818	0.3240	

$[\pm 30/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.4131	0.4050	0.3916	0.3732	0.3503	0.3238	0.2954
	0.2677	0.2438	0.2275	0.2238	0.2220	0.2218	0.2220
	0.2240	0.2278	0.2333	0.2403	0.2443	0.2486	0.2578
	0.2675						

$[\pm 30/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	5.9619	5.9624	5.9675	5.9860	6.0325	6.1253	6.2704
	6.3039	6.3722	6.4393	6.5015	6.5563	6.5803	6.6020
	6.6382	6.6656	6.6851	6.6982	6.7027	6.7113	6.7067
	6.6975						

*UM-graphite/epoxy*

$[\pm 30/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±16	±18	±20	±22
	±24	±25	±26	±28	±30	±32	±34
	±35	±40	±45	±50	±55	±60	±65
	±70						
$\nu_{13}$	-0.3630	-0.4260	-0.5015	-0.5146	-0.5363	-0.5496	-0.5528
	-0.5449	-0.5367	-0.5258	-0.4963	-0.4581	-0.4131	-0.3634
	-0.3375	-0.2053	-0.0822	0.0230	0.1086	0.1762	0.2286
	0.2681						

$[\pm 30/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.3680	0.3610	0.3493	0.3330	0.3123	0.2880	0.2610
	0.2334	0.2080	0.1881	0.1824	0.1783	0.1769	0.1759
	0.1752	0.1762	0.1789	0.1831	0.1857	0.1886	0.1951
	0.2024						

$[\pm 30/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	6.9642	6.9546	6.9423	6.9367	6.9588	7.0371	7.1706
	7.1994	7.2546	7.3037	7.3446	7.3770	7.3902	7.4016
	7.4194	7.4320	7.4404	7.4458	7.4476	7.4509	7.4492
	7.4459						

### Modello 6

#### *E-glass/epoxy*

$[\pm 35/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±26	±28	±30	±32
	±34	±35	±36	±38	±40	±45	±50	±55	±60
	±65	±70							
$\nu_{13}$	0.2089	0.2013	0.1903	0.1781	0.1675	0.1658	0.1630	0.1612	0.1603
	0.1605	0.1611	0.1619	0.1643	0.1678	0.1808	0.1982	0.2181	0.2385
	0.2576	0.2743							

$[\pm 35/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35	±40	±45
	±50	±52	±54	±55	±56	±58	±60	±62	±64
	±65	±66	±68	±70					
$\nu_{23}$	0.3172	0.3124	0.3045	0.2939	0.2812	0.2670	0.2525	0.2390	0.2280
	0.2207	0.2191	0.2183	0.2181	0.2182	0.2189	0.2203	0.2224	0.2251
	0.2266	0.2282	0.2316	0.2354					

$[\pm 35/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	12.7753	12.7912	12.8181	12.8563	12.9054	12.9630	13.0240
	13.0360	13.0591	13.0807	13.1003	13.1175	13.1250	13.1318
	13.1431	13.1514	13.1567	13.1592	13.1595	13.1532	13.1384
	13.1205						

#### *Kevlar-49/epoxy*

$[\pm 35/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±22	±24	±25
	±26	±28	±30	±32	±34	±35	±40
	±45	±50	±55	±60	±65	±70	
$\nu_{13}$	-0.0047	-0.0417	-0.0931	-0.1431	-0.1587	-0.1701	-0.1739
	-0.1764	-0.1771	-0.1718	-0.1609	-0.1445	-0.1346	-0.0705
	0.0069	0.0859	0.1588	0.2218	0.2737	0.3147	

$[\pm 35/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.3987	0.3896	0.3744	0.3534	0.3268	0.2954	0.2610
	0.2260	0.1944	0.1706	0.1642	0.1600	0.1588	0.1581
	0.1585	0.1613	0.1662	0.1731	0.1772	0.1817	0.1916
	0.2025						

$[\pm 35/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	6.1498	6.1513	6.1566	6.1708	6.2039	6.2704	6.3806
	6.4071	6.4624	6.5178	6.5695	6.6145	6.6338	6.6508
	6.6777	6.6958	6.7063	6.7108	6.7113	6.7027	6.6861
	6.6692						

**UM-graphite/epoxy**

$[\pm 35/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±16	±18	±20	±22
	±24	±25	±26	±28	±30	±32	±34
	±35	±40	±45	±50	±55	±60	±65
	±70						
$\nu_{13}$	-0.2264	-0.2718	-0.3293	-0.3401	-0.3592	-0.3735	-0.3816
	-0.3823	-0.3797	-0.3751	-0.3599	-0.3375	-0.3087	-0.2748
	-0.2564	-0.1564	-0.0552	0.0363	0.1138	0.1769	0.2267
	0.2648						

$[\pm 35/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.3537	0.3458	0.3325	0.3139	0.2899	0.2610	0.2283
	0.1936	0.1601	0.1321	0.1233	0.1165	0.1138	0.1117
	0.1090	0.1086	0.1103	0.1141	0.1167	0.1197	0.1268
	0.1350						

$[\pm 35/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	7.1458	7.1416	7.1359	7.1318	7.1379	7.1706	7.2452
	7.2643	7.3038	7.3418	7.3752	7.4020	7.4128	7.4219
	7.4356	7.4441	7.4488	7.4507	7.4509	7.4476	7.4414
	7.4353						

**Modello 7**

**E-glass/epoxy**

$[\pm 45/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±26	±28	±30	±32
	±34	±35	±36	±38	±40	±45	±50	±55	±60
	±65	±70							
$\nu_{13}$	0.2244	0.2178	0.2082	0.1974	0.1878	0.1863	0.1836	0.1817	0.1806
	0.1805	0.1808	0.1813	0.1830	0.1857	0.1962	0.2108	0.2280	0.2459
	0.2629	0.2780							

$[\pm 45/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35	±40	±45
	±50	±52	±54	±55	±56	±58	±60	±62	±64
	±65	±66	±68	±70					
$\nu_{23}$	0.3051	0.2995	0.2904	0.2780	0.2629	0.2459	0.2280	0.2108	0.1962
	0.1857	0.1830	0.1813	0.1808	0.1805	0.1806	0.1817	0.1836	0.1863
	0.1878	0.1895	0.1933	0.1974					

$[\pm 45/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	12.9555	12.9682	12.9891	13.0178	13.0526	13.0901	13.1250
	13.1311	13.1418	13.1502	13.1561	13.1591	13.1595	13.1591
	13.1561	13.1502	13.1418	13.1311	13.1250	13.0901	13.0526
	13.0178						

*Kevlar-49/epoxy*

$[\pm 45/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±22	±24	±25
	±26	±28	±30	±32	±34	±35	±40
	±45	±50	±55	±60	±65	±70	
$\nu_{13}$	0.1329	0.1081	0.0725	0.0350	0.0217	0.0106	0.0060
	0.0021	-0.0032	-0.0049	-0.0030	0.0027	0.0069	0.0396
	0.0867	0.1406	0.1944	0.2438	0.2865	0.3213	

$[\pm 45/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.3781	0.3669	0.3480	0.3213	0.2865	0.2438	0.1944
	0.1406	0.0867	0.0396	0.0243	0.0119	0.0069	0.0027
	-0.0030	-0.0049	-0.0032	0.0021	0.0060	0.0106	0.0217
	0.0350						

$[\pm 45/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	6.4728	6.4793	6.4912	6.5102	6.5390	6.5803	6.6338
	6.6452	6.6675	6.6872	6.7022	6.7103	6.7113	6.7103
	6.7022	6.6872	6.6675	6.6452	6.6338	6.5803	6.5390
	6.5102						

**UM-graphite/epoxy**

$[\pm 45/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±16	±18	±20	±22
	±24	±25	±26	±28	±30	±32	±34
	±35	±40	±45	±50	±55	±60	±65
	±70						
$\nu_{13}$	0.0254	0	-0.0329	-0.0399	-0.0534	-0.0655	-0.0754
	-0.0826	-0.0849	-0.0863	-0.0862	-0.0822	-0.0741	-0.0624
	-0.0552	-0.0092	0.0471	0.1055	0.1601	0.2080	0.2479
	0.2796						

$[\pm 45/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.3300	0.3202	0.3036	0.2796	0.2479	0.2080	0.1601
	0.1055	0.0471	-0.0092	-0.0294	-0.0473	-0.0552	-0.0624
	-0.0741	-0.0822	-0.0862	-0.0863	-0.0849	-0.0826	-0.0754
	-0.0655						

$[\pm 45/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	7.3519	7.3540	7.3579	7.3643	7.3745	7.3902	7.4128
	7.4180	7.4285	7.4382	7.4460	7.4503	7.4509	7.4503
	7.4460	7.4382	7.4285	7.4180	7.4128	7.3902	7.3745
	7.3643						

**Modello 8**

**E-glass/epoxy**

$[\pm 60/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±26	±28	±30	±32
	±34	±35	±36	±38	±40	±45	±50	±55	±60
	±65	±70							
$\nu_{13}$	0.2779	0.2726	0.2649	0.2559	0.2475	0.2460	0.2433	0.2412	0.2396
	0.2387	0.2385	0.2384	0.2389	0.2400	0.2459	0.2552	0.2670	0.2799
	0.2926	0.3042							

$[\pm 60/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35	±40	±45
	±50	±52	±54	±55	±56	±58	±60	±62	±64
	±65	±66	±68	±70					
$\nu_{23}$	0.3077	0.3016	0.2915	0.2778	0.2607	0.2412	0.2203	0.1998	0.1817
	0.1682	0.1646	0.1620	0.1612	0.1606	0.1604	0.1613	0.1632	0.1662
	0.1679	0.1699	0.1743	0.1792					



$[\pm 60/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	13.1181	13.1244	13.1341	13.1452	13.1551	13.1595	13.1532
	13.1502	13.1421	13.1311	13.1170	13.0998	13.0901	13.0797
	13.0570	13.0320	13.0052	12.9773	12.9630	12.8919	12.8265
	12.7718						

**Kevlar-49/epoxy**

$[\pm 60/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±22	±24	±25
	±26	±28	±30	±32	±34	±35	±40
	±45	±50	±55	±60	±65	±70	
$\nu_{13}$	0.3288	0.3142	0.2925	0.2675	0.2578	0.2486	0.2443
	0.2403	0.2333	0.2278	0.2240	0.2220	0.2218	0.2275
	0.2438	0.2677	0.2954	0.3238	0.3503	0.3732	

$[\pm 60/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±40	±45	±50	±52	±54	±55	±56
	±58	±60	±62	±64	±65	±66	±68
	±70						
$\nu_{23}$	0.3896	0.3770	0.3553	0.3240	0.2818	0.2278	0.1613
	0.0827	-0.0049	-0.0941	-0.1275	-0.1580	-0.1718	-0.1846
	-0.2061	-0.2216	-0.2305	-0.2323	-0.2306	-0.2272	-0.2157
	-0.1988						

$[\pm 60/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±20	±25	±30	±35
	±36	±38	±40	±42	±44	±45	±46
	±48	±50	±52	±54	±55	±60	±65
	±70						
$E_3$ [GPa]	6.6762	6.6808	6.6882	6.6975	6.7067	6.7113	6.7027
	6.6982	6.6851	6.6656	6.6382	6.6020	6.5803	6.5563
	6.5015	6.4393	6.3722	6.3039	6.2704	6.1253	6.0325
	5.9860						

**UM-graphite/epoxy**

$[\pm 60/\pm \theta]_s$ [°]	±5	±10	±15	±16	±18	±20	±22
	±24	±25	±26	±28	±30	±32	±34
	±35	±40	±45	±50	±55	±60	±65
	±70						
$\nu_{13}$	0.2518	0.2397	0.2220	0.2181	0.2102	0.2024	0.1951
	0.1886	0.1857	0.1831	0.1789	0.1762	0.1752	0.1759
	0.1769	0.1881	0.2080	0.2334	0.2610	0.2880	0.3123
	0.3330						

<b><math>[\pm 60/\pm \theta]_s</math></b> <b>[°]</b>	$\pm 5$	$\pm 10$	$\pm 15$	$\pm 20$	$\pm 25$	$\pm 30$	$\pm 35$
	$\pm 40$	$\pm 45$	$\pm 50$	$\pm 52$	$\pm 54$	$\pm 55$	$\pm 56$
	$\pm 58$	$\pm 60$	$\pm 62$	$\pm 64$	$\pm 65$	$\pm 66$	$\pm 68$
	$\pm 70$						
<b><math>\nu_{23}</math></b>	0.3277	0.3164	0.2969	0.2681	0.2286	0.1762	0.1086
	0.0230	-0.0822	-0.2053	-0.2580	-0.3111	-0.3375	-0.3634
	-0.4131	-0.4581	-0.4963	-0.5258	-0.5367	-0.5449	-0.5528
	-0.5496						

<b><math>[\pm 60/\pm \theta]_s</math></b> <b>[°]</b>	$\pm 5$	$\pm 10$	$\pm 15$	$\pm 20$	$\pm 25$	$\pm 30$	$\pm 35$
	$\pm 36$	$\pm 38$	$\pm 40$	$\pm 42$	$\pm 44$	$\pm 45$	$\pm 46$
	$\pm 48$	$\pm 50$	$\pm 52$	$\pm 54$	$\pm 55$	$\pm 60$	$\pm 65$
	$\pm 70$						
<b><math>E_3</math></b> <b>[GPa]</b>	7.4385	7.4401	7.4427	7.4459	7.4492	7.4509	7.4476
	7.4458	7.4404	7.4320	7.4194	7.4016	7.3902	7.3770
	7.3446	7.3037	7.2546	7.1994	7.1706	7.0371	6.9588
	6.9367						

## BIBLIOGRAFIA

- [1] **Love A.**, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. *Dover Publication*, New York, 1944.
- [2] **Caddock B. D., Evans K. E.**, Microporous materials with negative Poisson's ratios. I. Microstructure and mechanical properties. *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 22, No. 12, p. 1877-1882, 1989.
- [3] **Evans K. E., Caddock B. D.**, Microporous materials with negative Poisson's ratios. II. Mechanisms and interpretation, *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 22, No. 12, p. 1883-1887, 1989.
- [4] **Evans K. E., Nkansah M. A., Hutchinson I. J., Rogers S. C.**, Molecular network design. *Nature*, Vol. 353, No. 6340, p. 124-128, 1991.
- [5] **Lakes, R. S. and Witt, R.**, Making and characterizing negative Poisson's ratio materials. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 30, p. 50-58, 2002.
- [6] **Grima J. N., Alderson A., Evans K. E.**, Auxetic behaviour from rotating rigid units. *Phys. Status Solidi*, Vol. 242, p. 561-575, 2005.
- [7] **Liu Y., Hu H.**, A review on auxetic structures and polymeric materials. *Scientific Research and Essays*, Vol. 5, p. 1052-1063, 2010.
- [8] **Grima J. N., Evans K.E.**, Auxetic behavior from rotating triangles. *Journal of Materials Science*, Vol. 41, No. 10, p. 3193-3196, 2006.
- [9] **Grima J. N., Manicaro E., Attard D.**, Auxetic behaviour from connected different-sized squares and rectangles. *Proc. Roy. Soc. A.*, Vol. 467, p. 439-458, 2011.
- [10] **Gaspar N., Ren X. J., Grima J. N., Smith C. W., Evans K. E.** Novel honeycombs with Auxetic behavior. *Acta Materiala*, Vol.53, p. 2439-2445.
- [11] **Choi, J. B. and Lakes, R. S.**, Non linear properties of metallic cellular materials with a negative Poisson's ratio, *J. Mater. Sci.*, Vol. 27, No. 19, p. 5373-5381, (1992a), 1992.
- [12] **Choi, J. B. and Lakes, R. S.**, Non linear properties of polymer cellular materials with a negative Poisson's ratio, *J. Mater. Sci.*, Vol. 27, No. 19, p. 4678-4684, (1992b), 1992.
- [13] **Lakes, R. S. and Elms, K. J.**, Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams. *Journal of Composite Materials*, Vol. 27, p. 1193-1202, 1993.
- [14] **Chan, N. and Evans, K. E.**, Indentation resilience of conventional and auxetic foams, *J. Cell. Plast.*, Vol. 34, pp. 231-262, 1998.
- [15] **Choi, J. B. and Lakes, R. S.**, Fracture toughness of Re-entrant foam materials with a negative Poisson's ratio: Experiment and Analysis. *Int. J. Fracture*, Vol. 80, p. 73-83, 1996.

- [16] **Chen, C.P. and Lakes, R. S.**, Viscoelastic behavior of composite-materials with conventional-Poisson-ratio or negative-Poisson-ratio foam as one-phase. *J. Mater. Sci.*, Vol. 28, No. 16, p. 4288-4298, 1993.
- [17] **Chen, C.P. and Lakes, R. S.**, Micromechanical analysis of dynamic behavior of conventional and negative Poisson's ratio foams. *J. Eng. Mater. Technol, ASME*, Vol. 118, p. 285-288, 1996.
- [18] **Prawoto Y.**, Seeing auxetic materials from the mechanics point of view: A structural review on the negative Poisson's ratio. *Computational Materials Science*, Vol. 58, p. 140-153, 2012.
- [19] **Alderson K. L., Simkins V. R., Coenen V. L., Davies P. J., Alderson A., Evans K. E.**, How to make auxetic fibre reinforced composites. *Phys. Status Solidi*, Vol. 242, No. 3, p. 509-518, 2005.
- [20] **Alderson K. L., Coenen V. L.**, The low velocity impact response of auxetic carbon fibre laminates. *Phys. Status. Solidi*, Vol. 245, No. 3, p. 489-496, 2008.
- [21] **Choi, J. B. and Lakes, R. S.**, Design of a fastener based on negative Poisson's ratio foam. *Cell. Poly.*, Vol. 10, p. 205-212, 1991.
- [22] **Zecchetto M., Zaccariotto M., Galvanetto U.**, Omogeneizzazione e indentazione in honeycomb auxetici. Tesi di Laurea, Università degli Studi di Padova, A. A. 2012-2013.
- [23] **Liu Q.**, Literature Review: Materials with Negative Poisson's Ratios and Potential Application to Aerospace and Defence. *Defence Science and Technology Organisation*, 2006.
- [24] **Smith W. A.**, Optimizing electromechanical coupling in piezocomposites using polymers with negative Poisson's ratio. *Proc. of IEEE Ultrasonic Symp., IEEE*, p. 661-666, 1991.
- [25] **Gercek H.**, Poisson's ratio values for rocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 44, p. 1-13, 2007.
- [26] **Lakes R.**, Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio. *Science*, Vol. 235, No. 4792, p. 1038-1040, 1987.
- [27] **Webber, R. S., Alderson, K. L. and Evans, K. E.**, Novel variations in the microstructure of the auxetic microporous ultra-high molecular weight polyethylene. Part 1: Processing and microstructure. *Poly Engng. Sci.*, Vol. 40, No. 8, p. 1894-1905, 2000.
- [28] **Alderson, K. L., Alderson, A., Smart, G., Simkins, V. R. and Davies, P. J.**, Auxetic polypropylene fibres: Part 1: Manufacture and characterization, plastics, Rubber and Composites, Vol. No. 8, p. 344-349, 2002.
- [29] **Alderson, K. L., Webber, R. S., Kettle, A. P. and Evans, K. E.**, Novel fabrication route for auxetic polyethylene. Part 1: Processing and microstructure, *Poly Engng. Sci.*, Vol. 46, No. 5, p. 568-578, 2005.

- [30] **Coenen V. L., Alderson K. L.**, Mechanisms of failure in the static indentation resistance of auxetic carbon fiber laminates. *Phys. Status Solidi*, Vol. 248, No. 1, p. 66-72, 2011.
- [31] **Argatov I. I., Guinovart-Diaz R., Sabina F. J.**, On local indentation and impact compliance of isotropic auxetic materials from the continuum mechanics viewpoint. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 54, p. 42-57, 2012.
- [32] **Donoghue J. P., Alderson K. L., Evans K. E.**, The fracture toughness of composite laminates with a negative Poisson's ratio. *Phys. Status Solidi*, Vol. 246, No. 9, p. 2011-2017, 2009.
- [33] **Corp., Hexcel**, HexPly Prepreg Technology, 2013.
- [34] **Milton G.**, Composite materials with Poisson's ratio close to -1. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 40, p. 1105-1137, 1992.
- [35] **Coenen V. L., Alderson K. L.**, Mechanisms of failure in the static indentation resistance of auxetic carbon fiber laminates. *Phys. Status Solidi*, Vol. 248, No. 1, p. 66-72, 2011.
- [36] **Alderson K. L., Coenen V. L.**, The low velocity impact response of auxetic carbon fibre laminates. *Phys. Status Solidi*, Vol. 245, No. 3, p. 489-496, 2008.
- [37] **Smith CS.**, Design of marine structures in composite materials. *Elsevier Applied Science*, 1990.
- [38] **Herakovich CT.**, Mechanics of fibrous composites. *John Wiley and Sons*, 1998.
- [39] **Herakovich CT.**, Composite laminates with negative through-the-thickness Poisson's ratio. *Journal of Composite Materials*, Vol 18, p. 447-455, 1984.
- [40] **McCartney, L. N. and Kelly, A.**, Effective thermal and elastic properties of  $[+\theta/-\theta]_S$  laminates. *Comp. Sci. Technol.*, Vol. 67, p. 646-661, 2007.
- [41] **Gibson A. G.**, Through-thickness elastic constants of composite laminates. *Journal of Composite Materials*, p. 1-13, 2012.
- [42] **Maddalena A.**, Corso di Scienza e Tecnologia dei Materiali Compositi. Appunti dalle lezioni. Università degli Studi di Padova, A. A. 2011-2012.
- [43] **Harkati E. H., Bezazi A., Scarpa F., Alderson K., Alderson A.**, Modelling the influence of the orientation and fibre reinforcement on the Negative Poisson's ratio in composites laminates'. *Phys. Status Solidi*, Vol. 244, No. 3, p. 883-892, 2007.
- [44] **Megson T. H. G.**, Aircraft Structures for Engineering Students. *Elsevier Aerospace Engineering Series*, 2007.
- [45] **Timoshenko, S. P. and Gere, J. M.**, Theory of Elastic Stability, Second Edition. *McGraw-Hill Book Co.*, p. 541, 1961.
- [46] **Volmir, A. S.**, Stability of Elastic System. *Gosudarstvennoye Izdatelstvo*, p. 879, 1963.

- [47] **Volmir, A. S.**, Stability of Deformable Systems. *Izdatyelstvo "Nauka"*, p. 984, 1967.
- [48] **Brunelle, E. J. and Oyibo, G. A.**, Generic Buckling Curves for Specially Orthotropic Rectangular Plates. *AIAA Journal*, 1983.
- [49] **Oyibo, G. A.**, The Use of Affine Transformation in the Analysis of Stability and Vibration of Orthotropic Plates. *Ph. D. Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute*, 1981.
- [50] **Leissa A. W.**, Buckling of Laminated Composite Plates and Shell Panels. *Air Force Wright Aeronautical Laboratories*, 1985.