



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Strategie markoviane per azioni di marketing coordinate  
in una catena di distribuzione

Relatrice:  
Prof.ssa Alessandra Buratto

Laureando: Angela Zuin  
Matricola: 1192182

---

Anno Accademico 2022/2023

21 aprile 2023



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Giochi Differenziali e loro equilibri</b>	<b>7</b>
2.1	Giochi Differenziali . . . . .	8
2.2	Principio di Ottimalità di Bellmann . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Strategie della catena di distribuzione closed-loop</b>	<b>11</b>
3.1	Struttura del modello . . . . .	11
3.2	Analisi del modello . . . . .	13
3.2.1	Scenario D . . . . .	14
3.2.2	Scenario S . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Confronto tra scenari</b>	<b>25</b>
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>31</b>
5.1	Analisi sequenziale . . . . .	31
5.2	Riassunto conclusioni . . . . .	31



# Capitolo 1

## Introduzione

Il rapido sviluppo del commercio elettronico e della tecnologia dei cloud ha comportato un taglio dei costi di conservazione e gestione dei dati informatici, in particolare dei Big Data (cioè dati talmente grandi, veloci e vari da essere difficili da elaborare con metodi tradizionali). Molte compagnie di dati così come le piattaforme di servizi internet (ISP) sono diventate infatti una risorsa cruciale per tutte le industrie, soprattutto nell'area di gestione delle catene di distribuzione dei prodotti. Quella che noi analizzeremo sarà una catena closed-loop.

Una catena di distribuzione closed-loop (CLSC) consiste in una catena di approvvigionamento in entrambe le direzioni, ovvero il prodotto viene fabbricato dal produttore, passa al rivenditore, arriva al consumatore e, una volta usato, il prodotto torna indietro nella catena distributiva per il riciclo di alcune sue parti. Essa costituisce una parte importante nel riciclo industriale, infatti, grazie a fattori economici, legislativi e ambientali, le imprese che ne sono coinvolte, possono attuare dei risparmi grazie al riutilizzo di parti di prodotto riducendo così la creazione di rifiuti e di emissioni inquinanti, quali per esempio il carbone. I produttori che la utilizzano maggiormente fabbricano prodotti elettronici come cellulari, stampanti ed elettrodomestici, e tra questi troviamo HP, Apple, Samsung, Lenovo, e Xerox [3].

Sebbene sia stata ideata originalmente nel mercato dei prodotti high tech, questa tecnica di marketing viene attualmente utilizzata anche per altri tipi di prodotto. Ad esempio, il marchio “Scarpa” utilizza il riciclo per le calzature sportive. In questo periodo, l'azienda italiana “Scarpa” sta pubblicizzando il riciclo di un suo modello di calzatura. Il progetto si chiama *Re-Shoes*, è finanziato dall'Unione Europea: è composto da tre step: raccolta, rigenerazione, produzione, e viene implementato attraverso degli eventi podistici [5].

La CLSC gioca un ruolo importante nella creazione delle piattaforme di dati condivisi, utilizzate per incrementare l'efficacia delle operazioni manageriali. Infatti produttori e rivenditori spesso collaborano con l'ISP: da una parte quest'ultimo può capire e predire le domande del consumatore basandosi sul loro comportamento grazie, per esempio, ai social network, dall'altra promuove il ritorno dei prodotti usati, di interesse per produttori e rivenditori, informando i consumatori dei vantaggi, come ad esempio quello ambientale, senza ricevere niente in cambio.

In una CLSC, i produttori, di fronte ad un aumento delle domande dei consumatori, prestano maggior attenzione agli investimenti pubblicitari e al marketing del prodotto, poiché hanno bisogno di catturare le preferenze dei consumatori rapidamente per produrre ciò che può soddisfare le loro domande.

Nel capitolo 3 della presente tesi analizzeremo il modello studiato nell'articolo *Dynamic cooperation strategies of the closed-loop supply chain* [6] su una CLCS con tre componenti: un produttore, un rivenditore e l'ISP. Il produttore controlla gli investimenti pubblicitari e di marketing e il prezzo all'ingrosso del prodotto; il rivenditore determina il prezzo di vendita, le iniziative pubblicitarie e rimborsa l'ISP delle spese attuate per ottenere informazioni sui consumatori e sul prodotto; l'ISP, invece, ottiene le informazioni per il rivenditore e controlla le iniziative marketing per mezzo dei Big Data. Analizzeremo le decisioni ottime dei tre componenti sotto due diversi scenari: l'ISP si fa carico di tutti i costi degli investimenti in marketing (scenario D), e il produttore partecipa alle spese marketing dell'ISP (scenario S). Nello scenario D, il rivenditore rimborsa l'ISP delle spese attuate per ottenere più informazioni riguardo i consumatori e la reputazione del marchio del prodotto; nello scenario S, il produttore condivide con

l'ISP, secondo un contratto, i costi marketing attuati per incrementare le vendite, migliorare l'efficacia del riciclo e costruire l'immagine del prodotto (descritta dalla variabile "goodwill", che definiremo nel capitolo 3).

Il problema viene formulato in forma di gioco differenziale attraverso la ricerca degli equilibri di Nash per mettere in evidenza la volontà di ogni attore di massimizzare il proprio payoff (guadagno) tenendo conto delle decisioni degli altri attori. Principalmente in un gioco differenziale si considerano due attori, ma in quello preso in esame, vi è la presenza di un terzo attore.

Al capitolo 2 vengono riportate le nozioni e i risultati riguardanti la teoria dei giochi differenziali, in modo particolare sulla ricerca degli equilibri di Nash.

Al capitolo 4 confronteremo i due scenari al variare di alcuni parametri utilizzati nel problema e analizzeremo che cosa succede al goodwill in base a questi.

Infine, nel capitolo 5, vengono analizzati i risultati chiave ottenuti nei capitoli precedenti.

## Capitolo 2

# Giochi Differenziali e loro equilibri

Nella realtà economica e aziendale si devono considerare le azioni di più decisori, ciascuno dei quali vuole ottimizzare un proprio obiettivo (rappresentato ad esempio da utilità o profitti da massimizzare, oppure da costi da minimizzare), tutto ciò tenendo conto delle azioni degli altri decisori e delle conseguenze derivanti da esse. In quanto segue faremo riferimento al testo *Differential games in economics and management science* [2] per formalizzare in ambito matematico l'interazione strategica tra i suddetti decisori. La teoria dei giochi è il contesto per formalizzare tali situazioni, infatti, si basa su due assiomi fondamentali

- **i giocatori sono razionali**: ciascuno è consapevole delle proprie alternative, ha chiare preferenze, e sceglie la propria azione deliberatamente dopo un processo di ottimizzazione;
- **i giocatori sono intelligenti**; quando definisce la propria strategia del gioco, un giocatore tiene conto di qualsiasi conoscenza o aspettativa egli possa avere nei riguardi del comportamento degli altri giocatori.

Si parla di **gioco statico** se i giocatori compiono una sola scelta e questa determina completamente il loro payoff. Si ha invece un **gioco dinamico** o **differenziale** se almeno un giocatore può usare una strategia condizionata da tutte le informazioni raccolte fino a quel momento, cioè il payoff dipende anche dalle strategie degli altri giocatori.

Un'ulteriore classificazione viene fatta a seconda che tra i giocatori prevalga un approccio cooperativo o non cooperativo al gioco. Si parla di **giochi cooperativi** quando i giocatori devono o vogliono prendere decisioni in accordo, coordinando le loro azioni e agendo come fossero all'interno di un gruppo. Si parla invece di **giochi non cooperativi** se prevale la rivalità tra i giocatori e quindi l'assenza di accordi: i giocatori non possono o non vogliono prendere decisioni in comune.

Per lo studio di un gioco, risultano importanti le seguenti tre azioni:

- esaminare l'ambiente nel quale il gioco avviene per ottenere un insieme plausibile di regole e selezionare le variabili rilevanti e le loro azioni;
- progettare una struttura matematica, un modello teorico del gioco che rifletta gli aspetti pertinenti del problema strategico;
- dedurre le proprietà del modello.

Considerando i giochi non cooperativi e dinamici, essi hanno due tipi di modelli: la forma strategica e la forma estesa. La **forma estesa** viene usata per giochi svolti nel tempo (o in fasi successive) ed è rappresentato da un albero di gioco. Essa include una descrizione della sequenza in cui i giocatori devono partecipare e dei casi in cui si verificano possibili eventi causali durante il gioco. Invece la **forma strategica** include tre elementi:

- un insieme di giocatori  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$  con  $N \geq 2$ ,
- per ogni giocatore  $i \in \mathcal{I}$ , un insieme di possibili strategie  $U_i$ ,

- per ogni giocatore  $i \in \mathcal{I}$  una funzione valore reale  $J_i$  tale che il valore  $J_i(u_1, u_2, \dots, u_N)$  rappresenti il risultato, chiamato payoff del giocatore  $i$  se tutti gli  $N$  giocatori usano le strategie  $(u_1, u_2, \dots, u_N) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_N$ .

Prima di esaminare le caratteristiche di un gioco differenziale, definiamo un equilibrio di Nash:

**Definizione 1** (Equilibrio di Nash). La  $N$ -tupla di strategie  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i, \dots, \phi_N)$  è chiamata Equilibrio di Nash, se per ogni giocatore  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$J_i(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i, \dots, \phi_N) \geq J_i(\phi_1, \phi_2, \dots, u_i, \dots, \phi_N) \quad \forall u_i \in U_i$$

Ciò significa che, se tutti gli altri giocatori giocano la loro strategia alla Nash, il payoff che il giocatore  $i$ -esimo ottiene utilizzando la propria miglior risposta alla Nash è maggiore di quello che otterrebbe con una qualsiasi altra strategia.

Il modello di gioco non cooperativo che analizzeremo nel capitolo 3, sarà composto da tre giocatori, pertanto l'equilibrio di Nash sarà costituito da una terna di strategie, ciascuna dipendente dalle strategie degli altri giocatori.

$$\left. \begin{array}{l} \max_{u_1 \in U_1} J_1(u_1, u_2, u_3) \implies u_1 = (u_2, u_3) \\ \max_{u_2 \in U_2} J_1(u_1, u_2, u_3) \implies u_2 = (u_1, u_3) \\ \max_{u_3 \in U_3} J_1(u_1, u_2, u_3) \implies u_3 = (u_1, u_2) \end{array} \right\} \implies (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$$

## 2.1 Giochi Differenziali

Il modello di gioco che analizzeremo è formulato come **gioco differenziale**, cioè in cui il tempo è una variabile rilevante continua. Esso include gli elementi della forma strategica, e le seguenti caratteristiche:

- una variabile temporale  $t$  che assume valori in un intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , eventualmente illimitato  $[t_0, +\infty]$ ,
- una variabile di stato  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , che caratterizza lo stato del sistema dinamico in ogni istante del gioco,
- una variabile di controllo  $u_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$  per ogni giocatore  $i$ -esimo, che rappresenta le decisioni del giocatore in ogni istante,
- un insieme di equazioni del moto, cioè equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione temporale delle variabili di stato dipendente dalle funzioni di controllo e relative condizioni iniziali,

$$\dot{x}_j(t) = f_j(x(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t), t), \quad x_j(0) = x_j^0, \quad j = 1, \dots, n$$

Perciò il problema del giocatore  $i$ -esimo avrà la seguente forma:

$$\begin{array}{ll} \text{massimizza} & J_i = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho_i t} f_{0i}(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t) dt + e^{-\rho_i t_1} S_i(x(t_1)) \\ \text{soggetto a} & \dot{x}(t) = f(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t) \\ & x(t_0) = x^0 \\ & u_i(t) \in U_i \end{array} \quad (2.1)$$

per ogni  $i \in \mathcal{I}$  e con  $e^{-\rho_i t}$  fattore di attualizzazione, che serve per attualizzare il payoff.

In un gioco differenziale abbiamo due particolari strutture informative: *open-loop* e *feedback*.

- **open-loop**: ciascun giocatore conosce lo stato iniziale  $x^0$  e osserva il tempo  $t$ ; una strategia open-loop per il giocatore  $i \in \mathcal{I}$  è una funzione  $\phi_i : \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ , tale che il valore del controllo al tempo  $t$  sia dato da  $u_i(t) = \phi_i(x^0, t)$ ,



- **feedback (o Markoviana)**: ciascun giocatore osserva la posizione del sistema  $(t, x(t))$ ; una strategia feedback per il giocatore  $i \in \mathcal{I}$  è una funzione  $\phi_i : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$  tale che il valore del controllo al tempo  $t$  sia dato da  $u_i(t) = \phi_i(t, x(t))$ .

Perciò si ha un controllo open-loop quando il suo valore al tempo  $t$  dipende esclusivamente dall'istante e dallo stato iniziale. Si ha invece un controllo feedback quando il suo valore al tempo  $t$  dipende esclusivamente dalla posizione del sistema  $(t, x(t))$  in quell'istante.

**Definizione 2** (Equilibrio di Nash Markoviano). La  $N$ -upla di strategie  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  delle funzioni  $\phi_i : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , è chiamata Equilibrio di Nash Markoviano se, per ogni  $i$ , esiste un controllo ottimo  $u_i(t)$  del problema ed è dato dalla strategia Markoviana  $u_i(t) = \phi_i(t, x(t))$ .

**Definizione 3** (Equilibrio di Nash open-loop). La  $N$ -upla di strategie  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  delle funzioni  $\phi_i : \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , è chiamata Equilibrio di Nash open-loop se, per ogni  $i$ , esiste un controllo ottimo  $u_i(t)$  del problema ed è dato dalla strategia open-loop  $u_i(t) = \phi_i(x^0, t)$ .

La ricerca degli equilibri di Nash di un gioco differenziale con  $N$  giocatori si riconduce alla risoluzione di  $N$  problemi di controllo ottimo, perché la strategia di ciascun giocatore dipende dalle strategie degli altri, come si può osservare nel problema 2.1

Ora determineremo solo l'Equilibrio di Nash Markoviano perché lo utilizzeremo per determinare la soluzione del problema del prossimo capitolo.

**Teorema 1.** Data la  $N$ -upla di strategie  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  delle funzioni  $\phi_i : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $i \in \mathcal{I}$  valgono le seguenti ipotesi:

- esiste una funzione assolutamente continua  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \phi_1(t, x(t)), \dots, \phi_N(t, x(t)), t) \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

- per ogni  $i \in \mathcal{I}$  esiste una funzione differenziale con continuità  $v_i : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa le equazioni di Hamilton-Jacobi-Bellman

$$- \rho v_i(t, x) + \frac{\partial v_i(t, x)}{\partial t} + \max_{\alpha \in U} \left\{ \frac{\partial v_i(t, x)}{\partial x} f(x, \alpha, t) + f_{0i}(x, \alpha, t) \right\} = 0 \quad (2.2)$$

per ogni  $(t, x(t)) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ ,

- se  $t_1 < \infty$   $v_i(t_1, x) = S_i(x)$  per ogni  $i \in \mathcal{I}$  e per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ ,
- se  $t_1 = \infty$  allora per ogni  $i \in \mathcal{I}$  ogni  $v_i$  è una funzione limitata e  $\rho_i > 0$  oppure  $v_i$  è limitata da sotto,  $\rho_i > 0$  e  $\limsup_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho_i t} v_i(t, x(t)) \leq 0$

Denoto  $\Phi_i(t, x)$  l'insieme di tutte le  $u_i \in U_i$  che massimizza il contenuto tra parentesi dell'equazione di HJB 2.2. Se  $\phi_i(t, x(t)) \in \Phi_i(t, x(t))$  per ogni  $i \in \mathcal{I}$  e per ogni  $t \in [t_0, t_1]$  allora  $(\phi_1, \dots, \phi_N)$  è un equilibrio di Nash markoviano.

## 2.2 Principio di Ottimalità di Bellmann

Al fine di determinare l'equilibrio del gioco posso utilizzare il Principio di Ottimalità di Bellmann, descritto in *Ottimizzazione dinamica: modelli economici e gestionali* di Buratto e Viscolani [1]

Una politica ottima ha la proprietà che qualsiasi siano lo stato iniziale e finale, le decisioni rimanenti devono costruirla basandosi sullo stato risultante dalla prima decisione. In questo caso considereremo

il seguente problema di controllo ottimo con orizzonte infinito includendo un fattore di attualizzazione:  
 $\forall t \in [t_0, +\infty]$  e  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{massimizza } & J(u) = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\rho s} f_0(y(s), u(s), s) ds \\ \text{soggetto a } & \dot{y}(s) = f(y(s), u(s), s) \\ & y(t_0) = x^0 \\ & u(s) \in U \end{aligned}$$

chiamato  $\mathcal{P}_{t,x}$ . In particolare il problema iniziale  $\mathcal{P}_{t_0, x^0}$  appartiene all'insieme  $\{\mathcal{P}_{t,x} | t \in [t_0, \infty], x \in \mathbb{R}\}$ .

**Definizione 4.** Se il problema  $\mathcal{P}_{t,x}$  ammette soluzione (esiste una funzione di controllo che permette di massimizzare il funzionale obiettivo), definiamo come  $V(t, x)$  la funzione valore del problema, ovvero

$$V(t, x) = \max_{u(\cdot) \in U} \left\{ \int_t^{+\infty} e^{-\rho s} f_0(y(s), u(s), s) ds \right\}$$

dove  $y(s; u)$  indica l'unica soluzione al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = f(y(s), u(s), s) \\ y(t) = x \end{cases}$$

associata al controllo  $u(\cdot)$ . Definiamo inoltre la funzione valore riferita al tempo corrente

$$v(t, x) = e^{\rho t} V(t, x)$$

**Teorema 2** (Principio di Ottimalità). *Consideriamo il problema di controllo ottimo con orizzonte infinito; supponiamo che la funzione valore riferita al tempo corrente  $v(t, x)$  sia una funzione differenziale con continuità che soddisfa all'equazione alle derivate parziali*

$$-\rho v(t, x) + \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \max_{\alpha \in U} \left\{ \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} f(x, \alpha, t) + f_0(x, \alpha, t) \right\} = 0 \quad (2.3)$$

con  $(t, x) \in [t_0, +\infty] \times \mathbb{R}$ , e soddisfa inoltre a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} [v(t, x(t)) - v(t, x^*(t))] \geq 0$$

per ogni  $x(t)$  ammissibile. Supponiamo inoltre che esista una funzione di controllo feedback continua

$$\phi(\cdot, \cdot) : [t_0, +\infty] \times \mathbb{R} \rightarrow U$$

tale che

$$-\rho v(t, x) + \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} f(x, \phi(t, x), t) + f_0(x, \phi(t, x), t) \right\} = 0$$

allora una strategia ottima per il problema di programmazione dinamica è

$$u^*(t) = \phi(t, y(t; u^*)).$$

## Capitolo 3

# Strategie della catena di distribuzione closed-loop

In questo capitolo, come preannunciato nel capitolo 1, analizzeremo la catena di distribuzione closed-loop e il rapporto tra i suoi componenti attraverso due scenari.

### 3.1 Struttura del modello

Consideriamo una catena di distribuzione closed-loop costituita da un produttore (M), da un rivenditore (R) e da una piattaforma dei servizi Internet ISP (P).

Il produttore vende all'ingrosso il prodotto al rivenditore, che a sua volta lo vende al consumatore da cui raccoglie i prodotti usati per riciclarne una parte; invece l'ISP è responsabile del fornire i servizi Big Data al rivenditore. Nei servizi Big Data sono inclusi l'analisi del comportamento degli utenti e i servizi pubblicitari il cui scopo è migliorare il valore del marchio del prodotto, pubblicare le politiche del riciclo dei prodotti usati, spiegare il regolamento sul recupero e il trattamento dei prodotti usati.

Il produttore determina il *prezzo di vendita all'ingrosso*  $w(t)$  e il *livello di investimenti marketing e pubblicitari*  $F_M(t)$ . Il rivenditore controlla il *valore del rimborso*  $f$  dell'ISP per le informazioni sui consumatori e sul prodotto, il *prezzo di vendita*  $p(t)$  e le *iniziative pubblicitarie*  $F_R(t)$ . Infine, l'ISP controlla le *iniziative marketing*  $F_P(t)$  per mezzo dei Big Data.

Gli autori del lavoro oggetto di questa tesi utilizzano un modello dinamico che descrive la funzione *goodwill*, ovvero la variabile introdotta da Nerlove ed Arrow in [4] per descrivere uno stock che riassume gli effetti delle pubblicità passate e correnti sui i consumatori, una sorta di immagine del prodotto. Il goodwill è influenzato dagli investimenti del produttore (pubblicità e marketing), da quelli del rivenditore (iniziative pubblicitarie) e dal marketing dell' ISP per mezzo dei Big Data.

La dinamica del goodwill viene descritta dalla seguente equazione differenziale, con condizione iniziale

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = \gamma_M F_M(t) + \gamma_R F_R(t) + \gamma_P F_P(t) - \delta G(t) \\ G(0) = G_0 \geq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

dove  $\delta > 0$  denota il tasso di decadimento del goodwill, mentre  $G_0$  è il suo valore iniziale. Siano  $\gamma_M$  l'efficacia degli investimenti marketing-pubblicitari del produttore,  $\gamma_R$  l'efficacia delle iniziative pubblicitarie del rivenditore e  $\gamma_P$  l'efficacia delle iniziative marketing dell'ISP per mezzo dei Big Data. Dalla letteratura di evince che debba valere:  $\gamma_P > \gamma_M > 0$  e  $\gamma_P > \gamma_R > 0$  per descrivere l'influenza maggiore dell'ISP sul goodwill rispetto al produttore e al rivenditore.

L'obiettivo del problema in questione prevede la massimizzazione dei profitti di produttore, rivenditore e ISP, derivanti dalla vendita del prodotto e dal valore residuo a seguito della rigenerazione del prodotto stesso dopo la restituzione da parte del consumatore.

A tal proposito si deve formulare la funzione domanda del consumatore. Nel modello considerato la *funzione domanda del consumatore* è influenzata dal prezzo di vendita del rivenditore e dal goodwill del

prodotto nel seguente modo

$$D(t) = \theta\sqrt{G(t)} - \beta p(t)$$

dove  $\theta > 0$  è l'efficacia del goodwill e  $\beta > 0$  è la sensibilità della domanda rispetto al prezzo.

Oltre a considerare l'effetto del goodwill sulla domanda, gli autori osservano che il goodwill stesso, da una parte può aumentare la volontà del consumatore ad acquistare il prodotto, la cui azienda adotta delle politiche di riciclo; d'altra parte può influenzare la volontà del consumatore a ritornare il prodotto usato. Pertanto il tasso di ritorno dei prodotti usati è definito in relazione al goodwill

$$\tau = \eta\sqrt{G(t)}$$

dove  $\eta > 0$  è un parametro di aggiustamento che garantisce che  $0 \leq \tau \leq 1$ .

Nel modello si assume che il produttore costringa il rivenditore a raccogliere i prodotti usati e che il reddito tra produttore e rivenditore sia coordinato da un Contratto di Co-partecipazione delle Entrate Inverse (RRSC) perciò  $M$  ed  $R$  modificano le loro strategie secondo l'accordo. Il profitto dovuto al rientro dei prodotti usati sia per il produttore che per il rivenditore è

$$\begin{aligned} pr_M(t) &= \Delta\phi\tau - c_m\phi\tau \\ pr_R(t) &= \Delta(1 - \phi)\tau - c_r\phi\tau = (\Delta - (\Delta + c_r)\phi)\tau \end{aligned}$$

dove

- $\Delta > 0$  è il valore residuo unitario del ritorno dei prodotti usati che ottiene il produttore;
- $0 \leq \phi \leq 1$  la percentuale del valore residuo dovuto al riciclo dei prodotti che il produttore condivide col rivenditore;
- $c_r \geq 0$  è il costo unitario del rivenditore per il riciclo dei prodotti usati dai consumatori;
- $c_m > 0$  è il costo del produttore per l'attuazione del contratto come risultato di un aumento dei costi amministrativi.

Questi ultimi due costi possono essere interpretati come costi associati a ogni trasferimento di prodotto dal produttore al rivenditore che appartiene alla categoria dei costi di contratto. Nelle due formule dei profitti si osserva che

- i valori  $\Delta\phi\tau$  e  $\Delta(1 - \phi)\tau$  corrispondono al guadagno dovuto alla rifabbricazione del prodotto,
- i valori  $c_m\phi\tau$  e  $c_r\phi\tau$  corrispondono ai costi di contratto in proporzione al valore residuo dovuto al riciclo.

Quindi i profitti unitari del produttore e del rivenditore risultano essere

$$\begin{aligned} \pi_M &= w(t) + (\Delta - c_m)\phi\tau \\ \pi_R &= p(t) - w(t) + (\Delta - (\Delta + c_r)\phi)\tau \end{aligned}$$

Osservo che al variare di  $\phi$  ho considerazioni differenti, infatti:

- se  $\phi = 1$ , il produttore guadagna tutto il profitto extra dalla rifabbricazione; inoltre le strategie del rivenditore non sono influenzate dalla politica del riciclo a causa della mancanza di agevolazioni nel contratto.
- se  $0 \leq \phi < 1$ , da una parte il rivenditore deve regolare i suoi sforzi pubblicitari, e l'ISP le tariffe del servizio tenendo conto del guadagno e l'equità del RRSC. Dall'altra parte, l'ISP determina le sue strategie basandosi sul rimborso che riceve.

Invece il profitto unitario dell'ISP è dato da

$$\pi_P = fF_P(t)$$

dove  $f$  è il valore del rimborso dell'ISP a carico del rivenditore. Si osserva che, se l'ISP vuole ottenere una maggior retribuzione, dovrà investire più sforzi marketing per promuovere il marchio.

Infine le funzioni costo degli investimenti del produttore, del rivenditore e dell'ISP rispettivamente, hanno la seguente forma quadratica convessa nell'investimento

$$C_i(F_i(t)) = \frac{1}{2}\mu_i(F_i(t))^2, \quad i \in \{M, R, P\}$$

dove per ciascun  $i \in \{M, R, P\}$ , il coefficiente  $\mu_i > 0$  è il coefficiente del costo di investimento.

Analizzando l'equazione del moto del goodwill 3.1, si potrà osservare che esso sarà sempre positivo sia quando si investe poco che quando si investe di più. Infatti

- se i tre giocatori inizialmente investono poco, quindi le  $F_i(t) \approx 0$ , si può dire che il goodwill avrà una forma esponenziale  $G(t) = e^{-\delta t} > 0$  che per  $t \rightarrow +\infty$  tenderà a zero dall'alto, ma non lo sarà mai.
- se i tre giocatori iniziano a investire maggiormente, il goodwill avrà la seguente forma esponenziale  $G(t) = e^A$  con  $A = \frac{\delta\gamma_M F_M^2(t)}{2} + \frac{\delta\gamma_R F_R^2(t)}{2} + \frac{\delta\gamma_P F_P^2(t)}{2} > 0$ , che tende all'infinito per  $t \rightarrow +\infty$ . Infatti molti rivenditori non solo investono nei loro sforzi pubblicitari, ma collaborano con l'ISP per espandere la domanda dei consumatori, analogamente per i produttori. Più si investe più il goodwill aumenta.

Assumendo quindi un orizzonte infinito, le funzioni oggetto dei tre giocatori sono:

$$\Pi_M = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left\{ \left[ w(t) + (\Delta - c_m)\phi\eta\sqrt{G(t)} \right] \left[ \theta\sqrt{G(t)} - \beta p(t) \right] - \frac{1}{2}\mu_M F_M(t)^2 \right\} dt \quad (3.2)$$

$$\Pi_R = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left\{ \left[ p(t) - w(t) + (\Delta - (\Delta + c_r)\phi)\eta\sqrt{G(t)} \right] \left[ \theta\sqrt{G(t)} - \beta p(t) \right] - \frac{1}{2}\mu_R F_R(t)^2 - fF_P(t) \right\} dt \quad (3.3)$$

$$\Pi_P = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left[ fF_P(t) - \frac{1}{2}\mu_P F_P(t)^2 \right] dt \quad (3.4)$$

dove  $0 \leq \rho \leq 1$  è il tasso di interesse.

*Osservazione 1.* Per garantire che il prezzo all'ingrosso e quello di vendita abbiano valore positivo,  $\theta$  deve soddisfare la seguente relazione:  $\theta > \beta\eta\phi(2\Delta + c_r)$ . Questa condizione indica che la sensibilità del consumatore sul goodwill è più alta di quella sul prezzo.

*Osservazione 2.* La relazione tra il valore residuo dei prodotti ritornati e il costo del riciclo deve soddisfare le seguenti relazioni:  $\Delta \geq \frac{\phi c_r}{1-\phi}$  e  $\Delta - c_m > 0$ . Ciò vuole garantire l'efficienza del contratto RRSC.

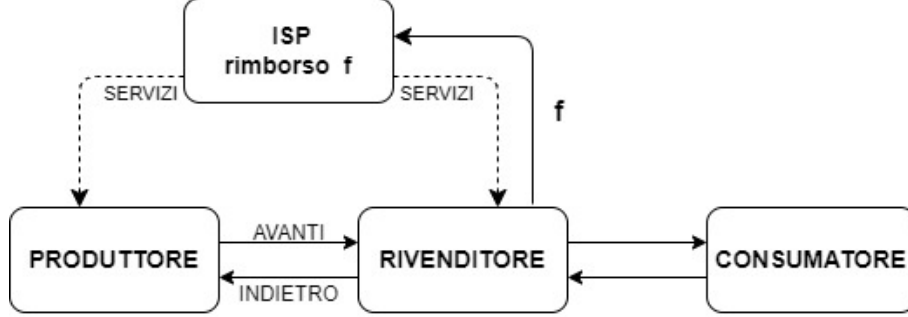
## 3.2 Analisi del modello

Il rivenditore è responsabile di raccogliere i prodotti usati e vedere quelli nuovi e rifabbricati. Esso dovrà utilizzare i servizi forniti dall'ISP e rimborsarlo delle spese attuate per ottenere informazioni riguardo i consumatori e la reputazione dei prodotti. Si considerano, quindi, due scenari in un modello dinamico nella teoria dei giochi differenziali:

- D: L'ISP si fa carico di tutti i costi degli investimenti in marketing;
- S: Il produttore partecipa alle spese marketing dell'ISP.

### 3.2.1 Scenario D

In questo scenario, il rivenditore è responsabile di raccogliere i prodotti usati e vendere quelli nuovi e rifabbricati. Esso dovrà rimborsare l' ISP delle spese attuate per ottenere informazioni riguardo i consumatori e la reputazione dei prodotti.



Le funzioni obiettivo del gioco differenziale date dalle relazioni dinamiche 3.2, 3.3 e 3.4, sono:

$$J_M^D = \max_{w^D, F_M^D} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left\{ \left[ w(t) + (\Delta - c_m)\phi\eta\sqrt{G(t)} \right] \left[ \theta\sqrt{G(t)} - \beta p(t) \right] - \frac{1}{2}\mu_M F_M(t)^2 \right\} dt$$

$$J_R^D = \max_{p^D, F_R^D, f} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left\{ \left[ p(t) - w(t) + (\Delta - (\Delta + c_r)\phi)\eta\sqrt{G(t)} \right] \left[ \theta\sqrt{G(t)} - \beta p(t) \right] - \frac{1}{2}\mu_R F_R(t)^2 - f F_P(t) \right\} dt$$

$$J_P^D = \max_{F_P^D} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left[ f F_P(t) - \frac{1}{2}\mu_P F_P(t)^2 \right] dt$$

**Proposizione 1.** L'obiettivo dei tre giocatori è quello di massimizzare il proprio profitto. Le strategie di equilibrio ottimo del produttore, del rivenditore e dell' ISP nello scenario D sono date da:

$$F_M^{D*} = \frac{1}{8} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_M}{\beta(\delta + \rho)\mu_M}$$

$$F_R^{D*} = \frac{1}{16} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_R}{\beta(\delta + \rho)\mu_R}$$

$$F_P^{D*} = \frac{1}{32} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_P}{\beta(\delta + \rho)\mu_P}$$

$$w^{D*}(G) = \frac{1}{2} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(2\Delta + c_r - c_m)))\sqrt{G^D}}{\beta}$$

$$p^{D*}(G) = \frac{1}{4} \frac{(3\theta - \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))\sqrt{G^D}}{\beta}$$

$$f^{D*} = \frac{1}{32} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_P}{\beta(\delta + \rho)}$$

I valori presenti dei tre giocatori sono:

$$V_M^D(G) = A_1^D G^D + A_2^D$$

$$V_R^D(G) = B_1^D G^D + B_2^D$$

$$V_P^{D*} = \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4 \gamma_P^2}{2048\rho\beta^2(\delta + \rho)^2 \mu_P}$$

con  $A_i^D$  e  $B_i^D$ ,  $i = 1, 2$ , coefficienti lineari.

*Dimostrazione.* Per risolvere il problema, dobbiamo trovare le equazioni di Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), derivandole dalla formula di base 2.3. Denotate  $V_M^D$ ,  $V_R^D$  e  $V_P^D$  le funzioni valore dei giocatori, trovo le seguenti derivate parziali

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_M^D(t, G)}{\partial t} &= V_M^D e^{-\rho t}(-\rho) \quad , \quad \frac{\partial V_M^D(t, G)}{\partial G} = V_M^{D'} e^{-\rho t} \\ \frac{\partial V_R^D(t, G)}{\partial t} &= V_R^D e^{-\rho t}(-\rho) \quad , \quad \frac{\partial V_R^D(t, G)}{\partial G} = V_R^{D'} e^{-\rho t} \\ \frac{\partial V_P^D(t, G)}{\partial t} &= V_P^D e^{-\rho t}(-\rho) \quad , \quad \frac{\partial V_P^D(t, G)}{\partial G} = 0\end{aligned}$$

Per trovare le equazioni di HJB dei tre giocatori, considero  $w^D$  il valore all'ingrosso sotto lo scenario D e  $p^D$  il prezzo di vendita sotto lo scenario D.

L'equazione del produttore è:

$$\rho V_M^D = \max_{w^D, F_M^D} \left\{ V_M^{D'} [\gamma_M F_M^D + \gamma_R F_R^D + \gamma_P F_P^D - \delta G^D] + \left[ w^D + (\Delta - c_m) \phi \eta \sqrt{G^D} \right] \left[ \theta \sqrt{G^D} - \beta p^D \right] - \frac{1}{2} \mu_M F_M^{D2} \right\} \quad (3.5)$$

L'equazione del rivenditore è:

$$\begin{aligned}\rho V_R^D &= \max_{p^D, f, F_R^D} \left\{ V_R^{D'} \left[ \gamma_M F_M^D + \gamma_R F_R^D + \gamma_P F_P^D - \delta G^D \right] + \left[ p^D - w^D + (\Delta - (\Delta + c_r) \phi) \eta \sqrt{G^D} \right] \left[ \theta \sqrt{G^D} - \beta p^D \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \mu_R F_R^{D2} - f^D F_P^D \right\}\end{aligned} \quad (3.6)$$

L'equazione dell'ISP è:

$$\rho V_P^D = \max_{F_P^D} \left[ f^D F_P^D - \frac{1}{2} \mu_P F_P^{D2} \right] \quad (3.7)$$

Si inizia cercando la soluzione ottima del produttore che sarà dipendente da quelle degli altri due giocatori. Analogamente per gli altri due. Risolviamo il seguente sistema, dove all'interno delle parentesi graffe vi è il contenuto da massimizzare dell'equazione 3.5, da cui ottengo che

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial F_M^D} \left\{ \dots \right\} = -\mu_M F_M^D + V_M^{D'} \gamma_M = 0 \\ \frac{\partial}{\partial w^D} \left\{ \dots \right\} = \theta \sqrt{G^D} - \beta p^D = 0 \end{array} \right. \\ \implies \left\{ \begin{array}{l} F_M^D = \frac{V_M^{D'} \gamma_M}{\mu_M} \\ p^D = \frac{\theta \sqrt{G^D}}{\beta} \end{array} \right.\end{aligned}$$

La miglior risposta del rivenditore è

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial F_R^D} \left\{ \dots \right\} = -\mu_R F_R^D + V_R^{D'} \gamma_R = 0 \\ \frac{\partial}{\partial f^D} \left\{ \dots \right\} = -F_P^D = 0 \\ \frac{\partial}{\partial p^D} \left\{ \dots \right\} = \beta w^D - \beta (\Delta - (\Delta + c_r) \phi) \eta \sqrt{G^D} + \theta \sqrt{G^D} - 2\beta p^D = 0 \end{array} \right. \\ \implies \left\{ \begin{array}{l} F_R^D = \frac{\gamma_R V_R^{D'}}{\mu_R} \\ F_P^D = 0 \\ p^D = \frac{w^D}{2} - \frac{(\Delta - (\Delta + c_r) \phi) \eta \sqrt{G^D}}{2} + \frac{\theta \sqrt{G^D}}{2\beta} \end{array} \right.\end{aligned}$$

La miglior risposta dell'ISP è

$$\frac{\partial}{\partial F_P^D} [\dots] = f^D - \mu_P F_P^D = 0 \implies F_P^D = \frac{f^D}{\mu_P}$$

Siccome le tre soluzioni trovate appartengono ad uno stesso sistema, poiché ogni giocatore fa le sue strategie in base anche a quelle degli altri due, posso sostituire nelle equazioni di HJB alcuni risultati trovati per poi derivare nuovamente rispetto determinati valori. Inizialmente posso sostituire all'interno dell'equazione 3.5 il valore di  $p^D$  trovato nella soluzione del rivenditore, per poi derivare nuovamente rispetto a  $w^D$ , al fine di ottenere la miglior risposta del produttore.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w^D} \left\{ \dots \right\} &= \theta \sqrt{G^D} - \beta w^D + \frac{\beta(\Delta - (\Delta + c_r)\phi)\eta\sqrt{G^D}}{2} - \frac{\theta\sqrt{G^D}}{2} - \frac{\beta\eta\phi(\Delta - c_m)\sqrt{G^D}}{2} = 0 \\ \implies w^{D*} &= \frac{1}{2} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(2\Delta + c_r - c_m)))\sqrt{G^D}}{\beta} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sostituendo la  $w^{D*}$  trovata nel valore  $p^D$  ottengo il valore ottimo del prezzo di vendita  $p^{D*}$

$$p^{D*} = \frac{1}{4} \frac{(3\theta - \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))\sqrt{G^D}}{\beta} \quad (3.9)$$

Analogamente sostituisco la soluzione dell'ISP nell'equazione 3.6 per poi derivare nuovamente rispetto a  $f^D$  per ottenere il valore del rimborso  $f^{D*}$  e, a sua volta, il valore degli investimenti dell'ISP  $F_P^D$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial f^D} \left\{ \dots \right\} &= \frac{V_R^{D'} \gamma_P}{\mu_P} - \frac{2f^D}{\mu_P} = 0 \implies f^D = \frac{V_R^{D'} \gamma_P}{2} \\ \implies F_P^D &= \frac{V_R^{D'} \gamma_P}{2\mu_P} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ora bisogna trovare le soluzioni ottime degli investimenti date dalle seguenti equazioni

$$F_M^D = \frac{V_M^{D'} \gamma_M}{\mu_M} \quad (3.11)$$

$$F_R^D = \frac{V_R^{D'} \gamma_R}{\mu_R} \quad (3.12)$$

$$F_P^D = \frac{V_R^{D'} \gamma_P}{2\mu_P} \quad (3.13)$$

Inserendo le soluzioni ottime 3.8, 3.9, 3.10 e le soluzioni degli investimenti (3.11, 3.12, 3.13) nelle equazioni di HJB (3.5, 3.6, 3.7) troviamo

$$\begin{aligned} \rho V_M^D &= G^D \left[ \frac{\theta\beta\eta(\phi(c_m - c_r - 2\Delta) - \Delta) + (\Delta - c_m)\phi\eta\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{2\beta} - \frac{V_M^{D'} \delta}{4} \right] \\ &\quad + V_M^{D'} \left[ \frac{\gamma_M^2 V_M^{D'}}{2\mu_M} + \frac{\gamma_R^2 V_R^{D'}}{\mu_R} + \frac{\gamma_P^2 V_R^{D'}}{2\mu_P} \right] \\ \rho V_R^D &= G^D \left[ \frac{\theta - \beta\eta(\phi(c_m + c_r) - \Delta)}{4\beta} - \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{4} - V_R^{D'} \delta \right] \\ &\quad + V_R^{D'} \left[ \frac{\gamma_M^2 V_M^{D'}}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2 V_R^{D'}}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2 V_R^{D'}}{4\mu_P} \right] \\ \rho V_P^D &= \frac{1}{8} \frac{(V_R^{D'})^2 \gamma_P^2}{\mu_P} \end{aligned} \quad (3.14)$$



La funzione valore del produttore e del rivenditore, possono essere scritte come

$$V_M^D(G) = A_1^D G^D + A_2^D \quad \text{e} \quad V_M^{D'} = A_1^D \quad (3.15)$$

$$V_R^D(G) = B_1^D G^D + B_2^D \quad \text{e} \quad V_R^{D'} = B_1^D \quad (3.16)$$

dove i valori  $A_i^D$  e  $B_i^D$ , con  $i = 1, 2$ , sono parametri costanti. Invece si deriva la funzione valore dell'ISP dall'equazione di HJB 3.14

$$V_P^D = \frac{(B_1^D)^2 \gamma_P^2}{8\rho\mu_P} \quad (3.17)$$

Per dimostrare la funzione valore del produttore, trovo i coefficienti  $A_i^D$ ,  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \rho A_1^D G^D + \rho A_2^D &= G^D \left[ \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r))}{2\beta} \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{4} - A_1^D \delta \right] + \\ &+ A_1^D \left[ \frac{\gamma_M^2 A_1^D}{2\mu_M} + \frac{\gamma_R^2 B_1^D}{\mu_R} + \frac{\gamma_P^2 B_1^D}{2\mu_P} \right] \\ \Rightarrow \begin{cases} \rho A_1^D &= \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r))}{2\beta} \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{4} - A_1^D \delta \\ \rho A_2^D &= A_1^D \left[ \frac{\gamma_M^2 A_1^D}{2\mu_M} + \frac{\gamma_R^2 B_1^D}{\mu_R} + \frac{\gamma_P^2 B_1^D}{2\mu_P} \right] \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} A_1^D &= \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{8\beta(\delta + \rho)} \\ A_2^D &= \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2}{8\rho\beta(\delta + \rho)} \left[ \frac{\gamma_M^2 (\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2 B_1^D}{\mu_R} + \frac{\gamma_P^2 B_1^D}{2\mu_P} \right] \end{cases} \end{aligned}$$

Per dimostrare la funzione valore del rivenditore, invece, trovo i coefficienti  $B_i^D$ ,  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \rho B_1^D G^D + \rho B_2^D &= G^S \left[ \frac{\theta - \beta\eta(\phi(c_m + c_r) - \Delta)}{4\beta} \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{4} - B_1^D \delta \right] + \\ &+ B_1^D \left[ \frac{\gamma_M^2 A_1^D}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2 B_1^D}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2 B_1^D}{4\mu_P} \right] \\ \Rightarrow \begin{cases} \rho B_1^D &= \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r))}{4\beta} \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{4} - B_1^D \delta \\ \rho B_2^D &= B_1^D \left[ \frac{\gamma_M^2 A_1^D}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2 B_1^D}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2 B_1^D}{4\mu_P} \right] \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} B_1^D &= \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{16\beta(\delta + \rho)} \\ B_2^D &= \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4}{256\rho\beta^2(\delta + \rho)^2} \left[ \frac{\gamma_R^2}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{4\mu_P} \right] + \frac{A_1^D \gamma_M^2 (\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{\mu_M 16\rho\beta(\delta + \rho)} \end{cases} \end{aligned}$$

Osservo che  $A_1^D = 2B_1^D$ , allora i valori sono

$$\begin{cases} A_1^D &= \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{64\beta(\delta + \rho)} \\ A_2^D &= \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4}{128\rho\beta^2(\delta + \rho)^2} \left[ \frac{\gamma_M^2}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2}{\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{2\mu_P} \right] \\ B_1^D &= \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{16\beta(\delta + \rho)} \\ B_2^S &= \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4}{256\rho\beta^2(\delta + \rho)^2} \left[ \frac{2\gamma_M^2}{\mu_M} \frac{\gamma_R^2}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{4\mu_P} \right] \end{cases}$$

Sostituendo i coefficienti trovati in 3.15, 3.16 e 3.17 trovo le seguenti funzioni valore dei tre giocatori:

$$\begin{aligned} V_M^D(G) &= G^D \left[ \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{64\beta(\delta + \rho)} \right] + \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4}{128\rho\beta^2(\delta + \rho)^2} \left[ \frac{\gamma_M^2}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2}{\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{2\mu_P} \right] \\ V_R^D(G) &= G^D \left[ \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{16\beta(\delta + \rho)} \right] + \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4}{256\rho\beta^2(\delta + \rho)^2} \left[ \frac{2\gamma_M^2}{\mu_M} \frac{\gamma_R^2}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{4\mu_P} \right] \\ V_P^D(G) &= \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^4 \gamma_P^2}{2048\rho\beta^2(\delta + \rho)^2 \mu_P} \end{aligned}$$

Infine, ricapitolando, la soluzione ottima del produttore è:

$$\begin{cases} w^{D*} = \frac{1}{2} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(2\Delta + c_r - c_m)))\sqrt{G^D}}{\beta} \\ F_M^{D*} = \frac{\gamma_M A_1^D}{\mu_M} = \frac{1}{8} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_M}{\beta(\delta + \rho)\mu_M} \end{cases}$$

La soluzione ottima del rivenditore è:

$$\begin{cases} p^{D*} = \frac{1}{4} \frac{(3\theta - \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))\sqrt{G^D}}{\beta} \\ f^{D*} = \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_P}{32\beta(\delta + \rho)} \\ F_R^{D*} = \frac{\gamma_R B_1^D}{\mu_R} = \frac{1}{16} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_R}{\beta(\delta + \rho)\mu_R} \end{cases}$$

La soluzione ottima dell'ISP è:

$$F_P^{D*} = \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_P}{32\beta(\delta + \rho)\mu_P}$$

□

**Proposizione 2.** *La traiettoria ottima del goodwill in regime stazionario è*

$$G_s^D = \frac{1}{8} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_M^2}{\mu_M \beta \delta (\delta + \rho)} + \frac{1}{16} \frac{\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{\mu_R \beta \delta (\delta + \rho)} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_R^2}{\mu_R \beta \delta (\delta + \rho)} + \frac{1}{32} \frac{\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{\mu_P \beta \delta (\delta + \rho)} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_P^2}{\mu_P \beta \delta (\delta + \rho)} > 0$$

*La traiettoria ottima del goodwill dipendente dal tempo risulta essere*

$$G^{D*}(t) = G_s^D + (G_0 - G_s^D)e^{-\delta t} > 0 \quad (3.18)$$

*Il prezzo all'ingrosso  $w_\infty^D$  e il prezzo di vendita  $p_\infty^D$  in regime stazionario sono:*

$$w_\infty^D = \frac{1}{2} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(2\Delta + c_r - c_m)))\sqrt{G_s^D}}{\beta}, \quad p_\infty^D = \frac{1}{4} \frac{(3\theta - \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))\sqrt{G_s^D}}{\beta}$$

*Infine, le funzioni valore ottime dei profitti sono:*

$$V_M^{D*} = A_1^D G_s^D + A_2^D, \quad V_R^{D*} = B_1^D G_s^D + B_2^D$$

*Dimostrazione.* Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = \gamma_M F_M(t) + \gamma_R F_R(t) + \gamma_P F_P(t) - \delta G(t) \\ G(0) = G_0 \geq 0 \end{cases}$$

Per trovare la traiettoria ottima del goodwill sostituiamo all'interno del problema le soluzioni ottime  $F_M^{D*}$ ,  $F_R^{D*}$  e  $F_P^{D*}$ , trovate nella Proposizione 1

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = \gamma_M F_M^{D*} + \gamma_R F_R^{D*} + \gamma_P F_P^{D*} - \delta G(t) \\ G(0) = G_0 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione ottima è

$$\begin{aligned} G^{D*}(t) &= e^{-t\delta} \left[ G_0 + \left( \frac{\gamma_M F_M^{D*}}{\delta} + \frac{\gamma_R F_R^{D*}}{\delta} + \frac{\gamma_P F_P^{D*}}{\delta} \right) (e^{t\delta} - 1) \right] \\ &= \frac{\gamma_M F_M^{D*}}{\delta} + \frac{\gamma_R F_R^{D*}}{\delta} + \frac{\gamma_P F_P^{D*}}{\delta} + \left[ G_0 - \left( \frac{\gamma_M F_M^{D*}}{\delta} + \frac{\gamma_R F_R^{D*}}{\delta} + \frac{\gamma_P F_P^{D*}}{\delta} \right) \right] e^{-t\delta} \\ &= G_s^D + \left[ G_0 - G_s^D \right] e^{-t\delta} \end{aligned} \quad (3.19)$$

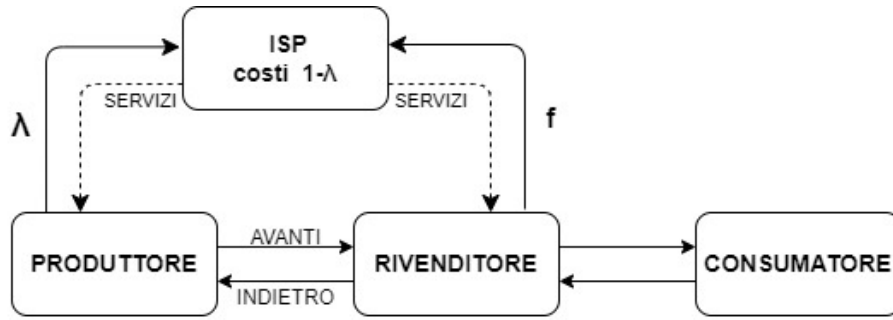
con  $G_s^D$  chiamata traiettoria ottima del goodwill in regime stazionario.

Infine sostituendo  $G_s^D$  in 3.8 e 3.9 otteniamo i prezzi in regime stazionario, e in 3.15 e 3.16 otteniamo le funzioni valore ottime stazionarie.  $\square$

Queste due proposizioni danno le soluzioni per l'equilibrio del modello nello scenario D, e si può notare che il goodwill ha un effetto positivo nel prezzo all'ingrosso, nel prezzo di vendita e infine anche nei profitti.

### 3.2.2 Scenario S

In questo scenario, rispetto quello precedente, il produttore partecipa alle spese degli investimenti in marketing dell'ISP. Assumiamo che  $\lambda$  sia la quota di partecipazione degli investimenti marketing Big Data e  $0 < \lambda < 1$ .



Le funzioni obiettivo del gioco differenziale sono espresse dalle seguenti espressioni:

$$J_M^S = \max_{w^S, F_M^S} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left\{ \left[ w(t) + (\Delta - c_m)\phi\eta\sqrt{G(t)} \right] \left[ \theta\sqrt{G(t)} - \beta p(t) \right] - \frac{1}{2}\mu_M F_M(t)^2 - \lambda \frac{1}{2}\mu_P F_P(t)^2 \right\} dt$$

$$J_R^S = \max_{p^S, F_R^S, f^S} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left\{ \left[ p(t) - w(t) + (\Delta - (\Delta + c_r)\phi)\eta\sqrt{G(t)} \right] \left[ \theta\sqrt{G(t)} - \beta p(t) \right] - \frac{1}{2}\mu_R F_R(t)^2 - f^S F_P(t) \right\} dt$$

$$J_P^S = \max_{F_P^S} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left[ f^S F_P(t) - (1 - \lambda)\frac{1}{2}\mu_P F_P(t)^2 \right] dt$$

**Proposizione 3.** *L'obiettivo dei tre giocatori è quello di massimizzare il proprio profitto. Le strategie di*

equilibrio ottimo del produttore, del rivenditore e dell' ISP nello scenario S sono date da:

$$\begin{aligned}
F_M^{S*} &= \frac{1}{8} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_M}{\beta(\delta + \rho)\mu_M} \\
F_R^{S*} &= \frac{1}{16} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_R}{\beta(\delta + \rho)\mu_R} \\
F_P^{S*} &= \frac{1}{32} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_P}{\beta(\delta + \rho)\mu_P(1 - \lambda)} \\
w^{S*}(G) &= \frac{1}{2} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(2\Delta + c_r - c_m)))\sqrt{G^D}}{\beta} \\
p^{S*}(G) &= \frac{1}{4} \frac{(3\theta - \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))\sqrt{G^D}}{\beta} \\
f^{S*} &= \frac{1}{32} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_P}{\beta(\delta + \rho)}
\end{aligned}$$

I valori presenti dei tre giocatori sono:

$$\begin{aligned}
V_M^S(G) &= A_1^S G^S + A_2^S \\
V_R^S(G) &= B_1^S G^S + B_2^S \\
V_P^{S*} &= \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4 \gamma_P^2}{2048\rho\beta^2(\delta + \rho)^2\mu_P(1 - \lambda)}
\end{aligned}$$

con  $A_i^S$  e  $B_i^S$ ,  $i = 1, 2$ , coefficienti lineari.

Osservazione 3. La formula sovrastante della  $V_P^S$  è quella corretta rispetto a quella seguente

$$V_P^{S*} = \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4 \gamma_P^2}{2048\rho\beta^2(\delta + \rho)^2\mu_P(1 - \lambda)^2}$$

definita dagli autori dell'articolo preso in esame [6]. Ciò viene dimostrato nella seguente dimostrazione.

*Dimostrazione.* Analogamente alla Dimostrazione della Proposizione 1, denoto  $V_M^S$ ,  $V_R^S$  e  $V_P^S$  le funzioni valore dei giocatori, trovo le seguenti derivate parziali

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_M^S(t, G)}{\partial t} &= V_M^S e^{-\rho t}(-\rho) \quad , \quad \frac{\partial V_M^S(t, G)}{\partial G} = V_M^{S'} e^{-\rho t} \\
\frac{\partial V_R^S(t, G)}{\partial t} &= V_R^S e^{-\rho t}(-\rho) \quad , \quad \frac{\partial V_R^S(t, G)}{\partial G} = V_R^{S'} e^{-\rho t} \\
\frac{\partial V_P^S(t, G)}{\partial t} &= V_P^S e^{-\rho t}(-\rho) \quad , \quad \frac{\partial V_P^S(t, G)}{\partial G} = 0
\end{aligned}$$

Per trovare le equazioni di HJB dei tre giocatori, considero  $w^S$  il valore all'ingrosso sotto lo scenario S e  $p^S$  il prezzo di vendita sotto lo scenario S.

L'equazione del produttore è:

$$\begin{aligned}
\rho V_M^S = \max_{w^S, F_M^S} \left\{ V_M^{S'} [\gamma_M F_M^S + \gamma_R F_R^S + \gamma_P F_P^S - \delta G^S] + \left[ w^S + (\Delta - c_m)\phi\eta\sqrt{G^S} \right] \left[ \theta\sqrt{G^S} - \beta p^S \right] \right. \\
\left. - \frac{1}{2}\mu_M F_M^{S^2} - \lambda \frac{1}{2}\mu_P F_P^{S^2} \right\} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

L'equazione del rivenditore è:

$$\rho V_R^S = \max_{p^S, f, F_R^S} \left\{ V_R^{S'} \left[ \gamma_M F_M^S + \gamma_R F_R^S + \gamma_P F_P^S - \delta G^S \right] + \left[ p^S - w^S + (\Delta - (\Delta + c_r)\phi)\eta\sqrt{G^S} \right] \left[ \theta\sqrt{G^S} - \beta p^S \right] - \frac{1}{2}\mu_R F_R^{S^2} - f^S F_P^S \right\} \quad (3.21)$$

L'equazione dell'ISP è:

$$\rho V_P^S = \max_{F_P^S} \left[ f^S F_P^S - (1 - \lambda)\frac{1}{2}\mu_P F_P^{S^2} \right] \quad (3.22)$$

Risolviamo il problema in modo analogo allo Scenario D nella Proposizione 1

La soluzione del produttore è:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial F_M^S} \left\{ \dots \right\} = -\mu_M F_M^S + V_M^{S'} \gamma_M = 0 \\ \frac{\partial}{\partial w^S} \left\{ \dots \right\} = \theta\sqrt{G^S} - \beta p^S = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_M^S = \frac{V_M^{S'} \gamma_M}{\mu_M} \\ p^S = \frac{\theta\sqrt{G^S}}{\beta} \end{cases}$$

La soluzione del rivenditore è

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial F_R^S} \left\{ \dots \right\} = -\mu_R F_R^S + V_R^{S'} \gamma_R = 0 \\ \frac{\partial}{\partial f^S} \left\{ \dots \right\} = -F_P^S = 0 \\ \frac{\partial}{\partial p^S} \left\{ \dots \right\} = \beta w^S - \beta(\Delta - (\Delta + c_r)\phi)\eta\sqrt{G^S} + \theta\sqrt{G^S} - 2\beta p^S = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_R^S = \frac{\gamma_R V_R^{S'}}{\mu_R} \\ F_P^S = 0 \\ p^S = \frac{w^S}{2} - \frac{(\Delta - (\Delta + c_r)\phi)\eta\sqrt{G^S}}{2} + \frac{\theta\sqrt{G^S}}{2\beta} \end{cases}$$

La soluzione dell'ISP è

$$\frac{\partial}{\partial F_P^S} \left[ \dots \right] = f^S - (1 - \lambda)\mu_P F_P^S = 0 \Rightarrow F_P^S = \frac{f^S}{\mu_P(1 - \lambda)}$$

Siccome le tre soluzioni trovate appartengono ad uno stesso sistema, poiché ogni giocatore fa le sue strategie in base anche a quelle degli altri due, posso sostituire nelle equazioni di HJB alcuni risultati trovati per poi derivare nuovamente rispetto determinati valori. Inizialmente posso sostituire all'interno dell'equazione 3.20 il valore di  $p^S$  trovato nella soluzione del rivenditore, per poi derivare nuovamente rispetto a  $w^S$ , al fine di ottenere la seguente soluzione ottima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w^S} \left\{ \dots \right\} &= \theta\sqrt{G^S} - \beta w^S + \frac{\beta(\Delta - (\Delta + c_r)\phi)\eta\sqrt{G^S}}{2} - \frac{\theta\sqrt{G^S}}{2} - \frac{\beta\eta\phi(\Delta - c_m)\sqrt{G^S}}{2} = 0 \\ \Rightarrow w^{S*} &= \frac{1}{2} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(2\Delta + c_r - c_m)))\sqrt{G^S}}{\beta} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sostituendo la  $w^{S*}$  trovata nel valore  $p^S$  ottengo il valore ottimo del prezzo di vendita  $p^{S*}$

$$p^{S*} = \frac{1}{4} \frac{(3\theta - \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))\sqrt{G^S}}{\beta} \quad (3.24)$$

Analogamente sostituisco la soluzione dell'ISP nell'equazione 3.21 per poi derivare nuovamente rispetto a  $f^S$  per ottenere il valore del rimborso  $f^S$  e, a sua volta, il valore degli investimenti dell'ISP  $F_P^S$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial f^S} \left\{ \dots \right\} &= \frac{V_R^{S'} \gamma_P}{\mu_P(1-\lambda)} - \frac{2f^S}{\mu_P(1-\lambda)} = 0 \quad \implies \quad f^S = \frac{V_R^{S'} \gamma_P}{2} \\ \implies F_P^S &= \frac{V_R^{S'} \gamma_P}{2\mu_P(1-\lambda)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ora bisogna trovare le soluzioni ottime degli investimenti date dalle seguenti equazioni

$$F_M^S = \frac{V_M^{S'} \gamma_M}{\mu_M} \quad (3.26)$$

$$F_R^S = \frac{V_R^{S'} \gamma_R}{\mu_R} \quad (3.27)$$

$$F_P^S = \frac{V_R^{S'} \gamma_P}{2\mu_P(1-\lambda)} \quad (3.28)$$

Inserendo le soluzioni ottime 3.23, 3.24, 3.25 e le soluzioni degli investimenti (3.26, 3.27, 3.28) nelle equazioni di HJB (3.20, 3.21, 3.22) troviamo

$$\begin{aligned} \rho V_M^S &= G^S \left[ \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r))}{2\beta} \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{4} - V_M^{S'} \delta \right] \\ &\quad + V_M^{S'} \left[ \frac{\gamma_M^2 V_M^{S'}}{2\mu_M} + \frac{\gamma_R^2 V_R^{S'}}{\mu_R} + \frac{\gamma_P^2 V_R^{S'}}{2\mu_P(1-\lambda)} \right] - \lambda \frac{V_R^{S'^2} \gamma_P^2}{8\mu_P(1-\lambda)^2} \\ \rho V_R^S &= G^S \left[ \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{4\beta} \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{4} - V_R^{S'} \delta \right] \\ &\quad + V_R^{S'} \left[ \frac{\gamma_M^2 V_M^{S'}}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2 V_R^{S'}}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2 V_R^{S'}}{4(1-\lambda)\mu_P} \right] \\ \rho V_P^S &= \frac{1}{8} \frac{(V_R^{S'})^2 \gamma_P^2}{\mu_P(1-\lambda)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

La funzione valore del produttore e del rivenditore, possono essere scritte come

$$V_M^S(G) = A_1^S G^S + A_2^S \quad \text{e} \quad V_M^{S'} = A_1^S \quad (3.30)$$

$$V_R^S(G) = B_1^S G^S + B_2^S \quad \text{e} \quad V_R^{S'} = B_1^S \quad (3.31)$$

dove i valori  $A_i^S$  e  $B_i^S$ , con  $i = 1, 2$ , sono parametri costanti. Invece si deriva la funzione valore dell'ISP dall'equazione di HJB 3.29

$$V_P^S = \frac{(B_1^S)^2 \gamma_P^2}{8\rho\mu_P(1-\lambda)} \quad (3.32)$$

Per dimostrare la funzione valore del produttore, trovo i coefficienti  $A_i^S$ ,  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \rho A_1^S G^S + \rho A_2^S &= G^S \left[ \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r))}{2\beta} \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{4} - A_1^S \delta \right] + \\ &\quad + A_1^S \left[ \frac{\gamma_M^2 A_1^S}{2\mu_M} + \frac{\gamma_R^2 B_1^S}{\mu_R} + \frac{\gamma_P^2 B_1^S}{2(1-\lambda)\mu_P} \right] - \frac{\lambda \gamma_P^2 B_1^{S^2}}{8(1-\lambda)^2 \mu_P} \\ \implies \begin{cases} \rho A_1^S &= \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r))}{2\beta} \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{4} - A_1^S \delta \\ \rho A_2^S &= A_1^S \left[ \frac{\gamma_M^2 A_1^S}{2\mu_M} + \frac{\gamma_R^2 B_1^S}{\mu_R} + \frac{\gamma_P^2 B_1^S}{2(1-\lambda)\mu_P} \right] - \frac{\lambda \gamma_P^2 B_1^{S^2}}{8(1-\lambda)^2 \mu_P} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1^S = \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{8\beta(\delta + \rho)} \\ A_2^S = \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2}{8\rho\beta(\delta + \rho)} \left[ \frac{\gamma_M^2 (\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2 B_1^S}{\mu_R} + \frac{\gamma_P^2 B_1^S}{2(1-\lambda)\mu_P} \right] - \frac{\lambda\gamma_P^2 B_1^{S^2}}{8\rho(1-\lambda)^2\mu_P} \end{cases}$$

Per dimostrare la funzione valore del rivenditore, invece, trovo i coefficienti  $B_i^S$ ,  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \rho B_1^S G^S + \rho B_2^S &= G^S \left[ \frac{\theta - \beta\eta(\phi(c_m + c_r) - \Delta)}{4\beta} \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{4} - B_1^S \delta \right] + \\ &+ B_1^S \left[ \frac{\gamma_M^2 A_1^S}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2 B_1^S}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2 B_1^S}{4(1-\lambda)\mu_P} \right] \\ &\Rightarrow \begin{cases} \rho B_1^S = \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r))}{4\beta} \frac{\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))}{4} - B_1^S \delta \\ \rho B_2^S = B_1^S \left[ \frac{\gamma_M^2 A_1^S}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2 B_1^S}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2 B_1^S}{4(1-\lambda)\mu_P} \right] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} B_1^S = \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{16\beta(\delta + \rho)} \\ B_2^S = \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4}{256\rho\beta^2(\delta + \rho)^2} \left[ \frac{\gamma_R^2}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{4(1-\lambda)\mu_P} \right] + \frac{A_1^S \gamma_M^2 (\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{\mu_M 16\rho\beta(\delta + \rho)} \end{cases} \end{aligned}$$

Osservo che  $A_1^S = 2B_1^S$ , allora i valori sono

$$\begin{cases} A_1^S = \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{64\beta(\delta + \rho)} \\ A_2^S = \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4}{128\rho\beta^2(\delta + \rho)^2} \left[ \frac{\gamma_M^2}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2}{\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{2(1-\lambda)\mu_P} - \frac{\lambda\gamma_P^2}{16\rho(1-\lambda)^2\mu_P} \right] \\ B_1^S = \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{16\beta(\delta + \rho)} \\ B_2^S = \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4}{256\rho\beta^2(\delta + \rho)^2} \left[ \frac{\gamma_R^2}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{4(1-\lambda)\mu_P} + \frac{2\gamma_M^2}{\mu_M} \right] \end{cases}$$

Sostituendo i coefficienti trovati in 3.30, 3.31 e 3.32 trovo le seguenti funzioni valore dei tre giocatori:

$$\begin{aligned} V_M^S(G) &= G^S \left[ \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{64\beta(\delta + \rho)} \right] + \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4}{128\rho\beta^2(\delta + \rho)^2} \left[ \frac{\gamma_M^2}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2}{\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{2(1-\lambda)\mu_P} - \frac{\lambda\gamma_P^2}{16\rho(1-\lambda)^2\mu_P} \right] \\ V_R^S(G) &= G^S \left[ \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^2}{16\beta(\delta + \rho)} \right] + \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4}{256\rho\beta^2(\delta + \rho)^2} \left[ \frac{\gamma_R^2}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{4(1-\lambda)\mu_P} + \frac{2\gamma_M^2}{\mu_M} \right] \\ V_P^S(G) &= \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_m + c_r)))^4 \gamma_P^2}{2048\rho\beta^2(\delta + \rho)^2(1-\lambda)\mu_P} \end{aligned}$$

Infine, ricapitolando, la soluzione ottima del produttore è:

$$\begin{cases} w^{S*} = \frac{1}{2} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(2\Delta + c_r - c_m))) \sqrt{G^S}}{\beta} \\ F_M^{S*} = \frac{\gamma_M A_1^S}{\mu_M} = \frac{1}{8} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_M}{\beta(\delta + \rho)\mu_M} \end{cases}$$

La soluzione ottima del rivenditore è:

$$\begin{cases} p^{S*} = \frac{1}{4} \frac{(3\theta - \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m))) \sqrt{G^S}}{\beta} \\ f^{S*} = \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_P}{32\beta(\delta + \rho)} \\ F_R^{S*} = \frac{\gamma_R B_1^S}{\mu_R} = \frac{1}{16} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_R}{\beta(\delta + \rho)\mu_R} \end{cases}$$

La soluzione ottima dell'ISP è:

$$F_P^{S*} = \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_P}{32\beta(\delta + \rho)\mu_P(1-\lambda)}$$

□

**Proposizione 4.** La traiettoria ottima del goodwill in regime stazionario è calcolata dalla formula seguente

$$G_s^S = \frac{1}{8} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_M^2}{\mu_M \beta \delta (\delta + \rho)} + \frac{1}{16} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_R^2}{\mu_R \beta \delta (\delta + \rho)} + \frac{1}{32} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_P^2}{\mu_P \beta \delta (\delta + \rho)(1 - \lambda)} > 0$$

La traiettoria ottima del goodwill dipendente dal tempo è data dalla seguente:

$$G^{S*}(t) = G_s^S + (G_0 - G_s^S)e^{-\delta t} > 0 \quad (3.33)$$

Il prezzo all'ingrosso  $w_\infty^S$  e il prezzo di vendita  $p_\infty^S$  in regime stazionario sono:

$$w_\infty^S = \frac{1}{2} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(2\Delta + c_r - c_m)))\sqrt{G_s^S}}{\beta}, \quad p_\infty^S = \frac{1}{4} \frac{(3\theta - \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))\sqrt{G_s^S}}{\beta}$$

Infine, le funzioni valore ottime dei profitti sono:

$$V_M^{S*} = A_1^S G_s^S + A_2^S, \quad V_R^{S*} = B_1^S G_s^S + B_2^S$$

*Dimostrazione.* Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = \gamma_M F_M(t) + \gamma_R F_R(t) + \gamma_P F_P(t) - \delta G(t) \\ G(0) = G_0 \geq 0 \end{cases}$$

Siccome voglio trovare la traiettoria ottima del goodwill, sostituiamo all'interno del problema le soluzioni ottime  $F_M^{S*}$ ,  $F_R^{S*}$  e  $F_P^{S*}$ , trovate nella Proposizione 3

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = \gamma_M F_M^{S*} + \gamma_R F_R^{S*} + \gamma_P F_P^{S*} - \delta G(t) \\ G(0) = G_0 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione ottima è

$$\begin{aligned} G^{S*}(t) &= e^{-t\delta} \left[ G_0 + \left( \frac{\gamma_M F_M^{S*}}{\delta} + \frac{\gamma_R F_R^{S*}}{\delta} + \frac{\gamma_P F_P^{S*}}{\delta} \right) (e^{t\delta} - 1) \right] \\ &= \frac{\gamma_M F_M^{S*}}{\delta} + \frac{\gamma_R F_R^{S*}}{\delta} + \frac{\gamma_P F_P^{S*}}{\delta} + \left[ G_0 - \left( \frac{\gamma_M F_M^{S*}}{\delta} + \frac{\gamma_R F_R^{S*}}{\delta} + \frac{\gamma_P F_P^{S*}}{\delta} \right) \right] e^{-t\delta} \\ &= G_s^S + \left[ G_0 - G_s^S \right] e^{-t\delta} \end{aligned}$$

con  $G_s^S$  chiamata traiettoria ottima del goodwill in regime stazionario.

Infine sostituendo  $G_s^S$  in 3.23 e 3.24 otteniamo i prezzi in regime stazionario, e in 3.30 e 3.31 otteniamo le funzioni valore ottime stazionarie.  $\square$

**Corollario 1.** Nello scenario  $S$ , gli effetti ottimi del marketing dell'ISP  $F_P^{S*}$  crescono proporzionalmente al coefficiente di condivisione degli investimenti marketing  $\lambda$ . Infatti quest'ultima non ha effetti sugli investimenti del produttore  $F_M^{S*}$  o in quelli pubblicitari del rivenditore  $F_R^{S*}$ .

*Dimostrazione.* Ciò lo possiamo osservare derivando, rispetto a  $\lambda$ ,  $F_P^{S*}$ ,  $F_M^{S*}$  e  $F_R^{S*}$

$$\frac{\partial F_P^{S*}}{\partial \lambda} = \frac{(\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_P}{32\beta(\delta + \rho)(1 - \lambda)^2 \mu_P} > 0, \quad \frac{\partial F_M^{S*}}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial F_R^{S*}}{\partial \lambda} = 0$$

$\square$



## Capitolo 4

# Confronto tra scenari

Confrontando le strategie ottime dei due scenari otteniamo le seguenti relazioni

$$F_M^{D*} = F_M^{S*} \quad , \quad F_R^{D*} = F_R^{S*} \quad , \quad F_P^{D*} < F_P^{S*} \quad , \quad w_\infty^D < w_\infty^S \quad , \quad p_\infty^D < p_\infty^S \quad , \quad f^{S*} = f^{D*}$$

Ciò dimostra che il livello del goodwill nello scenario S è maggiore rispetto a quello dello scenario D ( $G_s^S > G_s^D$ ) perché cresce grazie agli effetti marketing dell'ISP ( $F_P^{D*} < F_P^{S*}$ ). Ciò porta da una parte a un indiretto aumento del prezzo all'ingrosso e del prezzo di vendita (dipendenti entrambi dal goodwill), invece dall'altra al non ottenere un guadagno extra per l'ISP dal rivenditore poiché è quest'ultimo a decidere il rimborso, che in entrambi gli scenari è uguale.

**Corollario 2.** *Sotto lo scenario S, le relazioni tra i valori ottimi stazionari dei tre giocatori e il parametro  $\lambda$  sono le seguenti:*

$$\mathbf{M} \begin{cases} \frac{\partial V_M^{S*}}{\partial \lambda} > 0, & \text{se } 0 < \lambda < \frac{7\delta+8\rho}{9\delta+8\rho} \\ \frac{\partial V_M^{S*}}{\partial \lambda} \leq 0, & \text{se } \frac{7\delta+8\rho}{9\delta+8\rho} \leq \lambda < 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{R} \quad \frac{\partial V_R^{S*}}{\partial \lambda} > 0, \text{ per ogni } 0 < \lambda < 1$$

$$\mathbf{P} \quad \frac{\partial V_P^{S*}}{\partial \lambda} > 0, \text{ per ogni } 0 < \lambda < 1$$

*Dimostrazione.* Calcolo  $\frac{\partial V_M^{S*}}{\partial \lambda} > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_M^{S*}}{\partial \lambda} &= A_1^S \frac{1}{32} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_P^2}{\mu_P \beta \delta (\delta + \rho) (1 - \lambda)^2} - \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4}{128(\delta + \rho)^2 \beta^2 \mu_M \mu_P \mu_R \rho} \frac{9\mu_R \mu_M \gamma_P^2}{16} \frac{(1 - \lambda) + 2(\lambda - \frac{8}{9})}{(1 - \lambda)^3} \\ &= \frac{1}{256} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4 \gamma_P^2}{\mu_P \beta^2 \delta (\delta + \rho)^2 (1 - \lambda)^2} - \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4}{256(\delta + \rho)^2 \beta^2 \mu_P \rho} \frac{9\gamma_P^2}{8} \frac{(1 - \lambda) + 2(\lambda - \frac{8}{9})}{(1 - \lambda)^3} \\ &= \frac{1}{256} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4 \gamma_P^2}{\mu_P \beta^2 (\delta + \rho)^2} \left[ \frac{1}{\delta(1 - \lambda)^2} - \frac{9}{8\rho} \frac{(1 - \lambda) + 2(\lambda - \frac{8}{9})}{(1 - \lambda)^3} \right] \end{aligned}$$

Devo dimostrare che il secondo fattore è maggiore di 0:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta(1 - \lambda)^2} - \frac{9}{8\rho} \frac{(1 - \lambda) + 2(\lambda - \frac{8}{9})}{(1 - \lambda)^3} &= \frac{8\rho(1 - \lambda) - 9\delta(1 - \lambda) - 18\delta(\lambda - \frac{8}{9})}{8\delta\rho(1 - \lambda)^3} > 0 \\ \implies 0 < \lambda < \frac{7\delta + 8\rho}{9\delta + 8\rho} \end{aligned}$$

Il secondo caso di M è analogo al primo, invece per R e P calcolo  $\frac{\partial V_R^{S*}}{\partial \lambda}$  e  $\frac{\partial V_P^{S*}}{\partial \lambda}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_R^{S*}}{\partial \lambda} &= B_1^S \frac{1}{32} \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^2 \gamma_P^2}{\mu_P \beta \delta (\delta + \rho) (1 - \lambda)^2} + \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4}{512(\delta + \rho)^2 \beta^2 \mu_M \mu_P \mu_R \rho} \frac{\mu_M \mu_R \gamma_P^2}{2(1 - \lambda)^2} > 0 \\ \frac{\partial V_P^{S*}}{\partial \lambda} &= \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4 \gamma_P^2}{1024\rho\beta^2(\delta + \rho)^2 \mu_P (1 - \lambda)^2} > 0 \end{aligned}$$

□

**Proposizione 5.** *Se confronto i due scenari rispetto i valori ottimi ottengo:*

$$\mathbf{M} \begin{cases} V_M^{D*} \geq V_M^{S*}, & \text{se } \frac{7\delta+8\rho}{8(\delta+\rho)} \leq \lambda < 1 \\ V_M^{D*} < V_M^{S*}, & \text{se } 0 < \lambda \leq \frac{7\delta+8\rho}{8(\delta+\rho)} \end{cases}$$

$$\mathbf{R} \quad V_R^{D*} < V_R^{S*} \text{ per ogni } 0 < \lambda < 1$$

$$\mathbf{P} \quad V_P^{D*} < V_P^{S*} \text{ per ogni } 0 < \lambda < 1.$$

*Dimostrazione.* Calcolo  $V_M^{D*} - V_M^{S*} \geq 0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{2A_1^2 \gamma_P^2}{\mu_P \delta} \left(1 - \frac{1}{1-\lambda}\right) + \frac{(\theta + \eta\beta(\Delta - \phi(c_r + c_m)))^4}{128(\delta + \rho)^2 \beta^2 \mu_M \mu_P \mu_R \rho} \frac{9}{16} \left(\lambda - \frac{8}{9}\right) \mu_R \mu_M \gamma_P^2 \geq 0 \\ \implies & \frac{2}{\delta} \left(1 - \frac{1}{1-\lambda}\right) + \frac{1}{2\rho} \frac{9}{16} \left(\lambda - \frac{8}{9}\right) \geq 0 \implies -\frac{2\lambda}{\delta(1-\lambda)} + \frac{9\lambda}{32\rho} - \frac{1}{4\rho} \geq 0 \\ \implies & \lambda \geq \frac{7\delta + 8\rho}{8(\delta + \rho)} \end{aligned}$$

La seconda parte di M la derivo dalla prima. Invece per i punti R e P calcolo  $V_R^{S*} - V_R^{D*} > 0$  e  $V_P^{S*} - V_P^{D*} > 0$ . Osservo che  $B_1^S = B_1^D = B_1$ , quindi

$$\begin{aligned} V_R^{S*} - V_R^{D*} &= B_1^2 \left( \frac{\gamma_P^2}{2\mu_P \delta(1-\lambda)} - \frac{\gamma_P^2}{2\mu_P \delta} \right) + \frac{B_1^2}{\rho} \left( \frac{\gamma_P^2}{4\mu_P(1-\lambda)} - \frac{\gamma_P^2}{4\mu_P} \right) > 0 \\ \implies & \frac{1}{\delta(1-\lambda)} - \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2\rho(1-\lambda)} - \frac{1}{2\rho} > 0 \implies \frac{\lambda(2\rho + \delta)}{2\rho\delta(1-\lambda)} > 0 \\ V_P^{S*} - V_P^{D*} &= \frac{B_1^2}{8\rho} \left( \frac{\gamma_P^2}{\mu_P(1-\lambda)} - \frac{\gamma_P^2}{\mu_P} \right) > 0 \implies \frac{\lambda}{1-\lambda} > 0 \end{aligned}$$

□

*Osservazione 4.* I risultati dei punti P del corollario 2 e della proposizione 5 sono stati dimostrati utilizzando la formula corretta di  $V_P^S$ .

Il Corollario 2 presenta la relazione dei profitti ottimali dei tre giocatori con il tasso di condivisione  $\lambda$ , invece la Proposizione 5 mostra che, confrontando i due scenari, esiste una soglia del tasso di condivisione tra il produttore e l'ISP, dipendente dal tasso di decadimento del goodwill  $\delta$  e dal tasso di interesse  $\rho$ . Inoltre, indipendentemente dal valore del tasso di condivisione dei costi, il profitto del rivenditore e dell'ISP nello scenario S è sempre superiore a quello dello scenario D (dimostrato nel secondo e terzo punto della proposizione 5).

Molti studi, come quelli di Zhou e Ye [7], hanno dimostrato che i contratti di condivisione dei costi possono realizzare un coordinamento della CLSC a due componenti. Sulla base delle loro ricerche, l'articolo di Xiang e Xu [6] discute lo scopo del tasso di condivisione dei costi in un CLSC a tre componenti.

Grazie al coinvolgimento di ISP e alle sue eccellenti capacità di marketing, il focus della cooperazione del produttore è passato dal rivenditore alla piattaforma, la quale riduce le difficoltà di marketing del rivenditore e spiega il comportamento "free-rider" del rivenditore, cioè un comportamento in cui esso beneficia delle risorse senza contribuire al loro pagamento.

**Corollario 3.** *Se confronto i due scenari rispetto i prezzi all'ingrosso  $w_\infty^S$  e  $w_\infty^D$ , dipendenti dai parametri  $\Delta$ ,  $c_r$  e  $\phi$ , ottengo:*

1.  $\frac{\partial w_\infty^D}{\partial \Delta} > 0$ ,  $\frac{\partial w_\infty^S}{\partial \Delta} > 0$  se  $\theta > \frac{\beta\eta(2\Delta\phi + \phi c_r - \phi^2(c_r + c_m) - \Delta)}{1-\phi}$
2.  $\frac{\partial w_\infty^D}{\partial \Delta} < 0$ ,  $\frac{\partial w_\infty^S}{\partial \Delta} < 0$  se  $\beta\eta\phi(2\Delta + c_r) < \theta < \frac{\beta\eta(2\Delta\phi + \phi c_r - \phi^2(c_r + c_m) - \Delta)}{1-\phi}$

$$3. \frac{\partial w_{\infty}^D}{\partial c_r} < 0, \frac{\partial w_{\infty}^S}{\partial c_r} < 0 \text{ per ogni } \theta > 0$$

$$4. \frac{\partial w_{\infty}^D}{\partial \phi} < 0, \frac{\partial w_{\infty}^S}{\partial \phi} < 0 \text{ per ogni } \theta > 0$$

*Dimostrazione.* Calcolo  $\frac{\partial w_{\infty}^D}{\partial \Delta}$  e  $\frac{\partial w_{\infty}^S}{\partial \Delta}$ . Siano A,B coefficienti positivi indipendenti da  $\Delta, c_r$  e  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\infty}^D}{\partial \Delta} &= 2A(1-\phi)\theta + 2A\beta\eta[\Delta - 2\Delta\phi - \phi c_r + \phi^2(c_r + c_m)] > 0 \\ \implies \theta &> \frac{\beta\eta[-\Delta + 2\Delta\phi + \phi c_r - \phi^2(c_r + c_m)]}{1-\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\infty}^S}{\partial \Delta} &= 2B(1-\phi)\theta + 2B\beta\eta[\Delta - 2\Delta\phi - \phi c_r + \phi^2(c_r + c_m)] > 0 \\ \implies \theta &> \frac{\beta\eta[-\Delta + 2\Delta\phi + \phi c_r - \phi^2(c_r + c_m)]}{1-\phi} \end{aligned}$$

Il punto 2 lo derivo da quello precedente e dall'Osservazione 1 della Sezione 2.1. Ora dimostro 3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\infty}^D}{\partial c_r} &= -2A\beta\eta\phi \left[ 2\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(2\Delta + c_r - c_m)) + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m)) \right] \\ &= -4A\beta\eta\phi \left[ \theta + \beta\eta(\Delta - \phi(\Delta + c_r)) \right] < 0 \\ \frac{\partial w_{\infty}^S}{\partial c_r} &= -2B\beta\eta\phi \left[ 2\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(2\Delta + c_r - c_m)) + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m)) \right] \\ &= -4B\beta\eta\phi \left[ \theta + \beta\eta(\Delta - \phi(\Delta + c_r)) \right] < 0 \end{aligned}$$

Infine dimostro il punto 4 in forza dell'Osservazione 2 della Sezione 2.1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\infty}^D}{\partial \phi} &= -A\beta\eta\phi \left\{ \left[ \theta + \beta\eta(\Delta - \phi(2\Delta + c_r - c_m)) \right] (c_r + c_m) + \left[ \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m)) \right] (\Delta + c_r + (\Delta - c_m)) \right\} \\ &= -A\beta\eta\phi \left\{ 2\beta\eta \left[ \Delta(\Delta + c_r) - \phi(c_r + c_m)(2\Delta + c_r - c_m) \right] + \theta(c_r + c_m) \right\} < 0 \\ \frac{\partial w_{\infty}^S}{\partial \phi} &= -B\beta\eta\phi \left\{ \left[ \theta + \beta\eta(\Delta - \phi(2\Delta + c_r - c_m)) \right] (c_r + c_m) + \left[ \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m)) \right] (\Delta + c_r + (\Delta - c_m)) \right\} \\ &= -B\beta\eta\phi \left\{ 2\beta\eta \left[ \Delta(\Delta + c_r) - \phi(c_r + c_m)(2\Delta + c_r - c_m) \right] + \theta(c_r + c_m) \right\} < 0 \end{aligned}$$

□

Il precedente corollario afferma che esiste un  $\bar{\theta} = \frac{\beta\eta(2\Delta\phi + \phi c_r - \phi^2(c_r + c_m) - \Delta)}{1-\phi}$  tale che, se  $\theta < \bar{\theta}$  allora il prezzo all'ingrosso decresce con  $\Delta$ , invece cresce se  $\theta > \bar{\theta}$ . E esso afferma che la bassa efficacia del goodwill comporta a un costo marginale maggiore rispetto le entrate marginali del produttore; i produttori quindi hanno bisogno di ridurre il prezzo all'ingrosso per aumentare la domanda e il tasso di rendimento incrementato dal valore residuo. Al contrario un'elevata efficacia del goodwill stimola l'aumento del prezzo all'ingrosso, seguito dall'aumento del valore residuo.

**Corollario 4.** Se confronto i due scenari rispetto  $p_{\infty}^D, p_{\infty}^S, f^D, f^S, F_i^D$  e  $F_i^S$  con  $i = M, R, P$ , dipendenti dai parametri  $\Delta, \phi$  e  $c_r$ , ottengo:

$$1. \frac{\partial p_{\infty}^D}{\partial \Delta} > 0, \frac{\partial p_{\infty}^S}{\partial \Delta} > 0, \frac{\partial p_{\infty}^D}{\partial \phi} < 0, \frac{\partial p_{\infty}^S}{\partial \phi} < 0, \frac{\partial p_{\infty}^D}{\partial c_r} < 0 \text{ e } \frac{\partial p_{\infty}^S}{\partial c_r} < 0$$

$$2. \frac{\partial f^D}{\partial \Delta} > 0, \frac{\partial f^D}{\partial \phi} < 0, \frac{\partial f^D}{\partial c_r} < 0 \text{ e } f^D = f^S$$

$$3. \frac{\partial F_i^D}{\partial \Delta} > 0, \frac{\partial F_i^S}{\partial \Delta} > 0, \frac{\partial F_i^D}{\partial \phi} < 0, \frac{\partial F_i^S}{\partial \phi} < 0, \frac{\partial F_i^D}{\partial c_r} < 0 \text{ e } \frac{\partial F_i^S}{\partial c_r} < 0$$

*Dimostrazione.* Siano  $A'$ ,  $B'$  coefficienti positivi indipendenti dai parametri  $\Delta$ ,  $\phi$  e  $c_r$ .

1.

$$\frac{\partial p_\infty^D}{\partial \Delta} = 2A' \beta \eta (\theta - \beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m))) > 0$$

$$\frac{\partial p_\infty^S}{\partial \Delta} = 2B' \beta \eta (\theta - \beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m))) > 0$$

$$\frac{\partial p_\infty^D}{\partial \phi} = A' \beta \eta (c_m + c_r) [2\beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m)) - 2\theta] < 0$$

$$\frac{\partial p_\infty^S}{\partial \phi} = B' \beta \eta (c_m + c_r) [2\beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m)) - 2\theta] < 0$$

$$\frac{\partial p_\infty^D}{\partial c_r} = A' \beta \eta 2 [\beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m)) - \theta] < 0$$

$$\frac{\partial p_\infty^S}{\partial c_r} = B' \beta \eta 2 [\beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m)) - \theta] < 0$$

2. Sappiamo che  $f^S = f^D = f$  perciò:

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta} = \frac{[\theta + \beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m))] \eta \gamma_P}{16(\delta + \rho)} > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = - \frac{[\theta + \beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m))] \eta (c_r + c_m) \gamma_P}{16(\delta + \rho)} < 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_r} = - \frac{[\theta + \beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m))] \eta \phi \gamma_P}{16(\delta + \rho)} > 0$$

3. Sappiamo che  $F_i^D = F_i^S = F_i$  con  $i = M, R$ , invece  $F_P^D = (1 - \lambda) F_P^S$  con  $1 - \lambda > 0$ , quindi se vale per  $F_P^S$ , allora vale anche per  $F_P^D$ :

$$\frac{\partial F_M}{\partial \Delta} = \frac{[\theta + \beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m))] \eta \gamma_M}{4(\delta + \rho) \mu_M} > 0$$

$$\frac{\partial F_R}{\partial \Delta} = \frac{[\theta + \beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m))] \eta \gamma_R}{8(\delta + \rho) \mu_R} > 0$$

$$\frac{\partial F_P^S}{\partial \Delta} = \frac{[\theta + \beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m))] \eta \gamma_P}{16(\delta + \rho)(1 - \lambda) \mu_P} > 0$$

$$\frac{\partial F_M}{\partial \phi} = - \frac{[\theta + \beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m))] (c_r + c_m) \eta \gamma_M}{4(\delta + \rho) \mu_M} < 0$$

$$\frac{\partial F_R}{\partial \phi} = - \frac{[\theta + \beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m))] (c_r + c_m) \eta \gamma_R}{8(\delta + \rho) \mu_R} < 0$$

$$\frac{\partial F_P^S}{\partial \phi} = - \frac{[\theta + \beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m))] (c_r + c_m) \eta \gamma_P}{16(\delta + \rho)(1 - \lambda) \mu_P} < 0$$

$$\frac{\partial F_M}{\partial c_r} = - \frac{[\theta + \beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m))] \phi \eta \gamma_M}{4(\delta + \rho) \mu_M} < 0$$

$$\frac{\partial F_R}{\partial c_r} = - \frac{[\theta + \beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m))] \phi \eta \gamma_R}{8(\delta + \rho) \mu_R} < 0$$

$$\frac{\partial F_P^S}{\partial c_r} = - \frac{[\theta + \beta \eta (\Delta - \phi(c_r + c_m))] \phi \eta \gamma_P}{16(\delta + \rho)(1 - \lambda) \mu_P} < 0$$

□

**Corollario 5.** *Se confronto i due scenari rispetto le traiettorie ottime del goodwill ottengo:*

$$\frac{\partial G_s^i}{\partial \Delta} > 0, \frac{\partial G_s^i}{\partial \phi} < 0, \frac{\partial G_s^i}{\partial c_r} < 0 \quad \text{con } i = D, S$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_s^M}{\partial \Delta} &= \frac{[\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))]\eta}{4\delta(\delta + \rho)} \left[ \frac{\gamma_M^2}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{4\mu_P} \right] > 0 \\ \frac{\partial G_s^S}{\partial \Delta} &= \frac{[\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))]\eta}{4\delta(\delta + \rho)} \left[ \frac{\gamma_M^2}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{4(1-\lambda)\mu_P} \right] > 0 \\ \frac{\partial G_s^M}{\partial \phi} &= -\frac{[\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))](c_r + c_m)\eta}{4\delta(\delta + \rho)} \left[ \frac{\gamma_M^2}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{4\mu_P} \right] < 0 \\ \frac{\partial G_s^S}{\partial \phi} &= -\frac{[\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))](c_r + c_m)\eta}{4\delta(\delta + \rho)} \left[ \frac{\gamma_M^2}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{4(1-\lambda)\mu_P} \right] < 0 \\ \frac{\partial G_s^M}{\partial c_r} &= -\frac{[\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))]\phi\eta}{4\delta(\delta + \rho)} \left[ \frac{\gamma_M^2}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{4\mu_P} \right] < 0 \\ \frac{\partial G_s^S}{\partial c_r} &= -\frac{[\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))]\phi\eta}{4\delta(\delta + \rho)} \left[ \frac{\gamma_M^2}{\mu_M} + \frac{\gamma_R^2}{2\mu_R} + \frac{\gamma_P^2}{4(1-\lambda)\mu_P} \right] < 0 \end{aligned}$$

□

**Corollario 6.** *Se confronto i due scenari rispetto i valori ottimi dei tre giocatori ottengo:*

$$\mathbf{M} \quad \frac{\partial V_M^i}{\partial \Delta} > 0, \frac{\partial V_M^i}{\partial \phi} < 0, \frac{\partial V_M^i}{\partial c_r} < 0 \quad \text{con } i = D^*, S^*$$

$$\mathbf{R} \quad \frac{\partial V_R^i}{\partial \Delta} > 0, \frac{\partial V_R^i}{\partial \phi} < 0, \frac{\partial V_R^i}{\partial c_r} < 0 \quad \text{con } i = D^*, S^*$$

$$\mathbf{P} \quad \frac{\partial V_P^i}{\partial \Delta} > 0, \frac{\partial V_P^i}{\partial \phi} < 0, \frac{\partial V_P^i}{\partial c_r} < 0 \quad \text{con } i = D^*, S^*$$

*Dimostrazione.* Siano  $a, a', b, b'$  coefficienti positivi indipendenti da  $\Delta, \phi, c_r$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_M^{D*}}{\partial x} &= \frac{a[\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))]^3}{16(\delta + \rho)^2\beta^2} \cdot \begin{cases} \eta\beta > 0 & \text{se } x = \Delta \\ -\eta\beta(c_r + c_m) < 0 & \text{se } x = \phi \\ -\eta\beta\phi < 0 & \text{se } x = c_r \end{cases} \\ \frac{\partial V_M^{S*}}{\partial x} &= \frac{b[\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))]^3}{16(\delta + \rho)^2\beta^2} \cdot \begin{cases} \eta\beta > 0 & \text{se } x = \Delta \\ -\eta\beta(c_r + c_m) < 0 & \text{se } x = \phi \\ -\eta\beta\phi < 0 & \text{se } x = c_r \end{cases} \\ \frac{\partial V_R^{D*}}{\partial x} &= \frac{a'[\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))]^3}{128(\delta + \rho)^2\beta^2} \cdot \begin{cases} \eta\beta > 0 & \text{se } x = \Delta \\ -\eta\beta(c_r + c_m) < 0 & \text{se } x = \phi \\ -\eta\beta\phi < 0 & \text{se } x = c_r \end{cases} \\ \frac{\partial V_R^{S*}}{\partial x} &= \frac{b'[\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))]^3}{128(\delta + \rho)^2\beta^2} \cdot \begin{cases} \eta\beta > 0 & \text{se } x = \Delta \\ -\eta\beta(c_r + c_m) < 0 & \text{se } x = \phi \\ -\eta\beta\phi < 0 & \text{se } x = c_r \end{cases} \\ \frac{\partial V_P^{D*}}{\partial x} &= \frac{[\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))]^3\gamma_P^2}{512(\delta + \rho)^2\beta^2\rho\mu_P} \cdot \begin{cases} \eta\beta > 0 & \text{se } x = \Delta \\ -\eta\beta(c_r + c_m) < 0 & \text{se } x = \phi \\ -\eta\beta\phi < 0 & \text{se } x = c_r \end{cases} \\ \frac{\partial V_P^{S*}}{\partial x} &= \frac{[\theta + \beta\eta(\Delta - \phi(c_r + c_m))]^3\gamma_P^2}{512(\delta + \rho)^2\beta^2\rho(1 - \lambda)\mu_P} \cdot \begin{cases} \eta\beta > 0 & \text{se } x = \Delta \\ -\eta\beta(c_r + c_m) < 0 & \text{se } x = \phi \\ -\eta\beta\phi < 0 & \text{se } x = c_r \end{cases} \end{aligned}$$

□

Secondo i Corollari precedenti, il profitto di ogni giocatore e il livello del goodwill crescono con  $\Delta$ , mentre decrescono con  $\phi$  e  $c_r$ . Questi risultati implicano che un valore residuo elevato genera un grande investimento in ricerca e sviluppo, e nel marketing che aiuta a costruire il goodwill. Un incremento del livello di goodwill, della domanda e della rata di ritorno stimolano la crescita degli sforzi dei giocatori, ma allo stesso tempo riduce l'impatto negativo dei prezzi alti. Inoltre il produttore trasferisce tutto il valore residuo del riciclo dei prodotti al rivenditore, il quale ha un effetto positivo nella catena CLSC. Però, il costo di riciclo  $c_r$  ha un impatto negativo sulle strategie ottime, dimostrando che una bassa efficacia di riciclo crea barriere agli investimenti di sviluppo e marketing di tutti i giocatori e porta una riduzione del goodwill e del prezzo di vendita.

# Capitolo 5

## Conclusioni

### 5.1 Analisi sequenziale

In questa sezione analizzeremo concretamente l'impatto dei parametri chiave nel profitto totale della CLCS.

**Impatto del valore residuo  $\Delta$  del prodotto riciclato** Dai corollari 4, 5 e 6 si deduce che, indipendentemente dagli scenari analizzati, il profitto ottimo totale (somma dei profitti ottimi dei tre agenti coinvolti nella catena distributiva) cresce al variare del valore residuo. Infatti tutti i giocatori sono motivati, dagli alti valori residui, a investire di più negli sforzi marketing e pubblicitari (corollario 3), che implicano un alto livello di goodwill. Questo comporta una grande espansione della domanda e un alto tasso di ritorno dei prodotti usati, grazie all'alto livello di goodwill che contribuisce ad un elevato profitto della CLCS.

**Impatto della percentuale del valore residuo dovuta al riciclo  $\phi$**  In entrambi gli scenari osserviamo che il valore ottimo decresce al variare di  $\phi$ . Quando  $\phi = 0$ , il produttore non guadagna dalla rifabbricazione e ciò stimola il rivenditore e l'ISP a investire di più negli sforzi marketing e pubblicitari per aumentare il livello del goodwill. Questa strategia si traduce in un aumento della domanda dei consumatori e in un alto tasso di ritorno dei prodotti usati migliorando il livello del goodwill e una massimizzazione del profitto totale.

**Impatto della quota di partecipazione  $\lambda$  e dell'efficacia delle azioni marketing per mezzo dei Big Data  $\gamma_P$**  Sia  $\Delta V = V_T^{S*} - V_T^{D*}$  la differenza tra i valori residui totali nei due scenari. Esistono due soglie  $\bar{\lambda}_1$  (dal corollario 2) e  $\bar{\lambda}_2$  (dalla proposizione 5): quando  $\lambda < \bar{\lambda}_1$  i valori ottimi totali dello scenario S sono più alti di quelli dello scenario D, e quindi  $\Delta V$  cresce con  $\lambda$  e  $\gamma_P$ , invece quando  $\lambda > \bar{\lambda}_1$  decresce con  $\lambda$  e  $\gamma_P$ . Analogamente quando  $\lambda > \bar{\lambda}_2$  i valori totali ottimi dello scenario D sono più alti di quelli dello scenario S e  $\Delta V < 0$ . Il risultato indica che esiste una quota di partecipazione che massimizza il profitto totale della CLSC e, inoltre, tutti i suoi membri beneficiano di un'alta efficienza del marketing dei Big Data, qualunque sia lo scenario.

**Analisi del profitto totale** Dall'analisi delle funzioni valore ottime si dimostra che il profitto totale nello scenario S è maggiore di quello dello scenario D e ciò implica che il produttore, condividendo le spese degli investimenti marketing con l'ISP, può stimolarlo a investire di più in essi, ottenendo così un aumento dei profitti totali della catena di distribuzione (proposizione 5).

### 5.2 Riassunto conclusioni

Ogni industria è diventata consapevole del fatto che l'ISP, che vanta la tecnologia Big Data, può aiutare le aziende a migliorare la loro efficienza e raggiungere i loro scopi. In questo sistema CLSC, le modalità di operare e fare marketing sono cambiate grazie al coinvolgimento dell'ISP, che aiutano il produttore e il rivenditore con nuove tecnologie e sforzi marketing. Il modello dinamico del goodwill può raggiungere due

obiettivi: il primo incrementare la domanda del consumatore come strumento di marketing; il secondo incentivare il riciclo come strumento operativo. Si sono confrontate le soluzioni ottime nei due scenari e discussi gli impatti dei parametri chiave nelle soluzioni ottime nell'ambiente dei Big Data. I risultati ottenuti confermano che la partecipazione dell'ISP rende complicate le decisioni dei membri della catena di distribuzione. Si può osservare infatti che il problema dal punto di vista di un gioco differenziale, presenta una differenza notevole rispetto ai problemi classici, cioè la presenza del terzo giocatore (l'ISP), poiché principalmente si analizzano problemi con due giocatori in cui ognuno prende decisioni considerando quelle dell'altro.

Riassumendo si è dimostrato che :

1. un alto livello di goodwill ha un impatto positivo nei costi di produzione e di riciclo. I membri della catena di distribuzione a circuito chiuso traggono più profitto e raggiungono un alto livello di goodwill sotto certe condizioni, per esempio un alto valore residuo dalla rifabbricazione, un'alta percentuale di guadagno per il rivenditore dal valore residuo dei prodotti riciclati, e un basso costo di riciclo;
2. quando l'efficacia del goodwill è più bassa di una certa soglia, il prezzo all'ingrosso cresce al variare del valore residuo dei prodotti riciclati. Decresce invece al variare del valore residuo quando l'efficacia è più alta;
3. lo scenario S è preferibile allo scenario D in termini del livello del goodwill nello stato stazionario, prezzo all'ingrosso, del prezzo di vendita e degli effetti delle azioni di marketing dell'ISP per mezzo dei Big Data. Per quanto riguarda il livello degli sforzi per gli investimenti di marketing e pubblicitari, essi sono i medesimi in tutti e due gli scenari;
4. l'efficienza dell'ISP nel marketing Big Data ha un effetto positivo sul goodwill in entrambi gli scenari, infatti sia la domanda del produttore sia il tasso di ritorno dei prodotti dipendono dal goodwill.



# Bibliografia

- [1] Alessandra Buratto, Luca Grosset, and Bruno Viscolani. *Ottimizzazione dinamica: modelli economici e gestionali*. Libreria Progetto, 2013.
- [2] Engelbert J Dockner, Steffen Jorgensen, Ngo Van Long, and Gerhard Sorger. *Differential games in economics and management science*. Cambridge University Press, 2000.
- [3] Zongsheng Huang, Jiajia Nie, and Sang-Bing Tsai. Dynamic collection strategy and coordination of a remanufacturing closed-loop supply chain under uncertainty. *Sustainability*, 9:683–701, 2017.
- [4] Marc Nerlove and Kenneth J Arrow. Optimal advertising policy under dynamic conditions. *Economica*, pages 129–142, 1962.
- [5] Scarpa. Nuova vita alle calzature usate, 2023.
- [6] Zehua Xiang and Minli Xu. Dynamic cooperation strategies of the closed-loop supply chain involving the internet service platform. *Journal of Cleaner Production*, 220:1180–1193, 2019.
- [7] Yanju Zhou and Xin Ye. Differential game model of joint emission reduction strategies and contract design in a dual-channel supply chain. *Journal of Cleaner Production*, 190:592–607, 2018.