



# **UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

**Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”**

**Corso di Laurea in Fisica**

**Tesi di Laurea**

**Vortici quantizzati nei superfluidi bosonici tramite**

**l’equazione di Gross-Pitaevskii**

**Relatore**

**Prof. Luca Salasnich**

**Laureando**

**Jacopo Tugulu**

**Anno Accademico 2018/2019**

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>La GPE</b>	<b>4</b>
2.1	L'equazione di Hartree . . . . .	4
2.2	L'equazione di Gross-Pitaevskii . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Vortici quantizzati</b>	<b>6</b>
3.1	I vortici nei superfluidi . . . . .	6
3.2	La soluzione vorticosa della GPE . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Vortici con potenziale armonico</b>	<b>11</b>
4.1	Approssimazione di Thomas-Fermi . . . . .	13
4.2	Approssimazione con gaussiana . . . . .	15
4.3	Confronto tra le due approssimazioni . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>20</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Il punto di partenza per la trattazione degli argomenti esposti in questo documento è da ricercare nello studio dei condensati bosonici (BEC) sviluppatosi nel secolo scorso. La meccanica statistica quantistica ha permesso la comprensione di fenomeni macroscopici quali la superconduttività e la superfluidità che hanno proprietà che sono conseguenza di effetti presenti al di sotto di una temperatura critica. Dopo decenni di sole ipotesi teoriche, la superfluidità fu osservata da Kapitza nel 1938 [1] che con questo termine descrisse la proprietà di totale assenza di viscosità riscontrata nell'elio-4 a basse temperature. In seguito London [2] suggerì di interpretare il fenomeno introducendo il concetto di funzione d'onda macroscopica. Landau [3] e Tisza [4] svilupparono quest'idea e ciò li condusse a una teoria sul moto dell'elio superfluido. Arrivati a questo punto furono studiati diversi fenomeni legati alla superfluidità come i vortici quantizzati, predetti da Onsager [5] e Feynman [6] negli anni 50. Onsager intuì come i vortici quantizzati descrivessero la circolazione dei superfluidi e ipotizzò che le loro eccitazioni fossero responsabili delle transizioni di fase.

A partire dagli anni 80 furono compiuti passi avanti negli apparati sperimentali per ottenere condensati di Bose-Einstein grazie a tecniche di raffreddamento e contenimento di atomi in trappole magnetiche con le quali fu possibile raggiungere i valori necessari di temperature e di densità. Ciò permise lo studio di vapori atomici gassosi con comportamento superfluido. La realizzazione di gas diluiti di atomi alcalini (rubidio e sodio) valse a Cornell, Wieman e Ketterle il premio Nobel nel 2001[7]. Questa scoperta aprì nuovi orizzonti nella fisica della materia e nello studio degli atomi ultrafreddi negli ultimi anni. I vortici quantizzati risultarono più facilmente osservabili a livello sperimentale a partire dal 1995, cioè da quando furono realizzati i primi condensati di Bose-Einstein di atomi freddi.

Tecniche recenti come la risonanza di Feshbach [8], di cui accenneremo un'applicazione nel quarto capitolo, hanno permesso di variare i parametri delle interazioni atomiche per osservare attraverso gli esperimenti gli effetti quantici nei sistemi superfluidi.

Lo scopo di questo lavoro riguardo i superfluidi bosonici è quello di analizzare il profilo in densità dei vortici quantizzati che si manifestano in tali sistemi debolmente interagenti messi in rotazione. Per fare ciò partiremo dalle equazioni formulate da Hartree e da Gross-Pitaevskii, limitandoci al caso stazionario, attendibile per gas poco diluiti nell'ipotesi di un potenziale di contatto di raggio finito tra le particelle.

Lo studio della GPE (Gross-Pitaevskii equation) ci permetterà di evidenziare come alcune proprietà dei condensati di Bose-Einstein, ad esempio l'esistenza dei vortici quantizzati, siano influenzate dagli effetti di range finito nell'interazione tra le particelle.

Inoltre, nell'ultimo capitolo, ci focalizzeremo nel caso in cui sia presente un potenziale armonico esterno presentando due diversi metodi per approssimare la funzione di probabilità radiale dei vortici. Infine, dai risultati ottenuti, per verificarne l'attendibilità, cercheremo di effettuare un confronto con i dati presenti in letteratura.

# Capitolo 2

## La GPE

### 2.1 L'equazione di Hartree

A temperature prossime allo zero assoluto la teoria dei gas di Bose debolmente interagenti sviluppata da Bogoliubov[9] è in buono accordo con i dati sperimentali. In queste condizioni il sistema è nel *ground state* e possiamo descriverlo come uno stato coerente a molti corpi. In quanto stato coerente è possibile ricondurre la trattazione a un problema di particella singola [10].

Sfruttiamo l'approssimazione di Hartree [11] per un sistema superfluido di N bosoni identici e interagenti, tutti nello stesso stato fondamentale.

Per il sistema avremo un'equazione d'onda del tipo:

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \varphi(r_1)\varphi(r_2)\dots\varphi(r_N) \quad (2.1)$$

dove  $\varphi(r_i)$  rappresenta la funzione di particella singola. Questa assunzione è molto utile perchè ci permetterà appunto di ridurre un problema a molti corpi a una funzione d'onda di singola particella. Introduciamo l'Hamiltoniana del sistema:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(r_i) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N V(r_i, r_j) \quad (2.2)$$

dove  $U(r_i)$  è il potenziale di confinamento e  $V(r_i, r_j)$  il potenziale di interazione. Sarà importante dare a quest'ultimo potenziale la forma più opportuna per arrivare a ciò che ci interessa conoscere. L'idea di Hartree è quella di approssimare il problema con un metodo variazionale minimizzando il valore di aspettazione dell'hamiltoniana sullo stato macroscopico  $\Psi$  sfruttando la (2.1). Applicando poi il teorema dei moltiplicatori di Lagrange (con  $\varepsilon$  moltiplicatore e  $\delta E$  la variazione del funzionale dell'energia della funzione d'onda di particella singola) si arriva all'equazione di Hartree:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(r) + (N-1) \int dr' V(r, r') |\varphi(r')|^2 \right] \varphi(r) = \varepsilon \varphi(r) \quad (2.3)$$

con  $\varepsilon = \mu$  potenziale chimico. Il termine integrale corrisponde al potenziale di campo medio. Questo è il punto di partenza per la trattazione della teoria di Gross-Pitaevskii per la descrizione dei condensati di bosoni.

## 2.2 L'equazione di Gross-Pitaevskii

Ripartiamo dall'equazione di Hartree (2.3) e prendiamo in considerazione il termine non lineare che può darci qualche problema nella ricerca delle soluzioni dell'equazione.

Il numero di collisioni all'interno del nostro sistema è piccolo in quanto i gas trattati sono molto diluiti e hanno quindi densità basse. Perciò il potenziale di interazione è ben approssimato dallo pseudopotenziale:

$$V(r, r') = g\delta^{(3)}(r - r') \quad (2.4)$$

dove

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \quad (2.5)$$

representa la forza dell'interazione e  $a_s$  è la lunghezza di scattering. Questo pseudopotenziale introdotto da Fermi [12], Breit, Blatt e Weisskopf permette di ricondurre l'interazione a un problema di scattering quantistico a due corpi. Questa espressione per  $V(r, r')$  non porta a divergenze nel calcolo dell'integrale. Adottando tale forma dello pseudopotenziale e passando inoltre al limite  $(N - 1) \approx N$  si ottiene l'equazione di Gross-Pitaevskii standard:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(r) + Ng|\varphi(r)|^2 \right] \varphi(r) = \mu\varphi(r) \quad (2.6)$$

È un'approssimazione alquanto grezza ma nel nostro caso, considerando gas diluiti e debolmente interagenti, funziona bene.

Quindi un approccio di campo medio è possibile e la teoria di Gross-Pitaevskii descrive bene le proprietà di questi sistemi bosonici. È fondamentale, come detto, che i sistemi siano debolmente interagenti e non non-interagenti per raggiungere l'equilibrio termico e per assicurare la superfluidità. Infatti in assenza di interazione la velocità critica di Landau del superfluido è zero e perciò è impossibile avere un flusso con viscosità nulla [13].

## Capitolo 3

# Vortici quantizzati

L'obiettivo ora è quello di arrivare alla soluzione vorticoso della GPE, soluzione che fornisce una descrizione teorica dei vortici nei gas di bosoni in rotazione. Prima però introduciamo queste singularità topologiche che sono i nodi della funzione d'onda macroscopica. I gas diluiti ultrafreddi mostrano sotto rotazione lo stesso comportamento dell'elio superfluido [14] e possiamo usare la teoria di Gross-Pitaevskii per la descrizione del fenomeno vorticoso.

### 3.1 I vortici nei superfluidi

Consideriamo un superfluido, composto da bosoni, che ruota attorno all'asse  $z$ . Dato che per gas ultrafreddi di Bose debolmente interagenti (a differenza dell'elio liquido per esempio) a temperature prossime allo zero assoluto la frazione di superfluido corrisponde con quella di condensato, descriviamo il sistema con una funzione d'onda macroscopica che si ricava usando l'equazione di Madelung:

$$\Psi(r) = \sqrt{n(r)} e^{i\alpha(r)} \quad (3.1)$$

con  $\alpha(r) = s\theta(r)$  che è la fase se ci portiamo nelle coordinate cilindriche come interessa fare a noi, mentre  $n(r)$  è la densità del condensato in quanto  $\Psi$  è normalizzata sul numero totale di particelle  $N$ .

Invece  $s \in \mathbb{Z}$  è il numero quantico della circolazione chiamato *vortex charge*.

La fase è legata alla velocità del superfluido. Se la fase non è costante ma presenta un gradiente si genera un flusso con velocità pari a:

$$v(r) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta(r) \quad (3.2)$$

È evidente la natura irrotazionale del flusso ( $\nabla \times v = 0$ ). Questa è la netta differenza con un fluido classico.

Un ulteriore appunto bisogna farlo riguardo la circolazione del flusso. Consideriamo il flusso di un superfluido attorno a un percorso chiuso  $C$  con  $ds$  ascissa curvilinea attorno all'asse  $z$ . La circolazione, ovvero la circuitazione di un campo di velocità lungo un percorso chiuso, è:

$$\Gamma = \oint_C v \cdot ds = \frac{\hbar}{m} \Delta \theta \quad (3.3)$$

Quindi  $\Gamma = \frac{\hbar s}{m}$  in quanto  $\Delta \theta = 2\pi s$ : anche la circolazione del flusso è quantizzata. La quantizzazione della circolazione è, insieme alla viscosità nulla e all'irrotazionalità, un'altra proprietà che caratterizza il flusso per i superfluidi.

Il momento angolare associato alla circolazione è  $l_z = s\hbar$ . Perciò sia la fase che il momento angolare sono quantizzati.

La velocità del flusso dipende linearmente da  $s$  e in modo inversamente proporzionale da  $r$  [15]:

$$v_s = \frac{\hbar s}{mr} \quad (3.4)$$

che diverge per  $r \rightarrow 0$ . Di conseguenza per  $r = 0$  la densità del condensato dovrà annullarsi per evitare la divergenza dell'energia cinetica. L'origine del sistema di riferimento (useremo come detto coordinate cilindriche) coinciderà con il nucleo del vortice.

I vortici, abbiamo spiegato, si possono ottenere mettendo in rotazione il sistema, sistema che dovrà quindi avere momento angolare totale diverso da 0. Ciò è osservabile solo se la frequenza di rotazione  $\Omega$  è maggiore di un certo valore critico  $\Omega_c$ : con queste condizioni si ottiene un vortice *single-charged* ( $|s| = 1$ ). Per frequenze ancora maggiori o il vortice si allarga e diventa *multi-charged* ( $|s| > 1$ ) oppure si formano due vortici *single-charged*: quest'ultima opzione è preferibile per il sistema perchè ne minimizza l'energia. In vari esperimenti sono stati osservati sistemi in rotazione che presentavano numerosi vortici quantizzati.

Abbiamo introdotto brevemente le proprietà base dei vortici. Ora ritorniamo all'equazione di Gross-Pitaevskii e cerchiamo di capire quali siano le sue soluzioni per il nostro sistema di bosoni in rotazione attorno all'asse  $z$ .

### 3.2 La soluzione vorticoso della GPE

Riprendiamo la GPE (2.6) e per cominciare descriviamo il nostro gas ultrafreddo di Bose per mezzo di una funzione d'onda macroscopica  $\Psi$  la cui normalizzazione fornisce  $N$  cioè il numero totale di particelle [16]. Inoltre, per un sistema a molti corpi, lo stato che minimizza l'energia corrisponde a una distribuzione uniforme descritta da una funzione d'onda costante nello spazio [17]. In tal modo possiamo trascurare gli effetti di bordo dovuti al confinamento spaziale ed è possibile portare a 0 il potenziale di confinamento  $U(r)$  nella (2.6).

L'equazione di Gross-Pitaevskii stazionaria diventa:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + g|\Psi|^2 \right] \Psi = \mu\Psi \quad (3.5)$$

Il superfluido in questione è in rotazione attorno all'asse  $z$ , perciò ci conviene usufruire della simmetria cilindrica del problema.

Possiamo scrivere la funzione d'onda, ricordando le premesse fatte nel paragrafo precedente sui vortici, come:

$$\Psi(\rho, z, \theta) = \varphi(\rho, z)e^{is\theta} \quad (3.6)$$

che messa nella (3.5) dà:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_\rho^2 + \frac{\hbar^2 s^2}{2m\rho^2} + g|\varphi(\rho)|^2 \right] \varphi(\rho) = \mu\varphi(\rho) \quad (3.7)$$

$\nabla_\rho^2$  è il laplaciano in coordinate cilindriche e considera solo la componente radiale sul piano  $(x, y)$ . La componente  $z$  non viene considerata nei calcoli (o meglio tutto ciò che riguarda l'asse  $z$  viene portato a 1) e quella angolare ci fornisce il secondo termine dentro le parentesi che dipende quadraticamente dal numero quantico  $s$ , chiamato termine centrifugo. Imponiamo la densità di probabilità della funzione d'onda  $|\Psi|^2 = |\varphi|^2 = n$  e fissiamo il potenziale chimico per  $\rho \rightarrow \infty$ .

Si ha:

$$\mu = gn \quad (3.8)$$

Per semplificare i calcoli e arrivare a una soluzione vorticoso della GPE plottabile, introduciamo la variabile adimensionale  $x = \frac{\rho}{\xi}$  con  $\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\mu}}$  chiamata *healing length* che rappresenta la dimensione

caratteristica per passare dalla singolarità allo stato uniforme, in tal senso fornisce una stima del raggio del vortice.

Normalizziamo la funzione d'onda nella nuova variabile:

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{\varphi\left(\frac{\rho}{\xi}\right)}{\sqrt{n}} \quad (3.9)$$

Sviluppiamo il laplaciano della (3.7) considerando solo il termine  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$ . Dividiamo a destra e sinistra della (3.7) per il potenziale chimico  $\mu$  e ricordiamoci della (3.8) e delle regole delle derivate composte, in quanto stiamo cercando le soluzioni nella nuova variabile  $x$ .

Otteniamo finalmente la seguente scrittura:

$$\tilde{\varphi}''(x) + \frac{\tilde{\varphi}'(x)}{x} - \frac{\tilde{\varphi}(x)s^2}{x^2} + \tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(x)^3 = 0 \quad (3.10)$$

che è l'equazione differenziale di secondo ordine non lineare della soluzione vorticoso per la GPE.

I primi due termini vengono dal laplaciano, quindi dal termine cinetico; il terzo invece dal termine centrifugo. Non essendo risolvibile analiticamente [18], ne cerchiamo le soluzioni numeriche. Sono necessarie le condizioni al contorno, che imponiamo:

$$\tilde{\varphi}(0) = 0 \quad \tilde{\varphi}(\infty) = 1 \quad (3.11)$$

in quanto la funzione d'onda deve annullarsi nella singolarità e deve andare a 1 all'infinito per la condizione di normalizzazione imposta.

La difficoltà, per riuscire a plottare le soluzioni dell'equazione, sta nel trovare la derivata prima del problema di Cauchy in 0, cioè  $\tilde{\varphi}'(0)$ . Ci è di aiuto la piattaforma Mathematica. Il plot della funzione d'onda con  $s^2 = 1$ , per la quale si è trovato  $\tilde{\varphi}'(0) \approx 1.16638$ , è:

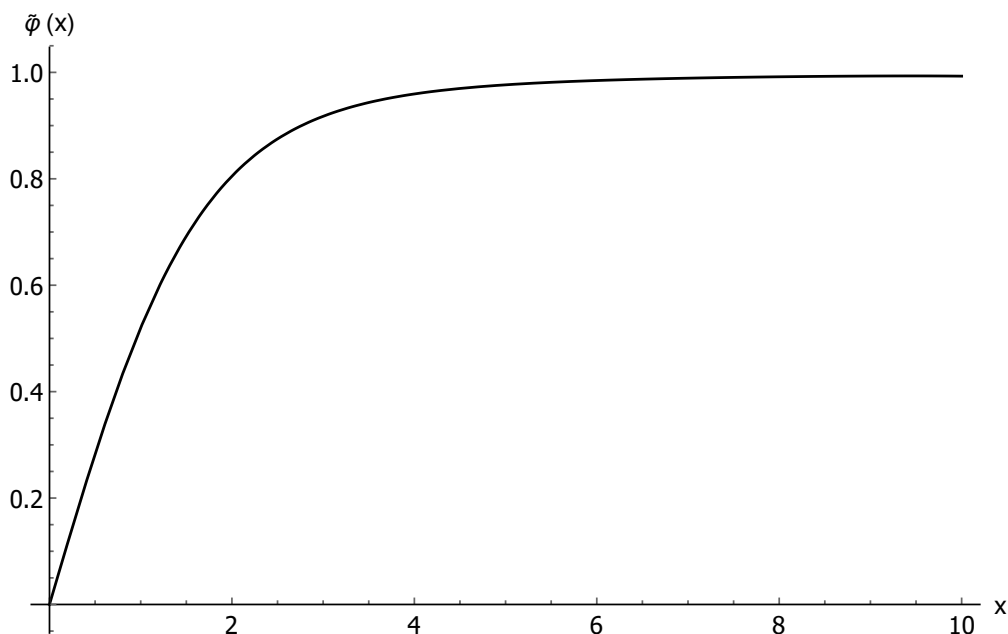
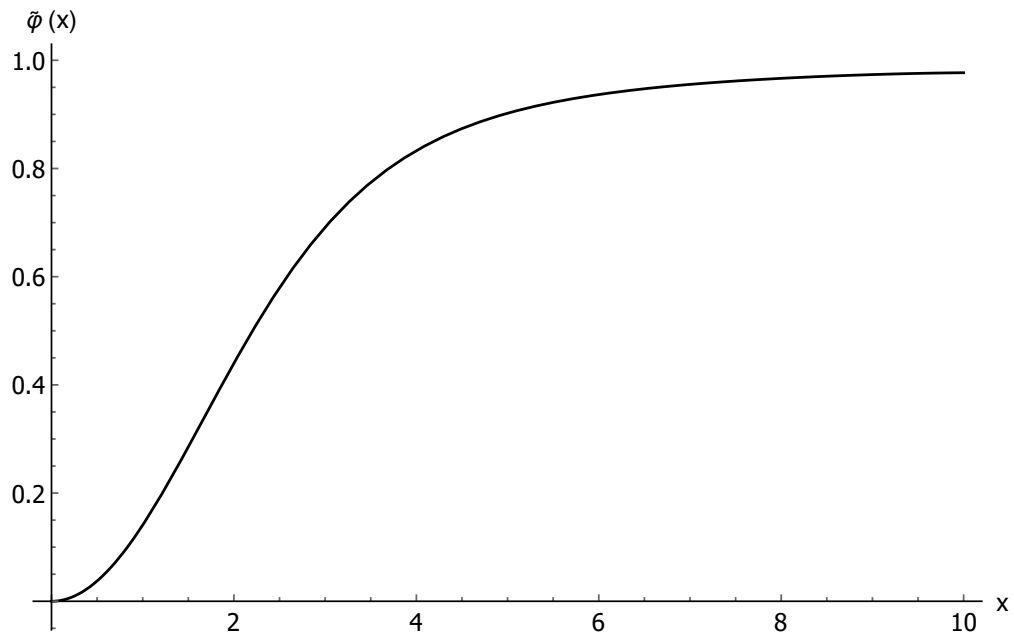
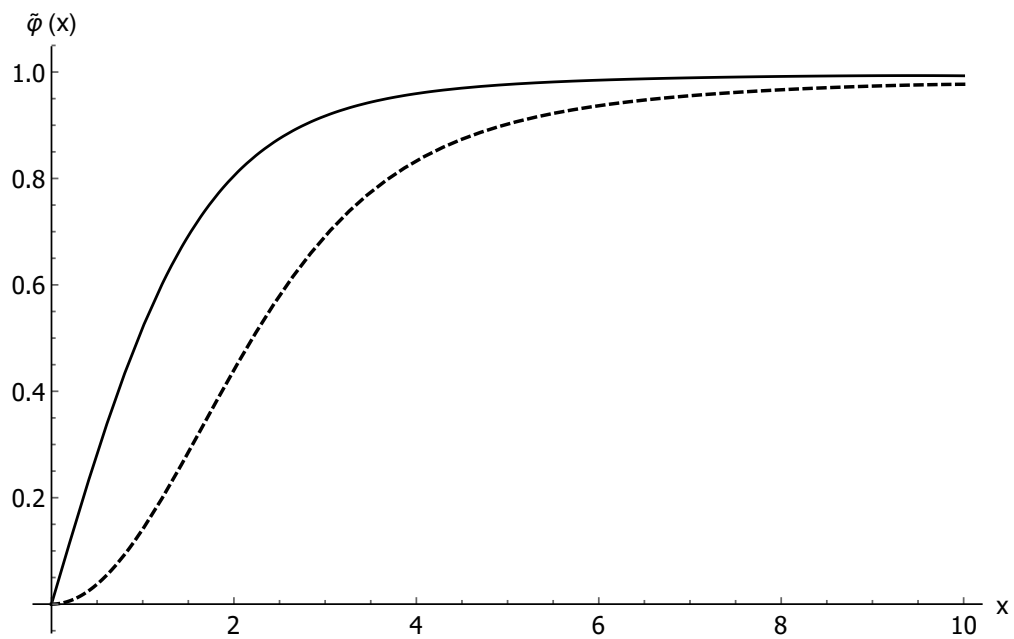


Figura 3.1: soluzione vorticoso GPE con  $s^2 = 1$

Per valori di  $s^2$  maggiori di 1, il vortice si "allarga" compatibilmente con il fatto che la sua energia aumenta. Il plot per  $s^2 = 4$  (con  $\tilde{\varphi}'(0) \approx 6.12479 \cdot 10^{-5}$ ) è:



Figura 3.2: soluzione vorticoso GPE con  $s^2 = 4$ Figura 3.3: confronto soluzioni vorticoso GPE con  $s^2 = 1$  (linea continua) e  $s^2 = 4$  (linea tratteggiata)

Per trovare la funzione d'onda possiamo usare anche un'approssimazione, chiamata approssimazione di Thomas-Fermi, che trascura il gradiente nella GPE, cioè la componente cinetica. Se usiamo lo stesso cambio di variabile di prima, nell'equazione (3.10) rimarranno solo gli ultimi tre termini, che compongono un'equazione facilmente plottabile. Lo facciamo per  $s^2 = 1$ :

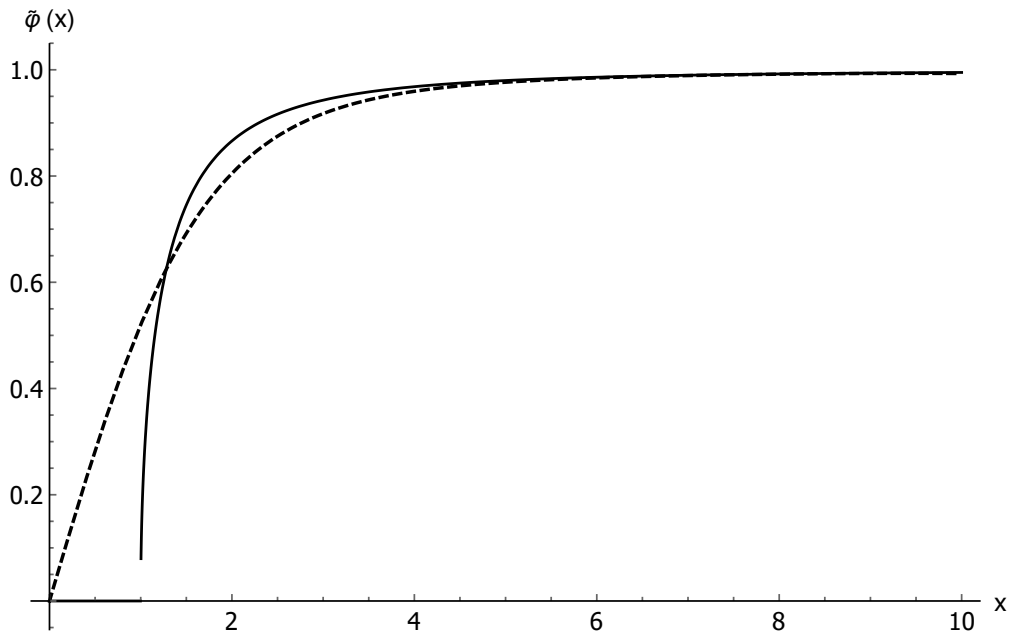


Figura 3.4: soluzione vorticoso GPE con approssimazione di Thomas-Fermi (linea continua) e soluzione GPE esatta (linea tratteggiata)

La funzione presenta un  $x_{min}$  per la quale è diversa da 0. In questo caso vale  $x_{min} = s = 1$ .

Se non avessimo sostituito la  $\rho$  con  $x\xi$ , senza addentrarci nei calcoli, possiamo vedere dalla (3.7) che un analogo  $\rho_{min}$  sarebbe stato caratterizzato da una dipendenza da  $\mu$ . In particolare per  $\mu$  sempre più grandi, l'approssimazione di Thomas-Fermi sarà più adeguata a descrivere il sistema perchè gli altri termini della GPE prevarranno maggiormente sul termine cinetico trascurato.

Questo concetto verrà ripreso anche nell'ultima parte dell'elaborato.

## Capitolo 4

# Vortici con potenziale armonico

Dopo aver analizzato la forma della funzione d'onda radiale per i vortici trascurando il potenziale di confinamento, in questo capitolo tratteremo il problema in presenza di un potenziale esterno. Nei calcoli trascuriamo sempre le componenti lungo  $z$ , anche se ora dovremmo fare un accorgimento durante i calcoli. Consideriamo quindi il potenziale in coordinate cartesiane:  $U(x, y) = \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2)$ . Al fine di alleggerire i calcoli procediamo in questo modo. Scriviamo l'equazione di Gross-Pitaevskii con il nuovo potenziale:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2) + g|\Psi(x, y, z)|^2 \right] \Psi(x, y, z) = \mu\Psi(x, y, z) \quad (4.1)$$

Se vogliamo ora passare alle coordinate cilindriche e vogliamo considerare solo la parte radiale e quella angolare decidiamo di normalizzare per la lunghezza caratteristica lungo l'asse  $z$  che chiamiamo  $L$ . Ricordando che  $\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ , si ha:

$$\Psi(x, y, z) \Leftrightarrow \Psi(\rho, \theta) = \tilde{\varphi}(\rho) e^{is\theta} \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (4.2)$$

Sostituendo la (4.2) nella (4.1) si ottiene:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2\rho^2 + \frac{\hbar^2 s^2}{2m\rho^2} + \frac{g}{L}|\tilde{\varphi}(\rho)|^2 \right] \tilde{\varphi}(\rho) = \mu\tilde{\varphi}(\rho) \quad (4.3)$$

Ora definiamo la *lunghezza caratteristica dell'oscillatore armonico*

$$l_H = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{\perp}}} \quad (4.4)$$

con  $\omega_{\perp}$  pulsazione caratteristica nella direzione perpendicolare all'asse del vortice (asse  $z$ ). Usiamo la lunghezza caratteristica del problema lineare sebbene a causa della presenza del modulo quadro bisognerebbe moltiplicarla per un altro fattore. Riscaldiamo tutti i termini della GPE ponendo  $\rho = \tilde{\rho} l_H$ , con  $\tilde{\rho}$  che è evidentemente una grandezza adimensionale. Abbiamo quindi due lunghezze caratteristiche:  $l_H$  e  $L$ .

Per il termine cinetico:  $\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\rho}^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\tilde{\rho}}^2 \frac{1}{l_H^2} = \frac{\hbar^2}{2m \cdot \frac{\hbar}{m\omega_{\perp}}} \nabla_{\tilde{\rho}}^2 = \frac{1}{2}(\hbar\omega_{\perp})\nabla_{\tilde{\rho}}^2$ .

Per il potenziale armonico:  $\frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2\rho^2 = \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2\tilde{\rho}^2 l_H^2 = \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2 \frac{\hbar}{m\omega_{\perp}} \tilde{\rho}^2 = \frac{1}{2}(\hbar\omega_{\perp})\tilde{\rho}^2$ .

Per il termine centrifugo con la medesima sostituzione:  $\frac{\hbar^2 s^2}{2m\rho^2} = \frac{1}{2}(\hbar\omega_{\perp})\frac{s^2}{\tilde{\rho}^2}$ .

Facciamo lo stesso per  $\mu$  e  $g$ . Quindi  $\mu = \tilde{\mu} \hbar\omega_{\perp}$  e  $g = \tilde{g} \hbar\omega_{\perp}$ .

$\hbar\omega_{\perp}$  non è altro che l'energia dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico.

Sappiamo poi che la dimensione fisica della funzione d'onda dipendente solo da  $\rho$  è l'inverso di una lunghezza. Scriviamo la normalizzazione sul numero totale di particelle del sistema  $N$ :

$$\begin{aligned} N &= 2\pi \int_0^{+\infty} d\rho \rho |\tilde{\varphi}(\rho)|^2 \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} d\tilde{\rho} l_H \tilde{\rho} l_H |\tilde{\varphi}(\tilde{\rho})|^2 \\ &= 2\pi l_H^2 \int_0^{+\infty} d\tilde{\rho} \tilde{\rho} |\tilde{\varphi}(\tilde{\rho})|^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Definiamo quindi

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(\tilde{\rho}) = l_H \tilde{\varphi}(\tilde{\rho}) \quad (4.6)$$

in modo tale che

$$2\pi \int_0^{+\infty} d\tilde{\rho} \tilde{\rho} |\tilde{\tilde{\varphi}}(\tilde{\rho})|^2 = N \quad (4.7)$$

Con questa nuova scrittura per la funzione d'onda, l'ultimo termine della (4.3) diventa:

$$\frac{g}{L} |\tilde{\varphi}(\rho)|^2 = \frac{\tilde{g}(\hbar\omega_{\perp})}{L} |\tilde{\tilde{\varphi}}(\tilde{\rho})|^2 \frac{1}{l_H^2} = \frac{(\hbar\omega_{\perp}) \tilde{g}}{L} |\tilde{\tilde{\varphi}}(\tilde{\rho})|^2. \text{ Abbiamo infatti posto } \tilde{g} = \frac{g}{L l_H^2} = \frac{g}{(\hbar\omega_{\perp}) L l_H^2} = \frac{g}{(\hbar\omega_{\perp}) \frac{\hbar}{m\omega_{\perp}} L}.$$

Semplificando e ricorrendo alla definizione di  $g$  che avevamo dato con la formula (2.5), si ricava la dipendenza di  $\tilde{g}$  da  $a_s$ :

$$\tilde{g} = 4\pi \frac{a_s}{L} \quad (4.8)$$

Risulta lampante come  $\tilde{g}$  sia una grandezza adimensionale (in quanto sia  $a_s$  che  $L$  sono lunghezze), in linea con tutte le altre grandezze adimensionali attraverso le quali vogliamo costruire una GPE più semplice per effettuare i calcoli che ci serviranno.

In questo modo nella GPE tutte le quantità che parebbero poste uguale a 1 in realtà sono "inglobate" nella definizione di  $\tilde{g}$ . Abbiamo utilizzato il metodo dello *scaling* affinché tutto sia consistente.

Finalmente disponiamo della GPE nella forma più semplice per arrivare al nostro obiettivo, cioè il valutare l'andamento della densità dei vortici quantizzati nei superfluidi con la presenza di un potenziale armonico esterno. La (4.3) nelle nuove variabili diventa:

$$(\hbar\omega_{\perp}) \left[ -\frac{1}{2} \nabla_{\tilde{\rho}}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\rho}^2 + \frac{s^2}{2\tilde{\rho}^2} + \tilde{g} |\tilde{\tilde{\varphi}}(\tilde{\rho})|^2 \right] \frac{\tilde{\tilde{\varphi}}(\tilde{\rho})}{l_H} = (\hbar\omega_{\perp}) \tilde{\mu} \frac{\tilde{\tilde{\varphi}}(\tilde{\rho})}{l_H} \quad (4.9)$$

Ora possiamo semplificare a destra e sinistra sia  $\hbar\omega_{\perp}$  al numeratore sia  $l_H$  al denominatore. Ne risulta:

$$\left( -\frac{1}{2} \nabla_{\tilde{\rho}}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\rho}^2 + \frac{s^2}{2\tilde{\rho}^2} + \tilde{g} |\tilde{\tilde{\varphi}}(\tilde{\rho})|^2 \right) \tilde{\tilde{\varphi}}(\tilde{\rho}) = \tilde{\mu} \tilde{\tilde{\varphi}}(\tilde{\rho}) \quad (4.10)$$

Partiamo da questa equazione per trattare due metodi di approssimazione delle sue soluzioni. Inoltre, da adesso in poi, per alleggerire la scrittura poniamo  $\tilde{g} = g$  e  $\tilde{\tilde{\varphi}}(\tilde{\rho}) = \varphi(\rho)$ .

## 4.1 Approssimazione di Thomas-Fermi

In questa sezione tratteremo il primo metodo per ricavarci la soluzione vorticoso della GPE in presenza di potenziale armonico esterno: l'approssimazione di Thomas-Fermi.

Il punto di partenza è, come detto, rappresentato dalla (4.10). Ne trascuriamo il termine cinetico con il gradiente e già da questa assunzione possiamo intuire che il profilo della densità radiale del vortice avrà dei "problemi" per  $\rho$  che tende a 0 e all'infinito, mentre approssimerà meglio la soluzione esatta per intervalli intermedi della coordinata radiale.

Rimane valida la scrittura  $\tilde{g} = g$  e  $\tilde{\varphi}(\tilde{\rho}) = \varphi(\rho)$ .

$$\left(\frac{1}{2}\rho^2 + \frac{s^2}{2\rho^2} + \tilde{g}|\varphi(\rho)|^2\right)\varphi(\rho) = \tilde{\mu}\varphi(\rho) \quad (4.11)$$

Avendo trascurato il gradiente, possiamo ora semplificare anche le due funzioni d'onda a destra e sinistra per poi esplicitare il modulo quadro di  $\varphi(\rho)$  che rappresenta la densità di probabilità della componente radiale della funzione d'onda. Quindi:  $|\varphi(\rho)|^2 = \left(\tilde{\mu} - \frac{s^2}{2\rho^2} - \frac{1}{2}\rho^2\right)\frac{1}{g}$ .

Ora, dato che il modulo quadro deve essere per forza di cose maggiore o uguale a 0, l'argomento delle parentesi tonde nell'equazione precedente non può essere minore di 0. Per tali valore la densità della funzione d'onda dovrà obbligatoriamente annullarsi. Ciò che ne risulta è dunque il seguente sistema:

$$|\varphi(\rho)|^2 = \begin{cases} \left(\tilde{\mu} - \frac{s^2}{2\rho^2} - \frac{1}{2}\rho^2\right)\frac{1}{g} & \text{se } \tilde{\mu} > \frac{s^2}{2\rho^2} + \frac{1}{2}\rho^2 \\ 0 & \text{se } \tilde{\mu} \leq \frac{s^2}{2\rho^2} + \frac{1}{2}\rho^2 \end{cases} \quad (4.12)$$

Dalla condizione di normalizzazione della funzione d'onda vogliamo ora ricavarci una relazione che leghi  $\tilde{\mu}$  a  $g$ . Procediamo in questo modo:

$$\begin{aligned} N &= 2\pi \int_0^{+\infty} d\rho \rho |\varphi(\rho)|^2 \\ &= 2\pi \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} d\rho \rho \left|\tilde{\mu} - \frac{s^2}{2\rho^2} - \frac{1}{2}\rho^2\right| \frac{1}{g} \end{aligned} \quad (4.13)$$

con  $\rho_{min}$  e  $\rho_{max}$  soluzioni positive (siamo nel primo quadrante) dell'equazione biquadratica in  $\rho$ :  $\tilde{\mu} = \frac{s^2}{2\rho^2} + \frac{1}{2}\rho^2$ , cioè  $\rho^4 - 2\tilde{\mu}\rho^2 + s^2 = 0$ . Poniamoci nel caso di vortici *single-charged*.

Si trova  $\rho_{min} = \sqrt{\tilde{\mu} - \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1}}$  e  $\rho_{max} = \sqrt{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1}}$ . Ora possiamo risolvere l'integrale precedente:

$$\begin{aligned} N &= \frac{2\pi}{g} \left[ \frac{1}{2}\tilde{\mu}\rho^2 - \frac{1}{2}\log\rho - \frac{1}{8}\rho^4 \right]_{\sqrt{\tilde{\mu} - \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1}}^{\sqrt{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1}}} \\ &= \frac{2\pi}{g} \left[ \frac{1}{2}\tilde{\mu}(\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1}) - \frac{1}{2}\tilde{\mu}(\tilde{\mu} - \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1}) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{\tilde{\mu} - \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1}}}{\sqrt{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1}}}\right) - \frac{1}{8}(\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1})^2 + \frac{1}{8}(\tilde{\mu} - \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1})^2 \right] \\ &= \frac{2\pi}{g} \left[ \tilde{\mu}\sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{\tilde{\mu} - \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1}}}{\sqrt{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1}}}\right) - \frac{1}{2}\tilde{\mu}\sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1} \right] \\ &= \frac{2\pi}{g} \left[ \frac{1}{2}\tilde{\mu}\sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{\tilde{\mu} - \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1}}}{\sqrt{\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - 1}}}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Per ottenere la funzione di densità di probabilità del vortice sostituiamo la formula (4.14) con dei valori presenti in letteratura. Dall'articolo di Urban, Schuck e Vinas [19] apprendiamo che l'approssimazione di Thomas-Fermi descrive discretamente bene il sistema per  $N$  dell'ordine dei  $10^6$ . Rimane in ogni caso il fatto che una notevole parte dell'energia del sistema, quella cinetica, è stata trascurata e ciò fa discostare il nostro approccio dai risultati ottenibili con la GPE esatta anche se studiassimo il limite  $N \rightarrow \infty$ .

Poniamo inoltre  $\tilde{\mu} = 3$  e dalla (4.14) ci ricaviamo il corrispondente valore di  $g$ , cioè  $g = 2.11 \cdot 10^{-5}$ .

Sia i valori di  $\tilde{\mu}$  che quelli di  $g$  sono da intendere in unità di  $\hbar\omega_{\perp}$ .

Plottiamo quindi la (4.12) moltiplicata per  $\rho$  e fratto  $N$  ottenendo la curva della densità di probabilità della funzione d'onda radiale di un vortice nei superfluidi bosonici con potenziale armonico esterno:

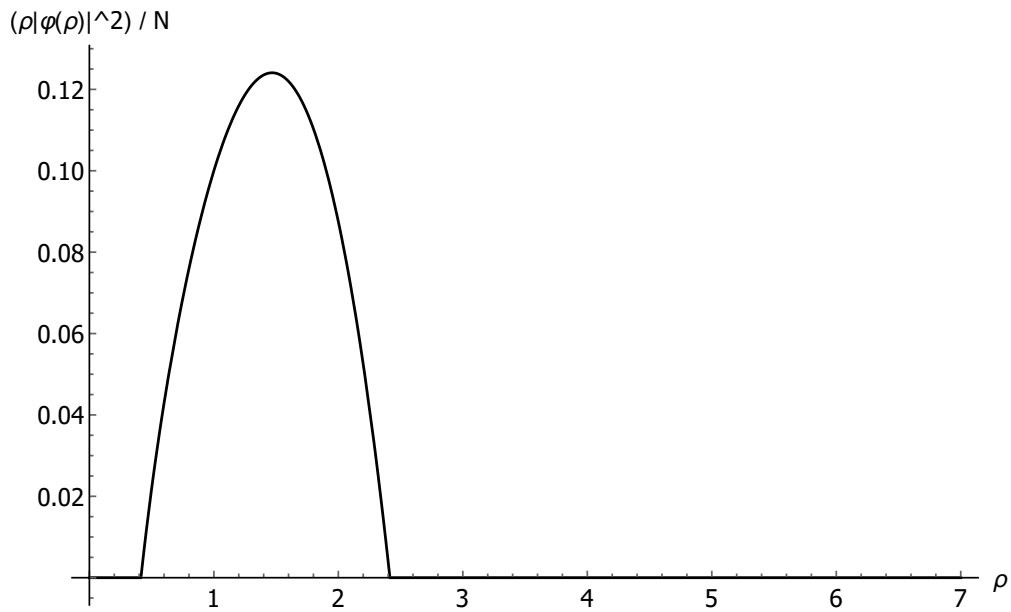


Figura 4.1: densità di probabilità radiale del vortice ottenuta con l'approssimazione di Thomas-Fermi

## 4.2 Approssimazione con gaussiana

Solamente analizzando a occhio la (4.10) ci rendiamo conto che per "compensare" il nuovo termine proporzionale a  $\rho^2$ , che ovviamente farà divergere l'argomento tra le parentesi tonde per  $\rho \rightarrow +\infty$ , in questo caso la funzione d'onda dovrà andare a 0 per  $\rho \rightarrow +\infty$  oltre che per  $\rho \rightarrow 0$  (come nel caso precedentemente esposto al Capitolo 3). La seconda ipotesi che formuliamo allora è quella di approssimare la funzione d'onda con una gaussiana dato che essa presenta un andamento analogo a quello ricercato.

Partiamo dalla solita funzione d'onda di un superfluido in rotazione attorno all'asse z:

$$\Psi(\rho, \theta) = \varphi(\rho)e^{is\theta} \quad (4.15)$$

Ora però la  $\varphi(\rho)$  sarà la nostra gaussiana:

$$\varphi(\rho) = A(\sigma)\rho e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \quad (4.16)$$

Quello che ci manca è la forma esplicita di  $A(\sigma)$ . Per trovarla, e quindi ricavare la sua dipendenza da  $\sigma$ , imponiamo la condizione:

$$2\pi \int d\rho \rho |\varphi(\rho)|^2 = N \quad (4.17)$$

e svolgendo i conti:

$$2\pi \int_0^{+\infty} d\rho \rho^3 A(\sigma)^2 e^{-\frac{\rho^2}{\sigma^2}} = 2\pi A(\sigma)^2 \left[ -\frac{1}{2}\sigma^2 e^{-\frac{\rho^2}{\sigma^2}} (\sigma^2 + \rho^2) \right]_0^{+\infty} = N \quad (4.18)$$

si trova  $A(\sigma) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\pi\sigma^2}}$ .

Quindi la parte radiale della funzione d'onda che abbiamo assunto avere il profilo di una gaussiana è:

$$\varphi(\rho) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \quad (4.19)$$

Vogliamo trovare il valore di  $\sigma$  che minimizza il funzionale dell'energia dell'equazione di Gross-Pitaevskii utilizzando come funzione d'onda la (4.15). In letteratura [20] si trova che il funzionale dell'energia per la GPE stazionaria in due dimensioni con potenziale esterno è:

$$E[\Psi] = \int_0^{+\infty} d\rho \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla_\rho \Psi(\rho)|^2 + \frac{1}{2} m\omega_\perp^2 \rho^2 |\Psi(\rho)|^2 + \frac{g}{2} |\Psi(\rho)|^4 \right] \quad (4.20)$$

Sostituendoci ora la (4.15) e seguendo passo passo la stessa procedura esposta a inizio capitolo per ottenere la GPE in una scrittura più elegante, otteniamo:

$$E[\varphi] = \int_0^{+\infty} d\rho \left[ \frac{1}{2} |\nabla_\rho \varphi|^2 + \frac{1}{2} \rho^2 |\varphi|^2 + \frac{s^2}{2\rho^2} |\varphi|^2 + \frac{g}{2} |\varphi|^4 \right] \quad (4.21)$$

essendo sottointeso che  $\varphi = \varphi(\rho) = \tilde{\varphi}(\tilde{\rho})$  e  $g = \tilde{g}$ .

Sostituiamo nell'equazione precedente la funzione d'onda radiale (4.19) e svolgiamo tutti i calcoli. Una volta risolto l'integrale avremo una certa dipendenza di E da  $\sigma$ . A quel punto, utilizzando un approccio variazionale, cercheremo quali valori di  $\sigma$  (che dipenderanno certamente da  $g$ ) minimizzano il funzionale dell'energia ponendo la sua derivata rispetto a  $\sigma$  uguale a 0.

Trattiamo anche qui solo i vortici *single-charged*.

$$\begin{aligned}
 E[\varphi] &= \int_0^{+\infty} d\rho \left[ \frac{1}{2} |\nabla_\rho \varphi|^2 + \frac{1}{2} \rho^2 |\varphi|^2 + \frac{1}{2\rho^2} |\varphi|^2 + \frac{g}{2} |\varphi|^4 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} d\rho \left[ \frac{N}{\pi\sigma^4} \frac{(\sigma^4 - 2\sigma^2\rho^2 + \rho^4)}{\sigma^4} e^{-\frac{\rho^2}{\sigma^2}} + \rho^2 \frac{N}{\pi\sigma^4} \rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{\sigma^2}} + \frac{N}{\rho^2} \frac{1}{\pi\sigma^4} \rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{\sigma^2}} + g \frac{N^2}{\pi^2\sigma^8} \rho^4 e^{-\frac{2\rho^2}{\sigma^2}} \right] \\
 &= \frac{N}{2\pi\sigma^4} \int_0^{+\infty} d\rho \left[ \left( 1 - \frac{2\rho^2}{\sigma^2} + \frac{\rho^4}{\sigma^4} \right) e^{-\frac{\rho^2}{\sigma^2}} + \rho^4 e^{-\frac{\rho^2}{\sigma^2}} + e^{-\frac{\rho^2}{\sigma^2}} + \frac{Ng}{\pi\sigma^4} \rho^4 e^{-\frac{2\rho^2}{\sigma^2}} \right] \\
 &= \frac{N}{2\pi\sigma^4} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\sigma - \frac{2}{\sigma^2} \frac{1}{4} \sqrt{\pi}\sigma^3 + \frac{1}{\sigma^4} \frac{3}{8} \sqrt{\pi}\sigma^5 + \frac{3}{8} \sqrt{\pi}\sigma^5 + \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\sigma + \frac{Ng}{\pi\sigma^4} \frac{3}{32} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma^5 \right] \\
 &= \frac{N}{2\pi\sigma^4} \left[ \left( \frac{3}{8} \sqrt{\pi} + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} + \frac{3Ng}{32\sqrt{2\pi}} \right) \sigma + \frac{3}{8} \sqrt{\pi}\sigma^5 \right] \\
 &= \frac{N}{2\pi} \left[ \left( \frac{3}{8} \sqrt{\pi} + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} + \frac{3Ng}{32\sqrt{2\pi}} \right) \sigma^{-3} + \frac{3}{8} \sqrt{\pi}\sigma \right]
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma} = -\frac{3N}{2\pi} \left[ \left( \frac{7}{8} \sqrt{\pi} + \frac{3Ng}{32\sqrt{2\pi}} \right) \sigma^{-4} - \frac{1}{8} \sqrt{\pi} \right] = 0 \tag{4.23}$$

si deve cioè annullare l'argomento dentro le parentesi quadre. Quindi troviamo:

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{\frac{7}{8} \sqrt{\pi} + \frac{3Ng}{32\sqrt{2\pi}}}{\frac{1}{8} \sqrt{\pi}}} \tag{4.24}$$

Se usiamo gli stessi valori con cui abbiamo plottato la funzione di densità di probabilità con l'approssimazione di Thomas- Fermi, cioè  $N = 10^6$  e  $g = 2.11 \cdot 10^{-5}$  otteniamo  $\sigma^2 = 3.25$ . Ovviamente tutti i valori hanno un margine di errore ma la nostra è solo un'indagine teorica. Possiamo sostituire nella (4.19) la suddetta *sigma* per poi plottare, come prima, il modulo quadro della funzione gaussiana moltiplicato per  $\rho$  e fratto  $N$ . Il risultato è il seguente:

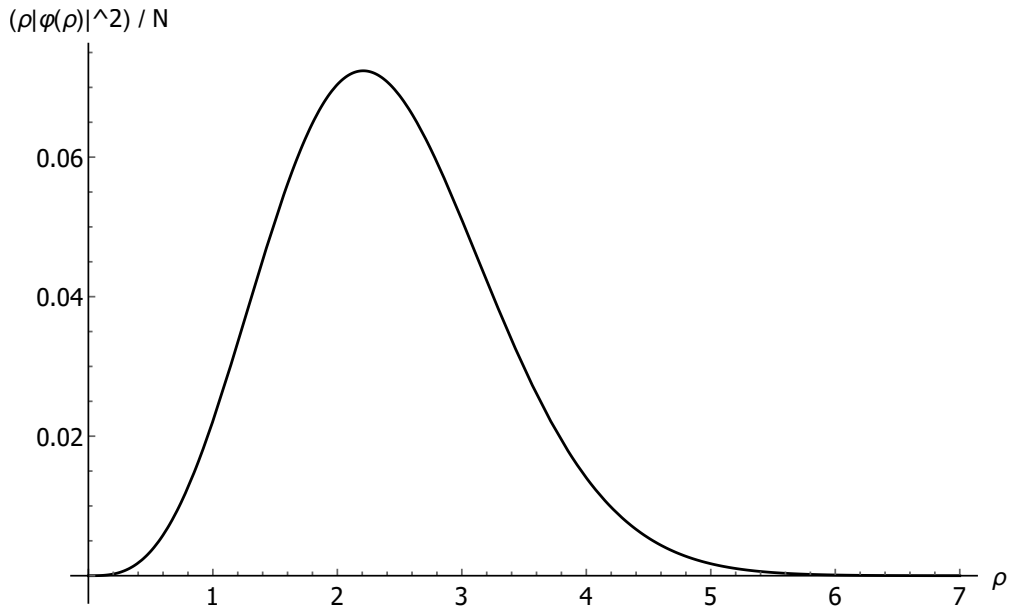


Figura 4.2: densità di probabilità radiale del vortice ottenuta con la gaussiana



### 4.3 Confronto tra le due approssimazioni

A questo punto è interessante effettuare un confronto tra i due approcci intrapresi. Andiamo quindi a sovrapporre le due curve ottenute in Figura 4.1 e in Figura 4.2 per vedere cosa succede. Ciò che osserviamo è un discordanza tra di esse:

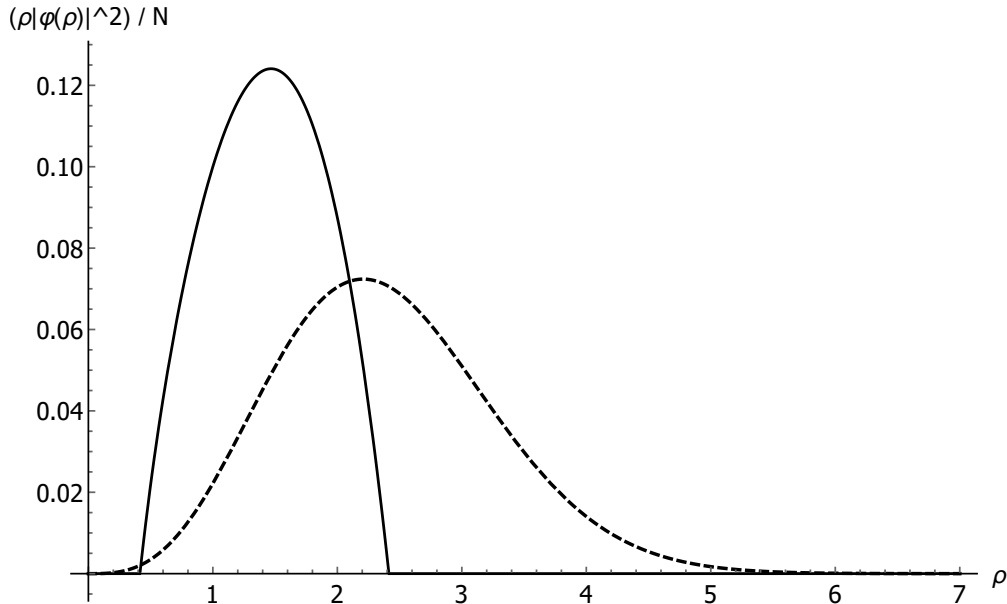


Figura 4.3: confronto tra approssimazione con gaussiana (linea tratteggiata) e di Thomas-Fermi (linea continua) per  $\tilde{\mu} = 3$  e  $g = 2 \cdot 10^{-5}$

Proviamo ad eseguire un'analisi della situazione a partire dai grafici ottenuti e aiutandoci con i dati teorici presenti in letteratura.

Avendo approcciato il problema con il metodo dello *scaling* e consci del fatto che la nostra è un'indagine teorica che non considera gli effettivi ordini di grandezza delle quantità in gioco, proviamo a dare dei valori sempre maggiori a  $\tilde{\mu}$  per vedere cosa succede.

Per giustificare sommariamente questa procedura a livello sperimentale possiamo fare affidamento sulla *Feshbach resonance* che permette di variare il potenziale di interazione tra gli atomi, modificando quindi la lunghezza di scattering  $a_s$ , applicando un campo magnetico uniforme esterno. Ciò ci autorizza ad aver utilizzato nella trattazione valori arbitrari delle grandezze in gioco solo per fini teorici.

Vediamo, utilizzando la formula (4.14), che più cresce il potenziale chimico e più cresce  $g$ . Se  $g$  è alto significa che la lunghezza di scattering  $a_s$  è elevata e siamo dunque nel limite di forte repulsione. Nel tal caso l'energia cinetica (rappresentata dal termine con il gradiente nella GPE) può essere trascurata senza che ciò ci causi troppi problemi. Infatti dopo aver proceduto con lo *scaling*, possiamo considerare l'energia cinetica come un termine di ordine 1 mentre l'energia di interazione è di ordine  $Ng$ . Per  $Ng \gg 1$  il metodo di Thomas-Fermi ci assicura una valida approssimazione della soluzione esatta perchè il termine non lineare del potenziale di interazione sovrasta gli altri.

Allora proviamo a ottenere le curve delle densità di probabilità dei vortici, usando entrambi gli approcci, per valori di  $\tilde{\mu}$  (e quindi di  $g$ ) maggiori. Le due curve non potranno comunque tendere l'una all'altra perchè resterà sempre una discrepanza data dalla profonda diversità dei due approcci seguiti.

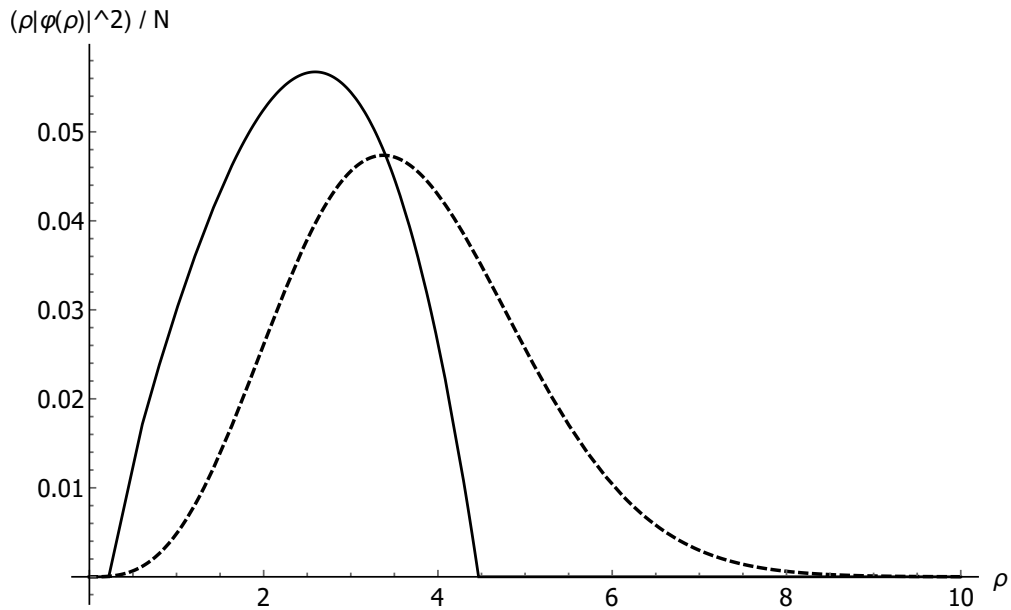


Figura 4.4: confronto tra approssimazione con gaussiana (linea tratteggiata) e di Thomas-Fermi (linea continua) per  $\tilde{\mu}=10$  e  $g = 3.04 \cdot 10^{-4}$

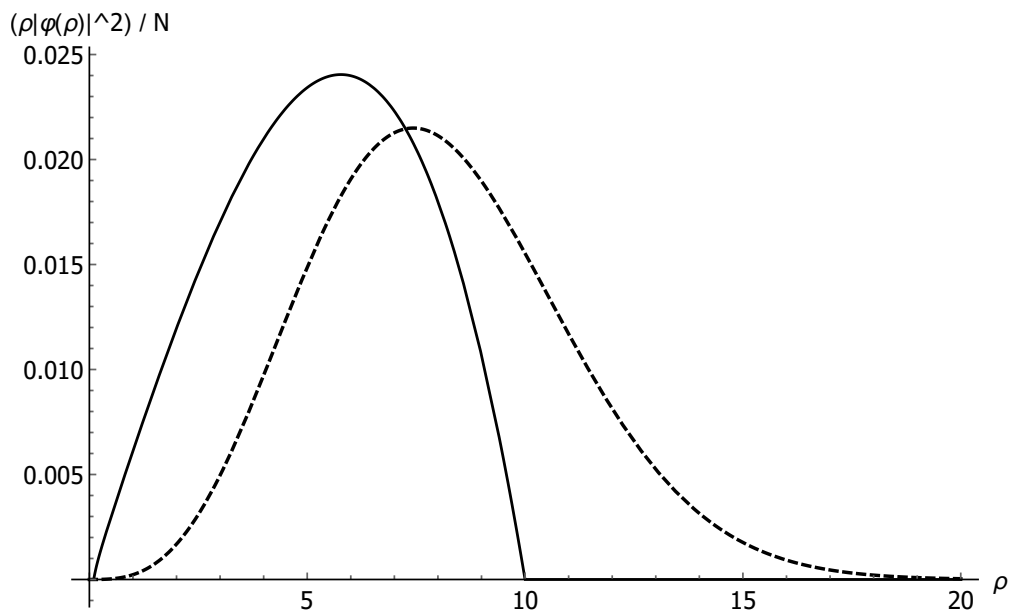


Figura 4.5: confronto tra approssimazione con gaussiana (linea tratteggiata) e di Thomas-Fermi (linea continua) per  $\tilde{\mu}=50$  e  $g = 7.84 \cdot 10^{-3}$

L'ultimo grafico ottenuto è quello più interessante. La densità del vortice ricavata con Thomas-Fermi è quella che più si avvicina alla soluzione esatta per i motivi elencati sopra. Un riscontro lo si può effettuare con le tabelle a pagina 6 dell'articolo citato al riferimento bibliografico [19]. Si può anche notare come  $\rho_{min}$  tenda a 0 più che negli altri grafici (alla fine del terzo capitolo era stata avanzata un'analogia previsione per il caso senza potenziale armonico), compatibilmente con il fatto che il vertice del vortice, come descritto a livello teorico dalla formula (3.4), coincide con l'origine delle coordinate.

Notiamo infine che per  $\tilde{\mu}$  elevati anche il profilo della gaussiana si avvicina progressivamente a quello della curva ottenuta con il metodo di Thomas-Fermi. Rimane però, come detto, una non ignorabile differenza tra di essi e tra essi e la soluzione esatta.

## Capitolo 5

# Conclusioni

In questo lavoro abbiamo trattato diverse proprietà dei vortici quantizzati nei superfluidi bosonici. Siamo partiti dall'equazione di Hartree e dall'equazione di Gross-Pitaevskii stazionaria (GPE) e abbiamo sottolineato come le equazioni utilizzate siano adatte a descrivere sistemi quali i gas diluiti ultrafreddi. Grazie ad un'analisi più dettagliata abbiamo studiato la forma dei vortici sia in assenza di un potenziale esterno sia in presenza di un potenziale armonico. L'ultima parte dell'elaborato, in particolare, ci ha permesso di osservare le differenze tra i due metodi di approssimazione (quello attraverso la funzione gaussiana e quello di Thomas-Fermi) di cui ci siamo serviti per analizzare il profilo in densità dei vortici con potenziale esterno. Questi due approcci seguiti danno un risultato discreto a livello teorico, soprattutto quello di Thomas-Fermi per grandi valori di  $\tilde{\mu}$ , ma evidenziano, in ogni caso, delle differenze tra le soluzioni esatte e quelle approssimate. Ciò nonostante, ci forniscono un buon punto di partenza per la trattazione dei vortici quantizzati, fenomeno il cui studio può ancora condurci a nuove applicazioni nel campo della superfluidità.

# Bibliografia

- [1] P. Kapitza, *Viscosity of liquid helium below the  $\lambda$  point*, Nature **141**, 74 (1938)
- [2] F. London, *On the Bose-Einstein condensation*, Phys. Rev **54**, 947 (1938)
- [3] L. Landau, *The theory of superfluidity of helium II*, J. Phys. USSR **5**, 71 (1941)
- [4] L. Tisza, *Transport phenomena in helium II*, Nature **141**, 913 (1938)
- [5] L. Onsager, Nuovo Cimento Suppl. **6**, 249 (1949)
- [6] R. P. Feynman, *Application of quantum mechanics to liquid helium*, Progress in Low Temperature Physics **1**, 17 (Gorter, C.J. ed., Amsterdam, North-Holland, 1955)
- [7] M. H. Anderson, J. R. Hensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein Condensation in Dilute Atomic Vapor*, Science **269**, 198 (1995)
- [8] A. Marte, T. Volz, J. Schuster, S. Durr, G. Rempe, E. G. M. van Kempen, and B. J. Verhaar, Phys. Rev. Lett. **89**, 283202 (2002)
- [9] N. N. Bogoliubov, *On the theory of superfluidity*, J. Phys. USSR **11**, 23 (1947)
- [10] J. F. Annet, *Superconductivity, Superfluids and Condensates* (Oxford University Press, Bristol, 2003)
- [11] L. Salasnich, *Quantum Physics of Light and Matter* (Springer, Berlin, 2014)
- [12] E. Fermi, *Motion of neutrons in hydrogenous substances*, Ricerca Scientifica **7**, 13 (1936)
- [13] L. Landau, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, *Course of Theoretical Physics Vol. 9, Theory of the Condensed State, Part 2*, (Pergamon press, Oxford, 1980)
- [14] L. Landau, E. M. Lifshitz, *Fisica statistica, Teoria dello stato condensato*, (Editori Riuniti, Roma, 1997)
- [15] B. V. Svistunov, E. S. Babaev, N. V. Prokof'ev, *Superfluid States of Matter* (CRC Press, Physics Department of the University of Massachusetts, Amherst, 2015)
- [16] N. N. Bogoliubov, *On the theory of superfluidity*, J. Phys. USSR **11**, 23 (1947)
- [17] A. L. Fetter, *Vortices in an Imperfect Bose Gas. I. The Condensate*, Phys. Rev. **138**, number 2A (1965)
- [18] M. P. Kawatra, P. K. Pathria, *Quantized Vortices in an Imperfect Bose Gas and the Breakdown of Superfluidity in Liquid Helium II*, Phys. Rev. **151**, number 1 (1966)
- [19] M. Urban, P. Schuck, X. Vinas, *Thomas-Fermi approximation to static vortex states in superfluid trapped atomic gases*, The European Physical Journal D **27**, 2 (2002)
- [20] F. Dalfovo, S. Stringari, *Bosons in anisotropic traps: Ground state and vortices*, Phys. Rev. **53**, 2477 (1996)