

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Chaos and universality in non-linear dynamics: the logistic map

Caos e universalità in dinamica non lineare: la mappa logistica

Relatore
prof. Antonio Ponno

Laureando
Gianluca Simonetto
2022997

Anno Accademico 2022/2023

Sommario

In questo lavoro di tesi si considerano alcuni aspetti non banali della dinamica delle mappe iterate. Il lavoro si concentra sulla mappa logistica e sugli aspetti di universalità della sua dinamica caotica. In particolare, viene esposto in dettaglio l'approccio di rinormalizzazione alla Feigenbaum.

Abstract

In this thesis work we deal with some non trivial aspects of the dynamics of iterated maps. We focus specifically on the logistic map and on the universality features of its chaotic behaviour. In particular, Feigenbaum's approach to renormalization is presented.

Indice

Indice	ii
1 Introduzione	1
2 La mappa logistica	2
2.1 Esponente di Liapunov	9
2.2 Finestre di periodicità e intermittenza	11
2.3 Regime caotico	14
2.4 Rinormalizzazione e universalità	17
3 Riscontri sperimentali e applicazioni	26
Bibliografia	30

Capitolo 1

Introduzione

Generalmente il comportamento di un sistema viene definito caotico se esso mostra una dipendenza particolarmente sensibile sui dati iniziali. Ciò significa che tale sistema, pur governato da leggi completamente deterministiche, mostra un'evoluzione caratterizzata da un certo livello di casualità, rendendo impossibile il compito di fare previsioni accurate a lungo termine.

Il nostro interesse è studiare come alcuni sistemi effettuano la transizione al caos, ossia come cambiano il loro comportamento passando da un andamento periodico a uno caotico, quando alcuni parametri esterni vengono fatti variare. I sistemi dissipativi mostrano diversi scenari per la transizione al caos, in ognuno dei quali il sistema perde stabilità per via di una serie di biforcazioni. In questo lavoro di tesi ci occuperemo di analizzare il meccanismo del period doubling, il quale consiste in una serie infinita di biforcazioni in corrispondenza delle quali il sistema, avente comportamento periodico, raddoppia il periodo delle proprie oscillazioni. In sostanza, se il sistema evolve con orbite periodiche di periodo T , dopo la biforcazione quest'orbita perde stabilità e la nuova orbita stabile assumerà periodo di $2T$. Questo meccanismo avviene senza interruzioni, mano a mano che un parametro esterno viene fatto variare, fintanto che le orbite non diventano completamente aperiodiche.

Tutti i sistemi che mostrano il period doubling evolvono verso il caos con pattern e proprietà del tutto comuni che sostanzialmente bypassano i dettagli del sistema specifico. La teoria qui presentata viene detta 'universale' proprio per questo motivo.

Prenderemo in esame le mappe iterate perchè è sufficiente studiare queste proprietà nel più semplice modello possibile che esibisce il period-doubling. Ad ogni modo l'uso delle mappe è tutto fuorchè circostanziale, esse emergono spesso nello studio di alcune equazioni differenziali, nelle mappe di Poincarè, in alcuni modelli di diversa natura come l'elettronica, la finanza, la dinamica di popolazioni.

Queste consistono nell'iterazione ripetuta di una funzione reale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definendo la mappa ricorsiva $x_{n+1} = f(x_n)$. Dunque, prendendo un certo numero reale x_0 come valore iniziale (denominato "seme", in analogia con i generatori di numeri casuali), si ottengono i successivi $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ semplicemente iterando la funzione f .

Questo studio non può essere condotto con funzioni f lineari o anche solo monotone. La loro dinamica infatti è ben poco interessante: in genere esse avranno solo equilibri globalmente stabili o instabili e le orbite avranno comportamento convergente o divergente, senza mai essere periodiche e tantomeno caotiche. Un insieme di funzioni di particolare interesse invece sono le "unimodali", ossia funzioni dotate di un unico massimo. Queste ricoprono un ruolo centrale nello studio dell'universalità, perchè mostrano tutti i comportamenti interessanti di cui abbiamo bisogno.

Capitolo 2

La mappa logistica

La mappa unimodale di cui ci serviremo come prototipo per tutto lo studio successivo è la mappa logistica $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:

$$x_{n+1} = f_r(x_n) = rx_n(1 - x_n) \quad (2.1)$$

Il parametro r è il parametro di controllo e verrà limitato nell'intervallo $0 \leq r \leq 4$, così che l'intervallo $[0, 1]$ venga mappato in sé stesso. Evidenziamo il fatto che aver scelto di mappare un intervallo limitato non è casuale. Infatti lo studio del comportamento caotico della mappa ha senso solo se il moto è confinato. Inoltre aver ristretto $a \leq 4$ non è limitante, anzi facendo variare r in quell'intervallo troveremo tutti i comportamenti interessanti che saranno oggetto di studio dei prossimi paragrafi.

Come prima cosa possiamo partire cercando gli equilibri o punti fissi della mappa, ossia quei punti di $[0, 1]$ che vengono mappati in loro stessi:

$$x^* = rx^*(1 - x^*) \quad (2.2)$$

È chiaro che un'orbita con valore iniziale $x_0 = x^*$, resterà immobile, $x_n = x^* \forall n$.

Si trovano le soluzioni $x_1^* = 0$ e $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$, dunque l'origine è un punto fisso per tutti i valori di r ($\in [0, 4]$), mentre la seconda soluzione sarà punto fisso solo se $1 \leq r \leq 4$.

Un metodo semplice ma efficace per valutare la natura degli equilibri consiste nell'effettuare la linearizzazione: prendiamo un punto vicino al punto fisso $x_n = x^* + \eta_n$, con η_n sufficientemente piccolo, avremo quindi:

$$x_{n+1} = x^* + \eta_{n+1} = f(x^* + \eta_n) = f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^2) \quad (2.3)$$

Dove, ricordando che $f(x^*) = x^*$, ricaviamo subito la relazione:

$$\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^2) \quad (2.4)$$

Avendo preso η_n sufficientemente piccolo, possiamo ignorare il termine quadratico $O(\eta_n^2)$, ottenendo quindi una mappa lineare dalla quale possiamo ricavare facilmente che x^* risulta stabile se $|f'(x^*)| < 1$ (i termini η_n convergono a zero per iterazioni successive), viceversa sarà instabile se $|f'(x^*)| > 1$. Notiamo immediatamente che questo approccio non è in grado di dire nulla nel caso in cui $|f'(x^*)| = 1$, diventerà determinante allora il termine ignorato $O(\eta_n^2)$.

Quindi calcoliamo il modulo della derivata negli equilibri trovati prima, abbiamo $|f'(x^*)| = |r(1 - 2x^*)|$. Dunque per $0 < r < 1$ l'unico punto fisso $x_1^* = 0$ è stabile. Quando invece

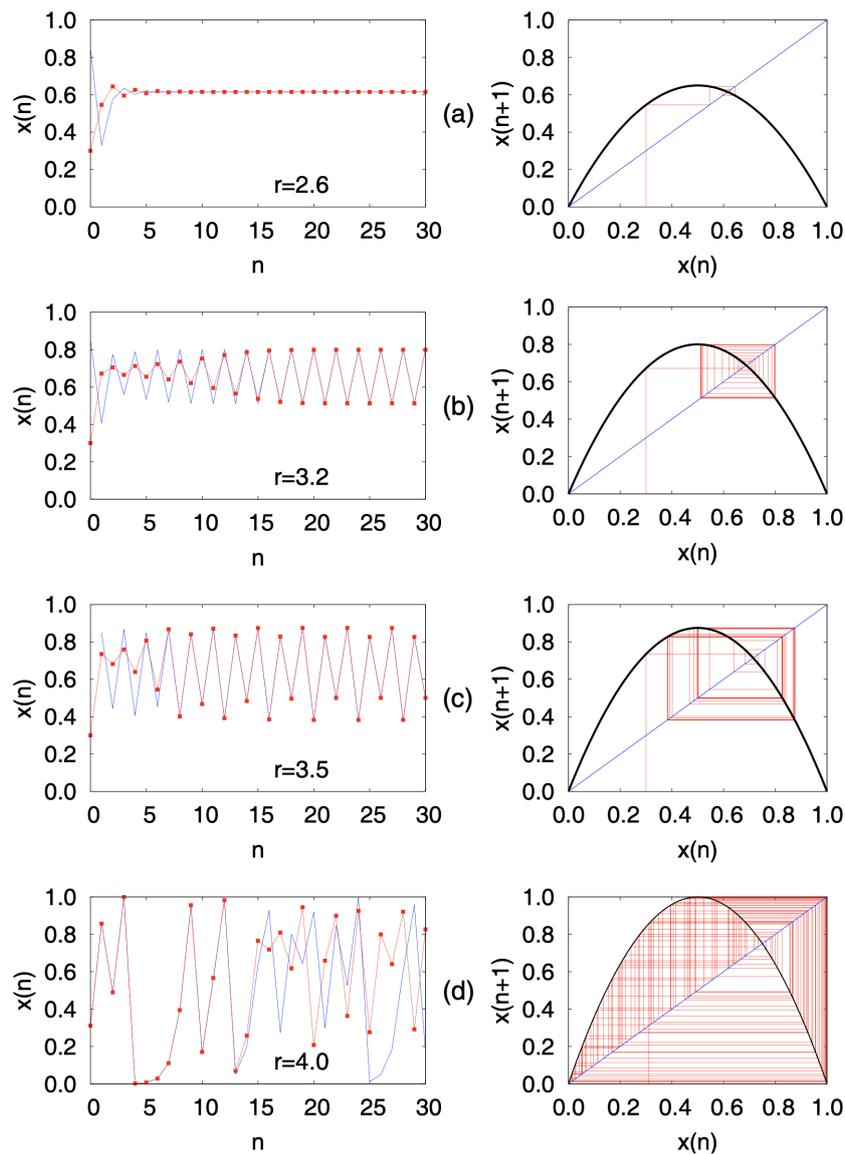


Figura 2.1: ([1], pag 40) In figura si mostrano i comportamenti della mappa per diversi valori di r , mettendo in mostra sia le iterazioni che i cobweb. (a) $r = 2.6$, 2 traiettorie (rosso e blu), pur partendo lontane convergono nel punto fisso stabile. (b) $r = 3.2$, le 2 traiettorie, si stabilizzano sul 2-ciclo. (c) $r = 3.5$, come in (b), ma con un 4-ciclo. (d) $r = 4$, il regime è caotico, 2 traiettorie inizialmente molto vicine, dopo circa 15 iterazioni evolvono in maniera completamente diversa.

$1 < r < 3$ l'origine diventa instabile mentre $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ risulta stabile. In questo regime gli equilibri stabili sono globalmente stabili, ossia $\forall x_0 \in (0, 1)$ questo tenderà all'equilibrio stabile per n crescenti. Questi punti fissi globalmente stabili vengono anche definiti "attrattori di periodo 1".

Un modo alternativo per intuire il comportamento delle orbite di una qualsiasi mappa iterata e la natura dei suoi equilibri è il metodo grafico del cobwebbing (dall'inglese, cobweb, ossia ragnatela). Questo metodo consiste dei seguenti passaggi:

1. Tracciamo il grafico della funzione $f_r(x)$ e la bisettrice del quadrante;

2. Preso il dato iniziale x_0 , tracciamo dal punto $(x_0, 0)$ una linea verticale fino a intersecare il grafico in $(x_0, f(x_0) = x_1)$;
3. Da questo punto si traccia una linea orizzontale fino ad intersecare la bisettrice (questo corrisponde a capire dove riposizionarsi sull'asse delle ascisse così da ricalcolare f nuovamente nel prossimo punto);
4. Si ripete nuovamente la procedura dal punto (2.) con il nuovo appena trovato;

Il caso $r=1$ è critico perchè si ha $|f'(0)| = 1$, dunque la linearizzazione non è più sufficiente per capire se l'origine è stabile o meno, tuttavia con il metodo dei cobweb si può ancora dedurre che tale equilibrio è attrattivo, quindi stabile.

Successivamente, per $r \geq 3$, si instaura il meccanismo del period doubling. Intendiamo analizzarlo nell'ambito delle mappe unimodali iterate.

Nel caso critico $r = 3$ il secondo punto fisso in $x_2^* = \frac{2}{3}$ ha derivata $f'(x_2^*) = -1$, tale equilibrio non è più esplicitamente stabile se linearizziamo la funzione in quel punto. Considerando i termini oltre il primo ordine o guardando i cobweb si verifica che tale punto è ancora un attrattore [2], tuttavia la convergenza degli x_n verso tale punto non è più geometrica (ossia, ricordando la (2.4), non vale più che la distanza dall'equilibrio segue la forma $\eta_{n+k} = [f'(x^*)]^k \eta_n + O(\eta_n^2)$) ma risulta più lenta.

Prendiamo ora in considerazione la funzione iterata doppiamente $f^{(2)}$, sarà importante studiare la relazione tra la derivata di f e di $f^{(2)}$ per capire il meccanismo della biforcazione che causa il period doubling. Per definizione scriviamo $x_2 = f^{(2)}(x_0)$ (dove $x_2 = f(x_1)$, $x_1 = f(x_0)$), se intendiamo calcolare la derivata prima di $f^{(2)}$ in x_0 , la chain rule restituisce

$$f^{(2)'}(x_0) = f'(f(x_0))f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0) \quad (2.5)$$

In maniera più generale, se prendiamo $x_n = f^{(n)}(x_0)$, calcolando $f^{(n)'}(x_0)$ avremo

$$f^{(n)'}(x_0) = f'(x_{n-1}) \dots f'(x_1)f'(x_0) \quad (2.6)$$

Dunque quando $r = 3$ dalla formula (2.5) discende che $f^{(2)'}(x_2^*) = f'(x_2^*)f'(x_2^*) = (-1)(-1) = 1$: deduciamo che, essendo x_2^* un punto fisso, l'intersezione tra il grafico di $f^{(2)}$ e la bisettrice $y = x$ avviene in maniera tangente.

Per valori di r immediatamente successivi a 3, avremo $f'(x_2^*) < -1$ e $f^{(2)'}(x_2^*) > 1$, dunque $f^{(2)}$ intersecherà la bisettrice in due nuovi punti che saranno punti fissi della mappa f^2 ma non di f (si veda la figura (2.2) per un chiarimento).

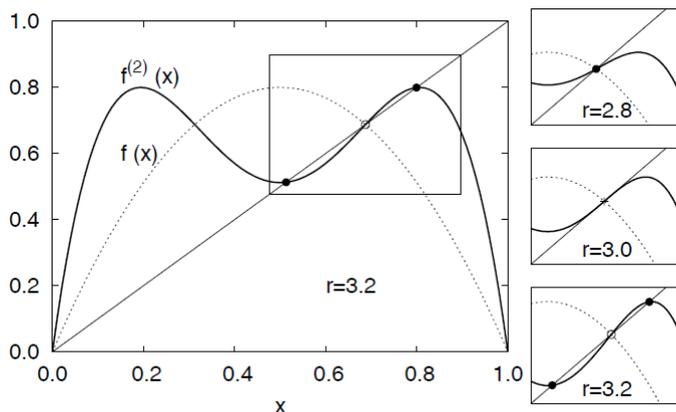


Figura 2.2: ([1], pag 41) In figura possiamo notare come in corrispondenza di $r = 3$, $f^{(2)}$ sia tangente alla bisettrice nel punto fisso. Per $r = 3.2$ la funzione interseca la bisettrice in 2 nuovi punti (che costituiscono il 2-ciclo).

Analiticamente quindi ci troveremo a risolvere l'equazione $f^2(x) = x$:

$$r^2x(1-x)(1-rx-rx^2) = x \quad (2.7)$$

Due delle sue soluzioni saranno i punti fissi di f (cioè $x_{1,2}^*$ trovati in precedenza), le altre due soluzioni, che denoteremo con $t_1, t_2 \in [0, 1]$:

$$t_{1,2} = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r-1)}}{2r} \quad (2.8)$$

sono due nuovi punti che costituiscono un 2-ciclo stabile di f , in quanto essendo punti fissi di f^2 ma non di f , deve valere che $f(t_1) = t_2$ e $f(t_2) = t_1$. Essi si dipartono dal punto x_2^* (punto fisso di f) che ora per $r > 3$ è diventato instabile. Il 2-ciclo è stabile nel senso che una generica sequenza x_n , con dato iniziale x_0 , diventerà arbitrariamente vicina alla sequenza $t_1, t_2, t_1, t_2, \dots$ per grandi n ([2]). Per questo motivo il 2-ciclo viene definito "attrattore di periodo 2".

Per dedurre la stabilità è necessario guardare la derivata prima di $f^{(2)}$ valutata in t_1, t_2 , se vale che $|f^{(2)'}| < 1$ allora il 2-ciclo è stabile. Cerchiamo di mettere in luce questo fatto con il seguente ragionamento. È utile notare innanzitutto che, data la simmetria delle formule (2.5) e (2.6), varrà che $f^{(2)'}(t_1) = f^{(2)'}(t_2)$. Più in generale vale che, in un p -ciclo di f formato dai punti t_1, \dots, t_p (per i quali si ha $f(t_i) = t_{i+1}$ e $f(t_p) = t_1$), la derivata $f^{(p)'}$ assume lo stesso valore in ogni punto del ciclo, per via della (2.6).

Detto questo, concentrandoci su f^2 , i suoi punti fissi che compongono i punti del 2-ciclo sono stabili se $|f^{(2)'}(t_{1,2})| < 1$. Se selezioniamo gli elementi con n pari dalla sequenza $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, allora otteniamo la successione data dall'iterazione di $f^{(2)}$ con dato iniziale x_0 . Allo stesso modo, selezionando gli elementi con n dispari, essi sono la successione data dall' iterazione di $f^{(2)}$ con dato iniziale x_1 . La prima successione convergerà a t_1 (o a t_2) se $|f^{(2)'}(t_{1,2})| < 1$, la seconda a t_2 (o a t_1), se questo avviene, allora il 2-ciclo è ovviamente stabile.

Il comportamento appena descritto non può che essere lo stesso in t_1 e t_2 per via del fatto che $f^{(2)'}(t_1) = f^{(2)'}(t_2)$. Da questo ragionamento risulta chiaro che la condizione sufficiente affinché il 2-ciclo sia stabile è, appunto, $|f^{(2)'}(t_{1,2})| < 1$.

In questo senso, $r = 3$ è il primo valore di r in cui si manifesta il period doubling, infatti passiamo da un attrattore di periodo 1 (punto fisso stabile per $r < 3$) ad un attrattore di periodo

2 (2-ciclo stabile per $r > 3$). Denoteremo $r_1 = 3$.

Quello appena descritto è, per la dinamica di $f^{(2)}$, un classico esempio di biforcazione a forcone (o "pitchfork bifurcation"), che consiste nello sdoppiamento di un equilibrio stabile in due equilibri stabili distinti, mentre la posizione del vecchio equilibrio stabile resta un equilibrio della mappa, ma instabile (si veda ancora la figura (2.2)).

Se r aumenta ancora, i massimi di $f^{(2)}$ saliranno mentre i minimi scenderanno, fino ad arrivare ad un valore di r (che denoteremo con $r = R_1$), in cui le intersezioni tra la bisettrice e il grafico di $f^{(2)}$ che corrispondono a t_1 e t_2 avverranno in punti in cui la derivata di $f^{(2)}$ è nulla. Ricordando la (2.5), $f^{(2)'}(t_{1,2}) = f'(t_1)f'(t_2)$, vediamo subito che uno tra i due punti (quello più a sinistra tra t_1 e t_2) dovrà essere uguale a $\frac{1}{2}$, cioè l'unico punto per cui f ha derivata nulla. Il 2-ciclo quando $r = R_1$ viene definito 2-ciclo superstabile. Più in generale parleremo di 2^n -cicli superstabili se vale che

$$f_{R_n}^{(2^n)'}(t_i) = f'_{R_n}(t_{2^n}) \dots f'_{R_n}(t_1) = 0 \quad (2.9)$$

Dove la prima uguaglianza deriva ancora una volta dalla (2.6) e r assume un valore specifico R_n . Notiamo subito che ogni p -ciclo superstabile contiene $x = \frac{1}{2}$ tra i suoi elementi.

Proseguendo ancora, ci sarà un valore di r (chiamato r_2) tale per cui vale $f^{(2)'}(t_1) = f^{(2)'}(t_2) = -1$. In corrispondenza $r = r_2$, dunque, si presenta per $f^{(2)}$ la stessa situazione che avevamo osservato per f in r_1 : il 2-ciclo dei punti t_1 e t_2 diventa instabile e tale 2-ciclo si biforca in un 4-ciclo i cui punti sono punti fissi di $f^{(4)}$ ma non di $f^{(2)}$ e f . Più precisamente, ciascuno dei due punti fissi di $f^{(2)}$ (t_1 e t_2 , che non erano punti fissi di f) si sdoppia in un 2-ciclo stabile di $f^{(2)}$ e questo avviene contemporaneamente, ossia per lo stesso valore di r (r_2) per entrambi, ricordando che $f^{(2)'}(t_1) = f^{(2)'}(t_2)$.

Per trovare numericamente il valore di r_2 basterà risolvere

$$f_r^{(2)'}(t_1) = f'_r(t_1)f'_r(t_2) = -1 \quad (2.10)$$

Troveremo quindi ([3]):

$$\begin{aligned} r^2(1 - 2t_1)(1 - 2t_2) &= -1 \\ r^2[1 - 2(t_1 + t_2) + 4t_1t_2] &= -1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ricordando la (2.8):

$$\begin{aligned} r^2 \left[1 - 2 \frac{r+1}{r} + 4 \frac{r+1}{r^2} \right] &= -1 \\ 4 + 2r - r^2 &= -1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

La soluzione positiva è $r_2 = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$. Il fatto che la derivata di $f^{(4)}$ calcolata nei punti del 4-ciclo per valori di r immediatamente successivi a r_2 di sia minore di 1 assicura che il ciclo sia stabile.

Ora lo schema è chiaro: aumentando ancora r troveremo un valore $r = R_2$ per cui il 4-ciclo diventerà superstabile, ossia avremo, per ogni t_i del 4-ciclo:

$$f_{R_2}^{(4)'}(t_i) = 0 \quad (2.13)$$

Dopodichè r raggiungerà un valore $r = r_3$ in corrispondenza del quale si verifica $f^{(4)'}(t_i) = -1$ e il 4-ciclo diventerà instabile. Quest'ultimo si biforcherà formando un 8-ciclo stabile.

In generale, quindi, d'ora in poi per ogni 2^n -ciclo ci sarà un valore r , che sarà chiamato r_n , in corrispondenza del quale la derivata $f^{(2^n)'}(t_i)$ scenderà a -1 . In maniera del tutto analoga a quanto visto sin ora il 2^n -ciclo subirà una biforcazione e si formerà un 2^{n+1} -ciclo che resterà stabile fintanto che, aumentando ancora r , non si avrà $f^{(2^{n+1})'}(t_i) = -1$ per un certo r_{n+1} . Aver ristretto il parametro r nell'intervallo $0 \leq r \leq 4$ non impedisce al modello di raddoppiare il periodo fino a far arrivare quest'ultimo all'infinito: il comportamento non sarà più periodico e l'attrattore è passato da essere un 2^n -ciclo a un insieme infinito di punti ("attrattore strano", come vedremo meglio in seguito). Esiste quindi un limite alla sequenza dei valori di r_n che chiameremo r_∞ , con $r_\infty = 3.569945... < 4$ [1], che sancisce la fine della fase del raddoppiamento del periodo. La convergenza degli r_n sarà geometrica ossia

$$r_n - r_\infty \propto \delta^{-n} + o(\delta^{-n}) \quad (2.14)$$

In maniera equivalente se definiamo:

$$\delta_n = \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} \quad (2.15)$$

Avremo che vale il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \delta$, dove quest'ultimo δ è lo stesso della (2.14) ([2]). Tale parametro risulta essere uguale a $\delta = 4.6692...$ ed è universale.

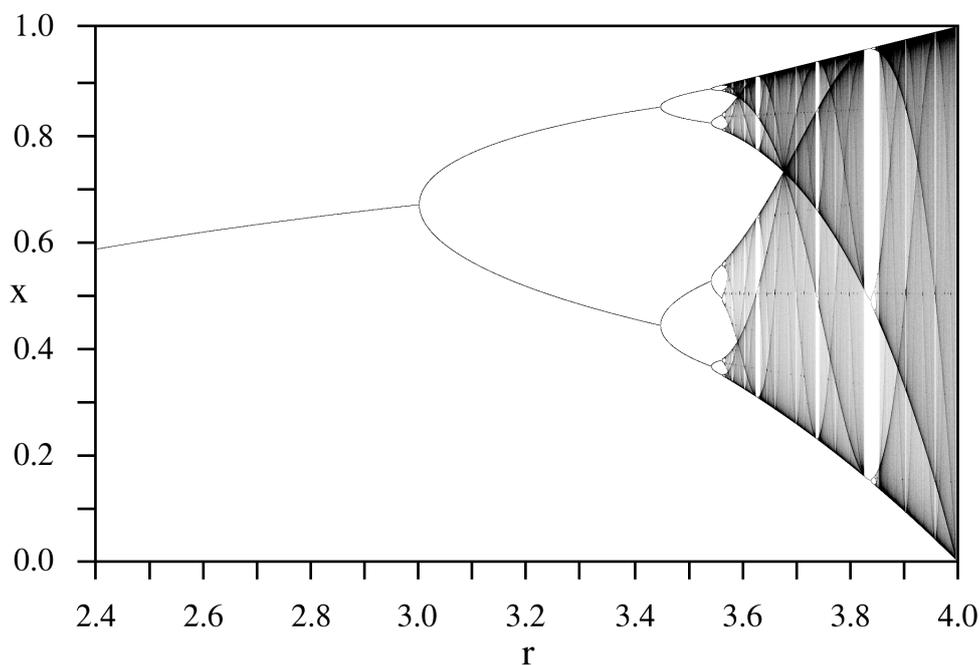


Figura 2.3: [4] Il grafico delle biforcazioni per la mappa logistica

La figura (2.3) mostra il grafico delle biforcazioni per la mappa logistica. Il grafico riporta la posizione dell'equilibrio stabile (sia esso un punto fisso, un 2^n ciclo, o un attrattore strano), al variare del parametro r . In figura è presente solo l'intervallo $2.4 \leq r \leq 4$, cioè la parte interessante in cui osserviamo le biforcazioni. A sinistra, il grafico scende fino a che, in $r = 1$, tocca l'asse orizzontale e vi si sovrappone per tutto l'intervallo $0 \leq r \leq 1$, in quest'intervallo

infatti, $x^* = 0$ è l'unico punto fisso stabile. Dal grafico notiamo come, nella biforcazione di un generico 2^n -ciclo lo sdoppiamento dei singoli punti avviene contemporaneamente in ogni singolo ramo, cioè allo stesso valore di r . Questo è dovuto ancora una volta alla chain rule (2.6) per cui si ha che $f^{(2^n)'}(t_i)$ è uguale in ogni punto del ciclo.

La regione in cui $r > r_\infty$, dove il comportamento è caotico, è particolarmente densa di punti (gli attrattori strani sono insiemi frattali). Questa regione è inaspettatamente intervallata da finestre di periodicità, ossia regioni limitate di r in cui il comportamento torna a essere regolare e le traiettorie si stabilizzano in p -cicli stabili (con p non necessariamente una potenza di 2). La finestra più evidente inizia vicino a $r \approx 3.83$ e presenta un 3-ciclo stabile (vedi sezione 2.2). Un grafico delle biforcazioni come quello in figura (2.3) è ottenuto plottando, per svariati valori di r , circa 200 iterazioni della funzione dopo aver atteso un'abbondante transiente (che in genere è dell'ordine di 10^6 iterazioni). Aspettando il transiente infatti le iterazioni si stabilizzano sugli equilibri attrattivi (punti fissi o 2^n -cicli), perdendo l'informazione del dato iniziale, in questo modo plotteremo soltanto i punti che corrispondono agli attrattori.

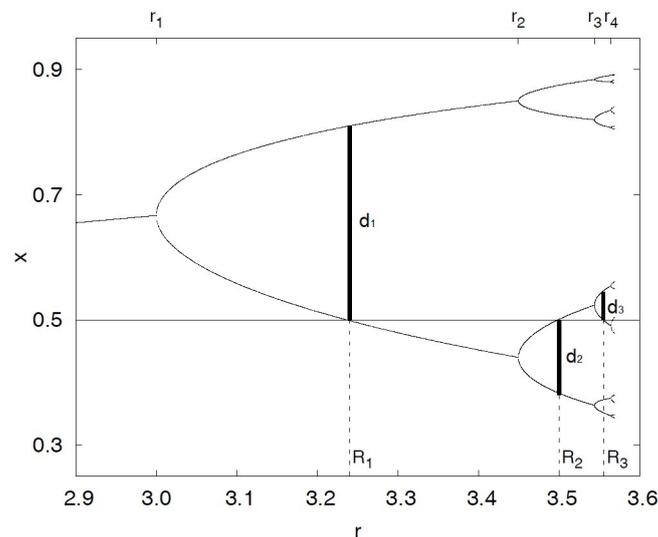


Figura 2.4: ([1], pag. 140) Il grafico delle biforcazioni, in cui si possono vedere i valori di r in cui si instaurano le prime biforcazioni (in alto: r_1, r_2, r_3, \dots) e quei valori che corrispondono ai cicli superstabili (in basso: R_1, R_2, R_3, \dots). Si mettono in evidenza anche le distanze d_n tra il massimo e il più vicino punto del 2^n -ciclo in corrispondenza dei R_n

Precedentemente sono stati definiti gli R_n come quei valori di r in cui osserviamo dei 2^n -cicli superstabili, caratterizzati dal fatto che, in loro corrispondenza vale $f_{R_n}^{(2^n)'}(t_i) = 0$. Ricordando ancora una volta la chain rule, un ciclo superstabile deve avere $x = \frac{1}{2}$ tra i suoi punti. Possiamo visualizzare questo nel grafico in figura (2.4) tracciando l'orizzontale alla quota del massimo della funzione ($x = \frac{1}{2}$) e vedere le intersezioni con i rami del grafico delle biforcazioni, le quali, chiaramente, corrisponderanno ai valori R_n . Prendiamo in considerazione ora, in ogni 2^n -ciclo superstabile, la distanza tra $x = \frac{1}{2}$ e il punto del ciclo che gli sta più vicino, denotandola con d_n (come si vede in figura (2.4)). Anche il rapporto $\frac{d_n}{d_{n+1}}$ tende a un limite universale per n crescenti [2]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha \approx -2.5029... \quad (2.16)$$

Dove il segno meno è motivato dal fatto che il segno delle distanze d_n è alternante. Quindi α e δ sono costanti universali (di Feigenbaum) e sono caratterizzanti del meccanismo del period doubling della mappa logistica. Vedremo nella sezione 2.4 che in realtà questo vale per una qualsiasi unimodale con massimo quadratico.

2.1 Esponente di Liapunov

Abbiamo anticipato come la mappa assuma comportamento caotico dopo r_∞ . Quando un modello deterministico mostra comportamenti imprevedibili e caotici, si dice che esso ha dipendenza sensibile sui dati iniziali. Per quantificare questa dipendenza si può definire l'esponente di Liapunov: l'idea è quella che due orbite inizialmente vicine si separino in maniera mediamente esponenziale. Dunque, consideriamo la funzione f della mappa iterata che intendiamo studiare. Sia x_0 il dato iniziale, $x_0 + \delta_0$ un punto nelle immediate vicinanze (δ_0 è arbitrariamente piccolo) e $\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)$.

Allora se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|\delta_n| \approx |\delta_0| e^{n\lambda} \quad \text{per } n \rightarrow \infty \quad (2.17)$$

chiameremo λ esponente di Liapunov. È facile intuire che a orbite stabili corrispondono coefficienti di Liapunov negativi, le orbite infatti si avvicinano tra di loro. Esponenti di Liapunov positivi invece sono sintomo di caos: se la dinamica è confinata e le orbite vicine si allontanano esponenzialmente allora il comportamento complessivo sarà caotico.

Immediatamente ricaviamo:

$$\begin{aligned} \lambda &\approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln |f^{(n)'}(x_0)| \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ricordando la chain rule:

$$f^{(n)'}(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \quad (2.19)$$

Troviamo:

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.20)$$

Se quest'ultima espressione ammette limite per $n \rightarrow \infty$, allora definiamo l'esponente di Liapunov dell'orbita avente dato iniziale in x_0 con il limite:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right) \quad (2.21)$$

Dunque in generale λ dipende da x_0 , tuttavia assume lo stesso valore per tutti gli x_0 nel bacino di attrazione di un equilibrio stabile [5].

Prendiamo il caso in cui la mappa f abbia un p-ciclo stabile. Se x_0 è un elemento di un p-ciclo

stabile, allora esso è un punto fisso stabile di $f^{(p)}$, dunque $|f^{(p)'}(x_0)| < 1$. Allora riprendendo la (2.21) e scrivendo $n = k \cdot p$ troviamo:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k \cdot p} k \sum_{i=0}^{p-1} \ln |f'(x_i)| \right) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \ln |f'(x_i)| \end{aligned} \quad (2.22)$$

Usando ora la chain rule al contrario:

$$\lambda = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \ln |f'(x_i)| = \frac{1}{p} \ln |f^{(p)'}(x_0)| < 0 \quad (2.23)$$

Se inoltre il p-ciclo è super stabile allora $|f^{(p)'}(x_0)| = 0$, ottenendo $\lambda = -\infty$.

Se valutiamo invece il caso in cui x_0 appartiene a un 2^n -ciclo critico (ossia in corrispondenza di una biforcazione dove il 2^n -ciclo si sdoppia in un 2^{n+1} -ciclo), troviamo, riutilizzando la (2.23):

$$\lambda = \frac{1}{2^n} \ln |f^{(2^n)'}(x_0)| = \frac{1}{2^n} \ln |-1| = 0 \quad (2.24)$$

Dove abbiamo utilizzato il fatto che in corrispondenza di una biforcazione vale che $f^{(2^n)'}(x_0) = -1$.

Generalmente l'esponente di Liapunov è calcolato computazionalmente, tranne in alcuni casi semplici in cui può essere derivato analiticamente.

Per la mappa logistica $f(x) = rx(1-x)$ il calcolo può essere svolto nel seguente modo: ad ogni valore di r si parte da una condizione iniziale arbitraria, si effettuano un certo numero di iterazioni (ad esempio qualche centinaio), così da ignorare il comportamento al transiente. Dopodichè si effettuano un altro gran numero di iterazioni (ad esempio 10000), e per ogni iterazione si calcola $\ln |f'(x_i)| = \ln |r - 2rx_i|$. Infine si trova λ facendo una somma come in (2.21) di tutti i termini appena calcolati.

Con questa procedura si può ottenere il grafico riportato in figura (2.5). Si può confrontare questo grafico con quello delle biforcazioni in figura (2.3), notando innanzitutto che λ diventa positivo per la prima volta quando $r = r_\infty \approx 3.57$, ossia quando il sistema diventa caotico. Come previsto, λ è negativo prima di r_∞ e si annulla in corrispondenza delle biforcazioni. Dopo r_∞ , invece, λ è generalmente positivo, ma torna ad essere negativo in corrispondenza delle finestre di stabilità.

In realtà, anche se non è possibile notarlo nell'immagine per via della risoluzione limitata, tutti picchi discendenti dovrebbero arrivare a $\lambda = -\infty$, dato che ad ogni caduta è garantita l'esistenza di un ciclo superstabile [3].

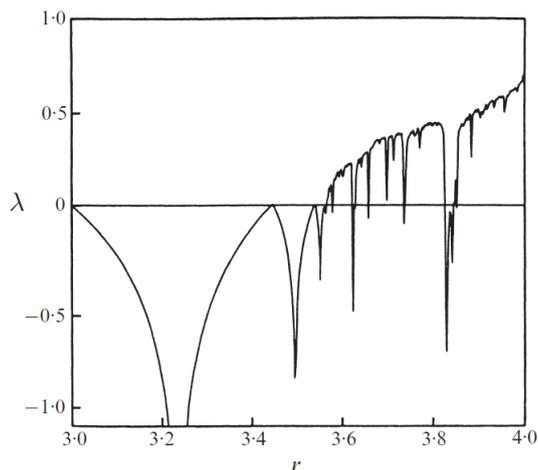
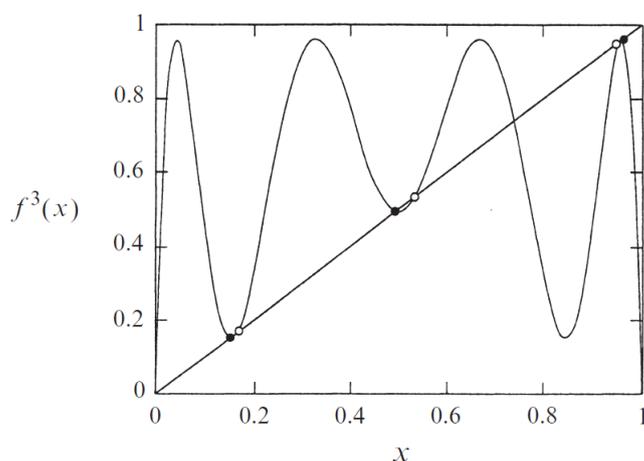


Figura 2.5: ([3], pag. 376)

2.2 Finestre di periodicità e intermittenza

Come già accennato all'inizio del capitolo, un dato inaspettato nel grafico delle biforcazioni in figura (2.3) è la comparsa di finestre di periodicità, ossia intervalli limitati di r per cui il comportamento, precedentemente caotico, torna ad essere ciclico e stabile. La finestra del 3-ciclo è la più grande e appare per $3.8284... \leq r \leq 3.8415...$ Spiegheremo ora il meccanismo grazie al quale il 3-ciclo compare. Il meccanismo è lo stesso per la finestra di un qualsiasi p -ciclo, il caso $p = 3$ è solamente il più semplice a livello analitico.

Figura 2.6: ([3], pag. 369) Grafico di $f^{(3)}$ per $r = 3.835$

Ogni punto del 3-ciclo soddisfa $x_i = f^{(3)}(x_i)$. In figura possiamo vedere che le soluzioni di questa equazione esistono nella finestra di r sopra indicata: i punti neri corrispondono al 3-ciclo stabile (in quei punti vale che $|f^{(3)'}(x_i)| < 1$, questi sono i 3 punti che effettivamente appaiono nel grafico delle biforcazioni), quelli vuoti corrispondono al 3-ciclo instabile ($|f^{(3)'}(x_i)| > 1$), le altre due soluzioni (in $x = 0$ e $x \approx 0.7$) sono punti fissi di f . Diminuendo r , la funzione nel grafico (2.6) cambierà: i massimi scenderanno e i minimi saliranno, dunque esiste un valore di r per cui il grafico di $f^{(3)}$ sarà tangente alla bisettrice del quadrante (questo avviene per tutti e

3 i picchi contemporaneamente, sempre per via della chain rule (2.6)). A questo valore critico di r gli equilibri stabili e instabili di $f^{(3)}$ arrivano a coincidere in un unico punto e si parla di biforcazione tangente, essa sancisce l'inizio della finestra di regolarità [3]. Si può mostrare che la biforcazione tangente avviene per $r = 1 + \sqrt{8} \approx 3.8284\dots$, contrariamente a quanto si pensa, risolvere analiticamente questo problema è tutto fuorchè banale. Si veda Saha e Strogatz [6] per la soluzione.

Una volta che il 3-ciclo si è creato, esso esibirà il period doubling nella stessa maniera presentata sin ora, ognuno dei 3 rami subirà biforcazioni esattamente come il ramo principale in figura (2.3). Se si potesse zoomare a sufficienza su uno dei 3 rami si ritroverebbe la stessa immagine, la struttura si ripete uguale a se stessa. Ciò che succede è il copione ben noto: aumentando r i punti neri in figura raggiungeranno una pendenza $f^{(3)'}(x_i) = -1$ e avranno luogo delle biforcazioni pitchfork che raddoppieranno il periodo, si genereranno mano a mano $(3 \cdot 2^n)$ -cicli a cascata fino all'infinito nuovamente, portando a completamento la transizione al caos. Questo avviene con una costante δ che è numericamente identica a quella in (2.15), questo perchè localmente i picchi di $f^{(3)}$ sono sempre quadratici.

Un'altro aspetto interessante dell'universalità è che l'ordine di comparsa delle finestre di periodicità è lo stesso per ogni mappa unimodale. Ossia l'ordine con cui i p-cicli stabili si presentano nella regione caotica quando r aumenta è universale, per questo la sequenza viene detta "U-sequence". Questo risultato fu dimostrato da Metropolis *et al.* (1973) [3].

Vediamo ora il fenomeno dell'intermittenza nella dinamica della logistica. Se da $r = 1 + \sqrt{8}$ diminuiamo r ulteriormente, $f^{(3)}$ perde la tangenza con la bisettrice, dunque gli equilibri spariranno del tutto (tranne i punti fissi di f) e si instaura il meccanismo dell'intermittenza. In generale l'intermittenza è uno dei meccanismi di transizione al caos per il quale l'orbita di un'equazione differenziale o di una mappa iterata alterna in maniera casuale fasi di comportamento regolare e periodico (laminare) a brevi periodi di comportamento fortemente irregolare e caotico. La frequenza nell'apparizione delle fasi caotiche e la loro durata dipende da uno o più parametri esterni della mappa: in genere esiste un valore critico r_c al di sotto (o al di sopra) del quale le orbite mostrano oscillazioni completamente regolari. Per valori leggermente maggiori (o inferiori) di r_c le fluttuazioni rimangono apparentemente periodiche (anche se non lo sono con esattezza) per lunghi tempi con rare e brusche interruzioni nelle quali il comportamento diventa caotico per intervalli molto brevi. Dopo di questi, il comportamento ritorna laminare. Per valori di r via via maggiori (o minori) le interruzioni caotiche si fanno più frequenti e con durata sempre maggiore, fintanto che risulta impossibile riconoscere le oscillazioni periodiche, il sistema è diventato completamente caotico. Nel fenomeno dell'intermittenza dunque, i sistemi effettuano la transizione al caos in maniera continua e graduale.

Un equilibrio perde la stabilità se il modulo di uno degli autovalori della linearizzazione della mappa in quel punto diventa maggiore di uno. Questo può avvenire in 3 modi: attraverso 1, attraverso -1 , oppure due autovalori complessi coniugati fuoriescono simultaneamente dalla sfera unitaria. Per questo motivo Pomeau e Manneville [7] (i primi a studiare questo fenomeno) distinsero in intermittenza del primo, del secondo e del terzo tipo. Dato che l'intermittenza nella mappa logistica avviene attraverso una biforcazione tangente, si tratterà della prima. Come si è detto precedentemente, se r è leggermente inferiore di $r_c = 1 + \sqrt{8}$, il grafico di $f^{(3)}$ diventa quasi tangente alla bisettrice laddove prima c'erano degli equilibri (per valori di r maggiori). Si crea quindi un sottile canale tra le due.

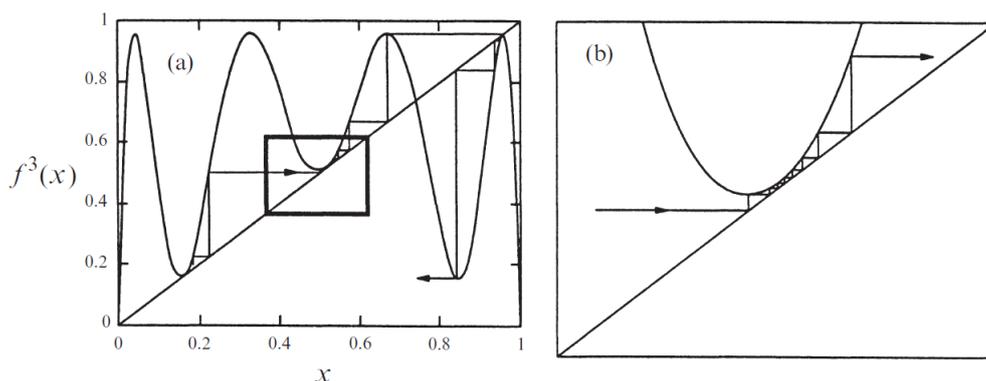


Figura 2.7: ([3], pag. 371) Grafico di $f^{(3)}$ per r leggermente minore di $r_c = 1 + \sqrt{8}$ (a) con le iterazioni rappresentate con i cobweb (b)

La figura permette di capire intuitivamente come funziona l'intermittenza: in corrispondenza del canale le iterazioni della mappa restano incastrate per molti passaggi e i valori di x_n non variano in maniera significativa. Questa è quindi la fase laminare in cui le orbite sembrano dei 3-cicli. Naturalmente, più stretto è il canale e più numerose saranno le iterazioni necessarie per attraversarlo, dunque la fase laminare risulta più duratura.

Dopo che l'orbita ha lasciato il canale, il moto diventa caotico per un tempo più o meno breve, finché la traiettoria non viene riiniettata in uno dei 3 canali e una nuova fase laminare avrà luogo.

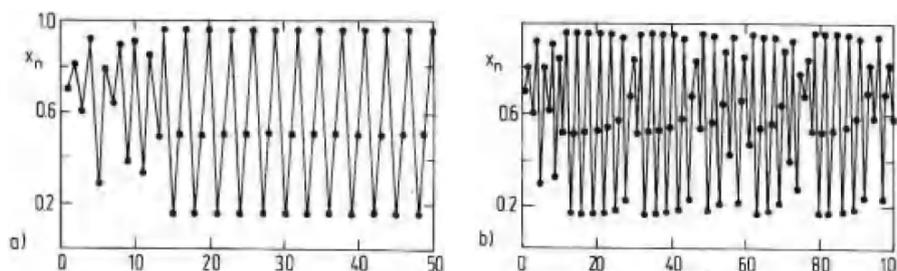


Figura 2.8: ([8], pag. 72) Orbite della mappa logistica con dato iniziale $x = 0.7$; A sinistra, per $r_c - r = -0.02$, l'orbita approssima il 3-ciclo stabile; A destra, per $r_c - r = 0.002$, si osserva chiaramente il fenomeno dell'intermittenza

È interessante notare come, in generale, affinché l'intermittenza si manifesti è necessario che la funzione della mappa da iterare non sia invertibile. Per un diffeomorfismo infatti è impossibile che le iterazioni vengano reindirizzate verso il canale, dunque una volta iniziata la fase caotica il sistema non può più tornare in regime laminare [7].

Come è già stato accennato, le interruzioni caotiche sono distribuite nel tempo in maniera casuale. Si può tuttavia dimostrare che la lunghezza media delle regioni laminari $\langle l \rangle$ è una funzione della distanza dal valore critico $\epsilon = r_c - r$. Si trova che

$$\langle l \rangle \propto \epsilon^{-\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

Per una dimostrazione si veda [8], pag 73.

Riassumendo, per $r = 1 + \sqrt{8}$ la mappa effettua la transizione al caos in entrambe le direzioni:

aumentando r lo fa per effetto del period doubling, il 3-ciclo raddoppia il suo periodo all'infinito, diminuendo r la mappa raggiunge il caos tramite l'intermittenza.

2.3 Regime caotico

Altre proprietà molto interessanti emergono quando $r > r_\infty$. Nelle regioni caotiche infatti coesistono diversi cicli instabili (tutti quelli di periodo 2^n e quelli lasciati dalle finestre di stabilità) insieme ad un attrattore formato da un numero infinito di punti (per $r < 4$). Questo attrattore viene chiamato 'attrattore strano' e gli corrisponde una traiettoria aperiodica. È a tutti gli effetti un insieme frattale, mostra infatti caratteristiche di auto-similarità e risulta topologicamente equivalente a un insieme di Cantor. Dunque si tratta di un insieme di punti non numerabile, di misura nulla, i cui punti sono disconnessi (non sono contenuti intervalli nell'insieme, anche se i suoi punti possono essere arbitrariamente vicini tra di loro). Inoltre, l'insieme è chiuso, cioè ogni successione convergente di elementi dell'insieme converge nell'insieme [5].

Il caso $r = 4$ esula dalle caratteristiche appena descritte, per questo valore infatti la mappa non possiede alcun tipo di attrattore. Per studiare questo comportamento possiamo definire il cambio di coordinate (non iniettivo):

$$x = \sin^2(\pi\theta) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\pi\theta)] \quad (2.26)$$

Dove possiamo restringere $\theta \in [0, 1]$ senza perdita di generalità. Allora(2.1) diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[1 - \cos(2\pi\theta_{n+1})] &= [1 - \cos(2\pi\theta_n)][1 + \cos(2\pi\theta_n)] \\ &= \frac{1}{2}[1 - \cos(4\pi\theta_n)] \end{aligned} \quad (2.27)$$

Che ha soluzione

$$\theta_{n+1} = 2\theta_n \pmod{1} \equiv g(\theta_n) \quad (2.28)$$

Abbiamo trovato che la coordinata θ evolve con la mappa della Bernoulli Shift. La dinamica della mappa logistica con $r = 4$ e quella della Bernoulli Shift sono quindi in qualche modo equivalenti. In principio potremmo risolvere l'evoluzione di (2.1) per un certo x_0 invertendo la (2.26) per trovare un corrispondente θ_0 . Poi iterando la Bernoulli Shift possiamo trovare x_n usando ancora la (2.26), così che $x_n = \sin^2(2^n\pi\theta_0)$.

La dinamica dello Shift di Bernoulli è abbastanza semplice, non ha equilibri se non in $\theta = 0$ e mostra comportamenti caotici per quasi ogni dato iniziale in $[0, 1]$. Per vederlo possiamo esprimere θ_0 nella sua espressione binaria:

$$\theta_0 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j} \equiv (0, a_1 a_2 a_3 \dots) \quad (2.29)$$

Ora notiamo che l'azione della mappa g è semplicemente quella di rimuovere il primo digit e spostare tutti gli altri a sinistra di un passo, ossia:

$$g(\theta_0) = (0, a_2 a_3 a_4 \dots) \quad (2.30)$$

Se θ_0 ha espressione binaria finita, ossia se $\theta_0 = \frac{q}{2^s}$ (per q, s interi positivi e q dispari), allora $\theta_n = 0$ per $n > s$. Se θ_0 è comunque razionale con espressione binaria infinita, $\theta_0 = \frac{q}{2^{sr}}$ (per interi positivi q, s , con $r \geq 3$ e dispari, $q, 2^{sr}$ coprimi tra loro) allora $\theta_n = \frac{q}{2^{s-nr}} \pmod{1}$. Abbiamo quindi una soluzione periodica $\theta_{n+p} = \theta_n$, per $n \geq s$. Se invece θ_0 è irrazionale, allora θ_n è aperiodica [5].

Naturalmente ogni soluzione periodica è instabile, perchè \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} .

Siano due orbite θ_n e θ'_n con dati iniziali irrazionali θ_0 e θ'_0 . Per quanto vicini siano questi, dopo sufficienti iterazioni della mappa $\theta_n - \theta'_n$ può assumere sostanzialmente ogni valore tra zero e uno. Questo perchè $\theta_n - \theta'_n$ dipende solo dai digits nelle espressioni binarie di θ_0 e θ'_0 che stanno dalla n -esima posizione in poi, vale infatti che $\theta_n - \theta'_n = 2^n(\theta_0 - \theta'_0) \pmod{1}$. Ossia abbiamo dipendenza sensibile sui dati iniziali.

Si può dimostrare inoltre che lo Shift di Bernoulli ammette una sorta di proprietà di ergodicità: ogni sua soluzione aperiodica infatti, assume ogni valore in $[0, 1]$ (o vi passa arbitrariamente vicino) infinite volte[8].

Vogliamo vedere come questo si traduce nella dinamica della mappa logistica con il cambio di coordinate (2.26). Non essendo quest'ultima una mappa iniettiva avremmo che un punto fisso della mappa logistica è mappato da un 2-ciclo dello Shift di Bernoulli (tranne $x = 0$ che corrisponde al solo punto fisso $\theta = 0$). Analogamente un 2-ciclo della logistica corrisponde a un 2-ciclo o a un 4-ciclo dello Shift di Bernoulli. In generale quindi, se x_0 corrisponde a un θ_0 razionale la sua orbita sarà periodica. Viceversa, se x_0 corrisponde a un θ_0 irrazionale, la sua orbita sarà aperiodica, x_n mostrerà dipendenza sensibile sul dato iniziale con relazione simile a quella scritta precedentemente per θ_n e θ'_n [5]. Abbiamo dato una prova concreta del comportamento caotico della mappa logistica per $r = 4$, perchè per questo valore può essere reso esplicito con il cambio di coordinate.

Una sensibilità simile si verifica anche per $r < 4$, ma con una differenza sostanziale: per questi valori di r la mappa possiede un attrattore frattale. L'attrattore è lo stesso per tutti i dati iniziali in $[0, 1]$, ma la posizione di x_n su di esso dipende sensibilmente da x_0 , per questo motivo il comportamento è ancora caotico anche per $r < 4$ [5].

In altri termini possiamo dire che anche la mappa logistica mostra un comportamento ergodico per $r = 4$, nel senso che le sue orbite possono esplorare tutto l'intervallo $[0, 1]$ passando per ogni suo punto (o passandogli arbitrariamente vicino) infinite volte (se x_0 è mappato da un θ_0 irrazionale). Questo naturalmente discende dal fatto che la dinamica dello Shift di Bernoulli per primo ha questa caratteristica, poi basta sapere che le dinamiche sono coniugate dal cambio di coordinate. Intuitivamente possiamo capire come questo non avvenga per $r < 4$: in questo caso la mappa è dotata dell'attrattore strano che, seppur formato da un insieme infinito di punti, non è denso in $[0, 1]$. Questo è immediato se si guarda al grafico delle biforcazioni in figura (2.3), l'attrattore semplicemente non si estende mai in tutto $[0, 1]$ per $r < 4$, ma ci sono intervalli alle estremità di $[0, 1]$ non toccati dall'attrattore.

Possiamo concludere questa discussione con un approccio probabilistico al problema. La domanda è la seguente: se l'orbita x_n ha comportamento ergodico, possiamo trattarla come una variabile aleatoria e associarle una densità di probabilità ?

Si può dimostrare che se θ_0 è irrazionale, allora la successione θ_n è uniformemente distribuita

sull'intervallo $[0, 1]$, ossia è un campione della variabile aleatoria Θ che soddisfa

$$P(a < \Theta < b) = b - a \quad (2.31)$$

Dove $a, b \in [0, 1]$ (per una prima dimostrazione si veda ([1]) pag. 69).

Dunque se ora X è la variabile aleatoria di x_n , tramite la (2.26) abbiamo (ricordando che il cambio di variabile che abbiamo scelto non è iniettivo)

$$\begin{aligned} P(\sin^2(\pi a) < X < \sin^2(\pi b)) &= P(a < \Theta < b) + P(1 - b < \Theta < 1 - a) \\ &= 2(b - a) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dove abbiamo preso, senza perdere di generalità, a e b che stanno dallo stesso lato di $\frac{1}{2}$. Rinominando $A = \sin^2(\pi a)$ e $B = \sin^2(\pi b)$ otteniamo

$$P(A < X < B) = \frac{2}{\pi}(\arcsin \sqrt{B} - \arcsin \sqrt{A}) \quad (2.33)$$

Questo ci restituisce la forma della funzione cumulativa della variabile X :

$$F(x) = P(X < x) = \frac{2}{\pi}(\arcsin \sqrt{x}) \quad (2.34)$$

Infine la densità di probabilità della variabile è data da

$$\rho(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \quad (2.35)$$

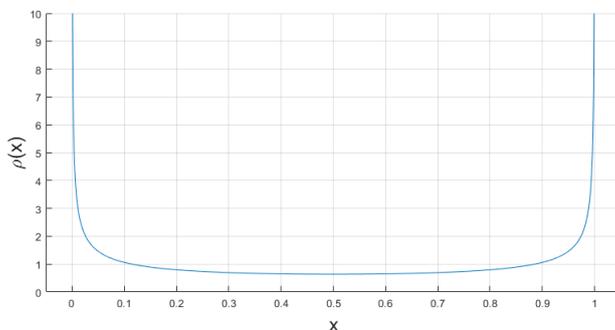


Figura 2.9: La densità di probabilità delle orbite della mappa logistica per $r = 4$

Questa distribuzione è particolarmente interessante, le proprietà statistiche di x_n sono le stesse per ogni x_0 . Quella stessa distribuzione emergerebbe anche calcolando una densità di probabilità "a mano" del tipo:

$$\rho(x; x(0)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^T \delta(x - x(n)) \quad (2.36)$$

Trovando che, coerentemente, risulta indipendente da $x(0)$ se si usa $r = 4$. La distribuzione (2.35) è anche la stessa che si troverebbe partendo da una distribuzione arbitraria $\rho_0(x)$ lasciandola evolvere secondo la mappa, ossia con

$$\rho_{n+1}(x) = \int \rho_n(y) \delta(x - f(y)) dy \quad (2.37)$$

ottenendo la sequenza $\rho_0(x), \rho_1(x), \rho_2(x), \dots, \rho_n(x), \dots$ che converge alla (2.35), indipendente da $\rho_0(x)$ (a meno di casi patologici come distribuzioni piccate con delle delta sulle posizioni dei p-cicli instabili ancora esistenti in $r = 4$) [1]. Un'altro motivo per cui la (2.35) è interessante è che essa è l'unica "fisicamente rilevante". Pensiamo alla mappa logistica dotata di un termine di rumore:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) + \epsilon\gamma_n \quad (2.38)$$

dove ϵ è una quantità molto piccola e γ_n è una variabile aleatoria di media nulla e indipendente da n . In questo modo le orbite periodiche instabili presenti quando $r = 4$ sono ora una possibilità completamente eliminata. Le orbite di questo nuovo sistema non percorreranno mai quelle traiettorie periodiche, tuttavia avranno ancora la stessa distribuzione (2.35). In altre parole, la (2.35) è ancora invariante secondo (2.37), anche quando il sistema è dotato di rumore.

Questo tipo di studio per $r < 4$ risulta più complesso. La natura frattale dell'attrattore complica di molto le distribuzioni di probabilità che si ottengono, esse risultano infatti discontinue in un numero infinito di punti [1][5].

2.4 Rinormalizzazione e universalità

Precedentemente abbiamo introdotto i parametri universali δ e α con le relazioni (2.14), (2.15) e (2.16). In questo capitolo esporremo parte della teoria di rinormalizzazione ideata da Feigenbaum che indaga la loro provenienza.

Potremmo riscrivere le relazioni (2.14) e (2.16) nel seguente modo:

$$r_n - r_\infty = -A\delta^{-n} + o(\delta^{-n}), \quad d_n \approx \frac{B}{-\alpha^n} \quad (2.39)$$

La costanti δ e α sono universali nel senso che sono le stesse indipendentemente dalla mappa (a patto che la sua funzione abbia un massimo quadratico), mentre A , B e r_∞ dipendono dalla funzione[5].

Una relazione del tutto simile vale per la sequenza degli R_n , con lo stesso limite r_∞ e lo stesso δ come rate di avvicinamento.

Prendiamo ad esempio la mappa con il seno:

$$x_{n+1} = r \sin(\pi x_n) \quad (2.40)$$

Con $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq r \leq 1$.

Questa, come la logistica, è una unimodale con massimo quadratico, la loro dinamica è qualitativamente identica. Se plottiamo il grafico della biforcazioni per questa mappa (2.10) la somiglianza con la figura (2.3) è sorprendente.

In entrambi i casi la transizione al caos avviene attraverso il period-doubling regolato dai medesimi δ e α . Ci sono le periodic windows che appaiono nello stesso ordine della mappa logistica (dalla U-sequence) e con proporzioni relative simili (quella con periodo 3 è la più grande, seguita da quelle con periodo 5 e 6).

Cosa succede per unimodali con massimi non quadratici?

L'universalità continua a valere: in generale esiste una classe di universalità per ogni tipologia di massimo (quadratico, con potenze maggiori di 2, massimi non derivabili "a tenda") e in ogni classe il period-doubling sarà universale, ossia governato da parametri δ e α che saranno specifici di quella classe. Vale a dire che se avessimo effettuato tutto questo studio con una funzione

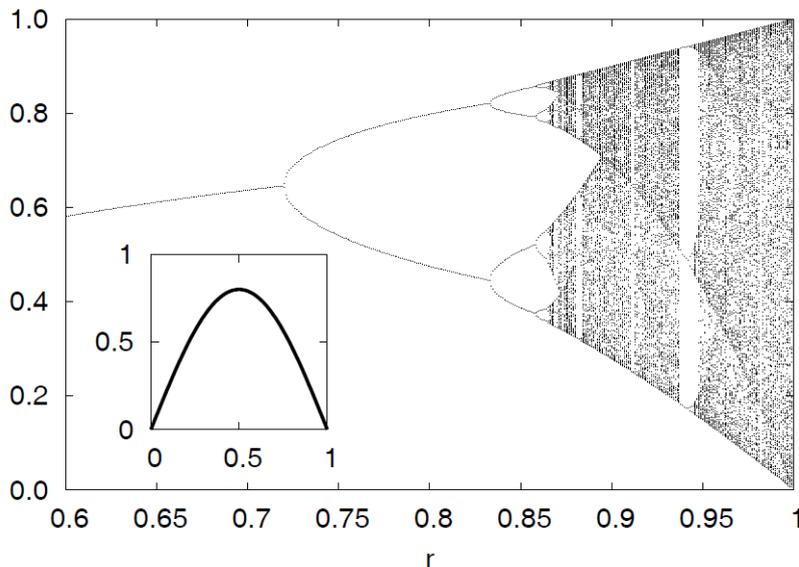


Figura 2.10: ([1], pag. 141) Il grafico delle biforcazioni per la mappa $x_{n+1} = r \sin(\pi x_n)$

con un massimo con potenza 4, nulla sarebbe cambiato sin ora se non che avremmo trovato δ e α numericamente diversi e un grafico delle biforcazioni qualitativamente differente [3][8].

Vediamo ora la parte più tecnica dell'approccio di Feigenbaum

Questa teoria nasce dall'idea che il modello incontrato sin ora si presenti "self-similar" in più occasioni, ossia presenti una sorta di simmetria di riscalamento. Si pensi al grafico delle biforcazioni, uno potrebbe prendere uno dei rami, ottenuto dopo un certo numero di raddoppiamenti del periodo, e se si dilata opportunamente quest'ultimo, esso si ripresenta sostanzialmente identico al grafico originale. La convergenza degli r_n e d_n è geometrica, dunque le proporzioni relative date dai "coefficienti di scalamento" δ e α sono le stesse anche dopo un certo numero di iterazioni. Un'altra evidenza che suggerisce un approccio di questo tipo sono i grafici in figura (2.11) che commenteremo più avanti.

Abbiamo introdotto precedentemente i 2^n -cicli superstabili come quei 2^n -cicli in cui vale:

$$f_{R_n}^{(2^n)'}(t_i) = f'_{R_n}(t_{2^n}) \cdot \dots \cdot f'_{R_p}(t_1) = 0 \quad (2.41)$$

Come si era già detto, affinché la derivata si annulli uno dei punti deve trovarsi proprio in corrispondenza del massimo, ossia $t_i = \frac{1}{2}$ per un certo i . Dunque tutti gli altri punti del ciclo sono $t_i = f_{R_n}^{(i)}(\frac{1}{2})$ per $i = 1, 2, \dots, 2^n - 1$. Tra di questi, il più vicino a $x = \frac{1}{2}$ è $f_{R_n}^{(2^{n-1})}(\frac{1}{2})$, cioè il punto che si trova a metà ciclo. Questo è intuibile dal fatto che questi due punti dovessero essere un unico punto del 2^{n-1} -ciclo prima che l' n -esimo period-doubling li separasse. Ossia erano un unico punto fisso di $f_{R_n}^{(2^{n-1})}$, dopo la biforcazione diventeranno un 2-ciclo di $f_{R_n}^{(2^{n-1})}$. Ora abbiamo un'espressione analitica per le distanze d_n che avevamo introdotto nella figura (2.4):

$$d_n = f_{R_n}^{(2^{n-1})}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \quad (2.42)$$

Per semplificare la notazione d'ora in poi trasleremo il massimo ($x = \frac{1}{2}$) nell'origine. Essendo una mappa ricorsiva che mappa un intervallo in sé stesso, servirà anche sottrarre alla funzione la stessa quantità. In altre parole ridefiniamo la funzione della mappa come: $\tilde{f} = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$,

dove f è la mappa logistica definita in (2.1). In questo modo ora \tilde{f} mappa $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ in sè stesso. Per non appesantire la notazione in futuro useremo sempre f intendendo \tilde{f} . Dunque la (2.42) ora diventa:

$$d_n = f_{R_n}^{(2^n-1)}(0) \tag{2.43}$$

Dalla (2.39) ricaviamo che il limite:

$$s_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+1}}^{(2^n)}(0) \tag{2.44}$$

Esiste.

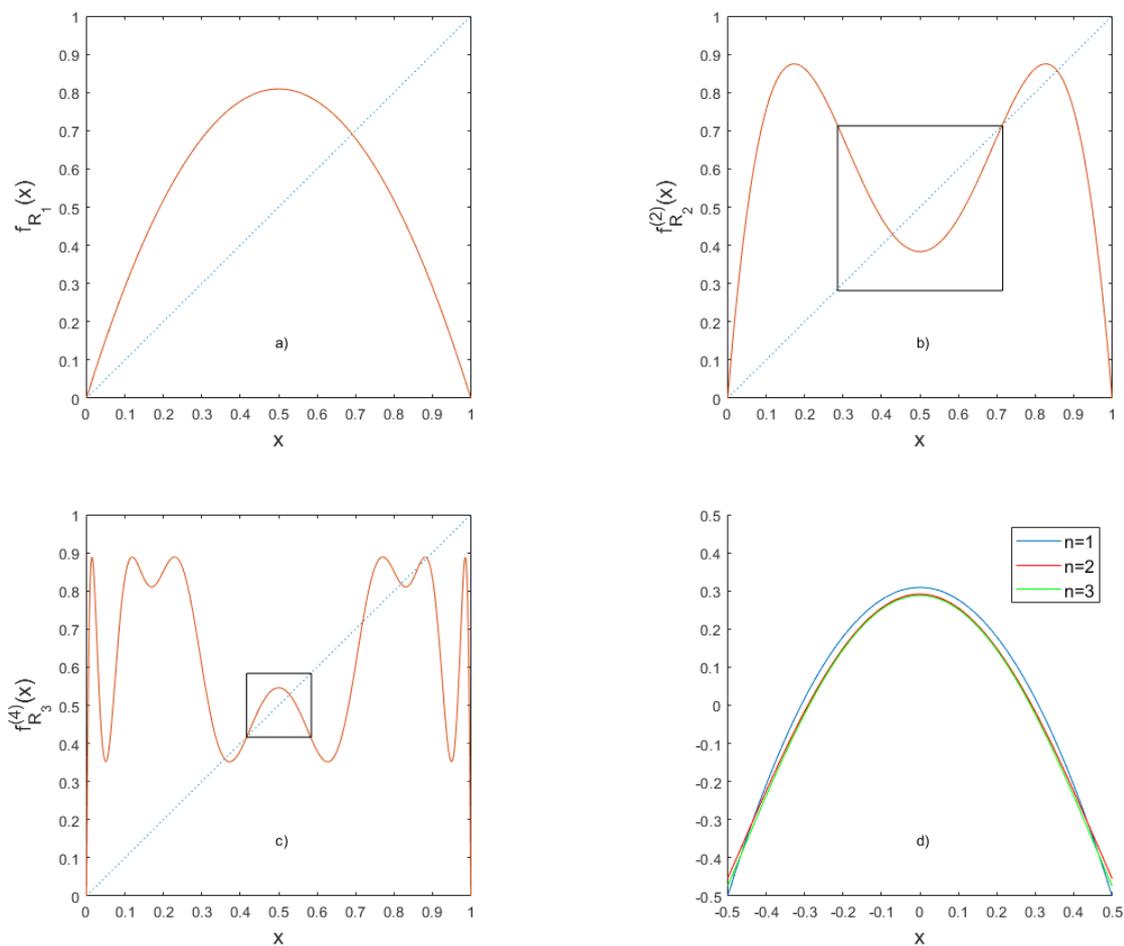


Figura 2.11: Possiamo notare come le funzioni in a), b), c) ristrette nei quadrati neri siano pressochè identiche a meno di dilatarle e capovolgerle opportunamente. In d) abbiamo sovrapposto le porzioni nei 3 quadrati dopo averle dilatate e aver traslato il massimo nell'origine, queste sarebbero le prime 3 approssimazioni di $g_1(x)$.

L'immagine (2.11) ci porta a ipotizzare che non sia solo il limite (2.44) a convergere ma che possa essere generalizzato a tutto l'intervallo, ossia:

$$g_1(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+1}}^{(2^n)} \left[\frac{x}{(-\alpha)^n} \right] \tag{2.45}$$

(s_1 non è altro che la funzione g_1 valutata in $x = 0$ [2])

Computazionalmente si verifica che il limite di questa successione esiste e la funzione è derivabile [9]. Se g_1 viene ristretta all'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, essa rappresenta una mappa unimodale ben definita, con massimo quadratico e dotata di un 2-ciclo supestable, come si può dedurre dall'immagine (2.11). Sovrapponendo i primi 3 termini della successione nel limite (2.45) vediamo che le 3 funzioni si assomigliano molto, la loro dinamica non può che essere sostanzialmente analoga. La grande importanza che questa funzione ricopre all'interno della teoria consiste nel fatto che essa è universale nella classe di universalità delle funzioni unimodali con massimo quadratico, ossia il limite scritto in (2.45) avrebbe dato lo stesso risultato per qualsiasi f unimodale con massimo quadratico. Anche questo è verificabile computazionalmente. Intuitivamente possiamo capire perchè questo si verifica: a determinare la forma di g_1 non è altro che il comportamento di f vicino al suo massimo ($x = 0$ dopo il cambio di variabile). Infatti il riscaldamento $\frac{x}{(-\alpha)^n}$ con $n \rightarrow \infty$ rende ininfluenza il comportamento di f lontano dal massimo[2]. Per analogia possiamo definire l'intera famiglia di funzioni:

$$g_i(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+i}}^{(2^n)} \left[\frac{x}{(-\alpha)^n} \right], \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.46)$$

Come per prima, tutte queste funzioni sono universali per qualsiasi f unimodale con massimo quadratico. Ogni classe di universalità avrà la sua specifica famiglia di funzioni g_i [3]. Notiamo che tutte queste funzioni sono legate dalla trasformazione (introduciamo ora l'operatore di "doubling transformation" T):

$$g_{i-1}(x) = (-\alpha) g_i \left[g_i \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right] \equiv T[g_i(x)] \quad (2.47)$$

Questo perchè:

$$\begin{aligned} g_{i-1}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+i-1}}^{(2^n)} \left[\frac{x}{(-\alpha)^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha) (-\alpha)^{n-1} f_{R_{n+i-1}}^{(2^{n-1+1})} \left[-\frac{1}{\alpha} \frac{x}{(-\alpha)^{n-1}} \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ponendo $k = n - 1$:

$$\begin{aligned} g_{i-1}(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (-\alpha) (-\alpha)^k f_{R_{k+i}}^{(2^{k+1})} \left[-\frac{1}{\alpha} \frac{x}{(-\alpha)^k} \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (-\alpha) (-\alpha)^k f_{R_{k+i}}^{(2^k)} \left[\frac{1}{(-\alpha)^k} (-\alpha)^k f_{R_{k+i}}^{(2^k)} \left[-\frac{1}{\alpha} \frac{x}{(-\alpha)^k} \right] \right] \\ &= (-\alpha) g_i \left[g_i \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

Naturalmente, dalla (2.46), possiamo prendere il limite $i \rightarrow \infty$, definendo $g_\infty(x)$, che generalmente si indica solo con $g(x)$:

$$g(x) := \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x) \quad (2.50)$$

Equivalentemente

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{r_\infty}^{(2^n)} \left[\frac{x}{(-\alpha)^n} \right] \quad (2.51)$$

Dalla (2.47) discende immediatamente che $g(x)$ è punto fisso dell'operatore T

$$g(x) = (-\alpha)g\left[g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right] \equiv T[g(x)] \quad (2.52)$$

Quella appena ottenuta è un'equazione funzionale per $g(x)$. Specifichiamo le sue condizioni al contorno dicendo che $g'(0) = 0$, dato che siamo nella classe di universalità delle funzioni con massimo quadratico, dunque anche $g(x)$ avrà un massimo quadratico. In oltre, senza perdere di generalità, possiamo porre $g(0) = 1$, infatti è immediato verificare che se una certa $g(x)$ è soluzione della (2.52), allora ogni $\mu g(\frac{x}{\mu})$ (con $\mu \neq 0$) lo è. L'equazione (2.52) non dice nulla sulle scale assolute. Dopo di chè, dall'equazione valutata in $x = 0$, $g(0) = (-\alpha)g(g(0))$, e da $g(0) = 1$ troviamo: $\alpha = -\frac{1}{g(1)}$. Richiediamo infine che g sia derivabile [2]. Ad oggi non esiste ancora una teoria matematica che sappia trovare le soluzioni dell'equazione funzionale in maniera completa.

Un modo per procedere è semplicemente quello di approssimare $g(x)$ con una serie di potenze

$$g(x) = 1 + c_2x^2 + c_4x^4 + \dots \quad (2.53)$$

(Notiamo come questa approssimazione soddisfa tutte le richieste appena fatte su $g(x)$)

Successivamente basta inserire l'approssimazione nell'equazione (2.52) ed eguagliando i coefficienti delle potenze dello stesso grado si ottiene un sistema non lineare nelle incognite α, c_2, c_4, \dots , così facendo abbiamo simultaneamente una stima di α e $g(x)$.

Anche in questi passaggi si nota come α e $g(x)$ siano universali: non abbiamo dovuto dare nessun dettaglio sulla funzione f della mappa se non settare la scala, imporre $g'(0) = 0$, e chiedere che $g(x)$ abbia un massimo quadratico in $x = 0$.

Feigenbaum usò un'espansione con ben sette termini ottenendo $c_2 \approx -1.5276$, $c_4 \approx 0.1048$ e la stima $\alpha \approx 2.502907876$ [9]. Se ad esempio usiamo il troncamento $g(x) = 1 + cx^2$, sostituendolo nell'equazione funzionale otteniamo:

$$\begin{aligned} 1 + cx^2 &= (-\alpha) \left[1 + c \left[1 + c \left(-\frac{x}{\alpha} \right)^2 \right]^2 \right] \\ &= (-\alpha) \left[1 + c + \frac{2c^2x^2}{\alpha^2} + \frac{c^3x^4}{\alpha^4} \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

Eguagliando i coefficienti di x^0 e x^2 e ignorando il termine in x^4 , troviamo il sistema:

$$\begin{cases} 1 = -\alpha(1 + c) \\ c = -\frac{2c^2}{\alpha} \end{cases} \quad (2.55)$$

Otteniamo $c = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $\alpha = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$. È un metodo brutale ma porta ad un errore del 10% sulle migliori stime odierne di α .

Ora mostriamo la validità del limite (2.39) per gli r_n e come anche δ emerga dalla teoria.

Ricordando quanto detto all'inizio di questa sezione, la sequenza degli R_n ammette il limite per n grandi:

$$R_n - r_\infty = -A'\delta^{-n} + o(\delta^{-n}) \quad (2.56)$$

Vogliamo provare che questa è vera, in particolare che il limite è lo stesso per R_n e r_n , con lo stesso rate δ . Allo stesso tempo faremo vedere che

$$g_i(x) - g(x) \approx C\delta^{-i}u_1(x) \quad \text{per } i \rightarrow \infty \quad (2.57)$$

In questo senso, δ è l'autovalore dell'autofunzione $u_1(x)$ della linearizzazione J_g di T nel 'punto' g nello spazio delle funzioni continue [9].

La linearizzazione di un operatore non lineare T viene detta derivata di Frechet [5]. Per calcolarla attorno a una funzione ψ per l'operatore T scriviamo (con ϕ sufficientemente regolare):

$$T(\psi + \epsilon\phi) = T\psi + \epsilon J_\psi\phi + o(\epsilon) \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.58)$$

Per trovare J_ψ espandiamo

$$\begin{aligned} T(\psi + \epsilon\phi) &\equiv (-\alpha) \left[\psi + \epsilon\phi \right] \left(\psi \left(-\frac{x}{\alpha} \right) + \epsilon\phi \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) \\ &= -\alpha\psi \left(\psi \left(-\frac{x}{\alpha} \right) + \epsilon\phi \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) - \alpha\epsilon\phi \left(\psi \left(-\frac{x}{\alpha} \right) + \epsilon\phi \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) \\ &= -\alpha\psi \left(\psi \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) - \alpha\psi' \left(\psi \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) \cdot \epsilon\phi \left(-\frac{x}{\alpha} \right) - \alpha\epsilon\phi \left(\psi \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) + o(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Quindi ricaviamo l'espressione di J_ψ :

$$J_\psi\phi = -\alpha\psi' \left(\psi \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) \cdot \phi \left(-\frac{x}{\alpha} \right) - \alpha\phi \left(\psi \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) \quad (2.60)$$

Ora, forti di questo, espandiamo $f(r, x) \equiv f_r(x)$ attorno $f(R_\infty, x)$:

$$f(r, x) = f(R_\infty, x) + (r - R_\infty) \frac{\partial f}{\partial r}(R_\infty, x) + o(r - R_\infty) \quad (2.61)$$

E applichiamo T a quest'ultima:

$$Tf(r, x) = Tf(R_\infty, x) + (r - R_\infty) J_{f(R_\infty, x)} \left[\frac{\partial f}{\partial r}(R_\infty, x) \right] + o(r - R_\infty) \quad (2.62)$$

Dove ora abbiamo, analogamente a (2.60):

$$J_{f(R_\infty, x)} \left[\frac{\partial f}{\partial r}(R_\infty, x) \right] = -\alpha \frac{\partial f}{\partial x} \left(R_\infty, f \left(R_\infty, -\frac{x}{\alpha} \right) \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \left(R_\infty, -\frac{x}{\alpha} \right) - \alpha \frac{\partial f}{\partial r} \left(R_\infty, f \left(R_\infty, -\frac{x}{\alpha} \right) \right) \quad (2.63)$$

Ora, iterando l'applicazione di T :

$$T^n f(r, x) = T^n f(R_\infty, x) + (r - R_\infty) J_{T^{n-1}f(R_\infty, x)} \cdots \cdots J_{f(R_\infty, x)} \left[\frac{\partial f}{\partial r}(R_\infty, x) \right] + o(r - R_\infty) \quad (2.64)$$

Se ora prendiamo il limite $n \rightarrow \infty$, ricordando la (2.51), otteniamo:

$$T^n f(r, x) = g(x) + (r - R_\infty) J_g^n \left[\frac{\partial f}{\partial r}(R_\infty, x) \right] + o(r - R_\infty) \quad (2.65)$$

Per semplificare quest'espressione consideriamo l'equazione agli autovalori per J_g :

$$J_g u_j(x) = \lambda_j u_j(x) \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.66)$$

Ipotizzando che $\{u_j(x)\}$ risulti essere una base per lo spazio $C\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ delle funzioni continue sull'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, possiamo scrivere [5]:

$$\frac{\partial f}{\partial r}(R_\infty, x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j u_j(x) \quad (2.67)$$

Quindi (sempre nel limite $n \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} J_g^n \left[\frac{\partial f}{\partial r}(R_\infty, x) \right] &= \sum_{j=1}^{\infty} c_j \lambda_j^n u_j(x) \\ &\approx c_1 \lambda_1^n u_1(x) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Dove abbiamo appena usato la congettura di Feigenbaum, la quale prevede che solo il primo autovalore sia maggiore di uno, $\lambda_1 > 1$, mentre $|\lambda_j| < 1$ per $j \neq 1$. Feigenbaum la avanzò nel suo articolo del 1979 grazie a evidenze provenienti da metodi numerici, fu poi dimostrata analiticamente da Collet, Eckmann e Lanford (1980) [9][10]. Se ora rinominiamo $\delta \equiv \lambda_1$, la (2.65) ora diventa:

$$T^n f(r, x) = g(x) + (r - R_\infty) \delta^n c_1 u_1(x) + o(r - R_\infty) \quad (2.69)$$

Valutandola in $x = 0$

$$T^n f(R_n, 0) = 1 + (R_n - R_\infty) \delta^n c_1 u_1(0) + o(r - R_\infty) \quad (2.70)$$

Dove abbiamo usato che $g(0) = 1$.

Ora, ricordando che in corrispondenza di $r = R_n$ la funzione presenta un 2^n -ciclo superstabile per cui, come già detto, il massimo $x = 0$ deve farvi parte:

$$T^n f(R_n, 0) = (-\alpha)^n f^{2^n}(R_n, 0) = 0 \quad (2.71)$$

Arriviamo al risultato che avevamo annunciato in (2.56):

$$R_n - R_\infty = -\frac{\delta^{-n}}{c_1 u_1(0)} \quad \text{per } n \rightarrow \infty \quad (2.72)$$

Avevamo detto che A' doveva dipendere dalla funzione f utilizzata, questo è coerente con quello trovato: nell'espansione (2.67) i coefficienti c_j dovranno dipendere strettamente da f .

La teoria è anche in grado di mostrare che le sequenze R_n e r_n ammettono lo stesso limite ($R_\infty = r_\infty$) e che δ è lo stesso per entrambe (vi si avvicinano con lo stesso rate) [8]. Infine è possibile esplicitare δ , sempre a partire dalla teoria.

Per procedere introduciamo il parametro

$$\mu := f_r^{(2^n)'}(x_0) = \prod_{i=0}^{2^n-1} f_r'(x_i) \quad (2.73)$$

con il quale possiamo 'riparametrizzare' r tramite la coppia (n, μ) . Infatti n assume valori interi e μ , per la stabilità dei 2^n -cicli discussa all'inizio, varia da -1 a 1 per ogni n naturale.

Dunque ora dalla (2.70) otteniamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R_{n,\mu} - R_\infty) = \frac{g_{n,\mu}(0) - 1}{c_1 u_1(0)} \delta^{-n} \quad (2.74)$$

Dove

$$g_{n,\mu}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n,\mu}}^{(2^n)} \left[\frac{x}{(-\alpha)^n} \right] \quad (2.75)$$

è certamente universale.

In corrispondenza della biforcazione di un 2^{n-1} -ciclo in un 2^n -ciclo ($r = r_n$), il parametro μ assume valore $\mu = 1$, la (2.74) diventa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n - R_\infty) = \frac{g_{n,1}(0) - 1}{c_1 u_1(0)} \delta^{-n} \quad (2.76)$$

Che dimostra che $R_\infty = r_\infty$ e δ è lo stesso per le due sequenze. Abbiamo definitivamente dato una motivazione analitica alla (2.39).

Precedentemente abbiamo mostrato come $g(x)$ sia un punto fisso dell'operatore T , questa trattazione ci permette di capire qualcosa in più. La funzione $g(x)$ è un punto di sella per l'operatore T : infatti dalla congettura di Feigenbaum sappiamo che un solo autovalore di J_g è maggiore di uno. Questo identifica una varietà 1-dimensionale nello spazio delle funzioni (tangente al sottospazio generato da $u_1(x)$), che corrisponde alla direzione in cui le funzioni vengono respinte dal punto fisso $g(x)$ quando iteriamo T , da questo discende la (2.57). Viceversa esiste una varietà "stabile" (tangente al sottospazio complementare a quello generato da $u_1(x)$) per cui ogni funzione su di essa viene attratta verso $g(x)$ sotto l'iterazione di T . Questo corrisponde proprio al limite (2.51). In generale alla varietà stabile appartengono tutte le unimodali (la logistica, il seno, ecc) quando il loro parametro esterno è uguale r_∞ , ossia il valore corrispondente al termine della fase di period-doubling.

Una possibile via computazionale per trovare δ e $u_1(x)$ è quella proposta da Feigenbaum nell'articolo del 1979 [9], studiamo l'equazione agli autovalori:

$$J_g u(x) = -\alpha g' \left(g \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) \cdot u \left(-\frac{x}{\alpha} \right) - \alpha u \left(g \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) = \lambda u(x) \quad (2.77)$$

in uno spazio finito dimensionale dato dalle funzioni

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n x^{2^n} \quad (2.78)$$

Già con $N = 14$ si trova un valore di δ che coincide con le prime quattordici cifre delle migliori stime computazionali, effettuate tramite (2.15) [9]. Questo studio fornisce un'ulteriore conferma computazionale alla congettura. Partendo con $N = 1$, troncando brutalmente $u_1(x) = u_1(0)$, la (2.77) ci porta all'approssimazione:

$$-\alpha(g'(g(0)) + 1) = \delta \quad (2.79)$$

Dove abbiamo usato $u_1(1) = u_1(0) = 1$ (si veda [9]).

Per valutare $g'(g(0)) = g'(1)$ deriviamo due volte l'equazione funzionale (2.52)

$$g''(x) = \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \left[g''\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right) \cdot \left(g'\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right)^2 + g'\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right) \cdot g''\left(-\frac{x}{\alpha}\right) \right] \quad (2.80)$$

Ora ricordando che stiamo lavorando con funzioni con massimo quadratico in $x = 0$ (ossia $g''(0) \neq 0$ e $g'(0) = 0$) ricaviamo immediatamente che $g'(1) = -\alpha$.

Quindi la (2.79) diventa

$$\delta = \alpha^2 - \alpha \quad (2.81)$$

Una relazione utile per approssimare δ a partire da α e viceversa. Ricordiamo che si tratta solo di un relazione approssimata, i due parametri sono indipendenti tra loro. Se ad esempio usiamo la stima di α che abbiamo ottenuto con il sistema (2.55), $\alpha \approx 2.73$ troviamo $\delta \approx 4.72$ che ha una precisione dell'1% sulle stime numeriche ($\delta = 4.6692\dots$). Usando stime migliori di α ($\alpha = 2.5029\dots$) si trova $\delta = 3.7616\dots$ che è decisamente pessima.

Ad oggi si ipotizza che α e δ siano irrazionali trascendenti, anche se non esistono prove che lo dimostrino [11].

Ora l'universalità emerge in maniera molto chiara: tutta la teoria presentata in questa sezione si è completamente affrancata dalle peculiarità della funzione f . La famiglia delle funzioni $g_i(x)$, l'equazione funzionale, l'equazione agli autovalori per J_g , tutto questo non ha nulla a che fare con le caratteristiche della funzione, al netto del massimo quadratico.

Capitolo 3

Riscontri sperimentali e applicazioni

Viene ora naturale chiedersi se tutto quello visto sin qui sia solo un gioco matematico o se invece la struttura del period-doubling e in particolare le proprietà di universalità siano osservabili in natura. In effetti è così: dagli anni '70 e '80 sono stati condotti molti studi sperimentali sulla transizione al caos in contesti fisici molto diversi.

Tra i più significativi quello sulla convezione di Rayleigh-Bénard condotto da Libchaber *et al.* nel 1982 [12]. L'esperimento consiste in una cella riempita di mercurio liquido la cui superficie inferiore è riscaldata. Si instaura quindi un gradiente di temperatura ΔT tra superficie superiore e inferiore, a cui il numero di Rayleigh R è proporzionale. R sarà il parametro esterno da variare per osservare le biforcazioni. Il fluido è sottoposto a campo magnetico uniforme e direzionato orizzontalmente, così che i moti convettivi "a rullo" possano restare quanto più possibile allineati e ordinati.

Per valori di R inferiori a un valore critico R_c la viscosità prevale e il liquido resta in quiete, il calore è trasferito tramite conduzione uniforme tra le due superfici. Per valori appena superiori a R_c i moti convettivi si instaurano e lo fanno in regime completamente ordinato, in ogni punto dello spazio la temperatura è costante nel tempo.

Aumentando R il sistema diventa più instabile: un'onda si propaga lungo ogni rullo, come risultato abbiamo che la temperatura oscillerà in ogni punto [3].

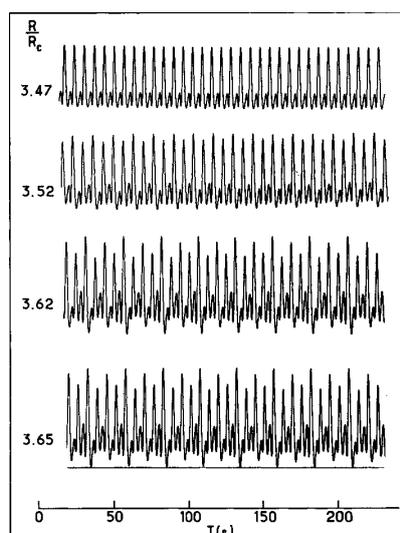


Figura 3.1: [12] Registrazione della temperatura in un certo punto dello spazio in funzione del tempo per diversi valori del rapporto R/R_c

In figura vediamo le variazioni della temperatura nel tempo in un certo punto del fluido, ci interessiamo ai valori dei massimi principali. Nel primo caso, $\frac{R}{R_c} = 3.47$, i massimi principali hanno tutti assommo tutti lo stesso valore, questo può essere considerato lo stato con periodo 1. Il secondo, $\frac{R}{R_c} = 3.52$, sarà quindi lo stato con un 2-ciclo, i massimi oscillano tra due valori diversi. Aumentando R vediamo anche un 4-ciclo e un 8-ciclo.

Misurando accuratamente i valori di R in cui avvengono le biforcazioni si trova la stima $\delta = 4.4 \pm 0.1$, in ragionevole accordo con il valore teorico $\delta \approx 4.699$.

Altrimenti esperimenti sono stati condotti nell'ambito dell'elettronica con circuiti RLC forzati non lineari e transistor, menzioniamo Linsay (1981) e Arlecchi e Lisi (1982). Questi esperimenti hanno portato alle stime $\delta = 4.5 \pm 0.6$ e $\delta = 4.7 \pm 0.3$ rispettivamente [3].

È bene far notare come in generale questo tipo di misurazioni siano difficili. Ad ogni biforcazione infatti, la zona sensibile in cui il parametro esterno varia rimpicciolisce di un fattore $\delta \approx 5$. Per questo motivo risulta possibile osservare non più di 4 o 5 period doublings.

Come abbiamo già anticipato, lo studio delle mappe iterate ha legami con le equazioni differenziali. Se un sistema ad esempio è dotato di una sezione di Poincaré unidimensionale (o quasi) la cui mappa ha la forma di una unimodale, allora tutta la teoria sin qui esposta è applicabile in tutto e per tutto. Questo legame può essere messo in evidenza in maniera molto chiara guardando il sistema di equazioni non lineari di Rössler:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (3.1)$$

Dove a, b e c sono parametri, lasceremo fissati i primi due ($a = b = 0.2$) e faremo variare c .

In figura (3.2) mostriamo gli attrattori proiettati sul piano $x - y$ per diversi valori di c . Questi attrattori si sviluppano in tutte e 3 le dimensioni dato che, essendo soluzioni del sistema (3.1), non possono autointersecarsi. In questo ambito per 'attrattori' intendiamo quelle traiettorie a cui tutte le altre soluzioni del sistema si avvicinano per tempi lunghi. Per $c = 2.5$ l'attrattore è un semplice ciclo limite, aumentando c questo subisce una biforcazione e diventa un ciclo limite più complicato il cui periodo è circa 2 volte più lungo di quello precedente [3]. In questo consiste il period-doubling nei sistemi di equazioni differenziali, in cui il tempo è continuo. Il meccanismo naturalmente va avanti, l'attrattore diventerà un'orbita di periodo 4 e così via per ogni potenza di 2. Dopo la sequenza di infiniti raddoppiamenti si ottiene una dinamica caotica con un attrattore strano, dotato anche in questo contesto di una geometria frattale, come mostrato per $c = 5$.

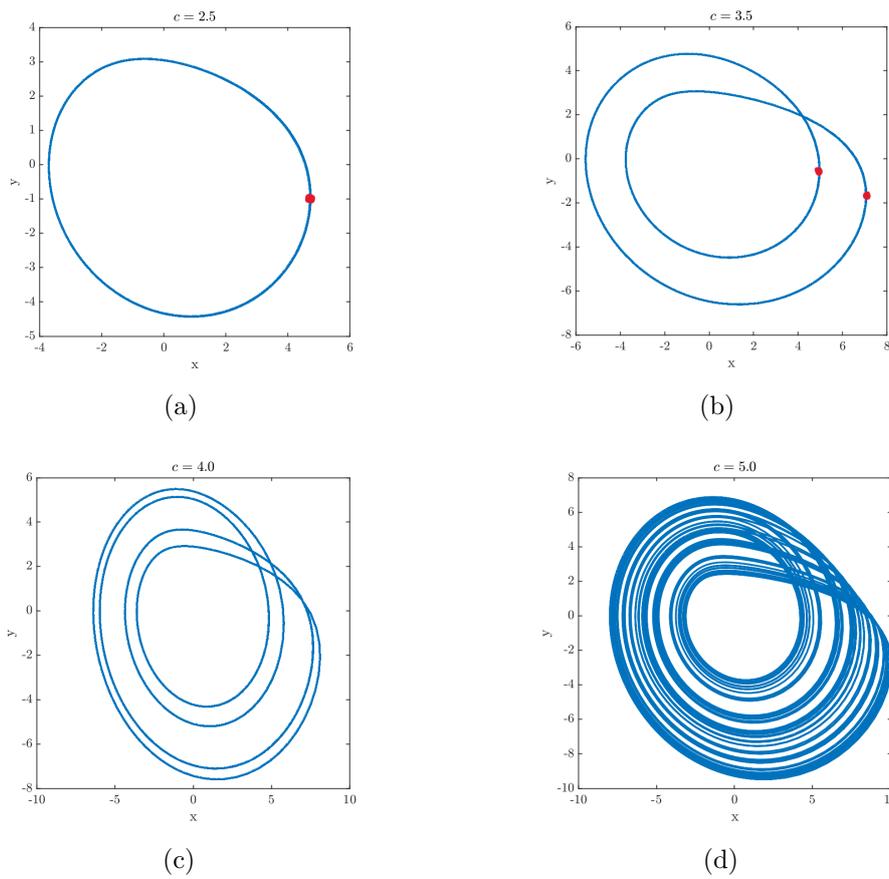


Figura 3.2: [13] Attrattori del sistema di Rössler per diversi valori di c

Il vero legame con le mappe diventa esplicito se usiamo un trucco simile a quello delle sezioni di Poincarè (introdotto per primo da Lorenz) che consiste nel registrare i massimi locali di $x(t)$ in una successione x_n . Plottando x_{n+1} in ordinata con la corrispondente x_n in ascissa, otteniamo un grafico la cui forma è unimodale. Quella mostrata in (3.3) è la mappa che si ottiene con $c = 5$, essa non ha punti fissi o cicli stabili, la sua dinamica infatti è caotica. Se plottassimo un grafico simile per $c = 2.5$ e $c = 3.5$ otterremmo due unimodali molto simili a (3.3) che però sarebbero dotate rispettivamente di un punto fisso stabile e di un 2-ciclo stabile. Questi sono stati evidenziati in figura (3.2) con un solo punto rosso per (a) (punto fisso stabile) e con due punti rossi per (b) (2-ciclo stabile). A questo punto si può costruire un intero grafico delle biforcazioni per questa mappa con una procedura analoga a quella seguita per la figura (2.3): per tutti i valori di c (in ascissa) plottiamo qualche centinaio di valori della sequenza dei massimi x_n (in ordinata) dopo aver atteso il transiente a sufficienza, in questo modo plotteremo soltanto i punti che corrispondono agli attrattori. Abbiamo un grafico delle biforcazioni (figura (3.4)) con tutte le caratteristiche del period doubling: una prima fase con il raddoppiamento del periodo con i 2^n -cicli stabili, le regioni caotiche e le finestre di periodicità.

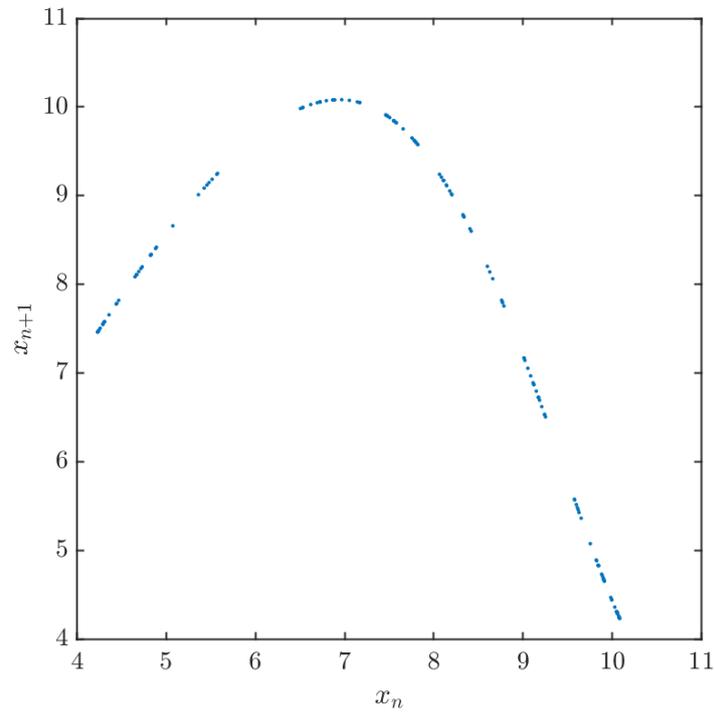


Figura 3.3: [13] x_{n+1} vs. x_n per $c = 5$

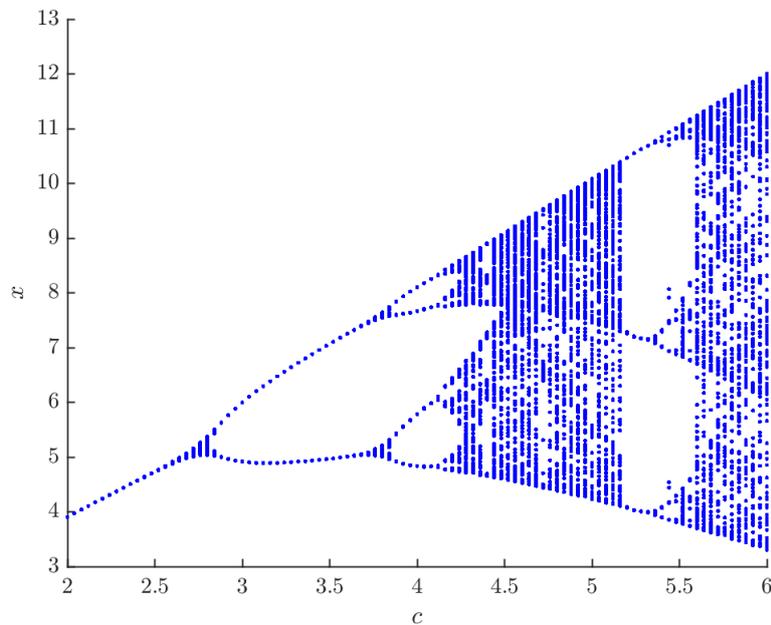


Figura 3.4: [13] Il grafico delle biforcazioni per il sistema di Rössler ottenuto facendo variare c . Si possono osservare il punto fisso della mappa degli x_n ($c = 2.5$), il 2-ciclo stabile ($c = 3.5$) e le soluzioni caotiche ($c = 5$)

Bibliografia

- [1] M. Cencini, F. Cecconi e A. Vulpiani. *Chaos: From Simple Models to Complex Systems*. Series on advances in statistical mechanics. World Scientific, 2010.
- [2] Mitchell J Feigenbaum. “Universal behavior in nonlinear systems”. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 7.1-3 (1983), pp. 16–39.
- [3] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
- [4] 2022. URL: https://it.wikipedia.org/wiki/Mappa_logistica#/media/File:LogisticMap_BifurcationDiagram.png.
- [5] P.G. Drazin, M.J. Ablowitz e D.G. Crighton. *Nonlinear Systems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press.
- [6] Partha Saha e Steven H. Strogatz. “The Birth of Period Three”. In: *Mathematics Magazine* 68.1 (1995), pp. 42–47.
- [7] Paul Manneville e Yves Pomeau. “Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems”. In: *Communications in Mathematical Physics* 74.2 (1980), pp. 189–197.
- [8] H.G. Schuster e W. Just. *Deterministic Chaos: An Introduction. 4th, revised and enlarged ed.* Wiley, 2005.
- [9] Mitchell Feigenbaum. “The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations”. In: *Journal of Statistical Physics* 21 (dic. 1979), pp. 669–706.
- [10] P. Collet, J.-P. Eckmann e O. E. Lanford III. “Universal properties of maps on an interval”. In: *Communications in Mathematical Physics* 76.3 (1980), pp. 211–254.
- [11] URL: <https://oeis.org/A006890>.
- [12] A. Libchaber, C. Laroche e Stephan Fauve. “Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement”. In: <http://dx.doi.org/10.1051/jphyslet:01982004307021100> 43 (apr. 1982).
- [13] URL: <https://roygoodman.net/math473/rosslerdemo>.