



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”  
Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

# L'argomento EPR

e la sua storia

Relatore

Prof. Giulio Peruzzi

Laureando

Mattia Guzzo

Anno Accademico 2017/2018



# Indice

<b>1</b>	<b>Il Paradosso EPR</b>	<b>1</b>
1.1	Prime interpretazioni della M.Q. . . . . .	1
1.2	L'articolo di EPR del 1935 . . . . .	7
1.2.1	La risposta di Bohr . . . . .	10
1.2.2	Non località - trasmissione dei segnali . . . . .	12
1.3	Appendice . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Parametri aggiuntivi</b>	<b>17</b>
2.1	La teoria di Bohm . . . . .	17
2.2	Le disuguaglianze di Bell . . . . .	21
2.3	Appendice . . . . .	25



# Capitolo 1

## Il Paradosso EPR

*Nel primo capitolo si darà una descrizione essenziale dei problemi interpretativi della meccanica quantistica, seguendo la linea di pensiero che ha portato all'interpretazione ortodossa. Queste considerazioni serviranno per chiarire le motivazioni che hanno portato Einstein a criticare la M.Q. nella formulazione della scuola di Copenaghen che trova in Bohr il suo primo rappresentante. Sarà proprio lo scontro con Bohr, sostenitore di una visione positivista, che porteranno Einstein, sostenitore di una visione più realista, a formulare insieme ai suoi collaboratori Boris Podolsky e Natan Rosen il paradosso EPR che verrà esposto nella sua formulazione originale.*

### 1.1 Prime interpretazioni della M.Q.

I primi problemi interpretativi della meccanica quantistica si possono raggruppare in due principali questioni: la prima riguarda lo spiegare il duplice comportamento ondulatorio e corpuscolare della materia e della radiazione, la seconda, il significato da assegnare alla funzione d'onda.

L'ipotesi del duplice comportamento ondulatorio e corpuscolare della radiazione si deve originariamente ad Einstein per spiegare il comportamento della radiazione entro la cavità del corpo nero [Quanti di luce, marzo 1905, Annalen der Physik]. A partire da quest'idea de Broglie tra il 1923 e il 1924 estende la dualità onda corpuscolo anche alle particelle materiali

*« ... mi sembrava certo, perciò, che la propagazione di un'onda fosse associata con il moto di qualunque particella »*

in formule  $E = h\nu$  e  $p = \hbar k$  o l'analogo vettoriale.<sup>1</sup> D'altra parte Schrödinger, tra i principali sostenitori dell'interpretazione ondulatoria, cerca di descrivere le particelle come pacchetti d'onde che evolvono nel tempo.<sup>2</sup> Cruciale è poi, per quanto concerne l'interpretazione della nuova teoria quantistica, il periodo trascorso da Heisenberg a Copenaghen tra il 1926 e il 1927, dove discute insieme a Bohr delle recenti scoperte in questo campo. Frutto di questa collaborazione è l'introduzione di due principi cardine della meccanica quantistica; il principio di indeterminazione [Heisenberg, Zeitschrift für Physik 23 marzo 1927 tradotto in [6]] e il principio di complementarità:

---

<sup>1</sup>Verificate poi da Davisson e Germer (1927) con esperimenti di diffrazione con raggi X su cristalli.

<sup>2</sup>Tale interpretazione viene però presto smentita dal fenomeno di sparpagliamento dei pacchetti d'onde, come fatto notare da Lorentz al Congresso di Solvay del 1927.

- Il principio di complementarità è il risultato di una serie di lavori mirati a cercare una connessione tra le diverse formulazioni della meccanica quantistica, la meccanica matriciale di Heisenberg (1925) e quella ondulatoria di Schrödinger (1926). Il motivo della possibilità di più formalismi matematicamente equivalenti deriva secondo Bohr direttamente dalla possibilità di descrivere i fenomeni con due concezioni diverse (quella corpuscolare e quella ondulatoria): questa “libertà” descrittiva viene creata quindi essenzialmente dal fatto che si fa uso delle nozioni classiche per descrivere fenomeni quantistici <sup>3</sup>

*« La nostra interpretazione dei dati sperimentali si basa essenzialmente sui concetti classici: per questo ci poniamo il problema se un elettrone sia un'onda o un corpuscolo. Nel caso classico, la relazione tra oggetto osservato e strumento di misura può, in linea di principio, essere controllata perfettamente, e quindi se l'elettrone è un corpuscolo non è un'onda, e viceversa: in altre parole il fisico classico può dedurre dal risultato della misura che una delle due descrizioni è errata. Nel caso quantistico, dato che una realtà indipendente nel senso fisico usuale [classico] del termine non può essere attribuita né al fenomeno né agli strumenti di misura, si deduce che l'elettrone è un'onda o un corpuscolo a seconda dello strumento di misura usato. Quindi, per evitare i presunti paradossi legati al dualismo onda-corpuscolo, bisogna considerare il nuovo nesso che la teoria quantistica introduce tra oggetto e “strumento” [congresso di Como “Onoranze ad Alessandro Volta” 1927] »*

Il presentarsi dei due comportamenti classicamente distinti è legato quindi indissolubilmente alla natura dell'osservazione (questo fatto, rimarcato a più riprese da Bohr viene anche detto contestualità). In questo modo si riesce da una parte ad accettare il dualismo onda corpuscolo e dall'altra capire perché se in un esperimento si osserva il comportamento corpuscolare, è impossibile contemporaneamente osservare quello ondulatorio, come scrive Bohr:

*« La natura stessa della teoria dei quanti ci obbliga a considerare il coordinamento spaziotemporale e l'enunciato di causalità [proprio delle onde], l'unione dei quali caratterizza le teorie classiche, come aspetti complementari, ma mutuamente esclusivi della descrizione, rappresentazioni complementari dei fenomeni che solo considerati insieme offrono una generalizzazione naturale del modo classico di descrivere le cose »*

In tale posizione si ritrova un'analogia con la teoria della relatività:

*« Come la relatività ristretta ci ha insegnato che l'abitudine a distinguere nettamente lo spazio dal tempo si basa solamente sulla piccolezza delle velocità comunemente esperite rispetto alla velocità della luce, così noi impariamo a dalla teoria dei quanti che ritenere appropriata la nostra usuale descrizione, insieme causale (comportamento ondulatorio) e spaziotemporale (comportamento particellare) dipende interamente dalla piccolezza del quanto d'azione »*

- Il secondo principio cardine è, come detto, quello di indeterminazione secondo cui la misura simultanea di posizione e impulso non può superare una precisione maggiore dell'ordine della costante di Planck, in formule  $\Delta p \Delta q \geq \hbar$ . Questa imprecisione “caratteristica” (che si mostrerà in seguito valida per tutte le osservabili non commutanti) deriva come prima idea di Heisenberg, dal fatto che le nozioni usuali (classiche) delle quantità cinematiche

<sup>3</sup>Le citazioni di Bohr che seguono sono tratte da [17].

vengono sostituite dalla regola di commutazione delle osservabili ottenuta da Heisenberg-Born-Jordan e indipendente da Dirac nello stesso anno (1925)

$$\mathbf{qp} - \mathbf{pq} = \frac{\hbar}{i} \quad (1.1)$$

« Abbiamo perciò buona ragione - scrive Heisenberg [6] - per sollevare sospetti contro l'utilizzo acritico di quelle parole "posizione" e "velocità. »

Questo spiega anche la necessità di abbandonare la nozione classica di traiettoria, che in meccanica classica è definita univocamente imponendo la posizione e il momento iniziale: in meccanica quantistica se si definisce con precisione la posizione, l'impulso resterà indeterminato così da rendere impossibile la predizione tramite leggi deterministiche della posizione della particella. Va sottolineato però che, come fatto notare da Bohr, il principio vale a prescindere dal disturbo introdotto dalla misura.<sup>4</sup>

Si consideri per esempio il seguente esperimento ideale, citato in letteratura come *Il microscopio di Heisenberg* [14]:

Per assegnare una posizione o un impulso ad una particella in modo non ambiguo, bisogna effettuare una misura tramite un esperimento. Se si fa questo nel caso di particelle quantistiche, per esempio l'elettrone, ad una attenta analisi degli esperimenti possibili si giunge alla conclusione che alla determinazione della posizione(impulso) corrisponde l'impossibilità di determinare l'impulso(posizione). Si supponga per esempio di voler determinare la posizione di un elettrone tramite un microscopio, inviando dei fotoni su un elettrone e osservando la luce diffusa. Per ottenere la massima precisione possibile si può utilizzare una luce con la più piccola lunghezza d'onda, cioè i raggi  $\gamma$ . La precisione che si può raggiungere è

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin\alpha}$$

dove  $\alpha$  è l'angolo di accettazione del microscopio. Il problema è che l'elettrone subisce un rinculo Compton dell'ordine di  $\frac{h\nu}{c}$  e la direzione rimane indeterminata perché è indeterminato l'arrivo del fotone sul microscopio che accetta tutti i fotoni (e non li distingue) entro un angolo  $\alpha$  e non si può quindi applicare la formula esatta dell'effetto Compton. L'incertezza sul momento è quindi

$$\Delta p = \frac{h\nu}{c} \sin\alpha$$

Moltiplicando le due equazioni si ottiene  $\Delta x \Delta p \simeq h$  che è proprio il principio di indeterminazione.

Nello stesso articolo si può trovare una revisione di quanto appena discusso

« In questo contesto Bohr ha attirato la mia attenzione sul fatto che avrei trascurato punti essenziali in alcune discussioni di questo lavoro [il microscopio di H.]. Soprattutto, l'incertezza dell'osservazione non si basa unicamente sulla presenza di discontinuità (disturbo del sistema), ma è piuttosto direttamente collegata con l'esigenza di rendere conto simultaneamente delle diverse esperienze che trovano espressione da un lato nella teoria corpuscolare e dall'altro nella teoria ondulatoria »

In particolare la variazione di impulso della particella causata dal microscopio per misurare la posizione dell'elettrone è in linea di principio misurabile con un altro

<sup>4</sup>In effetti con il formalismo degli operatori si dimostra che  $(\Delta \mathbf{A})_\psi (\Delta \mathbf{B})_\psi = \frac{1}{2} | \langle [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \rangle_\psi |$  dove  $(\Delta \mathbf{A})_\psi$  e  $(\Delta \mathbf{B})_\psi$  sono gli errori quadratici medi sullo stato  $|\psi\rangle$ .

strumento, ma non può essere però misurata (simultaneamente) nello stesso esperimento: *è la conoscenza simultanea di posizione e impulso che risulta inammissibile in meccanica quantistica.*

Si capisce quindi che il principio di indeterminazione può essere considerato come un caso particolare del principio di complementarità che Bohr stava in quegli anni sviluppando.

Veniamo ora ai problemi interpretativi della funzione d'onda: già Schrödinger, che introduce la  $\psi$  [nella serie di articoli dal titolo “quantizzazione come problema degli autovalori” [18]] si preoccupa di capirne il significato, associandolo alla densità di carica della particella (elettrone).<sup>5</sup> Si riscontra però un'inconsistenza, perché sussiste una sostanziale differenza tra la  $\psi$  da lui introdotta, che ha come dominio lo spazio delle configurazioni  $Q \simeq \mathbb{R}^{3N}$  e le funzioni d'onda “classiche” delle onde materiali che hanno come dominio (pensando il tempo come fissato) lo spazio fisico  $\simeq \mathbb{R}^3$ .

Nello stesso anno (1926) si deve a Born il contributo più importante con l'articolo “*On the quantum mechanics of collision process*” in cui è presente l'interpretazione statistica della funzione d'onda (che gli valse il Nobel nel 1954).

Nel suo lavoro Born parte dall'equazione di Schrödinger per l'atomo di idrogeno (o in generale idrogenoide) non considerando però le orbite chiuse, ma quelle iperboliche, in cui le particelle hanno energia molto alta rispetto a quelle d'interazione con l'atomo, così da poter considerare  $\psi$  come un'onda piana.<sup>6</sup> Il risultato di questo calcolo di scattering è che  $|\psi(q)|^2 dq$  rappresenta la probabilità di trovare la particella nel volume infinitesimo  $dq$  centrato in  $q \in Q$ : in meccanica classica lo *stato puro* (stato in cui la media temporale di una osservabile coincide con l'osservabile valutato nello stato) di una particella è definito associandole posizione e impulso. In meccanica quantistica questo modo di pensare perde di significato perché ad uno stato puro nel senso classico (definire posizione e impulso della particella) rimane comunque associata una probabilità (ontica) “non eliminabile”: la domanda che ha senso porsi è quale sarà la probabilità di un certo stato.

## Struttura formale della teoria

La formalizzazione della meccanica quantistica, è stata fatta negli anni successivi principalmente dai matematici D. Hilbert,<sup>7</sup> J. von Neumann e contemporaneamente da Born e Dirac che introduce il concetto di osservabile come operatore autoaggiunto e generalizzando la funzione d'onda come vettore nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ .<sup>8</sup> Vengono di seguito enunciati gli assiomi della teoria [seguendo la formulazione introdotta da Dirac che fa uso degli spazi di Hilbert e dalla notazione braket in “*A new notation for quantum mechanics, PCPhS*”]:

<sup>5</sup>In questa idea si ritrova la posizione di Schrödinger di dare un significato fisico reale alle funzione d'onda. Si mostrerà in seguito che sarà proprio nel cercare di assegnare un qualche *criterio di realtà* alla funzione d'onda che crea inconsistenze nella teoria.

<sup>6</sup>In appendice è riportata l'idea che sta alla base della dimostrazione [11].

<sup>7</sup>Tra i matematici più influenti del '900, che nella scuola di Gottinga promuove un fruttuoso programma di formalizzazione della fisica.

<sup>8</sup>Dirac parte dai suoi lavori del 1925 sulla meccanica delle matrici in cui ritrova le regole di commutazione 1.1, e del 1927 in cui introduce i q-numbers [Dirac; L'interpretazione fisica della M.Q. (PCPhS)] (che sono poi gli operatori) come “alternativa” alle matrici di Heisemberg, sviluppando poi la così detta “teoria delle trasformazioni” da cui segue un elegante formalismo in cui le matrici di Heisemberg sono gli elementi di matrice dell'operatore associato all'osservabile in una base data: se  $\mathbf{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} t.c \mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$  allora  $\mathbf{A}_{nm} = \langle n | \mathbf{A} | m \rangle$  dove  $|m\rangle$  e  $|n\rangle$  sono una base ortonormale di  $\mathcal{H}$  cioè  $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} \Rightarrow |\psi\rangle = \sum_n a_n |n\rangle$  con  $a_n \in \mathbb{R}$ . Un'altra differenza tra lo schema di Heisemberg e quello (equivalente) di Schrodinger, è che sono gli operatori ad evolvere nel tempo e non la funzione d'onda che rappresenta lo stato.



i. C'è una corrispondenza biunivoca tra gli stati di un sistema  $\Sigma$  e un vettore dello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  cioè

$$\Sigma \longleftrightarrow |\psi\rangle$$

ii. Le osservabili sono rappresentate da operatori lineari sullo spazio di Hilbert, ed i possibili risultati di un esperimento sono gli autovalori dell'operatore. La richiesta che i risultati siano espressi da numeri reali coincide con la richiesta (per il teorema spettrale) di autoaggiuntezza dell'operatore.

iii. Gli stati del sistema, se non disturbati da una misura, evolvono deterministicamente seguendo l'equazione di Schrödinger.

iv. Se  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  è lo stato (normalizzato) del sistema e  $\mathbf{A}$  è l'operatore associato ad una certa osservabile, con autovalori  $\alpha_i$  relativi agli autostati  $|\alpha_i\rangle$  che formano una base o.n. per  $\mathcal{H}$ , allora si può scrivere  $|\psi\rangle = \sum c_i |\alpha_i\rangle$ , e la probabilità di ottenere il risultato  $\alpha_i$  è  $|c_i|^2$ .

v. In seguito ad una misura eseguita sul sistema all'istante  $t$ , lo stato ad un istante immediatamente successivo  $t_+$  è rappresentato dall'autostato relativo all'autovalore ottenuto dalla misura, cioè

$$|\psi, t\rangle = \sum c_i |\alpha_i\rangle \xrightarrow{\text{misura } \alpha_i} |\psi, t_+\rangle = |\alpha_i\rangle$$

Si può notare che negli assiomi enunciati non è presente la formula di Born, questo perchè coincide con un caso particolare dell'assioma **iv.**. Si ha infatti che  $|c_i|^2 = |\langle \alpha_i | \psi \rangle|^2$  (dove  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  denota il prodotto scalare in  $\mathcal{H}$ ) e si generalizza ad un operatore con spettro continuo (come quello di posizione  $|q\rangle$  e impulso  $|p\rangle$ ) in cui i rispettivi autovettori però  $\notin \mathcal{H}$  e formano una varietà continua non numerabile:<sup>9</sup> per queste autofunzioni in luogo dello sviluppo  $|\psi\rangle = \sum c_i |\alpha_i\rangle$  valido per gli operatori a spettro discreto, si ha (con un abuso di linguaggio che come scritto in nota può essere risolto)  $|\psi\rangle = \int dq \langle q | \psi \rangle |q\rangle$  con  $\int dq |\langle q | \psi \rangle|^2 = 1$  allora  $|\langle q | \psi \rangle|^2 \equiv |\psi(q)|^2$  è la probabilità di trovare la particella in  $q$ , come richiesto dalla formula Born. Queste considerazioni sono alla base della "teoria delle rappresentazioni" e  $\psi(q)$  è detta rappresentazione di Schrödinger.

Si può anche dare una motivazione dell'assioma **ii.**, ossia dell'uso degli operatori lineari.<sup>10</sup> Si cercherà di mostrare in seguito che i problemi interpretativi della meccanica quantistica sono dovuti al ruolo da assegnare alla funzione d'onda e all'assioma **v.** anche detto collasso (o riduzione) della funzione d'onda. Non è possibile infatti rendere compatibile l'evoluzione data dall'equazione di Schrödinger che è deterministica e lineare con il processo di riduzione della funzione d'onda che è stocastico non lineare e irreversibile.<sup>11</sup> Sorge allora il problema di capire in che

<sup>9</sup>Questi "problemi" di natura matematica trovano soluzione usando gli spazi di Hilbert attrezzati, di cui un esempio è l'inclusione  $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{S}'$  detta terna di Gel'fand; dove  $\mathcal{S}'$  è lo spazio delle distribuzioni temperate, duale dello spazio delle funzioni di prova  $\mathcal{S}$ , naturalmente dotato di una topologia più debole di  $\mathcal{S}$  (e questo spiega l'inclusione) in cui  $|q\rangle$  come  $|p\rangle$  che  $\in \mathcal{S}'$  sono ben definiti.

<sup>10</sup>In appendice viene data l'idea della dimostrazione.

<sup>11</sup>La necessità di ricorrere al collasso della funzione d'onda in seguito ad una misura si può giustificare con la così detta *catena di Von Neumann* [20]: si consideri un sistema quantistico  $S$  di cui si vuole misurare una certa osservabile  $\Omega$  tramite un apparato  $A$ . Allora lo stato iniziale del sistema (che si suppone per semplicità fattorizzato, senza ricorrere al prodotto tensore) è descritto da  $|\sigma\rangle |\alpha^i\rangle$  dove  $|\sigma\rangle$  e  $|\alpha^i\rangle$  sono le funzioni d'onda di  $S$  e  $A$  nello stato iniziale. Se l'apparato misura l'osservabile  $\Omega$  di autostati  $|\omega_i\rangle$  allora  $|\sigma\rangle = \sum c_n |\omega_n\rangle$ . Se si fa evolvere la funzione d'onda secondo l'equazione di Schrödinger nello stato finale si otterrà in generale uno stato  $|\sigma\rangle |\alpha^f\rangle$  dove  $|\alpha^f\rangle$  è lo stato dell'apparato dopo la misura, e si può scrivere  $|\sigma\rangle |\alpha^f\rangle = \sum c_n |\omega_n\rangle |\alpha_n^f\rangle$  dove le  $|\alpha_n^f\rangle$  sono gli stati (non normalizzati) che rappresentano l'apparato dopo aver ottenuto  $\omega_n$  (si pensi per esempio all'ampiezza di un segnale). Quindi l'evoluzione di Schrödinger ha portato il sistema in uno stato puro in cui

modo avviene la riduzione, ossia cosa la provoca: è questo il punto cruciale su cui si basano le diverse interpretazioni della meccanica quantistica, detto anche *problema della misura*.

### L'interpretazione ortodossa

L'interpretazione ortodossa, anche detta di Copenaghen, si basa sui principi già discussi di indeterminazione e di complementarità.

- Per quanto riguarda il significato da dare alla funzione d'onda, essa non è qualcosa di reale fisicamente. In questo approccio vengono risolti i problemi interpretativi della posizione di Schrödinger dovuti al fatto che  $|\psi\rangle$  ha come dominio lo spazio delle configurazioni e il suo sparpagliamento (dei pacchetti d'onde) nel tempo. Si assume inoltre che la  $\psi$  descrive completamente il sistema (descrive cioè la distribuzione di probabilità di una qualunque osservabile) ed è la massima informazione che si ha su di esso.

- Più delicata è la questione del già accennato "problema della misura": secondo l'interpretazione ortodossa il collasso della funzione d'onda (anche detto salto quantico) significa semplicemente un cambiamento nella conoscenza del sistema in seguito ad una misura, ossia quando il sistema quantistico interagisce con un sistema classico. Bisogna perciò ammettere che esistono sistemi (gli apparati di misura) che non obbediscono alle leggi della M.Q.

*« Una teoria più generale può essere di solito formulata - scrive L.Landau in [15] - in un modo logicamente chiuso, indipendentemente da una teoria più generale che ne è un caso limite. Così la meccanica relativistica può essere eretta su basi di principi fondamentali suoi propri senza riferimento alcuno alla meccanica newtoniana. Quanto alla formulazione dei principi fondamentali della meccanica quantistica, essa è invece intrinsecamente impossibile senza l'inclusione della meccanica classica ... L'assenza di una traiettoria determinata per l'elettrone lo priva di qualsiasi altra caratteristica dinamica; è chiaro quindi che per un sistema formato esclusivamente da oggetti quantistici non si potrebbe costruire affatto una meccanica logicamente chiusa »*

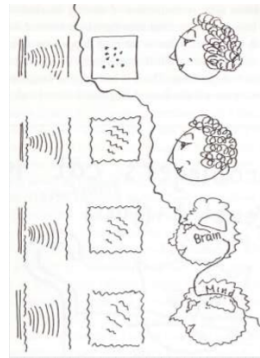
In questa posizione c'è un chiaro riferimento al principio di complementarità. Va sottolineato inoltre che con "classico" come specificato da Bohr, non si intende macroscopico:

*« Abbiamo definito lo strumento come un oggetto fisico che obbedisce con precisione sufficiente alla meccanica classica ... In determinate condizioni, un oggetto microscopico può anche fungere da strumento [nel senso che è classico], in quanto la locuzione "con precisione sufficiente" dipende dal problema che si è posto concretamente. Così, il moto di un elettrone nella camera di Wilson viene osservato dalla traccia di nebbia che esso lascia ... dato un tale grado di precisione così basso nella determinazione della traiettoria, l'elettrone è in questo caso un oggetto perfettamente classico. »*

Il ruolo che assume un oggetto in un processo di misura dipende perciò dal tipo di misura, e non c'è in generale un criterio rigoroso per stabilirlo. Il problema di questa interpretazione è che dichiara l'esistenza di sistemi classici e quantistici, senza specificare dove stia la linea di demarcazione tra queste due descrizioni, cioè fino a che punto si può utilizzare la descrizione quantistica e dove bisogna far ricorso al collasso della funzione d'onda (dove bisogna interrompere la catena di von Neumann). Molto esemplificativa è il seguente disegno proposto da J.Bell:

---

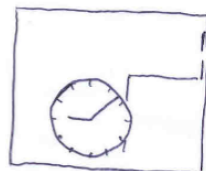
coesistono tutti gli stati che sono però *macroscopicamente distinti*, anche detto stato inconcepibile. Per ottenere una miscela statistica  $(|\omega_n\rangle|\alpha_n^f\rangle; |c_n|^2)$  bisogna fare ricorso al collasso della funzione d'onda. Sorge allora il problema di capire chi causa il collasso.



La figura rappresenta la difficoltà di scegliere dove mettere la linea di demarcazione tra la descrizione classica e quantistica. Si nota che ad un certo punto la linea passa attraverso la mente dell'osservatore, in riferimento a certe interpretazioni che attribuiscono alla coscienza dell'osservatore la causa del collasso della funzione d'onda.

## 1.2 L'articolo di EPR del 1935

L'articolo di cui si darà in questa sezione una breve descrizione è il "risultato" di un dibattito tra Einstein e Bohr, cominciato dal v congresso di Solvay (1927) e si può dire mai terminato. Il dibattito, incentrato sull'interpretazione di Copenaghen, vede nella sua fase iniziale Einstein sostenere l'inconsistenza della teoria proponendo degli esperimenti ideali che avvalorassero la sua tesi, e dall'altra Bohr che controbatteva mostrando che l'inconsistenza proveniva da una non accurata descrizione del processo di misura, di seguito un esempio:<sup>12</sup>

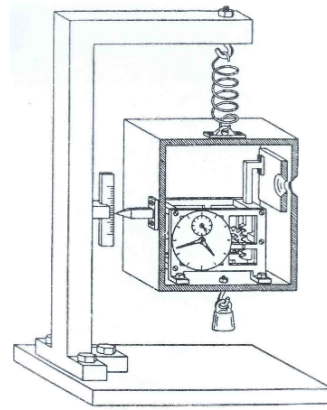


Einstein

Einstein propone l'esperimento in figura che violerebbe il principio di indeterminazione  $\Delta t \Delta E \gtrsim h$ : consideriamo una scatola con un foro che si apre e si chiude con intervalli temporali dettati da un orologio all'interno della scatola. Ipotizziamo che la scatola contenga radiazione che esce dal foro quando è aperto un fotone alla volta, in modo che la sua uscita abbia un tempo ben determinato. Allora usando  $E = mc^2$  e pesando la scatola prima e dopo l'uscita del fotone si riesce a determinare precisamente anche l'energia del fotone, così da violare le relazioni di indeterminazione.

Bohr risponde raffinando l'apparato di misura, come mostrato dalla seguente figura:

<sup>12</sup>I disegni sono quelli originali di Einstein e Bohr, tratti dalla biografia di Bohr del prof. G. Peruzzi [17].



Bohr

se si immagina di mettere inizialmente in equilibrio la scatola tramite i pesi di una bilancia, il suo impulso resta indeterminato (in accordo con il principio di indeterminazione per posizione e impulso). Tale indeterminazione dell'impulso è però sicuramente minore dell'impulso totale causato dall'uscita del fotone, cioè  $\Delta p \approx \frac{h}{\Delta q} < Tg\Delta m$ . Ma per il red-shift gravitazionale uno spostamento in altezza di  $\Delta q$  implica una diversa misura del tempo secondo  $\frac{\Delta T}{T} = \frac{g\Delta q}{c^2}$  cosicché si ha  $c^2\Delta T = Tg\Delta q > \frac{h}{\Delta m}$  e quindi  $c^2\Delta m\Delta T = \Delta E\Delta T > h$ .

Le risposte accurate di Bohr fanno cambiare ad Einstein proposta, spostando il dibattito sulla completezza della teoria (che verrà definita più avanti). Si giunge al 1935 con un articolo pubblicato da Einstein - Boris Podolsky e Nathan Rosen pubblicato su Phys. Rev. dal titolo "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" le cui argomentazioni si possono riassumere come segue.

Una buona teoria deve, secondo gli autori, soddisfare i seguenti principi:

**Principio di realtà:** *Se senza disturbare in nessun modo il sistema, possiamo prevedere con certezza (cioè con probabilità unitaria) il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a questa quantità fisica.*

**Principio di località:**<sup>13</sup> *Se due sistemi non sono interagenti, allora nessun cambiamento reale può avvenire nel secondo sistema come conseguenza di un cambiamento avvenuto nel primo.*

Una teoria si dice poi *completa* se ogni elemento di realtà fisica ha una controparte nella teoria.

Si considerino quindi le due proposizioni:

**Prop(1):** *La M.Q. è non completa.*

**Prop(2):** *Quando due operatori associati a due osservabili non commutano<sup>14</sup> allora non possono avere realtà simultanea (che non è altro che il principio di indeterminazione). Due osservabili che commutano si dicono compatibili.* Le due proposizioni sono in realtà

<sup>13</sup>In realtà gli autori non lo enunciano, dandolo per scontato.

<sup>14</sup>Si può infatti dimostrare che due operatori non commutanti, diciamo **A** e **B** non possono avere gli stessi autovettori: ma un certo autovalore  $a_i$  può essere elemento di realtà solo se la funzione d'onda si trova nel rispettivo autostato  $|a_i\rangle$ , cosicché, conformemente alle regole esposte in 1.1 sia 1 la probabilità di ottenere quel valore. Allora non può esserci per **B** nessun elemento di realtà perché di certo (non avendo **A** e **B** autostati in comune) lo stato del sistema non si trova in un autostato di **B**. Due osservabili che commutano si dicono compatibili

mutuamente esclusive cioè o *Prop(1)* o *Prop(2)* questo perché la secondo non è altro che la negazione della prima:

-dire che la meccanica quantistica non è completa (*Prop(1)*) è equivalente a dire ( $\equiv$ ) che esistono due osservabili  $\Theta$  e  $\Omega$  t.c.  $[\Theta, \Omega] \neq 0$  ma hanno realtà simultanea.

-dire che la meccanica quantistica è completa è equivalente a dire ( $\equiv$ ) che due osservabili che non commutano non possono avere realtà simultanea (*Prop(2)*):

*« poiché se entrambe (le osservabili  $\Theta$   $\Omega$ ) avessero realtà simultanea - e quindi valori definiti- questi valori entrerebbero nella descrizione completa, in accordo con la descrizione di completezza. Se quindi la funzione d'onda fornisse tale descrizione completa della realtà, dovrebbe contenere questi valori; poichè questi sarebbero allora predicibili. Poiché la situazione non è questa non ci rimangono che le alternative formulate [16] »*

La dimostrazione procede quindi cercando di provare la *Prop(1)* (escludendo di conseguenza la seconda) che è la tesi degli autori, cercando di ottenere elementi di realtà (con probabilità=1) da due osservabili non commutanti.

Si considerino due sistemi (particelle) I e II che abbiano interagito nel passato e non interagiscono più, allora si può scrivere (qui si userà la rappresentazione di Schrödinger o delle coordinate come fatto dagli autori):

$$\Psi(q_1, q_2) = \sum_n \psi_n(q_2) u_n(q_1) \quad (1.2)$$

dove  $u_n(q_1)$  sono le autofunzioni associate ad una osservabile  $\mathbf{A}$  e  $\psi_n(q_2)$  fungono da coefficiente di Fourier. Se si misura l'osservabile  $\mathbf{A}$  con risultato  $a_k$  allora per il processo di riduzione della funzione d'onda lo stato dopo la misurazione sarà  $\psi_k(q_2) u_k(q_1)$ . Se invece dell'osservabile  $\mathbf{A}$  se ne sceglie una diversa  $\mathbf{B}$ , allora si può esprimere la funzione d'onda (prima di misurare  $\mathbf{A}$ ) in serie di autofunzioni di  $\mathbf{B}$  dette  $v_j$ :

$$\Psi(q_1, q_2) = \sum_j \phi_j(q_2) v_j(q_1) \quad (1.3)$$

con analogo significato dei termini di 1.2. Se invece di  $\mathbf{A}$  si misura  $\mathbf{B}$  ottenendo  $b_h$  si ottiene dunque  $\phi_h(q_2) v_h(q_1)$ .

D'altra parte se vale il principio di località lo stato del sistema II (che non interagisce più con I) non può cambiare in seguito ad una misurazione su I, e quindi  $\psi_k(q_2)$  e  $\phi_h(q_2)$  pur essendo funzioni diverse devono descrivere la stessa realtà.<sup>15</sup> Il problema nasce quando le funzioni  $\psi_k(q_2)$  e  $\phi_h(q_2)$  sono autofunzioni di osservabili non commutanti, basta pensare alle autofunzioni improprie (che sono distribuzioni temperate) degli operatori posizioni  $\mathbf{Q}$  e impulso  $\mathbf{P}$ . In questo caso se associamo ad  $\mathbf{A}$  su I l'operatore  $\mathbf{Q}$  su II e a  $\mathbf{B}$  su I l'operatore  $\mathbf{P}$  su II allora le due espressioni di  $\Psi$  sono rispettivamente la delta di Dirac applicata a  $u_q(q_1)$  e una sorta di trasformata di Fourier di  $v_p(q_1)$ , dove gli indici continui  $q$  e  $p$  rimpiazzano quelli discreti discreti (si veda 1.1, qui si prenderà per semplicità  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2$ )  $n$  e  $j$ :

$$\Psi(q_1, q_2) = \int dq \delta(q - q_2) u_q(q_1) \quad ; \quad \Psi(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp e^{(i/\hbar) q_2 p} v_p(q_1) \quad (1.4)$$

<sup>15</sup>Se non si assume un criterio di realtà, come nell'interpretazione ortodossa, tale affermazione perde di significato e il paradosso si risolve. In questo senso non serve nemmeno ricorrere ad un criterio di località in quanto  $\psi_k(q_2)$  e  $\phi_h(q_2)$  non hanno significato fisico e il fatto che siano diverse a seconda della misura effettuata su I significa semplicemente un cambio di informazione sul sistema. In questo senso vanno le argomentazioni di Bohr 1.2.1.

Misurando dunque o  $\mathbf{A}$  o  $\mathbf{B}$  su I è possibile predire i valori di  $\mathbf{Q}$  o  $\mathbf{P}$  su II. In un caso quindi  $\mathbf{Q}$  è un elemento di realtà (viene determinato con probabilità=1 senza disturbare il sistema) per II e nell'altro  $\mathbf{P}$  è un elemento di realtà per II. Ma per quanto detto sopra dal principio di località.<sup>16</sup> Si era asserito che  $\psi_k(q_2)$  e  $\phi_h(q_2)$  appartengono alla stessa realtà. Si conclude che due osservabili non commutanti possono avere realtà simultanea o equivalentemente, la M.Q. è una teoria incompleta **c.v.d.**

Lo stesso paradosso può essere formulato in modo più chiaro<sup>17</sup> e sintetico facendo uso delle relazioni di commutazione e delle leggi di conservazione:

Consideriamo due particelle 1 e 2 con variabili coniugate del moto  $(p_1, q_1)$  e  $(p_2, q_2)$  che si trovano in uno stato iniziale di quantità di moto totale  $P = p_1 + p_2$  e distanza relativa  $Q = q_1 - q_2$  (quindi  $[\mathbf{Q}, \mathbf{P}] = 0$  e si possono misurare simultaneamente). Supponiamo che dopo l'interazione iniziale le due particelle non interagiscono più: misurando  $p_1$  si conoscerà  $p_2$  senza intervenire sulla particella 2 e, successivamente, misurando  $q_1$  si conoscerà anche  $q_2$  senza intervenire sulla particella 2. Quindi  $q_1$  e  $q_2$  sono entrambi elementi di realtà per la particella 2, ma  $[\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2] \neq 0$  e quindi la M.Q. non può descriverli simultaneamente, si conclude che la M.Q. è incompleta.

### 1.2.1 La risposta di Bohr

Bohr, padre dell'interpretazione ortodossa, non fa attendere la sua critica alle argomentazioni portate da EPR con un articolo pubblicato ad ottobre dello stesso anno (quattro mesi più tardi) su *Phy.Rev.* dal medesimo titolo: “*Can Quantum-Mechanical Description of Physics Reality be Considered Complete?*” dove enfatizza il ruolo centrale (anche se va detto non con estrema chiarezza) del principio di complementarità e dell'ambiguità del principio di realtà [10]:

« *Un certo criterio di realtà, proposto in EPR contiene un'ambiguità essenziale quando viene applicato ai fenomeni quantistici, in questo senso è spiegato un punto di vista chiamato “complementarità”, dal quale la descrizione quantomeccanica dei fenomeni fisici sembrerebbe soddisfare tutte le richieste razionali di completezza.* »

La logica che segue per risolvere il paradosso è quella di descrivere esplicitamente un esperimento che realizza EPR in modo non paradossale e in accordo con il principio di indeterminazione e complementarità, nel senso che si riesce a misurare due osservabili non commutanti solo se si operano le due osservazioni in modo mutuamente esclusivo così da non violare il principio di indeterminazione (si vedano le osservazioni di Bohr nel caso del microscopio di Heisenberg):

« *Cominciamo considerando un diaframma rigido con due fenditure molto sottili rispetto alla loro distanza relativa. Si assuma che le due particelle, con momento iniziale, passino ognuna in una fenditura diversa indipendentemente l'una dall'altra. Se il momento del diaframma viene misurato accuratamente prima e dopo il passaggio delle particelle si può risalire alla somma delle componenti perpendicolari alle due fenditure dei momenti delle particelle, come pure si può conoscere l'iniziale distanza relativa delle due particelle.*

*Ovviamente qualunque misura successiva o della posizione o del momento di una delle due particelle ci permette di predire la posizione o il momento dall'altra ... Possiamo scegliere di misurare  $q_1$  o  $p_1$  e predire il valore rispettivamente di  $q_2$  o  $p_2$ , ma questo implica di*

<sup>16</sup>Se si lascia cadere il principio di località  $\psi_k(q_2)$  e  $\phi_h(q_2)$  non appartengono alla stessa realtà e il paradosso si risolve.

<sup>17</sup>Questa versione del paradosso si deve a Bohr, che la pubblica nell'articolo in risposta a EPR (1.2.1).

*scegliere tra due apparati di misura mutuamente esclusivi [come stabilito dal principio di complementarità e di indeterminazione]. Se misuriamo  $q_1$  è necessario stabilire una correlazione tra il comportamento della particella 1 e uno strumento rigidamente connesso col supporto che definisce il sistema di riferimento spaziale. La misura di  $q_1$  quindi fornisce anche la posizione del diaframma quando le particelle passano attraverso le fenditure e permette in tal modo di stabilire  $q_2$ . Permettendo tuttavia il passaggio di quantità di moto essenzialmente incontrollabile dalla prima particella al supporto menzionato, non ci sarà più possibile in seguito applicare la conservazione della quantità di moto al sistema costituito dal diaframma e dalle due particelle. Si è perduta quindi ogni possibilità di predizione non ambigua della quantità di moto della seconda particella. Viceversa la misura di  $p_1$  coinvolge inevitabilmente uno spostamento incontrollabile che preclude ogni possibilità di dedurre dal comportamento della particella 1 la posizione del diaframma relativamente al resto dell'apparato e quindi impedisce di predire la posizione  $q_2$ . »*

L'ambiguità del criterio di realtà proposto da EPR deriva - secondo Bohr - dalla richiesta « *senza disturbare il sistema* ». Pur non trattandosi di un « *disturbo meccanico* » tramite il processo di riduzione descritto da EPR c'è « *un'influenza sulle condizioni che definiscono le possibili previsioni riguardanti il comportamento futuro del sistema. Poiché queste condizioni costituiscono un elemento della descrizione di qualsiasi fenomeno per il quale può essergli assegnato il termine "realtà fisica", vediamo che le argomentazioni di EPR non giustificano la loro conclusione che la descrizione quantomeccanica sia incompleta ... Infatti è la mutua esclusione delle due procedure sperimentali, che permettono la non ambigua definizione di quantità fisiche complementari la coesistenza delle quali può al primo sguardo apparire inconciliabile con i principi di base della scienza.* ».

In questo senso, la realtà è accessibile a noi solo mediante gli esperimenti (e non nella funzione d'onda). La descrizione di un sistema deve perciò limitarsi a stabilire le relazioni che intercorrono tra le quantità osservabili, classicamente accessibili (positivismo dell'interpretazione ortodossa).

## La versione di Bohm

Si deve a Bohm [8] una riformulazione del paradosso nel 1951, che fa uso del concetto di spin:<sup>18</sup>

Si consideri una particella di spin 0 e momento angolare nullo che decade in due particelle dette I e II di spin 1/2, che saranno perciò in uno stato di singoletto, e si supponga che le particelle iniziano a muoversi liberamente in direzione opposta. Lo stato del sistema sarà descritto dalla seguente funzione d'onda:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle_I |-\rangle_{II} - |-\rangle_I |+\rangle_{II}] \quad (1.5)$$

valida qualunque sia la direzione in cui si misura lo spin. Ogni misura dello spin sulla particella I in una certa direzione fornisce una misura indiretta della stessa componente dello spin della particella II. Possiamo sempre fare misure successive dello spin della particella I lungo le direzioni  $x, y, z$  riorientando l'apparato di misura lungo la traiettoria di volo della particella ottenendo valori definiti del suo spin in diverse direzioni che sono però incompatibili perché le componenti delle spin lungo le diverse direzioni non commutano  $[\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j] = i\hbar\epsilon_{ijh}\mathbf{s}_k$ . Ma questo avviene senza in alcun modo disturbare la particella II quindi

<sup>18</sup>Questa versione, poi riformulata da Aharonov-Bohm nel 1957 [9], è quella più utilizzata negli successivi sviluppi sia teorici che sperimentali.

devono esistere elementi di realtà definiti in II corrispondenti alla simultanea definizione di tutte e tre le componenti del suo spin. Siccome la funzione d'onda permette di determinare solo un risultato per componente ad un certo istante di tempo, essa non fornisce una descrizione completa.

### 1.2.2 Non località - trasmissione dei segnali

Dalla descrizione del paradosso di EPR, come in quello di Bohm, si capisce come la non separabilità quantistica è il cuore della questione: sistemi che interagiscono ad un dato istante  $t_0$ , come imposto dal principio di sovrapposizione, sono correlati per ogni lasso di tempo successivo arbitrariamente grande. Questa tipologia di stati vengono chiamati da Schrödinger *entangled* (termine utilizzato per la prima volta in [19] nel 1935 in cui viene trattato in dettaglio il processo di misura e viene presentato il “*Cat paradox*”); per recuperare l'individualità è necessario far ricorso al collasso della funzione d'onda. Tale fenomeno implicito nel formalismo della M.Q. viene considerato da Schrödinger « *il tratto più caratteristico della M.Q., quello che impone il più completo distacco dalle linee classiche di pensiero* ».

Più precisamente, la funzione d'onda del sistema II risente (benché questi siano separati spazialmente) istantaneamente che è stata fatta una misurazione su I, perché dopo la misura rimane solo la parte di funzione d'onda di II associata (nello sviluppo in serie) all'autostato ottenuto su I <sup>19</sup>

$$|I, II\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |I_i\rangle |II_j\rangle \xrightarrow{\text{misura su I ottengo l'aut. di } |I_h\rangle} \sum_j c_{hj} |I_h\rangle |II_j\rangle \quad : \quad (1.6)$$

« è abbastanza sconcertante - scrive Schrödinger - che la teoria consenta ad un sistema di essere guidato dalla misericordia dello sperimentatore, benché non ne abbia avuto accesso. »

Anche Einstein, spesso affine al pensiero di Schrödinger, criticò questo aspetto della teoria nel celebre epiteto “*spooky action at the distance*” [in Born-Einstein letters: lettera Einstein to Born 3 marzo 1947]. Sebbene nell'interpretazione ortodossa (come già detto in 1.1 e in nota all'articolo EPR) questa caratteristica non locale della M.Q. non è in se problematica perché la funzione d'onda non ha un reale significato, non si tratta quindi di un'azione a distanza “meccanica”, si modifica semplicemente l'informazione massimale sul sistema complessivo. Rimane comunque il “timore” che si possa sfruttare il “collasso a distanza” per il trasferimento di segnali superluminali, in netto contrasto con la relatività speciale. È stato però dimostrato nel 1980 [13] da G.C.Ghirardi, A.Rimini e T.Weber [Lett. al Nuovo Cimento “*A general argument against superluminal transmission through the quantum mechanical measurement process*”] che questa ipotesi non è realizzabile; in un certo senso la M.Q., anche se possiede una misteriosa non-località negli stati entangled, è naturalmente conciliabile con la relatività speciale.

<sup>19</sup>Si veda in appendice “stati fattorizzati e stati entangled” per maggiori dettagli.



## 1.3 Appendice

### Formula di Born

L'idea che sta alla base del calcolo di Born è la seguente: consideriamo l'equazione agli autovalori per l'energia della particella scatterata

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x) + V(x)\psi(x) \right) = E\psi(x) \quad (1.7)$$

dove  $V(r)$  è un potenziale simile a quello coulombiano ma che tiene conto degli effetti di schermaggio. Essendo l'orbita aperta  $E$  deve essere negativa. Per particelle molto veloci  $E$  è molto grande e  $V(r)$  può essere considerato come una piccola perturbazione, e quindi  $\psi$  può essere considerata come un'onda piana  $\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}px}$ . Sostituendo in 1.7 si ha

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x) + E\psi(x) \right) = V(r)e^{\frac{i}{\hbar}px} \quad (1.8)$$

In analogia con la diffusione delle onde luminose l'intensità dell'onda uscente per tutto l'angolo solido darà il numero degli elettroni appartenenti al fascio incidente.

D'altronde a partire dall'equazione di Schrödinger si ottiene l'equazione di continuità

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(x)|^2 + \nabla \cdot \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \psi) \quad (1.9)$$

e definendo  $\mathbf{s}$  il vettore densità di corrente, cioè il numero di particelle per unità di area e tempo, si ottiene integrando su un volume finito  $v$

$$\frac{d}{dt} \int_V dv |\psi|^2 = - \int_V dv \nabla \cdot \mathbf{s} = - \int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s} \quad (1.10)$$

l'ultimo integrale rappresenta il flusso, cioè il numero di particelle che escono dalla superficie che racchiude  $V$  nell'unità di tempo, coerentemente con l'interpretazione di  $\int_V dv |\psi|^2$  che rappresenta il numero di particelle contenute in  $V$  (o analogamente la probabilità di trovarle in  $V$ ). La cosa interessante di questa interpretazione è che si riesce a ritrovare, nel caso coulombiano, la formula di diffusione di Rutherford.

### Perché gli operatori lineari

Si può dare una dimostrazione che si basa sulla coerenza con i risultati sperimentali (cioè i valori medi di un'osservabile) sull'uso degli operatori lineari. Una spiegazione si trova nel libro di L.Landau [15]:

Sia  $O$  una grandezza fisica con spettro discreto e indichiamo con  $|\psi_n\rangle$  lo stato puro (normalizzato) tale per cui la grandezza in quello stato assuma in valore  $O_n$ . Se il sistema si trova in un generico stato si potrà scrivere come serie  $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$  dove  $c_n \in \mathbb{R}$ . Definiamo la probabilità di ottenere  $O_n$  come un'espressione di  $|\psi\rangle$  e  $\langle\psi|$  (cosicché il risultato è un numero reale) che restituisca 1 se  $|\psi\rangle = |\psi_n\rangle$  e 0 se  $O_n$  non compare nello sviluppo e che la somma totale di tutte le probabilità  $\forall n$  restituisca 1 (con  $|\psi\rangle$  normalizzata). L'unica espressione possibile è

$$|\langle\psi_n|\psi\rangle|^2 = |c_n|^2 \quad (1.11)$$

Introduciamo il valor medio di  $O$  e chiamiamolo  $\bar{O}$ . Questo valor medio sarà definito ovviamente come:

$$\bar{O} = \sum_n O_n |c_n|^2 \quad (1.12)$$

Introduciamo l'operatore  $\mathbf{O}$  che agisce su  $|\psi\rangle$  restituendo il vettore  $\mathbf{O}|\psi\rangle$ . Definiamo il valor medio di questo operatore come

$$\bar{O} = \langle \psi | \mathbf{O} | \psi \rangle \quad (1.13)$$

Si mostra che  $\mathbf{O}$  è lineare. Riscrivendo infatti 1.12 come

$$\bar{O} = \langle \psi | \left( \sum_n c_n O_n |\psi_n\rangle \right) \quad (1.14)$$

e confrontando con 1.13 si trova che

$$\mathbf{O}|\psi\rangle = \sum_n c_n O_n |\psi_n\rangle = \sum_n \langle \psi_n | \psi \rangle O_n |\psi_n\rangle \quad (1.15)$$

. Utilizzando la relazione di completezza per l'insieme  $\{|\psi_n\rangle\}$  cioè  $\sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = \mathbb{I}$  si ha

$$\mathbf{O}\mathbb{I}|\psi\rangle = \mathbf{O} \left( \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \right) |\psi\rangle = \mathbf{O} \left( \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n | \psi \rangle \right) \quad (1.16)$$

dall'ultimo membro di 1.15 si deduce che  $\mathbf{O}|\psi_n\rangle = O_n |\psi_n\rangle$  che è proprio l'equazione agli autovalori per gli operatori lineari se  $|\psi_n\rangle$  è l'autovettore di  $O_n$ .

### Stati entangled e fattorizzati

Come già discusso in 1.2.2 in meccanica quantistica esistono stati, detti entangled, che hanno la proprietà di mantenere correlazione con un sistema con cui hanno interagito. Questa proprietà, detta non separabilità quantistica, può essere formalizzata come segue: Siano dati due sistemi  $U$  e  $V$  con rispettivi spazi di Hilbert  $\mathcal{H}^U$  e  $\mathcal{H}^V$ . Siano  $\{|m\rangle\}$  e  $\{|n\rangle\}$  due basi o.n. per  $\mathcal{H}^U$  e  $\mathcal{H}^V$  che sono l'insieme di autovettori di due osservabili a spettro discreto diciamo  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  che agiscono su  $U$  e  $V$  rispettivamente. Allora lo stato del sistema  $U + V$  si scrive come

$$\mathcal{H}^U \otimes \mathcal{H}^V \ni |\Psi\rangle = \sum_{mn} c_{mn} |m\rangle \otimes |n\rangle \quad (1.17)$$

Supponiamo di fare una misura su  $U$  tramite  $\mathbf{M} \otimes \mathbb{I}$  ottenendo l'autovalore  $m$  relativo all'autovettore  $|m\rangle$ , allora lo stato dopo la misura sarà  $\sum_n c_{mn} |m\rangle \otimes |n\rangle$ . Se si misura quindi  $\mathbb{I} \otimes \mathbf{N}$  su  $V$  si otterrà l'autovalore  $n$  relativo all'autovettore  $|n\rangle$  con probabilità  $(\langle m| \otimes \langle n|) |\Psi\rangle = |c_{nm}|^2$  che dipende quindi dalla misura fatta precedentemente di  $U$  anche se è separato spazialmente da  $V$ . Questi stati vengono detti appunto entangled.

Diverso è il caso degli stati fattorizzati definiti secondo la proprietà che la funzione d'onda del sistema  $U + V$  può essere scritta come

$$|\Psi\rangle = \sum_{mn} a_m b_n |m\rangle \otimes |n\rangle = \left( \sum_n a_m |m\rangle \right) \otimes \left( \sum_n b_n |n\rangle \right) \quad (1.18)$$

lo stato si dice fattorizzato. Misurando infatti  $\mathbf{M} \otimes \mathbb{I}$  lo stato dopo la misura è

$$\sum_n |m\rangle \otimes b_n |n\rangle \quad (1.19)$$

e quindi misurando  $\mathbb{I} \otimes \mathbf{N}$  su  $V$ , si otterrà l'autovalore  $n$  relativo all'autovettore  $|n\rangle$ , con probabilità  $|b_n|^2$ . Il sistema quindi non risente dell'interazione con  $V$ . Si nota infine come lo stato di singoletto di spin utilizzato nella versione EPR di Bohm è uno stato entangled.



## Capitolo 2

# Parametri aggiuntivi

La logica esposta nel paradosso EPR porta a concludere che tre principi apparentemente scontati in M.C. sono incompatibili nella M.Q.. Se si assume contemporaneamente il **principio di realtà**, il **principio di località** e il **principio di completezza** si giunge ad un paradosso.

Per risolvere il paradosso è dunque necessario far cadere una delle tre ipotesi (nell'interpretazione ortodossa si abbandona, come detto, il principio di realtà).

L'idea di EPR è quella di abbandonare il principio di completezza, cosicché la M.Q. possa essere "completata" tramite l'aggiunta di ulteriori parametri, le così dette "variabili nascoste" che riuscirebbero a spiegare l'indeterminismo quantistico come conseguenza di leggi deterministiche. In questo senso si può immaginare un'analogia con la termodinamica e la meccanica classica: la termodinamica riproduce solo valori medi di quantità che sono in realtà descrivibili con le usuali regole della meccanica classica, tramite la meccanica statistica.

Sulla speranza di completare la M.Q. si deve però a von Neumann (1932) un teorema che dimostra l'inconciliabilità tra le predizioni della M.Q. e una teoria a variabili nascoste di tipo deterministico e locale. Tale teorema (anche detto teorema di impossibilità di von Neumann) viene considerato per anni la prova dell'impossibilità di costruire teorie a variabili nascoste; fino a che David Bohm (1952) ne formula una esplicitamente:<sup>20</sup>

« Nel 1952 - scrive J. Bell - ho visto l'impossibile realizzarsi. Era in un articolo di David Bohm. Bohm ha mostrato esplicitamente come altri parametri possono essere introdotti, nel contesto non relativistico della meccanica ondulatoria, con l'aiuto dei quali la descrizione indeterministica può essere trasformata in una deterministica [4]. »

Riguardo all'assunzione del principio di località si deve, d'altra parte a J. Bell (1964) la dimostrazione di un teorema verificabile sperimentalmente sull'impossibilità di teorie a variabili nascoste (una teoria quindi reale e completa) non locali.

In questo capitolo si cercherà di dare una descrizione dei concetti basilari della teoria di Bohm e delle "disuguaglianze di Bell" rifacendoci ai rispettivi articoli originali.

### 2.1 La teoria di Bohm

Il lavoro di Bohm viene pubblicato su *Physical Review* [7] in un articolo dal titolo "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of Hidden Variables". Sull'abstract Bohm scrive

---

<sup>20</sup>Si veda in appendice qualche cenno al teorema e dov'è l'assunzione errata fatta da von Neumann.

« *L'usuale interpretazione della meccanica quantistica è autoconsistente, ma comprende delle assunzioni che non sono verificabili sperimentalmente. L'unico modo di indagare su questa ipotesi è cercare qualche altra interpretazione in termini di "variabili nascoste", che in linea di principio determinano il comportamento preciso di un singolo sistema, ma che sono in pratica mediate nelle misurazioni...* »

e prosegue nell'introduzione, dove i riferimenti a E.P.R. sono chiari

« *Questa ipotesi [funzione d'onda come descrizione completa e risultati statistici] è stata oggetto di critiche severe in particolare da Einstein che ha sempre creduto che, anche a livello quantistico, debbano esistere elementi definiti precisamente o variabili dinamiche che determinano il comportamento reale di ciascun sistema individuale ... Einstein ha sempre considerato la forma attuale della M.Q. come incompleta, sebbene ammetta la sua consistenza.* »

Il ragionamento di Bohm può essere schematizzato come segue.

Nella teoria classica per avere una descrizione logicamente chiusa di un sistema bisogna, come già sottolineato, assegnare la funzione d'onda e le variabili classiche  $Z$

$$(\psi, Z)$$

Allora in analogia per quanto si fa nella meccanica statistica si può pensare che le variabili macroscopiche siano in realtà funzione delle variabili microscopiche  $Z = f(X)$

$$(\psi, Z) \longrightarrow (\psi, X)$$

dove  $X$  rappresenta la configurazione del sistema. Nel suo articolo Bohm parte dall'equazione di Schrödinger per una particella

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x) + V(x) \psi(x) \quad (2.1)$$

con  $x \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$  spazio delle configurazioni, e si distingue da  $X$  configurazione della particella. Dato che  $\psi(x)$  è in generale complessa allora si può porre  $\psi(x) = \sqrt{\rho(x)} \exp(iS(x)/\hbar)$  e si nota immediatamente che  $S(x)$  ha le dimensioni di un'azione. Sostituendo in 2.1 con  $H = T + U$  e separando la parte reale da quella immaginari si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left( \rho \frac{\nabla S}{m} \right) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + U(x) - \frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{\nabla^2 \rho}{\rho} - \frac{(\nabla \rho)^2}{2\rho^2} \right] = 0 \quad (2.3)$$

Si può notare che per  $\hbar \rightarrow 0$  (limite classico) l'equazione 2.3 è l'equazione di Hamilton-Jacobi, e quindi, proseguendo per analogia con il caso classico  $p_k = (\partial S / \partial x_k)_X$  è la componente  $k$ -esima del momento (coniugato)  $k = 1, 2, 3$  della particella, si ottiene subito la legge di evoluzione temporale delle configurazioni

$$\mathbf{v} \equiv \frac{dX}{dt} = \left( \frac{\nabla S(x)}{m} \right)_X \quad (2.4)$$

e sostituendo in 2.2 si ottiene un'equazione di continuità

$$\partial \rho(x) / \partial t + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.5)$$

perfettamente consistente con la regola di Born, infatti

$$\psi^* \psi = |\psi(x)|^2 = |\sqrt{\rho(x)} \exp(iS(x)/\hbar)|^2 = \rho \quad (2.6)$$

Da questa si può dare anche una forma più esplicita alla velocità se si fa ricorso all'equazione di continuità ottenuta con l'espressione generica per  $\psi$

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(x)|^2 + \nabla \cdot \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \psi) \quad (2.7)$$

e quindi notando che la corrente scritta si può anche esprimere come  $\frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi)$  si ha

$$\mathbf{v}^\psi = \mathbf{j}/\rho = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left( \frac{\psi^* \nabla \psi}{\psi^* \psi} \right)_X \quad (2.8)$$

<sup>21</sup> Si può anche dare un'altra espressione alla 2.8 che ha il pregio di avere una forte analogia con le equazioni di Newton:<sup>22</sup> siccome l'equazione 2.3 è una sorta di eq. di Hamilton-Jacobi con un potenziale quantistico aggiuntivo (l'ultimo termine a sinistra in 2.3) ammette una soluzione del tipo

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -\nabla \left( V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2(\psi^* \psi)}{\psi^* \psi} \right) \quad (2.9)$$

dove si è sostituita l'espressione esplicita di  $\rho(x)$  per  $\psi(x)$ . La generalizzazione al caso di più particelle è immediata<sup>23</sup>

$$\mathbf{v}_i^\psi = \frac{\hbar}{m_i} \text{Im} \left( \frac{\psi^* \nabla_i \psi}{\psi^* \psi} \right)_X \quad (2.10)$$

In questa teoria ci sono quindi particelle simili a quelle classiche, che hanno proprietà dinamiche ben definite e governate da equazioni deterministiche “guidate” da un campo  $\psi(x)$ , la funzione d'onda, che ha senso fisico reale ma non è un campo come quello classico perché vive nello spazio delle configurazioni.

Bohm conclude la prima parte dell'articolo raggruppando i tratti caratteristici della sua teoria con tre assunzioni:

1. Il campo  $\psi$  soddisfa (evolve senza mai collassare) l'eq. di Schrödinger.
2. L'impulso delle particelle è dato da  $\mathbf{p}^\psi = \nabla S(X)$ .
3. Non siamo in grado di predire o controllare la precisa posizione delle particelle, ma abbiamo, in pratica, un ensemble statistico con densità di probabilità  $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ .<sup>24</sup> L'uso della statistica è, perciò, non inerente alla struttura concettuale, ma solamente una conseguenza della nostra ignoranza di precisare la condizione iniziale delle particelle.<sup>25</sup>

<sup>21</sup> Da questa formula si vede come la teoria è deterministica: si ha  $\mathbf{v}^\psi = v^\psi(X)$  che ha soluzione per ogni  $t$  una volta date le condizioni iniziali  $(X(0), \psi(x, 0))$ .

<sup>22</sup> È importante notare però che l'analogia con il caso Newtoniano è solo formale, questo perché la meccanica Newtoniana è una teoria naturalmente del secondo ordine. Nel caso Bohmiano invece la dinamica è del primo ordine come mostrato nell'equazione 2.8, se si deriva passando al secondo ordine bisogna introdurre dei vincoli.

<sup>23</sup> Da questa espressione si evidenzia anche la non località nella teoria di Bohm. Si vedrà in seguito che questa è una condizione strettamente necessaria per una teoria a variabili nascoste.

<sup>24</sup> E quindi la probabilità che il sistema ha una configurazione  $X$  è  $|\psi(X)|^2 dx$ , con  $dx$  centrato in  $X$ .

<sup>25</sup> Questo spiega anche perché non è necessario ricorrere al collasso della funzione d'onda, le miscele statistiche non hanno carattere “ontologico”.

Vediamo poi che secondo questa formulazione l'attraversamento di una barriera di potenziale è dovuta al potenziale quantistico: Consideriamo una particella che incide su una barriera di potenziale  $U$ . Dal momento che il moto della particella è fortemente influenzata dalla funzione d'onda, risolviamo prima per questa l'equazione di Schrödinger in modo del tutto identico a quanto si fa con l'interpretazione usuale. Inizialmente abbiamo un pacchetto d'onde incidente sulla barriera, e poiché la densità di probabilità è uguale a  $|\psi(x)|^2$ , la particella è da qualche parte dentro il pacchetto d'onda. Sempre secondo il calcolo classico la quando incontra la barriera di potenziale repulsiva, la funzione d'onda decresce rapidamente, così il potenziale quantistico  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2(\psi^*\psi)}{\psi^*\psi}$  ha una violenta fluttuazione decrescendo anche lui rapidamente, cosicché l'orbita diviene molto complicata da calcolare. Sappiamo però che il pacchetto d'onde incidente si disaccoppia e viene rimpiazzato da due pacchetti, uno di questi è riflesso e l'altro viene trasmesso con intensità molto più piccola. Siccome la densità di probabilità è  $|\psi|^2$  la particella può finire in uno dei due pacchetti. Poiché il pacchetto riflesso ha un'intensità sempre maggiore di quello trasmesso, concludiamo che nella maggior parte dei casi la particella verrà riflessa.

Nella seconda parte dell'articolo Bohm dedica una sezione alla teoria della misura. Il risultato è che si ottengono le usuali regole sulla probabilità (assioma **iv.** in 1.1): <sup>26</sup>

« *Concludiamo che la nostra interpretazione è capace di guidare in tutti i possibili esperimenti a identiche predizioni che otterremmo con l'interpretazione usuale* »

Applicando tali regole a osservabili che non commutano, riesce a dare una spiegazione anche al principio di indeterminazione:

« *...In questo modo capiamo nella nostra interpretazione perché misure, di quantità non commutanti, devono (come nell'interpretazione usuale) necessariamente essere limitate nella loro precisione dal principio di indeterminazione.* »

Il rapporto tra la funzione d'onda e le configurazioni (le variabili nascoste)  $X$  è stato chiarito da Bell in un articolo del 1982 dal titolo "on the impossible pilot wave" [4]

« *come nel caso del campo elettromagnetico la distinzione tra  $x$  e  $X$  è la distinzione tra variabili dei campi che si estendono nello spazio e le posizioni particolari delle particelle ... Sebbene  $\psi$  sia un campo reale esso non si manifesta come risultato di una singola misura, ma nella statistica di molte misure. Solo  $X$  nella teoria di Bohm si mostra immediatamente ogni volta. Il fatto che  $X$  e non  $\psi$  sia storicamente chiamata variabile nascosta è un frammento della stupidità storica* »

Si nota come il termine "onda pilota", che guida appunto le particelle, deriva dai lavori già citati di de Broglie,<sup>27</sup> a cui Bohm si ispira e a sua volta riprende dopo l'articolo del '52, per questo, spesso la teoria viene citata anche come *teoria dell'onda pilota di de Broglie - Bohm*.

<sup>26</sup>Si veda in appendice per un semplice esempio proposto da Bell [4]. Sviluppi successivi della teoria hanno inoltre chiarito il rapporto con gli operatori [12]: si dimostra in generale che la probabilità che la variabile classica  $Z$  assuma un valore  $\alpha$  è  $p(Z = \alpha) = (\psi, \Pi_\alpha \psi)$  dove  $\Pi_\alpha$  è il proiettore dell'operatore  $A$  (associato a  $Z$ ) sull'autospazio relativo all'autovalore  $\alpha$ , in perfetta analogia con l'interpretazione ortodossa.

<sup>27</sup>Si deve allo stesso de Broglie un'altra teoria, la cosiddetta teoria della doppia soluzione dell'equazione di Schrödinger, in cui si tenta una riconciliazione tra l'interpretazione statistica e una sorta di determinismo classico, come accade il quella di Bohm. Non solo de Broglie ha idee simili a quelle di Bohm, anche Madelung nel 1926 scrive un articolo sull'interpretazione idrodinamica dell'equazione di Schrödinger. Anche Rosen e Glaser argomentano nella direzione di Bohm. La differenza sostanziale tra queste teorie e quella di Bohm è l'introduzione delle variabili nascoste, ossia la posizione delle particelle e la loro velocità.



## 2.2 Le disuguaglianze di Bell

Si deve a Bell un articolo dal titolo “On the EPR paradox [2]” (1964) in cui viene illustrato il ruolo centrale della non località in M.Q. Se si cerca di completare la teoria con variabili addizionali che « *avrebbero il compito di rendere di nuovo causale e locale la teoria ... É la richiesta di località, o più precisamente la richiesta che il risultato di una misurazione effettuata su un sistema non venga influenzata da operazioni effettuate su un sistema distante con il quale abbia interagito nel passato che crea la difficoltà essenziale ... Inoltre un’interpretazione a variabili nascoste della M.Q. è stata costruita esplicitamente - qui Bell si riferisce alla teoria di Bohm - ma possiede in realtà una struttura grossolanamente non locale* ». Il punto di partenza delle argomentazioni di Bell,<sup>28</sup> è il paradosso EPR nella formulazione di Bohm (si veda 1.2 La versione di Bohm):

Indichiamo con  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  le matrici di Pauli per la particella 1 e 2 e con  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  due versori arbitrari (si pensi all’orientazione di due polarizzatori<sup>29</sup> nelle esperimento EPR di Bohm). Per due particelle in stato di singoletto si avrà secondo la teoria quantistica che il valore di aspettazione della *correlazione* tra le misure sulle due direzioni è

$$\langle \sigma_1 \mathbf{a} \sigma_2 \mathbf{b} \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (2.11)$$

Supponiamo ora di “completare” la descrizione del sistema per mezzo di un parametro addizionale  $\lambda$  che supponiamo continuo, e indichiamo con  $A$  e  $B$  i possibili risultati della misura rispettivamente di  $\sigma_1 \cdot \mathbf{a}$  e  $\sigma_2 \cdot \mathbf{b}$

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1 \quad B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1 \quad (2.12)$$

ammettere la località significa assumere che il risultato  $B$  non dipenda da  $A$ .<sup>30</sup> Indichiamo poi con  $\rho(\lambda)$  la distribuzione di probabilità normalizzata di  $\lambda$  (in perfetta analogia con quanto si fa nella meccanica statistica quando si assegna la distribuzione di probabilità microscopica) allora, per questo tipo di teoria il valore di aspettazione della correlazione 2.11 è del tipo

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) \quad (2.13)$$

Dove  $A$  e  $B$  sono stati scritti fattorizzati per l’ipotesi di località. Se le due descrizioni della M.Q. sono compatibili (come deve essere se una è il completamento dell’altra) allora 2.11 deve eguagliare 2.13. Ma mostreremo che questo non è possibile.

Da 2.12 sicuramente  $P$  in 2.13 non può essere minore di  $-1$ , caso raggiunto per  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  solo se  $A(\mathbf{a}, \lambda) = -B(\mathbf{a}, \lambda)$ . Assumendo questo (proprietà di perfetta correlazione) si ha

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) \quad (2.14)$$

<sup>28</sup>Ci sono varie riformulazioni delle disuguaglianze di Bell dopo 1964, per citarne alcune si ricordano tra le più celebri quella dovuta a Wigner [21] del 1970 e quella dello stesso Bell [3] “*Bertlmann’s socks and the nature of reality*” del 1981 Tutte le formulazioni si basano comunque su EPR nella versione di Bohm.

<sup>29</sup>D’ora in poi, come particelle nello stato di singoletto si farà riferimento ai fotoni (e quindi con spin 1 e non 1/2), per questo invece di spin si parlerà di polarizzazione (collegati dal concetto di elicità).

<sup>30</sup>Inoltre la scrittura  $A(\mathbf{a}, \lambda)$  (analogo per  $B$ ) corrisponde ad assumere che la teoria sia anche deterministica perché fissato  $\lambda$  il risultato di  $A$  è completamente determinato. Lavori successivi di Bell hanno però mostrato che questa richiesta non è essenziale [5].

Se  $\mathbf{c}$  è un altro versore allora

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)] = \\ \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) [A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda) - 1]$$

da cui ancora per 2.12 si ha

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)]$$

e riconoscendo  $P(\mathbf{b}, \mathbf{c})$  ne secondo membro di destra si ha

$$1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \geq |P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \quad (2.15)$$

A meno che  $P$  sia costante, il membro di destra è in generale di ordine  $|\mathbf{b} - \mathbf{c}|$  per piccoli  $|\mathbf{b} - \mathbf{c}|$ . Pertanto  $P(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \sim |\mathbf{b} - \mathbf{c}| - 1$  (dato che per  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$  si ha l'uguaglianza) che è diverso dal valore di aspettazione quantomeccanico  $-\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$  (per piccoli  $|\mathbf{b} - \mathbf{c}|$ ). Quindi il valore di 2.11 e 2.13 sono diversi, non sono cioè accurati.<sup>31</sup> Si può inoltre dimostrare che non possono neanche avvicinarsi con precisione arbitraria. La prova può essere fatta nel modo seguente. Consideriamo il valo medio di  $P$  vicino a due direzioni prescelte  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

$$\bar{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \overline{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \quad (2.16)$$

Impostata la seguente disuguaglianza

$$|\bar{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \overline{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}| \leq \epsilon \quad (2.17)$$

mostreremo che  $\epsilon$  non può essere reso piccolo a piacere. Supponiamo che per tutti gli  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  si ha

$$|\overline{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \delta \quad (2.18)$$

e quindi sostituendo in 2.17 si ha

$$|\bar{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \epsilon + \delta \quad (2.19)$$

Sostituendo l'espressione esplicita di

$$\bar{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda) \quad (2.20)$$

con

$$|\bar{A}(\mathbf{a}, \lambda)| \leq 1 \quad |\bar{B}(\mathbf{b}, \lambda)| \leq 1 \quad (2.21)$$

Ponendo ora  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  si ha

$$\int d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(\mathbf{b}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda) + 1] \leq \epsilon + \delta \quad (2.22)$$

<sup>31</sup>Si può giungere alla conclusione in modo più immediato notando che  $P = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  viola le disuguaglianze 2.15. Infatti scegliendo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  ortogonali e  $\mathbf{c}$  complanare agli altri due si ha  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  e  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \cos\theta$  e  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \sin\theta$  dove è stato indicato con  $\theta$  l'angolo tra  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ . Sostituendo nelle disuguaglianze si ottiene  $\sin\theta + \cos\theta \leq 1$  che è falsa per  $\theta \simeq \pi/4$ ; si usa dire che la meccanica quantistica viola le disuguaglianze di Bell

Prendendo la differenza

$$\begin{aligned} \bar{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \bar{P}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda) - \bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{c}, \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda) [1 + \bar{A}(\mathbf{b}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{c}, \lambda)] - \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{c}, \lambda) [1 + \bar{A}(\mathbf{b}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda)] \end{aligned}$$

usando 2.21

$$|\bar{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \bar{P}(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 + \bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{c}, \lambda)] + \int d\lambda \rho(\lambda) [1 + \bar{A}(\mathbf{b}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda)] \quad (2.23)$$

usando la 2.20 e 2.22

$$|\bar{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \bar{P}(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + \bar{P}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + \epsilon + \delta \quad (2.24)$$

e usando ora la 2.19

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| - 2(\epsilon + \delta) \leq 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 2(\epsilon + \delta) \quad (2.25)$$

ovvero

$$4(\epsilon + \delta) \geq |\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - 1 \quad (2.26)$$

si prenda per esempio  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 1/\sqrt{2}$ . Allora  $4(\epsilon + \delta) \geq \sqrt{2} - 1$ . Pertanto per  $\delta$  piccoli finiti,  $\epsilon$  non può essere arbitrariamente piccola. Quindi il valore di aspettazione quantomeccanico non può essere rappresentato né accuratamente né in modo arbitrariamente preciso a 2.13. Concludendo, per almeno uno stato quantomeccanico, lo stato di singoletto, le previsioni statistiche della M.Q. sono incompatibili con la predeterminazione separabile.

La dimostrazione appena data passa oggi sotto il nome di

**Teorema di Bell:** *Nessuna teoria a variabili nascoste (reale) locali può riprodurre tutte le previsioni statistiche della meccanica quantistica.*

### Verifiche sperimentali

Le disuguaglianze di Bell hanno l'enorme pregio di aver « formulato in modo matematicamente corretto » le intenzioni di EPR, in modo che queste possano essere messe a confronto con gli esperimenti.

Il passo successivo da compiere è quello di proporre una situazione sperimentale che sfrutti le correlazioni in modo sufficientemente preciso da osservare possibili violazioni delle disuguaglianze. Il passo avanti più decisivo in questo senso si deve a Clauser - Horn - Shimony - Holt che generalizzano le disuguaglianze di Bell: questa “versione” si basa su una combinazione dei coefficienti di correlazione di polarizzazione misurati in quattro orientazioni dei polarizzatori:

Sia  $S = E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$  dove  $E^{32}$  indica il coefficiente di correlazione di polarizzazione per le direzioni  $\mathbf{a}$   $\mathbf{b}$   $\mathbf{a}'$   $\mathbf{b}'$  che può essere predetto dalla teoria quantistica e anche attraverso gli esperimenti perché definiti come combinazione delle probabilità sulle correlazioni

<sup>32</sup>Qui la notazione rispetto all'articolo di Bell è cambiata. Qui si indica con  $E$  la correlazione mentre nell'articolo di Bell si usa  $P$ .

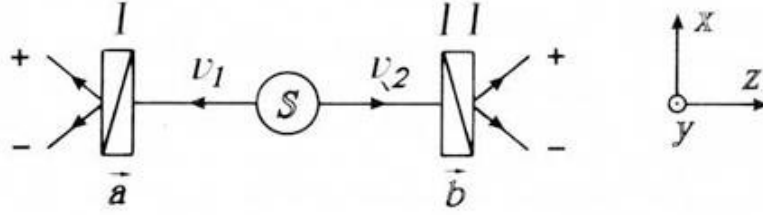


Figura 2.1 – Schematizzazione dell’esperimento EPR nella versione di Bohm che fa uso di fotoni nello stato di singoletto. È possibile misurare la probabilità di rivelazione singola o congiunta dopo i polarizzatori. In questo modo è possibile confrontare la correlazione dei risultati prima o dopo l’intervento del polarizzatore.

(+ e – indicano il risultato della misura di spin lungo la direzione di polarizzazione scelta, per esempio  $p_{++}$  indica la probabilità di ottenere +1 sulla particella I e +1 su II)<sup>33</sup>

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = p_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + p_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - p_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - p_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (2.27)$$

che si calcolano bene secondo la teoria e si misurano come statistica in un gran numero di eventi. Il risultato di BCHSH<sup>34</sup> (il calcolo è molto simile da quello fatto da Bell) è che  $S$  nel caso di teorie a variabili nascoste locali deve soddisfare  $-2 \leq S \leq 2$ : consideriamo la quantità

$$s = A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda) + A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda) + A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)$$

dove  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$  sono quattro versori (si pensi all’orientazione di due polarizzatori). Ricordando che  $A$  e  $B$  possono assumere i valori  $\pm 2$  si ha che  $s = \pm 2$ . La media di  $s$  su  $\lambda$  è quindi compresa tra  $\pm 2$  cioè

$$-2 \leq \int d\lambda \rho(\lambda) s(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}', \lambda) \leq 2 \quad (2.28)$$

dove l’integrale è proprio la definizione data di  $S$ .

L’idea dell’esperimento consiste nel creare coppie di fotoni correlati provenienti da decadimenti gamma. I due fotoni emessi viaggiano verso due direzioni opposte per essere analizzati mediante polarizzatori con una data orientazione (si veda figura 2.1). Le difficoltà sperimentali più rilevanti riguardano il fatto che le quantità misurate devono essere fatte a caso su ogni sottosistema e devono avere separazione *space-like* rispetto alla misura fatta sull’altro. In particolare quindi è necessario (per garantire la non località) cambiare l’orientazione dei polarizzatori quando i fotoni correlati sono già stati prodotti. Questa sottigliezza sperimentare è stata fatta notare originariamente da Bell stesso, che nel caso di polarizzatori con orientazione fissa fa notare

« *La disposizione degli strumenti è fatta sufficientemente in anticipo da consentire loro di raggiungere un qualche mutuo rapporto mediante scambio di segnali con velocità minori o uguali alla velocità della luce* »

Questa difficoltà sono state superate per la prima volta<sup>35</sup> da un gruppo di Orsay (A.Aspect - G.Grangier - G.Roger) 1980 - 1982 i cui risultati sono pubblicati in [1] “Experimental Realization

<sup>33</sup>Si nota come nel caso la misura su I è completamente scorrelata alla misura su II il coefficiente di correlazione di polarizzazione  $E$  è nullo, così come è nullo se lo stato è fattorizzato.

<sup>34</sup>Dove B sta per Bell.

<sup>35</sup>I primi esperimenti con polarizzatori ad orientazione fissa sono stati fatti a Berkeley (Clauser - Freedman nel 1972) e a Harvard (Holt - Pipkin 1978) con con risultati simili.

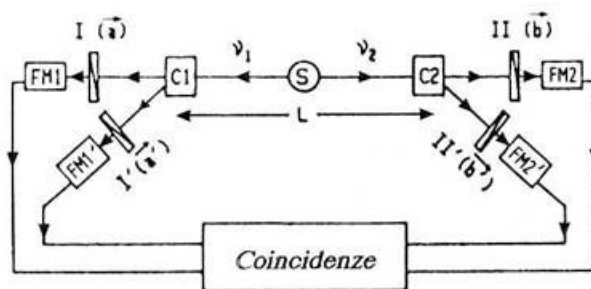


Figura 2.2 – Schema sperimentale dell’esperimento di Orsay a polarizzatori con orientazione variabile

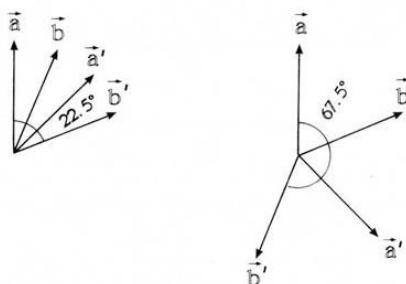


Figura 2.3 – Orientazione dei polarizzazione per cui il valore di aspettazione della M.Q. viola massimamente le disuguaglianze di BCHSH.

of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell’s Inequalities” (lo schema dell’esperimento di Orsay con polarizzatori variabili è mostrato in figura 2.2).<sup>36</sup> Le misure sono state effettuate per le direzioni dei polarizzatori che massimamente violano le disuguaglianze (si veda figura 2.3). I risultati ottenuti dimostrarono una violazione delle disuguaglianze con precisione sufficiente (9 deviazioni standard) da poter confermare il carattere non locale della meccanica quantistica.

## 2.3 Appendice

### Il teorema di impossibilità di von Neumann

É stato accennato il fatto che von Neumann presentava già nel suo libro [20] una dimostrazione dell’impossibilità di teorie a variabili nascoste locali (di per se l’interpretazione statistica della funzione non vieta le variabili nascoste). L’idea che sta alla base della dimostrazione sta nell’assumere delle condizioni sufficientemente generali sulle osservabili:

- (1) Se la quantità  $R$  è per natura non negativa allora  $E(R) \geq 0$
- (2) Se  $R$  e  $S$  sono quantità arbitrarie e  $a, b$  numeri reali allora  $E(aR+bs) = a E(R)+b E(S)$
- (3) Se la quantità  $R$  ha l’operatore  $\mathbf{R}$ , allora la quantità  $f(R)$  ha l’operatore  $\mathbf{f}(\mathbf{R})$
- (4) Se la quantità  $R$  e  $S$  hanno operatori  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$  allora la quantità  $O = R + S$  ha operatore  $\mathbf{R} + \mathbf{S}$

<sup>36</sup>Nel caso dell’esperimento di Orsay, come sorgente si sono utilizzati nuclei di calcio che emettevano fotoni in cascata tra due shell  $S$  con molteplicità di spin 1.

dove è stato indicato con  $E$  il valore di aspettazione.

Si distingue poi un insieme privo di dispersione (o deterministico) se  $E(R^2) = E(R)^2$  da un insieme omogeneo (o puro come quelli della M.Q) se  $E(R)$  non si può esprimere come combinazione (con coefficienti  $< 1$ ) di due diversi valori di aspettazione (diverse da  $E(R)$ ). Dalle assunzioni fatte sopra von Neumann dimostra che  $E(R) = \text{tr}(\mathbf{UR})$  dove  $\mathbf{U}$  è un operatore hermitiano e  $\text{tr}$  è la traccia. Si dimostra che questa forma per  $E$  è incompatibile con gli insiemi deterministici. Viene dunque da chiedersi come fa Bohm a costruire la sua teoria che è invece deterministica. Si deve a Bell la risposta in un articolo già citato sopra [4] nella sezione “*The hole in the nets*”. L’errore sta nell’assumere l’ultima ipotesi enunciata sopra (4), secondo cui i risultati di una quantità fisica che è somma di altre due sono la somma dei risultati. Per vederlo si assuma che  $R$  e  $S$  sono le componenti lungo i versori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  dello spin e sia  $O = (R + S)/\sqrt{2}$  la componente lungo un terzo versore  $\mathbf{u} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/\sqrt{2}$ . Nel caso di spin 1/2 secondo l’assunzione di von Neumann passando agli operatori si avrebbe

$$\pm 1/2 = (\pm 1/2 \pm 1/2)/\sqrt{2}$$

che è assurdo.

### Teoria della misura per variabili nascoste

Si riporta in seguito un esempio proposto da Bell (che riprende comunque molto da vicino l’esposizione seguita da Bohm nel suo articolo del 1952) sul processo di misura in una teoria a variabili nascoste: Si consideri un sistema in una dimensione descritta dalla funzione d’onda  $\psi(a, x, t)$ , dove  $a$  è una variabile discreta,  $x$  una continua e la variabile temporale  $t$ . Si pensi ad esempio ad una particella con spin che vive su una retta.

Sia  $O$  un osservabile relativa (che dipende solo) allo spin, allora

$$O\psi(a, x, t) = \sum O(a, b)\psi(b, x) \quad (2.29)$$

Per misurare  $O$  supponiamo di far intervenire un campo esterno che corrisponderà ad un termine di interazione nell’hamiltoniana

$$gO \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.30)$$

con  $g$  costante di accoppiamento. Si può quindi risolvere l’equazione di Schrödinger: introducendo gli autovettori  $\alpha_n(a)$  di  $O$  con autovalori  $O_n$  allora si può scrivere

$$\psi(a, x, 0) = \sum_n \phi_n(x)\alpha_n(a) \quad (2.31)$$

e risolvendo l’equazione di Schrödinger si trova

$$\psi(a, x, t) = \sum_n \phi_n(x - gO_n t)\alpha_n(a). \quad (2.32)$$

Questo vuol dire che i vari pacchetti d’onda  $\phi$  si allontanano gli uni dagli altri e dopo un tempo sufficientemente lungo, qualunque fosse lo stato iniziale, si sovrapporranno poco. A questo punto il risultato di una misura di posizione sulla particella corrisponderà ad un autovalore  $O_n$ , e la probabilità di ottenere un particolare  $O_n$  sarà data dalla norma al quadrato di  $\phi_n$ ,<sup>37</sup> cioè dal

<sup>37</sup>Perché se  $|\psi|^2$  è la densità di probabilità, integrando su tutto lo spazio delle configurazioni si ha la probabilità totale cioè  $|\psi|^2 = 1 = \sum_a \int dx |\psi(a, x)|^2$ , ma siccome i pacchetti d’onda si sparpagliano nel tempo, come mostrato, dopo un tempo sufficientemente lungo i supporti delle funzioni d’onda non si sovrappongono cosicché  $1 = \sum_n (\sum_a |\alpha_n(a)|^2 \int dx |\phi_n(x - gO_n t)|^2) = \sum_n \int dx |\phi_n(x - gO_n t)|^2$  come si voleva.

peso che aveva il pacchetto d'onda associato ad  $O_n$  nell'espansione in serie. Abbiamo un modello che può essere pensato come l'esperimento di Stern-Gerlach.

Scrive Bohm nell'articolo del 1952 nella sezione dedicata alla teoria della misura:

*« Tutto quello che possiamo predire in pratica è che in un insieme di esperimenti simili fatti con le stesse condizioni iniziali, la probabilità di densità è  $|\psi(a, x, t)|^2$ . Da questa informazione, perciò, siamo in grado di calcolare solo la probabilità di un esperimento individuale, il risultato di una misura di  $O$  sarà un specifico numero  $O_n$ . Per ottenere la probabilità di un dato valore di  $O_n$ , dobbiamo integrare la densità di probabilità per ogni  $a$  e  $x$  associata al  $O_n$ esimo pacchetto d'onda (perché i pacchetti non si sovrappongono) »*

Da questo modello si può anche motivare il principio di indeterminazione. Se si prova infatti a misurare una quantità  $F$  che non commuta con  $O$  allora gli autostati sono diversi e quindi in un pacchetto d'onda "su cui si misura"  $O_n$  non potrà esserci nessun autovalore di  $F$ . Anche qui emerge quindi il fatto che due osservabili non commutanti possono essere misurate precisamente solo tramite osservazioni mutuamente esclusive.





# Bibliografia

- [1] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: a new violation of bell's inequalities. *Physical review letters*, 49(2):91, 1982.
- [2] John S Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1(3):195, 1964.
- [3] John S Bell. Bertlmann's socks and the nature of reality. *Le Journal de Physique Colloques*, 42(C2):C2–41, 1981.
- [4] John S Bell. On the impossible pilot wave. *Foundations of Physics*, 12(10):989–999, 1982.
- [5] John S Bell and John Stewart Bell. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics: Collected papers on quantum philosophy*. Cambridge university press, 2004.
- [6] Sigfrido Boffi. *Il principio di indeterminazione*. Università degli studi di Pavia, Dipartimento di Fisica nucleare e teorica, 1990.
- [7] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of " hidden " variables. i. *Physical review*, 85(2):166, 1952.
- [8] David Bohm. *Quantum theory*. Courier Corporation, 2012.
- [9] David Bohm and Yakir Aharonov. Discussion of experimental proof for the paradox of einstein, rosen, and podolsky. *Physical Review*, 108(4):1070, 1957.
- [10] Niels Bohr. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 48(8):696, 1935.
- [11] Max Born. *Fisica atomica*. 1976.
- [12] Detlef Dürr, Sheldon Goldstein, and Nino Zanghì. Quantum equilibrium and the role of operators as observables in quantum theory. *Journal of Statistical Physics*, 116(1-4):959–1055, 2004.
- [13] GianCarlo Ghirardi. Entanglement, nonlocality, superluminal signaling and cloning. *arXiv preprint arXiv:1305.2305*, 2013.
- [14] W Heisenberg. W. heisenberg, z. phys. 43, 172 (1927). *Z. Phys.*, 43:172, 1927.
- [15] Lev Davidovich Landau and Evgenii Mikhailovich Lifshitz. *Meccanica quantistica: teoria non relativistica*. Riuniti, 1991.

- 
- [16] Oreste Nicosini. *Paradosso EPR e teorema di Bell*. Università degli studi di Pavia, Dipartimento di fisica nucleare e teorica, 1991.
- [17] Giulio Peruzzi. *Niels Bohr: dall'alba della fisica atomica alla big science*. Le Scienze, 2001.
- [18] Erwin Schrödinger. Quantization as a problem of proper values (part i). *Annalen der Physik*, 1926.
- [19] John D Trimmer. The present situation in quantum mechanics: A translation of schrödinger's "cat paradox" paper. *Proceedings of the American Philosophical Society*, pages 323–338, 1980.
- [20] John Von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics: New Edition*. Princeton university press, 2018.
- [21] Eugene P Wigner. On hidden variables and quantum mechanical probabilities. *American Journal of Physics*, 38(8):1005–1009, 1970.