UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

La varietà stabile: teoria e simulazioni numeriche

Relatore

Prof. Francesco Fassò

Laureando

Giorgio Vittorio Visco

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione

I sistemi dinamici sono sistemi che evolvono nel tempo seguendo leggi deterministiche. Distinguiamo sistemi dinamici discreti, che evolvono *a passi discreti* e sono descritti da iterazioni di una mappa $\{\varphi : M \to M\}$ (con M varietà differenziabile), e sistemi dinamici continui retti da equazioni differenziali ordinarie, la cui evoluzione temporale è *continua* e segue le prescrizioni di un gruppo ad un parametro $\{\varphi_t : M \to M\}$. Vedremo come questi ultimi possono essere ricondotti al caso discreto tramite le *mappe di Poincaré*.

Ci focalizzeremo sullo studio dei sistemi discreti, in particolare si considereranno sistemi dinamici iperbolici, ovvero sistemi caratterizzati da una *contrazione* ed una *dilatazione* delle orbite in prossimità di un *punto fisso iperbolico*. Verranno studiate le strutture caratteristiche di questi sistemi: la varietà stabile e la varietà instabile. Si tratteranno due teoremi fondamentali che descrivono le proprietà di questi oggetti, il *teorema di Hadamard-Perron* ed il *teorema di Smale*, prestando particolare attenzione alle loro dimostrazioni.

Successivamente si tratterà anche un loro corollario, il λ-*lemma*, il quale fornisce una base teorica per costruire numericamente le varietà stabili ed instabili almeno nel caso in cui esse siano unidimensionali.

Mostreremo, in conclusione, due esempi di simulazioni numeriche: la *Chirikov standard map* ed il *pendolo con forzante periodica*.

Capitolo 1

Sistemi discreti e iperbolicità

I sistemi dinamici discreti sono modelli che descrivono l'evoluzione di un fenomeno visualizzandola ad intervalli temporali costanti. Questo tipo di modellizzazione trova applicazioni in svariati ambiti, dalla biologia all'economia, dalla sociologia alla meteorologia. In particolare tali sistemi vengono adoperati per trattare molti problemi fisici. Ne studieremo alcuni esempi nei capitoli successivi.
Un sistema dinamico discreto è definito da una coppia (M, φ): M è una varietà differenziabile in $\mathbb{R}^n$, la quale rappresenta l'insieme degli elementi soggetti al fenomeno evolutivo e prende il nome di *spazio delle fasi*; φ è una mappa di M in sé stesso che prescrive la dinamica del sistema. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ definita dalla legge $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ rappresenta l'evoluzione (*nel futuro*) di un certo dato iniziale $x_0 \in M$. Supponendo φ biiettiva possiamo studiare anche l'evoluzione *nel passato* tramite φ^{-1}.

Definizione 1.1. *Si definiscono orbite, semi-orbite positive e semi-orbite negative di un punto x i seguenti insiemi:*

$$\mathcal{O} := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \varphi^j(x)\,, \qquad \mathcal{O}^+(x) := \bigcup_{j\geq 0} \varphi^j(x)\,, \qquad \mathcal{O}^-(x) := \bigcup_{j\geq 0} \varphi^{-j}(x)$$

I punti di equilibrio del sistema sono quelli per i quali non si ha alcuna evoluzione $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$, ovvero sono i punti fissi di φ. Siamo interessati a studiare la dinamica in presenza di punti di equilibrio *speciali* che contraggono e/o dilatano le orbite. Questi sono i cosiddetti *punti fissi iperbolici*, di cui parleremo in dettaglio successivamente analizzando gli effetti che essi comportano sulla dinamica locale e globale.
Supponiamo, da ora in avanti, che $M = \mathbb{R}^n$ e che φ sia un diffeomorfismo di classe C^k $(k \geq 1)$ con un punto fisso $\bar{x}$. Possiamo metterci in un sistema di coordinate nelle quali $\bar{x} = 0$ (da adesso, se non verrà specificato, si intenderà 0 come punto fisso). Così facendo è possibile riscrivere φ come:

$$\varphi(x) = Ax + g(x) \tag{1.1}$$

dove $A := D\varphi(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ è la linearizzazione di φ nel punto fisso e g soddisfa le condizioni $g(0) = 0$ e $Dg(0) = 0$. Diamo adesso la definizione di isomorfismo iperbolico:

Definizione 1.2. *Un isomorfismo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ è detto iperbolico se esistono due sottospazi E^+ e E^- tali che:*

i. $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$;

ii. *E^+ e E^- sono invarianti rispetto ad A, ovvero rispetto a questa decomposizione l'operatore A assume la forma $A = \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix}$, con $A_+ \in \mathcal{L}(E^+, E^+)$ e $A_- \in \mathcal{L}(E^-, E^-)$;*

iii. *le restrizioni di A ai sottospazi $E_\pm$ soddisfano le seguenti disuguaglianze:*

$$|A_+^j x|_{\mathbb{R}^n} \leq c\,\vartheta_+^j |x|_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall j \geq 0, \quad x \in E^+$$
$$|A_-^{-j} x|_{\mathbb{R}^n} \leq c\,\vartheta_-^j |x|_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall j \geq 0, \quad x \in E^-$$

con $c > 0$ e $0 < \vartheta_\pm < 1$ costanti.

Qui $|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ indica la norma euclidea. E^+ e E^- prendono rispettivamente il nome di sottospazio stabile e sottospazio instabile.

In termini di A i sottospazi $E^\pm$ possono essere caratterizzati nel modo seguente:

$$E^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^n |\, A^j x \to 0,\, j \to \infty\right\}$$
$$E^- = \left\{x \in \mathbb{R}^n |\, A^j x \to 0,\, j \to -\infty\right\}$$

Denotiamo con x_+ e x_- le componenti *stabili* ed *instabili* di un generico punto $x \in \mathbb{R}^n$, ovvero $x = (x_+, x_-)$ con $x_\pm \in E^\pm$. Si noti che, dati i proiettori $P_\pm \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ su $E^\pm$ e considerando l'invarianza di $A_\pm$ rispetto a $E^\pm$, valgono le seguenti commutazioni:

$$AP_\pm = P_\pm A\,, \qquad A^{-1}P_\pm = P_\pm A^{-1} \tag{1.2}$$

La condizione di iperbolicità può essere espressa anche in funzione degli autovalori di A:

Proposizione 1.1. *L'isomorfismo A è iperbolico se e solo se tutti i suoi autovalori hanno modulo non unitario.*

Dimostrazione. Omessa (si veda [10], 48). □

Dalla definizione di isomorfismo iperbolico segue quella di punto fisso iperbolico:

Definizione 1.3. *Un punto fisso $\bar{x}$ di φ è detto iperbolico se la linearizzazione $D\varphi(\bar{x})$ è un isomorfismo iperbolico.*

Sarà utile per i capitoli successivi introdurre la definizione di *norma adattata*:

Proposizione 1.2. *Sia $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ un operatore iperbolico. Esistono allora un $0 < \alpha < 1$ ed una norma su E^+ ed una su E^- denotate entrambe con $|\cdot|$ tali che:*

$$|A_+ x_+| \le \alpha |x_+|\,, \qquad |A_-^{-1} x_-| \le \alpha |x_-| \tag{1.3}$$

$|\cdot|$ prende il nome di norma adattata.

Accenno della dimostrazione. Si verifica facilmente che se si scelgono un $N \in \mathbb{N}$ tale che $c(\theta_+/\alpha)^N \le 1$ ed un opportuno $0 < \alpha < 1$, allora

$$|x_+| := \sum_{j=0}^{N-1} \alpha^{-j} |A_+^j x_+|_{\mathbb{R}^n}\,, \qquad |x_-| := \sum_{j=0}^{N-1} \alpha^{-j} |A_-^{-j} x_-|_{\mathbb{R}^n}$$

sono delle norme che soddisfano le proprietà richieste (per la dimostrazione completa di veda [10], 49-50) □

Definiamo la corrispondente norma su $\mathbb{R}^n$:

$$\left|Ax\right| := \max\left\{\left|A_+ x_+\right|, \left|A_- x_-\right|\right\}$$

Con queste norme A_+ e A_-^{-1} sono delle contrazioni, ovvero

$$\left|A_+\right|_{op} \le \alpha < 1\,, \qquad \left|A_-^{-1}\right|_{op} \le \alpha < 1 \tag{1.4}$$

dove denotiamo con $|\cdot|_{op}$ la norma operatoriale relativa a $|\cdot|$. Da ora in avanti lavoreremo con le norme adattate.
Date le relazioni (1.4) risulta evidente che l'iperbolicità consiste nel poter restringere la linearizzazione A in un operatore A_+ *stabile* contraente ed in A_- *instabile* dilatante (contraente nel passato). Tali contrazioni e dilatazioni sono di tipo geometrico dal momento che $|A_+^n x_+| \le \alpha^n |x_+|$ e $|A_-^{-n} x_-| \le$

$\alpha^n|x_-|$ con $\alpha < 1$. Considerando che la linearizzazione rappresenta un'*approssimazione locale* di φ, ci domandiamo se φ erediti le proprietà di contrazione e dilatazione di A. Per dare una risposta cerchiamo di studiare il comportamento delle orbite in prossimità del punto fisso iperbolico e incominciamo col definire i seguenti insiemi:

Definizione 1.4. *Si definiscono gli insiemi stabili ed instabili (globali) del punto fisso 0 come:*

$$W^+(\varphi, 0) := \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \, \varphi^j(x) \to 0, \, j \to \infty\right\}$$

$$W^-(\varphi, 0) := \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \, \varphi^{-j}(x) \to 0, \, j \to \infty\right\}$$

Questi insiemi sono costituiti da tutti i dati iniziali le cui semi-orbite convergono a 0 nel *futuro* (sotto iterazioni di φ) o nel *passato* (sotto iterazioni di φ^{-1}). Restringendoci ad un intorno Q del punto fisso, $W^+(\varphi, 0)$ e $W^-(\varphi, 0)$ possono essere ricondotti, come mostreremo più avanti, ai seguenti insiemi:

Definizione 1.5. *Si definiscono gli insiemi stabili ed instabili locali per un intorno Q come:*

$$W^+_{loc}(\varphi, Q) := \left\{x \in Q \middle| \, \varphi^j(x) \in Q \;\; \forall j \geq 0\right\}$$

$$W^-_{loc}(\varphi, Q) := \left\{x \in Q \middle| \, \varphi^{-j}(x) \in Q \;\; \forall j \geq 0\right\}$$

Si verifica senza difficoltà che tali insiemi sono rispettivamente invarianti positivamente e negativamente:

$$\varphi(W^+_{loc}(\varphi, Q)) \subset W^+_{loc}(\varphi, Q)\,, \qquad \varphi^{-1}(W^-_{loc}(\varphi, Q)) \subset W^-_{loc}(\varphi, Q)$$

$W^+_{loc}(\varphi, 0)$ e $W^-_{loc}(\varphi, 0)$ sono composti da tutti i punti le cui semi-orbite sono contenute in Q nel *futuro* o nel *passato*, e nella loro definizione non si richiede la convergenza al punto fisso. In generale gli insiemi stabili e instabili locali non godono di proprietà particolari, ma dimostreremo (*teorema di Hadamard-Perron*) che se la linearizzazione di φ in 0 è un isomorfismo iperbolico, allora questi insiemi sono grafici di opportune mappe differenziabili $h : E^+ \to E^+$ e $k : E^- \to E^+$, e inoltre $W^\pm_{loc}(\varphi, 0) \subset W^\pm(\varphi, 0)$. In questo caso $W^+_{loc}(\varphi, Q)$ e $W^-_{loc}(\varphi, Q)$ prendono rispettivamente il nome di *varietà stabile* e *varietà instabile locale*. Quanto appena detto, come vedremo, permette inoltre di identificare una struttura di sottovarietà differenziabile immersa per gli insiemi stabili ed instabili globali (*teorema di Smale*).

Capitolo 2

La varietà stabile

Introduciamo e dimostriamo adesso il *teorema di Hadamard-Perron*. Per alleggerire la notazione scriveremo $W^{\pm} = W^{\pm}(\varphi, 0)$ e $W^{\pm}_{loc} = W^{\pm}_{loc}(\varphi, Q)$.

2.1 Teorema di Hadamard-Perron

Teorema 2.1 (Teorema di Hadamard-Perron o della varietà stabile locale)**.** *Si assuma che il diffeomorfismo φ sia di classe C^k con $k \geq 1$ e che 0 sia un punto fisso iperbolico. Allora $\exists\, r > 0$ tale che, se si definisce Q come*

$$Q := \left\{x = (x_+,\, x_-) \in E^+ \oplus E^- \middle| |x_+| \leq r,\, |x_-| \leq r\right\}$$

si ha:

$$W^+_{loc} = \left\{x \in Q \middle| \, x = (x_+, h(x_+)) \in E^+ \oplus E^-\right\} \cap W^+ \tag{2.1}$$
$$W^-_{loc} = \left\{x \in Q \middle| \, x = (k(x_-), x_-) \in E^+ \oplus E^-\right\} \cap W^- \tag{2.2}$$

dove $h : E^+ \to E^-$ e $k : E^- \to E^+$ sono di classe C^k e tali che h, h', k e k' si annullano in 0. Ne segue che:

$$T_0 W^+_{loc} = E^+\,, \qquad T_0 W^-_{loc} = E^-$$

2.1.1 Dimostrazione

Prendiamo $\varphi(x) = Ax + g(x)$ con A isomorfismo iperbolico, $g(0) = 0$ e $g'(0) = 0$. Dal momento che si vuole studiare come le proprietà di A influiscano su φ, partiamo dal caso *poco perturbato*, ovvero trattiamo un diffeomorfismo $\tilde{\varphi} := Ax + \tilde{g}$ la cui parte non lineare è limitata e quasi costante: $|\tilde{g}|^{\infty} < \infty$ e $|\tilde{g}'|^{\infty}_{op} \leq \delta$ per un certo $\delta > 0$, dove $|\tilde{g}|^{\infty} = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |\tilde{g}(x)|$. Introduciamo, per prima cosa, gli insiemi dei punti aventi semi-orbite limitate:

$$W^+_{lim}(\varphi) := \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \sup_{j \geq 0} \left|\varphi^j(x)\right| < \infty\right\}$$
$$W^-_{lim}(\varphi) := \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \sup_{j \geq 0} \left|\varphi^{-j}(x)\right| < \infty\right\}$$

Lemma 2.1. *Sia $\tilde{\varphi} := Ax + \tilde{g}$ un diffeomorfismo di classe C^k ($k \geq 1$) con A iperbolico e $\tilde{g}(0) = 0$, $\tilde{g}'(0) = 0$, $|\tilde{g}|^{\infty} < \infty$ e $|\tilde{g}'|^{\infty}_{op} \leq \delta$. Allora se δ è sufficientemente piccolo si ha*

$$\tilde{W}^+_{lim} := W^+_{lim}(\tilde{\varphi}) = \left\{(x_+, x_-) \in \mathbb{R}^n \middle| \, x_- = h(x_+)\right\} \cap W^+(\tilde{\varphi}, 0)$$
$$\tilde{W}^-_{lim} := W^-_{lim}(\tilde{\varphi}) = \left\{(x_+, x_-) \in \mathbb{R}^n \middle| \, x_+ = k(x_-)\right\} \cap W^-(\tilde{\varphi}, 0)$$

con $h : E^+ \to E^-$ e $k : E^- \to E^+$ di classe C^k e tali che h, h', k e k' si annullano in 0. Si ha di conseguenza:

$$T_0 \tilde{W}^+_{lim} = E^+ \qquad T_0 \tilde{W}^-_{lim} = E^-$$

Dimostrazione del Lemma 2.1. Tratteremo la dimostrazione per $\tilde{W}^+_{lim}$ (per $\tilde{W}^-_{lim}$ il procedimento è analogo). Questa è suddivisa in 4 parti: nella prima parte costruiremo la mappa $h : E^+ \to E^-$ il cui grafico è $\tilde{W}^+_{lim}$ e mostreremo che $\tilde{W}^+_{lim} \subset W^+(\tilde{\varphi}, 0)$; nella seconda parte dimostreremo che h è lipschitziana; nella terza parte vedremo che è differenziabile di classe C^k ed infine proveremo la tangenza al sottospazio stabile.

(1) Si vuole costruire una mappa $h : E^+ \to E^-$ tale che $x = (x_+, h(x_+))$ se e solo se $x \in \tilde{W}^+_{lim}$. Dato un $a \in E^+$, si considerino i punti $x_0 \in P_+^{-1}(a)$ e le corrispondenti semi-orbite $\mathcal{O}^+(x_0)$. Tali semi-orbite soddisfano:

$$\begin{cases} x_{j+1} = Ax_j + \tilde{g}(x_j) & j > 0 \\ x_0 = a + P_- x_0 & j = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Mostriamo che $\forall a \in E^+$ esiste uno ed un solo $x_0 \in \tilde{W}^+_{lim}$, ovvero tale che la successione data da (2.3) è limitata, e definiremo poi $h(a) = P_- x_0$.
Dal momento che ciò che caratterizza il sistema è l'iperbolicità di A, cerchiamo di sfruttare le proprietà di contrazione e dilatazione della linearizzazione: $\left|AP_+\right|_{op} \leq \alpha$ e $\left|A^{-1}P_-\right|_{op} \leq \alpha$. Proiettiamo $\mathcal{O}^+(x_0)$ sui sottospazi $E^\pm$ e mettiamo in evidenza i termini AP_+ e $A^{-1}P_-$. Le proiezioni stabili soddisfano:

$$\begin{cases} P_+x_{j+1} = P_+Ax_j + P_+\tilde{g}(x_j) = AP_+x_j + P_+\tilde{g}(x_j) & j > 0 \\ P_+x_0 = a & j = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

dove si sono sfruttate le relazioni di commutazione (1.2). Esaminando le componenti instabili si ha:

$$P_-x_{j+1} = P_-Ax_j + P_-\tilde{g}(x_j) = AP_-x_j + P_-\tilde{g}(x_j)$$

e quindi

$$P_-x_j = A^{-1}P_-x_{j+1} - A^{-1}P_-g(x_j) \qquad j \geq 0 \tag{2.5}$$

Ricomponendo la (2.4) e la (2.5), il sistema (2.3) si riscrive come:

$$\begin{cases} x_j = AP_+x_{j-1} + P_+\tilde{g}(x_{j-1}) + A^{-1}P_-x_{j+1} - A^{-1}P_-\tilde{g}(x_j) & j > 0 \\ x_0 = a + A^{-1}x_1 - A^{-1}P_-\tilde{g}(x_0) & j = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Per dimostrare che, dato a, esiste una ed una sola semi-orbita limitata definita da (2.6), introduciamo i seguenti spazi vettoriali di successioni $\chi := (x_0, x_1, ...)$ in $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{X}_\lambda := \{\chi \subset \mathbb{R}^n \big| \|\chi\|_\lambda := \sup_{j>0} \lambda^j |x_j| < \infty\}$$

con $\lambda \geq 1$. Si verifica senza difficoltà che gli X_λ con norma $\|\cdot\|_\lambda$ sono spazi di Banach. Osserviamo che X_1 è lo spazio delle successioni limitate, mentre X_λ con $\lambda > 1$ sono spazi di successioni convergenti a 0. Da ora in avanti denoteremo per semplicità $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1$ e $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$.
Definiamo la mappa $F_a : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$:

$$(F_a(\chi))_j := \begin{cases} AP_+x_{j-1} + P_+\tilde{g}(x_{j-1}) + A^{-1}P_-x_{j+1} - A^{-1}P_-\tilde{g}(x_j) & j > 0 \\ a + A^{-1}P_-x_1 - A^{-1}P_-g(x_0) & j = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Dalla (2.7) si vede che le successioni appartenenti a X che soddisfano la (2.6) coincidono esattamente con i punti fissi di F_a. Pertanto, per mostrare che esiste una ed una sola semi-orbita limitata con $P_+x_0 = a$, dimostriamo che F_a è una contrazione e adoperiamo il teorema delle contrazioni.

Lemma 2.2. *$\forall\, a \in E_+$ e $\forall\, \lambda \geq 1$, F_a mappa X_λ in sé stesso e soddisfa:*

$$\|F_a(\chi) - F_a(\psi)\|_\lambda \leq \lambda(\alpha + \delta)\|\chi - \psi\|_\lambda \qquad \forall \chi,\, \psi \in X_\lambda \tag{2.8}$$

Dimostrazione Lemma 2.1. Si prendano due successioni $\chi = (x_j)_{j\geq 0}$, $\psi = (y_j)_{j\geq 0} \in \mathrm{X}_\lambda$. Per $j > 0$ si ha che:

$$\begin{aligned}\lambda^j\big[F_a(\chi)_j - F_a(\psi)_j\big] &= \lambda^j AP_+\big[x_{j-1} - y_{j-1}\big] + \lambda^j P_+\big[\tilde{g}(x_{j-1}) - \tilde{g}(y_{j-1})\big] \\ &\quad + \lambda^j A^{-1}P_-\big[x_{j+1} - y_{j+1}\big] - \lambda^j A^{-1}P_-\big[\tilde{g}(x_j) - \tilde{g}(y_j)\big]\end{aligned}$$

Applicando l'operatore di proiezione P_+ e prendendo le norme si ottiene:

$$\begin{aligned}\lambda^j\big|P_+F_a(\chi)_j - P_+F_a(\psi)_j\big| &= \lambda^j\big|AP_+[x_{j-1} - y_{j-1}]\big| + \big|\lambda^j P_+[\tilde{g}(x_{j-1}) - \tilde{g}(y_{j-1})]\big| \\ &\leq \lambda\big|AP_+\big|_{op}|x_{j-1} - y_{j-1}|\lambda^{j-1} + \lambda\delta\lambda^{j-1}|x_{j-1} - y_{j-1}| \\ &\leq \lambda(\alpha+\delta)|x_{j-1} - y_{j-1}|\lambda^{j-1} \\ &\leq \lambda(\alpha+\delta)\|\chi - \psi\|_\lambda\end{aligned}$$

Nel primo $\leq$ si sono sfruttati $|\tilde{g}'|^\infty_{op} \leq \delta$ e il teorema del valor medio, per i quali $|g(\xi) - g(\eta)| \leq \delta|\xi - \eta|$, mentre nel secondo si sono usate $\big|AP_+\big|_{op} < \alpha$ e $\big|A^{-1}P_-\big|_{op} < \alpha$. Prendendo la proiezione su E^- si ottiene in maniera analoga:

$$\lambda^j\big|P_-F_a(\chi)_j - P_-F_a(\psi)_j\big| \leq \lambda(\alpha+\delta)\|\chi - \psi\|_\lambda$$

Pertanto per $j > 0$ vale:

$$\lambda^j\big|F_a(\chi)_j - F_a(\psi)_j\big| \leq \lambda(\alpha+\delta)\|\chi - \psi\|_\lambda \tag{2.9}$$

Nel caso $j = 0$ invece:

$$\big[F_a(\chi)_0 - F_a(\psi)_0\big] = A^{-1}P_-\big[x_1 - y_1\big] - A^{-1}P_-\big[\tilde{g}(x_0) - \tilde{g}(y_0)\big]$$

da cui, replicando i passaggi visti per $j > 0$, si ottiene:

$$\big|F_a(\chi)_0 - F_a(\psi)_0\big| \leq \lambda\alpha|x_1 - y_1| + \alpha\delta|x_0 - y_0| \leq \lambda(\alpha+\delta)\|\chi - \psi\|_\lambda \tag{2.10}$$

Dalle (2.9) e (2.10) segue la (2.8).
Osservando che $F_a(0) = (a, 0, 0, ...)$ e sfruttando la (2.8), si ottiene

$$\begin{aligned}\|F_a(\chi)\|_\lambda &= \|F_a(\chi) - F_a(0) + (a, 0, 0, ...)\|_\lambda \\ &\leq \|F_a(\chi) - F_a(0)\|_\lambda + \|(a, 0, 0, ...)\|_\lambda \\ &\leq \lambda(\alpha+\delta)\|\chi\|_\lambda + |a| \\ &< \infty\end{aligned}$$

quindi $F_a(\mathrm{X}_\lambda) \subset \mathrm{X}_\lambda$ □

Ricordando la (1.4), scegliamo un $\bar{\lambda}$ tale che $1 < \bar{\lambda} < 1/\alpha$. Se si prende δ abbastanza piccolo da avere $\bar{\lambda}(\alpha+\delta) < 1$, allora $F_a : \mathrm{X}_\lambda \to \mathrm{X}_\lambda$ è una contrazione $\forall\lambda \in [1, \bar{\lambda}]$. Per il principio delle contrazioni esiste uno ed un solo punto fisso $\chi_a^\lambda \in \mathrm{X}_\lambda$ $\forall\lambda \in [1, \bar{\lambda}]$. Siccome $\mathrm{X}_{\lambda_1} \supset \mathrm{X}_{\lambda_2}$ se $\lambda_1 < \lambda_2$, allora χ_a^λ è indipendente da λ e la denotiamo χ_a. Esiste quindi una ed una sola semi-orbita limitata con $P_-x_0 = a$ ed inoltre essa converge a 0 dal momento che χ_a appartiene anche a $\mathrm{X}_{\lambda\in(1,\bar{\lambda}]}$. Dato che questo vale $\forall a \in E^+$ possiamo definire una mappa $h : E^+ \to E^-$ con $h(a) = P_-x_0$ e $\tilde{W}^+_{lim}$ è il suo grafico.

(2) Dimostriamo che la mappa $h : E^+ \to E^-$ è lipschitziana. Si prendano due mappe $F_a, F_b : \mathrm{X}_\lambda \to \mathrm{X}_\lambda$. Siano χ_a e χ_b i loro punti fissi, dove $\chi_a = (x_j)_{j\geq 0}$ è la successione tale che $x_0 = (a,\, h(a))$. Si ha:

$$\begin{aligned}\|\chi_a - \chi_b\|_\lambda &= \|F_a(\chi_a) - F_b(\chi_b)\|_\lambda \\ &\leq \|F_a(\chi_a) - F_a(\chi_b)\|_\lambda + \|F_a(\chi_b) - F_b(\chi_b)\|_\lambda \\ &\leq \lambda(\alpha+\delta)\|\chi_a - \chi_b\|_\lambda + |a - b|\end{aligned}$$

dove nel secondo $\leq$ si è sfruttato il lemma (2.2) e si è considerato:

$$\begin{cases} |F_a(\chi_b)_j - F_b(\chi_b)_j| = 0 & j > 0 \\ |F_a(\chi_b)_0 - F_b(\chi_b)_0| = |a - b| & j = 0 \end{cases}$$

Denotando $\mu := \lambda(\alpha + \delta)$, si ottiene:

$$\|\chi_a - \chi_b\|_\lambda \leq \frac{1}{1-\mu}|a-b|$$

Dal momento che $|h(a) - h(b)| = |(\chi_a)_0 - (\chi_b)_0| \leq \|\chi_a - \chi_b\|_\lambda$, si ha:

$$|h(a) - h(b)| \leq \frac{1}{1-\mu}|a-b|$$

(3) Si dimostra adesso che la mappa $h : E^+ \to E^-$ eredita da $\tilde{\varphi}$ la sua regolarità. A tal fine prendiamo le mappe:

$$\begin{aligned} F &: \mathrm{X} \times E^+ \to \mathrm{X} \qquad & F(\chi, a) &:= F_a(\chi) \\ G &: \mathrm{X} \times E^+ \to \mathrm{X} \qquad & G(\chi, a) &:= \chi - F_a(\chi) \end{aligned}$$

Dalla definizione di F_a (2.7) segue che se g è di classe C^k allora anche le mappe F e G sono di classe C^k. Inoltre G si annulla in corrispondenza dei punti fissi di F_a, ovvero $G(\chi_a, a) = 0$. Per mostrare la regolarità di h sfruttiamo il *teorema della funzione implicita in spazi di Banach* (per dettagli maggiori si veda [6], 215-217): denotando con D_i la derivazione rispetto alla i-esima variabile, se $D_1G(\chi, a)$ è un isomorfismo lineare allora l'equazione $G(\chi_a, a) = 0$ definisce un'unica mappa implicita $a \mapsto \chi_a$ che coincide con la χ_a trovata nel punto **(1)** ed è di classe C^k. Per quanto discusso nel punto **(1)** segue che anche $h : E^+ \to E^-$ è di classe C^k.
Si procede col dimostrare che $D_1G(\chi, a) = \mathbb{I} - D_1F(\chi, a)$ è un isomorfismo. E' un risultato noto che se $\|D_1F(\chi, a)\|_{op} < 1$, allora $\mathbb{I} - D_1F(\chi, a)$ è un isomorfismo (si veda [6, Proposizione 2.12.11]). Partendo dalla (2.7) calcoliamo esplicitamente la norma operatoriale di $D_1F(\chi, a) \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{X})$. Prendendo $\nu = (v_j)_{j\geq 0} \in \mathrm{X}$, segue dalla definizione di *differenziale di Frechet* che:

$$\begin{aligned} \big[D_1F(\chi, a)\nu\big]_j &= AP_+v_{j-1} + P_+\tilde{g}'(x_{j-1})v_{j-1} \\ &\qquad + A^{-1}P_-v_{j+1} - A^{-1}P_-\tilde{g}'(x_j)v_j \qquad & j > 0 \\ \big[D_1F(\chi, a)\nu\big]_0 &= A^{-1}P_-v_1 - A^{-1}P_-\tilde{g}'(x_0)v_0 \qquad & j = 0 \end{aligned}$$

Proiettiamo $D_1F(\chi, a)\nu$ sui sottospazi $E^\pm$ e valutiamo le norme delle componenti stabili ed instabili. Considerando la (1.4) e $|\tilde{g}'|_{op}^\infty \leq \delta$, per $j > 0$ si ottiene:

$$\big|P_+\big[D_1F(\chi, a)\nu\big]_j\big| = \big|AP_+v_{j-1} + P_+\tilde{g}'(x_{j-1})v_{j-1}\big| \leq (\alpha + \delta)\|\nu\| \tag{2.11}$$

$$\big|P_-\big[D_1F(\chi, a)\nu\big]_j\big| = \big|A^{-1}P_-v_{j+1} - A^{-1}P_-\tilde{g}'(x_j)v_j\big| \leq (\alpha + \delta)\|\nu\| \tag{2.12}$$

Quindi $\big|\big[D_1F(\chi, a)\nu\big]_j\big| \leq (\alpha + \delta)\|\nu\|$. Analogamente per $j = 0$ risulta $\big|\big[D_1F(\chi, a)\nu\big]_0\big| \leq (\alpha + \delta)\|\nu\|$. Pertanto:

$$\big|[D_1F(\chi, a)\nu]_j\big| \leq (\alpha + \delta)\|\nu\| \qquad j \geq 0$$

Dal momento che questo risultato vale per un $\nu = (v_j)_{j\geq 0} \in \mathrm{X}$ generico e che $(\delta + \alpha) < 1$, concludiamo che $\|D_1F(\chi, a)\|_{op} < 1$. Ne segue che $D_1G(\chi, a)$ è un isomorfismo e $h : E^+ \to E^-$ è di classe C^k.

(4) In quest'ultima parte della dimostrazione proveremo che $h'(0) = 0$. Riscriviamo $h'(a) \in \mathcal{L}(E^+, E^-)$ in termini del differenziale di $F(\chi_a, a) = \chi_a$:

$$h'(a)w = D_a\big[P_-(\chi_a)_0\big]w = P_-\big[D_a\chi_a w\big]_0 = P_-\big[D_aF(\chi_a, a)w\big]_0 \qquad w \in E^+$$

dove D_a è il differenziale rispetto ad a. Considerando $j \geq 0$ e applicando la regola della catena risulta:

$$P_-\big[D_aF(\chi_a, a)w\big]_j = P_-\big[D_1F(\chi_a, a)D_a\chi_a w\big]_j + P_-\big[D_2F(\chi_a, a)w\big]_j \qquad j \geq 0 \tag{2.13}$$

con $D_a\chi_a \in \mathcal{L}(E^+, \mathrm{X})$. Riprendendo la (2.12) vale:

$$P_-\big[D_1F(\chi_a, a)D_a\chi_a w\big]_j = A^{-1}P_-\big[D_a\chi_a w\big]_{j+1} - A^{-1}P_-g'((\chi_a)_j)\big[D_a\chi_a w\big]_j \qquad j \geq 0 \tag{2.14}$$

Dato che vogliamo dimostrare $h'(0) = 0$, valutiamo il modulo della (2.14) per $a = 0$ (quindi per $\chi_0 = (0, 0, 0...)$):

$$\left|P_-\left[D_1F(\chi_a, a)D_a\chi_a w\right]_j\right|\Big|_{a=0} = \left|A^{-1}P_-\left[D_a\chi_a w\right]_{j+1}\right|\Big|_{a=0} \leq \alpha\left|P_-\left[D_a\chi_a w\right]_{j+1}\right|\Big|_{a=0} \qquad j \geq 0 \quad (2.15)$$

dove si è sfruttato $g'(0) = 0$. Dalla (2.7) si vede che il termine relativo a D_2 nella (2.13) è:

$$\begin{cases} P_-\left[D_2F(\chi_a, a)w\right]_j = 0 & j > 0 \\ P_-\left[D_2F(\chi_a, a)w\right]_0 = P_-w = 0 & j = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Dalle (2.13), (2.15) e (2.16) segue:

$$\left|P_-\left[D_a\chi_a w\right]_j\right|\Big|_{a=0} = \left|A^{-1}P_-\left[D_a\chi_a w\right]_{j+1}\right|\Big|_{a=0} \leq \alpha\left|P_-\left[D_a\chi_a w\right]_{j+1}\right|\Big|_{a=0} \qquad j \geq 0$$

Essendo $\alpha < 1$ si ha:

$$\left\|P_-\left[D_a\chi_a w\right]\right\|\Big|_{a=0} = 0 \Rightarrow h'(0)w = 0$$

Dato che questo vale $\forall w \in E^+$ si conclude che $h'(0) = 0$, quindi $\tilde{W}^+_{lim}$ è tangente a E^+ in 0.
Questo termina la dimostrazione del lemma (2.1). □

Fino a questo punto è stato studiato un diffeomorfismo $\tilde{\varphi}$ che si discosta *leggermente* dalla sua componente lineare. Vediamo come adoperare tali risultati per dimostrare il teorema (2.1).

Dimostrazione del teorema di Hadamard-Perron. Riprendiamo il diffeomorfismo $\varphi(x) = Ax + g(x)$. Essendo g, per ipotesi, di classe C^k con $k \geq 1$, per continuità esistono un $r > 0$ ed un intorno $Q = \{x \in E^+ \oplus E^- \big| |x_+| \leq r, |x_-| \leq r\}$ all'interno del quale $|g|^\infty < \infty$ e $|g'|^\infty_{op} \leq \delta$, con δ tale da rispettare le condizioni del lemma (2.1). Possiamo costruire un diffeomorfismo che approssima localmente φ e che soddisfa le ipotesi del lemma (2.1) per mezzo di una funzione *cut-off* $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$:

$$\xi\Big(\frac{|x|}{\epsilon}\Big) := \begin{cases} 1 & |x| \leq \epsilon/2 \\ 0 \leq \xi(t) \leq 1 & altrove \\ 0 & |x| \geq \epsilon \end{cases} \qquad \epsilon > 0$$

Sfruttando $\xi\Big(\frac{|x|}{\epsilon}\Big)$ è possibile *ritagliare g in modo* C^∞ in un intorno di 0 per il quale $|g|^\infty < \infty$ e $|g'|^\infty_{op} \leq \delta$. Definiamo la mappa $\tilde{g}(x) := \xi\Big(\frac{|x|}{\epsilon}\Big)g(x)$ e il diffeomorfismo $\tilde{\varphi}(x) := Ax + \tilde{g}(x)$, con ϵ tale che $|\tilde{g}|^\infty < \infty$ e $|\tilde{g}'|^\infty_{op} \leq \delta$. $\tilde{\varphi}$ soddisfa allora le ipotesi del lemma (2.1) e $\tilde{W}^+_{lim}$ è il grafico di una mappa differenziabile $h : E^+ \to E^-$.
Dimostriamo ora che, per r sufficientemente piccolo, si ha:

$$W^+_{loc} = \tilde{W}^+_{lim} \cap Q \tag{2.17}$$

Dalla definizione di $\tilde{\varphi}$ segue che $\exists\, r' > 0$ tale da avere $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ se $x \in Q$ con $r \leq r'$. Pertanto, per $r \leq r'$, vale l'inclusione $W^+_{loc} \subset \tilde{W}^+_{lim} \cap Q$. Studiamo l'inclusione opposta: prendiamo $\hat{x} = (\hat{x}_+, h(\hat{x}_+)) \in \tilde{W}^+_{lim} \cap Q$ e dimostriamo che $\varphi(\hat{x})$ è contenuta in Q per r opportuno. Considerando che $h(0) = 0$ e $g(0) = 0$, per continuità si ha che $\forall \eta > 0\ \exists\, r > 0$ tale che $|g(x)| \leq \eta r$ e $|h(x_+)| \leq \eta r$ se $|x| < r$. Scomponiamo $\varphi(\hat{x})$ nella sua componente stabile $\varphi_+(\hat{x}) = A_+\hat{x}_+ + g_+(\hat{x})$ e in quella instabile $\varphi_-(\hat{x}) = A_-\hat{x}_- + g_-(\hat{x})$, dove $g_\pm : \mathbb{R}^n \to E^\pm$ sono tali che $g = (g_+, g_-)$. Prendendo un η abbastanza piccolo, $\exists\, r'' > 0$ per il quale:

$$\begin{cases} |\varphi_+(\hat{x})| = |A_+\hat{x}_+ + g_+(\hat{x})| \leq \alpha r'' + \eta r'' < r'' \\ |\varphi_-(\hat{x})| = |A_-h(\hat{x}_+) + g_-(\hat{x})| \leq |A_-|_{op}\eta r'' + \eta r'' < r'' \end{cases}$$

Pertanto $\varphi(\hat{x}) \in Q$ e $\hat{x} \in W^+_{loc}$ per $r \leq r''$. Scegliendo $r = \min\{r', r''\}$ si ha che la (2.17) è soddisfatta.
Questo conclude la dimostrazione del teorema di Hadamard-Perron. □

2.2 Teorema di Smale

Il teorema di Hadamard-Perron caratterizza gli insiemi stabili ed instabili locali come sottovarietà embedded nel caso iperbolico. A partire da questa proprietà locale possiamo verificare che gli insiemi $W^{\pm}$ sono delle sottovarietà immerse. Partiamo col caratterizzare $W^{\pm}$ in funzione di W^{+}_{loc} e W^{-}_{loc}:

Proposizione 2.1. *Nel caso iperbolico possiamo riscrivere gli insiemi stabili ed instabili globali come:*

$$W^{+} = \bigcup_{k\geq 0} \varphi^{-k}(W^{+}_{loc}) \ , \qquad W^{-} = \bigcup_{k\geq 0} \varphi^{k}(W^{-}_{loc}) \tag{2.18}$$

Dimostrazione. Sia $x_0 \in W^{+}_{loc}$ e consideriamo $\varphi^{-s}(x_0)$ con $s \geq 0$. Per il teorema di Hadamard-Perron la semi-orbita positiva di x_0 converge a 0, pertanto per $j \to \infty$ si ha $\varphi^{j}(\varphi^{-s}(x_0)) = \varphi^{j-s}(x_0) \to 0$. Quindi $\varphi^{-s}(x_0) \in W^{+}$, ovvero $\bigcup\limits_{k\geq 0} \varphi^{-k}(W^{+}_{loc}) \subset W^{+}$. Per dimostrare l'inclusione opposta osserviamo che se $x_0 \in W^{+}$, dalla definizione di insieme stabile, $\exists\ s > 0$ tale che $\varphi^{s}(x_0) \in W^{+}_{loc}$. Di conseguenza $x_0 \in \varphi^{-s}(W^{+}_{loc})$. Passaggi analoghi provano che $W^{-} = \bigcup\limits_{k\geq 0} \varphi^{k}(W^{-}_{loc})$ □

Sfruttiamo adesso la proposizione (2.1) per mostrare che l'iperbolicità induce una struttura di sottovarietà differenziabile immersa negli insiemi stabili ed instabili globali.

Teorema 2.2 (Teorema di S. Smale o della varietà stabile globale)**.** *Si assuma che 0 sia un punto fisso iperbolico per φ di classe C^k con $k \geq 1$. Allora l'insieme stabile globale W^{+} è l'immagine di un'immersione iniettiva $J_{+} : E^{+} \to \mathbb{R}^n$ di classe C^k. Analogamente W^{-} è una sottovarietà immersa parametrizzata da una mappa iniettiva $J_{-} : E^{-} \to \mathbb{R}^n$. W^{+} e W^{-} prendono il nome di varietà stabile ed instabile.*

Dimostrazione. Per definire la mappa J_{+} partiamo da quanto visto nella dimostrazione del teorema (2.1). Abbiamo introdotto un diffeomorfismo $\tilde{\varphi}(x) = Ax + \tilde{g}(x)$, con $\tilde{g}(x) = \xi\Big(\frac{|x|}{\epsilon}\Big)g(x)$, e abbiamo dimostrato che, per un opportuno ϵ, $\tilde{W}^{+}_{lim}$ è il grafico di una mappa C^k-differenziabile $h : E^{+} \to E^{-}$. Possiamo sfruttare $\tilde{W}^{+}_{lim}$ come elemento di connessione tra E^{+} e W^{+}: con h associamo ogni $a \in E^{+}$ ad un $(a, h(a)) \in \tilde{W}^{+}_{lim}$ e, ricordando le (2.1) e (2.17), $\exists\, s_a \in \mathbb{N}^{+}$ tale che $\tilde{\varphi}^{s_a}(a, h(a)) \in W^{+}_{loc}$. Considerando inoltre la (2.18) si ha $\varphi^{-s_a} \circ \tilde{\varphi}^{s_a}(a, h(a)) \in W^{+}$. Componendo questi passaggi definiamo $J_{+} : E^{+} \to \mathbb{R}^n$ come:

$$J_{+}(a) := \varphi^{-s_a} \circ \tilde{\varphi}^{s_a}(a, h(a)) \qquad a \in E^{+} \tag{2.19}$$

Fintanto che s_a è tale da avere $\tilde{\varphi}^{s_a}(a, h(a)) \in Q$, la mappa $\varphi^{s_a} \circ \tilde{\varphi}^{s_a}(a, h(a)) \in Q$ non dipende dalla scelta di s_a:

$$\varphi^{-(s_a+1)} \circ \tilde{\varphi}^{(s_a+1)}(a, h(a)) = \varphi^{-s_a} \circ \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}^{s_a}(a, h(a)) = \varphi^{-s_a} \circ \tilde{\varphi}^{s_a}(a, h(a)) \tag{2.20}$$

dove si è sfruttato che $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)\ \forall x \in Q$. Dalla definizione (2.19) risulta evidente che $J_{+}(E^{+}) = W^{+}$. Per mostrare l'iniettività prendiamo $\{a, b\} \subset E^{+}$ con $a \neq b$ e, considerando la (2.20), possiamo porre la mappa $x_{+} \mapsto s_{x_{+}}$ localmente costante in degli intorni di a e b. Allora φ^{-s_a} e $\tilde{\varphi}^{s_b}$ sono diffeomorfismi e, dal momento che $(a, h(a)) \neq (b, h(b))$, segue che J_{+} è iniettiva. Rimane da dimostrare che J_{+} è un'immersione, ovvero $dim\, DJ_{+}(a)E^{+} = dim\, E^{+}\ \forall a \in E^{+}$. Prendiamo la mappa $J_0 : E^{+} \to \mathbb{R}^n$ definita come $J_0(a) := (a, h(a))$, e riscriviamo la (2.19) come:

$$J_{+}(a) = \varphi^{-s_a} \circ \tilde{\varphi}^{s_a} \circ J_0(a) \tag{2.21}$$

Dato $a \in E^{+}$, analogamente a prima, possiamo prendere la mappa $x_{+} \mapsto s_{x_{+}}$ localmente costante in un intorno di a. Differenziando la (2.21) si ottiene:

$$DJ_{+}(a)w = D\varphi^{-s_a}(\tilde{\varphi}^{s_a} \circ J_0(a)) \circ D\tilde{\varphi}^{s_a}(J_0(a)) \circ DJ_0(a)w \qquad w \in E^{+}$$

dove $DJ_0(a)w = (w, Dh(a)w)$. Ne segue che $dim\, DJ_0(a)E^{+} = dim\, E^{+}$. Dato che φ^{-s_a} e $\tilde{\varphi}^{s_a}$ sono diffeomorfismi, i loro differenziali sono isomorfismi lineari in $\mathbb{R}^n$, pertanto $dim\, DJ_{+}(a) = dim\, E^{+}$. Per W^{-} la dimostrazione è analoga. □

E' importante osservare che, a differenza delle varietà stabili ed instabili locali, non è garantito che W^+ e W^- siano sottovarietà embedded. Queste possono infatti addensarsi intorno al punto fisso iperbolico. Per comprendere ciò partiamo dalla seguente definizione:

Definizione 2.1. *$\bar{x} \neq 0$ è detto punto omoclino se è un'intersezione trasversa di W^+ e W^-. Definiamo la sua orbita omoclina come:*

$$\hat{\mathcal{O}} := \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} \varphi^s(\bar{x})$$

Gli iterati di $\bar{x}$ (avanti o indietro nel tempo) sono a loro volta dei punti omoclini. Infatti $\forall s \in \mathbb{Z}$ si ha che $\varphi^k(\varphi^s(\bar{x})) \to 0$ per $k \to \pm\infty$, quindi $\varphi^s(\bar{x}) \in W^+ \cap W^- - \{0\}$. Si può dimostrare che se $D\varphi(\varphi^s(\bar{x}))$ non è singolare allora viene rispettata la condizione di trasversalità. La presenza di un'orbita omoclina obbliga la varietà stabile e quella instabile ad intersecarsi ripetitivamente tra loro. Dal momento che W^+ e W^- non possono auto-intersecarsi, ne segue che tra un'intersezione omoclina e quella successiva le varietà si ripiegano su sé stesse formando dei *lobi*. Consideriamo la semi-orbita omoclina positiva: i suoi elementi, dato che appartengono alla varietà stabile, si contraggono geometricamente nel futuro. Ne segue che i lobi formati da W^- intersecando W^+ in $\varphi^s(\bar{x})$ e $\varphi^{s+1}(\bar{x})$ (con $s > 0$) si *restringono* in prossimità del punto fisso iperbolico. Inoltre, avvicinandosi a 0, tali lobi vengono *allungati* geometricamente dallo spazio instabile e si sistemano parallelamente a W^- stessa. Quanto appena detto vale analogamente anche considerando la semi-orbita negativa omoclina. W^+ e W^- formano, pertanto, una struttura molto complicata e densa in prossimità del punto fisso iperbolico. Figure di queste strutture sono riportate nei paragrafi (4.1) e (4.2.1).

Capitolo 3

Il λ-lemma

Studiamo ora il comportamento delle orbite *vicine* alle varietà stabili ed instabili. In particolare trattiamo il λ-*lemma* (o *inclination lemma*), il quale mostra che dato un disco D^- trasverso alla varietà stabile e di dimensione $u = dimE^-$, esso *converge* ad un intorno di 0 $B^- \subset W^-$ per interazioni di φ.
Prima di proseguire è opportuno introdurre un sistema di coordinate *raddrizzato*. Siano $\tilde{B}^+$ e $\tilde{B}^-$ degli intorni sferici in E^+ e E^- centrati in 0 e tali che $W^{\pm}_{loc} \subset \tilde{B}^+ \oplus \tilde{B}^- = Q$, dove Q è un insieme come nel teorema di Hadamard-Perron. Introduciamo la mappa $\Phi : \tilde{B}^+ \oplus \tilde{B}^- \to E^+ \oplus E^-$ definita come:

$$\Phi(x_+, x_-) = \big(x_+ - k(x_-), x_- - h(x_+)\big)$$

dove $h : E^+ \to E^-$ e $k : E^- \to E^+$ sono le mappe differenziabili definite nel teorema (2.1). Dal momento che h e k sono di classe C^k allora lo è anche Φ. Inoltre, considerando che $D\Phi(0,0) = \mathbb{I}$, Φ è localmente un diffeomorfismo. Tale mappa fornisce, quindi, un sistema di coordinate locali tale che:

$$\Phi(x_+, x_-) = \big(x_+ - k(x_-),\, 0\big) \;\; \forall (x_+, x_-) \in W^+_{loc}\,, \qquad \Phi(x_+, x_-) = \big(0,\, x_- - h(x_+)\big) \;\; \forall (x_+, x_-) \in W^-_{loc}$$

Con questo nuovo sistema di coordinate W^+_{loc} e W^-_{loc} vengono *raddrizzati* rispetto a E^+ e E^-, ovvero sono degli intorni di 0 nel sottospazio stabile e in quello instabile $W^{\pm}_{loc} \subset \tilde{B}^{\pm}$. Da ora in avanti lavoreremo con tali coordinate.
Riprendiamo adesso la scomposizione φ nella sua parte stabile e in quella instabile $\varphi(x) = (A_+x_+ + g_+(x), A_-x_- + g_-(x))$. Nelle nuove coordinate, per degli intorni $\tilde{B'}^{\pm} \subset W^{\pm}_{loc}$, valgono le seguenti relazioni di *raddrizzamento*:

$$g_+(0, x_-) = 0\,, \quad \frac{\partial g_+}{\partial x_-}(0, x_-) = 0 \qquad\qquad \forall x_- \in \tilde{B'}^- \tag{3.1}$$

$$g_-(x_+, 0) = 0\,, \quad \frac{\partial g_-}{\partial x_+}(x_+, 0) = 0 \qquad\qquad \forall x_+ \in \tilde{B'}^+ \tag{3.2}$$

Possiamo inoltre riscrivere la condizione $g'(0,0) = 0$ come:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0,0) = 0 \quad i, j = +, - \tag{3.3}$$

Date queste premesse procediamo con l'enunciato del teorema e la sua dimostrazione.

Teorema 3.1 (λ-lemma o inclination lemma)**.** *Esiste un intorno $U := B^+ \oplus B^-$ di 0 con $B^{\pm} \subset W^{\pm}_{loc}$ tale che, se si prende D^- un disco di dimensione $u = dimE^-$ e trasverso a W^+_{loc} in $a_0 \in W^+_{loc} \cap U - \{0\}$, e se si considerano inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, le componenti connesse D^-_n di $\varphi^n(D^-) \cap U$ contenenti $\varphi^n(a_0)$, allora $\forall \epsilon > 0$ esistono un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ e dei dischi $\tilde{D}^-_n$ embedded in D^-_n per i quali:*

$$\max_{x \in \tilde{D}^-_n} \{|(i' \circ \pi_n)(x) - i_n(x)|,\, |D(i' \circ \pi_n)_x - D(i_n)_x|_{op}\} < \epsilon \quad \forall n > \bar{n} \tag{3.4}$$

dove $\pi_n : \tilde{D}_n^- \to B^-$ sono le proiezioni canoniche, $i_n : \tilde{D}_n^- \to \mathbb{R}^n$ e $i' : B^- \to \mathbb{R}^n$ sono le inclusioni canoniche, mentre $D(i' \circ \pi_n)_x$ e $D(i_n)_x$ sono i differenziali valutati in $x \in \tilde{D}_n^-$.

Dimostrazione. La dimostrazione si divide in 2 parti. Nella prima definiremo U e mostreremo che i vettori tangenti a D^- nel punto di intersezione con W^+_{loc} si *allineano con la varietà instabile* sotto iterazioni di φ. Nella seconda parte estenderemo questo risultato anche ai vettori tangenti a D^- nei punti non appartenenti alla varietà stabile.

(1) Prendiamo un $\delta \in (0,1)$ tale che:

$$\alpha + \delta < 1\,, \quad b := (\alpha^{-1} - \delta) > 1\,, \quad \delta < (b-1)^2/4 \tag{3.5}$$

dove α è dato dalla (1.4). Considerando la (3.3), per continuità di g', esiste un intorno $U = B^+ \oplus B^-$ per il quale:

$$\max_{x \in U} \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{op} \leq \delta \qquad i,j = +,- \tag{3.6}$$

dove B^+ e B^- sono intorni di 0 contenuti rispettivamente in W^+_{loc} e W^-_{loc}, e per i quali valgono le (3.1) e la (3.2). Dato $a_0 \in B^+ - \{0\}$ prendiamo un vettore unitario v_0 dello spazio tangente $T_{a_0}D^-$. Scomponiamo tale vettore come $v_0 = (v_0^+, v_0^-)$ con $v_0^\pm \in E^\pm$, e definiamo la sua *inclinazione* $\lambda_0 = |v_0^+|/|v_0^-|$. Considerando la semi-orbita positiva $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ di a_0, costruiamo il corrispondete evoluto dei vettori tangenti per mezzo di $D\varphi$:

$$v_1 = D\varphi_{a_0}(v_0), \quad v_2 = D\varphi_{a_1}(v_1), \ \ldots, \quad v_n = D\varphi_{a_{n-1}}(v_{n-1}), \quad \ldots \tag{3.7}$$

Studiamo il differenziale di φ valutato in a_0 e applicato a v_0:

$$\begin{aligned} D\varphi_a(v_0) &= \begin{pmatrix} A_+ + \frac{\partial g_+}{\partial x_+}(a_0) & \frac{\partial g_+}{\partial x_-}(a_0) \\ 0 & A_- + \frac{\partial g_-}{\partial x_-}(a_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_0^+ \\ v_0^- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_+ v_0^+ + \frac{\partial g_+}{\partial x_+}(a_0) v_0^+ + \frac{\partial g_+}{\partial x_-}(a_0) v_0^- \\ A_- v_0^- + \frac{\partial g_-}{\partial x_-}(a_0) v_0^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^+ \\ v_1^- \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove si sono considerate le condizioni di *raddrizzamento* (3.2). L'inclinazione di v_1 risulta:

$$\lambda_1 = \frac{|v_1^+|}{|v_1^-|} = \frac{|A_+ v_0^+ + \frac{\partial g_+}{\partial x_+}(a_0) v_0^+ + \frac{\partial g_+}{\partial x_-}(a_0) v_0^-|}{|A_- v_0^- + \frac{\partial g_-}{\partial x_-}(a_0) v_0^-|}$$

Dalle (1.4) e (3.6) segue che:

$$\begin{aligned} |v_1^+| \leq & |A_+ v_0^+| + \left| \frac{\partial g_+}{\partial x_+}(a_0) v_0^+ \right| + \left| \frac{\partial g_+}{\partial x_-}(a_0) v_0^- \right| \leq \alpha |v_0^+| + \delta |v_0^+| + \delta |v_0^-| \\ |v_1^-| \geq & |A_- v_0^-| - \left| \frac{\partial g_-}{\partial g_-}(a_0) v_0^- \right| \geq \alpha^{-1} |v_0^-| - \delta |v_0^-| \end{aligned}$$

Pertanto, ricordando la (3.5), vale:

$$\lambda_1 \leq \frac{\alpha\lambda_0 + \delta\lambda_0 + k}{\alpha^{-1} + \delta} \leq \frac{\lambda_0 + \delta}{b} = \frac{\lambda_0}{b} + \frac{\delta}{b}$$

Iterando questi passaggi anche per gli altri vettori della (3.7) si ottiene:

$$\lambda_n = \frac{|v_n^+|}{|v_n^-|} \leq \frac{\lambda_{n-1}}{b} + \frac{\delta}{b} \leq \frac{\lambda_0}{b^n} + \delta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b^i} \leq \frac{\lambda_0}{b^n} + \frac{\delta}{b-1} \tag{3.8}$$

Dato che per definizione $b > 1$, allora $\lambda_0/b^n \to 0$ per $n \to \infty$. Avendo posto $\delta < (b-1)^2/4$, dalla (3.8) si ha che $\exists\, \tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\lambda_n \leq (b-1)/4 \ \forall\, n > \tilde{n}$.

(2) Estendiamo adesso questi risultati anche al caso di vettori tangenti a D^- in punti non appartenenti alla varietà stabile. Prendiamo un $\epsilon > 0$ e consideriamo un γ tale che $0 < \gamma < \min\{\epsilon, \delta\}$. Dalla (3.1) esistono, per continuità, un $c < \epsilon$ ed un insieme $S := cB^+ \oplus B^- \subset U$ tale che:

$$\max_{x \in S} \left| \frac{\partial g_+}{\partial x_-} \right|_{op} \leq \gamma \tag{3.9}$$

dove cB^+ è un intorno sferico il cui raggio è c volte il raggio di B^+. Per quanto visto nel punto precedente esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} \in S$ e $\lambda_{n_0} \leq (b-1)/4$. Allora possiamo prendere, per continuità, un disco $\tilde{D}^-$ embedded in $D^-_{n_0}$ e centrato in a_{n_0} tale che la pendenza di ogni vettore ad esso tangente sia vincolata dalla relazione $\lambda \leq (b-1)/2$. Denotiamo con $\tilde{D}^-_n$ la componente connessa di $\varphi^n(\tilde{D}^-) \cap S$. Analogamente al punto **(1)** studiamo il differenziale di φ valutato in un generico $p \in \tilde{D}^-$ e applicato a $\tilde{v}_{n_0} \in T_p\tilde{D}^-$:

$$D\varphi_p(\tilde{v}_{n_0}) = \begin{pmatrix} A_+ + \frac{\partial g_+}{\partial x_+}(p) & \frac{\partial g_+}{\partial x_-}(p) \\ \frac{\partial g_-}{\partial x_+}(p) & A_- + \frac{\partial g_-}{\partial x_-}(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{v}^+_{n_0} \\ \tilde{v}^-_{n_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}^+_{n_0+1} \\ \tilde{v}^-_{n_0+1} \end{pmatrix}$$

La pendenza di $\tilde{v}_{n_0+1}$ risulta:

$$\lambda_{n_0+1} = \frac{|\tilde{v}^+_{n_0+1}|}{|\tilde{v}^-_{n_0+1}|} = \frac{|A_+\tilde{v}^+_{n_0} + \frac{\partial g_+}{\partial x_+}(p)\tilde{v}^+_{n_0} + \frac{\partial g_+}{\partial x_-}(p)\tilde{v}^-_{n_0}|}{|\frac{\partial g_-}{\partial x_+}(p)\tilde{v}^+_{n_0} + A_-\tilde{v}^-_{n_0} + \frac{\partial g_-}{\partial x_-}(p)\tilde{v}^-_{n_0}|}$$

Dalle (1.4), (3.6) e (3.9) si ha:

$$|\tilde{v}^+_{n_0+1}| \leq \left|A_+\tilde{v}^+_{n_0}\right| + \left|\frac{\partial g_+}{\partial x_+}(p)\tilde{v}^+_{n_0}\right| + \left|\frac{\partial g_+}{\partial x_-}(p)\tilde{v}^-_{n_0}\right| \leq \alpha|\tilde{v}^+_{n_0}| + \delta|\tilde{v}^+_{n_0}| + \gamma|\tilde{v}^-_{n_0}| \tag{3.10}$$

$$|\tilde{v}^-_{n_0+1}| \geq \left|A_-\tilde{v}^-_{n_0}\right| - \left|\frac{\partial g_-}{\partial x_+}(p)\tilde{v}^+_{n_0}\right| - \left|\frac{\partial g_-}{\partial x_-}(p)\tilde{v}^-_{n_0}\right| \geq \alpha^{-1}|\tilde{v}^-_{n_0}| - \delta|\tilde{v}^-_{n_0}| - \delta|\tilde{v}^+_{n_0}| \tag{3.11}$$

Ricordando la (3.5) e che per costruzione $\lambda_{n_0} \leq (b-1)/2$, si giunge a:

$$\lambda_{n_0+1} \leq \frac{\alpha\lambda_{n_0} + \delta\lambda_{n_0} + \gamma}{\alpha^{-1} - \delta - \delta\lambda_{n_0}} \leq \frac{\lambda_{n_0} + \gamma}{b - \delta\lambda_{n_0}} \leq \frac{\lambda_{n_0} + \gamma}{(b+1)/2} = \frac{\lambda_{n_0}}{k} + \frac{\gamma}{k}$$

dove $k := (b+1)/2 > 1$. Con un ragionamento iterativo analogo a quello adoperato nella (3.8) si ottiene:

$$\lambda_{n+n_0} \leq \frac{\lambda_{n_0}}{k^n} + \gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k^i} \leq \frac{\lambda_{n_0}}{k^n} + \frac{\gamma}{k-1}$$

Considerando che $\gamma < \min\{\epsilon, \delta\}$ e dato che $\frac{\lambda_{n_0}}{k^n} \to 0$ per $n \to \infty$, possiamo scegliere δ così piccolo che:

$$\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \; t.c. \; \lambda_n < \epsilon \qquad \forall\, n > \bar{n} \tag{3.12}$$

Quindi, in prossimità della varietà instabile, la pendenza degli evoluti $\tilde{D}^-_n$ diventa uniformemente piccola. Prendendo la (3.11) si ha inoltre:

$$|\tilde{v}^-_{n+1}| \geq \alpha^{-1}|\tilde{v}^-_n| - \delta|\tilde{v}^+_n| - \delta|\tilde{v}^-_n| \Rightarrow \frac{|\tilde{v}^-_{n+1}|}{|\tilde{v}^-_n|} \geq \alpha^{-1} - \delta - \delta\lambda_n$$

Dalle (3.5) e (3.12) risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\tilde{v}^-_{n+1}|}{|\tilde{v}^-_n|} > 1 \tag{3.13}$$

Unendo la (3.12) e la (3.13) si ha che per iterazioni di φ gli evoluti $\tilde{D}^-_n$ si avvicinano a B^- parallelamente alla varietà instabile aumentando il loro diametro. Ne segue che la (3.4) è soddisfatta e questo termina la dimostrazione. □

Capitolo 4

Simulazioni numeriche

Siamo interessati a costruire numericamente le varietà stabili ed instabili per un certo punto fisso iperbolico $\bar{x}$ di un diffeomorfismo (o una mappa) φ. A tal fine il λ-*lemma* suggerisce una strada. Si consideri un elevato numero di punti in un intorno sufficientemente piccolo di $\bar{x}$. Ognuno di questi appartiene ad un certo disco trasverso alla varietà stabile. Per il λ-*lemma* tali punti convergono nella varietà instabile per iterazioni di φ, pertanto le corrispondenti orbite permettono di delineare W^-. Con un procedimento analogo, sfruttando φ^{-1}, possiamo costruire W^+. Si noti che tale approccio è efficace solo per l'analisi di varietà unidimensionali. Per E^+ bidimensionale, se $D\varphi(\bar{x})$ ha autovalori $0 < \lambda < \mu < 1$, le orbite del sistema subiscono contrazioni pari a λ^n e μ^n nelle direzioni degli autospazi corrispondenti. Ne segue che autovalori diversi portano a contrazioni che differiscono geometricamente. Le proiezioni delle orbite su W^+ risultano quindi *schiacciate* sull'autospazio con autovalore di modulo minore ed è impossibile visualizzare in questo modo la varietà stabile.
Nei prossimi paragrafi saranno riportati alcuni esempi di costruzioni numeriche di varietà stabili ed instabili. Tutti i conti sono effettuati adoperando Wolfram Mathematica.

4.1 Chirikov standard map

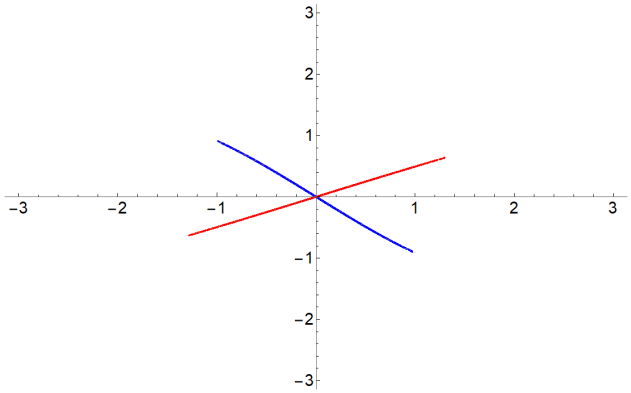
La *Chirikov standard map* è una mappa del toro bidimensionale in sé stesso:

$$\varphi(x,p) := \big(x + p + k\sin(x),\, p + k\sin(x)\big)$$

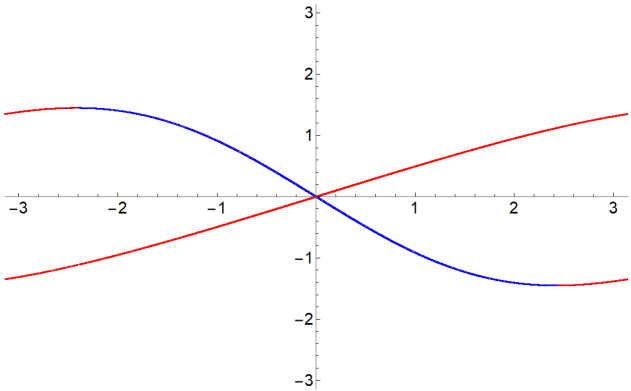
e la sua inversa è:

$$\varphi^{-1}(x,p) := \big(x - p,\, p - k\sin(x-p)\big)$$

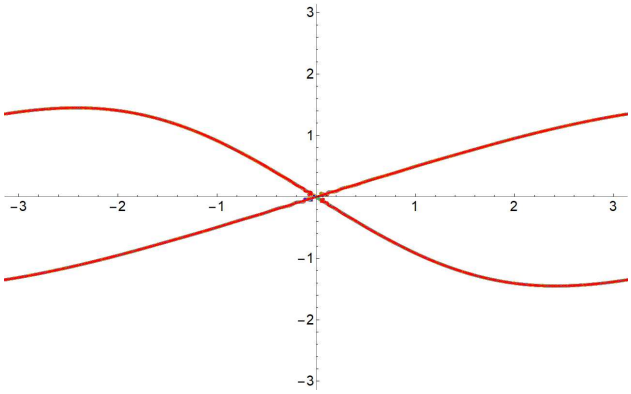
dove x e p sono considerati in modulo 2π. La Chirikov standard map definisce la dinamica di un *kicked rotator*, un modello che descrive, ad esempio, una particella vincolata ad un anello e soggetta a delle forze impulsive periodiche. La variabile x rappresenta la posizione angolare della particella, mentre p è il suo momento. Si verifica facilmente che $(0,0)$ è un punto fisso iperbolico del sistema. Costruiamo numericamente la varietà instabile: prendiamo un insieme di 6000 punti in un intono del punto fisso $Q = \{(x,p) \in \mathbb{T}^2 \big|\, |x| \leq 10^{-3},\, |p| \leq 10^{-3}\}$ e disegniamo le loro semi-orbite positive. Per la varietà stabile si procede analogamente visualizzando le semi-orbite negative. Di seguito sono riportati i risultati delle simulazioni numeriche ottenuti ponendo $k = 0.5$ e rappresentando W^+ di blu e W^- di rosso.



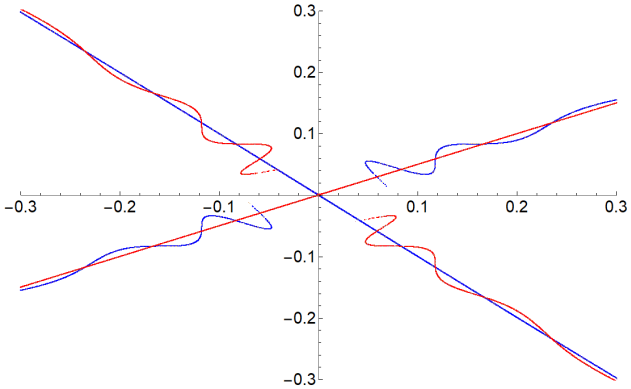
(a) 10 iterazioni



(b) 12 iterazioni



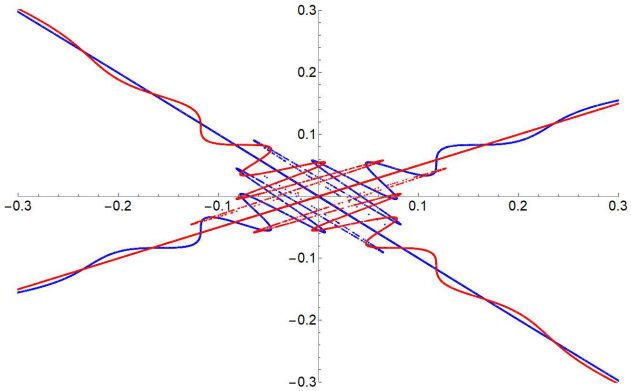
(c) 18 iterazioni



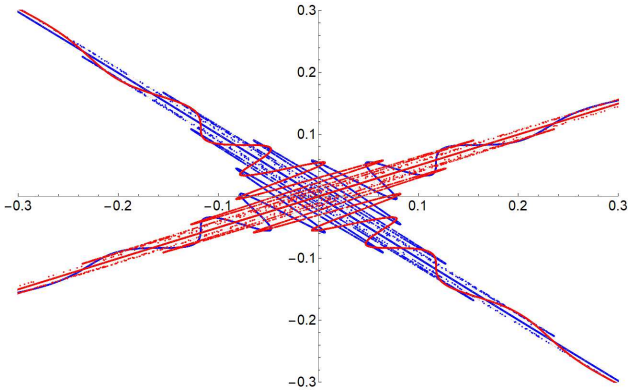
(d) 18 iterazioni, dettaglio di un intorno di (0,0)

Figura 4.1

Dalle figure (4.1) si vede che le varietà stabili ed instabili si *aggrovigliano* tra loro con l'aumentare delle iterazioni di φ e φ^{-1}. Dall'immagine (4.1)(d) si osservano le orbite omocline ed i *lobi* formati da W^- e W^+ come discusso nel paragrafo (2.2).



(a) 20 iterazioni



(b) 22 iterazioni

Figura 4.2

Dai tratti successivi della varietà stabile e di quella instabile riportati in (4.2) si osserva come W^+ e W^- *oscillano* tra loro addensandosi intorno al punto fisso iperbolico senza mai auto-intersecarsi.

4.1.1 Rappresentazione del λ-lemma

Sfruttiamo le W^+ e W^- appena costruite per visualizzare il λ-*lemma*. Prendiamo un segmento D^- che interseca trasversalmente la varietà stabile e visualizziamo la sua evoluzione $D_n^- = \varphi^n(D^-)$. A fini rappresentativi consideriamo solo i primi tratti della varietà stabile ed instabile e ci limitiamo a raffigurare solo le porzioni dei segmenti D_n^- relative a tali tratti di W^+e W^-. Dalla figura (4.3) si vede come i segmenti iterati D_n^-, in accordo con il λ-*lemma*, si inclinano e si allargano disponendosi parallelamente alla varietà instabile.

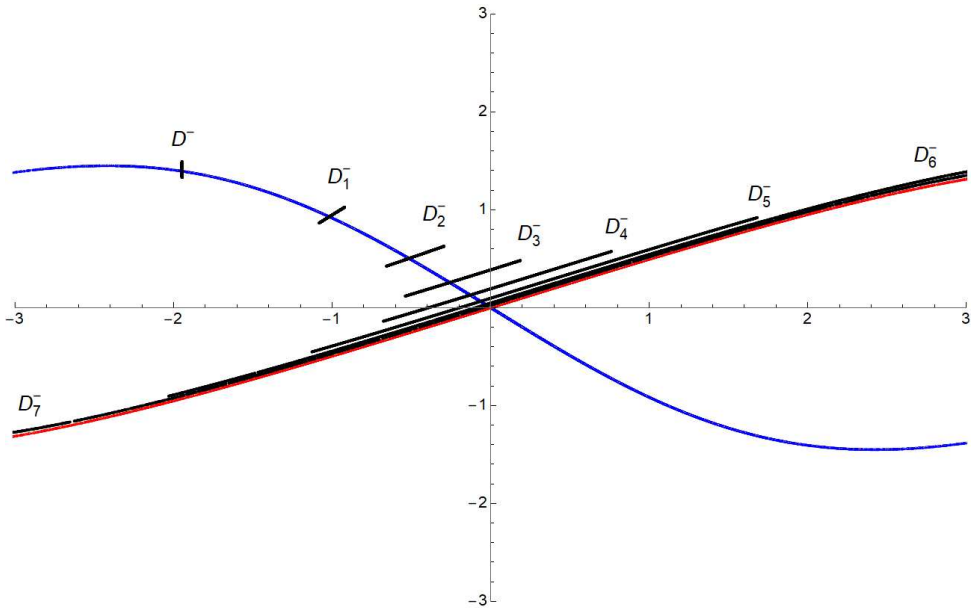


Figura 4.3

4.2 Mappe di Poincaré

Consideriamo ora i sistemi continui definiti da campi vettoriali $\dot{x} = H(x)$. Nel caso di sistemi continui con spazio delle fasi di dimensione 3, uno strumento utile per il loro studio è dato dalle *mappe di Poincaré*. Prendiamo una sezione locale Σ (una superficie di codimensione 1 trasversale ad H) e consideriamo l'orbita di un punto $x_0 \in \Sigma$. Si supponga inoltre che tale orbita intersechi nuovamente Σ nel futuro (o nel passato) in un punto x_1. Allora lo stesso accade in un intono di x_0 per continuità del flusso di H. Possiamo restringere opportunamente Σ e definire una mappa $\Psi : \Sigma \to \Sigma$ tale che $\Psi(x_0) = x_1$. Si può inoltre dimostrare che tale mappa è un diffeomorfismo. Se x_0 appartiene ad un' orbita periodica, esso è un punto fisso per Ψ, e nel caso sia iperbolico possiamo individuare una varietà stabile ed una varietà instabile. Grazie a Ψ è possibile, quindi, ricondurre un sistema continuo con spazio delle fasi di dimensione 3 ad un sistema discreto bidimensionale (*facile* da visualizzare). Ψ prende il nome di *mappa di Poincaré* e chiamiamo Σ *sezione di Poincaré*.
Il metodo delle mappe di Poincaré risulta molto efficacie per i sistemi di equazioni differenziali che dipendono periodicamente dal tempo. Partiamo dal considerare una generica equazione differenziale non autonoma $\dot{x} = H(x,t)$ e definiamo il suo flusso non autonomo come la mappa che associa ad ogni punto x_0 e ad ogni istante iniziale t_0 la corrispondente evoluzione al tempo t:

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n\,, \qquad \varphi_{t,t_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Un sistema non autonomo con spazio delle fasi di dimensione n può essere ricondotto ad un sistema autonomo con *spazio delle fasi esteso* di dimensione $n+1$ considerando il tempo come una variabile: $(\dot{x}, \dot{t}) = (H(x,t), 1)$. Nel caso H sia periodica rispetto al tempo con periodo $\bar{t} > 0$, possiamo definire lo *spazio delle fasi esteso quoziente* ponendo equivalenti i piani (x,t) dati da $t = m\,\bar{t}$ con $m \in \mathbb{Z}$. In questo spazio quoziente scegliamo come sezione di Poincaré il piano definito da $t = \bar{t}$ e adottiamo come mappa di Poincaré $\Psi = \varphi_{\bar{t},0}$.

4.2.1 Pendolo forzato

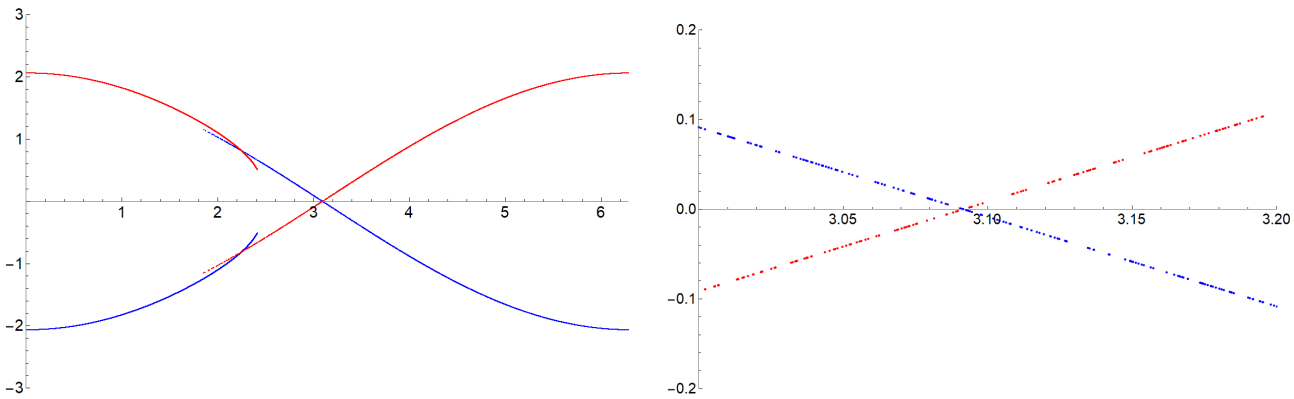
Mostriamo, in conclusione, un'applicazione delle mappe di Poicaré studiando la dinamica di un pendolo sottoposto ad una forzante periodica. Il sistema è descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\ddot{x} + \sin(x) = k\cos(t) \qquad 0 < k < 1$$

dove il termine $k\cos(t)$ rappresenta una perturbazione periodica di *intensità* k. Considereremo k piccolo. Nello spazio delle fasi esteso il campo assume la forma seguente:

$$H(x,\, v,\, t) = \big(v,\, -\sin(x) + k\cos(t),\, 1\big)$$

Sfruttando la periodicità della componente perturbativa, come detto in precedenza, prendiamo come Σ il piano $t = 2\pi$ nello spazio delle fasi quoziente e consideriamo $\Psi = \varphi_{2\pi,0}$. Con $k = 0$ si avrebbe $(\pi,\, 0)$ punto fisso iperbolico per Ψ. Dato che stiamo considerando un contributo perturbativo con k piccolo, il punto fisso iperbolico si sposta in modo continuo al variare di k. Possiamo assumere che esso si trovi nell'intervallo $[\pi - 0.5,\, \pi + 0.5]$. Costruiamo numericamente le orbite su Σ approssimando Ψ con il metodo di Runge-Kutta del secondo ordine. Poniamo $k = 0.1$ e prendiamo 40000 punti appartenenti all'insieme $Q = \{(x, v)\big|\, x \in [\pi - 0.5,\, \pi + 0.5],\, v \in [-10^{-3},\, 10^{-3}]\}$. Applichiamo Ψ^{-1} e Ψ a tali punti per visualizzare la varietà stabile (in blu) e quella instabile (in rosso).

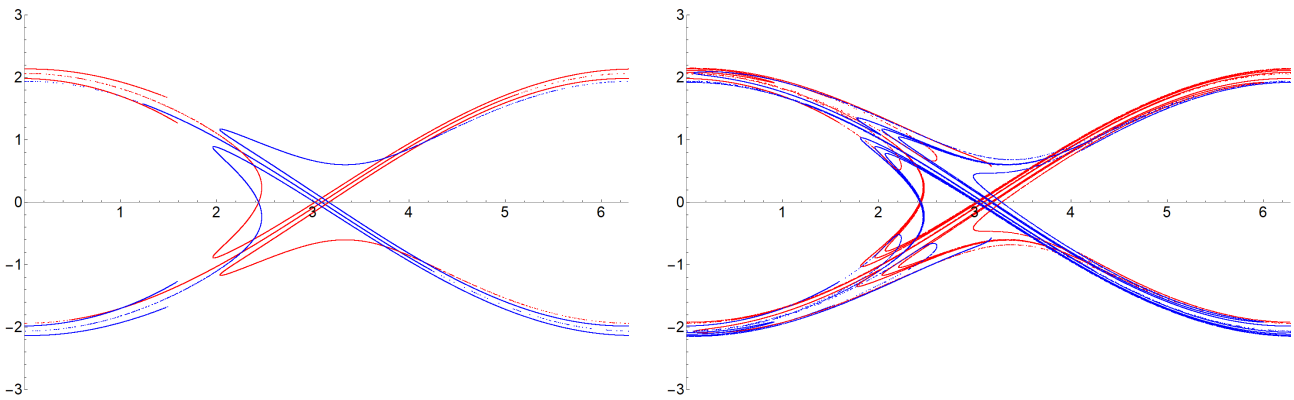


(a) 1 iterazione

(b) 1 iterazione, dettaglio di un intorno di $(0,\, \pi)$

Figura 4.4

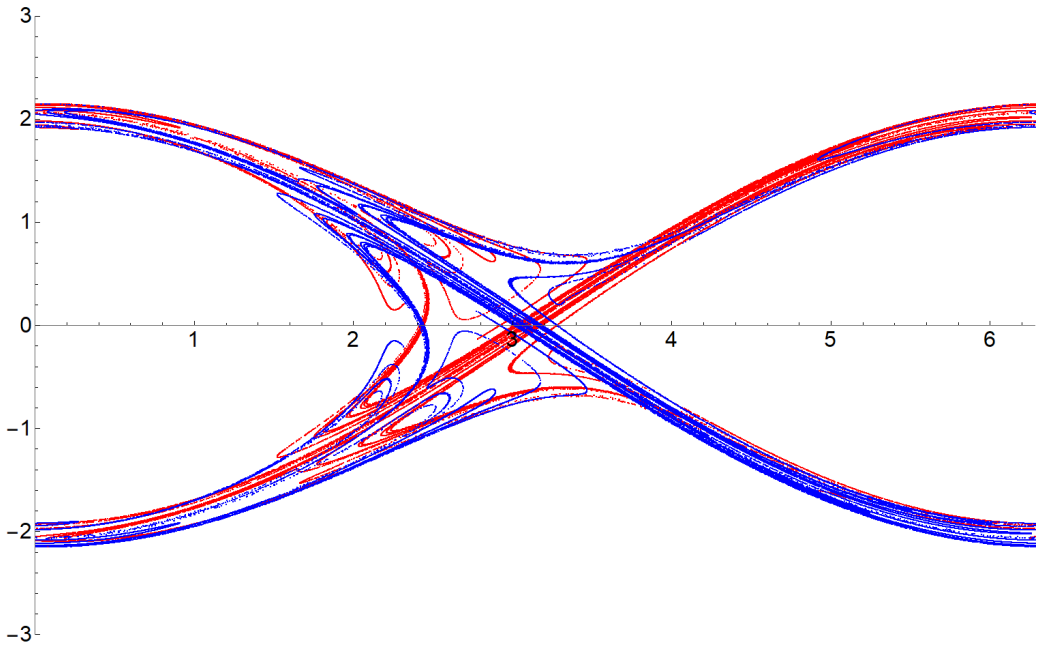
Dalla figura (4.4) si osserva che la presenza del termine perturbativo porta alla comparsa di punti omoclini. Vediamo dalla figura (4.4) (b) che il punto fisso iperbolico corrisponde approssimativamente a $(3.09,\, 0)$. Per mostrare con maggiore precisione l'evoluzione di W^+ e W^-, consideriamo un insieme più ristretto sul punto fisso $Q' = \{(x, v)\big|\, x \in [3.090 - 5 \cdot 10^{-3},\, 3.090 + 5 \cdot 10^{-3}],\, v \in [-10^{-3},\, 10^{-3}]\}$.



(a) 2 iterazioni

(b) 3 iterazioni

.



(c) 4 iterazioni

Figura 4.5

Dalla (4.5) si vede che con l'aumentare delle interazioni di Ψ^{-1} e Ψ la varietà stabile e quella instabile assumono una struttura sempre più complessa. Si osservano, come visto anche nel caso della Chirikov standard map, i lobi tipici delle strutture omocline che si addensano in prossimità del punto fisso iperbolico

Bibliografia

[1] L. Barreira, C. Valls; *Dynamical Systems, An Introduction*; Springer-Verlag London; 2013.

[2] G. Benettin; *Introduzione ai sistemi dinamici*; Appunti per il corso di Fisica Matematica, 2001-2002.

[3] M. Brin, G. Stuck; *Introduction to Dynamical Systems*; Cambridge University press; 2002.

[4] B. Chirikov, D. Shepelyansky; *Chirikov standard map*; Scholarpedia; 2008; 3(3):3550.

[5] J. Cresson, S. Wiggins; *A lambda-lemma for normally hyperbolic invariant manifolds*; 2005; hal-00012889.

[6] G. De Marco; *Analisi due, secondo corso di analisi matematica*; Decibel editrice; 1999.

[7] F. Fassò; *Note per il corso di Sistemi Dinamici*, Corso di laurea magistrale in Matematica; 2018.

[8] F. Fassò; *Dispense per il corso di Istituzioni di Fisica Matematica*; CLEUP; 2019.

[9] J. Palis, Jr. W. de Melo; *Geometric Theory of Dynamical Systems, An Introduction*; Springer-Verlag New York Inc; 1982.

[10] E. Zehnder; *Lectures on Dynamical Systems, Hamiltonian Vector Fields and Symplectic Capacities*; European Mathematical Society; 2010.