

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Entropia ed entanglement in sistemi quantistici e gravità

Relatore

Dott.ssa Alessandra Gnechi

Laureando

Lorenzo Takor

Anno Accademico 2023/2024

Indice

1	Introduzione	1
2	Elementi di meccanica statistica e di teoria quantistica dell'informazione	3
2.1	Meccanica statistica classica	3
2.2	Meccanica statistica quantistica	4
2.3	Elementi di teoria quantistica dell'informazione	5
3	Black hole evaporation	9
3.1	Introduzione al paradosso dell'informazione	9
3.2	Mettrica di Schwarzschild e prolungamento analitico in $r = r_s$	11
4	Quantum field theory in spazi curvi ed effetti gravitazionali	13
4.1	Campi scalari nello spazio di Minkowski	13
4.2	Decomposizione di Rindler	15
4.3	Campi scalari nelle coordinate di Rindler	17
4.3.1	Temperatura di Hawking	20
5	Curva di Page	23
5.1	Teorema di Page	23
5.2	Derivazione semiclassica delle caratteristiche principali della curva di Page	25
6	Conclusioni	27
7	Appendici	29
7.1	Campi scalari massivi nello spazio curvo e trasformazioni di Bogoliubov	29

Capitolo 1

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è lo studio di effetti causati dall'introduzione della curvatura dello spazio-tempo in una teoria quantistica di campo e, conseguentemente, l'applicazione dei risultati ottenuti al caso di un buco nero. In particolare si studieranno innanzitutto le proprietà della soluzione all'equazione di Einstein nel caso di distribuzione sferica di massa, priva di carica e non rotante, che restituisce la nota metrica di Schwarzschild, analizzandone le proprietà di continuità. Questo tipo di soluzione sarà di particolare interesse all'interno dell'elaborato in quanto descrive, nel caso di corpi particolarmente densi, la curvatura causata da un buco nero.

Si procederà dunque con la generalizzazione di una teoria quantistica di campo in presenza di curvatura, con lo studio di alcuni effetti gravitazionali generati dall'introduzione di quest'ultima e dall'entanglement presente tra diverse regioni spaziali; particolare attenzione verrà posta circa l'effetto Unruh, che lega alcune osservabili misurate dall'osservatore "in caduta" - ovvero sottoposto ad un campo di accelerazione o , in altri termini, ad una curvatura non nulla dello spazio-tempo - a quelle misurate dall'osservatore "all'infinito", che non percepisce alcuna curvatura.

L'applicazione di questi risultati al caso di metrica di Schwarzschild permetterà di ricavare alcune delle caratteristiche utili alla descrizione della termodinamica del buco nero, quali la sua temperatura ed entropia, quantità che ne descrivono il processo di evaporazione tramite radiazione di Hawking.

Infine si studierà l'evoluzione temporale dell'entropia di uno dei due sottosistemi - identificati in questo caso come buco nero e radiazione - durante il processo di evaporazione, descritta dalla cosiddetta curva di Page: verranno enunciati i teoremi di Page sull'entropia di entanglement presente tra due sottosistemi di uno spazio di Hilbert composto che consentiranno di trattare il fenomeno in approssimazione semiclassica e permetteranno di ricavare alcune proprietà fondamentali circa la dipendenza temporale dell'entropia.

Capitolo 2

Elementi di meccanica statistica e di teoria quantistica dell'informazione

2.1 Meccanica statistica classica

Date N particelle in un volume V , descritte dalle coordinate generalizzate dei singoli costituenti (\vec{p}_i, \vec{q}_i) , $i=1, \dots, N$, si vuole predire l'evoluzione temporale del sistema. In primo luogo si potrebbe pensare di risolvere l'equazione del moto per ciascuna particella, note le condizioni iniziali $(\vec{p}_{0,i}, \vec{q}_{0,i})$, appare tuttavia evidente quanto il problema diventi computazionalmente complicato all'aumentare di N . La soluzione proposta dalla meccanica statistica si basa sul predire l'evoluzione temporale delle possibili configurazioni nello spazio delle fasi $6N$ -dimensionale - \mathbb{R}^{6N} - delle coordinate delle particelle: indicata con Δ_0 la configurazione all'istante $t = 0$, si definisce una densità di probabilità $\rho(p, q, t)$ che esprime la probabilità che Δ_0 evolva in un'altra configurazione Δ' .

Il teorema di Liouville afferma che $\rho(p, q, t)$ evolve come un fluido incompressibile nello spazio delle fasi, ovvero $\frac{d\rho(p, q, t)}{dt} = 0$ che, unito alla nozione di derivata totale di una generica funzione $f(p, q, t)$ lungo il flusso delle equazioni di Hamilton: $\frac{df(p, q, t)}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$, implica che $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\{\rho, H\}$. Essendo interessati ad analizzare situazioni di equilibrio tali per cui le osservabili $X_k(t)$ che si intende misurare sono supposte stazionarie, ovvero

$$0 = \frac{dX_k(t)}{dt} = \int d^{3N}p d^{3N}q X_{dyn,k}(p, q, t) \frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 = \{\rho, H\} \quad (2.1)$$

Ciò implica che è possibile identificare la densità di probabilità come funzione del solo Hamiltoniano: $\rho(p, q, t) = \rho(H)$, ovvero che tutti gli stati compatibili con le condizioni iniziali macroscopiche sono equiprobabili.

è possibile a questo punto definire diversi ensemble, ovvero diverse famiglie di stati compatibili con le condizioni macroscopiche, a seconda della natura di quest'ultime, ad esempio

- **ensemble microcanonico:** sono fissati il numero di particelle N , il volume V e l'energia totale U . La funzione di densità di probabilità ρ_{mc} assume la forma

$$\rho_{mc} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma} & \text{se } U - \frac{\Delta U}{2} \leq H(p, q) \leq U + \frac{\Delta U}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.2)$$

con

$$\Gamma = \int_{U - \frac{\Delta U}{2} \leq H(p, q) \leq U + \frac{\Delta U}{2}, q \in V} d^{3N}q d^{3N}p \quad (2.3)$$

Il numero di microstati diventa dunque $\Omega = \frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{\Gamma}{N!h^{3N}}$ dove il termine $\frac{1}{N!}$ rappresenta il conteggio di Boltzmann nel caso di N particelle identiche. A questo punto è possibile esprimere

l'entropia nell'ensemble microcanonico grazie alla definizione fornita dallo stesso Boltzmann:
 $S = k_b \ln(\Omega)$.

- **ensemble canonico:** sono fissati il numero di particelle N , il volume V e la temperatura del sistema T . Ciò significa che sono ammesse fluttuazioni ΔU dell'energia attorno ad un valore medio $\langle U \rangle$ dovute a processi di scambio termico con l'ambiente esterno.

La funzione di partizione, Z , è così definita:

$$Z = \frac{1}{\Gamma_0(N)} \int d^{6N} x e^{-\beta H} \approx e^{-\beta F} \quad (2.4)$$

Dove F è l'energia libera di Helmholtz, che assume la forma

$$F = -k_b T \ln Z_{\text{can}} \quad (2.5)$$

Dalla quale è possibile estrarre l'entropia del sistema secondo

$$S = -\frac{F}{T} = k_b \ln Z_{\text{can}} \quad (2.6)$$

La densità di probabilità assume la forma

$$\rho_{\text{can}} = \frac{e^{-\beta H}}{\Gamma_0(N) Z_{\text{can}}} \quad (2.7)$$

e vale dunque la seguente formula per il valore di aspettazione dell'energia:

$$\bar{U} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{\text{can}} \quad (2.8)$$

2.2 Meccanica statistica quantistica

In meccanica statistica quantistica il concetto di ensemble viene sostituito da una mistura statistica $\{|\psi_i\rangle, p_i\}$ con $p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$ e le osservabili termodinamiche vengono sostituite da opportuni operatori hermitiani dei quali è possibile il calcolo dei valori di aspettazione. La densità di probabilità ρ viene sostituita con la matrice densità della mistura, che contiene tutte le informazioni sul sistema: agendo su un autostato $|\psi_i\rangle$ soddisfacente le condizioni macroscopiche essa restituisce la probabilità p_i di misurare quel preciso microstato. Le proprietà della matrice densità verranno discusse più in dettaglio nella prossima sezione.

Una versione analoga del teorema di Liouville è rappresentata dall'equazione di Von Neumann per l'evoluzione temporale della matrice densità:

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H, \rho(t)] \quad (2.9)$$

I valori di aspettazione delle variabili di ensemble X_k sono dunque ottenibili mediante la matrice densità:

$$\langle X_k(t) \rangle = \text{tr}(\rho X_k(t)) = \text{tr}(\rho(t) X_k) \quad (2.10)$$

Dove nell'ultimo passaggio è ricordata l'equivalenza tra la visuale di Schroedinger in cui gli operatori sono stazionari e gli stati evolvono nel tempo, e quella complementare di Heisemberg dove gli stati sono stazionari ed è invece associata un'evoluzione temporale agli operatori.

Anche nel caso di meccanica statistica quantistica è possibile definire diversi ensemble, in analogia con il caso classico:

- **Ensemble microcanonico:** la condizione di stazionarietà della matrice densità ha implicazioni analoghe al caso classico, in particolare:

$$i\hbar \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0 = [H, \rho(t)] \longrightarrow \rho = \rho(H) \quad (2.11)$$

Che implica l'equiprobabilità di tutti gli stati compatibili con le condizioni macroscopiche. Si può identificare dunque

$$\rho(U) = \frac{\delta(H - U)}{Z_{\text{mc}}(U)} \quad (2.12)$$

Dove Z_{mc} è fornito dal valore di aspettazione del proiettore $|n\rangle\langle n|$ sull'autostato di energia di interesse con autovalore E_n :

$$\overline{|n\rangle\langle n|} = \frac{1}{Z_{\text{mc}}} \quad (2.13)$$

A questo punto la definizione di Entropia emerge analogamente al caso classico:

$$S(U) = k_b \ln Z_{\text{mc}}(U) \quad (2.14)$$

- **ensemble canonico:** dato il dal continuo nel caso classico, alla discretizzazione dei livelli energetici nel caso quantistico, è necessario innanzitutto applicare la sostituzione

$$\frac{1}{\Gamma_0(1)^N} \int d^{6N}x \longrightarrow \sum_n \quad (2.15)$$

La matrice densità è dunque definita in questo modo

$$\rho_{\text{can}} = \frac{e^{-\beta H}}{Z_{\text{can}}} \quad (2.16)$$

La condizione di normalizzazione $\text{tr} \rho = 1$ restituisce un'espressione per la funzione di partizione Z_{can} analoga al caso classico:

$$Z_{\text{can}} = \text{tr}(e^{-\beta H}) = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad (2.17)$$

dove la traccia è stata fatta sulla base di autostati dell'hamiltoniano grazie alla proprietà di invarianza della traccia sotto cambio di base.

2.3 Elementi di teoria quantistica dell'informazione

- **No cloning theorem:** Dato uno stato $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ non esiste un operatore unitario U tale per cui $U|\psi\rangle|0\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Al fine della dimostrazione, si considerino due stati $|\Phi_1\rangle = |\psi\rangle|0\rangle$ e $|\Phi_2\rangle = |\phi\rangle|0\rangle$. Se tale operatore esistesse, devono essere soddisfatte contemporaneamente le seguenti uguaglianze:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \langle \psi | \langle 0 | \langle \phi | \phi \rangle | 0 \rangle = \langle \psi | \langle 0 | U^\dagger U | \phi \rangle | 0 \rangle = \langle \psi | \langle \psi | \langle \phi | \phi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^2 \quad (2.18)$$

il che limita l'esistenza dell'operatore U ai soli stati mutualmente ortogonali

- **Matrici densità e correlazioni tra stati**

- **stati puri:** dato uno stato $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, si definisce la sua matrice densità come $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$
- **stati misti:** data una miscela statistica $\{(|\psi_1\rangle, p_1), (|\psi_2\rangle, p_2), \dots, (|\psi_k\rangle, p_k)\}$ con $p_k \geq 0$, $\sum_k p_k = 1$ è possibile costruirne una matrice densità: $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$

La generica matrice densità ρ gode delle seguenti proprietà:

1. 1) ρ è hermitiana
2. 2) $\text{Tr}(\rho) = 1$
3. 3) ρ è un operatore non negativo: $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0 \forall |\psi\rangle$

Questo oggetto permette inoltre di distinguere stati puri, tali per cui vale $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ e stati misti per i quali $\text{Tr}(\rho^2) \leq 1$.

La matrice densità di uno stato o di una miscela contiene tutte le informazioni sul sistema, infatti è possibile estrarre, ad esempio, il valore di aspettazione di una qualsiasi osservabile \mathcal{A} mediante $\langle \mathcal{A} \rangle = \text{Tr}(\rho \mathcal{A})$.

La matrice densità di uno stato puro $|\psi\rangle$ è diagonalizzabile in una matrice avente solo un elemento diagonale pari a 1 e i restanti pari a 0: questo è possibile decomponendo \mathcal{H} come somma diretta del sottospazio generato da $|\psi\rangle$ e del suo sottospazio ortogonale. La forma diagonale di uno stato misto non assume questa particolare forma, tuttavia, siano λ_i gli autovalori della matrice densità, vale la relazione $\sum_i \lambda_i = 1$ data dalla proprietà 2) sopracitata.

L'evoluzione temporale della matrice densità è descritta dall'equazione di Von Neumann: $i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H, \rho(t)]$

Per un sistema composto nello spazio prodotto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, il cui stato è esprimibile mediante il vettore

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} |i\rangle |j\rangle \quad (2.19)$$

La corrispondente matrice densità assume la seguente forma generale:

$$\rho = \sum_{i,j,\alpha,\beta} \overline{c_{i,j}} c_{\alpha,\beta} |\alpha\rangle |\beta\rangle \langle i| \langle j| \quad (2.20)$$

ed è possibile calcolare i valori medi di osservabili che agiscono separatamente sui singoli sottospazi di \mathcal{H} - ad esempio A_1 - mediante l'operazione di traccia parziale: $\langle A_1 \rangle = \text{Tr}(\rho_1 A)$ con $\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho)$ matrice densità ridotta del primo sottosistema che ne conserva tutte le informazioni. Si sottolinea che, in generale, la matrice densità ridotta ad un sottospazio di uno stato puro in uno spazio di Hilbert composto non rappresenta necessariamente a sua volta uno stato puro. Il caso di spazio di Hilbert composto tornerà utile nella trattazione della decomposizione di Rindler e, più nello specifico, nella derivazione della temperatura di Hawking dove, in quest'ultimo caso, i due sottosistemi \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 verranno identificati rispettivamente con le due regioni spaziali $r < r_s$ e $r > r_s$ nella metrica di Schwarzschild e dove $r_s = 2GM$ rappresenta l'omonimo raggio che definisce l'orizzonte degli eventi del buco nero. L'operazione di traccia parziale effettuata sul primo sottospazio permetterà dunque di riprodurre il caso di osservatore all'infinito - fuori dall'orizzonte - al quale è impossibile l'accesso all'informazione presente all'interno dell'orizzonte, e si dimostrerà la natura di miscela statistica da lui osservata.

- **Correlazioni tra stati:** le correlazioni tra gli stati che compongono un vettore in uno spazio di Hilbert composto sono ciò che permette di determinare se la matrice densità del sistema ρ sia scomponibile nel prodotto tensore delle matrici densità dei singoli sottosistemi: $\rho = \rho_1 \times \rho_2 \times \dots \times \rho_k$. Una possibile quantificazione delle suddette correlazioni è data dal coefficiente di Pearson: date due osservabili X e Y che agiscono sullo spazio prodotto, siano x, y i risultati di misure ripetute delle stesse e siano σ_x^2, σ_y^2 i loro scarti quadratici medi, il coefficiente di Pearson è definito:

$$r_{xy} = \frac{\langle (x - \langle x \rangle) (y - \langle y \rangle) \rangle}{\sigma_x \sigma_y} \quad (2.21)$$

In particolare esso esprime forte anticorrelazione per valori di r_{xy} prossimi a -1, scorrelazione per $r_{xy} = 0$ e forte correlazione per r_{xy} prossimo a +1.

Un altro modo per quantificare il grado di entanglement di un sistema quantistico è mediante l'entropia di Von Neumann: dato uno stato nello spazio composto $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ descritto dalla matrice densità ρ_{12} , l'entropia di Von Neumann del sottosistema 1 S_{vn} è definita come segue:

$$S_{\text{vn},1} = -\text{tr}(\rho_1 \ln \rho_1) \quad (2.22)$$

e in modo analogo per il secondo sottosistema. L'entropia di Von Neumann soddisfa le seguenti proprietà:

1. per uno stato puro vale $S_{\text{vn}} = 0$;
2. per uno stato puro in un sistema composto $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ vale

$$S_{\text{vn},1} = S_{\text{vn},2} \quad (2.23)$$

3. S_{vn} è invariante sotto trasformazioni unitarie della matrice densità:

$$S_{\text{vn}}(\rho) = S_{\text{vn}}(U\rho U^\dagger) \quad (2.24)$$

4. se ρ_1 e ρ_2 sono le matrici densità ridotte del generico stato misto descritto da ρ_{12} allora valgono le disuguaglianze:

$$|S_{\text{vn},1} - S_{\text{vn},2}| \leq S_{\text{vn},12} \leq S_{\text{vn},1} + S_{\text{vn},2} \quad (2.25)$$

5. dato uno stato in uno spazio composto da tre o più sottospazi, l'entropia di Von Neumann è fortemente subadditiva:

$$S_{\text{vn},12} + S_{\text{vn},23} \geq S_{\text{vn},2} + S_{\text{vn},123} \quad \text{e} \quad S_{\text{vn},12} + S_{\text{vn},23} \geq S_{\text{vn},1} + S_{\text{vn},3} \quad (2.26)$$

6. sia $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ e $|\cdot|$ la dimensione di uno spazio di Hilbert, lo stato massimamente entangled, ovvero quello che massimizza l'entropia di von Neumann, è dato, nel caso in cui ad esempio esso appartenga al primo sottospazio, dalla matrice densità $\rho_1 = \frac{id_1}{|\mathcal{H}_1|}$

- **Decomposizione di Schmidt e rango di Schmidt** è un algoritmo che permette di semplificare la scrittura di uno stato puro, in uno spazio bipartito $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, ovvero permette di scrivere

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\dim\mathcal{H}_1} \sum_{j=1}^{\dim\mathcal{H}_2} c_{i,j} |i\rangle |j\rangle \longrightarrow |\psi\rangle = \sum_{i=1}^k \sqrt{p_i} |i\rangle |i'\rangle \quad (2.27)$$

con $k \leq \min\{\dim\mathcal{H}_1, \dim\mathcal{H}_2\}$.

La decomposizione di Schmidt è inoltre in grado di determinare se uno stato sia entangled o meno, infatti se il numero di coefficienti $p_i \neq 0$ - detto rango di Schmidt - è maggiore di 1 si è in presenza di uno stato entangled, al contrario, se questo è pari ad 1 lo stato è separabile nella forma ottenuta mediante la decomposizione. Il rango di Schmidt non fornisce tuttavia una misura del grado di entanglement del sistema ma ne è solamente un discriminante.

- **Purificazione di stati** Si tratta di una procedura che permette di trasformare uno stato misto descritto da una matrice densità $\rho_1 \in \mathcal{H}_1$, spesso difficile da trattare, in uno stato puro al costo di ampliare lo spazio di Hilbert del sistema aggiungendo un altro spazio ausiliario di dimensione almeno pari a quella di partenza.

Capitolo 3

Black hole evaporation

3.1 Introduzione al paradosso dell'informazione

In questa sezione vengono presentati i motivi principali che portano alla formulazione del paradosso dell'informazione, ovvero l'impossibilità di ricostruire l'informazione circa i costituenti primi del buco nero a partire dalle particelle prodotte durante il processo di evaporazione, informazione alla quale dovrebbe essere, in linea di principio, possibile accedere nell'ipotesi in cui la formazione del buco nero avvenga tramite interazioni unitarie tra particelle quantistiche. Segue una descrizione puramente qualitativa delle caratteristiche principali della curva di Page, una funzione atta a descrivere l'andamento temporale dell'entropia di Von Neumann di uno dei due sottosistemi composti da buco nero e radiazione, nell'ipotesi di unitarietà del processo.

Sia $|0\rangle$ lo stato di vuoto di un sistema all'istante $t=0$ e si supponga di introdurre N bosoni identici, descritti dal campo scalare Φ , localizzati alle coordinate $\{x_i\}_{i=1}^N$ mediante il formalismo di seconda quantizzazione definendo così lo stato $|\text{IN}\rangle$:

$$|\text{IN}\rangle = \Phi^-(x_1)\Phi^-(x_2)\dots\Phi^-(x_N)|0\rangle \quad (3.1)$$

dove con Φ^- si intende la parte, nella procedura di decomposizione del campo in modi normali, contenente gli operatori di creazione $a^\dagger(\mathbf{k})$. Lo stato appena creato, in quanto puro, ha entropia di Von Neumann $S_{\text{vn,IN}} = 0$. Si supponga inoltre di conoscere la natura delle interazioni tra le particelle - inclusa quella gravitazionale tra di esse - e di essere dunque in grado di scrivere la corrispondente S-matrix che, per definizione, sarà un operatore unitario. Si supponga infine di aver creato un numero di particelle tale per cui l'interazione netta tra di esse sia di tipo attrattivo dando luogo alla formazione un buco nero secondo i teoremi di Penrose-Hawking [1].

Dato che l'evoluzione del sistema è descritta dalla S-matrix unitaria, che trasforma stati puri in altri stati puri, è possibile identificare il buco nero come uno stato puro $|\text{OUT}\rangle$:

$$S|\text{IN}\rangle = |\text{OUT}\rangle \quad (3.2)$$

Di nuovo, la purezza dello stato finale implica $S_{\text{vn,OUT}} = 0$.

Avendo usato solamente strumenti propri della meccanica quantistica, teoria che prevede l'impossibilità di creazione o distruzione di informazione, la speranza è che sia possibile in qualche modo - mediante una nuova trasformazione unitaria - ricostruire l'informazione circa gli oggetti che hanno contribuito alla formazione del buco nero. Il teorema no-hair stabilisce, tuttavia, che ogni buco nero è completamente caratterizzato da massa, carica elettrica e momento angolare e che dunque sia impossibile distinguere buchi neri formati da costituenti diversi ma aventi le stesse tre proprietà sopracitate. In aggiunta, il fenomeno della radiazione di Hawking [2] prevede che, mediante la creazione di coppie

virtuali di particella-antiparticella lungo l'orizzonte degli eventi, sia possibile l'evaporazione del buco nero in radiazione avente forma analoga alla radiazione di corpo nero e dunque anch'essa insensibile alle condizioni iniziali delle particelle prima del collasso.

Dunque, dal momento in cui diverse configurazioni possono creare lo stesso buco nero e dato che la radiazione di Hawking non fornisce ulteriori dettagli sui suoi costituenti, emerge il paradosso secondo cui l'informazione sullo stato iniziale $|\text{IN}\rangle$ sia stata effettivamente persa.

È possibile descrivere il sistema composto buco nero e associata radiazione di Hawking in un unico spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{B.H.}} \otimes \mathcal{H}_{\text{rad}}$; il processo di evaporazione è scomponibile in tre fasi di particolare interesse:

1. stadio primordiale $t = t_{\text{form}} + dt$: all'istante di formazione del buco nero a $t = t_{\text{form}}$ l'entropia di Von Neumann dello stato puro è, come già menzionato in precedenza, nulla: $S_{\text{vn,B.H.}}(t = t_{\text{form}}) = 0$. Ad istanti immediatamente successivi, una piccola parte del buco nero sarà evaporata in radiazione di Hawking secondo il meccanismo descritto in precedenza. Sarà dunque non nulla la corrispondente entropia di Von Neumann per ciascuno dei due sottosistemi - si ricorda che per un sistema composto descritto da uno stato puro in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$ vale $S_{\text{vn,a}} = S_{\text{vn,b}}$ - e il basso numero di stati nello spazio \mathcal{H}_{rad} fa sì che l'entanglement tra buco nero e radiazione, e di conseguenza S_{vn} , sia di bassa intensità. Per tempi $t_{\text{form}} < t < t_{\frac{1}{2}}$ si avrà dunque un andamento crescente a causa del progressivo aumento degli stati in \mathcal{H}_{rad} ;
2. stadio intermedio $t = t_{\frac{1}{2}}$: metà del buco nero è evaporato. In questo istante di tempo il numero di stati possibili dei due sottosistemi è identico ed è dunque prevista la massima intensità dell'entanglement tra le due parti, a cui corrisponde un massimo dell'entropia di Von Neumann per ciascuno dei due sottosistemi: $S_{\text{vn}} = S_{\text{vn,max}}$. Da questo istante, a causa della continua evaporazione, il numero di stati in $\mathcal{H}_{\text{B.H.}}$ sarà inferiore a quello in \mathcal{H}_{rad} , dunque per $t > t_{\frac{1}{2}}$ è prevista una decrescita di S_{vn} ;
3. stadio finale $t = t_{\text{end}}$: istante in cui si ha la totale evaporazione del buco nero. In questa configurazione gli stati del sottosistema appartenente a \mathcal{H}_{rad} non hanno alcuno stato in $\mathcal{H}_{\text{B.H.}}$ a cui essere entangled e lo stato del sistema composto è separabile in $|\Psi\rangle = |0\rangle_{\text{B.H.}} \otimes |\phi\rangle_{\text{rad}}$. l'entropia di Von Neumann a questo stadio è dunque nulla per ciascuno dei due sottosistemi

Queste proprietà generali sull'andamento di $S_{\text{vn}}(t)$, detta curva di Page, seppur ottenute in modo euristico ma basandosi puramente su considerazioni quanto-meccaniche. sono le caratteristiche fondamentali che una teoria consistente di gravità quantistica deve riuscire a riprodurre. Infatti, l'obiettivo della ricerca attuale è sviluppare un modello fisico che si comporti secondo una curva di Page compatibile con l'andamento rappresentato in figura 5.1.

Ci sono diversi approcci in letteratura che affrontano il problema dell'evaporazione di un buco nero e una possibile soluzione al paradosso dell'informazione è quella proposta da Leonard Susskind e che prende il nome di black hole complementarity (BHC) [3] e si basa su due proprietà della metrica di Schwarzschild. La prima è l'impossibilità di comunicazione - intesa come scambio di comunicazione - tra un osservatore all'infinito e un osservatore che si trova oltre l'orizzonte degli eventi e che dunque è in caduta libera verso la singolarità. La seconda si basa sul fatto che l'osservatore in caduta non osserva nulla di anomalo nell'oltrepassare l'orizzonte degli eventi: questo è dovuto al fatto che nella metrica di Schwarzschild [4]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.3)$$

l'unica vera singolarità è quella in $r = 0$. La divergenza per $r = r_s$ è solo una caratteristica del sistema di coordinate utilizzato. Infatti, definendo un nuovo sistema di coordinate rappresentanti un sistema di riferimento uniformemente accelerato è possibile prolungare analiticamente la soluzione tra $r < r_s$ e $r > r_s$, come verrà dimostrato nella prossima sezione. Inoltre lo sviluppo di una teoria quantistica di campo in spazio curvo e, in particolare, in prossimità dell'orizzonte degli eventi ha come conseguenza

il cosiddetto effetto Unruh tale per cui un osservatore in un set di coordinate accelerate vede un diverso stato di vuoto rispetto a quello descritto nello spazio di Minkowski e, in particolare, osserva un bagno termico a temperatura $T = \frac{\alpha}{2\pi}$, relazione analoga in forma alla temperatura della radiazione di corpo nero formulata da Hawking che emerge dunque in modo naturale dall'espansione della metrica near-horizon.

A questo punto è possibile formulare l'ipotesi di BHC: supponendo di fornire uno spessore infinitesimo all'orizzonte degli eventi, l'osservatore all'infinito vedrebbe l'informazione raggiungere asintoticamente questa regione di spazio, venire assorbita e in seguito riemessa il tutto descritto da un'evoluzione unitaria. L'osservatore in caduta vedrebbe invece l'informazione provenire dall'orizzonte degli eventi e cadere assieme a lui verso la singolarità. Le due descrizioni non violano il teorema del no-cloning in quanto non è possibile uno scambio di informazione tra i due osservatori che è conseguenza nella non commutatività delle osservabili all'infinito e all'interno dell'orizzonte degli eventi. Questa ipotesi non verrà sviluppata ulteriormente all'interno della tesi che si limiterà a studiare il processo di evaporazione del buco nero.

3.2 Metrica di Schwarzschild e prolungamento analitico in $r = r_s$

L'obiettivo di questa sezione è dimostrare come, mediante un opportuno cambio di coordinate la cui esistenza è stata anticipata nella sezione precedente, sia possibile estendere analiticamente la soluzione dell'equazione di Einstein lungo $r = r_s$, chiarendo le proprietà causali dello spazio tempo in presenza di un buco nero.

Si consideri la metrica di Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.4)$$

Essa rappresenta la metrica di un buco nero statico e privo di carica. Si possono notare due punti singolari - da qui in avanti si userà un sistema di unità tale per cui $r_s = 2GM = 1$ - uno in $r = 0$, che corrisponde alla singolarità al centro del buco nero, nel quale la metrica diverge a $+\infty$, e uno in $r = 1$. Quest'ultimo tuttavia rappresenta solamente un punto di singolarità apparente in quanto è semplicemente frutto di una scelta di coordinate inadatta a descrivere l'intero spazio: è possibile infatti, tramite un passaggio ad un sistema di riferimento accelerato, dimostrare che attorno ad $r = 1$ non vi siano in realtà problematiche di alcun tipo nella metrica. Le coordinate sferiche infatti costituiscono una mappa valida per le regioni $r < 1$ e $r > 1$, ovviamente escluso il punto $r = 0$, mentre il sistema di coordinate che ci si appresta a definire rappresenta la mappa che mette in comunicazione queste due regioni. Si introducono dunque le coordinate di Kruskal-Szekeres definite come segue:

$$\begin{cases} U = -e^{\frac{\tilde{r}-t}{2}} \\ V = e^{\frac{\tilde{r}+t}{2}} \end{cases} \quad (3.5)$$

con $\tilde{r} = r + \ln(r-1)$; le proprietà di queste coordinate verranno discusse alla fine della dimostrazione. Calcolando i differenziali di queste nuove coordinate si trova:

$$\begin{cases} dU = -\frac{1}{2}e^{\frac{\tilde{r}-t}{2}}(d\tilde{r} - dt) = -\frac{1}{2}e^{\frac{\tilde{r}-t}{2}}\left(\frac{r}{r-1}dr - dt\right) \\ dV = \frac{1}{2}e^{\frac{\tilde{r}+t}{2}}(d\tilde{r} + dt) = \frac{1}{2}e^{\frac{\tilde{r}+t}{2}}\left(\frac{r}{r-1}dr + dt\right) \end{cases} \quad (3.6)$$

Moltiplicando le due espressioni si ottiene:

$$dU dV = -\frac{1}{4}e^{\tilde{r}} \left[\left(\frac{r}{r-1}\right)^2 dr^2 - dt^2 \right] = -\frac{1}{4}e^r r \left[-\frac{r-1}{r} dt^2 + \frac{r}{r-1} dr^2 \right] \quad (3.7)$$

Dunque la metrica diventa:

$$ds^2 = -4\frac{e^{-r}}{r} dU dV + r^2 d\Omega^2 \quad (3.8)$$

Per eliminare l'elemento fuori diagonale in $dU dV$ è sufficiente effettuare un nuovo cambio di coordinate:

$$\begin{cases} U = T - X \longrightarrow dU = dT - dX \\ V = T + X \longrightarrow dV = dT + dX \end{cases} \quad (3.9)$$

Dunque l'espressione finale per la metrica diventa:

$$ds^2 = \frac{4}{r} e^{-r} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (3.10)$$

dove è scomparsa la singolarità in $r = 1$.

La particolarità delle coordinate di Kruskal-Szekeres è la possibilità di visualizzare in modo diretto le geodetiche nulle, l'orizzonte degli eventi e la singolarità. Le prime sono le traiettorie percorse da un raggio di luce, caratterizzate da $ds^2 = 0$ che si traduce, considerando un raggio che arriva dall'infinito verso la singolarità in direzione radiale con $d\Omega = 0$, in

$$ds^2 = -\frac{r-1}{r} dt^2 + \frac{r}{r-1} dr^2 = dt^2 \left(-\frac{r-1}{r} + \frac{r}{r-1} \frac{dr^2}{dt^2} \right) = 0 \longrightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \frac{r-1}{r} \quad (3.11)$$

Le geodetiche nulle diventano dunque parametrizzabili attraverso $t = \pm \tilde{r} + C = \pm(r + \ln(r-1))$ con C una qualche costante del moto. Infatti

$$dt = \pm \left(dr + \frac{1}{r-1} dr \right) = \pm dr \left(\frac{r}{r-1} \right) \longrightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \left(\frac{r-1}{r} \right) \quad (3.12)$$

e dunque per costruzione le curve a $U = cost$ o $V = cost$ o, alternativamente quelle soddisfacenti $X = \pm T + C$ nel piano $X - T$, rappresentano geodetiche nulle:

$$U = k = -e^{\frac{\tilde{r}-t}{2}} \longrightarrow C = 2 \ln(-k) = \tilde{r} - t \quad (3.13)$$

dove la procedura è analoga per le curve a $V = const$ e si ritrova anche il segno meno presente nella parametrizzazione che rappresenta geodetiche uscenti dal buco nero verso l'infinito.

Inoltre, essendo

$$UV = -e^{\tilde{r}} = (1-r)e^r \quad (3.14)$$

si avrà che la singolarità in $r = 0$ è rappresentata dalle iperboli tali per cui $UV = 1$, o dalle curve soddisfacenti $T^2 - X^2 = 1$, mentre l'orizzonte degli eventi caratterizzato da $r = 1$ verrà mappato nei nuovi assi cartesiani o nelle loro bisettrici nel piano $X - T$.

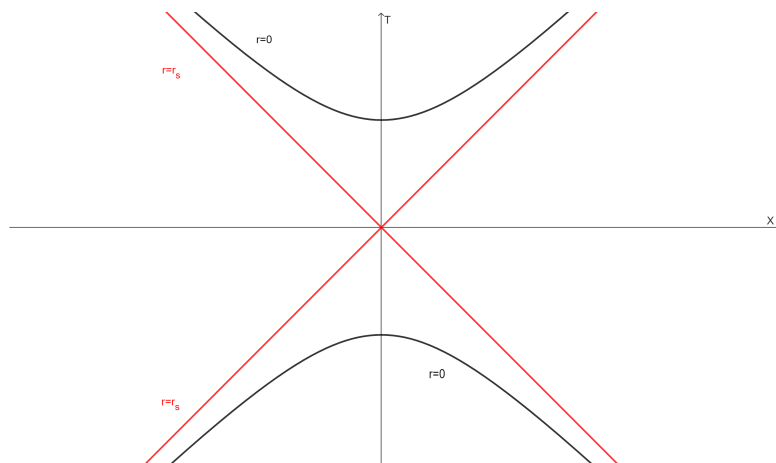


Figura 3.1: Immagine raffigurante il piano $X - T$. le iperboli nere corrispondono alla singolarità $r = 0$ mentre le rette rosse rappresentano l'orizzonte degli eventi $r = r_s$. In questa rappresentazione le geodetiche nulle sono descritte da rette parallele alle bisettrici degli assi.

Capitolo 4

Quantum field theory in spazi curvi ed effetti gravitazionali

La metrica di Schwarzschild rappresenta una soluzione all'equazione, classica, di Einstein e non include, dunque, alcun tipo di quantizzazione. Al fine di studiare alcuni dei fenomeni quantistici prodotti da questo tipo di soluzione è possibile utilizzare la metrica in questione come background classico nella costruzione di una teoria quantistica di campo. Nel seguito di questa tesi si porrà l'attenzione al caso di campi scalari studiandone le procedure di quantizzazione in presenza di curvatura e le conseguenze della geometria dello spazio-tempo su alcune osservabili fondamentali.

4.1 Campi scalari nello spazio di Minkowski

Si consideri un campo scalare in spazio piatto. Nel caso di campo massivo l'azione di un campo scalare massivo l'azione si scrive come

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2) = -\frac{1}{2} \int d^4x \left[-\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right] \quad (4.1)$$

e restituisce tramite le equazioni di Eulero-Lagrange la nota equazione di Klein Gordon:

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\phi = 0 \quad (4.2)$$

Dall'equazione 4.1 è possibile calcolare l'hamiltoniana per unità di volume, una volta noto il momento coniugato al campo $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \dot{\phi}$, ottenendo:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right) \quad (4.3)$$

Al fine di trovare una base completa $\{u_n\}$ di soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon risulta utile introdurre l'omonima norma tra due elementi u_1, u_2 di questa base:

$$(u_1, u_2)_{KG} = i \int d^3x (\dot{u}_1 u_2^* - u_1 \dot{u}_2^*) \quad (4.4)$$

In quanto una buona base di modi di espansione risulta essere ortonormale secondo questo prodotto scalare; la relazione di ortonormalità si scrive:

$$(u_i, u_j)_{KG} = \delta_{ij} \quad (u_i, u_j^*)_{KG} = 0 \quad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij} \quad (4.5)$$

Una volta ottenuta una base completa di soluzioni è possibile espandere il campo utilizzando opportuni operatori di creazione a_k e distruzione a_k^\dagger soddisfacenti le regole di commutazione elementari $[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$ e $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}^3$:

$$\phi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k}} (u_k a_k + u_k^* a_k^\dagger) \quad (4.6)$$

La forma esplicita dell'espansione in modi è data da:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left(e^{-ikx} a_k + e^{ikx} a_k^\dagger \right) \quad (4.7)$$

dove $x = x^\mu$, $kx = k_\mu x^\mu$, $\omega_k = |\bar{k}|$ e gli operatori a_k e a_k^\dagger si scrivono:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \int d^3x e^{ikx} (\omega_k \phi(x) + i\dot{\phi}(x)) \quad (4.8)$$

$$a_k^\dagger = a_k^* \quad (4.9)$$

Inoltre si definisce lo stato di vuoto $|0\rangle$ del sistema come quello stato che viene annullato dall'operatore a_k^\dagger :

$$a_k^\dagger |0\rangle = 0 \quad (4.10)$$

La definizione della norma di Klein-Gordon e la scrittura del campo in termini di modi normali sarà utile nella trattazione dell'analogo problema nel caso di metrica generica.

La forma manifestamente covariante dell'azione rende la generica trasformazione di Lorentz Λ una simmetria del sistema. Nel caso specifico di un boost di Lorentz lungo l'asse x segue, dal teorema di Noether, [5], che la corrispondente corrente conservata vale:

$$j^\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\sigma\rho} (x^\sigma T^{\rho\mu} - x^\rho T^{\sigma\mu}) \quad (4.11)$$

con

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial^\mu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (4.12)$$

La cui prima componente, integrata su tutto lo spazio, è la carica conservata:

$$\begin{aligned} K_x &= \int d^3x' j^0 = \int d^3x' (-x' T^{00} + t T^{10}) = \int d^3x' (x' \mathcal{H} + t \dot{\phi} \partial_x' \phi) = \\ &= \int d^3x' \left[\frac{1}{2} x' (\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2) + t \dot{\phi} \partial_x' \phi \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

La quantità appena calcolata corrisponde al generatore della simmetria in analisi, ovvero, in rappresentazione esponenziale:

$$\Lambda = e^{i\alpha K_x} \quad (4.14)$$

Allora la variazione infinitesima $\frac{\delta \phi}{\delta \alpha}$ è esprimibile mediante il commutatore:

$$[K_x, \phi] = -i \frac{\delta \phi}{\delta \alpha} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} x \left([\dot{\phi}^2, \phi] + [(\nabla \phi)^2, \phi] \right) + t [\dot{\phi} \partial_x \phi, \phi] \right] \quad (4.15)$$

e, ricordando la relazione $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, segue: $[\dot{\phi}^2, \phi] = -2i\delta^3(x - x')$, $[(\nabla \phi)^2, \phi] = 0$ e $[\dot{\phi} \partial_x' \phi, \phi] = -i\delta^3(x - x') \partial_x' \phi$. Si ottiene

$$[K_x, \phi] = -i(x\dot{\phi} + t\partial_x \phi) = -i(x\partial_t + t\partial_x)\phi \quad (4.16)$$

Che riflette la natura di rotazione iperbolica di questo operatore. Per rendere più evidente questa affermazione è sufficiente notare che, effettuando il cambio di coordinate [6]

$$x = u \sinh(\theta) \quad t = u \cosh(\theta) \quad (4.17)$$

la cui trasformazione inversa

$$u = \sqrt{t^2 - x^2} \quad \theta = \operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{t}\right) \quad (4.18)$$

permette di riscrivere le derivate:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = -\sinh(\theta) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\cosh(\theta)}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \cosh(\theta) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\sinh(\theta)}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases} \quad (4.19)$$

per cui l'azione dell'operatore diventa:

$$[K_x, \phi] = -i \frac{\partial}{\partial \theta} \phi \quad (4.20)$$

che è uguale in forma all'operatore momento angolare generatore delle rotazioni nel piano $u - \theta$ ovvero rotazioni iperboliche nel piano $x-t$.

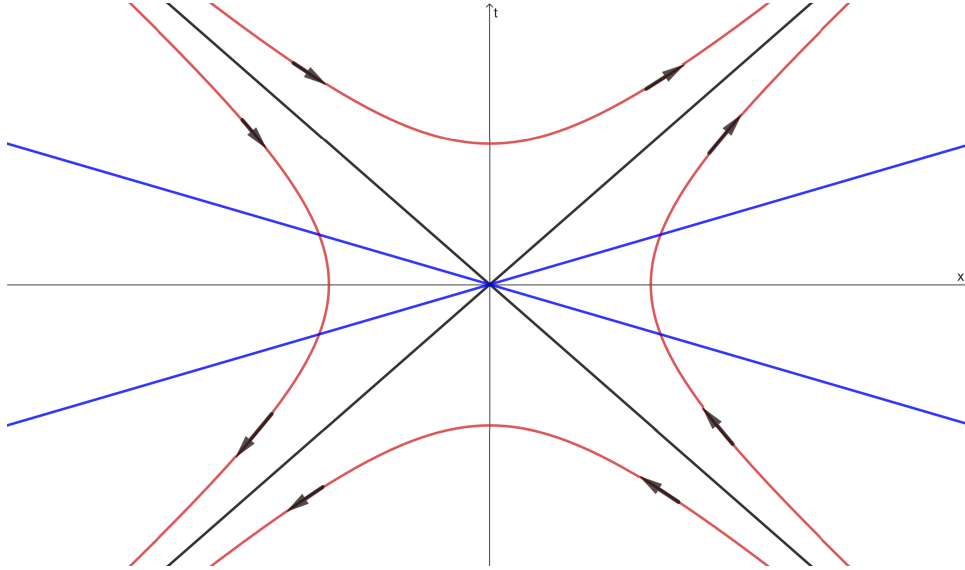


Figura 4.1: Immagine raffigurante il piano $x - t$ nello spazio di Minkowski. Le iperboli rosse rappresentano le traiettorie dell'operatore di boost K_x che evolve in avanti nel tempo i punti nel right Rindler wedge e porta indietro nel tempo quelli nel left Rindler wedge. Le rette blu rappresentano sezioni a t costante connesse dalle traiettorie dell'operatore.

4.2 Decomposizione di Rindler

La decomposizione di Rindler si basa sul fattorizzare lo spazio di Hilbert lungo una particolare direzione spaziale al fine di esprimere lo stato di vuoto $|0\rangle$ del sistema nella base di autostati dell'operatore di boost analizzato nella sezione precedente.

A tal fine si introducono le coordinate di Rindler $(\tau_{L/R}, \xi_{L/R})$, che corrispondono ad una rotazione iperbolica nel piano $x - t$ dove la rapidità, $w = a\tau_{L/R}$, ne rappresenta il "parametro angolare".

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a} e^{a\xi_R} \cosh(a\tau_R), & t = \frac{1}{a} e^{a\xi_R} \sinh(a\tau_R) & \text{per } x > 0 \\ x = -\frac{1}{a} e^{-a\xi_L} \cosh(a\tau_L), & t = \frac{1}{a} e^{-a\xi_L} \sinh(a\tau_L) & \text{per } x < 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

L'utilizzo di queste coordinate restituisce una decomposizione naturale per lo spazio di Hilbert che è identificabile come $\mathcal{H} = \mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_R$ con \mathcal{H}_L definito in $x < 0$ e \mathcal{H}_R in $x > 0$, detti rispettivamente left e right rindler wedge, in cui il generico stato all'istante $t=0$ diventa il prodotto tensore $|\phi\rangle = |\phi_L\rangle |\phi_R\rangle$. Risulta utile esprimere lo stato di vuoto nel seguente modo: sia $|\chi\rangle$ uno stato generico, assumendo senza perdere di generalità $E_0 = 0$ e osservando che per $n \geq 1$ si ha $E_n > E_0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-Ht} |\chi\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\sum_n c_n e^{-E_n t} |n\rangle \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} [c_0 |0\rangle + c_1 e^{-E_1 t} |1\rangle + \dots] = c_0 |0\rangle \quad (4.22)$$

Dunque il funzionale $\langle \phi|0\rangle = \langle \phi_L\phi_R|0\rangle$ è dunque esprimibile come

$$\langle \phi|0\rangle \propto \langle \phi| \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-Ht} |\chi\rangle = \langle \phi| \lim_{t_E \rightarrow -\infty} e^{iHt_E} |\chi\rangle = \int_{\hat{\phi}(t_E=-\infty)=|0\rangle}^{\hat{\phi}(t_E=0)=|\phi_L\phi_R\rangle} \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-I_E} \quad (4.23)$$

dove sono stati introdotti il tempo euclideo legato a quello ordinario dalla relazione $t = -it_E$, l'azione euclidea I_E che si ottiene da quella ordinaria mediante la stessa sostituzione e l'integrale di cammino che permette di esprimere l'ampiezza di probabilità dell'evoluzione dallo stato di vuoto $|0\rangle$ allo stato $|\phi\rangle$. Tramite una dimostrazione analoga a quella effettuata nella sezione precedente è possibile dimostrare che l'operatore K_x è il generatore delle rotazioni nel piano $x - t_E$ e dunque la generica rotazione di un angolo θ nel piano $x - t_E$ si scrive $R(\theta) = e^{-\theta K_x}$. Ecco dunque che invece di calcolare l'integrale di cammino seguendo il percorso temporale che va da $t_E = -\infty$ a $t_E = 0$ è possibile seguire la direzione angolare che porta $\Theta\phi_L(t, x, \bar{y}) = \phi_L(-t, -x, \bar{y})$ a ϕ_R ruotando di un angolo $\theta = \pi$ nel piano $x - t_E$ dove è stato introdotto l'operatore anti-unitario CPT, Θ , necessario per dare senso alla trasformazione da ϕ_R a ϕ_L . Esplicitamente:

$$\langle \phi_L\phi_R|0\rangle \propto \langle \phi_R|e^{-\pi K_x}\Theta|\phi_L\rangle \quad (4.24)$$

A questo punto è possibile utilizzare la relazione di completezza propria di una base ortonormale $\{|i\rangle\}$ di autostati di K_x con autovalore associato ω_i :

$$\begin{aligned} \langle \phi_L\phi_R|0\rangle &\propto \sum_i e^{-\pi\omega_i} \langle \phi_R|i\rangle \langle i|\Theta|\phi_L\rangle = \sum_i e^{-\pi\omega_i} \langle \phi_R|i\rangle \langle \phi_L|\Theta^\dagger|i\rangle = \sum_i e^{-\pi\omega_i} \langle \phi_R|i\rangle \langle \phi_L|i^*\rangle = \\ &= \sum_i e^{-\pi\omega_i} \langle \phi_L\phi_R|i^*i\rangle \end{aligned} \quad (4.25)$$

Dove è stata usata l'antiunitarietà dell'operatore CPT ed è stato definito $|i^*\rangle = \Theta^\dagger|i\rangle$. Confrontando dunque i due membri dell'equazione e, notando che dal momento in cui l'operatore di boost K_x genera traslazioni angolari nello spazio $x - t_E$, che si traducono in traslazioni lungo la coordinata temporale τ nelle coordinate di Rindler, è possibile identificare gli autostati di K_x nel piano di Minkowski euclideo con gli autostati dell'Hamiltoniano nelle coordinate di Rindler con autovalore associato E_i . Dunque è possibile identificare lo stato di vuoto $|0\rangle$ come segue:

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_i e^{-\pi E_i} |i^*\rangle |i\rangle \quad (4.26)$$

dove gli stati $|i^*\rangle$ sono da interpretare come appartenenti spazio \mathcal{H}_L mentre gli stati $|i\rangle$ appartengono a \mathcal{H}_R e la costante di proporzionalità è stata espressa per comodità come $\frac{1}{\sqrt{Z}}$ per ragioni che verranno rese più chiare una volta ottenuto il prossimo risultato. Si sottolinea inoltre il fatto che l'espansione dello stato di vuoto in autostati dell'Hamiltoniano nelle coordinate di Rindler rende evidente la sua natura di stato entangled tra gli autostati definiti nelle due componenti dello spazio di Hilbert. A questo punto, dato che un osservatore in queste coordinate ha accesso esclusivamente ad uno dei due sottospazi di Hilbert, è possibile esprimere lo stato del sistema da lui osservato calcolando la matrice densità ridotta di uno dei due sottospazi. Ad esempio, supponendo che l'osservatore si trovi nel sottospazio \mathcal{H}_R , egli non avrà accesso all'informazione sullo stato del sistema contenuta in \mathcal{H}_L e i risultati delle sue misure verranno riprodotti dalla traccia parziale della matrice densità totale, effettuata sul sottospazio \mathcal{H}_L :

$$\rho_R = \text{tr}_L |0\rangle \langle 0| = \frac{1}{Z} \sum_i e^{-2\pi E_i} |i\rangle \langle i| \quad (4.27)$$

Quanto ottenuto è la matrice densità di uno stato misto nell'ensemble canonico dove Z funge da funzione di partizione:

$$Z = Z_{\text{can}} = \text{tr}(e^{-\beta H}) = \sum_i e^{-\beta E_i} = \sum_i e^{-2\pi\omega_i} \quad (4.28)$$

ovvero

$$\beta = 2\pi = \frac{1}{T} \longrightarrow T = \frac{1}{2\pi} \quad (4.29)$$

Quanto ottenuto è coerente con la natura entangled dello stato di vuoto espresso come combinazione lineare di autostati dell'hamiltoniano di Rindler: tracciando via la componente in \mathcal{H}_L , infatti, l'osservatore in \mathcal{H}_R non è in grado di ricostruire tutta l'informazione circa lo stato di partenza, $|0\rangle$, e, dal suo punto di vista, questo appare come mistura statistica a temperatura T . Inoltre, dato che la matrice densità ρ_R è in forma diagonale nella base di autostati dell'hamiltoniana di Rindler, con autovalori $\frac{1}{Z}e^{-\beta E_i}$, è particolarmente semplice il calcolo dell'entropia di Von Neumann associata:

$$\begin{aligned} S_{\text{vN}}(\rho_R) &= -\text{tr}(\rho_R \ln \rho_R) = -\sum_i \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} \ln\left(\frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}\right) = \sum_i \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} [\ln Z + \beta E_i] = \\ &= \ln Z + \sum_i \frac{e^{-\beta E_i} \beta E_i}{Z} \end{aligned} \quad (4.30)$$

4.3 Campi scalari nelle coordinate di Rindler

In riferimento alle coordinate di Rindler, introdotte in equazione 4.21, si vuole ora studiare la procedura di quantizzazione di un campo scalare in queste coordinate al fine di ricavare un'espressione per la densità di stati misurata in questa configurazione.

I risultati che seguono verranno derivati solamente per lo spazio di Hilbert \mathcal{H}_R e riportati senza dimostrazione per lo spazio \mathcal{H}_L in quanto i passaggi sono analoghi nei due casi. Si esprimono i differenziali dx e dt :

$$\begin{aligned} dx &= e^{a\xi_R} (\cosh a\tau_R d\xi_R + \sinh a\tau_R d\tau_R) \\ dt &= e^{a\xi_R} (\sinh a\tau_R d\xi_R + \cosh a\tau_R d\tau_R) \end{aligned} \quad (4.31)$$

L'intervallo invariante diventa dunque - nella metrica "prevalentemente positiva":

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\bar{x}^2 - dt^2 = e^{2a\xi_R} (\cosh^2 a\tau_R d\xi_R^2 + \sinh^2 a\tau_R d\tau_R^2 + 2 \cosh a\tau_R \sinh a\tau_R d\xi_R d\tau_R) + \\ &- e^{2a\xi_R} (\sinh^2 a\tau_R d\xi_R^2 + \cosh^2 a\tau_R d\tau_R^2 + 2 \cosh a\tau_R \sinh a\tau_R d\xi_R d\tau_R) + dy^2 + dz^2 = \dots \\ &= e^{2a\xi_R} (d\xi_R^2 - d\tau_R^2) + dy^2 + dz^2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Nel caso dello spazio \mathcal{H}_L si ha invece:

$$ds^2 = e^{-2a\xi_L} (d\xi_L^2 - d\tau_L^2) + dy^2 + dz^2 \quad (4.33)$$

La metrica nei due casi risulta dunque essere diagonale:

$$\begin{cases} g_{\mu\nu,R} = \text{diag}(-e^{2a\xi_R}, e^{2\xi_R}, 1, 1) \\ g_{\mu\nu,L} = \text{diag}(-e^{-2a\xi_L}, e^{-2\xi_L}, 1, 1) \end{cases} \quad (4.34)$$

Il cui inverso a è dato da:

$$\begin{cases} g_R^{\mu\nu} = \text{diag}(-e^{-2a\xi_R}, e^{-2\xi_R}, 1, 1) \\ g_L^{\mu\nu} = \text{diag}(-e^{2a\xi_L}, e^{2\xi_L}, 1, 1) \end{cases} \quad (4.35)$$

L'azione in questo nuovo sistema di coordinate diventa dunque:

$$S_{R/L}[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g_{L/R}} (g_{R/L}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi) \quad (4.36)$$

Dove $\sqrt{-g}$ è la radice dell'opposto del determinante del tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Espandendo gli indici:

$$S_{R/L}[\phi] = \begin{cases} -\frac{1}{2} \int d^4x - (\partial_{\tau_R} \phi)^2 + (\partial_{\xi_R} \phi)^2 + e^{2a\xi_R} (\partial_y \phi)^2 + e^{2a\xi_R} (\partial_z \phi)^2 + e^{2a\xi_R} m^2 \phi^2 \\ -\frac{1}{2} \int d^4x - (\partial_{\tau_L} \phi)^2 + (\partial_{\xi_L} \phi)^2 + e^{-2a\xi_L} (\partial_y \phi)^2 + e^{-2a\xi_L} (\partial_z \phi)^2 + e^{-2a\xi_L} m^2 \phi^2 \end{cases} \quad (4.37)$$

A questo punto le nuove equazioni di Eulero-Lagrange restituiscono gli analoghi dell'equazione di Klein-Gordon nella nuova metrica che saranno diverse nei due casi \mathcal{H}_R e \mathcal{H}_L e anche in questo caso dall'azione è possibile risalire alla densità hamiltoniana:

$$\begin{cases} (g_R^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - m^2) \phi_R = (-e^{-2a\xi_R} \partial_{\tau_R}^2 + e^{-2a\xi_R} \partial_{\xi_R}^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - m^2) \phi_R = 0 \\ (g_L^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - m^2) \phi_L = (-e^{2a\xi_L} \partial_{\tau_L}^2 + e^{2a\xi_L} \partial_{\xi_L}^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - m^2) \phi_L = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

A questo punto si espandono le soluzioni delle equazioni di Klein-Gordon in modi in τ , y e z :

$$f_{R/L, \omega, \bar{k}} = e^{-i\omega\tau_{R/L}} e^{i\bar{k}\bar{y}} \psi_{R/L, \omega, \bar{k}} \quad (4.39)$$

Dove sono stati introdotti i vettori $\bar{y} = (y, z)$ e $\bar{k} = (k_y, k_z)$. Inserendo le $f_{R/L, \omega, \bar{k}}$ nelle equazioni 4.38, si ottengono le equazioni differenziali che regolano l'andamento di $\psi_{R/L, \omega, \bar{k}}$:

$$\begin{cases} \left[-\partial_{\xi_R}^2 + (m^2 + k^2) e^{2a\xi_R} - \omega^2 \right] \psi_{R, \omega, \bar{k}} = 0 \\ \left[-\partial_{\xi_L}^2 + (m^2 + k^2) e^{-2a\xi_L} - \omega^2 \right] \psi_{L, \omega, \bar{k}} = 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

In modo analogo all'espansione di un campo scalare in termini di operatori di creazione e distruzione è possibile anche in questo caso riscrivere il campo ϕ definendo in ognuno dei due sottospazi degli opportuni operatori di creazione, $a_{R/L, \omega, \bar{k}}$ e distruzione $a_{R/L, \omega, \bar{k}}^\dagger$, soddisfacenti le regole di commutazione

$$[a_{L/R, \omega, k}, a_{L/R, \omega', k'}] = [a_{L/R, \omega, k}^\dagger, a_{L/R, \omega', k'}^\dagger] = 0 \quad [a_{L, \omega, k}, a_{L, \omega', k'}^\dagger] = [a_{R, \omega, k}, a_{R, \omega', k'}^\dagger] = \delta_{\omega, \omega'} \delta_{k, k'}^2 \quad (4.41)$$

che permettono dunque di scrivere:

$$\phi = \sum_{\omega, k} \left(f_{R, \omega, k} a_{R, \omega, k} + f_{L, \omega, k} a_{L, \omega, k} + f_{R, \omega, k}^* a_{R, \omega, k}^\dagger + f_{L, \omega, k}^* a_{L, \omega, k}^\dagger \right) \quad (4.42)$$

La forma esplicita dei modi di espansione e dei nuovi operatori ad essi legati richiede l'utilizzo delle funzioni di Bessel modificate e un notevole quantitativo di conti macchinosi. Per ottenere lo stesso risultato finale - ovverosia il nuovo stato di vuoto in questo sistema di coordinate - è sufficiente trattare il problema nel caso (1+1) dimensionale nel caso di campo scalare privo di massa, che permette di sfruttare la simmetria conforme dell'azione. metrica. Esplicitamente, ad esempio nel caso del right Rindler wedge:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1) &\longrightarrow g_R^{\mu\nu} = e^{-2a\xi_R} \text{diag}(-1, 1) \\ \sqrt{-g} &= \sqrt{\det g_{\mu\nu}} = e^{2a\xi_R} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Dunque il fattore $\sqrt{-g} g_R^{\mu\nu}$ diventa semplicemente $g^{\mu\nu}$ e l'azione nelle coordinate di Rindler diventa uguale in forma a quella nelle coordinate di Minkowski:

$$S[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^2x - (\partial_t \phi)^2 + (\partial_x \phi)^2 \longrightarrow S[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^2x - (\partial_\tau \phi)^2 + (\partial_\xi \phi)^2 \quad (4.44)$$

e, di conseguenza, sarà possibile espandere il campo esattamente allo stesso modo nei due sistemi di coordinate. A tal fine risulta utile introdurre un nuovo sistema di coordinate, lo stesso usato in 3.9:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= t - x & \tilde{v} &= t + x \\ u &= \tau - \xi & v &= \tau + \xi \end{aligned} \quad (4.45)$$

Dove la tilde indica che lo spazio ambiente è quello di Rindler. L'espansione in modi nei due casi diventa dunque:

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \int_0^{+\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi 2\Omega}} (b_\Omega e^{-i\Omega\tilde{u}} + b_\Omega^\dagger e^{i\Omega\tilde{u}} + b_{-\Omega} e^{-i\Omega\tilde{v}} + b_{-\Omega}^\dagger e^{i\Omega\tilde{v}}) \\ \phi(u, v) &= \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi 2\omega}} (a_\omega e^{-i\omega u} + a_\omega^\dagger e^{i\omega u} + a_{-\omega} e^{-i\omega v} + a_{-\omega}^\dagger e^{i\omega v}) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Ottenute a partire dall'espansione 4.7 in cui è stato spezzato l'integrale in $k \in (-\infty, 0]$ e $k \in [0, +\infty)$ ed è stata effettuata la sostituzione $k \rightarrow -k$ e l'identificazione $0 < \omega = |k|$; si sottolinea come gli operatori $a_\omega, a_\omega^\dagger, b_\Omega$ e b_Ω^\dagger rispettino le regole di commutazioni canoniche tra operatori nelle rispettive regioni di frequenze. A questo punto, senza perdere di generalità, è possibile identificare tra di loro i termini corrispondenti a frequenze di segno uguale nei due modi di espansione:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi 2\Omega}} (b_\Omega e^{-i\Omega\tilde{u}} + b_\Omega^\dagger e^{i\Omega\tilde{u}}) &= \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi 2\omega}} (a_\omega e^{-i\omega u} + a_\omega^\dagger e^{i\omega u}) \\ \int_0^{+\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi 2\omega}} (b_{-\Omega} e^{-i\Omega\tilde{v}} + b_{-\Omega}^\dagger e^{i\Omega\tilde{v}}) &= \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi 2\omega}} (a_{-\omega} e^{-i\omega v} + a_{-\omega}^\dagger e^{i\omega v}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

A questo punto, al fine di isolare i nuovi operatori b_Ω e b_Ω^\dagger è sufficiente applicare una trasformazione di Fourier ad entrambi i membri delle equazioni precedenti, ad esempio nel primo caso si avrà, a primo membro:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{u}}{\sqrt{2\pi}} e^{i\Omega\tilde{u}} \int_0^{+\infty} \frac{d\Omega'}{\sqrt{2\pi 2\Omega}} (b_{\Omega'} e^{-i\Omega'\tilde{u}} + b_{\Omega'}^\dagger e^{i\Omega'\tilde{u}}) &= \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{u}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{d\Omega'}{\sqrt{2\pi 2\Omega}} (b_{\Omega'} e^{-i(\Omega'-\Omega)\tilde{u}} + b_{\Omega'}^\dagger e^{i(\Omega'+\Omega)\tilde{u}}) &= \\ = \int_0^{+\infty} \frac{d\Omega'}{\sqrt{2\pi 2\Omega}} (b_{\Omega'} \delta(\Omega - \Omega') + b_{\Omega'}^\dagger \delta(\Omega + \Omega')) &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} b_\Omega \end{aligned} \quad (4.48)$$

In quanto $\Omega > 0$. Per quanto riguarda il secondo membro invece:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} b_\Omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{u}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi 2\omega}} (a_\omega e^{-i\omega u + i\Omega\tilde{u}} + a_\omega^\dagger e^{i\omega u + i\Omega\tilde{u}}) = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} [F(\omega, \Omega) a_\omega + F(-\omega, \Omega) a_\omega^\dagger] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Dove è stata definita la funzione

$$F(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{u}}{2\pi} e^{-i\omega u + i\Omega\tilde{u}} \quad (4.50)$$

A questo punto, dall'equazione 4.49, si ottiene:

$$b_\Omega = \int_0^{+\infty} d\omega \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} [F(\omega, \Omega) a_\omega + F(-\omega, \Omega) a_\omega^\dagger] \quad (4.51)$$

Che è esattamente nella forma prevista dalle trasformazioni di Bogoliubov 7.12, trattate in appendice:

$$b_\Omega = \int_0^{+\infty} d\omega (\alpha_{\omega\Omega} a_\omega + \beta_{\omega\Omega} a_\omega^\dagger) \quad (4.52)$$

Dove i rispettivi coefficienti di Bogoliubov sono identificati da:

$$\alpha_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} F(\omega, \Omega) \quad \beta_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} F(-\omega, \Omega) \quad (4.53)$$

Utilizzando tecniche di integrazione complessa [7]- in particolare deformando il cammino di integrazione - è possibile dimostrare una proprietà per le funzioni $F(\omega, \Omega)$ che tornerà utile in seguito:

$$F(\omega, \Omega) = F(-\omega, \Omega) e^{\frac{\pi\Omega}{a}} \quad (4.54)$$

A questo punto, ricordando l'espressione 7.13 per il valor medio dell'operatore $N_\Omega = b_\Omega^\dagger b_\Omega$ e indicando con $|0\rangle$ lo stato di vuoto nello spazio di Minkowski:

$$\langle 0|N_\Omega|0\rangle = \int_0^{+\infty} d\omega |\beta_{\omega\Omega}|^2 = \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\Omega}{\omega} |F(-\omega, \Omega)|^2 \quad (4.55)$$

Al fine di semplificare il calcolo è utile utilizzare l'ortonormalità dei modi di Rindler rispetto alla norma di Klein-Gordon 4.5 unita alla proprietà sopra riportata per le $F(\omega, \Omega)$, ottenendo:

$$\begin{aligned} \delta(\Omega - \Omega') &= \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\sqrt{\Omega\Omega'}}{\omega} [F(\omega, \Omega)F^*(\omega, \Omega') - F(-\omega, \Omega)F^*(-\omega, \Omega')] = \\ &= \left[e^{\frac{\pi(\Omega+\Omega')}{a}} - 1 \right] \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\sqrt{\Omega\Omega'}}{\omega} |F(-\omega, \Omega)|^2 \end{aligned} \quad (4.56)$$

che, ponendo $\Omega = \Omega'$, permette di ricavare la densità media di particelle osservate:

$$\langle 0|N_\Omega|0\rangle = \left[e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1 \right]^{-1} \delta(0) = n_\Omega \delta(0) \longrightarrow n_\Omega = \left[e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1 \right]^{-1} \quad (4.57)$$

A questo punto è sufficiente identificare il parametro di espansione Ω con l'energia della particella e identificare la densità di particelle con una distribuzione di Bose-Einstein:

$$n_E = \left[e^{\frac{E}{T}} - 1 \right]^{-1} = \left[e^{\frac{2\pi E}{a}} - 1 \right]^{-1} \longrightarrow T = \frac{a}{2\pi} \quad (4.58)$$

In conclusione, dunque, per un osservatore sottoposto ad un campo di accelerazione costante, lo stato di vuoto che avrebbe misurato essendo a riposo - o comunque in un sistema di riferimento inerziale rispetto allo spaziotempo di Minkowski - appare ora come bagno termico di particelle, in questo caso bosoni data la struttura di campo scalare utilizzata, a temperatura inversamente proporzionale all'entità dell'accelerazione.

4.3.1 Temperatura di Hawking

L'obiettivo di questa sezione è dimostrare che, in prossimità dell'orizzonte degli eventi di un buco nero, è possibile effettuare un cambio di coordinate tale per cui la metrica di Schwarzschild diventi analoga alla metrica di Rindler introdotta nella sezione 4.62 e, da questa analogia, ricavare la temperatura del buco nero come temperatura del bagno termico rilevato da un osservatore all'infinito.

Si ricorda la metrica di Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (4.59)$$

di cui si vuole studiare l'andamento per $r \rightarrow r_s$. Per prima cosa si definisce una nuova coordinata $x = r - r_s$ così da poter studiare più agevolmente il limite $x \rightarrow 0$; si sottolinea che questo è un limite destro, nel senso che ci si avvicina all'orizzonte dall'infinito, senza mai effettivamente attraversarlo. A questo punto la metrica diventa

$$ds^2 = - \frac{x}{x + r_s} dt^2 + \frac{x + r_s}{x} dx^2 + (x + r_s)^2 d\Omega^2 \stackrel{x \rightarrow 0}{\approx} - \frac{x}{r_s} dt^2 + \frac{r_s}{x} dx^2 + r_s^2 d\Omega^2 \quad (4.60)$$

A questo punto è possibile effettuare una seconda trasformazione:

$$x = \frac{1}{4r_s^2 a^2} e^{2a\xi} \quad t = \tau \quad (4.61)$$

ottenendo la seguente espressione per la metrica:

$$ds^2 \approx e^{2a\xi} \left(- \frac{1}{4r_s^2 a^2} d\tau^2 + d\xi^2 \right) + r_s^2 d\Omega^2 \quad (4.62)$$

e a questo punto è possibile identificare questa nuova espressione con quella ottenuta in equazione 4.32 imponendo che il coefficiente $\frac{1}{4r_s^2 a^2}$ sia uguale all'unità, ovvero:

$$a = \frac{1}{2r_s} \quad (4.63)$$

Ciò significa che le coordinate di Rindler, che descrivono il moto di un corpo in un campo di accelerazione costante, diventino un framework ottimale per studiare la dinamica near-horizon, alla quale corrisponde dunque l'accelerazione appena trovata. Infine, sostituendo quanto appena trovato nell'equazione 4.58, si ottiene il risultato finale per la temperatura del buco nero:

$$T_{\text{BH}} = \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{8\pi GM} \quad (4.64)$$

che, ripristinando tutte le costanti fondamentali, diventa:

$$T_{\text{BH}} = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM k_b} \quad (4.65)$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto, sempre in approssimazione di prossimità all'orizzonte, riconducendosi, a partire dall'equazione 4.62, ad un sistema di coordinate polari nel piano $x - t_E$ dove t_E è l'estensione a tempo immaginario e richiedere la periodicità della "coordinata angolare". Ponendo infatti

$$\omega = \frac{1}{a} \ln(a\xi) \quad \tau = -it_E \quad (4.66)$$

si ottiene

$$ds^2 = \frac{1}{4r_s^2} dt_E^2 + r_s^2 d\omega^2 + d\Omega^2 \quad (4.67)$$

dove si riconoscono nei primi due termini la metrica di un sistema di coordinate polari in cui ω funge da coordinata radiale e $\frac{t_E}{2r_s}$ funge da coordinata angolare. Imponendo la classica condizione di periodicità della coordinata angolare $\frac{t_E}{2r_s} = \frac{t_E}{2r_s} + 2\pi$ che implica $t_E = t_E + 4\pi r_s$ si può notare che ci si trova nello stesso contesto nel quale è stata sviluppata la decomposizione di Rindler nella sezione 4.2. Infatti l'analogia formale tra i due casi è formulabile osservando che i left e right Rindler wedges corrispondono in questo caso a suddividere lo spazio di Hilbert in $r < r_s$ e $r > r_s$ e la rotazione di $\theta = \pi$, nel caso della decomposizione di Rindler, che permetteva di muoversi tra un wedge e l'altro diventa ora una rotazione di $\tau = 2\pi r_s$. Anche in questo caso dunque il fattore 2 emerge grazie all'operazione di traccia parziale, qui implicitamente effettuata sulla regione $r < r_s$, che permette di accedere all'informazione della sola regione $r > r_s$, come da obiettivo. Questa analogia permette di identificare il periodo $4\pi r_s$ con il fattore di Boltzmann $\beta = \frac{1}{T}$ e di conseguenza la temperatura del sistema risulta essere $T_{\text{BH}} = \frac{1}{8\pi GM}$ che, a meno di costanti fondamentali, è lo stesso risultato ottenuto mediante quantizzazione dei campi nelle coordinate di Rindler.

Il fatto che questa sia la temperatura misurata dall'osservatore all'infinito deriva dal fatto che l'osservatore in caduta libera è in grado di accedere a tutto lo spazio di Hilbert, e dunque a tutta l'informazione in esso contenuta, in quanto la singolarità della metrica in $r = r_s$ è solo apparente. Per quest'ultimo osservatore dunque non è necessario effettuare l'operazione di traccia parziale sugli stati interni all'orizzonte rendendo possibile rilevare gli stati come stati puri al contrario di ciò che accade per l'osservatore all'infinito.

La temperatura di Hawking è indice della natura termodinamica del buco nero semiclassico. La prima legge della termodinamica permette di ricavare un'espressione per l'entropia:

$$dS = \frac{dQ}{T} = 8\pi GM dQ \quad (4.68)$$

è sufficiente notare che l'incremento energetico dQ , non essendoci altre quantità in gioco, è identificabile con l'aumento della massa del buco nero, ovvero $dQ = dM$. La precedente espressione diventa dunque

$$dS = 8\pi GM dM = d(4\pi GM^2) \quad (4.69)$$

che permette dunque di identificare

$$S = 4\pi GM^2 \quad (4.70)$$

che, ricordando la formula per il raggio di Schwarzschild $r_s = 2GM$, diventa

$$S = \frac{\pi r_s^2}{G} = \frac{A}{4G} \quad (4.71)$$

dove con A si intende l'area della sfera di raggio $r = r_s$.

Capitolo 5

Curva di Page

In questa sezione si cercherà di ottenere una forma funzionale per la dipendenza temporale dell'entropia di uno dei due sottosistemi - buco nero e radiazione uscente - durante il processo di evaporazione. A tal proposito risulta utile dividere lo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_{BH}$ per poter analizzare i due sistemi - radiazione e buco nero - separatamente. Si sottolinea inoltre che, nonostante l'ipotesi di unitarietà del processo implichi ad ogni istante $S_R = S_{BH}$, la derivazione verrà effettuata utilizzando risultati per le entropie dei due sottosistemi ottenuti in modo semiclassico, ovvero ignorando correlazioni quantistiche presenti e violando l'identità di cui sopra. La trattazione viene suddivisa in due parti: la prima, in cui viene presentato il teorema di Page, permetterà di giustificare l'utilizzo di risultati semiclassici come buone approssimazioni di ciò che ci si aspetterebbe prendendo in considerazione anche correlazioni quantistiche. La seconda, invece, sfrutterà i suddetti risultati per descrivere le principali proprietà qualitative a cui deve sottostare la curva di Page, suddividendone l'analisi tra i primi istanti di evaporazione e la quasi conclusione del processo.

5.1 Teorema di Page

Il teorema di Page dimostra che uno stato puro preso casualmente in uno spazio di Hilbert composto \mathcal{H}_{AB} sarà quasi massimamente entangled se $\frac{|A|}{|B|} \ll 1$ dove con $|\cdot|$ si intende la dimensione del sottospazio e con stato massimamente entangled si intende uno stato tale per cui la matrice densità ridotta di uno dei due sottosistemi sia un multiplo dell'identità; lo stato massimamente entangled esprime inoltre uno stato che, se misurato, non restituisce alcuna informazione sul sistema in quanto la sua entropia di von Neumann è massima. In particolare la nozione di stato casuale è da intendersi come l'applicazione di un operatore unitario U - preso dalla misura di Haar del gruppo - ad un generico stato di prova $|\chi_0\rangle$ e verrà dunque indicato come $|\chi(U)\rangle$. Prima di enunciare e dimostrare il teorema è necessario introdurre alcuni strumenti matematici che definiscono la nozione di distanza tra una generica matrice densità e quella definente uno stato massimamente entangled: si definiscono innanzitutto le norme operatoriali [8]

$$\|M\|_1 = \text{tr}(\sqrt{M^\dagger M}) \quad (\text{norma } L_1) \quad \|M\|_2 = \sqrt{\text{tr}(M^\dagger M)} \quad (\text{norma } L_2) \quad (5.1)$$

soddisfacenti la catena di disuguaglianze

$$\|M\|_2 \leq \|M\|_1 \leq \sqrt{N} \|M\|_2 \quad (5.2)$$

dove la prima segue dalle proprietà della traccia sotto una potenza del suo argomento e la seconda si ottiene da un teorema di algebra operatoriale tale per cui $\|AB\|_1 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$ ponendo $B = id$. La norma L_1 sarà ciò che permetterà di definire in modo univoco la distanza tra due operatori. A questo punto è possibile enunciare una delle due versioni del teorema di page, che pone un limite superiore alla distanza tra una generica matrice densità ridotta, ad esempio di uno stato nello spazio \mathcal{H}_A , e

quella di uno stato massimamente entangled:

$$\int dU \|\rho_A(U) - \frac{id}{|A|}\|_1 \leq \sqrt{\frac{|A|^2 - 1}{|A||B| + 1}} \quad (5.3)$$

dove si vede che per $|B| \rightarrow \infty$ la distanza tra uno stato qualsiasi e uno massimamente entangled tende a zero. Il teorema si dimostra a partire dalla disuguaglianza di Jensen riguardante l'applicazione di una funzione convessa ψ alla misura di una funzione f . In particolare:

$$\psi\left(\int f d\mu\right) \leq \int (\psi \circ f) d\mu \quad (5.4)$$

In questo caso si pone $\psi(f) = f^2$ e $f = \|\rho_A(U) - \frac{id}{|A|}\|_1$, utilizzando poi la seconda disuguaglianza relativa alle norme definite sopra si ottiene:

$$\left(\int dU \|\rho_A(U) - \frac{id}{|A|}\|_1\right)^2 \leq \int dU \left(\|\rho_A(U) - \frac{id}{|A|}\|_1\right)^2 \leq |A| \int dU \left(\|\rho_A(U) - \frac{id}{|A|}\|_2\right)^2 \quad (5.5)$$

A questo punto l'integrale è calcolabile utilizzando la definizione di norma L_2 sfruttando l'hermitianità di ρ_A :

$$|A| \int dU \left(\|\rho_A(U) - \frac{id}{|A|}\|_2\right)^2 = \int dU \text{tr} \left(\rho_A(U) - \frac{id}{|A|}\right)^2 = |A| \int dU \left(\text{tr} \rho_A^2 - \frac{1}{|A|}\right) \quad (5.6)$$

e l'integrale sulla traccia di ρ_A^2 è calcolabile esplicitando quest'ultima in funzione delle componenti che compongono l'operatore U e utilizzando la formula chiusa per l'integrazione di polinomi di operatori nella misura di Haar [9]:

$$\int dU U_{ij} U_{kl} U_{mn}^\dagger U_{op}^\dagger = \frac{1}{N^2 - 1} (\delta_{in} \delta_{kp} \delta_{jm} \delta_{lo} + \delta_{ip} \delta_{kn} \delta_{jo} \delta_{lm}) - \frac{1}{N(N^2 - 1)} (\delta_{in} \delta_{kp} \delta_{jo} \delta_{lm} + \delta_{ip} \delta_{kn} \delta_{jm} \delta_{lo}) \quad (5.7)$$

ottenendo così il risultato del teorema. Si sottolinea tuttavia che questa sia una versione alternativa del teorema di Page e non quella da lui formulata nell'articolo originale [10] che si proponeva invece di dimostrare che l'entropia media di un sottosistema di dimensione $|A| \ll |B|$ fosse approssimata da

$$S_A \approx \ln |A| - \frac{|A|}{2|B|} \quad (5.8)$$

e la cui dimostrazione si basa sul definire una densità di probabilità per gli autovalori p_i della matrice densità del sottosistema in esame. In particolare Page definì la densità di probabilità $Q(q_1, q_2, \dots, q_m)$ di variabili $q_i = r p_i$, corrispondenti agli autovalori della matrice densità riscalati di un fattore r, come segue:

$$Q(q_1, \dots, q_m) dq_1 \dots dq_m = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (q_i - q_j)^2 \prod_{i=1}^m (e^{-q_i} q_i^{n-m} dq_i) \quad (5.9)$$

dalla quale è possibile ottenere una funzione più semplice da trattare prendendone il logaritmo:

$$-\ln Q(q_1, \dots, q_m) = - \sum_{1 \leq i < j \leq m} \ln(q_i - q_j)^2 + \sum_{i=1}^m [q_i - (n - m) \ln q_i] \quad (5.10)$$

A questo punto Page procede a minimizzare questa funzione al fine di trovare gli autovalori di ρ_A che ne massimizzano la densità di probabilità per poi calcolare l'entropia come $S_A = - \sum_{i=1}^m p_i \ln p_i$. Il vantaggio di questa versione del teorema è che permette di fornire un limite superiore all'entropia di un sistema, che verrà indicata con S^{\max} , che funge da prima approssimazione al valore vero, in quanto le correzioni successive scalano come potenze di $\frac{|A|}{|B|}$, come si vede dall'equazione 5.8.

5.2 Derivazione semiclassica delle caratteristiche principali della curva di Page

Si è dunque in grado di realizzare un modello che permetta di ricavare una forma funzionale per la curva di Page, rappresentata in figura 5.1 e compatibile con le condizioni imposte in 3.1:

- all'inizio del processo di evaporazione, $t \approx 0$ l'entropia della radiazione di Hawking ha un limite superiore identificabile con il risultato fornito dall'approssimazione semiclassica [11], approssimazione giustificata dal teorema di Page: in questa fase, infatti, $|BH| \gg |R|$. Il risultato semiclassico è la seguente formula per l'entropia della radiazione:

$$S_R^{\max}(t) \propto M^2 \left[1 - \left(1 - \frac{t}{t_{\text{evap}}} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \approx M^2 \frac{t}{t_{\text{evap}}} \quad (5.11)$$

dove è stato effettuato uno sviluppo di Taylor attorno a $t = 0$ troncato al primo ordine. Noto inoltre che l'andamento temporale della massa del buco nero è descritto dall'equazione differenziale

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\alpha}{M^2} \quad (5.12)$$

dove M_0 è la massa del buco nero all'istante iniziale e α è, per definizione, pari a $\alpha = -\frac{dM}{dt} M^2$. Integrando l'equazione differenziale è possibile ottenere la forma esplicita per $M(t)$:

$$M(t) = (M_0^3 - 3\alpha t)^{\frac{1}{3}} \quad (5.13)$$

che a sua volta permette di ricavare il tempo di evaporazione t_{evap} come l'istante tale per cui $M(t_{\text{evap}}) = 0$, ovvero $t_{\text{evap}} = \frac{1}{3\alpha} M_0^3 \propto M_0^3$, risultato che permette di ottenere la relazione di proporzionalità $S_R^{\max}(t) \approx \frac{t}{M}$. Ricordando poi che la temperatura T del buco nero data dall'equazione 4.65 scala come l'inverso della massa che, durante i primi istanti del processo di evaporazione, è approssimabile come la massa all'istante iniziale M_0 , è possibile scrivere

$$S_R^{\max}(t) \approx tT \quad (5.14)$$

La crescita dell'entropia prosegue dunque fino al momento in cui $S_R^{\max} \approx S_{BH}^{\max}$, istante che viene definito "tempo di Page";

- Molto dopo il tempo di Page, verso la fine del processo di evaporazione $t \rightarrow t_{\text{evap}}$, è possibile applicare il teorema di Page nella direzione opposta nel senso che in questo caso vale $|BH| \ll |R|$. Analogamente al caso precedente è possibile identificare $S_{BH} \approx S_{BH}^{\max}$ e, mediante l'approssimazione semiclassica, quest'ultima risulta essere l'entropia di Bekenstein-Hawking:

$$S_{BH}^{\max} \approx M^2 \left(1 - \frac{t}{t_{\text{evap}}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.15)$$

Il comportamento della curva di Page ottenuta è mostrato in figura 5.1 [11], in cui, tramite approcci numerici, analizza la dipendenza di quanto detto sopra da fenomeni quantistici - come ad esempio l'entanglement - e dal tipo di particelle prodotte.

Come già anticipato in precedenza, la trattazione della curva di Page è stata effettuata solamente mediante argomenti semiclassici che non prendono in considerazione correlazioni quantistiche tra i due sottosistemi, approssimazione consistente e giustificata dal teorema di Page in quanto, all'inizio dell'evaporazione, si ha $|BH| \gg |R|$ mentre, per tempi molto lunghi, vale $|R| \gg |BH|$. Inoltre si evidenzia come l'entropia utilizzata per i due sottosistemi buco nero e radiazione non provenga da una trattazione statistica dei singoli microstati, descrivibili soltanto da una teoria di gravità quantistica. L'assunzione di unitarietà dell'evoluzione del sistema ha tuttavia delle conseguenze non banali. Essendo la radiazione emessa nel processo di evaporazione una miscela statistica, così come dimostrato

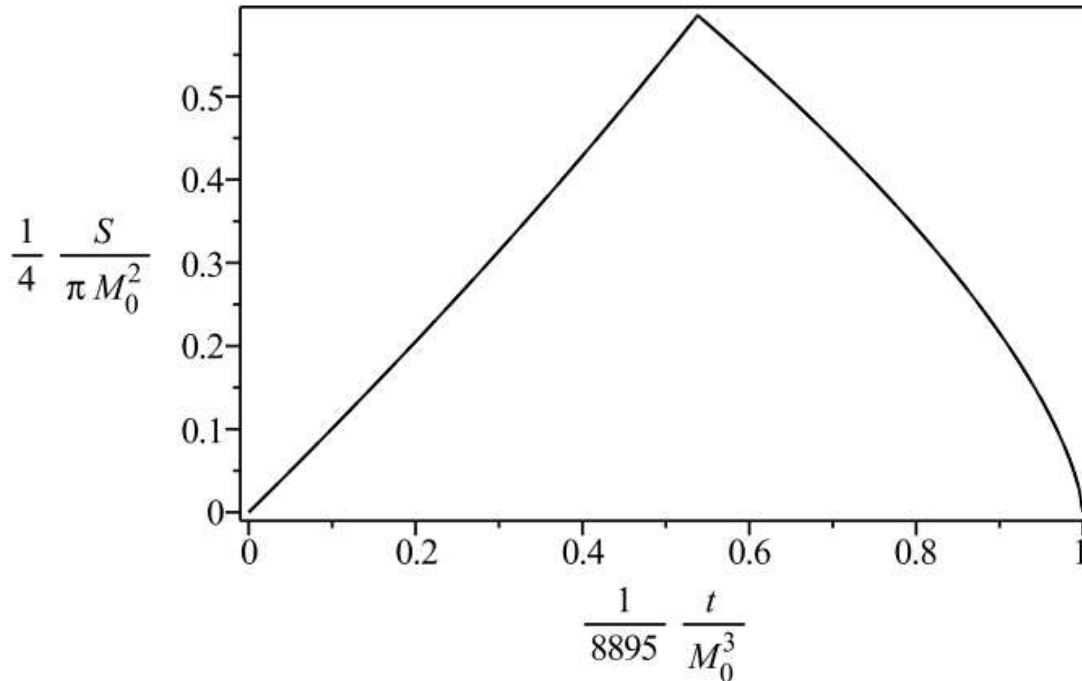


Figura 5.1: Immagine raffigurante l'andamento qualitativo della curva di Page

nella sezione 4.3, il fotone uscente sarà anch'esso in uno stato misto e dunque, per ricostruirne l'intera informazione, dovrà essere purificato da un altro fotone emesso successivamente. Si può dimostrare [12] [13] che il processo di purificazione della radiazione di Hawking, che si traduce nell'unitarietà dell'evoluzione del sistema, viola la proprietà di subadditività forte dell'entropia di Von Neumann. Infatti, siano A un fotone emesso all'inizio del processo di evaporazione, contenente poca informazione in quanto si trova nello stato massimamente entangled come da prima formulazione del teorema di Page - in questo caso $|BH| \gg |R|$ -, B il fotone emesso successivamente che purifica A e C il partner di B nella produzione di coppia che è caduto all'interno dell'orizzonte. In questo caso la subadditività forte implica

$$S_{AB} + S_{BC} \geq S_B + S_{ABC} \quad (5.16)$$

e, in quanto B purifica A, deve valere $S_{AB} < S_A$. Inoltre la purezza dello stato BC - sono uno l'antiparticella dell'altro - si traduce in $S_{ABC} = S_A$. L'equazione 5.16, dunque, si traduce in

$$S_A \geq S_{AB} \geq S_B + S_A \longrightarrow S_A \geq S_B + S_A \quad (5.17)$$

condizione assurda in quanto B rappresenta esso stesso uno stato misto dotato di entropia di von Neumann non nulla. La violazione della subadditività è indice che qualcuna delle ipotesi utilizzate nella formulazione del processo di evaporazione non è consistente e deve essere modificata.

Il processo di evaporazione del buco nero porta con se anche altre problematiche. Se dovesse durare fino all'effettiva scomparsa del buco nero significherebbe che ci sarebbe un istante in cui quest'ultimo raggiunge dimensioni comparabili alle scale di Planck al di sotto della quale l'unione di teorie quantistiche e relatività generale diventa inconsistente nella descrizione di una teoria di campo quantistica. Sono state proposte diverse soluzioni a questo problema, che utilizzano modelli diversi per l'azione del campo gravitazionale opportunamente accoppiati a campi quantistici, e alcune studiate mediante simulazioni numeriche [14] come la possibilità che la fine del processo di evaporazione non risulti nella effettiva scomparsa del buco nero ma nella formazione di un corpo, detto remnant, privo di orizzonte degli eventi che, nel caso in cui dovesse rivelarsi essere l'ipotesi corretta, potrebbe dare contributi importanti allo studio della materia oscura. Altri approcci alla trattazione di buchi neri al di fuori del regime semiclassico sono lasciati a future investigazioni.

Capitolo 6

Conclusioni

Riassumendo, sono state analizzate le proprietà di continuità lungo l'orizzonte degli eventi della metrica di Schwarzschild e il suo prolungamento analitico che ha come conseguenza il fatto che l'osservatore in caduta libera sia in grado di accedere all'intero spazio di Hilbert e all'informazione in esso contenuta. Dopodiché sono stati studiati alcuni effetti causati dall'introduzione della curvatura dello spazio-tempo in una teoria quantistica di campo. L'effetto Unruh, a partire dalla decomposizione dello spazio di Hilbert per mezzo delle coordinate di Rindler, esprime le relazioni che sussistono tra gli stati di vuoto di due sistemi di riferimento non inerziali. Manipolando l'espansione "classica" di un campo quantistico in modi normali e operatori ad essi associati è possibile separare i modi a frequenze positive e negative. Il passaggio ad un sistema di riferimento accelerato porta alla necessità di dover riscrivere i modi di espansione associati al campo e, di conseguenza, ridefinire gli operatori ad essi associati. Segue che il valore di aspettazione del numero di stati in una delle due regioni di frequenze, eseguito rispetto all'ordinario stato di vuoto misurato nello spazio di Minkowski, restituisca risultati che richiamano ad una statistica di Bose-Einstein a temperatura $T = \frac{a}{2\pi}$.

I risultati sopra elencati permettono di studiare le conseguenze della struttura della metrica di Schwarzschild e degli effetti gravitazionali in prossimità dell'orizzonte. Mediante un opportuno cambio di coordinate è stato possibile ricondursi al caso di studio dell'effetto Unruh, associando all'accelerazione il valore $a = \frac{1}{2r_s}$ e, dunque, una temperatura $T_{\text{BH}} = \frac{1}{8\pi GM}$. È stata inoltre presentata una derivazione alternativa che si basa sul portare la metrica di Schwarzschild near horizon in un sistema di coordinate polari in cui è stato identificato il periodo della coordinata angolare come $\beta = 4\pi r_s$, ripercorrendo formalmente i passaggi della sezione 4.2, e dal quale segue la medesima temperatura di buco nero. Da questo risultati, applicando la prima legge della termodinamica, è stato possibile derivare l'espressione per l'entropia di un buco nero come $S = \frac{A}{4G}$.

In conclusione, al fine di studiare la dipendenza temporale dell'entropia di Von Neumann di uno dei due sottosistemi costituiti da buco nero e radiazione uscente e costruire la curva di Page, sono stati introdotti gli omonimi teoremi. Essi quantificano, rispettivamente, la distanza tra uno stato in uno dei due sottospazi e lo stato massimamente entangled, multiplo dell'identità e tale per cui l'informazione estraibile da esso è nulla, in funzione delle dimensioni dei due sottospazi; il secondo, invece, fornisce un limite superiore all'entropia di entanglement di uno dei due sottosistemi e, in particolare, dimostra come tale limite superiore sia una buona approssimazione al valore vero nel caso in cui la dimensione dello spazio in esame sia molto minore di quella del suo complementare. A questo punto, soprattutto grazie a quest'ultimo risultato che giustifica l'utilizzo di espressioni semiclassiche circa l'andamento temporale delle entropie di buco nero e radiazione, è stato possibile riprodurre le caratteristiche fondamentali della curva di Page che descrive l'andamento dell'entropia di un buco nero in evaporazione in una teoria semiclassica.

Capitolo 7

Appendici

7.1 Campi scalari massivi nello spazio curvo e trasformazioni di Bogoliubov

In questa sezione si studiano le relazioni che legano l'espansione in modi dei campi in due sistemi di riferimento.

La densità lagrangiana di un campo scalare massivo assume la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2) \quad (7.1)$$

dove $\sqrt{-g}$ è la radice dell'opposto del determinante del tensore metrico. Anche in questo caso, come nel caso di spazio di Minkowski, le equazioni di Eulero-Lagrange restituiscono un'equazione analoga all'equazione di Klein-Gordon:

$$(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0 \quad (7.2)$$

Anche in questo caso sarà dunque possibile espandere la soluzione all'equazione di Klein-Gordon in termini di modi v_n normali rispetto nuova norma di Klein-Gordon, che assume la forma:

$$(v_1, v_2)_{KG} = i \int d^3x \sqrt{-g} (\dot{v}_1 v_2^* - v_1 \dot{v}_2^*) \quad (7.3)$$

E dunque, definito un nuovo set di operatori di creazione b_k e distruzione b_k^\dagger , il campo assume la forma

$$\phi = \sum_k (v_k b_k + v_k^* b_k^\dagger) \quad (7.4)$$

La proprietà di completezza dei modi tramite i quali è stata effettuata l'espansione del campo nei due casi - metrica di Minkowski e generico campo gravitazionale - fa sì che i modi in una metrica siano esprimibili come combinazione lineare dei modi della seconda metrica:

$$v_i = \sum_j (\alpha_{ij} u_j + \beta_{ij} u_j^*) \quad (7.5)$$

I coefficienti α_{ij} e β_{ij} prendono il nome di coefficienti di Bogoliubov e la relazione che lega le due forme dei modi di espansione è detta trasformazione di Bogoliubov. La trasformazione inversa è data da

$$u_i = \sum_j (\alpha_{ij}^* v_j + \beta_{ij} v_j^*) \quad (7.6)$$

La forma esplicita dei coefficienti α_{ij} e β_{ij} che caratterizzano la trasformazione è ottenibile mediante la relazione di ortonormalità dei modi nello spazio di Minkowski rispetto alla norma di Klein-Gordon,

infatti:

$$(v_i, u_j)_{KG} = \left(\sum_k (\alpha_{ik} u_k + \beta_{ik} u_k^*), u_j \right)_{KG} = \sum_k [(\alpha_{ik} u_k, u_j)_{KG} + (\beta_{ik} u_k^*, u_j)_{KG}] = \sum_k [\alpha_{ik} (u_k, u_j)_{KG} + \beta_{ik} (u_k^*, u_j)_{KG}] = \sum_k \alpha_{ik} \delta_{kj} = \alpha_{ij} \quad (7.7)$$

e analogamente si ottiene

$$\beta_{ij} = -(v_i, u_j^*)_{KG} \quad (7.8)$$

Sempre la condizione di ortonormalità, unita al fatto che le due differenti espansioni del campo rappresentano comunque lo stesso oggetto, permette di ottenere una formula anche per i nuovi operatori di creazione e distruzione b_k, b_k^\dagger : a partire da

$$\phi = \sum_k u_k a_k + u_k^* a_k^\dagger = \sum_{jk} [(\alpha_{kj}^* v_j + \beta_{kj}^* v_j^*) a_k + (\alpha_{kj} v_j^* + \beta_{kj} v_j) a_k^\dagger] \quad (7.9)$$

è sufficiente considerare il prodotto

$$\begin{aligned} (\phi, v_i)_{KG} &= \sum_{jk} \left\{ [\alpha_{kj}^* (v_j, v_i)_{KG} + \beta_{kj}^* (v_j^*, v_i)_{KG}] a_k + [\alpha_{kj} (v_j^*, v_i)_{KG} + \beta_{kj} (v_j, v_i)_{KG}] a_k^\dagger \right\} = \\ &= \sum_{jk} [\alpha_{kj}^* \delta_{ji} a_k + \beta_{kj} \delta_{ji} a_k^\dagger] = \sum_k (\alpha_{ki}^* a_k + \beta_{ki} a_k^\dagger) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Ma, allo stesso tempo, vale

$$(\phi, v_i)_{KG} = \sum_k [(v_k, v_i)_{KG} b_k + (v_k^*, v_i)_{KG} b_k^\dagger] = b_i \quad (7.11)$$

dunque

$$\begin{aligned} b_i &= \sum_k (\alpha_{ki}^* a_k + \beta_{ki} a_k^\dagger) \\ b_i^\dagger &= b_i^* = \sum_k (\alpha_{ki} a_k^\dagger + \beta_{ki}^* a_k) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Una conseguenza importante del cambio di metrica - e di conseguenza dei nuovi modi di espansione - è il fatto che nei due sistemi lo stato di vuoto non è lo stesso in quanto sono differenti gli operatori che lo annichiliscono. In particolare, se si sposta l'attenzione sull'operatore numero N che nei due sistemi è $N_{\text{mink},k} = a_k^\dagger a_k$, $N_{\text{grav},k} = b_k^\dagger b_k$ si ha che, considerando lo stato di vuoto $|0\rangle = |0\rangle_{\text{mink}}$

$$\langle 0 | N_{\text{grav},k} | 0 \rangle = \langle 0 | b_k^\dagger b_k | 0 \rangle = \sum_{ik} \beta_{ik} \beta_{jk}^* \langle 0 | a_j a_i^\dagger | 0 \rangle = \sum_i |\beta_{ik}|^2 \quad (7.13)$$

quantità che è in generale diversa da zero e corrispondente al numero medio di particelle che un osservatore in spazio-tempo curvo misurerà sullo stato di vuoto dello spaziotempo di Minkowski.

Bibliografia

- [1] R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities*, *Phys. Rev. Lett.* **14** (1965) 57.
- [2] S.W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199.
- [3] L. Susskind, L. Thorlacius and J. Uglum, *The Stretched horizon and black hole complementarity*, *Phys. Rev. D* **48** (1993) 3743 [[hep-th/9306069](#)].
- [4] K. Schwarzschild, *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory*, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1916** (1916) 189 [[physics/9905030](#)].
- [5] K. Lechner, *Classical Electrodynamics: A Modern Perspective*, UNITEXT for Physics, Springer International Publishing (2018).
- [6] K.Y. Bliokh, *Lorentz-boost eigenmodes*, *Physical Review A* **98** (2018) .
- [7] V. Mukhanov and S. Winitzki, *Introduction to quantum effects in gravity*, Cambridge University Press (6, 2007).
- [8] D. Harlow, *Jerusalem lectures on black holes and quantum information*, *Rev. Mod. Phys.* **88** (2016) 015002.
- [9] Z. Puchała and J. MiszczaK, *Symbolic integration with respect to the haar measure on the unitary groups*, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences* **65** (2017) 21–27.
- [10] D.N. Page, *Average entropy of a subsystem*, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1291 [[gr-qc/9305007](#)].
- [11] D.N. Page, *Time Dependence of Hawking Radiation Entropy*, *JCAP* **09** (2013) 028 [[1301.4995](#)].
- [12] A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski and J. Sully, *Black holes: complementarity or firewalls?*, *Journal of High Energy Physics* **2013** (2013) .
- [13] S.D. Mathur, *The information paradox: a pedagogical introduction*, *Classical and Quantum Gravity* **26** (2009) 224001.
- [14] F. Corelli, M. de Amicis, T. Ikeda and P. Pani, *What is the fate of hawking evaporation in gravity theories with higher curvature terms?*, *Phys. Rev. Lett.* **130** (2023) 091501.