



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

Facoltà di Scienze Statistiche

*Corso di Laurea Specialistica in
Scienze Statistiche, Economiche, Finanziarie ed Aziendali*

***TEST DI NON LINEARITA':
UN'ESPLORAZIONE MONTE CARLO***

Relatore:

Prof.ssa Luisa Bisaglia

Laureando:

Andrea Somera

ANNO ACCADEMICO 2007-2008

INDICE

INTRODUZIONE	5
CAPITOLO 1	9
I MODELLI LINEARI.....	9
1.1 White noise	11
1.2 AutoRegressivo a Media Mobile ARMA(p, q)	11
1.3 AutoRegressivo Integrato a Media Mobile ARIMA(p, d, q)	12
CAPITOLO 2	13
I MODELLI NON LINEARI.....	13
2.1 Modelli autoregressivi a soglia.....	14
2.2 Modelli Markov – Switching	21
2.3 Modelli a memoria lunga.....	24
2.3.1 Modelli ARFIMA	26
CAPITOLO 3	31
TEST DI NON LINEARITA'	31
3.1 Test di linearità senza alternativa specifica	32
3.1.1 Test BDS	33
3.1.2 Test di Keenan.....	36
3.1.3 Tsay Test	38
3.2 Test di linearità con alternativa specifica	41
3.2.1 Test di Wald	42
3.2.2 Test dei moltiplicatori di Lagrange	44
CAPITOLO 4	49
SIMULAZIONI MONTE CARLO.....	49
CONCLUSIONI.....	73
BIBLIOGRAFIA.....	75

INTRODUZIONE

Sebbene in passato si sia ricorso in larga parte a modelli lineari per spiegare l'andamento delle serie storiche finanziarie, da decenni ormai, numerose indagini empiriche hanno dimostrato come in tali serie sia quasi sempre presente una componente non-lineare. Importanti esempi di queste caratteristiche sono l'occasionale presenza di osservazioni anomale e l'esistenza plausibile di regimi dentro i quali i rendimenti e la volatilità dimostrano comportamenti dinamici differenti. Molte volte infatti osservando una serie storica finanziaria o economica capita spesso di imbattersi in drastici cambiamenti della media o del comportamento dinamico della serie stessa. Tali cambiamenti possono portare a casi di instabilità dei parametri del modello stimato, con evidenti ripercussioni negative sulla conseguente inferenza e previsione. La teoria finanziaria non fornisce molte motivazioni per i modelli non lineari, ma si crede che gli stessi dati siano abbastanza informativi.

L'interesse per le serie storiche economiche e finanziarie non lineari è aumentato notevolmente in questi ultimi anni e le linee di ricerca hanno seguito due direzioni: la prima ha visto la proposta di modelli in grado di interpretare i diversi processi non lineari, la seconda ha suggerito strumenti per verificare la non linearità delle serie storiche. Proprio in virtù delle considerazioni sinora espresse, il presente lavoro si occuperà specificatamente di alcuni modelli non lineari e, in particolare, di procedure per verificare l'ipotesi nulla di linearità in una serie storica contro l'alternativa di non linearità.

In particolare, nel primo capitolo vengono richiamati i modelli lineari più noti, **ARMA** e **ARIMA**. Nel secondo, entrando nel vivo dell'argomento della tesi, si affronta il tema dei modelli non lineari concentrando l'attenzione sui cosiddetti modelli *regime-switching* (**SETAR, LSTAR, STAR, Markov** –

switching) e sui modelli a memoria lunga. Il terzo capitolo è dedicato ai test che permettono di diagnosticare la presenza, almeno in termini generali, di linearità o non linearità. Verranno considerati test in cui la forma di non linearità non è specificata, e test in cui si va a diagnosticare una precisa forma di non linearità. Nel quarto capitolo, infine, studieremo la performance dei test descritti tramite simulazioni Monte Carlo.

Avviandoci alla conclusione di questa introduzione, va però sottolineato come la scelta di riservare un piccolissimo spazio ai modelli lineari nella presente trattazione, non deve indurre a ritenere che tale classe di modelli sia ormai del tutto superata. Tuttora infatti i modelli lineari coprono un ruolo importante nell'analisi delle serie storiche, dovuto ad una semplicità di comprensione ed utilizzo.

CAPITOLO 1

I MODELLI LINEARI

Una serie storica è un insieme finito di dati numerici, nel quale ogni dato è associato ad un particolare istante o intervallo di tempo. I dati y_1, \dots, y_n provengono da un dato processo Y_t , che definiamo stocastico.

L'analisi statistica di una serie storica si propone di chiarire il meccanismo casuale che l'ha generata, o per dare una descrizione succinta delle caratteristiche della serie, oppure per prevedere l'evoluzione del fenomeno osservato, di cui è nota la storia passata.

Il processo generatore di una serie storica può essere così considerato:

$$Y(t) = f(t) + u(t),$$

dove $f(t)$ rappresenta la parte deterministica e $u(t)$ la componente stocastica.

Dall'analisi delle serie storiche, modellando in modo opportuno la componente stocastica, è possibile estrarre ulteriori informazioni utili soprattutto a fini previsivi. Per studiare la modellazione della componente stocastica dobbiamo però approfondire il concetto di processo stocastico, inteso come un fenomeno che evolve seguendo delle leggi probabilistiche. Possiamo dunque dire che un processo stocastico è una collezione di variabili casuali indicizzate dal tempo:

$$\{Y_t, t = t_1, t_2, \dots\}$$

Al variare di t , media, varianza e covarianza definiscono funzioni a valori reali, e precisamente:

- Funzione Media

$$\mu_t = E[Y_t]$$

- Funzione Varianza

$$\sigma_t^2 = \text{Var}[Y_t] = E[Y_t - \mu_t]^2$$

- Funzione Autocovarianza

$$\gamma_1(t_1, t_2) = E\{[Y_{t_1} - \mu_{t_1}][Y_{t_2} - \mu_{t_2}]\}$$

La funzione di autocovarianza non è altro che la covarianza tra variabili casuali del medesimo processo stocastico considerate ad istanti temporali diversi.

Per facilitare l'interpretazione dell'autocovarianza è opportuno normalizzarla. Definiamo pertanto la funzione di autocorrelazione (ACF), tra Y_{t_1} e Y_{t_2} come:

$$\rho_{t_1, t_2} = \frac{\gamma_{t_1, t_2}}{\sigma_{t_1} \sigma_{t_2}}$$

L'ACF ha lo stesso contenuto informativo della funzione di autocovarianza ma ha il vantaggio di essere un numero puro, indipendente dall'unità di misura di Y_t .

Prima di continuare è opportuno dare la definizione di processo stocastico stazionario, ossia un processo per il quale almeno i momenti primo e secondi non presentano cambiamenti di natura sistematica e la sua dinamica non presenta variazioni strettamente periodiche.

DEFINIZIONE 1 (Stazionarietà) Un processo Y_t si dice stazionario (in senso debole) se:

- $E(Y_t) = \mu \quad \forall t$
- $E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2 < \infty \quad \forall t$
- $E(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu) = \gamma(k) \quad \forall t$

Di seguito, vengono illustrati i principali modelli lineari per le serie storiche stazionarie.

1.1 White noise

Il processo *white noise* è uno dei più importanti processi stocastici. Si tratta di un processo puramente casuale, $\{\varepsilon_t\}$, che consiste di una sequenza di variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite, di media nulla e varianza costante:

- $E(\varepsilon_t) = 0$
- $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t)^2 = \sigma^2 < \infty$
- $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_1(t-k)) = E(\varepsilon_t \varepsilon_1(t-k)) = \gamma(k) = 0$

La funzione di autocorrelazione di un processo *white noise* è pari a 1 per il ritardo 0 mentre risulta pari a zero altrove. Dal momento che le componenti nella funzione di autocorrelazione parziale sono serialmente incorrelate, essa si comporta allo stesso modo.

1.2 AutoRegressivo a Media Mobile $ARMA(p, q)$

Diremo che Y_t è un processo $ARMA(p, q)$ (*Autoregressive Moving Average*) se si può scrivere:

$$Y_t - \sum_{i=1}^p \varphi_i Y_{t-i} = \varphi_0 + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

dove $\{\varepsilon_t\}$ è un processo *white noise* di media nulla e varianza σ_ε^2 .

Ovviamente, quando $p = 0$ si avrà un processo $MA(q)$ e quando $q = 0$ si avrà un modello $AR(p)$. Modelli di questo tipo sono stati proposti da Box e

Jenkins (1976) come una classe per il trattamento di serie storiche lineari.

1.3 AutoRegressivo Integrato a Media Mobile

ARIMA(p, d, q)

È piuttosto frequente, soprattutto in economia, il caso di serie per le quali è ragionevole ipotizzare un processo generatore non stazionario. Limitandosi ai primi due momenti, la non stazionarietà può dipendere dal fatto che la media non è costante e/o che non sono costanti i momenti secondi. Nel primo caso si parla di *non stazionarietà in media*, e tipicamente si verifica in presenza di un trend, nel secondo caso si parla di *non stazionarietà in varianza* (o in covarianza).

Box e Jenkins hanno proposto un'estensione dei processi **ARMA** che riguarda certi speciali tipi di processi non stazionari. Essi, cioè, considerano processi non stazionari omogenei di grado d , che possono essere resi stazionari a seguito di d differenziazioni successive. Si indichi con X_t la d -esima differenza di Y_t , $X_t = (1 - B)^d Y_t = \Delta_B^d Y_t$. Diremo che $\{Y_t\}$ è un processo autoregressivo integrato a media mobile di ordine (p, d, q) e lo indicheremo con **ARIMA(p, d, q)** (*AutoRegressive Integrated Moving Average*), se $\{X_t\}$ è un processo **ARMA(p, q)**, cioè:

$$X_t = \varphi_0 + \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

I modelli lineari, seppur di facile modellazione e comprensione, hanno delle limitazioni dal punto di vista applicativo. Non riescono a modellare forti asimmetrie nei dati, non sono adatti per i dati caratterizzati da improvvise "esplosioni", trascurano strutture di dipendenza non lineare utili ai fini previsionali

CAPITOLO 2

I MODELLI NON LINEARI

Uno sguardo rapido alla letteratura più rilevante, suggerisce che l'ammontare di modelli per serie storiche non lineari, che possono essere usati per modellare e prevedere le serie storiche economiche e finanziarie, è enorme. I ricercatori che affrontano questa abbondanza di modelli potrebbero avere difficoltà a scegliere il modello più appropriato per ogni particolare applicazione, anche perché è disponibile uno scarso elenco dei pro e dei contro dei differenti modelli.

In termini generali, un modello non lineare può essere formalizzato in questo modo:

$$X_t = g(F_{t-1}) + h(F_{t-1})\varepsilon_t$$

dove $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.}(0,1)$ e F_t è l'insieme informativo disponibile al tempo t .

Volendo effettuare una classifica dei modelli non lineari possiamo dividere tale modellistica in due categorie principali:

- Modelli non lineari in media, nei quali $g(\cdot)$ è una funzione non lineare e $h(\cdot)$ è una costante.
- Modelli non lineari in varianza, in cui $h(\cdot)$ è non costante.

Di seguito sarà trattata soltanto la prima tipologia di modelli, i modelli non lineari in media.

2.1 Modelli autoregressivi a soglia

I modelli autoregressivi a soglia (*Threshold AutoRegressive models*, **TAR**) furono proposti per la prima volta da Tong nel 1978 e sviluppati e divulgati in una serie di lavori successivi dello stesso Tong e di altri autori (ad esempio Tong-Lim, 1980; Tong, 1983; Chan e Tong, 1986; Granger e Teräsvirta, 1993).

Un'approccio naturale per modellare le serie storiche economiche e finanziarie con modelli non lineari è quello di definire i diversi stati del mondo o regimi, e tenere conto della possibilità che un comportamento dinamico delle variabili economiche dipenda dal regime che si presenta ad ogni istante nella serie. La considerazione alla base di questa modellistica è che se una serie non è, complessivamente, lineare, ciò non esclude che in essa ci possa essere la presenza di linearità a tratti, dove ciascuno di questi tratti è detto regime ed il passaggio da un regime ad un altro (*regime-switching*) avviene attraverso una funzione indicatrice che rileva le soglie dove intervengono dei cambiamenti strutturali nella serie dei dati. Ciascun regime avrà poi le proprie singolari caratteristiche per quanto riguarda media varianza ed autocorrelazione.

In particolare, in questa sede, viene preso in considerazione il caso in cui il '*regime-switching*' è stocastico, punto fondamentale per le serie storiche economiche e finanziarie.

Il modello **TAR** assume che il regime sia determinato attraverso un valore di q_t , variabile soglia, che denotiamo con c . Un caso speciale si presenta quando q_t è un valore ritardato della stessa serie storica y_t , ad esempio $q_t = y_{t-d}$ per un certo numero intero $d > 0$. Nel caso in cui il regime sia determinato attraverso la sua stessa serie storica, il modello risultante è chiamato *Self-Exciting TAR (SETAR)*.

Quando $d = 1$ ed è assunto un modello $AR(1)$ per entrambi i regimi, un modello $SETAR$ a 2 regimi è dato da:

$$y_t = \begin{cases} \varphi_{0,1} + \varphi_{1,1}y_{t-1} + \varepsilon_t & \text{se } y_{t-1} \leq c \\ \varphi_{0,2} + \varphi_{1,2}y_{t-1} + \varepsilon_t & \text{se } y_{t-1} \geq c \end{cases} \quad (2.1)$$

dove ε_t è assunto essere una sequenza di *white noise* i.i.d. condizionati alla storia della serie storica, che è denotata con $\Omega_{t-1} = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{1-(p-1)}, y_{1-p})$, con $E(\varepsilon_t | \Omega_{t-1}) = 0$ e $E(\varepsilon_t^2 | \Omega_{t-1}) = \sigma^2$.

Un modo alternativo per scrivere il modello $SETAR$ è il seguente:

$$1 - I[y_{t-1} > c] + (\varphi_{0,2} + \varphi_{1,2}y_{t-1})I[y_{t-1} > c] + \varepsilon_t$$

dove $I(A)$ è una funzione indicatrice che prende il valore 1 se l'evento A si presenta, e vale zero in caso contrario.

Di seguito, in Figura 1, vengono riportati i grafici di quattro serie storiche simulate con un modello $SETAR$ a due regimi, con parametri diversi.

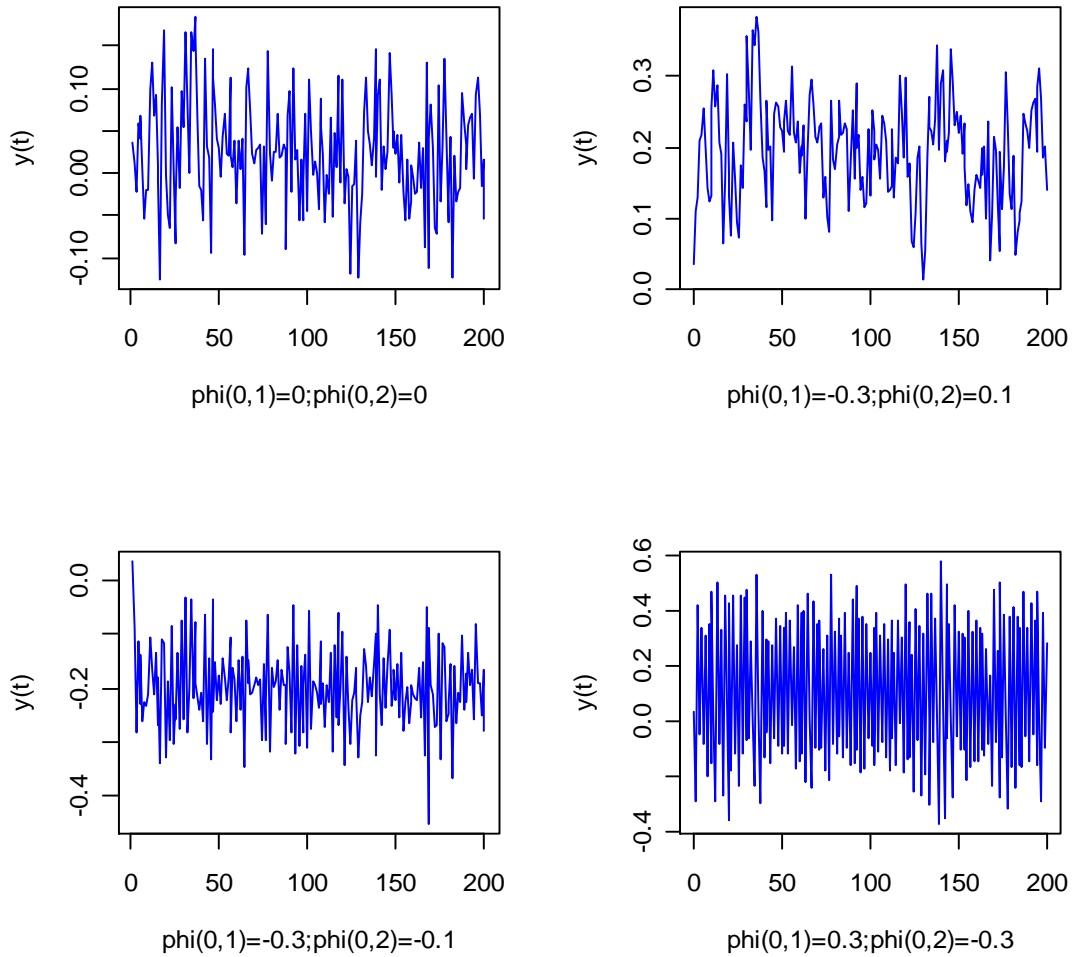


Figura 1 Quattro serie di 200 osservazioni generate dal modello SETAR (2.1) con $\phi(1,1)=-0.5$, $\phi(1,2)=0.5$, $c=0$ e errori $NID(0,0.0625)$

Il modello **SETAR** assume che il confine tra i due regimi sia determinato da uno specifico valore della variabile soglia y_{t-a} . Un passaggio più graduale tra i differenti regimi può essere ottenuto modificando la funzione

indicatrice $I[y_{t-d} > c]$ attraverso una funzione continua $G(z_t; \gamma, c)$ ², la quale cambia da 0 a 1 all'aumentare di y_{t-1} . Il modello risultante è

² Argomenti di questa funzione sono la soglia c , il parametro γ detto parametro di *smoothing* (lisciamento) esponenziale e la variabile z_t che può essere una variabile esogena oppure un dato endogeno ritardato ($z_t = y_{t-d}$) come nel modello SETAR.

chiamato **STAR** (*Smooth Transition AR*), e può essere scritto, ipotizzando la presenza di soli due regimi, come:

$$y_t = (\varphi_{0,1} + \varphi_{1,1}y_{t-1}) + (\varphi_{0,2} + \varphi_{1,2}y_{t-1})G(z_t; \gamma, c) + \varepsilon_t$$

Il modello **STAR** si riduce ad un comune modello **AR** in due casi: quando $(\varphi_{0,1}, \varphi_{1,1}) = (\varphi_{0,2}, \varphi_{1,2})$ oppure quando $\gamma = 0$.

Per quanto concerne la funzione di transizione $G(z_t; \gamma, c)$, possono essere effettuate varie scelte che danno luogo a modelli diversi, tra queste segnaliamo:

- **LSTAR**, dove la **L**, sta per *logistic cumulative density function*. La funzione logistica è una funzione monotona crescente che varia da 0 ad 1 al crescere di z_t (in particolare $G(c) = 0.5$ e quindi ad entrambi i regimi è assegnato un medesimo peso, quando $z_t = c$).

$$G(z_t; \gamma, c) = [1 + \exp(-\gamma(z_t - c))]^{-1}$$

Si noti come per $\gamma \rightarrow \infty$, il modello **LSTAR** diventi un **SETAR** poiché la funzione di transizione da continua diventa a gradino. Diversamente per $\gamma \rightarrow 0$, $G(z_t; \gamma; c) \rightarrow 0.5$ ed il modello **LSTAR** si avvicina ad un modello AR lineare.

Di seguito, in Figura 2, vengono riportati i grafici di quattro serie storiche simulate con il modello **LSTAR** a due regimi, con parametri diversi.

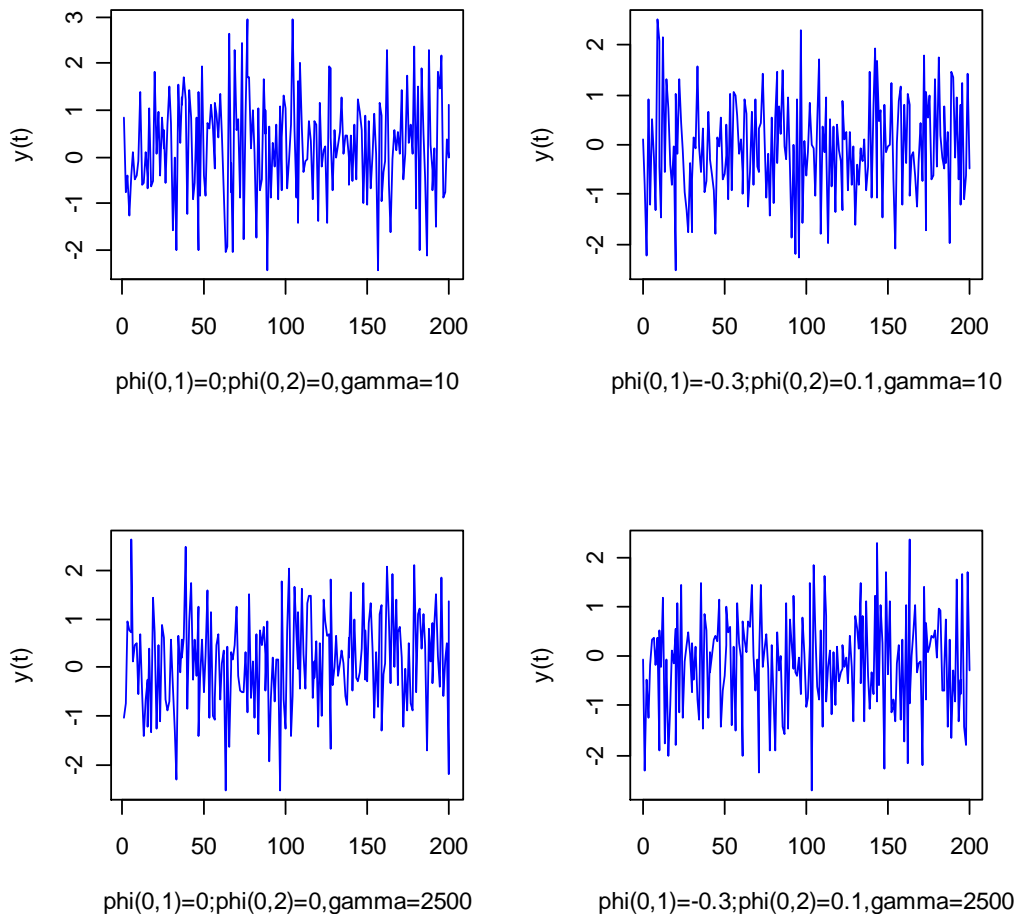


Figura 2 Quattro serie di 200 osservazioni generate da un modello LSTAR con $\phi(1,1)=-0.5$, $\phi(1,2)=0.5$, $c=0$ e errori $NID(0,1)$.

- **ESTAR**, ovvero **STAR** esponenziale quadratico. In questo caso il comportamento della funzione di transizione è determinato da quanto più ampia, o meno ampia, sia la deviazione di z_t dalla soglia c (pertanto i cambiamenti di regime non saranno più influenzati anche dal segno delle osservazioni, come per la logistica, ma solo dal loro valore assoluto).

$$1 - \exp(-\nu(z_t - c)^2)^{-1}$$

Tanto per $Y \rightarrow \infty$, come per $Y \rightarrow 0$, il limite di $G(z_t; \gamma, c)$ è pari a 1 e 0 rispettivamente. Pertanto **ESTAR** si avvicina ad un modello AR lineare.

2.2 Modelli *Markov – Switching*

Una classe di modelli *regime-switching* è quella in cui i regimi sono determinati da variabili non osservabili. Infatti il regime che si presenta al tempo t non può essere osservato poiché è determinato da un processo latente che chiamiamo s_t . In caso di presenza di solo due regimi, s_t può semplicemente assumere i valori 1 e 2, tale che:

$$y_t = \begin{cases} \varphi_{0,1} + \varphi_{1,1}y_{t-1} + \varepsilon_t & \text{se } s_t = 1 \\ \varphi_{0,2} + \varphi_{1,2}y_{t-1} + \varepsilon_t & \text{se } s_t = 2 \end{cases} \quad (2.2)$$

Otteniamo quindi un modello con un processo **AR(1)** per entrambi i regimi. Usando un'ovvia notazione compatta, lo possiamo riscrivere come:

$$y_t = (\varphi_{0,s_t} + \varphi_{1,s_t}y_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Per completare il modello, devono essere specificate le proprietà del processo s_t . Il modello più usato su questa classe, utilizzato la prima volta da Hamilton (1989), è il modello **Markov – Switching (MSW)**, nel quale il processo s_t è assunto essere un processo di Markov di primo ordine. Questo implica che il regime attuale s_t dipende solo dal regime del periodo precedente, s_{t-1} , cioè:

$$Pr(s_t=j | s_{t-1}=i, s_{t-2}=k, \dots) = Pr(s_t=j | s_{t-1}=i) = p_{ij}$$

Da qui il modello è completo definendo le probabilità di transizione da uno stato all'altro:

$$Pr(s_t = 1 | s_{t-1} = 1) = p_{11}$$

$$Pr(s_t = 2 | s_{t-1} = 1) = p_{12}$$

$$Pr(s_t = 1 | s_{t-1} = 2) = p_{21}$$

$$Pr(s_t = 2 | s_{t-1} = 2) = p_{22}$$

dove p_{ij} è la probabilità che la catena di Markov si muova dallo stato i al tempo $t-1$ allo stato j al tempo t . In altre parole, p_{ij} è la probabilità che il regime i al tempo $t-1$ sia seguito dal regime j al tempo t . È possibile quindi definire la matrice di transizione che, ricordando che si sta considerando il caso di due soli stati di natura e che la catena di Markov è del primo ordine, è la seguente:

$$P_t = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Ovviamente, le probabilità p_{ij} devono essere non negative, e si deve anche verificare che $p_{11} + p_{12} = 1$ e $p_{21} + p_{22} = 1$.

E' anche interessante nei modelli *MSW* valutare le probabilità non condizionate che il processo ha in ognuno dei regimi, $P(s_t = i)$ per $i = 1, 2$. Usando la teoria delle catene di Markov ergodiche è possibile far vedere che per il modello *MSW* a due regimi, queste probabilità non condizionate sono date da:

$$P(s_t = 1) = \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}}$$

$$P(s_t = 2) = \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{11} - p_{22}}$$

Questo tipo di modelli è in grado di rappresentare una serie di situazioni reali, quali ad esempio, nell'analisi del ciclo economico, i regimi di recessione e di crescita, che corrisponderanno agli stati **1** e **2** .

Di seguito, in Figura 3, vengono riportati i grafici di quattro serie storiche simulate con dal modello **MARKOV – SWITCHING** a due regimi, con parametri sotto riportati.

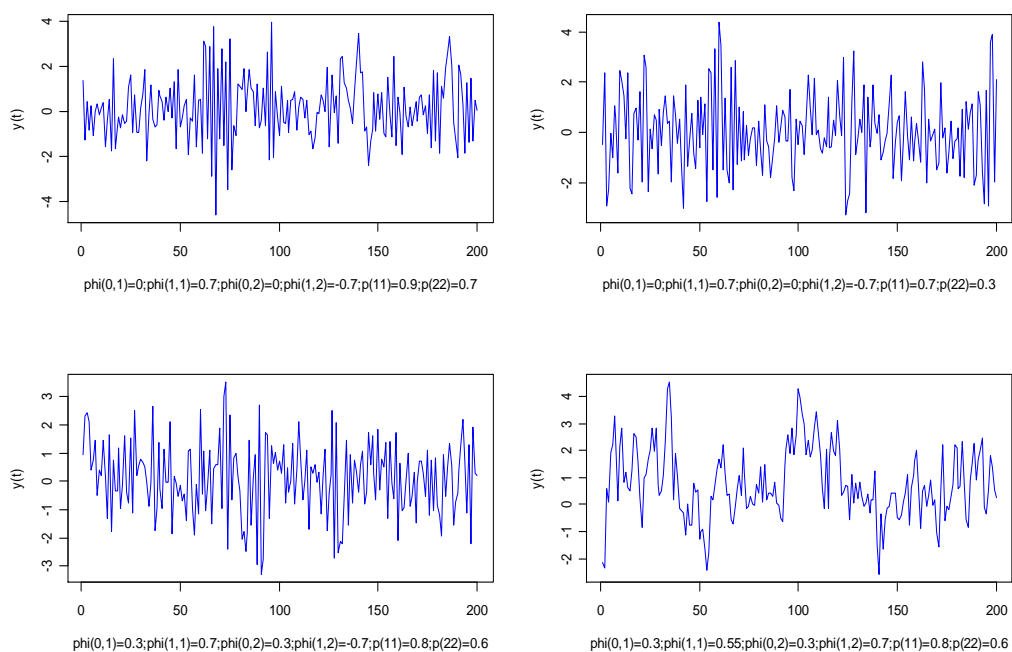


Figura 3 *Quattro serie di 200 osservazioni generate dal modello Markov-Switching (2.2) con rispettivi valori per i parametri e errori $NID(0,1)$.*

2.3 Modelli a memoria lunga

Il primo studio sui processi a memoria lunga applicati ai dati finanziari è dovuto a Mandelbrot nel 1971, anche se questo tipo di modellistica ha iniziato a destare interesse negli econometrici solo all'inizio degli anni '80, in seguito agli articoli di Hosking (1981) e Granger e Joyeux (1980). In molti campi di applicazione si è visto che molte delle serie storiche sono caratterizzate dalla presenza di memoria lunga, nel senso che la situazione attuale influenzerà il futuro per un lungo periodo di tempo. La presenza di questa memoria dà vita a *trend* ben definiti dei prezzi delle attività finanziarie e causa dei problemi nell'applicazione dei modelli classici alle serie storiche che presentano queste caratteristiche.

Per definire il concetto di memoria lunga, riprendiamo la definizione data da McLeod e Hipel (1978).

DEF: dato un processo $\{Y_t\}$ in tempo discreto, con autocorrelazione ρ_j al ritardo j , diciamo che il processo possiede memoria lunga se la quantità:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\rho_j| \quad (2.3)$$

diverge.

È semplice dimostrare che i processi **ARMA** “tradizionali” sono a memoria corta: l'autocorrelazione di un processo **MA(q)** decade esponenzialmente fino al q -esimo ritardo e poi vale zero. Poiché, ogni processo **ARMA** stazionario può essere trasformato in **MA(∞)** attraverso la scomposizione di

Wold³, se ne conclude che in ogni caso la funzione di autocorrelazione ha un decrescimento esponenziale. Ciò significa che la (2.3) converge, per cui il processo non ha memoria lunga.

³ Una serie storica stazionaria può essere espressa come somma di una componente deterministica e una componente stocastica la quale a sua volta può essere espressa come una media mobile infinita.

Esistono diverse classi di modelli che soddisfano la (2.2), in questo lavoro ci occuperemo dei modelli Arima Frazionari (**ARFIMA**).

2.3.1 Modelli **ARFIMA**

I processi a differenza frazionaria sono stati introdotti indipendentemente da Granger e Joyeux (1980) e da Hosking (1981) per descrivere la dinamica di fenomeni che presentano una struttura di dipendenza che persiste nel tempo ed hanno trovato interesse ed applicazioni in numerosi e differenti ambiti disciplinari. In tutti i casi, essi si prestano alla interpretazione ed alla modellistica di processi le cui realizzazioni evidenziano correlazioni seriali significative anche se misurate in tempi molto distanti.

Appare quindi necessario, per adeguare la modellistica standard alla dinamica di molti fenomeni reali, generalizzare la classe dei processi lineari **ARIMA** in modo da poter tener conto in maniera esplicita di una componente di lungo periodo, che spieghi i comportamenti, prima evidenziati, rilevabili nella funzione di autocorrelazione globale.

La classe dei modelli **ARFIMA** (*AutoRegressive Fractional Integrated Moving Average*) offre uno strumento flessibile ed ulteriormente generalizzabile per descrivere tale tipo di dinamica.

Un processo $Y_t \sim \text{ARFIMA}(p, d, q)$ di valor medio nullo è caratterizzato dalla seguente formulazione:

$$\varphi(B)\Delta^d Y_t = \theta(B)a_t$$

dove $a_t \sim WN(0, \sigma^2)$ e B denota l'operatore ritardo $B^k Y_t = Y_{t-k}$. I polinomi $\varphi(B) = (1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p)$ e $\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)$ non hanno fattori comuni e le $p+q$ radici dell'equazione $\varphi(B)\theta(B) = 0$ sono in modulo maggiori di uno.

Se d è intero, l'operatore alle differenze Δ^d è definito nel seguente modo:

$$\Delta^d = (1 - B)^d = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} (-B)^k$$

A differenza dei modelli *ARIMA*, d , il parametro di memoria lunga, può assumere valori reali. Poiché la funzione fattoriale è definita solo per valori naturali, dobbiamo in primo luogo ridefinire i coefficienti binomiali utilizzando la funzione Gamma:

$$\binom{d}{k} = \frac{d!}{k!(d-k)!} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)}$$

dove con $\Gamma(\cdot)$ indichiamo la funzione Gamma, pertanto

$$(1 - B)^d = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)} (-B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k B^k$$

dove

$$\pi_k = \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)} = \prod_{0 \leq j \leq k} \frac{j-1-d}{j}, j = 0, 1, 2, \dots$$

Anche se, in teoria, d può assumere qualsiasi valore reale, un processo *ARFIMA*(p, d, q) risulta stazionario ed invertibile per valori di d compresi tra -0.5 e 0.5. In particolare quando $d < 0.5$ è possibile la rappresentazione *MA*(∞) che garantisce la stazionarietà del processo, mentre quando $d > -0.5$ esiste la rappresentazione *AR*(∞) che garantisce l'invertibilità del processo.

Le caratteristiche dei modelli appartenenti a questa classe possono essere sintetizzate dall'andamento della funzione di autocorrelazione globale $\rho(k)$.

A tal fine, verrà esaminato di seguito un processo $Y_t \sim \text{ARFIMA}(0, d, 0)$ definito *fractional white noise*, che descrive la sola dinamica di lunga memoria:

$$\Delta^d Y_t = a_t$$

La sua funzione di autocovarianza è data da:

$$\gamma_k = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(k+1-d)}$$

Quest'ultima espressione può essere anche scritta come:

$$\gamma_k = \frac{(-1)^k \Gamma(-2d+1)}{\Gamma(k-d+1)\Gamma(-k-d+1)}$$

sulla base di queste espressioni si ha:

$$\gamma_0 = \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma^2(1-d)}$$

Quindi, passando alle autocorrelazioni:

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(k+d)\Gamma^2(1-d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(k+1-d)\Gamma(1-2d)} = \\ &= \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k-d+1)} \approx \\ &\approx \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1} \end{aligned}$$

Risalta quindi un'importante caratteristica del *fractional white noise*, cioè l'andamento delle autocorrelazioni. Infatti si nota immediatamente che, per $0 < d < 0,5$, le autocorrelazioni decadono iperbolicamente (soddisfacendo la condizione di memoria lunga). Per quanto riguarda il caso $-0,5 < d < 0$,

non molto interessante dal punto di vista pratico, ci si limita ad osservare che ciò indica un processo a memoria corta e ‘antipersistente’, le autocorrelazioni sono tutte negative (a parte ovviamente ρ_0 che vale 1) e tendono a zero al crescere di k .

Di seguito, in Figura 4 e 5, vengono riportati rispettivamente i grafici di due serie *fractional white noise* simulate e i relativi correlogrammi parziali e globali.

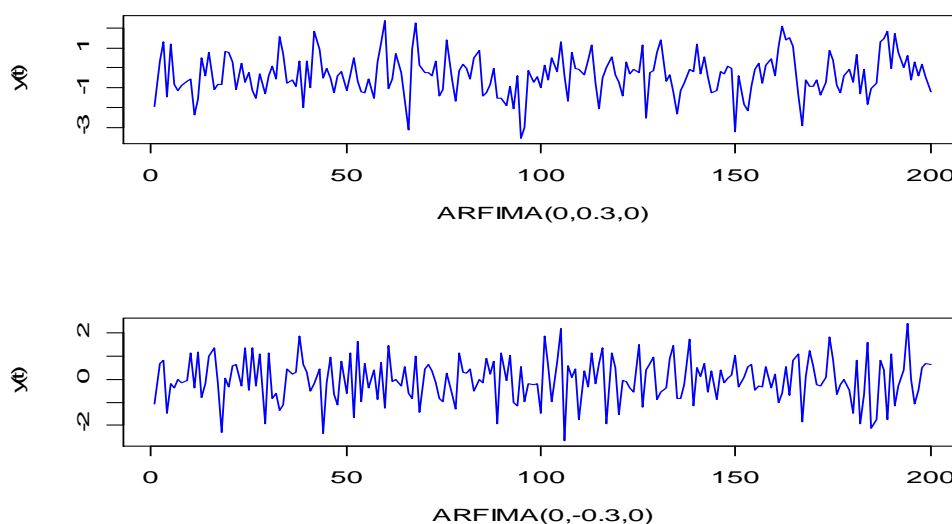


Figura 4 Due serie di 200 osservazioni generate da un *fractional white noise* con $d=0.3$ e -0.3 rispettivamente.

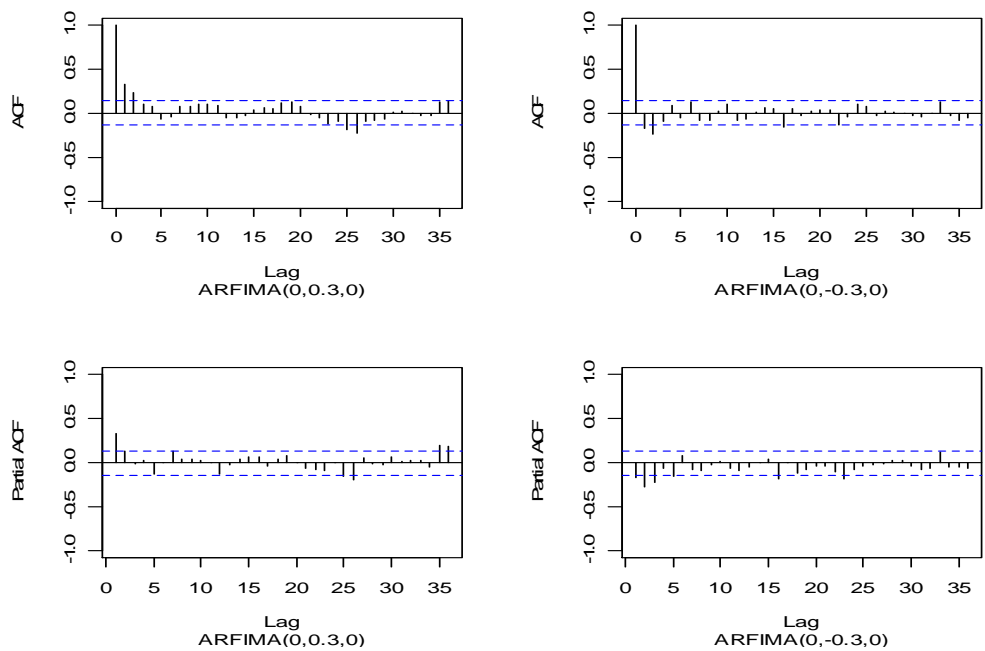


Figura 5 ACF e Partial ACF di due serie generate da un modello ARFIMA(0,d,0) con rispettivamente $d=0.3$ e $d=-0.3$

CAPITOLO 3

TEST DI NON LINEARITA'

Alla luce di quanto detto finora, appare chiaro come il primo passo da compiere nel tentativo di specificare il modello sottostante ad una serie di dati, sia quello di effettuare un test di linearità. Infatti, sarebbe inutile complicare le cose, qualora un semplice modello lineare si rivelasse sufficiente a spiegare i dati.

La costruzione di test o indicatori per la verifica della presenza di non linearità è difficoltosa a causa dei diversi tipi e gradi di non linearità. Ciò comporta la necessità di risolvere il problema di distinguere le serie storiche lineari da quelle non lineari, e di individuare il tipo di non linearità.

L'obiettivo di questo capitolo è fornire una breve, forse non esauriente, rassegna di alcuni test ed indicatori utilizzati per verificare la linearità di una serie storica. In letteratura infatti vi sono diversi test al riguardo, che a titolo esemplificativo possiamo classificare nelle seguenti categorie:

- Test contro alternativa specifica
- Test senza alternativa specifica.

Nel caso dei test contro un'alternativa specifica, qualora l'ipotesi nulla di linearità venisse rifiutata, il test ci informa sulla specifica natura non-lineare dei dati. Ma quello che potrebbe sembrare un vantaggio è anche il limite principale di questo genere di test, poiché non sempre è facile determinare a priori la natura della presunta non linearità della serie in esame.

3.1 Test di linearità senza alternativa specifica

Tali test non pongono come alternativa una ben determinata ipotesi di non-linearità, ma vanno intesi come test sulla non-linearità in generale.

In questa sede esamineremo il test BDS, il test di Keenan e il test Tsay (W. A. BROOCK, J.A. SCHEINKMAN, W.D. DECHERT, B. LEBARON, “A test for independence based on the correlation dimension”. *Econometric Reviews*). Questi test, partono dallo stesso principio: una volta che tutte le dipendenze lineari vengono rimosse dai dati, altre eventuali dipendenze seriali dovrebbero essere dovute ad un meccanismo generatore dei dati non lineare. La dipendenza lineare è rimossa dai dati attraverso un modello di pre-sbiancamento in questo modo: per prima cosa stimiamo un modello $AR(p)$ per la serie in esame, con p che prende valori da zero a dieci. Il lag ottimale è scelto minimizzando il criterio di Schwartz, che è conosciuto essere consistente per la determinazione dell'ordine di un modello autoregressivo, sotto l'ipotesi nulla di un meccanismo generatore dei dati lineare. I residui del modello $AR(p)$, $\{\varepsilon_t\}$, che sono per costruzione serialmente incorrelati, vengono testati per l'indipendenza non lineare usando ognuna delle procedure.

3.1.1 Test BDS

Il test BDS, che prende il nome dai suoi autori Brock, Dechert e Scheinkman, è un test non parametrico, uno dei più importanti ed efficienti di questa categoria. Inizialmente tale test fu sviluppato contro l'ipotesi alternativa di un processo caotico deterministico, ma poi è stato riscontrato come esso sia potente anche nell'individuare processi stocastici non-lineari in genere, sia in media che in varianza. Questa generalità, che costituisce uno dei pregi principali del test, è ovviamente anche un limite: sebbene il test BDS possa evidenziare la presenza di una struttura non-lineare in numerosi casi, non può mai identificarne l'esatta natura.

Consideriamo il processo stocastico univariato, a valori reali $\{y_t\} = [y_1, \dots, y_N]$. Da tale processo deriviamo i seguenti vettori m -dimensionali (appartenenti a \mathbb{R}^m):

$$y_1^m = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$$y_2^m = (y_2, y_3, \dots, y_{m+1})$$

.

.

$$y_{N-m}^m = (y_{N-m}, y_{N-m+1}, \dots, y_N)$$

che sono detti m -histories o m -patterns dell'osservazione t -esima, e rappresentano semplicemente m osservazioni consecutive ad y_t . Per un dato numero N di osservazioni, possono essere costruite $N_m = N - m + 1$ differenti m -histories.

La statistica BDS considera la dispersione dei punti della serie in spazi di dimensione sempre crescente e la confronta con la dispersione dei punti di

un processo stocastico. La figura 3 fornisce un'esemplificazione grafica di questo concetto. Infatti è riportato a sinistra il grafico di dispersione di punti nello spazio di un processo white noise, quindi un processo stocastico, e sulla destra il grafico di dispersione di un processo deterministico, in particolare un processo di Henon. È facile osservare come nel secondo caso i dati si dispongano secondo una precisa relazione non lineare.

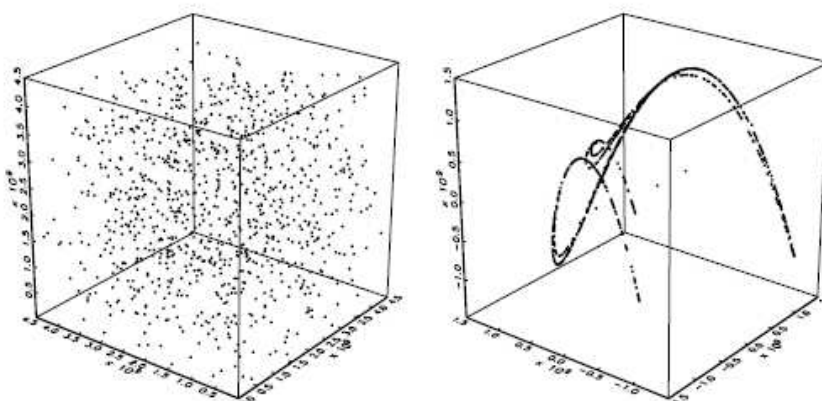


Figura 6 Grafici di dispersione di punti di una serie white noise e di una serie di Henon.

Il punto di partenza del test BDS, è il calcolo del c.d. integrale di correlazione, che è dato dalla seguente formula:

$$C^m(\varepsilon) = \sum_{t=1}^{N_m} \sum_{s=1}^{t-1} \frac{I_\varepsilon(y_t^m, y_s^m)}{\left[\frac{N_m(N_m-1)}{2} \right]} \quad (3.1)$$

dove $I_\varepsilon(y_t^m, y_s^m)$ è una funzione così definita:

$$I_\varepsilon(y_t^m, y_s^m) = \begin{cases} 1 & \text{se } \|y_t^m, y_s^m\| < \varepsilon \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

la simbolistica $\|a - b\|$ sta a significare che $\|a - b\| = \max_i \{|a_i - b_i|\}$

cioè la distanza massima tra i due vettori. Di conseguenza $I_{\varepsilon}(Y_{\varepsilon}^m, Y_{\varepsilon}^m)$ è uguale ad uno se e solo se la distanza massima tra le due m -histories Y_{ε}^m e Y_{ε}^m è minore di ε .

Tale integrale gioca un ruolo fondamentale nel test BDS, infatti per ogni coppia di valori m ed $\varepsilon > 0$ la dipendenza della serie viene esaminata considerando proprio questo integrale di correlazione.

La logica del test è la seguente: se il processo è i.i.d. allora $C^m(\varepsilon)$ è uguale a $[C_1(\varepsilon)]^m$, pertanto la nostra ipotesi nulla sarà:

$$H_0: C^m(\varepsilon) - [C_1(\varepsilon)]^m = 0$$

Brock, Dechert e Scheinkman definiscono la variabile:

$$N_m(\varepsilon) = C^m(\varepsilon) - [C_1(\varepsilon)]^m$$

Se Y_t è un white noise allora $N_m(\varepsilon)$ si distribuisce come una normale di media nulla e varianza $V_m^2(\varepsilon)$. Considerano quindi la statistica:

$$BDS = \frac{\sqrt{N_m} [C^m(\varepsilon) - [C_1(\varepsilon)]^m]}{V_m(\varepsilon)}$$

che si distribuisce sotto H_0 come una normale standardizzata. È possibile a questo punto costruire quindi il test che permetta di verificare l'ipotesi H_0 , sotto la quale la serie è i.i.d..

Il test BDS è un test d'ipotesi bilaterale, quindi rifiuto l'ipotesi nulla se il valore del test è più grande o più piccolo del valore critico (ad esempio se $\alpha = 0,05$, il valore critico è $\pm 1,96$).

Arrivati a questo punto, è bene fare delle considerazioni di ordine applicativo. Rimane il problema di quanto numerosa debba essere la serie storica in esame, affinché il test possa essere considerato affidabile. Gli

stessi autori consigliano serie con almeno mille osservazioni, con serie di minore dimensione andrà adottata, perciò, una certa cautela nell'affidarsi ai risultati del test.

Un'altra scelta molto rilevante è quella circa i parametri m ed ε . È una questione nient'affatto banale, poiché per valori arbitrariamente "aggiustati" di tali parametri si potrebbero ottenere dei risultati formalmente significativi, ma di fatto del tutto fuorvianti. Per evitare di commettere degli abusi nella scelta di questi valori, si consiglia di effettuare una batteria di test con vari valori di m ed ε consecutivi. Difatti, qualora il test desse un esito positivo per $m = 2$ (si ricordi che m deve essere ≥ 2), ma non per m uguale a 3 o 4 ci sarebbe da insospettirsi ed analogo discorso vale chiaramente anche per ε , che di solito viene scelta nella misura di {0.5, 1, 1.5, 2} volte la deviazione standard dei dati. Sarebbe opportuna una scelta congiunta di m ed ε , ma tutt'ora, purtroppo, non esistono tecniche univoche ed universalmente accettate per la determinazione di questi due parametri.

3.1.2 Test di Keenan

Il test sviluppato da Keenan (1985) cerca di rilevare se tra i residui del modello lineare è presente una componente non lineare. Keenan osserva che la forma più generale di un processo stocastico stazionario è approssimabile mediante lo sviluppo in serie di Volterra:

$$y_t = f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \mu + \sum_{i=1}^n b_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,j,k} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k + \dots$$

dove ε_t è, come al solito, un processo i.i.d. con media zero (WN).

Se il processo stazionario è lineare, i coefficienti dal secondo ordine in poi sono nulli altrimenti alcuni dei coefficienti $b_{i,j}, b_{i,j,k}, \dots$ sono diversi da zero. L'ipotesi nulla può essere così definita:

$$H_0: b_{i,j} = b_{i,j,k} = \dots = 0 \quad \forall i, j, k, \dots \in]-\infty, \infty[$$

Dato un campione di n osservazioni $Y_t = (y_t, \dots, y_n)$, la procedura per verificare l'ipotesi nulla consiste nelle seguenti fasi:

1. Posto $x_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})$, dove p è il numero di ritardi (solitamente si considerano 4 o 5 ritardi), si regredisce y_t rispetto a x_t . Si ottengono così la serie dei valori stimati \hat{y}_t e la serie dei residui di stima $\hat{\varepsilon}_t$ per $t = p+1, \dots, n$. Infine viene calcolata la somma dei quadrati dei residui della regressione (RSS).
2. Si effettua la regressione di \hat{y}_t^2 rispetto alla serie dei ritardi x_t , ottenendo così i residui stimati di questa seconda regressione $\hat{\eta}_t$.
3. Si esegue una regressione tra le due serie dei residui ottenute ai punti precedenti come segue: $\hat{\varepsilon}_t = \beta \hat{\eta}_t + \varepsilon_t$ dove β è l'unico coefficiente della regressione.

Si considera quindi come ipotesi nulla $H_0: \beta = 0$,

si utilizza l'usuale statistica F sul coefficiente β per verificarla:

$$\hat{F} = \frac{\frac{\hat{\beta}^2 (\sum \hat{\eta}_t^2)}{p}}{\frac{\sum \hat{\varepsilon}_t^2}{n-2p-2}} = \frac{(\sum \hat{\eta}_t \hat{\varepsilon}_t) (\sum \hat{\eta}_t^2)^{-1}}{\frac{\sum \hat{\varepsilon}_t^2}{n-2p-2}}$$

dove la statistica si distribuisce asintoticamente come una v.c. χ^2 con 1

grado di libertà. Questo test ha il vantaggio di poter essere applicato a serie di lunghezza limitata.

3.1.3 Tsay Test

Il test di Tsay è una generalizzazione del test di Keenan. Questo test guarda esplicitamente alla dipendenza quadratica seriale nei dati e come il test di Keenan cerca di rilevare se tra i residui del modello lineare è presente una componente non lineare. L'ipotesi nulla di questo test è che i residui seguano un processo *white noise*. La procedura da adottare per verificarla consta di quattro stadi e può essere scritta come segue:

- 1) Definisco $Y_t = (y_1, \dots, y_n)$ la serie storica originale. Fissato un valore p , si regredisce Y_t sui primi p ritardi della serie, $(y_{t-1}, \dots, y_{t-p})$. Si otterrà quindi il modello stimato:

$$\hat{y}_t = \sum_{i=1}^p \hat{\beta}_i y_{t-i}$$

A questo punto è possibile calcolare i residui del modello che sono i seguenti:

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t$$

- 2) Si calcolano tutti i prodotti incrociati dei ritardi della serie, considerati una sola volta, fino all'ordine massimo p . Si ottengono quindi $\frac{1}{2}p(p+1) = h$ prodotti incrociati. Abbiamo così costruito p variabili che denotiamo come z_{jt} , dove

$$z_{jt} = (y_{t-1}^2 \cdot y_{t-1} y_{t-2}, \dots, y_{t-1} y_{t-p}, y_{t-2}^2, \dots, y_{t-p}^2)$$

$$j = 1, \dots, h, \quad t = 1, \dots, n$$

- 3) Regrediamo ognuna delle h variabili z_{jt} ottenute, sui primi p ritardi

della serie $(y_{t-1}, \dots, y_{t-p})$. Otteniamo così i residui:

$$x_{ij} = z_{jt} - \sum_{i=1}^p \hat{\beta}_i y_{t-i}$$

che saranno le nostre variabili proxy per il comportamento non lineare.

- 4) Regrediamo $\hat{\varepsilon}_t$ sulle h variabili proxy x_{ij} ottenute al punto precedente e calcoliamo la statistica usuale F per testare che tutti i coefficienti della regressione nel campione siano pari a zero. La linearità è rifiutata se il test F trova qualche variabile proxy significativa.

In pratica l'ipotesi nulla di questo test è che non c'è relazione lineare tra i residui del modello lineare stimato e il gruppo di variabili proxy che includono i termini al quadrato e i prodotti incrociati. Notiamo che il solo parametro che deve essere definito in questo test è il numero di lag p , usato nella stima del modello AR iniziale.

Per concludere, se il test di Keenan cerca di individuare la non linearità analizzando la capacità esplicativa di una particolare combinazione non lineare di p valori passati, il test di Tsay, per il medesimo fine, si avvale di un più ampio set di regressioni. Non a caso, per $p = 1$ e cioè quando anche il test di Tsay effettua una regressione semplice al punto (2), i due test coincidono.

3.2 Test di linearità con alternativa specifica

Forse la più importante domanda a cui dobbiamo rispondere quando consideriamo i modelli *regime-switching* è se il regime (o i regimi) addizionale contribuisce significativamente a spiegare il comportamento dinamico della serie y_t . Un approccio naturale è quello di considerare un modello lineare come ipotesi nulla e un modello *regime-switching* come ipotesi alternativa. Nel caso di un modello a due regimi, e con riferimento al modello (2.2), si può ipotizzare il seguente sistema d'ipotesi:

$$H_0: \varphi_{i,1} = \varphi_{i,2} \quad \forall i = 1, \dots, p$$

$$H_1: \varphi_{i,1} \neq \varphi_{i,2} \quad i \in (0, p)$$

I test statistici che prendono come ipotesi alternativa uno dei tre modelli *regime-switching* (**SETAR, STAR, MSW**), soffrono tutti del problema dei “parametri di disturbo non identificati” sotto l’ipotesi nulla. Questo significa che i parametri che caratterizzano il cambiamento di regime saranno presenti solo nell’ipotesi alternativa, mentre non figureranno, nemmeno come parametro vincolato, nell’ipotesi nulla. I parametri di disturbo non identificati per i modelli **SETAR, STAR e MSW** sono rispettivamente la soglia c , il parametro di liscio γ e le probabilità di transizione tra i due regimi p_{11} e p_{21} .

Di seguito verranno presentati alcuni dei test della statistica classica, utilizzati per testare l’ipotesi di linearità contro l’alternativa di non linearità, in particolare il test basato sul rapporto di verosimiglianza, test di Wald e test dei moltiplicatori di Lagrange.

3.2.1 Test di Wald

Consideriamo un modello non lineare per la serie storica stazionaria y_t , $t = 1, \dots, n$:

$$y_t = \mu + \rho y_{t-1} + \delta f(y_{t-1}, \theta) y_{t-1} + \varepsilon_t$$

dove ε_t è un processo *white noise*, e ρ, δ e $f(\cdot, \theta)$ sono scelti in modo che y_t sia stazionario. Usuali specificazioni per la funzione $f(\cdot, \theta)$ sono quelle considerate nel paragrafo 2.1 per i modelli *STAR* .

A questo punto approssimiamo la funzione $f(\cdot, \theta)$ con un polinomio di Taylor⁴ di secondo ordine attorno a $\theta = \mathbf{0}$, ottenendo:

$$y_t = \mu + \delta_0 y_{t-1} + \delta_1 y_{t-1}^2 + \delta_2 y_{t-1}^3 + \varepsilon_t \quad (3.2)$$

Quando $\delta_1 = \delta_2 = \mathbf{0}$ il modello è lineare.

Per il nostro scopo, cioè testare l'ipotesi nulla di linearità, è conveniente riscrivere la (3.2) in termini di un modello di regressione:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-1}^2 + \beta_3 y_{t-1}^3 + \varepsilon_t$$

dove:

$$\beta_0 = \mu(1 - \delta_0 + \delta_1 \mu - \delta_2 \mu^2), \beta_1 = \delta_0 - 2\delta_1 \mu + 3\delta_2 \mu^2, \\ \beta_2 = \delta_1 - 3\delta_2 \mu, \beta_3 = \delta_2$$

È quindi possibile definire l'ipotesi nulla di linearità come:

$H_0: \beta_2 = \beta_3 = \mathbf{0}$, mentre l'ipotesi alternativa di non linearità è

$H_1: \beta_i \neq \mathbf{0}$ per almeno un $i = 1, 2$.

La statistica test risulta quindi:

⁴ La formula di Taylor è in analisi matematica uno dei metodi più comuni per approssimare una funzione con un polinomio, su cui poi sarà più semplice eseguire le operazioni desiderate. In generale, la formula di Taylor in forma estesa è la seguente:

$$T_n(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + (f''(a)/2!)(x-a)^2 + \dots + (f^{(n)}(a)/n!)(x-a)^n$$

$$W_T = \frac{SSR_1 - SSR_0}{\frac{SSR_0}{n}}$$

Dove SSR_0 e SSR_1 sono rispettivamente, la somma dei quadrati dei residui

della regressione sotto H_1 , e la somma dei quadrati dei residui della regressione sotto H_0 . La statistica W_T si distribuisce sotto l'ipotesi nulla come un χ^2 con 2 gradi di libertà (2 sono il numero di restrizioni).

3.2.2 Test dei moltiplicatori di Lagrange

Per calcolare questo test assumiamo come ipotesi nulla la linearità e come ipotesi alternativa una non linearità di tipo *STAR*.

La caratteristica principale del test è che non è necessario stimare il modello sotto l'ipotesi alternativa.

Il modello *STAR*, nella sua formulazione generale, può essere così scritto:

$$y_t = \left(\varphi_{0,1} + \sum_{i=1}^p \varphi_{1,i} y_{t-1} \right) + \left(\varphi_{0,2} + \sum_{i=1}^p \varphi_{2,i} y_{t-1} \right) G(z_t; \gamma, c) + \varepsilon_t$$

Come abbiamo visto nel paragrafo 2.1, il modello *STAR* si riduce ad un modello *AR* in due casi che costituiranno le nostre due ipotesi nulle:

$$H_0: (\varphi_{0,1}, \varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{1,p}) = (\varphi_{0,2}, \varphi_{2,1}, \dots, \varphi_{2,p})$$

$$H'_0: \gamma = 0$$

A questo punto sussiste il problema che in entrambi i casi ci troviamo di fronte ai parametri di disturbo non identificati che sono γ e c per H_0 e $(\varphi_{0,1}, \varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{1,p}) - (\varphi_{0,2}, \varphi_{2,1}, \dots, \varphi_{2,p})$ e c per H'_0 .

Lukkonen, Saikkonen e Terasvirta (1998) considerano il problema nel modo seguente. Si consideri un modello *STAR* la cui funzione di transizione sia la funzione logistica:

$$G(z_t; \gamma, c) = [1 + \exp(-\gamma(z_t - c))]^{-1}$$

come è facile osservare per $\gamma \rightarrow 0$ $G(z_t; \gamma, c) \rightarrow 0,5$.

Definiamo la seguente funzione:

$$G^*(z_t; \gamma, c) = G(z_t; \gamma, c) - \frac{1}{2} \quad (3.3)$$

Si può facilmente notare che sotto l'ipotesi nulla $H_0: \gamma = 0$, abbiamo che $G^*(z_t; \gamma, c) = 0$.

A questo punto Lukkonen, Saikkonen e Terasvirta (1998), risolvono il problema dei parametri di disturbo suggerendo come, sotto l'ipotesi nulla, sia possibile approssimare la (3.3) con l'approssimazione di Taylor del primo ordine intorno a $\gamma = 0$, ottenendo la seguente formulazione:

$$T_1(z_t; \gamma, c) \approx G^*(z_t; \gamma, c) + \gamma \left. \frac{\partial G^*(z_t; \gamma, c)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0} = \frac{1}{4} \gamma (z_t - c)$$

Riscriviamo ora il modello *STAR* nel seguente modo:

$$y_t = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)' x_t + (\varphi_2 - \varphi_1)' x_t G^*(z_t; \gamma, c) + \varepsilon_t \quad (3.4)$$

dove $\varphi_j = (\varphi_{j,1}, \varphi_{j,2}, \dots, \varphi_{j,p})$ e $x_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})$.

Dopo aver sostituito $T_1(\cdot)$ a $G^*(\cdot)$ nella (3.4), e aver definito come variabile di transizione $z_t = y_{t-1}$, definiamo il seguente modello di regressione ausiliaria:

$$y_t = \beta_{0,0} + \beta_0' \bar{x}_t + \beta_1' \bar{x}_t y_{t-1} + \eta_t \quad (3.5)$$

dove $\bar{x}_t = (y_{t-1}, \dots, y_{t-p})$ e $\beta_j = (\beta_{1,j}, \dots, \beta_{p,j})'$, $j = 0,1$. Le relazioni tra i parametri nel modello di regressione ausiliaria (3.5) e i parametri nel modello *STAR* (3.4) possono essere formulate come segue:

$$\beta_{0,0} = \frac{1}{2} (\varphi_{0,1} + \varphi_{0,2}) - \frac{1}{4} \gamma c (\varphi_{0,2} + \varphi_{0,1})$$

$$\beta_{1,0} = \frac{1}{2}(\varphi_{1,1} + \varphi_{1,2}) - \frac{1}{4}\gamma[c(\varphi_{1,2} - \varphi_{1,1}) - (\varphi_{0,2} + \varphi_{0,1})]$$

$$\beta_{i,0} = \frac{1}{2}(\varphi_{i,1} + \varphi_{i,2}) - \frac{1}{4}\gamma c(\varphi_{i,2} + \varphi_{i,1}) \quad i = 2, \dots, p$$

$$\beta_{i,1} = -\frac{1}{4}\gamma c(\varphi_{i,2} + \varphi_{i,1}) \quad i = 1, \dots, p \quad (3.6)$$

Tali equazioni dimostrano che la restrizione $\gamma = 0$ implica $\beta_{i,1} = 0$ per $i = 1, \dots, p$. Da ora testare l'ipotesi nulla $H_0^i: \gamma = 0$ nella (3.4) è equivalente a testare $H_0^i: \beta_{1,i} = 0$ nella (3.5). Questa ipotesi nulla può essere testata semplicemente con un test statistico con una variabile addizionale standard. Sotto l'ipotesi nulla di linearità, il test statistico ha una distribuzione asintotica χ^2 con p gradi di libertà. Questo test è comunemente chiamato test statistico di tipo LM.

Come notato da Luukkonen, Saikkonen e Terasvirta (1988), il test statistico sopra citato può essere poco potente qualora siano solo le costanti a differire ma non i coefficienti, vale a dire quando, nel caso di 2 soli regimi, $\varphi_{0,1} \neq \varphi_{0,2}$ ma $\varphi_{i,1} = \varphi_{i,2}$ per $i = 1, \dots, p$. Questo si può immediatamente vedere dalla (3.6), la quale mostra che nessuno dei parametri $\beta_{i,1}$, $i=1, \dots, p$ dipende da $\varphi_{0,2}$ e/o $\varphi_{0,1}$. Luukkonen, Saikkonen e Terasvirta (1988) suggeriscono di rimediare a questa mancanza ridefinendo la funzione di transizione $G^*(y_{t-1}; \gamma, c)$ con l'approssimazione di Taylor del terzo ordine, che è:

$$T_3(y_{t-1}; \gamma, c) \approx \gamma \left. \frac{\partial G^*(y_{t-1}; \gamma, c)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0} + \frac{1}{6}\gamma^3 \left. \frac{\partial^3 G^*(y_{t-1}; \gamma, c)}{\partial \gamma^3} \right|_{\gamma=0} = \frac{1}{4}\gamma(y_{t-1} - c) + \frac{1}{48}\gamma^3(y_{t-1} - c)^3$$

dove è stato usato il fatto che la derivata seconda di $G^*(y_{t-1}; \gamma, c)$ rispetto a γ calcolata nel punto $\gamma = 0$ sia pari a zero. Usando questa approssimazione

è stato prodotto il seguente modello ausiliario:

$$y_t = \beta_{0,0} + \beta_0' x_t + \beta_1' x_t y_{t-1} + \beta_2' x_t y_{t-1}^2 + \beta_3' x_t y_{t-1}^3 + \eta_t \quad (3.7)$$

dove $\beta_{0,0}$ e $\beta_j, j = 1,2,3$, nuovamente sono combinazioni dei parametri $\varphi_1, \varphi_2, \gamma$ e c della (3.4). L'esame delle relazioni esatte dimostra che l'ipotesi nulla $H_0': \gamma = 0$ corrisponde ora a $H_0'': \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, ed è nuovamente possibile testarla con il test standard di tipo LM. Sotto l'ipotesi nulla di linearità, la statistica test ha una distribuzione asintotica χ^2 con $3p$ gradi di libertà.

In campioni piccoli, si raccomanda di usare la versione F della statistica test LM, che ha buone proprietà di misura e potenza. La versione F della statistica test basata sulla (3.7) può essere calcolata come segue:

1. stimare il modello sotto l'ipotesi nulla di linearità regredendo y_t su x_t . Calcolare i residui $\tilde{\varepsilon}_t$ e la somma dei quadrati dei residui

$$SSR_0 = \sum_{t=1}^n \tilde{\varepsilon}_t^2$$

2. stimare la regressione ausiliaria di $\tilde{\varepsilon}_t$ su x_t e $x_t y_{t-1}^j, j = 1,2,3$, e calcolare la somma dei quadrati dei residui per questa regressione (SSR_1).
3. la statistica può essere così calcolata:

$$LM = \frac{(SSR_0 - SSR_1) / 3p}{SSR_1 / (n - 4p - 1)}$$

la cui distribuzione può essere approssimata da una F con $3p$ e $(n - 4p - 1)$ gradi di libertà sotto l'ipotesi nulla.

CAPITOLO 4

SIMULAZIONI MONTE CARLO

Lo scopo del seguente capitolo è verificare l'attendibilità dei test di non linearità presentati precedentemente, per valutare se poterli applicare o meno a serie storiche economiche e finanziarie reali.

Lo strumento utilizzato sono i metodi di simulazione di Monte Carlo, con i quali è stato possibile calcolare la potenza empirica dei diversi test applicati a serie storiche simulate lineari e non lineari.

Tra le classi dei modelli lineari sono stati scelti i processi Autoregressivi (AR), a Media Mobile (MA), *White Noise* e ARFIMA, mentre tra le classi dei non lineari i processi SETAR, LSTAR e MARKOV-SWITCHING.

Tutte le simulazioni sono state svolte con il software di libero dominio R.2.6.

Per quanto riguarda la simulazione dei diversi modelli, sono stati utilizzati comandi già presenti in R.2.6 per i modelli MA, AR, *White Noise* e ARFIMA, mentre la simulazione dei restanti modelli non lineari è stata implementata da me.

Per ogni processo considerato sono state effettuate 1000 repliche di lunghezza $n=200, 500, 1000$, usando sempre errori indipendenti ed identicamente distribuiti come una Normale di media zero e varianza pari a uno (*IID* $N(0,1)$).

Per il calcolo del test BDS, allo stesso modo delle simulazioni, è stato utilizzato il comando già presente nel software, mentre tutti gli altri test,

Keenan, Tsay, Moltiplicatori di Lagrange e Wald, sono stati costruiti da me. È stato scelto per i test di Keenan e Tsay $p=1, 2, 3, 4$, per il test dei Moltiplicatori di Lagrange $p=1, 2, 3$, per il test di Wald $p=1$ e per il test BDS $m=2, 3$.

Per quanto riguarda la scelta dei parametri per il calcolo del test BDS, ho fatto riferimento all'articolo di W. A. Broock, J. A. Scheinkman, W. D. Dechert e B. LeBaron, che suggeriscono di utilizzare **$\varepsilon = 0.5 * \text{deviazione standard del campione}$** ed $m=2, 3$.

Nelle tabelle seguenti sono riportate le probabilità empiriche di rifiuto dell'ipotesi nulla di linearità, per **$\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$** , per ogni test e per ogni modello lineare (ottenendo quindi il livello empirico) e non lineare (ottenendo in tal caso la potenza empirica).

Tabella 1. Probabilità empirica di rigetto dell'ipotesi nulla per tre modelli SETAR simulati con $c=0$ ed errori IID $N(0,1)$.

Test di KEENAN								
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	α	$n=200$			
					$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	-0.9	0	0.5	10%	100	80.3	64.2	57.2
				5%	99.7	76.4	57.5	50.1
				1%	98.7	68.3	46.2	35.2
0	0.5	0	-0.5	10%	97.2	87.6	76.7	70.8
				5%	95.1	91.9	69	62.2
				1%	85.2	65	51.9	45.5
0.3	-0.9	-0.3	0.5	-0.9	100	94.3	88.3	83.2
				5%	100	91.9	86	78.5
				1%	100	88.2	77.9	68.7
<hr/>								
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	α	$n=500$			
					$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	-0.9	0	0.5	10%	100	94.6	90.9	87
				5%	100	93.5	88.9	83
				1%	100	90.8	84.6	76
0	0.5	0	-0.5	10%	100	99.7	98.8	97.4
				5%	99.9	99.4	98.3	96.8
				1%	99.7	98.9	96.4	94.5
0.3	-0.9	-0.3	0.5	10%	100	100	99.4	99
				5%	100	100	99.3	98.6
				1%	100	99.5	98.7	97.5
<hr/>								
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	α	$n=1000$			
					$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	-0.9	0	0.5	10%	100	99.2	98.9	95.9
				5%	100	99	98.4	95
				1%	100	98.6	97.8	94
0	0.5	0	-0.5	10%	100	100	100	100
				5%	100	100	100	100
				1%	100	100	100	100
0.3	-0.9	-0.3	0.5	10%	100	100	100	99.9
				5%	100	100	100	99.8
				1%	100	100	100	99.8

Tabella 2. (Continuazione).

Test di TSAY								
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	α	$n=200$			
					$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	-0.9	0	0.5	10%	99.8	99.4	99	96
				5%	99.8	99.2	97.4	92.6
				1%	98.8	96.2	90	81.5
0	0.5	0	-0.5	10%	96.9	92.4	85.8	78
				5%	94.2	87.4	78.8	66.2
				1%	82.7	69.3	56.9	41.7
0.3	-0.9	-0.3	0.5	10%	100	100	99.9	99.7
				5%	100	100	99.8	99.7
				1%	100	100	99.1	97.8
<hr/>								
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	α	$n=500$			
					$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	-0.9	0	0.5	10%	100	100	100	100
				5%	100	100	100	100
				1%	100	100	100	99.9
0	0.5	0	-0.5	10%	100	99.9	99.9	99.8
				5%	100	99.9	99.6	99.6
				1%	99.9	99.2	98.2	96.9
0.3	-0.9	-0.3	0.5	10%	100	100	100	100
				5%	100	100	100	100
				1%	100	100	100	100
<hr/>								
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	α	$n=1000$			
					$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	-0.9	0	0.5	10%	100	100	100	100
				5%	100	100	100	100
				1%	100	100	100	100
0	0.5	0	-0.5	10%	100	100	100	100
				5%	100	100	100	100
				1%	100	100	100	100
0.3	-0.9	-0.3	0.5	10%	100	100	100	100
				5%	100	100	100	100
				1%	100	100	100	100

Tabella 3. (Continuazione).

Test dei MOLTIPLICATORI di LAGRANGE							
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	α	$n=200$		
					$p=1$	$p=2$	$p=3$
				10%	99.4	99.1	98.7
0	-0.9	0	0.5	5%	99.2	98	97.5
				1%	97.4	92.5	92.2
				10%	96.4	92.1	85.2
0	0.5	0	-0.5	5%	93.3	86.1	78.1
				1%	80.4	65.6	55.7
				10%	100	100	99.8
0.3	-0.9	-0.3	0.5	5%	100	100	99.6
				1%	99.9	99.8	99
<hr/>							
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	α	$n=500$		
					$p=1$	$p=2$	$p=3$
				10%	100	100	100
0	-0.9	0	0.5	5%	100	100	100
				1%	100	100	100
				10%	100	100	99.9
0	0.5	0	-0.5	5%	100	99.9	99.8
				1%	100	99.2	98.7
				10%	100	100	100
0.3	-0.9	-0.3	0.5	5%	100	100	100
				1%	100	100	100
<hr/>							
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	α	$n=1000$		
					$p=1$	$p=2$	$p=3$
				10%	100	100	100
0	-0.9	0	0.5	5%	100	100	100
				1%	100	100	100
				10%	100	100	100
0	0.5	0	-0.5	5%	100	100	100
				1%	100	100	100
				10%	100	100	100
0.3	-0.9	-0.3	0.5	5%	100	100	100
				1%	100	100	100

Tabella 4. (Continuazione).

					Test BDS	Test di WALD	
					<i>n</i> =200		
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	α	<i>m</i> =2	<i>m</i> =3	
				10%	78.7	71.2	99.8
0	-0.9	0	0.5	5%	72.8	66.2	99.5
				1%	57	52.5	98.7
				10%	48.4	46.3	95.7
0	0.5	0	-0.5	5%	40.4	39.5	92.8
				1%	26.5	25.9	81.2
				10%	93.1	90.3	100
0.3	-0.9	-0.3	0.5	5%	89.6	93.2	100
				1%	81.1	74.2	100
					<i>n</i> =500		
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	α	<i>m</i> =2	<i>m</i> =3	
				10%	98.1	98.3	100
0	-0.9	0	0.5	5%	97.1	94.1	100
				1%	92.6	87	100
				10%	73.1	68.2	100
0	0.5	0	-0.5	5%	66.4	60.1	100
				1%	51.2	42.8	99.4
				10%	100	99.8	100
0.3	-0.9	-0.3	0.5	5%	99.9	99.9	100
				1%	99.4	98.5	100
					<i>n</i> =1000		
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	α	<i>m</i> =2	<i>m</i> =3	
				10%	100	99.9	100
0	-0.9	0	0.5	5%	99.9	99.8	100
				1%	99.5	99.4	100
				10%	94.6	89.4	100
0	0.5	0	-0.5	5%	89.7	85.8	100
				1%	80.4	71.8	100
				10%	100	100	100
0.3	-0.9	-0.3	0.5	5%	100	100	100
				1%	100	100	100

Tabella 2 Probabilità empirica di rigetto dell'ipotesi nulla per tre modelli LSTAR simulati con $c=0$ ed errori IID $N(0,1)$.

Test di KEENAN									
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	γ	α	$n=200$			
						$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
					10%	99.8	99.9	99.7	99.9
0.5	-0.5	0.8	-0.8	10	5%	99.3	99.8	99.7	99.8
					1%	97.3	98.6	98.7	98.6
					10%	88.6	88.5	88.8	89.7
0.5	-0.5	0.8	-0.8	0.1	5%	83.2	83.5	82.5	84.1
					1%	68.1	66.5	62.5	67.9
					10%	78.1	77.6	74.8	72.9
0	0	0	0.9	0.5	5%	67.1	67	63.9	62.8
					1%	46.9	45.8	42	41.8
Test di KEENAN									
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	γ	α	$n=500$			
						$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
					10%	100	100	100	100
0.5	-0.5	0.8	-0.8	10	5%	100	100	100	100
					1%	100	100	100	100
					10%	99.7	99.8	99.8	99.8
0.5	-0.5	0.8	-0.8	0.1	5%	99.5	99.7	99.7	99.6
					1%	98.1	98.1	98.7	98.3
					10%	98.9	98.3	99.2	98.2
0	0	0	0.9	0.5	5%	97.4	97.1	97.5	97.2
					1%	92.2	91.1	91.3	91.2
Test di KEENAN									
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	γ	α	$n=1000$			
						$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
					10%	100	100	100	100
0.5	-0.5	0.8	-0.8	10	5%	100	100	100	100
					1%	100	100	100	100
					10%	100	100	100	100
0.5	-0.5	0.8	-0.8	0.1	5%	100	100	100	100
					1%	100	100	100	100
					10%	100	100	100	100
0	0	0	0.9	0.5	5%	100	100	100	100
					1%	99.9	99.8	99.9	100

Tabella 2. (Continuazione).

Test di TSA Y									
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	γ	α	$n=200$			
						$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
					10%	99.9	99.2	98.6	96.6
0.5	-0.5	0.8	-0.8	10	5%	99.9	98.5	97.2	92.4
					1%	98.4	95.4	89	78.7
					10%	55.6	42.2	32.1	28.4
0.5	-0.5	0.8	-0.8	0.1	5%	43.5	31.3	22.5	17.7
					1%	23.6	15.3	9	5.4
					10%	79.3	61.9	53.4	44.7
0	0	0	0.9	0.5	5%	69.8	50.7	39.7	33.4
					1%	45	28.4	18.6	15.6
Test di TSA Y									
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	γ	α	$n=500$			
						$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
					10%	100	100	100	100
0.5	-0.5	0.8	-0.8	10	5%	100	100	100	100
					1%	100	100	100	100
					10%	86.5	76.1	66.9	62.1
0.5	-0.5	0.8	-0.8	0.1	5%	79.9	67.6	55.7	50.2
					1%	62.7	45.7	33.7	24.5
					10%	99.4	96.2	92.7	85.3
0	0	0	0.9	0.5	5%	98.4	92.7	86.4	78.9
					1%	92.8	81.8	70.9	60.1
Test di TSA Y									
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	γ	α	$n=1000$			
						$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
					10%	100	100	100	100
0.5	-0.5	0.8	-0.8	10	5%	100	100	100	100
					1%	100	100	100	100
					10%	99.3	97.1	94.7	89.3
0.5	-0.5	0.8	-0.8	0.1	5%	98.1	95	89.9	82.8
					1%	93.2	85.7	75.3	65.5
					10%	100	100	100	99.8
0	0	0	0.9	0.5	5%	99.9	99.9	99.8	99.2
					1%	99.7	99.5	98.2	95.7

Tabella 2. (Continuazione).

Test dei MOLTIPLICATORI di LAGRANGE								
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	γ	α	$n=200$		
						$p=1$	$p=2$	$p=3$
					10%	99.5	98.9	97.6
0.5	-0.5	0.8	-0.8	10	5%	99.4	98	95.5
					1%	97.2	92.7	88.5
					10%	79.6	69.4	63.5
0.5	-0.5	0.8	-0.8	0.1	5%	70.1	59	51.2
					1%	52.4	38.3	31.7
					10%	95.9	89	86.7
0	0	0	0.9	0.5	5%	92.5	82.3	77.1
					1%	80.7	65.2	54.7
					10%	95.9	89	86.7

$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	γ	α	$n=500$		
						$p=1$	$p=2$	$p=3$
					10%	100	100	100
0.5	-0.5	0.8	-0.8	10	5%	100	100	100
					1%	100	100	100
					10%	99.2	97.4	97.1
0.5	-0.5	0.8	-0.8	0.1	5%	98.6	95.9	93.9
					1%	95.2	89.2	83
					10%	100	100	99.9
0	0	0	0.9	0.5	5%	100	100	99.9
					1%	100	99.9	99.5
					10%	100	100	99.9

$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	γ	α	$n=1000$		
						$p=1$	$p=2$	$p=3$
					10%	100	100	100
0.5	-0.5	0.8	-0.8	10	5%	100	100	100
					1%	100	100	100
					10%	100	100	100
0.5	-0.5	0.8	-0.8	0.1	5%	100	100	100
					1%	100	100	99.8
					10%	100	100	100
0	0	0	0.9	0.5	5%	100	100	100
					1%	100	100	100
					10%	100	100	100

Tabella 2. (Continuazione).

						Test BDS		Test di WALD
						<i>n=200</i>		
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	γ	α	<i>m=2</i>	<i>m=3</i>	
					10%	30.1	39	99.6
0.5	-0.5	0.8	-0.8	10	5%	27.9	31.7	99.2
					1%	12.6	20.9	97.4
					10%	24.4	31	84.9
0.5	-0.5	0.8	-0.8	0.1	5%	17.6	22.2	77.3
					1%	9.2	12.6	60.4
					10%	29	32.1	70.6
0	0	0	0.9	0.5	5%	17.5	22.5	60.5
					1%	10	11.9	37.8
						<i>n=500</i>		
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	γ	α	<i>m=2</i>	<i>m=3</i>	
					10%	39.7	54	100
0.5	-0.5	0.8	-0.8	10	5%	30.5	41.3	100
					1%	14.7	27	100
					10%	17	21.4	99.7
0.5	-0.5	0.8	-0.8	0.1	5%	8.2	13.6	99.5
					1%	3.5	4.8	97.2
					10%	29.3	29.2	97.1
0	0	0	0.9	0.5	5%	19.3	19.7	95.1
					1%	9.3	11.3	86.1
						<i>n=1000</i>		
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	γ	α	<i>m=2</i>	<i>m=3</i>	
					10%	54.3	74.1	100
0.5	-0.5	0.8	-0.8	10	5%	44.5	64.4	100
					1%	28.7	47.4	100
					10%	12.7	14.5	100
0.5	-0.5	0.8	-0.8	0.1	5%	9.3	10.1	100
					1%	1.6	1.8	100
					10%	37.5	37.5	100
0	0	0	0.9	0.5	5%	25	26.3	99.9
					1%	12.2	13.2	99.8

Tabella 3 Probabilità empirica di rigetto dell'ipotesi nulla per tre modelli MARKOV-SWITCHING simulati con errori IID $N(0,1)$.

Test di KEENAN										
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	p_{11}	p_{22}	α	$n=200$			
							$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	-0.5	0	0.4	0.2	0.4	10%	21.4	14.9	17	13.1
						5%	12.8	9.7	9.6	6.8
						1%	5	3	2.7	1.4
0	-0.5	0	0.4	0.9	0.9	10%	21.2	11	12.1	9.7
						5%	13.5	4.8	7.1	6
						1%	5.2	0.7	1	1.8
0	0.9	0	-0.7	0.9	0.7	10%	50	16.4	17.1	14.2
						5%	42	11.1	11.5	8.3
						1%	19.9	5.4	4.6	3.9
<hr/>										
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	p_{11}	p_{22}	α	$n=500$			
							$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	-0.5	0	0.4	0.2	0.4	10%	19.4	14.7	15.1	15.6
						5%	12.7	7.8	8.7	8.6
						1%	5.7	2.4	2	3.1
0	-0.5	0	0.4	0.9	0.9	10%	18.2	10.5	10.3	10.8
						5%	12.1	6.2	5.6	5.6
						1%	3.6	1.6	1.3	1
0	0.9	0	-0.7	0.9	0.7	10%	55.4	19.1	18.8	20.2
						5%	49.9	11.6	13.7	12
						1%	37.7	4.7	5.8	5
<hr/>										
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	p_{11}	p_{22}	α	$n=1000$			
							$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	-0.5	0	0.4	0.2	0.4	10%	21.2	15.4	17.1	15.5
						5%	13	9.1	9.3	8.6
						1%	5.6	2.8	2.4	1.7
0	-0.5	0	0.4	0.9	0.9	10%	20.9	10	9.6	10.4
						5%	13.3	6	4.6	5.4
						1%	5.4	1.4	0.5	0.9
0	0.9	0	-0.7	0.9	0.7	10%	63.1	21	20.2	18.7
						5%	56.8	13.2	12	11.4
						1%	46.3	5.9	5	5.2

Tabella 3. (Continuazione).

Test di TSA Y										
							n=200			
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	p_{11}	p_{22}	α	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
						10%	20.9	21.2	20.2	20.2
0	-0.5	0	0.4	0.2	0.4	5%	14.1	14.1	12.6	13.7
						1%	5	4.1	5.6	3.4
						10%	19.2	22	19.8	17.2
0	-0.5	0	0.4	0.9	0.9	5%	11.9	15.2	11.4	10.4
						1%	4.5	4.7	2.3	2.4
						10%	50	49.1	48.3	51.5
0	0.9	0	-0.7	0.9	0.7	5%	42.9	39.1	39.5	41.5
						1%	31.5	23.3	23.5	26
							n=500			
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	p_{11}	p_{22}	α	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
						10%	21.7	19.8	22.9	21.5
0	-0.5	0	0.4	0.2	0.4	5%	13.5	11.7	14.3	13.5
						1%	5.4	3.5	5.3	4.6
						10%	20.2	20.3	21.1	17.9
0	-0.5	0	0.4	0.9	0.9	5%	13.4	13.4	13.2	10.4
						1%	5.5	3.9	4.3	3
						10%	59.5	53.4	56.7	64.6
0	0.9	0	-0.7	0.9	0.7	5%	53	45.7	47.7	56.2
						1%	40.4	32.3	33.7	37.6
							n=1000			
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	p_{11}	p_{22}	α	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
						10%	21.5	23.3	24.8	24
0	-0.5	0	0.4	0.2	0.4	5%	12.9	15.2	16.2	16.9
						1%	4	7.2	5.7	4.6
						10%	20.1	23	20.9	19.7
0	-0.5	0	0.4	0.9	0.9	5%	12.6	15.2	13.5	12.6
						1%	4.2	6.4	5.5	3.2
						10%	41.8	40.9	42.7	44.3
0	0.9	0	-0.7	0.9	0.7	5%	32.9	30.1	34.4	34.3
						1%	20.2	17.1	18.9	16.7

Tabella 3. (Continuazione).

Test dei MOLTIPLICATORI di LAGRANGE									
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	p_{11}	p_{22}	α	$n=200$		
							$p=1$	$p=2$	$p=3$
0	-0.5	0	0.4	0.2	0.4	10%	29.3	41.4	40.7
						5%	17.7	30.9	29.2
						1%	5.6	13.6	12.6
0	-0.5	0	0.4	0.9	0.9	10%	28.6	45.8	46.7
						5%	19.4	32.3	33.2
						1%	7.7	13.5	15.1
0	0.9	0	-0.7	0.9	0.7	10%	64.7	73.7	79.1
						5%	57.3	65	70
						1%	43.3	45.6	51.6
<hr/>									
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	p_{11}	p_{22}	α	$n=500$		
							$p=1$	$p=2$	$p=3$
0	-0.5	0	0.4	0.2	0.4	10%	35.8	55	55.1
						5%	25.2	42	43
						1%	10.6	23.1	22.8
0	-0.5	0	0.4	0.9	0.9	10%	37.3	81.8	81.4
						5%	26.4	71.3	70
						1%	12	49.4	43.9
0	0.9	0	-0.7	0.9	0.7	10%	77.8	92.5	94.9
						5%	72.6	87.5	90.7
						1%	61.4	76	81.5
<hr/>									
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	p_{11}	p_{22}	α	$n=1000$		
							$p=1$	$p=2$	$p=3$
0	-0.5	0	0.4	0.2	0.4	10%	39.6	69.4	70
						5%	29.9	59	59.2
						1%	14.4	38.6	39
0	-0.5	0	0.4	0.9	0.9	10%	42.2	97	96.5
						5%	30.5	94.8	94
						1%	14.8	84.9	84.3
0	0.9	0	-0.7	0.9	0.7	10%	86.7	97.8	98.7
						5%	82.1	96.5	97.9
						1%	74.4	92.6	95.1

Tabella 3. (Continuazione).

							Test BDS	Test di WALD	
							<i>n=200</i>		
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	p_{11}	p_{22}	α	$p=1$	$p=2$	
						10%	60.8	59.3	26.3
0	-0.5	0	0.4	0.2	0.4	5%	56.5	52	18
						1%	40.9	40.8	6.8
						10%	54.6	54.1	28
0	-0.5	0	0.4	0.9	0.9	5%	45.5	44.4	20
						1%	33.6	32.3	6.8
						10%	96.2	94.7	61.9
0	0.9	0	-0.7	0.9	0.7	5%	95.1	93.8	54.4
						1%	90.6	89.2	38.6
							<i>n=500</i>		
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	p_{11}	p_{22}	α	$p=1$	$p=2$	
						10%	93.3	88.3	27.4
0	-0.5	0	0.4	0.2	0.4	5%	88	83.4	17.8
						1%	79.4	72.7	6.6
						10%	83.4	77.7	35.3
0	-0.5	0	0.4	0.9	0.9	5%	77.8	74	25
						1%	61.6	56.4	11.9
						10%	100	100	75.4
0	0.9	0	-0.7	0.9	0.7	5%	99.9	99.9	70.2
						1%	100	100	58.2
							<i>n=1000</i>		
$\varphi_{0,1}$	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{0,2}$	$\varphi_{1,2}$	p_{11}	p_{22}	α	$p=1$	$p=2$	
						10%	99.8	99.4	27.2
0	-0.5	0	0.4	0.2	0.4	5%	99.4	98.4	17.9
						1%	98.3	95.9	7.7
						10%	98.9	97.6	38.3
0	-0.5	0	0.4	0.9	0.9	5%	97.3	95.2	27.2
						1%	94.6	89.8	13.5
						10%	100	100	82.8
0	0.9	0	-0.7	0.9	0.7	5%	100	100	78.9
						1%	100	100	69.8

Tabella 4 Probabilità empirica di rigetto dell'ipotesi nulla per tre modelli, rispettivamente un WN, un AR e un MA, simulati con errori IID $N(0,1)$.

Test di KEENAN							
Modello	φ	θ	α	$n=200$			
				$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
WN(0,1)			10%	9.4	7.6	9.6	8.2
			5%	5.5	3.3	4.7	3.8
			1%	1.1	0.9	1	0.8
AR	0.5		10%	9	9.1	10.2	9.9
			5%	4.3	4.3	5.6	5.6
			1%	1	1.3	1.3	0.8
MA		0.5	10%	5.2	9.3	9.8	10.3
			5%	2.3	4.2	4.8	4.8
			1%	0.2	0.3	0.8	1.4

Modello	φ	θ	α	$n=500$			
				$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
WN(0,1)			10%	10.1	11.3	10	11.2
			5%	6.1	5.5	4.8	5.1
			1%	1.2	1	1.1	0.8
AR	0.5		10%	9.3	8.8	10.1	10
			5%	5	4.3	4.4	4.9
			1%	0.7	0.9	1	0.9
MA		0.5	10%	3.9	10.1	9	10.2
			5%	1.6	5.6	4.1	4.7
			1%	0.3	0.7	1.1	1.1

Modello	φ	θ	α	$n=1000$			
				$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
WN(0,1)			10%	11.1	10.9	10	9.5
			5%	5.1	5.7	5.8	4.7
			1%	0.5	0.8	1	1.1
AR	0.5		10%	9.8	8.8	11.3	11.1
			5%	5.6	4.7	5.5	5.7
			1%	1.3	1.3	0.9	1.5
MA		0.5	10%	5.1	11.5	10.5	10
			5%	2.2	6.1	5.2	5.7
			1%	0.2	1.3	0.9	1.4

Tabella 4. (Continuazione).

Test di TSAY							
Modello	φ	θ	α	$n=200$			
				$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
WN(0,1)			10%	10.3	8.5	7.8	9.5
			5%	4.1	3.9	3.2	4.7
			1%	0.8	0.7	0.8	0.9
AR	0.5		10%	8.4	8.7	12.2	10.4
			5%	5.3	4.3	6.3	5.4
			1%	1.5	0.5	1.1	1.9
MA		0.5	10%	4.9	9.8	10	10.8
			5%	2.2	5.4	5.2	4.9
			1%	0.1	1.2	0.7	1.2

Modello	φ	Θ	α	$n=200$			
				$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
WN(0,1)			10%	8.6	10.3	11.1	10.4
			5%	4.1	4.6	6.1	5.7
			1%	1	1.5	1.5	0.8
AR	0.5		10%	8.5	8.4	9.3	9.5
			5%	5.2	3.6	3.9	4.2
			1%	1.5	0.7	0.8	1.2
MA		0.5	10%	5.5	11	11	10.3
			5%	2	6.2	6.7	4.7
			1%	0.1	1.4	1.9	0.7

Modello	φ	θ	α	$n=1000$			
				$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
WN(0,1)			10%	9	8.3	8.7	10.5
			5%	4.1	3.3	4.6	5.2
			1%	1	0.4	0.9	1.1
AR	0.5		10%	8.6	10	9.8	9.1
			5%	4.6	4.9	5.2	4.7
			1%	1.1	1.2	0.5	0.5
MA		0.5	10%	5.4	10	10.4	12.3
			5%	2.5	5	4.4	4.7
			1%	0.3	1.1	1.1	1.5

Tabella 4. (Continuazione).

Test dei MOLTIPLICATORI di LAGRANGE						
Modello	φ	θ	α	$n=200$		
				$p=1$	$p=2$	$p=3$
WN(0,1)			10%	7.5	8.6	10.5
			5%	3.9	4.2	5.1
			1%	0.9	1.4	1.2
AR	0.5		10%	6.8	7.5	10.5
			5%	3.5	3.7	4.6
			1%	0.4	0.6	1.7
MA		0.5	10%	5.3	10.6	10.4
			5%	2.3	5	5.3
			1%	0.4	0.8	0.9
Modello	φ	θ	α	$n=500$		
				$p=1$	$p=2$	$p=3$
WN(0,1)			10%	10.3	9.9	9
			5%	4.7	4.4	4.8
			1%	1.0	1.1	0.7
AR	0.5		10%	9.2	8.7	9.7
			5%	3.9	3.5	4.6
			1%	1.2	0.6	0.8
MA		0.5	10%	5.2	9	10.4
			5%	2.5	4.9	4.3
			1%	0.4	1.3	1.3
Modello	φ	θ	α	$n=1000$		
				$p=1$	$p=2$	$p=3$
WN(0,1)			10%	8.3	9.5	9.3
			5%	4.6	4.7	5.2
			1%	1.3	0.7	1.2
AR	0.5		10%	7.4	9.4	8.8
			5%	3.1	4.7	4.1
			1%	0.7	1	0.8
MA		0.5	10%	5.0	9.7	11.4
			5%	2.8	4.8	6.2
			1%	0.4	1	1.6

Tabella 4. (Continuazione).

Modello	φ	θ	α	Test BDS		Test di WALD
				$n=200$		
				$m=2$	$m=3$	
WN(0,1)			10%	23.4	28.1	11.1
			5%	17.3	23.9	6.6
			1%	8.4	10.2	1.3
AR	0.5		10%	26.6	31.9	8.7
			5%	18.5	22.8	4.3
			1%	6.8	10.1	1
MA		0.5	10%	27	33.6	6.2
			5%	16	21.2	2.9
			1%	6.2	10.9	0.4
<hr/>						
Modello	φ	θ	α	$n=500$		
				$m=2$	$m=3$	
WN(0,1)			10%	14.7	17.5	10.1
			5%	8.7	11.5	5.3
			1%	3.5	4.2	0.9
AR	0.5		10%	16.3	17.8	9.5
			5%	10.2	13.1	5.2
			1%	2.6	3.2	1.3
MA		0.5	10%	17.8	19.2	5.5
			5%	10.1	10.3	2.6
			1%	3.5	4	0.2
<hr/>						
Modello	φ	θ	α	$n=1000$		
				$m=2$	$m=3$	
WN(0,1)			10%	12.3	12.6	10.1
			5%	8.3	8.2	5.8
			1%	2.5	2.6	1.8
AR	0.5		10%	14.7	14.7	9.8
			5%	7.2	8.4	4.8
			1%	1.3	1.7	0.7
MA		0.5	10%	13.4	13.5	7.3
			5%	6.7	7.6	2.7
			1%	2.1	1.9	0.5

Tabella 5 Probabilità empirica di rigetto dell'ipotesi nulla per tre modelli ARFIMA simulati con errori IID $N(0,1)$.

Test di KEENAN							
φ	d	θ	α	$n=200$			
				$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	0.2	0	10%	10.4	9.9	9.6	9.6
			5%	5.1	5.8	5.4	4.1
			1%	1.2	1.5	0.7	1
0.5	0.2	0.5	10%	12	9.5	10.1	9.3
			5%	5.9	5.4	4.7	4.5
			1%	1.1	1.4	0.4	0.6
-0.5	0.2	-0.5	10%	9.4	10.9	11.1	9.7
			5%	5.1	6.2	6.1	4.9
			1%	1.2	1.2	1.3	0.9
φ	d	θ	α	$n=500$			
				$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	0.2	0	10%	11.4	10	11.1	9.1
			5%	6.4	3.9	4.8	4.8
			1%	1.7	0.9	1.3	1.1
0.5	0.2	0.5	10%	12.6	40.6	10	11.1
			5%	6.2	6	4.4	5.3
			1%	1.6	2	0.8	1
-0.5	0.2	-0.5	10%	11.2	11.2	9.6	10.6
			5%	6.5	6.7	4.8	5.3
			1%	1.7	1.6	0.9	0.9
φ	d	θ	α	$n=1000$			
				$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	0.2	0	10%	11.9	10.3	9.2	9.6
			5%	7.3	5.6	5.4	4.8
			1%	2.3	0.4	1.1	0.6
0.5	0.2	0.5	10%	11.2	11.9	10.5	12.1
			5%	5.6	5.7	5.8	6.8
			1%	1.8	1.2	1	1.3
-0.5	0.2	-0.5	10%	10.7	13	12.3	11.5
			5%	4.9	7.2	5.8	6.1
			1%	1.4	0.9	0.8	1

Tabella 5. (Continuazione).

Test di TSAY							
φ	d	θ	α	$n=200$			
				$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	0.2	0	10%	8.9	12	9.4	10
			5%	4.1	5.8	5	4.8
			1%	0.5	1.2	1.2	1
0.5	0.2	0.5	10%	10.7	9.6	9.9	9.4
			5%	5.8	5	4.8	4.5
			1%	1.9	0.8	1.1	1.1
-0.5	0.2	-0.5	10%	12.4	11.9	10.2	10.6
			5%	6.3	5.7	4.8	5.6
			1%	1.9	1.3	1.2	1
φ	d	θ	α	$n=500$			
				$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	0.2	0	10%	11.2	11.1	8.6	9.4
			5%	6	5.2	4.5	4.8
			1%	1.5	0.8	1.1	0.8
0.5	0.2	0.5	10%	11.5	10	11	10.3
			5%	6.2	4.6	6.8	5.3
			1%	1.1	0.6	1.7	1
-0.5	0.2	-0.5	10%	11.3	12.4	11	11.5
			5%	6.5	5.1	5.5	6.2
			1%	1.6	1	0.4	1.4
φ	d	θ	α	$n=1000$			
				$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0	0.2	0	10%	11	10.9	11.7	11.9
			5%	5.7	6	5.7	6.4
			1%	1.4	1.2	1.1	1.3
0.5	0.2	0.5	10%	14.4	11.9	11.9	11.3
			5%	7.1	6.5	5.8	6
			1%	2	1.9	1.1	1.3
-0.5	0.2	-0.5	10%	12	11.1	11.2	10.1
			5%	5.8	5.9	6.4	5.3
			1%	1.2	1.6	1	0.7

Tabella 5. (Continuazione).

Test dei MOLTIPLICATORI di LAGRANGE						
φ	d	θ	α	$n=200$		
				$p=1$	$p=2$	$p=3$
0	0.2	0	10%	10	11.2	9
			5%	4.9	6.6	4.8
			1%	1.2	1.9	0.8
0.5	0.2	0.5	10%	9.2	8.8	8.3
			5%	5	3.9	3.9
			1%	0.9	0.9	0.9
-0.5	0.2	-0.5	10%	10.1	9.0	10.1
			5%	4.9	4.2	4.9
			1%	0.6	0.9	1
<hr/>						
φ	d	θ	α	$n=500$		
				$p=1$	$p=2$	$p=3$
0	0.2	0	10%	10.5	10.6	10.8
			5%	5.7	5.8	4.8
			1%	0.9	0.9	0.6
0.5	0.2	0.5	10%	10.7	11.6	8.7
			5%	5.3	5.3	3.9
			1%	1.3	1.3	1
-0.5	0.2	-0.5	10%	12.3	9.1	12.4
			5%	6.1	4.7	6
			1%	1.3	0.9	0.5
<hr/>						
φ	d	θ	α	$n=1000$		
				$p=1$	$p=2$	$p=3$
0	0.2	0	10%	10.5	10.7	10
			5%	4.8	5.5	4.4
			1%	1.1	1.3	1
0.5	0.2	0.5	10%	10.8	10.8	8.1
			5%	5.4	5.2	3.9
			1%	1.1	1	0.8
-0.5	0.2	-0.5	10%	11.6	10.7	10
			5%	5.2	5.3	4.7
			1%	1	1.3	1

Tabella 5. (Continuazione).

φ	d	θ	α	Test BDS		Test di WALD
				$n=200$		
				$m=1$	$m=2$	
0	0.2	0	10%	25.4	30.6	9.7
			5%	17.8	23.3	5.1
			1%	7.9	10.9	1.1
0.5	0.2	0.5	10%	28.4	32.2	10.3
			5%	17.4	22.6	4.9
			1%	8.8	11.4	1.3
-0.5	0.2	-0.5	10%	25.4	27.9	11.7
			5%	16.2	22.7	6.4
			1%	7.3	11.4	1.4
<hr/>						
φ	d	θ	α	$n=500$		
				$m=1$	$m=2$	
				$m=1$	$m=2$	
0	0.2	0	10%	15.9	19.8	9.5
			5%	9.7	11.6	5.7
			1%	2.9	4.1	1.6
0.5	0.2	0.5	10%	15.8	18.5	10.4
			5%	8.6	10	6
			1%	3.2	3.3	1.6
-0.5	0.2	-0.5	10%	16.2	21.2	12.2
			5%	9.7	11.5	5.8
			1%	3.7	4.4	1.9
<hr/>						
φ	d	θ	α	$n=1000$		
				$m=1$	$m=2$	
				$m=1$	$m=2$	
0	0.2	0	10%	14.1	16.3	12.1
			5%	8.6	9.6	5.3
			1%	2.2	2.4	1.5
0.5	0.2	0.5	10%	11.5	13.3	10
			5%	7.2	7.9	4.7
			1%	1.3	2.5	1.3
-0.5	0.2	-0.5	10%	11.3	12.9	11.7
			5%	7.5	7.3	7.4
			1%	2.5	3.4	2.1

Alla luce dei risultati della simulazione possiamo trarre delle conclusioni di carattere generale per ogni test calcolato.

Il test di Keenan ha una buona potenza per i modelli non lineari SETAR ed LSTAR, mentre per i modelli MARKOV-SWITCHING non ha una buona *performance*. Inoltre si può notare come per tutti i modelli, il test non migliora all'aumentare della numerosità.

Per quanto riguarda il test di Tsay, individua bene sia la linearità sia la non linearità, soprattutto per numerosità maggiore di 500, fatta eccezione per i modelli MARKOV-SWITCHING. Questo è in linea con i risultati riportati da Ashley & Patterson (1998).

Il test dei Moltiplicatori di Lagrange funziona molto bene per i modelli SETAR e LSTAR, mentre identifica meno la non linearità di tipo MARKOV-SWITCHING, anche se aumenta con l'aumentare della numerosità e per $n=1000$ otteniamo buoni risultati.

Possiamo trarre le stesse conclusioni per il test di Wald, in quanto non ha una buona *performance* solo con i modelli MARKOV-SWITCHING, ed inoltre aumenta di poco all'aumentare della numerosità.

L'unico che genera buone *performance* per i MARKOV-SWITCHING è il test BDS. Quest'ultimo però non funziona altrettanto bene per i modelli LSTAR considerati. Inoltre caratteristica del test è l'aumento della potenza empirica per numerosità elevate, come dimostrato in diversi articoli, tra i quali quello di Broock, Scheinkman, Dechert e LeBaron.

Per tutti i modelli lineari considerati invece, tutti i test accettano, con buoni risultati, l'ipotesi di linearità dei processi.

CONCLUSIONI

Dalla nostra applicazione è emerso che i test di linearità trattati possono essere un buono strumento per diagnosticare la presenza di non linearità per le serie storiche. In particolare i test trattati sembrano mostrare le migliori *performance*, almeno per i casi considerati, per i modelli SETAR.

È chiaramente complicato giungere ad una decisione univoca riguardo al test più potente poiché ci sono diverse combinazioni di parametri per ogni modello lineare e non lineare preso in considerazione in questa sede.

Alla luce dei risultati ottenuti, un approccio che ci pare particolarmente interessante e che meriterebbe di essere approfondito, è l'applicazione dei test di linearità a serie storiche economiche e finanziarie reali.

BIBLIOGRAFIA

- WILLIAM W. S. WEI, “*Time Series Analysis*”. Pearson Addison Wesley.
- RUEY S. TSAY, “*Analysis of financial Time Series*”. Wiley.
- C. W. J. GRANGER e T. TERASVIRTA, “*Modelling non linear economic relations relationships*”, Advanced Texts in Econometrics.
- PHILIP HANS FRANSES, DICK VAN DIJK, “*Non-linear time series models in empirical finance*”.
- HOWELL TONG, “*Non-linear Time Series, A Dynamical System Approach*”.
- JAMES D. HAMILTON, “*Econometria delle serie storiche*”. Monduzzi Editore.
- M. B. PRIESTLEY, “*Non-linear and non-stationary time series analysis*”.
- VAN DIJK, TERASVIRTA e FRANSES, “*Smooth transition autoregressive models*”. A survey of recent developments, Working Paper.
- CHRIS CHATFIELD, “*The analysis of time series, an introduction*”. Chapman & Hall.
- TOMMASO DI FONZO, FRANCESCO LISI, “*Serie Storiche Economiche*”. Carocci.
- DAVID I. HARVEY AND STEPHEN J. LEYBOURNE, “*Testing for time series linearity*”. *Econometric journal* (2007), volume 10, pp.149-165.

RICHARD A. ASHLEY, DOUGLAS M. PATTERSON, “*Non linear model specification/diagnostics: insights from a battery of nonlinearity tests*”.

JOSEPH D. PETRUCCELLI, “*A comparison of tests for SETAR-type non-linearity in time series*”. Journal of forecasting, Vol. 9, 25-36 (1990).

W. A. BROOCK, J.A. SCHEINKMAN, W.D. DECHERT, B. LEBARON, “*A test for independence based on the correlation dimension*”. Econometric Reviews.

DAVID I. HARVEY, STEPHEN J. LEYBOURNE e BIN XIAO, “*A powerful test of linearity when the order of integration is unknown*”. Granger Centre Discussion Paper No.07/06.

MARKO KORHONEN, “*An empirical investigation of two nonlinear models in real exchange rates series*”. University of Oulu.