



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Orizzonti Cosmologici nel Modello Inflazionario

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureanda

Gaia Contu

Anno Accademico 2017/2018

Ai miei amici, la seconda famiglia che mi ha accolto e salvato,
facendomi riscoprire cosa volesse dire essere amati.
A Padova, che con le sue vie e portici mi ha preso sotto la sua ala affettuosa.
Alle amiche di casa, che non hanno smesso neanche un giorno di sostenermi.
Ad ogni persona che ho incontrato in questo percorso.
A tutta la mia meravigliosa famiglia.
Ad Alessandro.
A Micòl.

Indice

1	Introduzione	1
2	Fondamenti	3
2.1	Cenni Storici: il Modello Cosmologico Standard	3
2.2	Definizioni e Geometria	4
3	Orizzonti Cosmologici	7
3.1	Differenti Nozioni di Orizzonte	7
3.1.1	Spaziotempo e Cono-Luce Passato	7
3.1.2	Orizzonti Non Locali	8
3.1.3	Orizzonti Locali	12
3.2	Diagrammi conformi	14
3.2.1	Costruzione di un diagramma di Penrose	14
3.2.2	Relazione con l'esistenza di Orizzonti	15
3.2.3	Diagrammi di Penrose per lo Spaziotempo di Friedmann-Lemaître	16
3.3	Universo dominato da Materia e Radiazione	17
3.3.1	Caratterizzazione degli Orizzonti	17
3.3.2	Implicazioni nel <i>Big Bang Model</i> e <i>Superhorizon Modes</i>	19
3.3.3	Problema della Piattezza e Problema dell'Orizzonte	20
4	Modello Inflazionario	23
4.1	Il Paradigma dell'Inflazione	23
4.2	Inflazione come soluzione ai problemi del <i>Big Bang Model</i>	25
4.3	Orizzonti nel Modello Inflazionario	26
4.3.1	Universo di de Sitter	26
4.3.2	Orizzonti in uno spazio di de Sitter	27
5	Conclusioni	29
	Bibliografia	31

Capitolo 1

Introduzione

Il presente lavoro si pone l'obiettivo di analizzare le strutture causali dello spaziotempo attraverso lo studio degli orizzonti. Dopo un'analisi approfondita delle diverse tipologie di orizzonte e dei diagrammi utili alla loro raffigurazione, essi verranno inquadrati nella cornice del modello inflazionario, ovvero il modello di universo che prevede nelle sue fasi iniziali un'espansione accelerata in cui incrementa la sua dimensione di un fattore estremamente elevato, di 10^{25} - 10^{30} , in un tempo brevissimo, di circa 10^{-30} s.

Si partirà nel *Capitolo 1* inquadrando storicamente l'analisi cosmologica, secondo la descrizione della ref. [1], per poi introdurre le quantità e i formalismi necessari per una trattazione puntuale dell'argomento, sulla base di quanto esposto negli articoli [1], [2] e [3]. Verranno quindi introdotte le definizioni di coordinata radiale comoviente e tempo conforme, la metrica, il concetto di redshift, la legge di Hubble con le relative costanti e l'equazione di Friedman, considerando il caso di un universo dominato da materia e radiazione.

Nel *Capitolo 2* si entrerà nel vivo della trattazione degli orizzonti cosmologici, divisi in orizzonti locali e orizzonti non locali, dopo aver introdotto le nozioni di evento nello spaziotempo e cono-luce passato. Gli orizzonti non locali comprendono l'Orizzonte delle particelle, l'Orizzonte primordiale delle particelle, l'Orizzonte visivo e l'Orizzonte degli eventi. Essi verranno trattati secondo la discussione delle ref. [2] e [3]. Gli orizzonti non locali sono invece costituiti dall'Orizzonte di Hubble e dall'Orizzonte apparente, anch'essi descritti seguendo quanto illustrato nelle ref. [2] e [3]. Si studieranno poi i diagrammi conformi di Penrose, utile rappresentazione grafica dello spaziotempo e se ne analizzerà la relazione con l'esistenza di orizzonti, in linea con l'esposizione della ref. [2]. Quindi si introdurrà l'universo dominato da materia e radiazione e si inquadrerà in tale ottica la descrizione degli orizzonti e dei loro diagrammi spaziotemporali, basandosi anche qui sull'analisi dell'articolo [2]. A questo punto si contestualizzerà l'analisi nel quadro del *Big Bang Model*, sottolineandone le implicazioni e definendo i *Superhorizon* e *Subhorizon Modes*; da qui verranno evidenziate le prime falle rappresentate dai problemi della piattezza e dell'orizzonte, utilizzando per l'analisi quanto approfondito nelle ref. [1], [2] e [6], che verranno risolte con l'introduzione nella teoria del periodo inflazionario.

Tale soluzione, l'inflazione, verrà approfondita nel *Capitolo 3*. Si partirà anche qui con un collocamento diacronico della teoria, in cui si presentano i modelli dell'*Old Inflation* e della *New Inflation*, con l'introduzione di un campo scalare φ , seguendo la trattazione della ref. [1]. Quindi si procederà a mostrare come l'introduzione di una fase inflazionaria risolva i problemi del *Big Bang Model* enunciati nel capitolo precedente, avvalendosi di quanto discusso nelle ref. [6], [1] e [2]. In ultimo si approfondirà lo spaziotempo di de Sitter, che meglio descrive la fase inflazionaria, mostrandone le diverse rappresentazioni e considerando in tale contesto gli orizzonti, in base a quanto esaminato nell'articolo [2].

Capitolo 2

Fondamenti

2.1 Cenni Storici: il Modello Cosmologico Standard

Un modello cosmologico è una rappresentazione matematica dell'universo basata su leggi fisiche convalidate localmente, a metà fra fisica teorica e astronomia. La cosmologia scientifica nel senso proprio del termine nasce con la relatività generale di Albert Einstein nei primi anni del '900; in particolare l'inizio effettivo della cosmologia relativistica può essere fatto coincidere con l'uscita dell'articolo seminale di Einstein nel 1917 in cui egli, introducendo una costante cosmologica Λ (ad oggi associata all'energia del vuoto), trova una soluzione statica alle sue equazioni, il cui spazio ha la topologia di una sfera tridimensionale. Ciò aprì la strada alla derivazione delle soluzioni esatte delle equazioni di Einstein, implicanti diversi possibili modelli di universo. Il matematico e cosmologo Aleksandr Friedmann e indipendentemente il fisico Georges Lemaître svilupparono il primo modello dinamico di universo, scoprendo, come predizione delle equazioni della relatività generale, l'espansione dell'universo. Lemaître fu anche il primo ad associare all'aspetto teorico quello osservativo, intuendo che l'espansione delle galassie potesse essere connessa al concetto di redshift (spostamento verso il rosso) degli spettri elettromagnetici osservati. L'intuizione venne poi confermata dalle osservazioni di Edwin Hubble nel 1929, che nella legge di Hubble, per la cui definizione rigorosa si rimanda alla sezione successiva, lega la velocità di recessione delle galassie alla loro distanza dall'osservatore terrestre, tramite una costante che quantifica perciò il tasso di espansione cosmica. La legge di espansione deriva dalle equazioni di Einstein nell'ottica uno spaziotempo isotropo e spazialmente omogeneo, in riferimento al modello di Friedmann-Lemaître. Vennero in questa fase poste le basi per il modello cosmologico standard.

La seconda fase può essere fatta partire nel 1948, in cui vennero investigate le proprietà dei processi atomici e nucleari dell'universo in espansione: questo permise ai fisici Ralph Alpher, Hans Bethe e George Gamow di predire l'esistenza del cosiddetto CMB (*Cosmic Microwave Background*), ovvero un fondo di radiazioni cosmiche capaci di portare informazioni, e stimarne la temperatura, oltre che di comprendere la BBN (*Big Bang Nucleosynthesis*), ovvero la sintesi dei nuclei nell'universo primordiale. Queste scoperte portarono a sviluppi teorici verificati con successo dall'osservazione: si capì ad esempio che l'universo è permeato di un serbatoio termico che ha lo spettro di emissione di un corpo nero, la cui temperatura decresce con l'espansione dell'universo, partendo da una situazione di equilibrio termico a elevatissime temperature e densità. Il modello però presenta diversi inconvenienti, come il fatto che l'universo è spazialmente molto vicino all'essere euclideo (*flatness problem*), che si ha una singolarità iniziale *spacelike*, detta Big Bang, e che le condizioni iniziali di equilibrio termico, omogeneità e isotropia sono poste come condizioni iniziali e non spiegate (*horizon problem*); inoltre non si tiene conto della non omogeneità della materia, che è ovviamente distribuita in galassie, cluster e vuoti cosmici. Molti di questi problemi vennero risolti dall'introduzione nella teoria di una fase primordiale di espansione accelerata, chiamata inflazione.

Si giunge quindi al terzo periodo, che fu dominato dall'analisi della crescita delle disomogeneità di densità da parte di Evgeny Lifshitz, aprendo la strada alla comprensione dell'evoluzione della struttura a grande scala dell'universo. Tecnicamente ciò si tradusse nella teoria delle perturbazioni cosmologiche:

considerando cioè come punto di partenza lo spaziotempo di Friedmann-Lemaître, si ha che la materia che lo costituisce e la sua geometria sono perturbate e l'evoluzione di tali perturbazioni si deriva dalle equazioni di Einstein. Si cercò dunque di comprendere l'origine e la natura (ampiezza, distribuzione statistica) di tali fluttuazioni e si arrivò, da un punto di vista teorico, a identificarne l'origine nelle proprietà quantistiche della materia, mentre da un punto di vista osservativo, alla distribuzione della struttura a grande scala dell'universo, in particolare all'anisotropia della temperatura del CMB.

Gli sviluppi sperimentali e teorici portarono quindi a due conclusioni: deve esserci un quantitativo sostanziale di *materia oscura* o CDM (*Cold Dark Matter*) e la costante cosmologica Λ inizialmente predetta da Einstein deve esistere non nulla. Queste si tradussero nella formulazione del modello Λ CDM da parte di Jeremy Ostriker e Paul Steinhard nel 1995, che venne però accettato dalla comunità scientifica solo dopo le prime analisi dei diagrammi di Hubble di una supernova di tipo Ia nel 1999. Il modello è attualmente in accordo con tutti i test osservativi (CMB, diagrammi di Hubble, lenti gravitazionali, catalogo delle galassie etc.) e i parametri sono misurati con sempre maggiore accuratezza: si può dunque denominare questa ultima fase come era della cosmologia osservativa, con la questione aperta del settore oscuro. Si arriva dunque a un quadro del modello cosmologico standard, le cui principali caratteristiche sono riassunte nella figura seguente, in cui si ha una comprensione globale dell'universo a partire da 10^{-35} s dopo il Big Bang fino ad oggi.

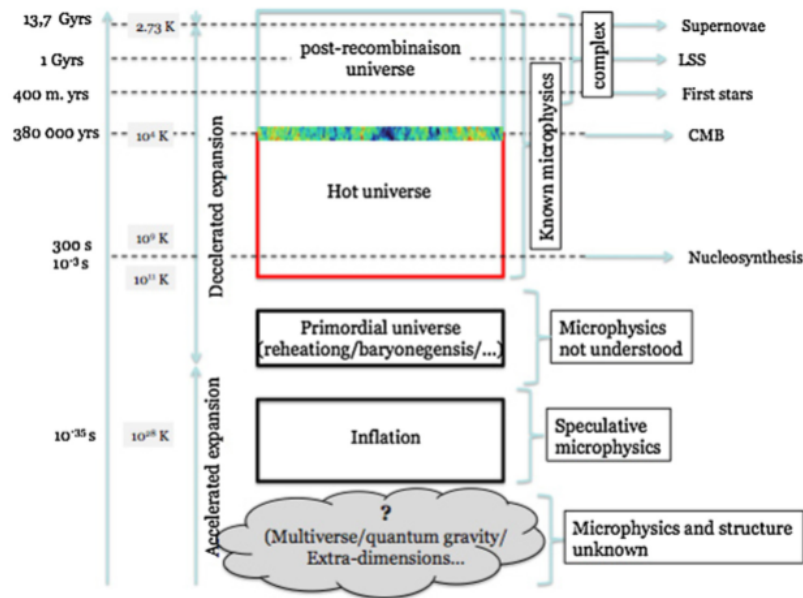


Figura 2.1: Storia dell'Universo secondo il Modello Cosmologico Standard

2.2 Definizioni e Geometria

Nel modello cosmologico standard l'universo è descritto da uno spaziotempo spazialmente omogeneo e isotropo, la cui metrica è quella descritta da Friedmann-Lemaître, con geometria:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}(x^k)dx^i dx^j \quad (2.1)$$

Dove t è il tempo cosmico (ovvero il tempo proprio dell'osservatore fondamentale), $a(t)$ il fattore di scala e γ_{ij} la metrica di una ipersuperficie costante Σ_t in coordinate comoventi.

Si apre a tal proposito una parentesi sulle coordinate comoventi, ovvero le coordinate considerate in maniera indipendente dall'espansione e dal tempo, cioè nell'approssimazione di universo statico. In particolare la coordinata radiale comovente di un oggetto è definita come segue:

$$\chi(t_{em}) = c \int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \quad o \quad \chi(z) = \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (2.2)$$

dove nella prima identità il pedice *em* sta per *emissione* e nella seconda identità si è usato il concetto di redshift z :

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)}. \quad (2.3)$$

Dalla coordinata comovente si definisce poi la distanza propria $D(t) = a(t)\chi$, che differenziata dà la forma teorica della legge di Hubble:

$$v_{rec}(t, z) = \dot{a}(t)\chi(z) = H(t)D(t). \quad (2.4)$$

che lega la velocità di recessione di una galassia osservata al tempo t con redshift z alla sua distanza propria dall'osservatore. $H = \frac{\dot{a}}{a}$ è il parametro di Hubble, che fissa la distanza caratteristica e la scala temporale di un universo di Friedmann-Lemaître. Attualmente i valori della distanza di Hubble e del tempo di Hubble sono dati ponendo la costante di Hubble $H_0 = 100 h \cdot \text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ [pc = parsec, distanza dalla Terra di una stella che ha una parallasse annua di 1 secondo d'arco], con $h = 0.7$, ottenendo:

$$D_{H_0} = 9.26 h^{-1} \times 10^{25} \text{ m} \sim 3000 h^{-1} \text{ Mpc} \quad (2.5)$$

$$t_{H_0} = 9.78 h^{-1} \times 10^9 \text{ years} \quad (2.6)$$

A questo punto si può tornare all'equazione (2.1) della metrica, per cui, definendo il tempo conforme η :

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \quad (2.7)$$

l'equazione può essere riscritta in termini di tale quantità, ottenendo:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left(-d\eta^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j \right) \quad (2.8)$$

dove $\gamma_{ij} dx^i dx^j = d\chi^2 + f_k^2(\chi) d\Omega^2$ in coordinate sferiche comoventi. Il parametro K che compare a pedice è molto importante in quanto indica la curvatura spaziale normalizzata e si ha, per $K = (+1, 0, -1)$, $f_K(\chi) = \left(\sin\left(\frac{\sqrt{K}\chi}{\sqrt{K}}\right), \chi, \sinh\left(\frac{\sqrt{-K}\chi}{\sqrt{-K}}\right) \right)$. I tre valori di K corrispondono rispettivamente a un universo ellittico, piatto e iperbolico.

Considerando quindi un universo con curvatura spaziale K , contenente un fluido di materia cosmica di densità di energia ρ , di pressione P e di costante cosmologica Λ , si arriva a un'altra delle equazioni di fondamentale importanza in questa trattazione, l'equazione di Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.9)$$

Da cui viene dedotta l'evoluzione del fattore di scala:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.10)$$

con l'ovvio significato di G di costante di gravitazione universale. Si vede subito che l'espansione dell'universo sarà in decelerazione a meno che $\rho + 3P < 0$, condizione che con la materia ordinaria normalmente non si verifica, e si otterrà l'equazione di evoluzione del fluido cosmico

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + 3P) = 0 \quad (2.11)$$

dalla quale si deduce che, per un fluido con equazione di stato $w = \frac{P}{\rho} = \text{cost}$, la densità di energia evolve come $\rho \propto a^{-3w}$.

A questo punto, dividendo l'equazione (2.9) per il quadrato della costante di Hubble al tempo t_0 , H_0^2 , e considerando un universo contenente i fluidi con densità di energia ρ_i , si arriva a una versione alternativa dell'equazione di Friedmann:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \sum_i \rho_i - \frac{K}{a^2 H_0^2} + \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (2.12)$$

da cui, introducendo i parametri di densità normalizzati $\Omega_i = \frac{8\pi G \rho_i}{3H_0^2}$, $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$ e $\Omega_K = -\frac{K}{a_0^2 H_0^2}$, l'equazione prende la forma:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_i \Omega_i (1+z)^{3(1+w_i)} + \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_\Lambda. \quad (2.13)$$

Usualmente nel modello Λ CDM si utilizza $\Omega_\Lambda = 0.7$ e $\Omega_M = 0.3$, dove quest'ultimo indica la densità di materia.

Si accenna in ultimo che, data una metrica ds^2 con la convenzione del tensore metrico di Minkowski $\eta = (-, +, +, +)$, si utilizzerà nel seguito la terminologia per cui se $ds^2 < 0$ si avrà un oggetto di tipo tempo (*timelike*), se $ds^2 > 0$ di tipo spazio (*spacelike*) e se $ds^2 = 0$ di tipo luce (*lightlike* o *null*).

Capitolo 3

Orizzonti Cosmologici

3.1 Differenti Nozioni di Orizzonte

Si parla di orizzonte cosmologico quando si vuole definire un limite di osservabilità (da non confondere con *visibilità*) dell'universo da parte di un osservatore all'origine.

Vi sono differenti nozioni di orizzonte: in particolare si può operare una distinzione fra orizzonti non locali e orizzonti locali, che non sono propriamente orizzonti, come si vedrà in seguito. Per prima cosa si introducono alcuni requisiti concettuali, come la definizione dello spaziotempo e le nozioni di evento e cono-luce passato.

3.1.1 Spaziotempo e Cono-Luce Passato

Per introdurre la nozione di orizzonte, si assume inizialmente che lo spaziotempo \mathcal{M} considerato sia globalmente iperbolico in modo da poter essere foliato da una famiglia continua di ipersuperfici tridimensionali Σ_t *spacelike*. Ciò significa che esisterà una funzione regolare \hat{t} *timelike* su \mathcal{M} il cui gradiente non si annulla mai, in modo che ogni ipersuperficie è una superficie a \hat{t} costante

$$\Sigma_t = \{p \in \mathcal{M}, \hat{t}(p) = t\} \quad (3.1)$$

$\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ e $g_{\mu\nu}\hat{t}_\mu\hat{t}_\nu < 0$, dove I è un insieme massimale di \mathbb{R} , così che Σ_t copra tutto \mathcal{M} .

Questa tipologia di spaziotempo, che rappresenta la grande maggioranza di quelli di interesse astrofisico, implica l'esistenza di una direzione del tempo globale: infatti l'espansione dell'universo, che è strettamente correlata con l'esistenza di orizzonti, si verifica in relazione a una direzione futura del tempo.

Inoltre, nel caso cosmologico, si assume ovunque l'esistenza di una famiglia di osservatori a riposo con quadrivelocità u^μ tale che, definendo un sistema di riferimento preferenziale in ogni punto, $u^\mu u_\mu = -1$: ciò assicura che le linee di universo di un osservatore fondamentale non si intersecano mai.

A questo punto, dato uno spaziotempo \mathcal{M} con metrica $g_{\mu\nu}$, si può dare una definizione di cono-luce passato, che indicherà una serie di eventi che possono essere osservati tramite radiazione elettromagnetica, indipendentemente dalla sua lunghezza d'onda.

Per ogni evento p , il cono-luce passato $C^-(p)$ è il set di eventi q tali che esisterà una geodetica nulla con direzione futura che unisce q a p . Tecnicamente, per ogni evento q su $C^-(p)$ esiste una geodetica nulla $x^\mu(\lambda)$, parametrizzata dal parametro affine $\lambda \leq 0$ (scelto negativo così che il suo incremento corrisponda alla direzione futura del tempo), tale che $x^\mu(0) = p$ e c'è un valore λ_1 tale che $x^\mu(\lambda_1) = q$. Il suo vettore tangente $k^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ soddisfa le equazioni di geodetica nulla:

$$k^\mu k_\mu = 0, \quad k^\mu \nabla_\mu k^\nu = 0 \quad (3.2)$$

Il cono-luce passato è una superficie tridimensionale di tipo luce che può essere parametrizzata da due angoli (θ, ϕ) corrispondenti alla direzione di osservazione nel cielo e al redshift z che caratterizza la distanza lungo il cono-luce. Quest'ultimo si definisce come:

$$1 + z \equiv \frac{(-k^\mu u_\mu)_{sorg}}{(-k^\mu u_\mu)_{oss}} \quad (3.3)$$

dove u^μ è il vettore tangente alle linee di universo di sorgente e osservatore. Le quantità sono definite rispetto all'osservatore fondamentale.

Per costruzione, $C^-(p)$ dipende dall'evento p , quindi si avrà un diverso cono-luce per ogni osservatore e anche il cono-luce del singolo osservatore muterà nel tempo. In cosmologia questo effetto è all'origine del *drift* temporale del redshift osservato.

Si richiama inoltre un'importante proprietà: considerati due spazi-tempo le cui metriche $g_{\mu\nu}$ e $\tilde{g}_{\mu\nu}$ sono conformi (ad esempio $g_{\mu\nu} = \Omega^2 \tilde{g}_{\mu\nu}$), ogni geodetica nulla di $g_{\mu\nu}$ con parametro affine λ è una geodetica nulla di $\tilde{g}_{\mu\nu}$ con parametro affine $\tilde{\lambda}$, dove $d\lambda = \Omega^2 d\tilde{\lambda}$ e quindi $\tilde{k}^\mu = \Omega^2 k^\mu$ (ref. [4]).

3.1.2 Orizzonti Non Locali

Si possono definire diversi tipi di orizzonti non locali o globali, chiamati orizzonte delle particelle, orizzonte primordiale delle particelle, orizzonte visivo e orizzonte degli eventi. Essi sono definiti in relazione alla direzione futura del tempo e sono *non locali* nel senso che dipendono dalla struttura geodetica a larga scala dello spaziotempo.

Orizzonte delle Particelle

Si definisce orizzonte delle particelle (PH) la massima distanza comovente da cui la luce può aver raggiunto l'osservatore dalla nascita dell'universo al momento presente. In altri termini, dato un osservatore O nella posizione spaziotemporale p , l'orizzonte delle particelle è definito come la linea di universo della più lontana particella fondamentale che può influenzare l'osservatore causalmente, purché tale limite esista.

Per un osservatore O al tempo t_0 esso è una ipersuperficie *timelike* che al tempo $t = t_0$ divide tutte le particelle dell'universo in due famiglie non vuote: quelle che potrebbero essere già state osservate o essere in contatto causale con O al tempo t_0 e quelle per cui ciò non avviene. Per ciascun tempo t_0 l'orizzonte delle particelle è determinato come l'intersezione fra le geodetiche delle più distanti particelle comoventi che possono essere in connessione causale (che giacciono sul cono-luce passato $C^-(p)$ di p) con la ipersuperficie passata Σ_{t_1} , con t_1 non necessariamente finito, che è portato ai limiti dello spaziotempo. Esso risulta quindi essere il margine di una superficie bidimensionale *spacelike* che si riduce a una sfera di centro O , se lo spaziotempo ha una geometria rotazionale intorno alla linea di universo dell'osservatore. Chiaramente ciò dipende dalla foliazione dello spaziotempo in superfici a $t = \text{cost}$: in una geometria spazialmente omogenea come quella di Friedmann-Lemaître la foliazione è unica.

In cosmologia, l'orizzonte delle particelle è un concetto chiave nella discussione dei limiti causali di un osservatore al tempo presente: riguarda infatti l'inizio dell'universo (o il limite iniziale, se si sta considerando un modello che non prevede un inizio).

Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'orizzonte delle particelle è che l'integrale della distanza radiale comovente definita nell'equazione (2.2), per $c = 1$, $\chi(t_1, t_0) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$ sia convergente

per $t_1 \rightarrow 0$ o $t_1 \rightarrow -\infty$, a seconda che $a(t)$ continui per valori negativi di t o meno. Per semplicità nella trattazione si considera il primo caso.

Dunque per ogni tempo t_0 , una particella tale che la sua coordinata radiale $\chi > \int_0^{t_0} a^{-1} dt$ non è stata ancora osservata dall'osservatore O all'origine. L'orizzonte delle particelle a un dato tempo t_0 sarà dunque definito dalla superficie bidimensionale

$$\chi_{PH}(t_0) \equiv \chi(0, t_0) = \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.4)$$

e più propriamente sarà la superficie tridimensionale *timelike* generata da tutte le linee di universo fondamentali passanti attraverso la superficie bidimensionale appena enunciata.

Una visione intuitivo-grafica può essere data considerando il cono-luce di creazione, ovvero l'ipersuperficie $\sigma : \chi = \chi(0, t)$, che è il cono-luce futuro emesso dalla posizione dell'osservatore a $t = 0$. L'orizzonte delle particelle a un tempo t_0 può infatti essere visto come la sezione a $t = t_0$ di questa superficie spaziotemporale. In particolare, nel tempo conforme, il cono-luce di creazione è un cono a $\pm \frac{\pi}{4}$ e l'orizzonte delle particelle a t_0 è una sfera bidimensionale rappresentata dal punto in cui il cono-luce di creazione interseca $t = t_0$.

Secondo la definizione data si ha che le particelle già osservate al tempo t_0 verificano la relazione $\chi \leq \chi_{PH}$, quelle che si trovano nella famiglia opposta invece verificano $\chi > \chi_{PH}$.

Il diametro fisico attuale dell'orizzonte delle particelle è:

$$D_{PH} = a(t_0)\chi_{PH}(t_0) \quad (3.5)$$

Poiché $a(t)$ è una funzione positiva, quando $\chi_{PH}(t_0)$ esiste, ovvero l'integrale (3.4) converge, la dimensione dell'orizzonte è una funzione crescente di t_0 , così che più il tempo passa, più particelle sono visibili dall'origine O . Dunque non è possibile per particelle che entrano nell'orizzonte delle particelle lasciarlo: una volta che entrano in contatto causale in uno spaziotempo di FL lo rimangono per sempre.

Si nota in ultimo che se si considera una topologia non banale, ad esempio non semplicemente connessa, con sezioni spaziali chiuse, lo spaziotempo potrebbe non avere nessun orizzonte delle particelle, come avviene nel caso di un'espansione accelerata con inizio non singolare.

Orizzonte Primordiale delle Particelle

Si può definire un orizzonte delle particelle per eventi ai primi momenti dell'universo, ad esempio al momento della ricombinazione: questo verrà definito orizzonte primordiale delle particelle (PPH). Il tempo che si considera è il t_{LSS} (*Last Scattering Surface*), che avviene a un redshift dell'ordine di $z_{LSS} \sim 1100$ ed è la superficie dalla quale il CMB ha origine. L'universo cioè rimane trasparente fino a che la temperatura del bagno di fotoni diminuisce abbastanza da permettere la formazione di idrogeno neutro ed elio (ref. [5]).

Propriamente l'orizzonte primordiale delle particelle è così definito:

$$\chi_{PPH} = \chi(t_{LSS}, 0) = \int_0^{t_{LSS}} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.6)$$

Questa superficie limitativa controlla quali interazioni causali furono possibili fino al tempo di ricombinazione t_{LSS} , quando la radiazione cosmica di microonde di background CMB venne emessa. Eventi al tempo t_{LSS} , la cui distanza comoviente sia superiore a χ_{LSS} , non possono essersi influenzati vicendevolmente.

Orizzonte Visivo

Se il cono-luce passato interseca la sezione spaziale Σ_{t_d} , prima della quale lo spaziotempo è opaco alla radiazione elettromagnetica, ciò porta all'esistenza di un orizzonte visivo (VH) per la radiazione elettromagnetica. Esso è definito come la serie di linee di universo fondamentali che passano attraverso $\Sigma_p \equiv C^-(p) \cap \Sigma_{t_d}$ e costituisce un vero e proprio orizzonte osservativo, in quanto rappresenta il limite oltre il quale non si può vedere per mezzo di alcuna forma di radiazione elettromagnetica. Segue dalla definizione che l'orizzonte visivo contiene le linee di universo di tutta la materia che può essere osservata tramite fotoni di qualsiasi lunghezza d'onda. La superficie di *last scattering* (LSS) prima enunciata costituisce quindi un tipico esempio di tale orizzonte.

L'orizzonte visivo di un osservatore comovente al tempo t_0 è dato da:

$$\chi_{VH} = \chi(t_0, t_{LSS}) = \int_{t_{LSS}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.7)$$

da cui si vede che, per costruzione, le linee di universo all'interno dell'orizzonte visivo sono a loro volta contenute nell'orizzonte delle particelle: si ha infatti che

$$\chi_{PH}(t_0) = \chi_{VH}(t_0) + \chi_{PPH} \quad (3.8)$$

considerando quanto enunciato nei paragrafi precedenti.

Una rappresentazione grafica viene data nella figura seguente, in cui si vede che l'universo osservabile per un evento p , corrispondente alla posizione O al tempo t , è la regione delimitata dal cono-luce passato $C^-(O)$ fino a Σ_{t_0} , in uno spaziotempo globalmente iperbolico:

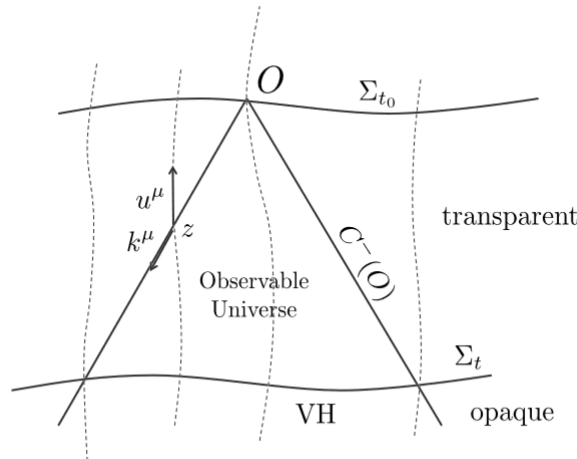


Figura 3.1: Cono-luce passato, orizzonte visivo e universo osservabile per un osservatore O

A tempi successivi p' (indicabile anche con O'), l'orizzonte corrispondente si muoverà e $\Sigma_{p'}$ (o $\Sigma_{O'}$) rimarrà fuori da Σ_p (o Σ_{t_0}).

La sfera bidimensionale Σ_p delinea la più lontana materia osservabile dell'universo per p , che è quella che viene osservata attraverso le osservazioni di radiazione cosmica di background, come quelle ad opera dei satelliti COBE (*Cosmic Background Explorer*) e Planck e del radiotelescopio Bicep2 (*Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization*). Chiaramente a seconda dei "messaggeri" utilizzati si avrà un diverso orizzonte visivo, in particolare si possono identificare dei $VH(\gamma)$, $VH(\nu)$ e $VH(GW)$ rispettivamente per fotoni (γ), neutrini (ν) e onde gravitazionali (*Gravitational Waves*). La differenziazione è dovuta a due motivi principali: in primis, diverse particelle identificano diversi coni; i neutrini ad esempio, essendo massivi, si propagano all'interno del cono-luce, cosa che non accade ai fotoni e alle

onde gravitazionali. In secondo luogo, l'universo può divenire opaco in diverse circostanze a seconda dei casi: il *last scattering* avviene prima per i neutrini che per i fotoni e per le onde gravitazionali l'universo rimane trasparente fino al tempo di Planck, grandezza caratteristica pari a $\approx 10^{-44}$ s. I raggi cosmici non sono utilizzati come messaggeri in quanto, a causa della presenza di campi magnetici, la loro traiettoria non segue le geodetiche dello spaziotempo, perciò la loro direzione di arrivo non dà informazioni sulla posizione di partenza.

Come avviene anche per l'orizzonte delle particelle, si nota in ultimo che se la sezione spaziale ha una topologia non banale, come nel caso in cui la dimensione del dominio fondamentale è più piccola della dimensione dell'orizzonte visivo nel suo spazio di copertura, lo spaziotempo potrebbe non avere orizzonte visivo.

Orizzonte degli eventi

Si definisce orizzonte degli eventi (EH) la massima distanza comovente da cui la luce potrà mai raggiungere l'osservatore, dalla nascita dell'universo a qualsiasi momento futuro. Esso limita dunque cosa può influenzare un osservatore nella sua intera storia; non si riferisce cioè ad alcuna misura istantanea o osservazione che può essere fatta al momento presente, contrariamente a quanto avviene per l'orizzonte delle particelle.

Per un osservatore O , l'orizzonte degli eventi è l'ipersuperficie *lightlike* che divide gli eventi in due famiglie: quelli che sono stati, sono o saranno osservati nel futuro da O (o che sono stati, sono o saranno in futuro in contatto causale con O) e quelli che sono invece fuori dal perimetro causale e osservativo di O . Si identifica dunque in una superficie *lightlike* che può essere vista come il cono-luce della linea di universo dell'osservatore nel limite $t \rightarrow +\infty$, o $t \rightarrow t_+$ se c'è una singolarità al tempo $t = t_+$.

Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un orizzonte degli eventi è che l'integrale $\chi(t_0, t_1)$ sia convergente per $t \rightarrow +\infty$, o se ha un futuro finito per $t \rightarrow t_+$. Perciò, ad ogni tempo t_0 , esisterà una linea di universo:

$$\chi_{EH}(t_0) \equiv \chi(t_0, t_+) = \int_{t_0}^{t_+} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.9)$$

tale che un fotone emesso a t_0 da $\chi = \chi_{EH}(t_0)$ verso l'origine raggiunge $\chi = 0$ al tempo $t_+ = +\infty$ se l'universo è in eterna espansione, o a un tempo t_+ se il futuro è finito, come avviene se $K=1$ o nello scenario di *big-rip* (*grande strappo*) dove l'estremo superiore dell'integrale è appunto finito. Ogni fotone emesso al tempo t_0 per $\chi < \chi_{EH}(t_0)$ raggiunge l'origine a un tempo finito: l'universo avrà quindi un orizzonte degli eventi poiché, ad ogni tempo t_0 , solo gli eventi con $\chi \leq \chi_{EH}(t_0)$ saranno accessibili ad un osservatore O in qualsiasi momento futuro.

L'orizzonte degli eventi appare anche nella relatività speciale. Si consideri infatti il disegno seguente, raffigurante le linee di universo di due osservatori in uno spaziotempo di Minkowski:

Presi due osservatori, uno inerziale P_{in} , a riposo in un sistema di riferimento di Minkowski, e l'altro $P_{acc}(g)$ soggetto ad accelerazione costante, le loro linee di universo sono rispettivamente $X = \frac{1}{g}$, per P_{in} , e $(X, T) = (\sinh(g\tau), \cosh(g\tau))$, per $P_{acc}(g)$, con g accelerazione gravitazionale costante. Si assuma che P_{in} mandi un segnale a $T = T_e$; questo si propagherà come $X = T - T_e + \frac{1}{g}$. Dal momento che le linee di universo di P_{acc} tendono asintoticamente a $X = T$ quando $T \rightarrow +\infty$, ogni linea di universo della famiglia degli osservatori accelerati $P_{acc}(g)$ ha la superficie passata *lightlike* $T = +X$ come orizzonte degli eventi. È chiaro che nessun segnale emesso da P_{in} dopo $T_+ = \frac{1}{g}$ potrà mai raggiungere P_{acc} , considerando quest'ultimo eternamente accelerato; dunque P_{in} esce dall'orizzonte degli eventi di P_{acc} al tempo T_+ .

Tale trattazione mostra ulteriormente come l'orizzonte degli eventi sia una quantità che dipende dal-

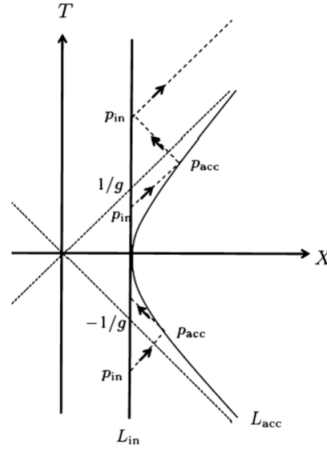


Figura 3.2: Linee di Universo di P_{acc} e P_{in} in uno spaziotempo di Mikowski

l'intera struttura geometrica dello spaziotempo.

L'orizzonte degli eventi inoltre è un concetto nodale nella fisica dei buchi neri ed è strettamente connesso all'esistenza di una singolarità, essendo anche in relazione con il concetto di orizzonte apparente che verrà trattato nella prossima sezione.

3.1.3 Orizzonti Locali

Si illustrano due nozioni di orizzonti locali, che non sono in realtà veri e propri orizzonti: l'orizzonte di Hubble e l'orizzonte apparente. Essi non sono considerati reali orizzonti in quanto, al contrario degli orizzonti non locali, non sono definiti in base alla struttura geodetica a larga scala dell'universo, ma sono determinati da disparità locali, dunque non delimitano alcuna porzione di causalità. Sono definiti in relazione alla direzione futura del tempo.

Orizzonte di Hubble

L'orizzonte di Hubble (HH), chiamato anche *sfera di Hubble*, è definito come il luogo istantaneo dei punti attorno a un osservatore O la cui velocità di espansione è uguale alla velocità della luce c .

Per un universo permeato di fluido cosmico, che rappresenta il moto continuo della materia dell'universo mediato da una scala cosmologica, si può definire un vettore tangente normalizzato u^μ alle corrispondenti linee di universo del fluido, con ($u^\mu u_\mu = -1$). La metrica spaziale locale è quindi $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$. Il moto relativo delle particelle di fluido, che è ciò che si può indagare tramite osservazioni astronomiche, intendendo come "particelle" i gruppi di galassie, è dunque caratterizzato da una serie di quantità cinematiche:

$$\nabla_\mu u_\nu = \frac{1}{3}\Theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} - u_\mu u^\alpha \nabla_\alpha u_\nu \quad (3.10)$$

dove lo scalare $\Theta \equiv \nabla_\alpha u^\alpha$ è il tasso di espansione volumetrica del fluido, $\sigma_{\mu\nu}$ è il tensore "di taglio" simmetrico con traccia nulla che descrive il tasso di distorsione del flusso di materia, $\omega_{\mu\nu}$ è il tensore antisimmetrico di vorticità che indica la rotazione della materia e l'ultimo termine $u_\mu u^\alpha \nabla_\alpha u_\nu$ considera i moti non geodetici.

Si definisce dunque il tasso di espansione di Hubble:

$$H = \frac{1}{3}\Theta \quad (3.11)$$

in cui H^{-1} caratterizza il fattore di scala dell'espansione dello spaziotempo, o equivalentemente si definisce il raggio di Hubble

$$R_H \equiv H^{-1} \quad (3.12)$$

che è il raggio della sfera di Hubble sopracitata.

Come premesso all'inizio della sezione, questo orizzonte non si riferisce ad alcun limite causale in quanto la velocità della luce non ha implicazioni di questo tipo, ma è molto importante nella trattazione della dinamica delle perturbazioni di un universo di Friedmann-Lemaître. Permette infatti di stabilire, per un modo di lunghezza d'onda λ , se l'espansione dello spaziotempo influenza o meno la sua evoluzione; gioca quindi un ruolo fondamentale nella formazione della struttura cosmologica.

Orizzonte Apparente

Dato un tempo t in un determinato sistema di coordinate, se questo contiene un orizzonte apparente (AH) si avrà una superficie bidimensionale chiusa all'interno della quale tutti i raggi di luce sono costretti a muoversi.

Dati dei fasci di geodetiche nulle entranti e uscenti, con vettore tangente k^μ che soddisfa le equazioni della geodetica (3.2) definite all'inizio del capitolo, e un n^μ definito allo stesso modo, si può definire l'espansione dei fasci in modo analogo al caso di un fluido:

$$\hat{\theta}_+ \equiv \frac{1}{2} \nabla_\alpha k^\alpha, \quad \hat{\theta}_- \equiv \frac{1}{2} \nabla_\alpha n^\alpha \quad (3.13)$$

L'orizzonte apparente perciò separa la regione in cui le geodetiche nulle passate o future, dirette entrambe verso l'interno o verso l'esterno, convergono, dalla regione in cui ciò non avviene.

Si definiscono quindi gli orizzonti apparenti esterni (AH+) e interni (AH-), in riferimento rispettivamente ai fasci uscenti e entranti. Entrambi possono avvenire in una direzione temporale futura o passata, creando così quattro gruppi: gli orizzonti apparenti esterni diretti verso il futuro FAH+, gli orizzonti apparenti esterni diretti verso il passato PAH+ e gli analoghi interni FAH- e PAH-.

- I primi, FAH+, sono definiti essere sfere bidimensionali *spacelike*, dove il tasso di divergenza locale θ_+ per geodetiche nulle dirette verso l'esterno si annulla dopo alcune superfici bidimensionali iniziali, ma non prima. Ciò implica che se la condizione di energia per geodetiche nulle $G_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$ è soddisfatta, i raggi *lightlike* uscenti o entranti nella sfera bidimensionale, sono da quel momento in poi rifocalizzati, e ciò porterà a punti coniugati nel futuro e auto-intersezioni. Questo è il caso dei buchi neri o di cosmologie che prevedono un collasso nel futuro.
- Gli orizzonti apparenti esterni diretti verso il passato, PAH+, sono anch'essi sfere bidimensionali *spacelike*, dove però il tasso di divergenza locale θ_+ per raggi *lightlike* locali si annulla prima di alcune superfici bidimensionali iniziali e non dopo. In questo caso, se le condizioni di energia sono soddisfatte, si avranno punti coniugati nel passato. Questa situazione si verifica in quasi tutti i modelli cosmologici realistici.
- Nel caso degli orizzonti apparenti interni diretti verso il futuro, FAH-, c'è una costante cosmologica positiva. Anche in questo caso si tratta di sfere bidimensionali *spacelike* dove il tasso di divergenza locale θ_+ per geodetiche nulle dirette verso l'interno si annulla dopo alcune superfici bidimensionali, ma non prima. Questo implica che, se la condizione di energia $G_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$ non è soddisfatta, i raggi *lightlike* entranti e uscenti dalla sfera bidimensionale sono entrambi divergenti. Questo è il caso di un universo di de Sitter in espansione.
- In ultimo il caso degli orizzonti apparenti interni diretti verso il passato, PAH-, è definito in modo analogo a sopra. Si ha qui il caso di un universo di de Sitter che prevede un collasso.

La descrizione degli orizzonti apparenti non implica in alcun modo il cono-luce e sono quindi *non locali*, in quanto non correlati ad alcun limite causale. Essi sono però basilari nella discussione sull'esistenza di singolarità se sono verificate le condizioni di energia, perché tramite queste ultime l'esistenza di punti coniugati si relaziona ai limiti causali passati o futuri. In generale la superficie tridimensionale di tale orizzonte, fatta dalle superfici bidimensionali degli orizzonti apparenti, può essere *spacelike*, *timelike* o *lightlike*, a seconda che la materia stia attraversando o meno l'orizzonte. Ad esempio sarà *lightlike* se si ha il vuoto e in questo caso vi sarà anche una relazione con l'orizzonte degli eventi.

Gli orizzonti apparenti esterni in cosmologia si verificano nella direzione passata del tempo, mostrando le singolarità che sarebbero esistite nel passato. Essi si riferiscono ai minimi delle dimensioni apparenti di oggetti rigidi, che si possono presentare ad esempio con un redshift di $z = 1.25$ in un universo di Einstein-de Sitter. Al contrario, gli orizzonti apparenti interni si verificano nella direzione futura del tempo nelle fasi dell'universo di de Sitter.

3.2 Diagrammi conformi

Lo studio della struttura globale dello spaziotempo è semplificato dall'uso di una rappresentazione grafica introdotta da Penrose. Si basa sull'idea di costruire, per ogni varietà \mathcal{M} con metrica $g_{\mu\nu}$, un'altra varietà $\tilde{\mathcal{M}}$ con bordo \mathcal{J} e metrica $\tilde{g}_{\mu\nu} = Wg_{\mu\nu}$, così che \mathcal{M} sia conforme (preservi gli angoli nelle trasformazioni) alla parte interna di $\tilde{\mathcal{M}}$ e l'"infinito" di \mathcal{M} sia rappresentato dall'ipersuperficie finita \mathcal{J} . In questo modo tutte le proprietà asintotiche di \mathcal{M} possono essere investigate studiando \mathcal{J} ; inoltre l'ultima proprietà implica che W si annulli su \mathcal{J} .

3.2.1 Costruzione di un diagramma di Penrose

Si prenda ad esempio lo spaziotempo di Minkowski. La sua metrica $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2$ può essere scritta in termini delle coordinate cosiddette *ritardate* e *avanzate*: coordinate di tipo luce spesso utilizzate nello studio dell'infinito spaziotemporale. Esse sono $v = t + r$ e $u = t - r$ e sostituendole nell'equazione della metrica si ottiene: $ds^2 = -dvdu + \frac{1}{4}(v-u)^2d\Omega^2$, dove $v \geq u$ e entrambe le variabili hanno come dominio $[-\infty, +\infty]$. Si possono poi definire altre coordinate, ulteriormente compatte, in modo da riscalarle le variabili: $\tan V = v$ e $\tan U = u$, il cui dominio sarà $-\frac{\pi}{2} < U \leq V < \frac{\pi}{2}$. A questo punto si introducono le coordinate di tipo Minkowski $T = U + V$ e $R = V - U$, tali che $-\pi < T + R < \pi$ e $-\pi < T - R < \pi$, con $R \geq 0$, e la metrica di Minkowski risulta conforme alla metrica \bar{g} data da $d\bar{s}^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2$, con fattore conforme $W = \left[2\sin\left(\frac{R+T}{2}\right)\sin\left(\frac{T-R}{2}\right)\right]^{-2}$. Lo spaziotempo di Minkowski è perciò conforme a una porzione dello spaziotempo statico di Einstein (un cilindro $S^3 \times \mathbb{R}$ che rappresenta uno spaziotempo statico con sezioni spaziali sferiche). Il bordo di tale regione rappresenta perciò la struttura conforme dell'infinito dello spaziotempo di Minkowski e può essere diviso in tre regioni:

- Due ipersuperfici *lightlike* tridimensionali \mathcal{J}^+ e \mathcal{J}^- , definite da $\mathcal{J}^+ = \{V = \frac{\pi}{2}, |U| < \frac{\pi}{2}\}$ e $\mathcal{J}^- = \{U = \frac{\pi}{2}, |V| < \frac{\pi}{2}\}$, o equivalentemente da $T \pm (\pi - R)$, con $R \in [0, \pi]$. La raffigurazione delle geodetiche nulle (le frecce nere diagonali nella figura 3.3) ha origine in \mathcal{J}^- e termina in \mathcal{J}^+ , che rappresentano rispettivamente l'infinito *lightlike* passato e futuro.
- Due punti i^+ e i^- definiti da $i^\pm : U = V = \pm\frac{\pi}{2}$, o equivalentemente da $R = 0$ e $T = \pm\pi$. La raffigurazione delle geodetiche *timelike* ha origine in i^- e termina in i^+ , che rappresentano l'infinito *timelike* futuro e passato.
- Un punto i^0 definito da $i^0 : U = -V = -\frac{\pi}{2}$, o equivalentemente da $R = \pi$ o $T = 0$. Esso è il punto di partenza e di arrivo delle geodetiche nulle e perciò rappresenta l'infinito spaziale.

Quanto ricavato si riscontra graficamente nella figura seguente, che rappresenta il diagramma conforme di Penrose dello spaziotempo di Minkowski:

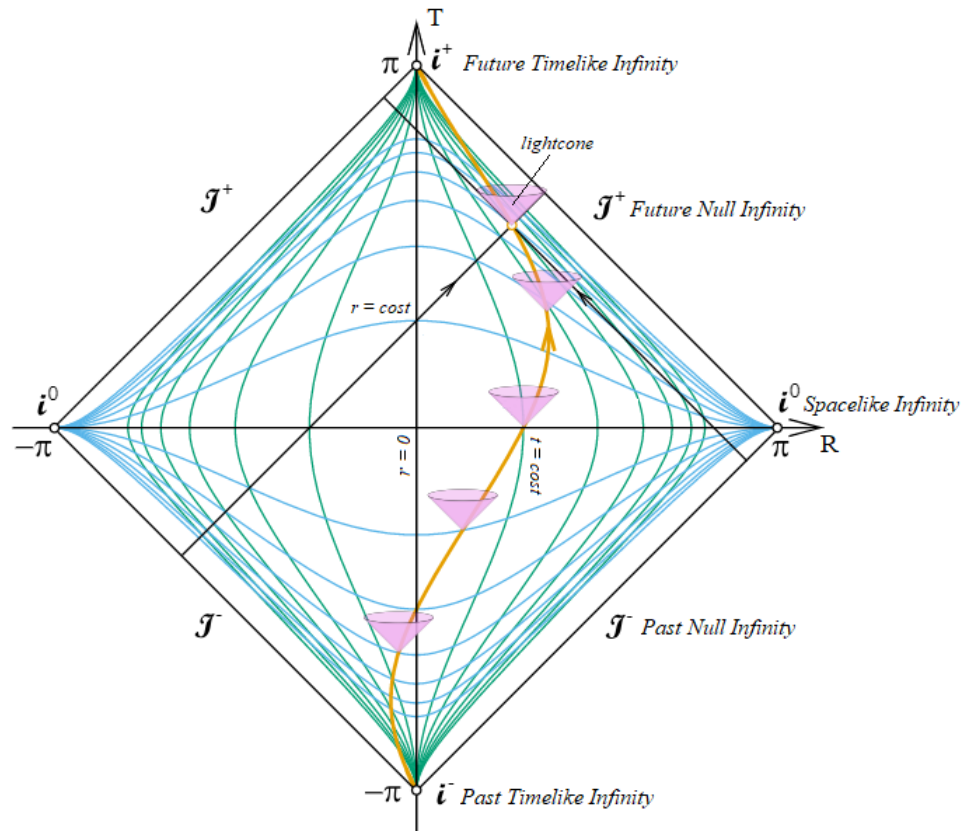


Figura 3.3: Diagramma conforme dello spaziotempo di Minkowski

J^- è un cono futuro di tipo luce con vertice i^- e si rifocalizza nel punto i^0 , che spazialmente è diametralmente opposto a i^- . Il cono futuro *lightlike* di i^0 è invece J^+ , che si rifocalizza in i^+ . Il fatto che i^\pm e i^0 siano punti singoli segue dal fatto che $\sin R = 0$. Queste sono singolarità delle coordinate, dello stesso tipo di quelle incontrate all'origine delle coordinate polari: la varietà \tilde{M} è regolare in tali punti.

Si noti che il bordo è determinato dal tipo di spaziotempo ed è unico, ma che l'estensione conforme dello spaziotempo (qui lo spaziotempo statico di Einstein) non è fissata dalla metrica originale e non è univoca, in quanto si potrebbe scegliere un'altra trasformazione conforme.

3.2.2 Relazione con l'esistenza di Orizzonti

Per gli spazi-tempo di maggior interesse fisico, non solo dunque per il caso specifico dello spaziotempo di Minkowski, J^+ e J^- possono essere *lightlike* o *spacelike*, fatto strettamente correlato all'esistenza di orizzonti non locali.

Se J^- è *spacelike*, le linee di universo di un osservatore fondamentale non si incontrano allo stesso punto in J^- : per un osservatore sulla sua linea di universo vicino a J^- , il cono-luce passato di questo evento non intersecherà tutte le particelle nell'universo prima di raggiungere J^- e ci sarà un orizzonte delle particelle. Se J^- è *lightlike*, ci si aspetterà che tutte le linee di universo dell'osservatore fondamentale passino per il vertice i^- , così che il cono-luce passato di un punto p intersecherà tutte le linee di universo e non vi sarà orizzonte delle particelle.

Se J^+ è *spacelike*, la linea di universo di ciascun osservatore fondamentale termina in un punto O di

\mathcal{J}^+ e il cono-luce passato di O divide l'universo fra gli eventi che possono essere visti dall'osservatore e quelli che invece non potrà mai vedere: si ha quindi un orizzonte degli eventi. Se \mathcal{J}^+ è *lightlike*, tutte le linee di universo passeranno per il vertice i^+ così che $O = i^+$ e il suo cono-luce passato è \mathcal{J}^+ e non si avrà orizzonte degli eventi.

In conclusione,

$$\mathcal{J}^- \text{ spacelike} \iff \text{esistenza di PH}$$

$$\mathcal{J}^+ \text{ spacelike} \iff \text{esistenza di EH}$$

Si vede dunque dal diagramma conforme in figura 3.3 che nello spaziotempo di Minkowski non esiste nessun orizzonte per l'osservatore statico, la cui linea di universo è $r = cost$.

3.2.3 Diagrammi di Penrose per lo Spaziotempo di Friedmann-Lemaître

Lo spaziotempo di Friedmann-Lemaître con sezioni spaziali euclidee ($K = 0$), quando scritto in termini di tempo conforme η , è conforme allo spaziotempo di Minkowski; da questo segue che essi mappano su una parte dell'universo statico di Einstein che rappresenta l'universo di Minkowski. La regione effettiva è determinata da un range di variazione di η . Per $\Lambda > 0$ e $P > 0$, si ha $0 < \eta < \infty$ ed è così conforme alla metà superiore del diamante di Minkowski definito da $T > 0$ con singolarità in $T = 0$. Si può vedere una rappresentazione grafica nella figura seguente:

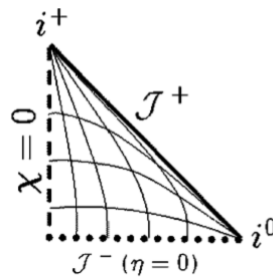


Figura 3.4: Diagramma conforme dello spaziotempo di FL con $K = 0$, $\rho = 0$ e $P > 0$

Quando invece si considera uno spaziotempo di FL con $K = +1$, cioè con sezioni spaziali sferiche, questo è conforme allo spaziotempo statico di Einstein.

È perciò mappato nelle zone permesse dai valori di η e in particolare si identificano tre possibilità. Con $\Lambda = 0$, η varia da 0 a π , se $P = 0$, e da 0 ad $\alpha < \pi$, se $P > 0$: lo spaziotempo di FL è conforme a una regione quadrata dello spaziotempo statico di Einstein tale che \mathcal{J}^+ e \mathcal{J}^- sono entrambe *spacelike* e rappresentano due singolarità. Quando invece $\Lambda \neq 0$, η può variare da 0 a ∞ per l'*hesitating universe* di Lemaître e da $-\infty$ a $+\infty$ per il *bouncing universe*, con lo spaziotempo di FL conforme nel primo caso alla metà e nel secondo caso a tutto lo spaziotempo statico di Einstein.

Graficamente la regione conforme sarà, come nel caso dello spazio di de Sitter, un quadrato dello spaziotempo di Einstein e \mathcal{J}^+ e \mathcal{J}^- sono ancora *spacelike*, ma non rappresentano singolarità.

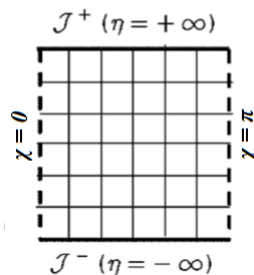


Figura 3.5: Diagramma conforme dello spazio di de Sitter con $K = +1$ e $\eta \in [-\infty, +\infty]$

In ultimo, nello spaziotempo di Friedmann-Lemaître con sezioni spaziali iperboliche, cioè con $K = -1$, la metrica viene portata alla sua forma conforme tramite le trasformazioni delle coordinate:

$$T = \arctan\left(\tanh\frac{\eta + \chi}{2}\right) + \arctan\left(\tanh\frac{\eta - \chi}{2}\right) \quad (3.14)$$

$$R = \arctan\left(\tanh\frac{\eta + \chi}{2}\right) - \arctan\left(\tanh\frac{\eta - \chi}{2}\right) \quad (3.15)$$

Anche in questo caso la forma esatta dipende dal contenuto esatto di materia, cioè da w e Λ . Si vede da questi esempi che alcune parti del bordo corrispondono alla singolarità del Big Bang $a = 0$. Quando $P > 0$ e $\Lambda \geq 0$, la singolarità iniziale è *spacelike*, che corrisponde all'esistenza dell'orizzonte delle particelle. Se $K = +1$ o $\Lambda \geq 0$, il limite futuro è *spacelike*, implicando l'esistenza dell'orizzonte degli eventi.

3.3 Universo dominato da Materia e Radiazione

Come accennato nella sezione 2.2 si può trattare l'universo come costituito da un fluido di materia e radiazione con equazione di stato w . In tal caso, considerando $K = \Lambda = 0$, il fattore di scala $a(t)$ ha andamento $a \propto t^n$, con $3n = \frac{2}{1+w}$. In questo caso il calcolo degli orizzonti diventa più agevole. Quando invece $\Lambda \neq 0$ o $K \neq 0$ si possono utilizzare per il calcolo le equazioni descritte nella sezione 3.1.

3.3.1 Caratterizzazione degli Orizzonti

Orizzonte delle Particelle

L'integrale $\int_0^\infty t^{-n} dt$ converge se e solo se $n < 1$. Si avrà dunque un orizzonte delle particelle se $w > -\frac{1}{3}$, corrispondente alla situazione in cui $\rho + 3P > 0$, come avviene per la materia ordinaria. Ci sarà inoltre un orizzonte delle particelle anche nei casi in cui $K > 0$ o $\Lambda > 0$.

Nel caso di un fluido di materia con equazione di stato w e $K = \Lambda = 0$ il diametro dell'orizzonte delle particelle, enunciato nell'equazione (3.5), può essere calcolato con i nuovi parametri. Considerando infatti l'orizzonte al tempo t_2 di un evento verificatosi al tempo $t_1 < t_2$ si ha:

$$D_{PH}(t_1, t_2) = \frac{6(1+w)}{1+3w} t_2 \left[1 - \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^{\frac{1+3w}{3+3w}} \right] \quad (3.16)$$

Orizzonte degli Eventi

L'integrale $\int_0^\infty t^{-n} dt$ converge se e solo se $n > 1$. Quindi, per il caso di un singolo componente di materia, con $K = \Lambda = 0$, si ha un orizzonte degli eventi se $w < -\frac{1}{3}$, cioè se $\rho + 3P < 0$, che avviene se la condizione di energia è violata. Dunque per la materia ordinaria, in tali condizioni, non si ha orizzonte degli eventi.

Considerando invece il caso in cui $K = +1$ o $\Lambda > 0$ l'orizzonte degli eventi c'è per ogni osservatore.

Si nota che per un fluido singolo con equazione di stato costante e $K = \Lambda = 0$, si possono avere o orizzonte degli eventi o orizzonte delle particelle, ma non entrambi nello stesso momento.

Orizzonte Visivo

A meno che non viviamo in un piccolo universo, ci sarà sempre un orizzonte visivo, a prescindere dalle condizioni di densità e pressione, perché nell'equazione (3.7) non compaiono termini divergenti. Infatti è stato già visto fino alla superficie di *last scattering* e questa, come mostrato dalle osservazioni di *COBE* e *Planck*, copre l'intero universo. Tale superficie costituisce quanto di più lontano è possibile osservare, e ciò che vediamo non è l'infinito, come sarebbe nel caso in cui potessimo vedere tutta la materia esistente in un universo con $K = 0$ nella sua topologia standard.

Orizzonte di Hubble

Per il fattore di scala $a(t) \propto t^n$, il raggio di Hubble al tempo t è dato da

$$D_H(t) = \frac{n}{t} \quad (3.17)$$

e si applica all'era dominata dalla materia dopo la ricombinazione fino a tempi relativamente recenti, quando l'universo ha iniziato ad accelerare, con $n = \frac{2}{3}$.

Se $t_1 \ll t_2$ allora il diametro dell'orizzonte delle particelle D_{PH} è proporzionale al raggio di Hubble D_H al tempo t_2 :

$$D_{PH}(t_1, t_2) \simeq \frac{4}{1 + 3w} D_H(t_2) \quad (3.18)$$

Tale proprietà non vale però in altri contesti, come durante l'inflazione.

Diagrammi Spaziotemporali degli Orizzonti

In ultimo si riportano, come riferimento grafico alla trattazione, i diagrammi spaziotemporali raffiguranti i vari orizzonti per un universo di Friedmann-Lemaître con parametri $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_M = 0.3$ e $h = 0.7$.

I primi due diagrammi rappresentano, rispettivamente, la distanza fisica $\alpha\chi$ e la distanza comovente $a_0\chi$ in funzione del tempo cosmico t (sulla scala di sinistra) o del fattore di scala normalizzato ad 1 al tempo presente (sulla scala di destra). Il terzo diagramma rappresenta la distanza comovente in funzione del tempo conforme η (a sinistra) o del fattore di scala normalizzato (a destra).

La linea verticale centrale è la linea di universo dell'osservatore, le linee puntinate rappresentano le linee di universo di un osservatore comovente. I numeri sul margine superiore identificano il redshift a cui una galassia, che si muove lungo la linea corrispondente, viene vista dall'osservatore centrale.

Si evidenziano: la linea orizzontale che indica il tempo presente, il cono-luce passato, l'orizzonte di Hubble, l'orizzonte delle particelle e l'orizzonte degli eventi.

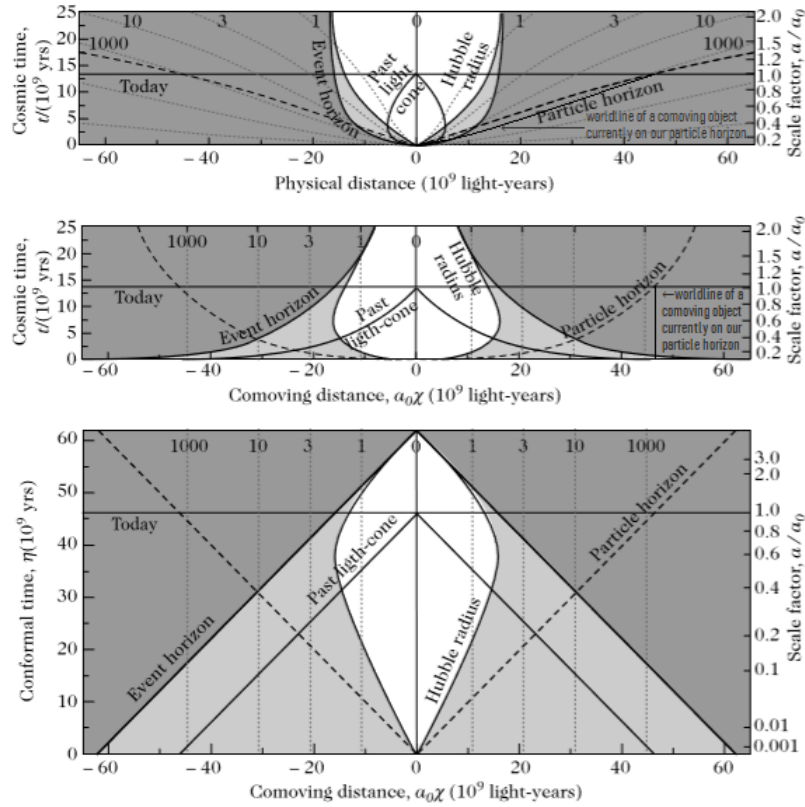


Figura 3.6: Diagrammi spaziotemporali degli orizzonti per un universo di Friedmann-Lemaître

3.3.2 Implicazioni nel *Big Bang Model* e *Superhorizon Modes*

Nel modello standard del Big Bang, un universo riempito di una miscela di materia e radiazione, con costante cosmologica Λ non nulla, ha due implicazioni: oltre a quanto già osservato sulla superficie di *last scattering*, cioè che oltre di essa l'universo è opaco ed esiste perciò un orizzonte visivo, si ha anche che l'evoluzione del fattore di scala è data da:

$$a(t) = \left(\frac{1}{\Omega_{\Lambda 0}} \right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3\alpha t}{2} \right) \quad (3.19)$$

con $\alpha = H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}$. Quindi nel futuro il nostro universo si comporta come un universo di de Sitter, ovvero spazialmente quasi piatto; ciò costituisce il problema della piatezza che verrà trattato nella prossima sezione. Come conseguenza inoltre, a meno che l'universo non abbia una topologia non connessa con sezioni spaziali abbastanza piccole, non è possibile vedere la maggior parte della materia dell'universo.

Per quando riguarda le perturbazioni cosmologiche, la loro lunghezza d'onda scala anch'essa come $a(t)$. Dal momento che $\ddot{a} < 0$ nell'era dominata dalla materia o dalla radiazione, si avrà che ogni lunghezza d'onda diventerà in tale era più piccola del raggio di Hubble. Questo porta alla nozione di *super-Hubble modes* e *sub-Hubble modes*. In particolare, dato un modo con numero d'onda k , esso è *super-Hubble* se la sua lunghezza d'onda $\lambda \propto \frac{a}{k}$ è più grande del raggio di Hubble $\frac{1}{H}$, *sub-Hubble* altrimenti. Schematizzando:

- super-Hubble: $k < aH$ ($k\eta < 1$)
- sub-Hubble: $k > aH$ ($k\eta > 1$)

Dove le equazioni tra parentesi sono enunciate considerando il tempo conforme, per cui si ha il parametro di Hubble comovente $\mathcal{H} \equiv aH$, che scala come η .

Ciò mostra come i *super-Hubble modes* diventino *sub-Hubble* all'aumentare del tempo conforme η . Storicamente questi modi sono stati chiamati *super-horizon* e *sub-horizon*, perché per un universo fatto di materia e radiazione l'orizzonte di Hubble è dello stesso ordine dell'orizzonte delle particelle, causando però fraintendimenti in quanto in queste definizioni non vi è alcuna relazione di causalità.

Questo discorso ha particolare importanza nelle verifiche osservative, specificatamente nella determinazione della massima lunghezza d'onda osservabile in base al CMB.

3.3.3 Problema della Piattezza e Problema dell'Orizzonte

In questa sezione si illustreranno i problemi cosiddetti della piattezza e dell'orizzonte, la soluzione dei quali porta alla formulazione della teoria inflazionaria che verrà trattata nel prossimo capitolo.

Allo scopo di presentare il problema della piattezza si prende il parametro di curvatura spaziale adimensionale Ω_K introdotto nella sezione 2.2:

$$\Omega_K = -\frac{K}{a^2 H^2} \quad (3.20)$$

e si riscrive l'equazione di evoluzione del fattore di scala, determinata dalle equazioni di Friedmann, nel seguente modo:

$$\frac{d \ln \Omega_K}{d \ln a} = (1 + 3w)(1 - \Omega_K)\Omega_K \quad (3.21)$$

Questa mostra che Ω_K è un punto fisso della dinamica, che non è stabile se $1 + 3w > 0$, ovvero con le condizioni standard di pressione nulla il termine di curvatura tende a dominare nell'equazione di Friedmann. Eppure ad oggi la curvatura spaziale dell'universo ha un valore incredibilmente piccolo: $|\Omega_K - 1| < 0.1$, risultato particolarmente innaturale per un universo "vecchio" come il nostro. Inoltre, estrapolando il valore passato di Ω_K esso appare ancora più vicino all'unità, in modo da non poter essere considerato una casualità. Infatti al tempo della parità fra radiazione e materia il parametro è di circa $|\Omega_K - 1| < 2 \times 10^{-4}$, al tempo della *Big Bang Nucleosynthesis* risulta $|\Omega_K - 1| < 3 \times 10^{-14}$ e risalendo fino al più lontano tempo possibile, il tempo di Planck, si trova un parametro di densità estremamente vicino ad 1: $|\Omega_K - 1| < 10^{-60}$.

Di tale andamento il *Big Bang Model* non dà alcuna spiegazione.

Il problema dell'orizzonte invece consiste nel fatto che l'omogeneità e l'isotropia asserite dal principio cosmologico, che sono al cuore delle soluzioni di Friedmann-Lemaître, sono considerate assiomaticamente e non ne è dato il motivo. In particolare il problema sorge dal fatto che l'orizzonte visivo, dello stesso ordine dell'orizzonte delle particelle, è molto più grande dell'orizzonte primordiale delle particelle. Ciò implica che la superficie di *last scattering* sia composta di svariate regioni causalmente non connesse (in quanto la trasmissione delle informazioni non può avvenire a velocità superiori a quella della luce, che definisce il limite degli orizzonti delle particelle e visivo), dunque non vi è ragione per esse di essere omogenee e isotrope.

Utilizzando le grandezze caratteristiche (come la lunghezza di Planck ℓ_P) e ragionamenti termodinamici, si arriva a stimare il numero di celle intorno a

$$N_{celle} \sim \left(\frac{1 + z_p}{\ell_P H_0} \right)^3 \sim 10^{87} \quad (3.22)$$

Lo studio del CMB e delle galassie mostra che la distribuzione è omogenea a grandi scale anche osservativamente: tutte le regioni studiate sono termalizzate ed emettono un perfetto spettro di corpo nero alla stessa temperatura, ma non è spiegato come 10^{87} celle causalmente indipendenti appaiano identiche con una precisione di 10^{-5} .

Entrambi i problemi trovano soluzione nell'introduzione dell'inflazione, un periodo di espansione accelerata estremamente rapida ai primissimi istanti dell'universo.

Capitolo 4

Modello Inflazionario

4.1 Il Paradigma dell'Inflazione

Prima che il primo modello di inflazione venisse proposto, iniziarono ad essere pubblicati degli studi precursori già nel 1965 ad opera di Erast Gliner, che fu il primo a postulare una fase di espansione accelerata. Seguirono poi, nel 1978, i lavori di François Englert, Robert Brout e Egard Gunzig, che tentando di risolvere il problema della singolarità primordiale e di introdurre le particelle e l'entropia contenute nell'universo, proposero l'ipotesi di una "palla di fuoco" per cui l'universo sarebbe apparso attraverso un effetto quantistico in stato di pressione negativa, soggetto poi a una fase di espansione esponenziale. Nel 1979 Alecei Starobinsky usò le idee della *quantum gravity* per formulare il primo modello rigoroso semi-realistico di una fase di espansione accelerata, sebbene non avesse lo scopo di risolvere i problemi cosmologici.

Un modello più semplice, con chiare motivazioni fisiche, venne infine proposto da Alan Guth nel 1981, che viene per tale ragione considerato l'"ideatore" del modello inflazionario. Questo modello, chiamato adesso *Old Inflation*, fu il primo ad usare l'inflazione per risolvere i problemi cosmologici e venne seguito dalla *New Inflation* proposta da Andrei Linde.

Dalle equazioni di Einstein, un'espansione accelerata richiede che la materia che domina la dinamica dell'universo obbedisca, come spiegato più volte nella trattazione, alla relazione fra pressione e densità di energia: $\rho + 3P < 0$. Si vede che la soluzione che riesce a soddisfare questa condizione consiste nell'introdurre un campo scalare φ . Fino a quando esso è in condizione di *slow rolling*, viene soddisfatta la relazione $P \sim -\rho$; quando invece accelera raggiungendo un moto di *fast rolling*, si ha $P \sim +\rho$. Poiché il campo scalare è un campo canonico minimamente accoppiato, l'unico grado di libertà è la scelta del potenziale $V(\varphi)$.

Il primo modello, l'*Old Inflation*, si basa su un meccanismo di transizione di fase al primo ordine: il campo scalare è intrappolato in un minimo locale del suo potenziale, imponendo così una densità di energia costante equivalente al contributo di una costante cosmologica. Fino a che il campo resta in questa configurazione, l'evoluzione dell'universo è esponenziale ed esso può essere descritto con uno spaziotempo di de Sitter. Tale configurazione è metastabile e il campo può passare attraverso il suo minimo globale $V(\varphi_f) = 0$, creando così delle bolle di "vero vuoto", che corrispondono a un universo non inflazionario.

Si specifica che, con "vero vuoto" e "falso vuoto", si intendono delle configurazioni energetiche quantistiche per cui nel primo caso si ha uno stato completamente stabile, corrispondente a un minimo globale, mentre nel secondo caso si ha uno stato apparentemente stabile, corrispondente a un minimo locale, come in figura 4.1 (ref. [7]). Potrà perciò avvenire, nella seconda situazione, una transazione energetica per effetto tunnel.

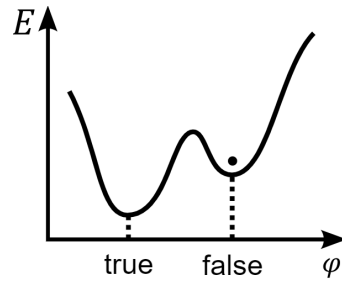


Figura 4.1: "Vero vuoto" e "Falso vuoto"

Nel modello di *New Inflation*, il campo scalare esce dal suo "falso vuoto" andando lentamente verso il suo "vero vuoto". Questo modello può funzionare solo se il potenziale ha un *plateau* molto piatto intorno a $\varphi = 0$, che sarebbe artificiale. Si riportano in figura 4.2 l'evoluzione del potenziale scalare in funzione dell'inflazione nei casi di *Old Inflation* (sinistra) e *New Inflation* (destra).

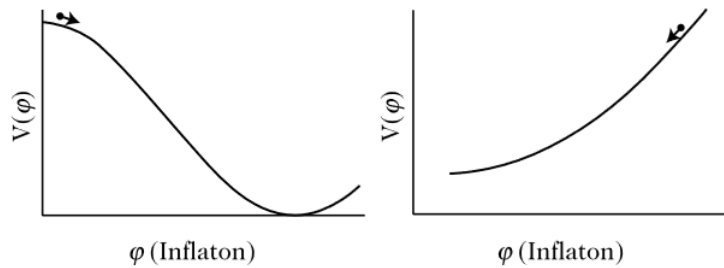


Figura 4.2: $V(\varphi)$ vs. φ nei casi di *Old Inflation* e *New Inflation*

In ogni caso, nella maggior parte delle versioni, l'inflatone (particella associata al campo scalare φ), non può essere in equilibrio termico con gli altri campi di materia. La teoria delle transizioni di fase cosmologiche quindi non può essere applicata e venne progressivamente abbandonata.

I primi modelli di inflazione furono fallimentari, in quanto assumevano l'universo in uno stato di equilibrio termico e omogeneo a larga scala prima dell'inizio dell'inflazione.

Il problema venne risolto da Linde con la proposta dell'*inflazione caotica*: in tale modello l'inflazione può partire dalla densità di Planck, anche non essendo in equilibrio. Apparve dunque una nuova immagine dell'universo: l'omogeneità e isotropia del nostro universo osservabile sarebbero solo proprietà locali, mentre l'universo a larga scala avrebbe una struttura largamente disomogenea, simile a un frattale.

Vennero dunque eseguiti degli studi sugli effetti quantistici vicino ai buchi neri nello spaziotempo di de Sitter, considerando o la radiazione termica rivelata da un osservatore all'origine, corrispondente alla polarizzazione nel vuoto, o il campo scalare in un contesto *time-dependent*, entrambi in uno spaziotempo di de Sitter.

Ciò portò alla formulazione, da parte di Viatcheslav Mukhanov e Gennady Chibisov, della teoria delle perturbazioni cosmologiche durante l'inflazione, che mise in relazione la struttura a larga scala dell'universo con le fluttuazioni quantistiche. La fase di *slow roll* è essenziale in questo meccanismo, dal momento che fu durante tale periodo che le fluttuazioni di densità portarono alla struttura a larga scala ad oggi osservata.

In base a questi modelli si arriva dunque a definire la situazione alla fine della fase inflazionaria: tutte le disomogeneità classiche sono state eliminate, l'universo assume una forma piatta e l'entropia risulta molto attenuata. Se il potenziale dell'inflatone ha un minimo, il campo scalare oscilla attorno ad esso

proprio dopo la fine dell'inflazione. Tali oscillazioni vengono poi smorzate a causa dell'espansione di Hubble e il campo scalare decade in un gran numero di particelle. Durante questa fase l'universo, con bassa entropia e dominato dalle oscillazioni dall'inflatone, diventa un universo caldo, con alta entropia e dominato dalla radiazione. Tale fase di riscaldamento si connette con lo scenario dell'*Hot Big Bang* e ne completa il quadro.

4.2 Inflazione come soluzione ai problemi del *Big Bang Model*

Dopo aver introdotto i processi storici e i vari modelli che portarono all'inflazione così come è pensata oggi, si può entrare nel merito di come essa risolva i problemi del *Big Bang Model* posti nella sezione 3.3.3, ovvero il problema della piattezza e il problema dell'orizzonte.

A tale scopo si riprende la definizione (3.20) di Ω_K : da essa, poiché $\dot{a} = aH$, deriva che $\Omega_K = -\frac{K}{\dot{a}^2}$. È chiaro che, in valore assoluto, il parametro di curvatura decrescerà a 0 se \dot{a} aumenta, ovvero se $\ddot{a} > 0$, che è la condizione distintiva di una espansione accelerata. Come discusso sopra, però, ciò richiederebbe $\rho + 3P < 0$ e questo non può avvenire con la materia ordinaria. Allo stesso modo, l'equazione (3.21) mostra come, per $-1 < w < -\frac{1}{3}$, il punto fisso Ω_K è un attrattore per la dinamica.

Il problema della piattezza può essere risolto se l'attrazione verso Ω_K durante il periodo dell'inflazione basta a compensare il successivo allontanamento dallo 0 durante l'*Hot Big Bang*, ovvero se l'inflazione dura per un tempo sufficiente.

Se infatti l'universo si espande esponenzialmente durante l'era inflazionaria, si ha che:

$$|\Omega_K - 1| \propto e^{-2Ht} \quad (4.1)$$

e la differenza fra Ω_K e l'unità decresce esponenzialmente con il tempo. Anche supponendo quindi che, prima dell'inflazione, l'universo fosse estremamente ricurvo ($|\Omega_K - 1| \sim 1$), dopo una fase inflazionaria si ha $|\Omega_K - 1| \sim e^{-2N}$, dove N è definito numero di *e-folds* e identifica l'intervallo di tempo in cui una quantità in espansione cresce di un fattore e :

$$N \equiv \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right) \quad (4.2)$$

in cui a_i e a_f indicano rispettivamente i fattori di scala all'inizio e alla fine dell'espansione.

Con una N sufficiente dunque, si arriva facilmente ad avere il valore di Ω_K atteso, che descrive un universo euclideo, risolvendo il problema della piattezza.

In particolare, una stima del numero minimo di *e-folds* necessari per l'inflazione può essere data nel seguente modo, considerando H costante in tale periodo:

$$\left| \frac{\Omega_K(t_f)}{\Omega_K(t_i)} \right| = \left(\frac{a_i}{a_f} \right)^2 = e^{-2N} \quad (4.3)$$

Per avere dunque $|\Omega_K(t_f)| \lesssim 10^{-60}$, con $\Omega_K(t_f) \sim \mathcal{O}(1)$, il numero necessario risulta

$$N \gtrsim 70 \quad (4.4)$$

Si vede che in tal modo viene risolto anche il problema dell'orizzonte.

In un universo accelerato, infatti, il raggio di Hubble comovente $\mathcal{H}^{-1} = (aH)^{-1}$ decresce nel tempo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0 \quad (4.5)$$

Dunque due punti in contatto causale all'inizio dell'inflazione possono essere separati da una distanza più grande del raggio di Hubble alla fine dell'inflazione. Tali punti saranno perciò causalmente connessi, in quanto provenienti da una zona causalmente connessa, ma appariranno sconnessi se non si considera il periodo inflazionario.

Dunque l'inflazione permette all'intero universo osservabile di emergere dalla stessa regione, che si trova di fatto in connessione causale prima dell'inizio dell'inflazione, risolvendo il problema dell'orizzonte per $N \gtrsim 70$.

4.3 Orizzonti nel Modello Inflazionario

Lo studio degli orizzonti nella cornice inflazionaria porta a una drastica modifica dei diagrammi di Penrose definiti in precedenza. In particolare, si distinguono due approcci, come accennato nella sezione 4.1:

Il primo, che ha origine negli anni '60 del '900, è spesso usato nella teoria delle superstringhe, specificatamente nel contesto dell'olografia e della termodinamica associate agli orizzonti e nella cosiddetta "*hot tin can*" picture. Esso usa la forma statica della metrica di de Sitter così che un osservatore all'origine riveli radiazione termica da $R = \frac{1}{H}$ con temperatura $\frac{H}{2\pi}$, che corrisponde alla polarizzazione nel vuoto della geometria di de Sitter.

Il secondo è basato sulla quantizzazione di un campo scalare in un contesto *time-dependent* descritto da uno spaziotempo quasi di de Sitter. Si usa la rappresentazione piatta dello spazio di de Sitter; da questa segue che il raggio di Hubble durante l'inflazione è circa costante, il che vuol dire che il raggio di Hubble comoviente si restringe. Ciò implica che, contrariamente a quanto avviene nella cosmologia standard, un modo comoviente indicato dal vettore d'onda k che era inizialmente *sub-Hubble* può, durante l'inflazione, diventare *super-Hubble*. Tale processo è descritto in figura:

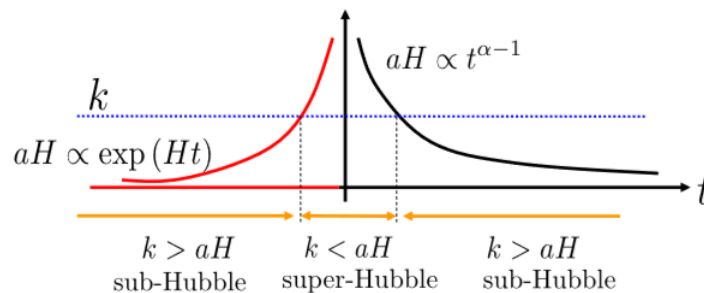


Figura 4.3: Evoluzione di un modo durante le fasi inflazionaria e dell'*Hot Big Bang*

Questa proprietà è di fondamentale importanza nel meccanismo della generazione di perturbazioni iniziali durante l'inflazione.

4.3.1 Universo di de Sitter

L'universo di de Sitter è uno spaziotempo massimamente simmetrico. Esso ha diverse rappresentazioni, di cui solo una è geodeticamente completa, che corrispondono a diverse scelte della famiglia di osservatori fondamentali. Nello specifico si ha:

- *Rappresentazione sferica*: la metrica ha la forma di Friedman-Lemaître con $K = +1$ (sezioni spaziali sferiche) e fattore di scala $a \propto \cosh Ht$, con $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$. Questa è l'unica rappresentazione geodeticamente completa.
- *Rappresentazione piatta*: la metrica ha la forma di Friedman-Lemaître con $K = 0$ (sezioni spaziali Euclidee) e fattore di scala $a \propto e^{Ht}$.
- *Rappresentazione iperbolica*: la metrica ha la forma di Friedman-Lemaître con $K = -1$ (sezioni spaziali iperboliche) e fattore di scala $a \propto \sinh Ht$.
- *Rappresentazione statica*: in cui la metrica prende la forma: $ds^2 = -(1 - H^2 R^2)dT^2 + \frac{dR^2}{1 - H^2 R^2} - r^2 d\Omega^2$.

In ognuno di questi casi il sistema di coordinate usato copre solo una parte dell'iperboloide di De Sitter.

4.3.2 Orizzonti in uno spazio di de Sitter

Orizzonte delle Particelle

Nel caso della rappresentazione sferica, in cui $K = 1$, si ha che $a(t) = a_0 \cosh(Ht)$ e l'integrale 3.4 converge per $t_0 \rightarrow -\infty$, dunque esiste l'orizzonte delle particelle. Negli altri tre casi l'universo è geodeticamente incompleto nel passato (il sistema di coordinate non è globale), dunque l'interrogativo sull'esistenza o meno di un orizzonte delle particelle perde di senso. In ogni caso quello che può essere evinto matematicamente è che nel caso della rappresentazione piatta l'integrale 3.4 diverge per $t_0 \rightarrow -\infty$, ovvero l'espansione non ha un inizio e conseguentemente non c'è orizzonte delle particelle. Per la rappresentazione iperbolica, invece, c'è un inizio dell'espansione a $t = 0$, ma in tale punto l'integrale diverge, dunque l'orizzonte delle particelle non si ha neanche in questo caso. Se l'espansione di de Sitter fosse finita, iniziando ad un tempo t_i , l'esistenza di un orizzonte delle particelle sarebbe determinata da quanto avvenuto prima di t_i .

Orizzonte degli Eventi

Dal momento che

$$\chi_0 = \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{e^{Ht}} = \frac{e^{-Ht_0}}{H} < \infty \quad (4.6)$$

esisterà un orizzonte degli eventi per ciascuna delle prime tre rappresentazioni della metrica di de Sitter. Si avrà dunque l'esistenza sia dell'orizzonte delle particelle che dell'orizzonte degli eventi solo nel caso dell'universo sferico. Per quanto riguarda il caso statico, si avrà una situazione analoga a quella dello spazio di Minkowski trattata nella sezione 3.1.2.

Orizzonte di Hubble

Poiché $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ è costante nel caso dell'universo piatto, il raggio di Hubble fisico rimane costante, mentre il raggio di Hubble comovente si restringe come $H e^{-Ht}$. Ciò vuol dire che, ai tempi successivi, le linee di universo comoventi escono dalla sfera di Hubble. La stessa cosa avviene per la rappresentazione sferica e per quella iperbolica, in tempi più recenti.

Diagrammi di Penrose

L'introduzione di un periodo di espansione accelerata porta, come già detto, a una modifica dei diagrammi di Penrose. In generale, la situazione che si ha è la seguente:

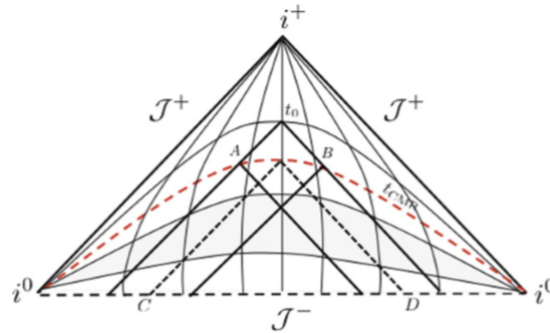


Figura 4.4: Diagramma di Penrose con una fase inflazionaria

La zona azzurrina rappresenta la fase inflazionaria; la linea rossa tratteggiata l'ipersuperficie di *last scattering* e la linea tratteggiata nera il cono-luce di un osservatore collocato sulla superficie di *last scattering*. I coni-luce degli osservatori A e B si intersecano solo se c'è una fase di inflazione abbastanza lunga. Nello specifico, AB rappresenta l'orizzonte visivo e CD l'orizzonte primordiale delle particelle.

Per quanto riguarda le diverse rappresentazioni dello spazio di de Sitter, poiché esso è massimamente simmetrico, non ne esiste una naturale. La scelta di una particolare rappresentazione può portare al fatto che solo una parte del diagramma di Penrose 3.5 venga coperta nella rappresentazione statica o piatta. Usando le coordinate

$$R = \chi \qquad T = 2 \arctan(e^{Ht}) \qquad (4.7)$$

con $0 < R < \pi$ e $0 < T < \pi$, lo spaziotempo di de Sitter con $K = +1$ è conforme alla regione quadrata dello spazio statico di Einstein (figura 3.5) con fattore conforme $W = H^{-2} \cosh^2(Ht)$. Si vede che questo diagramma conforme ha un infinito *spacelike* per geodetiche sia *timelike* che *null*. In ogni caso la rappresentazione con $K = 0$ copre solo una metà triangolare del suo dominio e la rappresentazione statica solo un quarto triangolare dello stesso, come si mostra di seguito.

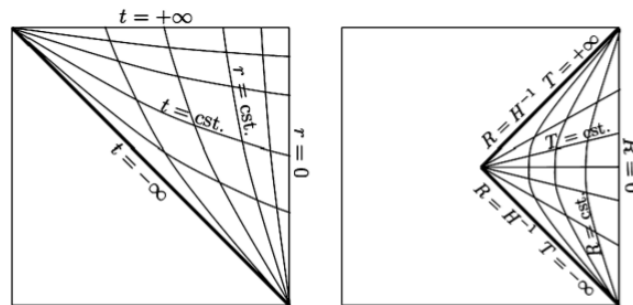


Figura 4.5: Diagrammi di Penrose dello spazio di de Sitter nella rappresentazione piatta (sinistra) e statica (destra)

L'esistenza di diverse rappresentazioni costituisce il nucleo di molte argomentazioni a favore dell'ipotesi di multiverso.

Capitolo 5

Conclusioni

In questo elaborato si è giunti ad avere un quadro dell'analisi cosmologica sulle strutture causali dell'universo, attraverso una contestualizzazione storica e un'analisi formale, definendo gli orizzonti cosmologici locali e non locali e inquadrandoli nel contesto della teoria inflazionaria.

Si sono studiate e conosciute le caratteristiche dell'orizzonte delle particelle, massima distanza da cui la luce può aver raggiunto l'osservatore al momento presente, e dell'orizzonte degli eventi, massima distanza da cui la luce potrà mai raggiungere l'osservatore nel futuro, dell'orizzonte di particella primordiale, dell'orizzonte visivo, costituente un reale limite di osservabilità pratica, e degli orizzonti non locali, come l'orizzonte apparente e l'orizzonte di Hubble, connesso ovviamente alla legge di Hubble, di cui si è capita l'importanza nella cosmologia standard. Di essi sono stati approfonditi i ruoli all'interno delle varie strutture spaziotemporali, costruendo un'anatomia di relazioni causali e modelli volti alla comprensione profonda del funzionamento del cosmo.

Il tutto è stato inquadrato nella cornice di universo in espansione e in particolare si è visto come l'introduzione di una fase primordiale di rapidissima espansione, l'inflazione, risolvesse i problemi cosmologici di maggior rilevanza, della piattezza e dell'orizzonte, spiegando la forma attuale dell'universo di spazio quasi euclideo.

Lo studio di tali strutture e la formulazione e verifica di questi modelli dà all'uomo un tassello in più verso la comprensione del cosmo, che, grazie alla tecnologia in evoluzione, alle osservazioni astronomiche e allo studio sperimentale di CMB, onde gravitazionali etc., diventa sempre meno speculativa e sempre più affascinantemente tangibile.

Bibliografia

- [1] Jean-Philippe Uzan, *Inflation in the standard cosmological model*, Comptes Rendus Physique, Volume 16, Issue 10, p. 875-890, Paris, France, 2015.
- [2] George F.R. Ellis and Jean-Philippe Uzan, *Causal structures in inflation*, Comptes Rendus Physique, Volume 16, p. 928-947, 2015. arXiv:1612.01084.
- [3] Tamara M. Davis and Charles H. Lineweaver, *Expanding Confusion: Common Misconceptions of Cosmological Horizons and the Superluminal Expansion of the Universe*, In: Proc. Astron. Soc. Austral. (2003). [Publ. Astron. Soc. Austral.21,97(2004)]. arXiv: astro-ph/0310808.
- [4] Robert M. Wald, *Gravitation*, University of Chicago Press, 2010.
- [5] Andrew Liddle and Jon Loveday, *The Oxford Companion to Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [6] Barbara Ryden, *Introduction to Cosmology*, Department of Astronomy, The Ohio State University, January 13, 2006.
- [7] Pic. source: By User:Stannered – Adapted from en:Image:Falsevacuum.png, CC BY 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1711800>
- [8] Patrick Peter and Jean-Philippe Uzan, *Primordial Cosmology*, Oxford University Press, Oxford, UK, 1934.