

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA G. GALILEI  
CORSO DI LAUREA IN FISICA



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

TESI DI LAUREA

# Formazione di pianeti giganti per accumulazione di “pebbles”

**Relatore:**  
Prof. Francesco Marzari

**Laureando:**  
Giacomo Cordoni  
Matricola: 1070190

ANNO ACCADEMICO 2015/2016



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA G. GALILEI  
CORSO DI LAUREA IN FISICA



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

TESI DI LAUREA

# Formazione di pianeti giganti per accumulazione di “pebbles”

**Relatore:**

Prof. Francesco Marzari: .....

**Laureando:**

Giacomo Cordoni: .....

Matricola: 1070190



# Indice

<b>1</b>	<b>Tasso di crescita dell'embrione</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Velocità relative</b>	<b>11</b>
2.1	Velocità di drift . . . . .	11
2.2	Velocità di turbolenza . . . . .	13
2.3	Eccentricità . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Atmosfera dell'embrione</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Pebble accretion</b>	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>Frammentazione</b>	<b>25</b>
<b>6</b>	<b>Conclusioni generali</b>	<b>27</b>



# Introduzione

In questo modello ci occupiamo della fase di crescita oligarchica del nucleo di un pianeta gigante che chiamiamo embrione planetario, o protopianeta. In questa fase il nucleo cresce inglobando planetesimi della dimensione di asteroidi e oggetti più piccoli.

In particolare vogliamo analizzare la velocità con cui l'embrione si forma e cresce, ovvero la durata del processo, per verificare la compatibilità o meno con la vita del disco di gas in cui l'embrione si forma, essendo infatti questa la fase più lenta del processo di formazione planetaria.

La prima fase di formazione di un pianeta prevede l'aggregarsi di polvere e altre particelle per effetto dell'attrazione elettrostatica e della forza gravitazionale; crescendo tale nucleo acquisisce un'atmosfera dal disco circostante.

Se la massa di tale nucleo raggiunge o supera una massa critica, stimata dell'ordine di  $10M_T$  ([5]), dove con  $M_T$  indichiamo la massa terrestre, il sistema nucleo-disco diventa instabile<sup>1</sup>, e il gas del disco comincia a fluire, per effetto dell'attrazione gravitazionale, sull'agglomerato roccioso, formando l'involucro di gas che caratterizza i pianeti giganti.

Un fattore determinante è ovviamente la durata del processo di formazione del nucleo, in rapporto al tempo di vita del disco di gas. Se infatti il primo è troppo lento, in particolare perdura più della vita stessa del disco, la formazione del gigante gassoso non è chiaramente possibile. In particolare il tempo di vita del disco di gas è stimato nell'ordine di milioni di anni, mentre il processo così descritto ha una durata di circa 10 milioni di anni. Ciò significa che devono esserci fenomeni che accelerano il processo, spiegando la formazione di pianeti giganti, quali ad esempio Giove e Saturno.

Quello che andremo a fare sarà analizzare il processo di crescita oligarchica di un embrione planetario, includendo effetti generalmente trascurati, quali la forza di trascinamento dovuto al gas, la presenza di un'atmosfera attorno all'embrione, il drift radiale, la presenza di una popolazione di *pebbles*, ovvero di piccoli corpi, di diametro compreso tra il *mm* e il metro e frammentazione di planetesimi dovuti a collisioni. Mostriamo come questi velocizzino il processo di formazione del nucleo entro la durata della vita del disco stellare.

Supponiamo in principio che gli embrioni siano equispaziati nella nebulosa solare (e più in generale stellare), e di conseguenza che ognuno abbia una pro-

---

<sup>1</sup>viene a mancare la condizione di equilibrio idrodinamico, per cui la pressione idrostatica dell'atmosfera bilancia la forza gravitazionale

pria "feeding zone" da cui prende il materiale. Questa assunzione ci permette di studiare l'evoluzione dell'embrione come fosse in un sistema isolato, ovvero ignorando la presenza nel disco di altri corpi importanti. Assumiamo inoltre che le orbite di tali embrioni siano circolari, e che giacciono nel semipiano (centrale) della nebulosa.

Tale modello prenderà in considerazione il tasso di crescita di un singolo embrione, seguendo il modello classico, aggiungendo via via effetti che in passato sono stati trascurati. In particolare i protopianeti verranno considerati circondati da un'atmosfera, più densa del gas del disco e verrà analizzato il comportamento di una popolazione di "pebbles", ovvero di piccole particelle, che influiranno notevolmente sui tempi di evoluzione del sistema. Come ultima cosa verranno considerati effetti di frammentazione, derivanti da collisioni tra corpi (protopianeti o frammenti), che porteranno alla formazione di famiglie di frammenti.

Una volta delineato il modello analitico, verranno riportati i risultati delle simulazioni numeriche per mostrare come la dimensione dei corpi in gioco (pebbles e planetesimi) e i parametri del disco (densità superficiale e viscosità del gas) modifichino i tempi di formazione dell'embrione.



# Capitolo 1

## Tasso di crescita dell'embrione

Denotiamo con  $M_{emb}$  la massa dell'embrione planetario. Il tasso di crescita può essere espresso come

$$\frac{dM_{emb}}{dt} = \frac{\pi R_x R_z v_{rel} \Sigma}{2H} \quad (1.1)$$

dove  $R_x$  e  $R_z$  sono i raggi di cattura orizzontale e verticale,  $v_{rel}$  è la velocità relativa tra embrione e corpi esterni, come planetesimi o particelle, quando entrano nella sfera di Hill<sup>1</sup> del corpo, e  $\Sigma$  è la densità superficiale di piccole particelle e  $H$  è la loro altezza di scala verticale, ovvero l'altezza per cui la densità diminuisce di un fattore  $e$ . Supponiamo per ora che ogni collisione considerata porti ad accrescimento del corpo.

Trascurando la presenza del gas, introduciamo l'effetto di *focussing gravitazionale*, ovvero il fenomeno per cui la traiettoria delle particelle viene allineata a quella del corpo maggiore, in questo caso l'embrione, portando alla collisione i due oggetti. In altre parole la sezione d'urto del processo non è la sezione d'urto geometrica, come in assenza di focussing, ma sarà aumentata, e ciò comporta ovviamente un aumento del raggio di cattura.

Tale effetto sarà ovviamente inversamente proporzionale alla velocità relativa dei corpi, in quanto minore è la velocità e maggiore è il tempo a disposizione della gravità per allineare le traiettorie.

Esprimiamo dunque il raggio di cattura orizzontale  $R_x$  come

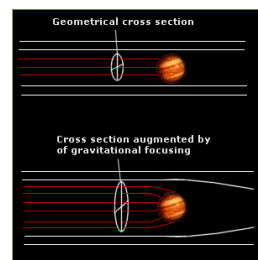
$$R_x = R_{emb} \left( 1 + \frac{C v_{esc}^2}{v_{rel}^2} \right)^{1/2} \quad (1.2)$$

dove  $v_{esc}$  è la velocità di fuga dell'embrione, ovvero la velocità iniziale minima che un corpo deve avere per allontanarsi da una sorgente di campo gravitazionale, definita come

$$v_{esc} = \left( \frac{2GM_{emb}}{R_{emb}} \right)^{1/2}$$

La formula 1.2 viene ricavata andando a considerare non solo le collisioni dei corpi minori con l'embrione, che ovviamente influenzano il sistema e portano alla cat-

<sup>1</sup>sfera di influenza gravitazionale di un corpo celeste rispetto alle perturbazioni di un altro corpo, di massa maggiore, dove  $R_H \sim a \left( \frac{m}{3M} \right)^{1/3}$  con  $m$  massa dell'embrione e  $M$  massa della stella



tura, aumentando la massa dell'embrione stesso<sup>2</sup>, ma anche quelle che vengono definite *near misses*, ovvero letteralmente i "quasi scontri" che vanno a perturbare il sistema, aumentando il raggio di cattura, oltre il raggio fisico dell'embrione. Viene dunque implementata la teoria di Opik, che tiene conto solamente degli scontri in un sistema a due corpi, andando a includere anche i passaggi di un corpo vicino all'altro. Di conseguenza l'interazione non è più un'interazione di contatto, ma è a distanza, in quanto agisce la forza di gravità [19].

Per quanto riguarda invece il raggio di cattura verticale  $R_z$ , questo è dato dal minimo tra  $R_x$  e  $H$

$$R_z = \min\{R_x, H\} \quad (1.3)$$

Se infatti  $R_z$  fosse maggiore dell'altezza di scala verticale, la diminuzione della densità compenserebbe l'aumento del raggio di cattura. Di conseguenza si assume come raggio di cattura verticale massimo l'altezza di scala delle piccole particelle. L'altezza di scala verticale, per corpi massivi, è semplicemente data da

$$H_p = a \cdot i$$

dove  $a$  è il semiasse maggiore dell'orbita e  $i$  è l'inclinazione dell'orbita, supposta essere  $e/2$  dove  $e$  è ovviamente l'eccentricità dell'orbita. Sappiamo inoltre che l'inclinazione dell'orbita aumenta con l'aumentare del diametro delle particelle, a causa dell'indebolimento della forza di trascinamento dovuta alla presenza del gas.

Per particelle piccole invece non vale tale relazione, in quanto l'altezza di scala verticale è determinata da effetti di turbolenza del gas, ovvero dal numero di Stokes che descrive il comportamento di una particella sospesa in un fluido, in questo caso in un gas. In particolare per effetti diffusivi le particelle tendono a distribuirsi su un'altezza di scala che è maggiore di quella imperturbata, che denotiamo con  $H_{gas}$  ([16]).

$$H_p = H_{gas} \left( \frac{\alpha}{\alpha + St} \right)^{1/2}$$

Tenendo dunque conto di entrambe le situazioni, abbiamo che l'altezza di scala verticale delle particelle vale

$$H = \max \left\{ ai, H_{gas} \left( \frac{\alpha}{\alpha + St} \right)^{1/2} \right\} \quad (1.4)$$

con la viscosità di turbolenza determinata come  $\nu = \alpha c_s H_{gas}$  ([18]) e  $c_s$  è la velocità del suono. Il numero di Stokes può essere scritto come  $St = \frac{v_{kep} \cdot t_{drag}}{a}$  dove  $t_{drag}$  è il tempo tipico dell'effetto *gas-drag*, ovvero il trascinamento dovuto al gas del disco, e ci dà una misura dell'accoppiamento delle particelle con il gas, mentre  $v_{kep}$  è la velocità kepleriana che sappiamo essere  $v_{kep} = \left( \frac{GM_s}{a} \right)^{1/2}$ . Si vede poi che quando il numero di Stokes è molto piccolo, l'altezza di scala verticale delle particelle tende a quella del gas.

Abbiamo dunque che l'altezza in scala è determinata da due fattori: l'inclinazione dell'orbita per grandi particelle, e la turbolenza per particelle con diametro

<sup>2</sup>stiamo considerando infatti che ogni collisione sia tale da accrescere l'embrione

minore. In particolare il primo contributo è proporzionale alla massa delle particelle, mentre il secondo è inversamente proporzionale. Abbiamo dunque un valore minimo dell'altezza di scala quando i due contributi si bilanciano, ovvero quando hanno la stessa importanza.

C'è tuttavia una fondamentale differenza tra i due contributi, infatti mentre il primo cresce con l'aumentare della massa dell'embrione, dato infatti che l'inclinazione è direttamente proporzionale ad essa, il secondo rimane invece costante in quanto la turbolenza non dipende dall'embrione. Ciò significa che il valore minimo di  $H$  cresce con la massa dell'embrione, e si ha equilibrio per particelle con sempre minore diametro, man mano che la massa dell'embrione cresce.



## Capitolo 2

# Velocità relative

Come abbiamo visto dalle relazioni precedenti, una quantità determinante sia per il tasso di accrescimento dell’embrione (equazione 1.1), che per il raggio di cattura dello stesso (equazione 1.2) è la velocità relativa tra l’embrione e i corpi minori, ovvero la velocità di questi ultimi quando entrano nella sfera di Hill del primo. Tale velocità è diretta conseguenza di vari effetti, in particolare dipende dall’eccentricità e dall’inclinazione dell’orbita, dallo *shear* Kepleriano ovvero dalla dipendenza della velocità dalla distanza dalla stella, dal drift dovuto all’effetto di trascinamento del gas e alla turbolenza.

In particolare lo *shear* kepleriano è l’effetto per cui le zone esterne del disco ruotano più lentamente di quelle interne. Questa differenza di velocità genera poi una frizione che va a modificare la velocità delle particelle in orbita.

Supponendo come in precedenza che  $e$  sia sempre maggiore di  $i$ , la velocità può essere approssimata con

$$v_{rel} = \max \{ev_{kep}, hv_{kep}, v_{drift}, v_{turb}\} \quad (2.1)$$

dove il secondo termine è dovuto allo *shear* kepleriano e diventa importante quando  $e < h$ , con  $h$  raggio di Hill ridotto, ovvero raggio di Hill normalizzato al semiasse maggiore dell’orbita

$$h = \frac{r_H}{a} = \left( \frac{m}{3M} \right)^{1/3}$$

### 2.1 Velocità di drift

Per quanto riguarda  $v_{drift}$ , questa è diretta conseguenza del fatto che una nebulosa che assume la forma di un disco, a causa del gradiente di pressione del gas,<sup>1</sup> ruota più lentamente della velocità di rotazione orbitale ”libera”, ovvero in assenza di gas, e questo causa il decadimento delle orbite dei corpi solidi. In altre parole questi spiraleggiano verso l’interno.

La velocità di drift dipende poi fortemente dalla dimensione degli oggetti ed è massima per corpi della dimensione del metro circa, con valori di  $10^4$  *cm/s*. Inoltre questo effetto può portare poi a un mixing di materia solida con il gas e collisioni che possono causare una rapida accumulazione di planetesimi.

Possiamo dunque esprimere la velocità di drift come [20]

---

<sup>1</sup>assumiamo infatti che la pressione, la densità e la temperatura del gas diminuiscano allontanandosi dall’asse centrale del disco

$$v_{drift} = \eta v_{kep} \left( \frac{(1 + 4St^2)^{1/2}}{1 + St^2} \right) \quad (2.2)$$

Tale relazione viene derivata imponendo che il gas orbiti attorno alla stella ad una velocità

$$v_{gas} = (1 - \eta)v_{kep} \quad \text{con} \quad \eta \simeq \frac{c_s^2}{v_{kep}^2}$$

ovvero viene richiesto che questo abbia una velocità di rotazione minore della velocità kepleriana, in modo da avere equilibrio idrostatico.

Infatti, ponendoci nel sistema di riferimento fermo, e identificando con  $\rho, P, r$  rispettivamente densità, pressione e distanza dall'asse centrale, conosciamo la relazione tra gravità e velocità kepleriana

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{v_{kep}^2}{r^2}$$

Spostandoci ora nel sistema di riferimento rotante solidale con la nebulosa, la restante gravità è data da

$$\Delta g = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \quad (2.3)$$

L'espressione precedente rappresenta la condizione di equilibrio idrodinamico accennata in precedenza. Ricordiamo inoltre che, come detto in precedenza, la pressione diminuisce allontanandosi dall'asse, o in altre parole la derivata della pressione rispetto a  $r$  è negativa, così come  $\Delta g$ .

Possiamo ora mettere in relazione la velocità di rotazione del gas con la velocità di rotazione kepleriana tramite l'equazione 2.3.

$$\begin{aligned} \frac{v_{gas}^2}{r} &= \frac{v_{kep}^2}{r} + \Delta g = \frac{v_{kep}^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \\ \implies v_{gas}^2 &= v_{kep}^2 \left( 1 + \frac{r}{\rho} \frac{dP}{dr} \frac{1}{v_{kep}^2} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ora, esprimendo  $c_s^2$  come  $\frac{P}{\rho}$ , e la pressione come

$$P = P_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-n}$$

possiamo derivare tale espressione ottenendo

$$\frac{dP}{dr} = -nP_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-n-1} = -\frac{n}{r} P$$

L'equazione 2.4 diventa allora, includendo  $n$  in  $\eta$

$$v_{gas} = v_{kep} \left( 1 - \frac{\eta n}{\rho} \frac{P}{v_{kep}^2} \right)^{1/2} = v_{kep} \left( 1 - n \frac{c_s^2}{v_{kep}^2} \right)^{1/2} \simeq v_{kep} (1 - \eta) \quad (2.5)$$

Siamo dunque arrivati all'espressione iniziale (equazione 2.2). In particolare è stato trovato che  $n = 3$  [20] per una nebulosa di quelle da noi considerate, ovvero condensate centralmente a formare un disco.

## 2.2 Velocità di turbolenza

Oltre alla rotazione il gas della nebulosa presenta anche moti turbolenti. Questi in pratica impongono alle particelle più leggere un moto netto radiale, in contrapposizione al moto di drift, mentre non modificano sostanzialmente il moto di oggetti più massivi.

Prendiamo l'equazione che descrive la velocità dovuto a fenomeni di turbolenza da [14]

$$v_{turb} = \alpha c_s^2 \cdot \min\left\{2St, \frac{1}{1+St}\right\} \quad (2.6)$$

Se siamo dunque in presenza di turbolenza possiamo pensare che ci sia una corrente di gas che dal semipiano centrale del disco esce, andando dunque nei semipiani inferiore e superiore, e viceversa da questi una corrente vada verso il semipiano centrale.

In pratica per grandi particelle la velocità relativa è determinata dall'eccentricità  $e$ , la quale diminuisce al diminuire della dimensione delle particelle per effetto della maggiore forza del gas. Con particelle relativamente grandi,  $D \sim 100 \text{ m}$  ci troviamo nel regime di shear, ovvero siamo nella situazione per cui  $e < h$ . In questo caso allora le particelle si trovano su orbite quasi circolari, e la velocità è data dalla differenza tra la loro velocità kepleriana e quella dell'embrione.

Per quanto riguarda invece le piccole particelle, il loro moto è dominato dal drift, radiale e tangenziale, quando l'embrione è ancora piccolo. Col crescere della massa dell'embrione l'effetto di drift diventa sempre meno importante, fino a quando gli unici fattori determinanti per le velocità diventano  $e$ , per grandi particelle, e  $h$  per piccoli corpi.

## 2.3 Eccentricità

Vediamo dunque come varia l'eccentricità delle orbite dei piccoli e grandi corpi, per effetto di trascinamento del gas e per incontri con corpi massivi, quali gli embrioni. Sappiamo infatti che  $e$  è aumentata dall'agitazione viscosa dovuta ad incontri gravitazionali con gli embrioni, e diminuita dal trascinamento del gas. Assumiamo ora che i due fenomeni si equilibrino in modo che  $e$  sia costante. Indicheremo con VS e GD rispettivamente l'agitazione viscosa e il trascinamento. Nel primo caso abbiamo che la variazione di eccentricità è presa da [13]

$$\left. \frac{de^2}{dt} \right|_{VS} = av_{kep} \frac{h^4 \Sigma_{emb}}{M_{emb}} P_{VS} \quad (2.7)$$

dove  $\Sigma_{emb}$  è la densità superficiale degli embrioni planetari, che sono qui supposti essere equi-spaziati radialmente e distanziati ognuno da  $b$  raggi di Hill ridotti, con  $b \simeq 10$ . Tale risultato è stato trovato numericamente [12]

$$\Sigma_{emb} = \frac{M_{emb}}{2\pi a^2 b h} \quad \text{e} \quad P_{VS} = \frac{73}{1 + 0.11e^2/h^2}$$

Per quanto riguarda invece il secondo contributo abbiamo due possibilità [17], in base al raggio delle particelle che consideriamo. Definiamo  $R_{crit} = \frac{27c_s \lambda}{2\eta v_{kep}}$

$$\left. \frac{de^2}{dt} \right|_{GD} = \begin{cases} -\frac{2e^2}{t_{drag}} & R < R_{crit} \\ -\frac{2e^2}{t_{drag}} \sqrt{1 + \frac{e^2}{\eta^2}} & R > R_{crit} \end{cases} \quad (2.8)$$

con  $t_{drag}$  che a sua volta dipende dal raggio delle particelle

$$t_{drag} = \begin{cases} \frac{\rho R}{\rho_{neb} c_s} & R < \frac{9\lambda}{4} \\ \frac{4\rho R^2}{9\rho_{neb} c_s \lambda} & \frac{9\lambda}{4} < R < R_{crit} \\ \frac{6\rho R}{\rho_{neb} \eta v_{kep}} & R > R_{crit} \end{cases} \quad (2.9)$$

Nelle relazioni precedenti  $\rho$  è la densità di volume delle particelle,  $\rho_{neb}$  è la densità del gas nel disco e  $\lambda$  è il *cammino libero medio* dello stesso. Inoltre riconosciamo almeno due regimi, in particolare la prima relazione del sistema 2.9 rappresenta l'*Epstein drag* in quanto il numero di Reynolds, definito come  $Re = 4 \frac{v}{c_s} \frac{R}{\lambda}$  è minore di 1. Nella seconda siamo invece in regime di *Stokes drag*, in quanto  $Re > 1$ .



## Capitolo 3

# Atmosfera dell'embrione

Quando l'embrione diventa abbastanza grande, riesce a catturare parte del gas del disco, creando un'atmosfera che andrà ad influire sul tasso di accrescimento. A causa infatti dell'effetto gas-drag, una particella che attraversa l'atmosfera verrà rallentata e portata a cadere sul pianeta. Dobbiamo dunque calcolare la sezione d'urto del processo per vedere come questo fenomeno influisce sulla crescita. Per fare ciò assumiamo che una particella venga frenata principalmente quando attraversa la regione più densa dell'atmosfera, ovvero la parte più vicina all'embrione. Possiamo dunque scrivere la variazione di velocità come

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{atm} = -\frac{3\rho_{atm}v^2}{4\rho R} \quad (3.1)$$

dove  $\rho_{atm}$  è la densità dell'atmosfera,  $\rho$  quella del disco di gas, e la velocità della particella viene supposta supersonica.

Quando poi la particella passa nella sfera di Hill dell'embrione allora la sua energia per unità di massa vale

$$E_0 = \frac{v_{rel}^2}{2} - \frac{GM_{emb}}{r_H} \quad (3.2)$$

Avvicinandosi ulteriormente, ad una distanza di  $r_1$ , con  $r_1 < r_H$ , e velocità  $v_1$ , la particella subisce un cambio di energia istantaneo, dovuto al cambio di velocità per effetto gas-drag

$$\Delta E \sim v_1 \Delta v \sim v_1 \left. \frac{dv}{dt} \right|_{atm} \Delta t \sim \left. \frac{dv}{dt} \right|_{atm} r_1 \quad (3.3)$$

con  $\Delta t \sim r_1/v_1$  durata del passaggio nella porzione più densa dell'atmosfera.

Perchè una particella venga catturata, la sua energia quando passa attraverso l'atmosfera (sempre considerando la regione più densa) non deve essere maggiore dell'energia necessaria a raggiungere la distanza  $r_H$  una seconda volta. Se infatti fosse maggiore allora una volta attraversata la sfera di Hill la particella avrebbe energia sufficiente per sfuggire alla cattura.

Di conseguenza il massimo raggio di cattura di una particella è il raggio corrispondente ad una variazione di energia dato da

$$\Delta E = -\frac{GM_{emb}}{r_H} - E_0 = -\frac{v_{rel}^2}{2} \sim -\frac{3\rho_{atm}v_1^2 r_1}{4\rho R} \quad (3.4)$$

dove abbiamo utilizzato l'equazione 3.1. In pratica abbiamo imposto che una volta attraversata la sfera di Hill dell'embrione la particella abbia velocità uguale a 0, in modo che sia "costretta" a cadere sul protopianeta.

Non conosciamo tuttavia la velocità della particella, ma possiamo supporre che, in prima approssimazione questa sia dovuta alla forza gravitazionale, ovvero

$$v_1^2 \sim 2GM_{emb}r_1$$

Ora imponendo che la variazione di energia sia minore di quella corrispondente al massimo raggio di cattura (eqn 3.4), e utilizzando l'espressione appena trovata per la velocità della particella, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \Delta E &= -\frac{3\rho_{atm}v_1^2r_1}{4\rho R} = -3\rho_{atm}\frac{2GM_{emb}}{r_1}\frac{r_1}{4\rho R} \leq \Delta E_{max} = -\frac{v_{rel}^2}{2} \\ &\implies \rho_{atm} \geq \frac{v_{rel}^2 R \rho}{3GM_{emb}} \equiv \rho_{crit} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ora consideriamo la densità atmosferica come una funzione della distanza  $r$  dall'embrione, descritta da un modello radiativo per un gas ideale con opacità  $k$  e luminosità  $L$ . Supponiamo inoltre che la densità dell'atmosfera si congiunga debolmente alla densità della nebulosa sul bordo dell'atmosfera, ovvero al raggio di Bondi definito come il raggio di accrezione sferica su un oggetto compatto che attraversa il mezzo stellare.

$$r_B = \frac{GM_{emb}}{\gamma c_s^2} \quad c_s^2 = \frac{P_g}{\rho_g} \quad \gamma = 1.4$$

Abbiamo in pratica chiesto che la funzione che descrive la variazione di densità dell'atmosfera sia continua, e abbiamo fatto un matching in modo che sul bordo le due densità coincidano.

Partiamo dunque da tre equazioni che descrivono temperatura e pressione per l'atmosfera dell'embrione, dette equazioni di struttura stellare.

$$P = \frac{k_B}{\mu m_H} \rho T \quad (3.6)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \rho \quad (3.7)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3kL}{64\sigma_{SB}\pi} \frac{\rho}{r^2 T^3} \quad (3.8)$$

dove  $P$  è la pressione,  $k_B$  è la costante di Boltzmann,  $\mu m_H$  è il peso molecolare,  $\rho$  è la densità del gas,  $T$  è la temperatura e  $\sigma_{SB}$  è la costante di Stefan-Boltzmann. Definiamo ora delle nuove variabili adimensionali normalizzando rispetto alle quantità fisiche del gas

$$x = r/r_B \quad p = P/P_g \quad \sigma = \rho/\rho_g \quad \theta = T/T_g$$

Ora applichiamo i cambi di coordinate alle tre equazioni precedenti prese singolarmente. Vediamo allora che la prima equazione diventa facilmente

$$\frac{P}{P_g} = \frac{\cancel{\mu m_H} k_B \rho T}{\cancel{\mu m_H} \rho_g T_g} = \frac{\rho}{\rho_g} \frac{T}{T_g} = \sigma \theta$$

Per quanto riguarda la seconda, vogliamo avere la variabile  $x$  al posto della variabile  $r$ , di conseguenza moltiplichiamo e dividiamo il membro di destra per  $r_B^2$ , ottenendo

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dr} &= -\frac{GM}{r^2} \rho \frac{r_B^2}{r_B^2} = -\frac{GM}{r^2/r_B^2} \rho \frac{1}{r_B^2} = -\frac{GM}{x^2} \rho \frac{\gamma c_s^2}{GM} \frac{1}{r_B} \\ &= \frac{\gamma}{x^2} \rho \frac{P_g}{\rho_g} \frac{1}{r_B} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dP/P_g}{dr/r_B} = -\gamma \frac{\sigma}{x^2}\end{aligned}$$

Nella terza equazione moltiplichiamo e dividiamo a destra per  $r_B^2$  e  $T_g^4$

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dr} &= -\frac{3kL}{64\pi\sigma_{SB}} \frac{\rho}{T^3} \frac{1}{x^2} \frac{\gamma P_g/\rho_g}{GM} \frac{1}{r_B} \frac{T_g^4}{T_g^4} = -\frac{3kL}{64\pi\sigma_{SB}} \frac{\sigma}{\theta^3 x^2} \frac{\gamma P_g}{GM T_g^4} \frac{1}{r_B T_g} \\ \Longrightarrow \frac{d\theta}{dx} &= -W_{neb} \gamma \frac{\sigma}{\theta^3 x^2} \quad \text{con} \quad W_{neb} = \frac{3kL}{64\pi\sigma_{SB}} \frac{P_g}{GM T_g^4}\end{aligned}$$

Allora le tre equazioni che descrivono l'atmosfera dell'embrione, in variabili normalizzate sono

$$p = \sigma \theta \quad (3.9)$$

$$\frac{dp}{dx} = -\gamma \frac{\sigma}{x^2} \quad (3.10)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\gamma W_{neb} \frac{\sigma}{\theta^3 x^2} \quad (3.11)$$

Procediamo ora dividendo l'equazione 3.11 per l'equazione 3.10 e risolviamo l'equazione differenziale

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{-\gamma W_{neb} \frac{\sigma}{\theta^3 x^2}}{-\gamma \sigma / x^2} = \frac{W_{neb}}{\theta^3}$$

$$\theta^4(p) = 4W_{neb} \cdot p + C$$

e imponendo la condizione iniziale per cui la temperatura dell'atmosfera, quando la pressione dell'atmosfera è uguale alla pressione della nebulosa, è uguale alla temperatura della nebulosa

$$\theta(p=1) = 1$$

otteniamo l'espressione della temperatura in funzione della pressione

$$\theta^4(p) = 1 + 4W_{neb}(p-1) \quad (3.12)$$

L'equazione precedente può essere ulteriormente semplificata trattando separatamente i due casi in cui

- $\theta \ll 1$  definita come *quasi isoterma*
- $\theta \gg 1$  detta *pressione dominante*

Imporremo poi che al confine, ovvero nella zona di passaggio tra un regime e l'altro (supposto a  $\theta \equiv 1$ ), ad una distanza  $x_t$  con una densità  $\sigma_t$  queste siano identiche. Le due condizioni possono poi essere riscritte come  $4W_{neb}p \ll 1$  e  $4W_{neb}p \gg 1$ .

- **$4W_{neb}p \ll 1$**

In questo regime l'equazione 3.12 si può approssimare come

$$\theta \approx 1 + W_{neb}(p - 1)$$

Possiamo ora sostituire questa equazione nella relazione 3.9 che diventa

$$p = \sigma\theta \approx \sigma(1 + W_{neb}(p - 1)) \approx W_{neb}\sigma^2 + \sigma(1 - W_{neb}) \quad (3.13)$$

Ora andiamo a derivare rispetto a  $x$  e con l'equazione 3.10

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dx} = \frac{d\sigma}{dx} (2\sigma W_{neb} + 1 - W_{neb}) = -\gamma \frac{\sigma}{x^2}$$

e risolvendo l'equazione differenziale

$$(2W_{neb} + \frac{1 - W_{neb}}{\sigma})d\sigma = -\frac{\gamma}{x^2}dx$$

ottenendo

$$2W\sigma + (1 - W) \log \sigma = -\frac{\gamma}{x} + C$$

Imponendo la condizione iniziale che  $\sigma(x = 1) = 1$ , ovvero che la densità dell'atmosfera, ad una distanza pari al raggio di Bondi, sia uguale alla densità della nebulosa, condizione che avevamo già espresso all'inizio della trattazione, otteniamo  $C = 2W_{neb} - \gamma$ , che sostituita ci permette di arrivare ad un'espressione per  $1/x = r_B/r$  nell'approssimazione per cui  $(W_{neb}) \ll 1$

$$\frac{1}{x} \approx 1 + \frac{2W_{neb}(\sigma - 1) + (1 - W_{neb}) \log \sigma}{\gamma} \quad (3.14)$$

dove non definiamo analiticamente tale valore

- **$4W_{neb}p \gg 1$**

In questo regime l'equazione 3.12 può essere approssimata come

$$\theta^4 \approx 4W_{neb}p$$

e di conseguenza l'equazione 3.11 viene riscritta moltiplicando e dividendo per  $\theta$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\gamma W_{neb} \frac{\overbrace{\sigma\theta}^p}{\theta^4 x^2} = -\frac{\gamma}{4x^2}$$

e integrando otteniamo

$$\theta(x) = \frac{\gamma}{4x} + C \quad (3.15)$$

Riprendiamo ora l'equazione 3.9 e riscriviamola in funzione di  $\sigma$  sostituendo  $p$  con  $\theta^4/4W_{neb}$

$$\sigma = \frac{p}{\theta} = \frac{\theta^3}{4W_{neb}} = \frac{1}{4W_{neb}} \left( \frac{\gamma}{4x} + C \right)^3 \quad (3.16)$$

Ora imponiamo che i due regimi portino alla stessa soluzione per  $x_1$  per trovare  $C$ , ovvero che  $\sigma(x_1) = \sigma_1$ , trovando

$$C = (4W_{neb}\sigma_1)^{1/3} - \frac{\gamma}{4x_1}$$

e quindi

$$\sigma \approx \frac{1}{4W_{neb}} \left( (4W_{neb}\sigma_1)^{1/3} + \frac{\gamma}{4x} - \frac{\gamma}{4x_1} \right)^3 \quad (3.17)$$

La precedente equazione è valida per  $x \ll x_1$ , ovvero per zone interne all'atmosfera. Infatti vediamo che in questo caso  $\frac{\gamma}{4x} \gg \frac{\gamma}{4x_1}$ , ovvero  $\sigma > \sigma_1$ , o ancora  $\rho > \rho_1$ .

Dobbiamo ora trovare un valore per  $\sigma_1$  in modo da definire la regione di transizione tra quasi isoterma e pressione dominante.

Poniamo che la transizione avvenga per  $4W_{neb}p = 1$ , allora dall'equazione 3.13 considerando che  $p(\sigma_1) = p_1$ , ricaviamo che

$$\sigma_1 \approx \frac{p_1}{1 + W_{neb}p_1} \approx \frac{1}{5W_{neb}} \quad (3.18)$$

Abbiamo dunque ottenuto una relazione che ad ogni distanza, ci dà il valore della densità dell'atmosfera dell'embrione. Ora, perchè una particella che attraversa l'atmosfera perda sufficiente energia da essere catturata, questa deve attraversare una zona in cui la densità è almeno pari a  $\rho_{crit}$ , descritto dall'espressione 3.5. Quello che ci interessa è dunque calcolare  $\sigma_{crit} \frac{\rho_{crit}}{\rho_g} < \sigma_1$  da cui possiamo ricavare  $r_{crit}$  come raggio massimo di cattura.

Usiamo quindi l'equazione 3.14 per  $\sigma_{crit} = \sigma(x_{crit})$  e l'equazione 3.17 per determinare il raggio di cattura massimo.

$$\frac{1}{x_{crit}} = \frac{1}{x_1} + \frac{4}{\gamma} (4W_{neb})^{1/3} \left( \sigma_{crit}^{1/3} - \sigma_1^{1/3} \right) \quad (3.19)$$

Possiamo poi riscrivere i risultati precedenti (3.14 e 3.19), indicando con  $R_{atm}$  il raggio critico, come

$$\frac{r_B}{R_{atm}} = \begin{cases} 1 + \frac{2W_{neb}(\sigma - 1) + \log \sigma}{\gamma} & \sigma_{crit} < \sigma_1 \\ \frac{r_B}{r_1} + \frac{4}{\gamma} (4W_{neb})^{1/3} \left( \sigma_{crit}^{1/3} - \sigma_1^{1/3} \right) & \sigma_{crit} > \sigma_1 \end{cases} \quad (3.20)$$

Ora possiamo riscrivere il raggio di cattura orizzontale con effetto di focussing gravitazionale (equazione 1.2) utilizzando il raggio di cattura dovuto alla presenza dell'atmosfera attorno all'embrione planetario.

$$R_x = R_{atm} \left( 1 + \frac{Cv_{esc}^2}{v_{rel}^2} \right)^{1/2} \quad \text{con} \quad v_{esc} = \left( \frac{2GM_{emb}}{R_{atm}} \right)^{1/2} \quad (3.21)$$



## Capitolo 4

# Pebble accretion

Introduciamo ora anche la presenza del gas, e del conseguente effetto di gas-drag su piccole particelle. Sappiamo che queste, quando incontrano un embrione, vi cadono con una velocità data da 2.1, dove il termine dovuto allo shear kepleriano può essere riscritto come  $rv_{kep}/a$ .

Andiamo dunque a vedere come il trascinamento del gas modifica il raggio di cattura dell'embrione e il tasso di accrescimento. Come in precedenza supponiamo che la nebulosa sia un disco laminare, in cui il gradiente di pressione è tale da causare la caduta delle particelle di piccole dimensioni verso l'interno (gradiente negativo).

È possibile studiare il seguente sistema come un problema dei tre corpi ristretto, implementato in modo da includere la presenza del gas. Abbiamo infatti un corpo principale, la stella, un secondo corpo massivo, l'embrione planetario, e un terzo corpo, o corpo di test, la cui massa può essere trascurata rispetto alle altre, ovvero la particella. Ulteriore supposizione è che le orbite dei corpi siano coplanari e circolari (nel caso dei due corpi maggiori). Infine studiamo il moto della particelle nel sistema di riferimento rotante solidale al protopianeta. Possiamo dunque esprimere la forza per unità di massa agente sulla particella come

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - 2\vec{\Omega}_0 \times \vec{v} + \Omega_0^2 \vec{r}$$

dove  $\vec{r}$  sono le coordinate nel sistema rotante con velocità  $\Omega_0$  e il termine  $\vec{F}$  include sia la forza gravitazionale che il trascinamento dovuto al gas.

Utilizzando simulazioni numeriche sul modello sopra descritto [15], si è dimostrato che il raggio massimo di cattura corrisponde ad una variazione della velocità delle particelle pari a  $v_{rel}/4$ .

Sappiamo inoltre che se le particelle sono fortemente legate al gas, allora la gravità può agire per un tempo dato da

$$t_{drag} = \frac{aSt}{v_{kep}}$$

e dopo questo tempo comincia a dominare la forza di trascinamento del gas sul moto delle piccole particelle, che denoteremo come *pebble*. Abbiamo dunque due regimi, il primo in cui domina la gravità, e il secondo in cui domina il gas. Andiamo a vedere quale è il massimo raggio di cattura, detto  $R_{set}$ , per cui le particelle

cadono sull'embrione. Ciò equivale a imporre che la variazione di velocità imposta dalla forza di gravità per un tempo  $t_{drag}$  sia pari a  $v_{rel}/4$ .

$$\Delta v \sim \frac{GM_{emb}}{R_{set}^2} t_{drag} = \frac{v_{rel}}{4} \quad (4.1)$$

Di conseguenza, per come è stato definito  $R_{set}$ , le particelle con un parametro d'impatto, inteso come distanza dal centro dell'embrione su un piano perpendicolare alla traiettoria della particella, maggiore di  $R_{set}$  non verranno catturate in quanto troppo legate al gas.

Dalla relazione precedente ricaviamo l'espressione del raggio massimo

$$R_{set} = 2 \left( \frac{GM_{emb}}{v_{rel}} t_{drag} \right)^{1/2} = 2 \left( \frac{GM_{emb}}{v_{rel}} \frac{aSt}{v_{kep}} \right)^{1/2} \quad (4.2)$$

Definiamo ora  $v_H = hv_{kep}$  dove  $h$  è il raggio di Hill ridotto definito in precedenza e utilizziamo le uguaglianze  $GM_{emb} = 3r_H v_H^2$  e  $ah = r_H$ . Riscriviamo ora  $R_{set}$  per ogni velocità relativa.

- $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_{turb}$

$$\begin{aligned} R_{set} &= \left( \frac{4GM_{emb}}{v_{turb}} \frac{aSt}{v_{kep}} \right)^{1/2} = \left( \frac{12Str_H v_H^2}{v_{turb}} \frac{1}{\underbrace{hv_{kep}}_{v_H}} \overbrace{ah}^{r_H} \right)^{1/2} \\ &= r_H \cdot \left( \frac{12St}{v_{turb}} v_H \right)^{1/2} \end{aligned}$$

- $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_{drift}$

seguiamo lo stesso procedimento del caso precedente ottenendo

$$R_{set} = r_H \cdot \left( \frac{12St}{v_{drift}} v_H \right)^{1/2}$$

- $\mathbf{v}_{rel} = e\mathbf{v}_{kep}$

$$\begin{aligned} R_{set} &= \left( \frac{4GM_{emb}}{ev_{kep}} \frac{aSt}{v_{kep}} \right)^{1/2} = \left( \frac{12St \cdot h r_H \cdot ah^2 \cdot v_H^2}{e h^2 v_{kep}^2} \right)^{1/2} \\ &= r_H \cdot \left( \frac{12St \cdot h}{e} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

- $\mathbf{v}_{rel} = r\mathbf{v}_{kep}/a$

In questo caso imponendo che  $r = R_{set}$  otteniamo la seguente espressione per il raggio massimo di cattura

$$\begin{aligned} R_{set} &= \left( \frac{12Str_H v_H^2}{R_{set} v_{kep}^2 / a} \cdot a \frac{h^2}{h^2} \right)^{1/2} = \left( \frac{12Str_H^3}{R_{set}} \right)^{1/2} \\ &= r_H \cdot (12St)^{1/3} \end{aligned}$$



In conclusione abbiamo che il raggio massimo di cattura per piccole particelle è il minimo tra i valori precedenti, dato infatti che essendo la velocità relativa la massima tra le velocità, e essendo  $R_{set}$  inversamente proporzionale alla velocità relativa .

$$R_{set} = r_H \times \min \left\{ \left( \frac{12St}{v_{turb}} v_H \right)^{1/2}, \left( \frac{12St}{v_{drift}} v_H \right)^{1/2}, \left( \frac{12St \cdot h}{e} \right)^{1/2}, (12St)^{1/3} \right\} \quad (4.3)$$

Ovviamente perchè le particelle possano andare ad accrescere l'embrione, l'incontro deve durare abbastanza perchè le due forze in gioco raggiungano l'equilibrio, ovvero, definendo la durata dell'incontro  $t_{enc} \sim R_{set}/v_{rel}$ , dobbiamo avere che

$$t_{enc} \geq t_{drag}$$

Utilizzando ora le equazioni 4.3 e 4.1 troviamo che la cattura è possibile per le sole particelle con un numero di Stokes minore di un determinato valore. Come prima valutiamo caso per caso il valore del numero di Stokes critico, andando a sostituire  $v_{rel}$  con ogni possibilità.

- $\mathbf{v_{rel} = v_{turb}}$

$$\begin{aligned} t_{enc} &= \frac{R_{set}}{v_{turb}} = r_H \left( \frac{12St \cdot v_H}{v_{turb}} \right)^{1/2} \frac{1}{v_{turb}} \geq \frac{a \cdot St \cdot h}{v_{kep} \cdot h} \\ \implies 12^{1/2} \left( \frac{v_H}{v_{turb}} \right)^{3/2} &\geq St^{1/2} \end{aligned}$$

che può essere riscritta come

$$St < St_{crit} \equiv 12 \left( \frac{v_H}{v_{turb}} \right)^3$$

- $\mathbf{v_{rel} = v_{drift}}$

Facciamo la stessa cosa del caso precedente e otteniamo

$$St_{crit} \equiv 12 \left( \frac{v_H}{v_{drift}} \right)^3$$

- $\mathbf{v_{rel} = e v_{kep}}$

$$\begin{aligned} t_{enc} &= \frac{R_{set}}{v_{turb}} = r_H \left( \frac{12St \cdot h}{e} \right)^{1/2} \frac{1}{e v_{kep}} \geq \frac{a \cdot St \cdot h}{v_{kep} \cdot h} \\ \implies 12^{1/2} \left( \frac{h}{e} \right)^{3/2} &\geq St^{1/2} \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$St_{crit} \equiv 12 \left( \frac{h}{e} \right)^3$$

- $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{r}\mathbf{v}_{\text{kep}}/\mathbf{a}$

Ora imponiamo che  $r$  sia uguale a  $R_{\text{set}}$  e andiamo a sostituire con il valore trovato in precedenza e troviamo che

$$t_{\text{enc}} = \frac{R_{\text{set}}}{R_{\text{set}} \frac{v_{\text{kep}}}{a}} \geq \frac{aSt}{v_{\text{kep}}}$$

da cui, semplificando, si ottiene

$$St_{\text{crit}} = 1$$

In generale abbiamo dunque che il numero di Stokes critico è il minimo tra i valori precedenti, ovvero

$$St_{\text{crit}} = \min \left\{ 12 \left( \frac{v_H}{v_{\text{turb}}} \right), 12 \left( \frac{v_H}{v_{\text{drift}}} \right), 12 \left( \frac{h}{e} \right)^3, 1 \right\} \quad (4.4)$$

Vediamo che il massimo numero di Stokes possibile, perchè avvenga la cattura è 1. In questo caso allora il tempo per cui agisce la forza di drag è circa pari al tempo in cui la particella attraversa la sfera di Hill, infatti  $t_{\text{drag}} \sim a/v_{\text{kep}}$ . In altre parole abbiamo numero di Stokes massimo 1 quando  $R_{\text{set}} > r_H$ , per cui le particelle hanno maggior tempo per essere rallentate dal gas. Quando invece  $R_{\text{set}} < r_H$ , il gas ha a disposizione meno tempo, e il massimo numero di Stokes è minore di 1.

Le particelle con numero di Stokes maggiore del numero critico, non vengono dunque catturate dall'embrione, o meglio gravità e gas-drag non raggiungono l'equilibrio necessario per la cattura.

Tuttavia può essere che queste particelle perdano notevole energia proprio a causa del secondo effetto, di conseguenza la probabilità di cattura è comunque maggiore rispetto a quella di un modello che non tiene conto della presenza del gas e dei relativi effetti.

In altre parole, l'esistenza di un valore critico ci dice che le particelle devono avere diametro inferiore ad un diametro massimo perchè possano essere considerate *pebbles* e seguire la relativa dinamica. Tale diametro massimo cresce linearmente con la massa dell'embrione, dato che abbiamo una dipendenza dalla velocità di Hill al cubo.

## Capitolo 5

# Frammentazione

Un ulteriore fenomeno di cui tener conto è la frammentazione. Infatti le collisioni tra oggetti quali planetesimi e frammenti, non portano sempre ad accrezione, ma spesso creano una cascata di frammenti, che per gli effetti discussi in precedenza cadono sull’embrione aumentandone di fatto la massa. In questa sezione tratteremo le collisioni tra planetesimi, tra planetesimi e frammenti, e tra frammenti. Tra i possibili ”proiettili” consideriamo anche i ”pebbles” che tuttavia non vengono mai considerati come bersagli, in quanto i frammenti derivanti da collisioni tra pebbles, crescono in fretta per raggiungere di nuovo la dimensione dei “genitori”. Assegniamo ai frammenti un diametro minimo, compreso tra 1 *mm* e 1 *m*, dove il limite inferiore è imposto dal fatto che particelle di dimensione minore si uniscono in tempi rapidissimi per formare aggregati di dimensioni maggiori. Ci riferiremo al diametro minimo come  $D_{pebb}$ , e alle particelle con tale diametro come *pebbles*, e non prenderemo in considerazione corpi con diametro minore di tale valore. Tratteremo dunque indistintamente planetesimi, frammenti e pebbles, e ci riferiremo ad essi come particelle, dato che vogliamo trovare un modello generale, che descriva i risultati delle collisioni.

Assumiamo che una collisione tra un bersaglio di massa  $M_{bers}$  con proiettile di massa  $M_{pro}$  in moto con velocità  $v_{rel}$ , produca una quantità di frammenti, in massa, data da [10]

$$M_{frag} = (M_{bers} + M_{pro}) \left( \frac{\phi}{1 + \phi} \right) \quad (5.1)$$

con  $\phi = \frac{Q}{Q^*}$  dove  $Q$  è l’energia d’impatto per unità di massa, nel sistema del centro di massa, definita come

$$Q = \frac{M_{bers} \cdot M_{pro}}{(M_{bers} + M_{pro})^2} \left( \frac{v_{rel}^2}{2} \right) \quad (5.2)$$

dove  $v_{rel}$  è data da 2.1.  $Q^*$  è invece l’energia d’impatto critica, ovvero l’energia necessaria ad avere una collisione distruttiva che produca una massa di frammenti pari al 50 % della massa totale, data da

$$Q^* = Q_0 \left( \frac{R_{bers}}{1cm} \right)^j + B\rho \left( \frac{R_{bers}}{1cm} \right)^k \quad (5.3)$$

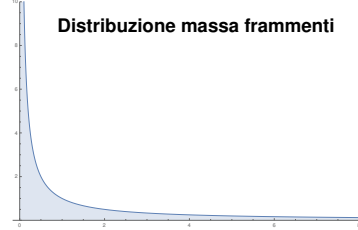
dove  $Q_0, B, j, k$  sono costanti che dipendono dal materiale. Tale relazione è stata derivata da Benz e Asphaug [1] “fittando” risultati delle simulazioni numeriche e considerando una distribuzione isotropa dei proiettili, in modo da eliminare

la dipendenza dall'angolo di incidenza.

Assumiamo ora che la massa del frammento più grande sia pari a  $M_{frag}/10$  e che le altre scalino come una legge di potenza fino a 0.

Trascurando il focussing gravitazionale, che nell'incontro tra particelle non è rilevante, il numero di proiettili che colpiscono il bersaglio in un tempo  $dt$  e in un'area  $A$  del disco di gas, è

$$N_{col} = \frac{\pi(R_{bers} + R_{pro})^2 v_{rel} N_{bers} N_{pro}}{2AH} \quad (5.4)$$



dove  $H$  è la mutua altezza di scala, di proiettili e bersagli, data dalla maggiore delle due. Il corrispondente cambio di densità superficiale dei bersagli è invece

$$d\Sigma_{bers} = \frac{\pi(R_{bers} + R_{pro})^2 v_{rel} \Sigma_{bers} \Sigma_{pro}}{2H M_{pro}} \quad (5.5)$$

La densità superficiale delle particelle di una data dimensione è poi aumentata dalle altre collisioni che producono una cascata di frammenti. Ulteriori modifiche alla densità sono date dal drift radiale causato dalla forza di trascinamento del gas.

## Capitolo 6

# Conclusioni generali

Non resta ora che analizzare la crescita di un embrione planetario sommando tutti gli effetti discussi fino a questo punto. È infatti fondamentale andare a capire come i vari termini coesistano tra loro, quando uno domina sull'altro e quali siano le condizioni perché questo succeda. Per farlo utilizzeremo i risultati numerici presi dall'articolo [2].

Nella nostra trattazione abbiamo visto infatti che ci sono due famiglie di corpi particolarmente importanti: i *pebbles* e i planetesimi. Dobbiamo dunque ancora comprendere come le dimensioni degli oggetti di questi due gruppi vadano ad influire sulla crescita dell'embrione.

Come abbiamo detto nella descrizione del modello, con *pebbles* si intendono particelle con diametro compreso nell'intervallo 0.01 – 100 *cm*, che tradotto in numero di Stokes diventa 0.00017 – 0.17. In particolare le simulazioni hanno mostrato che per quanto riguarda la fase iniziale, ovvero entro il milione di anni, in cui la crescita è determinata principalmente dalla cattura di planetesimi e frammenti, la dimensione dei pebbles non crea differenze sostanziali.

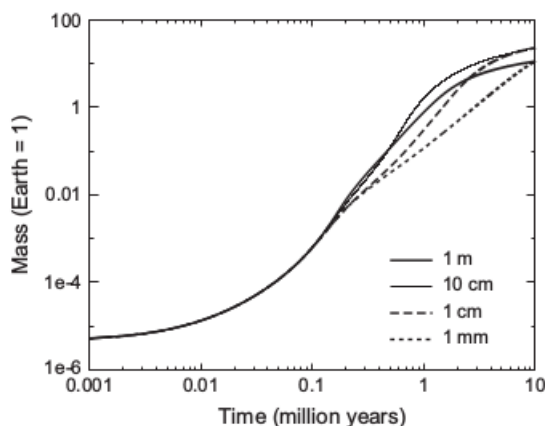


Figura 6.0.1: Crescita di un embrione a 5 UA nel tempo per 4 differenti valori del diametro dei pebbles

Vediamo infatti in figura 6.0.1 come fino a circa 0.1 milioni di anni le 4 curve siano sovrapposte, per poi differenziarsi, seguendo due strade. Con dimensioni maggiori  $\sim 10 - 100$  *cm* abbiamo una crescita iniziale più rapida, con successivo

rallentamento per particelle di 1  $m$  di diametro, mentre per particelle più piccole la crescita continua, e solo verso la fine della simulazione a 10 milioni di anni rallenta.

Quello che ci si aspetta tuttavia è che l'efficacia dell'accrescimento tramite pebbles diminuisca con il diminuire della dimensione, contrariamente a quanto mostrano i risultati.

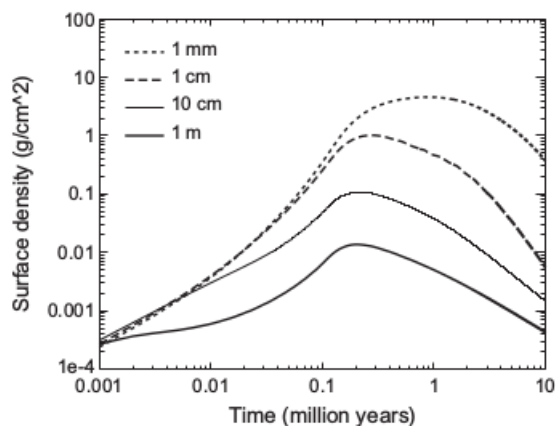


Figura 6.0.2: Densità superficiale di pebbles per differenti grandezze

La spiegazione di tale incongruenza risulta chiara osservando i risultati delle simulazioni ( figura 6.0.2 ). Infatti la densità superficiale di pebbles risulta essere inversamente proporzionale alla loro dimensione, e questo va a bilanciare l'efficacia dell'accrescimento. Abbiamo infatti una maggiore efficacia per dimensioni maggiori, ma abbiamo anche un maggior numero di particelle per dimensioni minori.

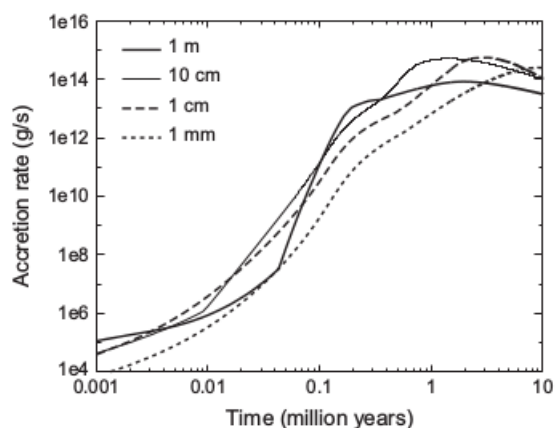
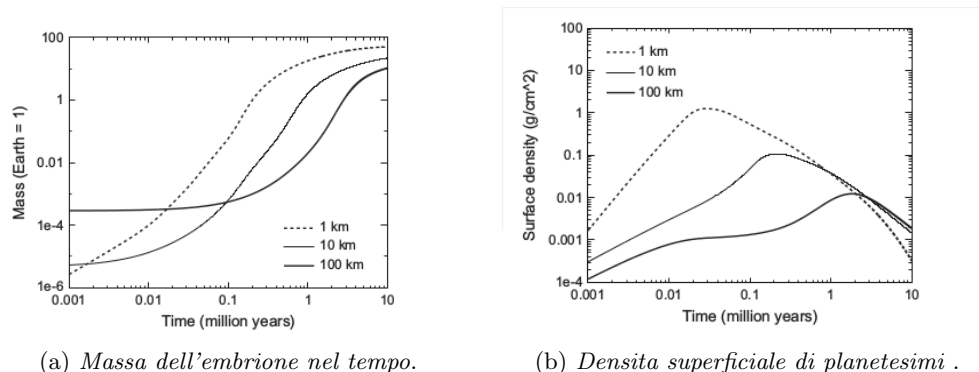


Figura 6.0.3: Rate di accrescimento complessivo dell'embrione includendo la dinamica dei pebbles

Questa è una diretta conseguenza del drift radiale risentito dalle particelle, che come sappiamo influenza maggiormente particelle più grandi, portandole all'esterno della zona del disco interessata e diminuendone dunque la densità. Prendendo in considerazione sia la maggiore efficienza per particelle di dimensione maggiore, sia la maggiore densità superficiale per particelle più piccole,



(a) Massa dell'embrione nel tempo.

(b) Densità superficiale di planetesimi .

Figura 6.0.4: Influenza della dimensione dei planetesimi

abbiamo che la dimensione "ideale" per i pebbles è quella di 10 *cm*. Con ideale intendiamo che è la dimensione per cui il processo di crescita avviene nel tempo minore, rendendo la formazione di un nucleo di  $\sim 10M_T$  compatibile con il tempo di vita del disco di gas.

Per quanto riguarda i planetesimi, sappiamo che minore è la loro dimensione, e maggiore è il tasso di collisione planetesimo-planetesimo e minore è la *forza* di ogni singolo planetesimo. Di conseguenza quando ad esempio prendiamo in considerazione planetesimi di 1 *km* di diametro, allora il tempo necessario per convertire quasi tutta la massa di questi in frammenti è minore del tempo di crescita dell'embrione stesso. Viceversa se i planetesimi hanno un diametro di circa 100 *km* allora il tempo diventa maggiore del tempo di crescita dell'embrione. Un più alto rate di collisione porta poi ad un maggior rifornimento di pebbles, che come sappiamo velocizzano il processo. Le simulazioni numeriche con diametro dei planetesimi di 1, 10, 100 *km* (figura 6.0.4) hanno confermato le seguenti premesse, mostrando come la crescita dell'embrione sia più rapida in presenza di planetesimi più piccoli.

Aggiungiamo inoltre che per planetesimi di 100 *km* di diametro la densità superficiale raggiunge un valore di equilibrio, ovvero le particelle prodotte per collisioni sono in numero uguali a quelle perse per drift radiale, portando dunque ad una situazione in cui la densità è costante.

Vediamo infine come l'importanza dell'accrescimento di pebbles, andando a vedere i risultati considerando o meno la presenza di questi, per planetesimi di 1 o 100 *km* (figura 6.0.5).

Dimensione di planetesimi e di pebbles sono dunque due grandezze collegate, che insieme determinano il tasso di crescita di un embrione, e infine la possibilità per questo di raggiungere la massa critica, necessaria a far collassare il gas sul nucleo formatosi. Ulteriori parametri inclusi nelle simulazioni sono la densità di particelle del disco, e la viscosità del disco, che va ad influire sui fenomeni di turbolenza.

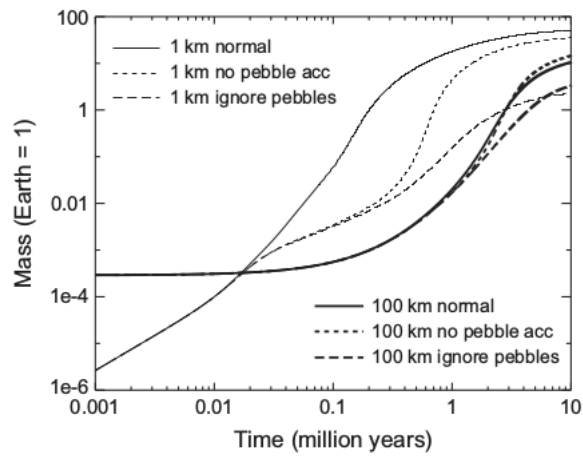


Figura 6.0.5: Risultati con o senza *pebble accretion*



# Bibliografia

- [1] Willy Benz and Erik Asphaug. Catastrophic disruptions revisited. *Icarus*, 142(1):5–20, 1999.
- [2] John E Chambers. Giant planet formation with pebble accretion. *Icarus*, 233:83–100, 2014.
- [3] Jeffrey N Cuzzi, Robert C Hogan, and Karim Shariff. Toward planetesimals: Dense chondrule clumps in the protoplanetary nebula. *The Astrophysical Journal*, 687(2):1432, 2008.
- [4] Shigeru Ida and Junichiro Makino. Scattering of planetesimals by a protoplanet: Slowing down of runaway growth. *Icarus*, 106(1):210–227, 1993.
- [5] Masahiro Ikoma, Kiyoshi Nakazawa, and Hiroyuki Emori. Formation of giant planets: dependences on core accretion rate and grain opacity. *The Astrophysical Journal*, 537(2):1013, 2000.
- [6] Satoshi Inaba and Masahiro Ikoma. Enhanced collisional growth of a protoplanet that has an atmosphere. *Astronomy & Astrophysics*, 410(2):711–723, 2003.
- [7] Satoshi Inaba, Hidekazu Tanaka, Kiyoshi Nakazawa, George W Wetherill, and Eiichiro Kokubo. High-accuracy statistical simulation of planetary accretion: Ii. comparison with n-body simulation. *Icarus*, 149(1):235–250, 2001.
- [8] Satoshi Inaba, George W Wetherill, and Masahiro Ikoma. Formation of gas giant planets: core accretion models with fragmentation and planetary envelope. *Icarus*, 166(1):46–62, 2003.
- [9] Hiroshi Kobayashi, Hidekazu Tanaka, and Alexander V Krivov. Planetary core formation with collisional fragmentation and atmosphere to form gas giant planets. *The Astrophysical Journal*, 738(1):35, 2011.
- [10] Hiroshi Kobayashi, Hidekazu Tanaka, Alexander V Krivov, and Satoshi Inaba. Planetary growth with collisional fragmentation and gas drag. *Icarus*, 209(2):836–847, 2010.
- [11] E Kokubo and S Ida. Sep. 1996. on runaway growth of planetesimals. *Icarus*, 123:180–191.
- [12] Eiichiro Kokubo and Shigeru Ida. Oligarchic growth of protoplanets. *Icarus*, 131(1):171–178, 1998.

- [13] Keiji Ohtsuki, Glen R Stewart, and Shigeru Ida. Evolution of planetesimal velocities based on three-body orbital integrations and growth of protoplanets. *Icarus*, 155(2):436–453, 2002.
- [14] CW Ormel and JN Cuzzi. Closed-form expressions for particle relative velocities induced by turbulence. *Astronomy & Astrophysics*, 466(2):413–420, 2007.
- [15] CW Ormel and HH Klahr. The effect of gas drag on the growth of protoplanets-analytical expressions for the accretion of small bodies in laminar disks. *Astronomy & Astrophysics*, 520:A43, 2010.
- [16] CW Ormel and Hiroshi Kobayashi. Understanding how planets become massive. i. description and validation of a new toy model. *The Astrophysical Journal*, 747(2):115, 2012.
- [17] Roman R Rafikov. Fast accretion of small planetesimals by protoplanetary cores. *The Astronomical Journal*, 128(3):1348, 2004.
- [18] N I Shakura and RA Sunyaev. Black holes in binary systems. observational appearance. *Astronomy and Astrophysics*, 24:337–355, 1973.
- [19] GB Valsecchi, A Milani, GF Gronchi, and SR Chesley. Resonant returns to close approaches: Analytical theory. *Astronomy & Astrophysics*, 408(3):1179–1196, 2003.
- [20] SJ Weidenschilling. Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 180(2):57–70, 1977.
- [21] GW Wetherill and GR Stewart. Formation of planetary embryos: Effects of fragmentation, low relative velocity, and independent variation of eccentricity and inclination. *Icarus*, 106(1):190–209, 1993.