



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

1

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Densità e caratterizzazione degli 1-insiemi nel piano

Relatore:
Prof. Davide Vittone

Laureando: Laura D'Andolfi
Matricola: 2000426

Anno Accademico 2022/2023

22 / 09 / 2023

Indice

Introduzione	5
1 Misure e dimensioni	7
1.1 Accenni sulla teoria della misura	7
1.2 Misura di Hausdorff	13
1.3 Risultati di ricoprimento	16
1.4 Misura di Lebesgue	17
2 Proprietà di base della densità	21
2.1 Introduzione	21
2.2 Stime elementari della densità	23
3 Struttura degli insiemi di dimensione intera	29
3.1 Introduzione	29
3.2 Curve e continui	29
3.3 Densità e caratterizzazione degli 1-insiemi regolari	36
Bibliografia	41

Introduzione

Questo trattato si concentra principalmente su aspetti geometrici degli 1-insiemi nel piano; per arrivare ai principali risultati è necessario introdurre molti aspetti basilari di teoria della misura. Nel Capitolo 1 viene definita la misura di Hausdorff e si analizzano le sue principali proprietà. Il vantaggio principale della misura di Hausdorff, dal punto di vista matematico, è quello di essere una misura (è addittiva su famiglie numerabili di insiemi disgiunti). Purtroppo però la misura di Hausdorff e la dimensione di insiemi anche relativamente semplici è molto difficile da calcolare. Anche se non verrà citato nel seguente trattato bisogna ricordare che molto del lavoro fatto sulla misura di Hausdorff e sulla sua geometria è stato svolto da Besicovitch (1944). Viene inoltre affrontato il teorema di ricoprimento di Vitali che è uno degli strumenti più utili nel campo della teoria della misura geometrica. Questo risultato infatti ci permette di selezionare una sottofamiglia disgiunta di insiemi che ricoprono un dato insieme quasi ovunque. Ciò sarà molto utile nell'applicazione alle densità di insiemi nella Sezione 2.2.

Per arrivare alle considerazioni finali siamo particolarmente interessati agli insiemi di dimensione s , s -insiemi, cioè insiemi con misura s -dimensionale di Hausdorff finita ma non nulla. Nel Capitolo 2 si caratterizzeranno gli s -insiemi regolari per cercare di ottenere delle stime per la densità di essi. È molto importante la distinzione tra s -insiemi regolari, che possiamo visualizzare come un sottoinsieme misurabile di una varietà s -dimensionale in \mathbb{R}^n , e s -insiemi irregolari, i quali si comportano come un prodotto cartesiano di n insiemi di Cantor, scelti in modo da ottenere un insieme della dimensione richiesta.

Nel Capitolo 3 viene trattata la densità degli insiemi in un punto. Si presenta in dettaglio la teoria per gli 1-insiemi in \mathbb{R}^2 o per gli insiemi linearmente misurabili. Nella Sezione 3.2 vengono studiate le curve dal punto di vista topologico principalmente e in relazione con continui di misura lineare finita. Si lavorerà in \mathbb{R}^n in quanto non è molto più complicato rispetto alle curve nel piano. Molto interessante è il Lemma 3.13 che mostra come la misura di Hausdorff sia profondamente legata ad un'idea geometrica, almeno per le curve. Si discute brevemente anche l'esistenza di tangenti nelle curve rettificabili grazie ad una dimostrazione elementare di Besicovitch (1944). Infine nella Sezione 3.3 si restringe l'attenzione ai sottoinsiemi del piano. Si ricava una stima superiore per la densità inferiore degli 1-insiemi irregolari del piano e si caratterizzano 1-insiemi regolari e irregolari. La prima parte segue una versione generalizzata della dimostrazione di Besicovitch data da Morse & Randolph, la quale dimostra che la densità superiore degli Z -insiemi, 1-insiemi tali che la loro intersezione con ogni curva rettificabile ha \mathcal{H}^1 -misura nulla, è strettamente minore di 1, e quindi è irregolare.

Capitolo 1

Misure e dimensioni

1.1 Accenni sulla teoria della misura

Sia X un insieme. Considereremo X come lo spazio Euclideo n -dimensionale \mathbb{R}^n .

Definizione 1.1. Una collezione \mathcal{S} non vuota di sottoinsiemi di X è detta σ -algebra se \mathcal{S} è chiusa sotto complementazione e sotto unioni numerabili:

- se $E \in \mathcal{S}$ allora $E^c \in \mathcal{S}$
- se $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{S}$ allora $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{S}$.

Osservazione 1.2. Possiamo inoltre osservare che una σ -algebra è chiusa sotto intersezioni numerabili, differenza di insiemi e inoltre X e \emptyset stanno in \mathcal{S}

Definiamo ora rispettivamente il *limite inferiore* e il *limite superiore* come:

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} E_j$$

e

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} E_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$$

Da queste definizioni ricaviamo immediatamente che se E_j sta nella σ -algebra \mathcal{S} per ogni j allora $\liminf E_j, \limsup E_j \in \mathcal{S}$. Se $\liminf E_j = \limsup E_j$ allora denotiamo questo valore con $\lim E_j$; ciò accade sempre nel caso in cui E_j è una sequenza crescente o decrescente di insiemi.

Definizione 1.3. Sia \mathcal{C} una collezione di sottoinsiemi di X . Allora la σ -algebra generata da \mathcal{C} , indicata come $\mathcal{S}(\mathcal{C})$, è l'intersezione di tutte le σ -algre contenenti \mathcal{C} . Si può osservare che $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ è la più piccola σ -algebra contenente \mathcal{C} .

Infatti $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ è contenuta in ogni σ -algebra contenente \mathcal{C} quindi è la più piccola σ -algebra contenente \mathcal{C} , perciò la Definizione 1.3 è ben posta.

Definizione 1.4. Una *misura* μ è una funzione definita su una σ -algebra \mathcal{S} di sottoinsiemi di X che prende valori in $[0, \infty]$ con le seguenti proprietà:

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad (1.1)$$

e per ogni sequenza numerabile di insiemi $\{E_j\}_{j \geq 1}$ disgiunti

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \quad (1.2)$$

Diciamo poi che μ è *completa* se $\forall E \subseteq X$ con $\mu(E) = 0$, preso $F \subseteq E$ si ha che $F \in \mathcal{S}$.

Segue da (1.2) che μ è una funzione crescente, cioè se $E \subseteq E'$ con $E, E' \in \mathcal{S}$ allora $\mu(E) \leq \mu(E')$.

Teorema 1.5. Sia μ una misura su una σ -algebra \mathcal{S} di sottoinsiemi di X .

i. Se $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ è una successione crescente di insiemi di \mathcal{S} , allora

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j)$$

ii. Se $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ è una successione decrescente di insiemi di \mathcal{S} e $\mu(F_1) < \infty$ allora

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j)$$

iii. Per ogni successione di insiemi $\{F_j\}_{j \geq 1}$ in \mathcal{S}

$$\mu(\liminf_{j \rightarrow \infty} F_j) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j)$$

Dimostrazione. i. Poniamo $E_0 = \emptyset$ e $F_k = E_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right) = E_k \setminus E_{k-1}$. In particolare $E_k = E_{k-1} \cup F_k$ che è un'unione disgiunta. Allora $\mu(E_k) = \mu(E_{k-1}) + \mu(F_k)$. Ci sono due casi da distinguere:

- $\exists k$ tale che $\mu(E_k) = \infty$. Allora siccome $E_k \subseteq E_j \forall j \geq k \implies \mu(E_j) = \infty \forall j \geq k$.

$$\mu\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} E_l\right) \geq \mu(E_k) = \infty = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j)$$

- $\forall k \mu(E_k) < \infty$. Allora vale che $\mu(F_k) = \mu(E_k) - \mu(E_{k-1})$ si ha che

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(F_j) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k (\mu(E_j) - \mu(E_{j-1})) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_k) \end{aligned}$$

- ii. Sia $F_k = E_1 \setminus E_k$ con $k \geq 1$. Si osserva che $\{F_k\}_{k \geq 1}$ è una successione crescente e sappiamo che $\mu(F_k) = \mu(E_1) - \mu(E_k)$. Inoltre $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_k) = E_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. Da ciò deduciamo per punto precedente che

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(F_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu(E_1) - \mu(E_k)) = \mu(E_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) \quad (1.3)$$

D'altra parte

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) \quad (1.4)$$

Perciò sostituendo (1.4) in (1.3) si ottiene che

$$\mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mu(E_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k)$$

e cancellando i due termini uguali si ottiene la tesi.

- iii. Sia ora $E_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} F_j$. Allora $\{E_k\}_{k \geq 1}$ è una successione crescente di insiemi in \mathcal{S} , così grazie a (i),

$$\mu(\liminf_{j \rightarrow \infty} F_j) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j).$$

□

Proseguiamo ora introducendo le misure esterne.

Definizione 1.6. Sia $X \neq \emptyset$. Una funzione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ si dice *misura esterna* se valgono le seguenti proprietà:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- Se $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (proprietà di monotonia)
- $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$ (proprietà di subadditività).

Le misure esterne sono molto utili perché esiste sempre una σ -algebra di sottoinsiemi nella quale si comportano come misure.

Definizione 1.7. Un insieme $A \subseteq X$ viene detto μ^* -*misurabile* se $\forall E \subseteq X$ si ha che

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$$

Osservazione 1.8. Sicuramente $\mu^*(E) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$ per subadditività della misura esterna. Perciò per mostrare che un insieme è misurabile è sufficiente far vedere che $\mu^*(E) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$ per un generico $E \subseteq X$ con $\mu^*(E) < \infty$.

Teorema 1.9 (di Carathéodory). Sia $X \neq \emptyset$, μ^* una misura esterna su X , \mathcal{M} un sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$ degli insiemi μ^* -misurabili. Allora \mathcal{M} è una σ -algebra e $\mu^*_{|\mathcal{M}}$ è una misura completa.

Dimostrazione. Procediamo per step.

- Mostriamo che \mathcal{M} è un'algebra.

Banalmente $\emptyset, X \in \mathcal{M}$.

Se $A \in \mathcal{M} \implies A^c \in \mathcal{M}$ perché la definizione di misurabilità è simmetrica rispetto al complementare.

Siano $A, B \in \mathcal{M}$ e dimostriamo che $A \cup B \in \mathcal{M}$. Sia $E \in X$ allora

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(B \cap E) + \mu^*(E \cap B^c) = \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Devo dimostrare che

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) = \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c). \quad (1.6)$$

si può osservare che l'ultimo termine di (1.5) e (1.6) sono uguali perciò ci basta dimostrare che

$$\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) \quad (1.7)$$

La disuguaglianza (1.7) è vera per subadditività perché

$$E \cap (A \cup B) = (E \cap A \cap B) \cup (E \cap A^c \cap B) \cup (E \cap A \cap B^c).$$

Possiamo dedurre che se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \cap B = \emptyset$ allora si ha che $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ cioè μ^* è finitamente addittiva su \mathcal{M} infatti

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c).$$

- Mostriamo che \mathcal{M} è una σ -algebra.

È sufficiente provare che \mathcal{M} è chiusa rispetto all'unione numerabile di insiemi disgiunti.

Sia $\{A_j\}_{j \geq 1} \subseteq \mathcal{M}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$.

Proviamo che $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$.

Sia $B_m = \bigcup_{j=1}^m A_j \in \mathcal{M}$ perché \mathcal{M} è un'algebra, sia $E \subseteq X$.

Sappiamo che $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_m) + \mu^*(E \cap B_m^c)$ siccome B_m è misurabile. Inoltre $B_m \subseteq B$ allora $B_m^c \supseteq B^c$ quindi per monotonia si ha che $\mu^*(E \cap B_m^c) \geq \mu^*(E \cap B^c)$.

Allora $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_m) + \mu^*(E \cap B_m^c) \geq \mu^*(E \cap B_m) + \mu^*(E \cap B^c)$.

Siccome A_m è misurabile allora ho che

$$\mu^*(E \cap B_m) = \mu^*(E \cap B_m \cap A_m) + \mu^*(E \cap B_m \cap A_m^c)$$

Siccome $B_m \cap A_m^c = A_1 \cup \dots \cup A_{m-1} = B_{m-1}$ si ottiene che

$\mu^*(E \cap B_m) = \mu^*(E \cap A_m) + \mu^*(E \cap B_{m-1})$ e ripetendo lo stesso trucco precedente ottengo che

$$\mu^*(E \cap B_m) = \sum_{j=1}^m \mu^*(E \cap A_j)$$

Allora abbiamo che

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^m \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Passando al limite ottengo quindi che

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c)$$

Per subadditività inoltre $\mu^*(E \cap B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j)$. Possiamo quindi concludere che

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$$

Quindi \mathcal{M} è un' σ -algebra.

- Mostriamo che $\mu^*_{|\mathcal{M}}$ è una misura.

Banalmente $\mu^*_{|\mathcal{M}}(\emptyset) = 0$

Sia $\{A_j\}_{j \geq 1} \subseteq \mathcal{M}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$ allora vogliamo mostrare che $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$

Dal punto precedente ho che

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E).$$

Allora

$$\mu^*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c).$$

Posto $E = B$ si ottiene che

$$\mu^*(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \cap B^c) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Possiamo quindi concludere che $\mu^*_{|\mathcal{M}}$ è una misura.

- Porviamo che $\mu^*_{|\mathcal{M}}$ è completa.

Sia $N \in \mathcal{M}$ tale che $\mu^*(N) = 0$. Consideriamo $F \subseteq N$.

Dobbiamo mostrare che $F \in \mathcal{M}$. Sicuramente per monotonia $\mu^*(F) = 0$.

Sia ora $E \subseteq X$ allora siccome $E \cap F \subseteq N$ per monotonia si ha che $\mu^*(E \cap F) = 0$, allora

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \cap F^c) = \mu^*(E \cap F^c) \leq \mu^*(E)$$

Quindi $\mu^*_{|\mathcal{M}}$ è completa. □

Definizione 1.10. Una misura esterna μ^* è *regolare* se per ogni insieme A esiste un insieme E μ^* -misurabile contenente A tale che $\mu^*(A) = \mu^*(E)$

Lemma 1.11. Se μ^* è una misura regolare e $\{A_j\}_{j \geq 1}$ è una successione crescente di insiemi, allora

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu^*(A_j) = \mu^*\left(\lim_{j \rightarrow \infty} A_j\right)$$

Dimostrazione. Scegliamo un insieme E_j μ^* -misurabile con $E_j \supseteq A_j$ e $\mu^*(E_j) = \mu^*(A_j) \forall j$. Allora per montonia della misura esterna e il Teorema 1.5(iii)

$$\mu^*(\lim A_j) = \mu^*(\liminf A_j) \leq \mu^*(\liminf E_j) \leq \liminf \mu^*(E_j) = \lim \mu^*(A_j)$$

La disuguaglianza opposta segue dalla proprietà di monotonia. □

Sia (X, d) uno spazio metrico. Per i nostri scopi X sarà \mathbb{R}^n , con d la solita distanza euclidea. Gli insiemi che appartengono alla σ -algebra generata dai sottoinsiemi aperti di X è chiamata *σ -algebra di Borel*. Negli insiemi Boreliani troviamo anche i chiusi, i F_σ (unioni numerabili di chiusi), i G_δ (intersezioni numerabili di aperti), ecc. In particolare una misura esterna μ^* su X è detta *misura metrica esterna* se

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F) \tag{1.8}$$

ogni volta che E e F sono positivamente separati, cioè

$$d(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E, y \in F\} > 0$$

Mostreremo che se μ^* è una misura esterna, allora una collezione di insiemi μ^* -misurabili include una σ -algebra di Borel. La prova si basa sulla seguente versione del “lemma di Carathéodory”.

Lemma 1.12. *Sia μ^* una misura esterna su (X, d) . Sia $\{A_j\}_{j \geq 1}$ una successione crescente di insiemi di X con $A = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j$, e supponiamo che $d(A_j, A \setminus A_{j+1}) > 0 \forall j$. Allora $\mu^*(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu^*(A_j)$.*

Dimostrazione. È sufficiente provare che

$$\mu^*(A) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \mu^*(A_j) \tag{1.9}$$

in quanto la disuguaglianza opposta segue dalla proprietà di monotonia della misura esterna. Sia $B_1 = A_1$ e $B_j = A_j \setminus A_{j-1} \forall j$. Se $j+2 \leq i$, allora $B_j \subseteq A_j$ e $B_i \subseteq A \setminus A_{j+1} \subseteq A \setminus A_{j+1}$, allora B_i e B_j sono positivamente separati. Possiamo quindi applicare la (1.8) $(m-1)$ volte,

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^m B_{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^m \mu^*(B_{2k-1}),$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^m B_{2k}\right) = \sum_{k=1}^m \mu^*(B_{2k}).$$

Assumiamo che entrambe le serie convergano, perché se così non fosse avremmo $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu^*(A_j) = \infty$, siccome $\bigcup_{k=1}^m B_{2k-1}$ e $\bigcup_{k=1}^m B_{2k}$ sono entrambi contenuti in A_{2m} . Quindi

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(A_j \cup \bigcup_{k=j+1}^{\infty} B_k\right) \leq \mu^*(A_j) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \mu^*(B_k) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu^*(A_i) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \mu^*(B_k).$$

Siccome la somma tende a 0 quando $j \rightarrow \infty$, allora segue (1.9). \square

Teorema 1.13. *Se μ^* è una misura esterna su (X, d) , allora tutti i sottoinsiemi Boreliani di X sono μ^* -misurabili.*

Dimostrazione. Siccome gli insiemi μ^* -misurabili formano una σ -algebra, e gli insiemi di Borel formano la più piccola σ -algebra contenente i sottoinsiemi chiusi di X , è sufficiente mostrare che

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \tag{1.10}$$

quando A è chiuso e E è arbitrario. Sia E_j un insieme di punti in $E \setminus A$ a distanza di almeno $\frac{1}{j}$ da A . Allora $d(A \cap E, E_j) \geq \frac{1}{j}$, perciò

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E_j) = \mu^*((E \cap A) \cup E_j) \leq \mu^*(E) \forall j, \tag{1.11}$$

siccome μ^* è una misura metrica esterna. La successione di insiemi $\{E_j\}_{j \geq 1}$ è crescente e, siccome A è chiuso, $E \setminus A = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Provando che $d(E_j, E \setminus A \setminus E_{j+1}) > 0 \forall j$, grazie al Lemma 1.12 abbiamo che $\mu^*(E \setminus A) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \mu^*(E_j)$ e (1.10) segue da (1.11). Infatti se $x \in E \setminus A \setminus E_{j+1}$ allora esiste $z \in A$ con $d(x, z) < \frac{1}{j+1}$ così se $y \in E_j$ allora $d(x, y) - d(x, z) > \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} > 0$. Allora $d(E_j, E \setminus A \setminus E_{j+1}) > 0$, come richiesto. \square

1.2 Misura di Hausdorff

Lavoriamo ora sempre in \mathbb{R}^n .

Definizione 1.14. Se U è un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R}^n , definiamo il *diametro* di U come $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$. Se $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ e $0 < |U_i| \leq \delta \forall i$, diciamo che $\{U_i\}_{i \geq 1}$ è un δ -ricoprimento di E .

Sia E un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e sia s un numero non negativo. Per ogni $\delta > 0$ definiamo

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \quad (1.12)$$

dove l'estremo inferiore è fatto su tutti i δ -ricoprimenti $\{U_i\}_{i \geq 1}$ di E . Si può osservare che \mathcal{H}_δ^s è una misura esterna su \mathbb{R}^n .

Definizione 1.15. Definiamo la *misura esterna di Hausdorff s -dimensionale* di E come

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \quad (1.13)$$

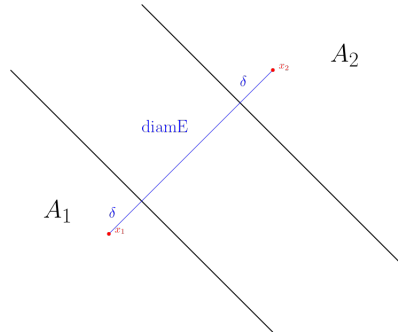
Osservazione 1.16. Il limite esiste, ma può essere infinito, siccome \mathcal{H}_δ^s cresce quando δ decresce. \mathcal{H}^s è anche una misura metrica esterna di E . Se δ è meno della distanza tra gli insiemi E e F separati positivamente, allora nessun insieme tra i δ -ricoprimenti di $E \cup F$ interseca sia E che F , allora

$$\mathcal{H}_\delta^s(E \cup F) = \mathcal{H}_\delta^s(E) + \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

e questo porta ad un'uguaglianza simile anche per \mathcal{H}^s . La restrizione di \mathcal{H}^s alla σ -algebra degli insiemi \mathcal{H}^s -misurabili, la quale contiene anche gli insiemi di Borel (Teorema 1.13), è detta *misura di Hausdorff s -dimensionale*.

Osservazione 1.17. Una definizione analoga a quella della misura di Hausdorff è ottenuta se nella (1.12) l'estremo inferiore è preso su insiemi convessi di δ -ricoprimenti di E piuttosto che su insiemi arbitrari. Questo perché ogni insieme è contenuto in un insieme convesso dello stesso diametro.

Procediamo per assurdo: definiamo $coE = \bigcap \{C : C \subseteq \mathbb{R}^n \text{ convesso}, E \subseteq C\}$. Osserviamo innanzitutto che coE è convesso perché intersezione di convessi. Siano infatti C_1 e C_2 due insiemi convessi e siano $x, y \in C_1 \cap C_2$. Certamente la retta che congiunge x e y è contenuta sia in C_1 che in C_2 perché sono entrambi convessi. Perciò il segmento che congiunge x e y è contenuto in $C_1 \cap C_2$, quindi l'intersezione è convessa. Essendo coE un'intersezione numerabile allora è convesso. Supponiamo che $diam coE > diam E$ allora esistono $x_1, x_2 \in coE$ tali che $|x_1 - x_2| = diam E + 2\delta$, con $\delta > 0$.



Siano poi A_1 e A_2 due semispazi aperti tali che ∂A_1 e ∂A_2 sono tra loro paralleli, a distanza $\text{diam}E$ e ortogonali ad $x_1 - x_2$. Sia $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$ e supponiamo che $E \cap A_1 = \emptyset$ (analogamente si poteva scegliere $E \cap A_2 = \emptyset$). Questo è analogo a dire che $E \subseteq A_1^c$ dove A_1^c è convesso (si veda il disegno), ma allora $\text{co}E \subseteq A_1^c$ perché $\text{co}E$ è il più piccolo convesso che contiene E . Di conseguenza $x_1 \notin \text{co}E$ che è un assurdo.

Delle volte è conveniente considerare δ -ricoprimenti di aperti, o alternativamente di chiusi. In entrambi i casi il valore del limite \mathcal{H}^s è lo stesso. Per qualsiasi E è chiaro che \mathcal{H}^s è non crescente quando s cresce da 0 a ∞ . Inoltre se $s < t$, allora

$$\mathcal{H}_\delta^t(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s |U_i|^{t-s} \leq \delta^{t-s} \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

questo implica che se $\mathcal{H}^t(E)$ è positivo, allora $\mathcal{H}^s(E)$ è infinito. In particolare c'è un unico valore, $\text{dim} E$, chiamato *dimensione di Hausdorff* di E tale che

$$\mathcal{H}^s(E) = \infty \text{ se } 0 \leq s < \text{dim}E, \quad \mathcal{H}^s(E) = 0 \text{ se } \text{dim}E < s < \infty \quad (1.14)$$

Se C è un cubo di lato unitario in \mathbb{R}^n , allora dividendo C in k^n sottocubi di lato $\frac{1}{k}$, si può osservare che se $\delta \geq k^{-1}n^{\frac{1}{2}}$ si ha che $\mathcal{H}_\delta^n(C) \leq k^n (k^{-1}n^{\frac{1}{2}})^n \leq n^{\frac{n}{2}}$, perciò $\mathcal{H}^n(C) < \infty$. Così se $s > n$, allora $\mathcal{H}^s(C) = 0$ e $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$, siccome \mathbb{R}^n si può esprimere come unione numerabile di cubi. Segue che $0 \leq \text{dim}E \leq n$ per qualsiasi $E \subseteq \mathbb{R}^n$. È chiaro che se $E \subseteq E'$ allora $\text{dim}E \leq \text{dim}E'$.

Definizione 1.18. Un insieme \mathcal{H}^s -misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ è detto *s-insieme*. In particolare un 1-insieme è chiamato *insieme linearmente misurabile*.

Dimostriamo ora che \mathcal{H}^s è una misura regolare, con la conseguenza che possiamo approssimare dal basso gli s -insiemi con sottoinsiemi chiusi.

Teorema 1.19. *i. Se E è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n esiste un G_δ -insieme G tale che $E \subseteq G$ e $\mathcal{H}^s(G) = \mathcal{H}^s(E)$. In particolare, \mathcal{H}^s è una misura esterna regolare.*

ii. Qualsiasi insieme \mathcal{H}^s -misurabile di misura finita contiene un F_σ -insieme di uguale misura, in particolare $\forall \varepsilon > 0$ contiene un insieme chiuso C tale che $\mathcal{H}^s(E \setminus C) < \varepsilon$

Dimostrazione. *i.* Se $\mathcal{H}^s(E) = \infty$, allora \mathbb{R}^n è un insieme aperto di uguale misura. Supponiamo quindi che $\mathcal{H}^s(E) < \infty$. Per ogni $i = 1, 2, \dots$ si scelga un $\frac{2}{i}$ -ricoprimento aperto di E , $\{U_{ij}\}_{j \geq 1}$, in modo tale che

$$\sum_{j=1}^{\infty} |U_{ij}|^s < \mathcal{H}_{\frac{1}{i}}^s(E) + \frac{1}{i}$$

Allora $E \subseteq G$ con $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{ij}$ un G_δ -insieme. Siccome $\{U_{ij}\}_{j \geq 1}$ è un $\frac{2}{i}$ -ricoprimento di G , $\mathcal{H}_{\frac{2}{i}}^s(G) \leq \mathcal{H}_{\frac{1}{i}}^s(E) + \frac{1}{i}$ e mandando $i \rightarrow \infty$ si ottiene che $\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(G)$. Siccome i G_δ -insiemi sono \mathcal{H}^s -misurabili, \mathcal{H}^s è una misura esterna regolare

ii. Sia E un insieme \mathcal{H}^s -misurabile con $\mathcal{H}^s(E) < \infty$. Usando (i) si possono trovare gli aperti O_1, O_2, \dots contenenti E , con $\mathcal{H}^s\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i \setminus E\right) = \mathcal{H}^s\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i\right) - \mathcal{H}^s(E) = 0$. Qualsiasi sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n è un F_σ -insieme, perciò preso $O_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{ij} \forall i$, dove $\{F_{ij}\}_{j \geq 1}$ è una sequenza crescente di insiemi chiusi. Allora per continuità di \mathcal{H}^s ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}^s(E \cap F_{ij}) = \mathcal{H}^s(E \cap O_i) = \mathcal{H}^s(E).$$

Quindi, dato $\varepsilon > 0$, possiamo trovare j_i , tale che

$$\mathcal{H}^s(E \setminus F_{ij_i}) < 2^{-i}\varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Se $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_{ij_i}$ allora

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \mathcal{H}^s(E \cap F) \geq \mathcal{H}^s(E) - \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^s(E \setminus F_{ij_i}) > \mathcal{H}^s(E) - \varepsilon.$$

Prendendo un'unione numerabile di F_σ -insiemi con $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ dà un F_σ -insieme contenente E e con la stessa misura di E . □

Il seguente lemma afferma che ogni tentativo di stimare la misura di Hausdorff di un insieme usando un ricoprimento di insiemi sufficientemente piccoli ci restituisce un risultato che non è più piccolo della misura di Hausdorff.

Lemma 1.20. *Sia E un insieme \mathcal{H}^s -misurabile con $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, e sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\rho > 0$, che dipende solo da E e da ε , tale che per qualsiasi famiglia di insiemi boreliani $\{U_i\}_{i \geq 1}$ con $0 < |U_i| \leq \rho$ abbiamo*

$$\mathcal{H}^s\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right)\right) < \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s + \varepsilon$$

Dimostrazione. Siccome \mathcal{H}^s è definito come il limite di \mathcal{H}_δ^s per $\delta \rightarrow 0$, possiamo scegliere ρ in modo tale che

$$\mathcal{H}^s(E) < \sum_{i=1}^{\infty} |W_i|^s + \frac{1}{2}\varepsilon \quad (1.15)$$

per qualsiasi ρ -ricoprimento $\{W_i\}_{i \geq 1}$ di E . Data una famiglia di insiemi boreliani $\{U_i\}_{i \geq 1}$ con $0 < |U_i| \leq \rho$, possiamo trovare un ρ -ricoprimento $\{V_i\}_{i \geq 1}$ di $E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ tale che

$$\mathcal{H}^s\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) + \frac{1}{2}\varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^s.$$

Siccome $\{U_i\}_{i \geq 1} \cup \{V_i\}_{i \geq 1}$ è un ρ -ricoprimento di E , allora da (1.15) si ha

$$\mathcal{H}^s(E) < \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s + \sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^s + \frac{1}{2}\varepsilon,$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right)\right) &= \mathcal{H}^s(E) - \mathcal{H}^s\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) < \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s + \sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^s + \frac{1}{2}\varepsilon - \sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^s + \frac{1}{2}\varepsilon = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s + \varepsilon \end{aligned}$$

□

Infine dimostriamo un lemma che riguarda la misura degli insiemi in relazione con una mappa “uniformemente Lipschitziana”

Lemma 1.21. *Sia $\psi : E \rightarrow F$ una mappa suriettiva tale che, presi $x, y \in E$ vale*

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq c|x - y|$$

per una costante c . Allora $\mathcal{H}^s(F) \leq c^s \mathcal{H}^s(E)$

Dimostrazione. Per ogni i , $|\psi(U_i \cap E)| \leq c|U_i|$. Perciò se $\{U_i\}_{i \geq 1}$ è un δ -ricoprimento di E , allora $\{\psi(U_i \cap E)\}_{i \geq 1}$ è un $c\delta$ -ricoprimento di F . Inoltre $\sum_{i=1}^{\infty} |\psi(U_i \cap E)|^s \leq c^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$ allora $\mathcal{H}_{c\delta}^s(F) \leq c^s \mathcal{H}_{\delta}^s(E)$, e il risultato segue mandando $\delta \rightarrow 0$. \square

1.3 Risultati di ricoprimento

Il teorema di ricoprimento di Vitali è uno degli strumenti più utili nella teoria geometrica della misura. Data una famiglia “sufficientemente grande” di insiemi che ricoprono un dato insieme E , il teorema di Vitali seleziona una sottofamiglia disgiunta che ricopre quasi tutto E . Diamo la seguente definizione

Definizione 1.22. Una famiglia di insiemi viene definita *semidisgiunta* se nessun membro di essa è contenuto in altri membri diversi da esso.

Procediamo con il seguente lemma perché illustra il principio basilare racchiuso nella dimostrazione del risultato di Vitali, ma in una situazione semplificata.

Lemma 1.23. *Sia \mathcal{C} una famiglia di palle contenute in un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^n . Allora possiamo trovare una sottofamiglia disgiunta, finita o numerabile, $\{B_i\}_{i \geq 1}$ tale che*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B'_i, \quad (1.16)$$

dove B'_i è la palla concentrica con B_i con raggio 5 volte maggiore. Inoltre, possiamo prendere la famiglia $\{B'_i\}_{i \geq 1}$ in modo tale che questa sia semidisgiunta.

Dimostrazione. Selezioniamo $\{B_i\}_{i \geq 1}$ induttivamente. Sia $d_0 = \sup\{|B| : B \in \mathcal{C}\}$ e scegliamo B_1 da \mathcal{C} con $|B_1| \geq \frac{1}{2}d_0$. Supponiamo che B_1, \dots, B_m siano stati selezionati e sia $d_m = \sup\{|B| : B \in \mathcal{C}, B \text{ disgiunto da } \bigcup_{i=1}^m B_i\}$. Se $d_m = 0$ il processo termina. Altrimenti si sceglia B_{m+1} da \mathcal{C} disgiunto da $\bigcup_{i=1}^m B_i$ con $|B_{m+1}| \geq \frac{1}{2}d_m$. Certamente queste palle sono disgiunte; affermiamo inoltre che hanno la proprietà di ricoprimento richiesta. Se $B \in \mathcal{C}$, allora $B = B_i$ per qualche i , o B interseca qualche B_i con $2|B_i| \geq |B|$. Se questo non si verifica allora B è stato selezionato al posto della prima palla B_m per la quale $2|B_m| < |B|$. (Notiamo inoltre che, dalla somma dei volumi, $\sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^2 < \infty$ così che $|B_i| \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$ se abbiamo selezionato infinite palle.) In ogni caso, $B \subseteq B'_i$ per (1.16). Per far sì che la famiglia $\{B'_i\}_{i \geq 1}$ sia semidisgiunta, è sufficiente rimuovere B_i dalla sottofamiglia se $B'_i \subseteq B'_j$ con $j \neq i$ notando che B'_i può essere contenuto solo in un numero finito di B'_j . \square

Definizione 1.24. Una famiglia di insiemi \mathcal{V} è detta *classe di Vitali* per E se per ogni $x \in E$ e $\delta > 0$ esiste $U \in \mathcal{V}$ con $x \in U$ e $0 < |U| \leq \delta$.

Teorema 1.25 (Teorema di ricoprimento di Vitali). *i. Sia E un sottoinsieme \mathcal{H}^s -misurabile di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{V} una classe di Vitali formata da insiemi chiusi per E . Allora possiamo selezionare una successione disgiunta, finita o numerabile, $\{U_i\}_{i \geq 1}$ da \mathcal{V} tale che $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \infty$ o $\mathcal{H}^s(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = 0$.*

ii. Se $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, allora, dato $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere la famiglia $\{U_i\}_{i \geq 1}$ in modo tale che

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s + \varepsilon.$$

Dimostrazione. Fissato $\rho > 0$; possiamo assumere che $|U| \leq \rho \forall U \in \mathcal{V}$. Scegliamo $\{U_i\}_{i \geq 1}$ induttivamente. Sia U_1 un qualsiasi elemento di \mathcal{V} . Supponiamo di aver scelto U_1, \dots, U_m , e sia d_m l'estremo superiore di $|U|$ scelto tra gli U di \mathcal{V} che non intersecano U_1, \dots, U_m . Se $d_m = 0$, allora $E \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$, perciò segue (i) e il processo termina. Altrimenti sia U_{m+1} un insieme di \mathcal{V} disgiunto da $\bigcup_{i=1}^m U_i$ tale che $|U_{m+1}| \geq \frac{1}{2}d_m$. Supponiamo che il processo continui e che $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s < \infty$. Per ogni i sia B_i una palla centrata in un punto di U_i e con raggio $3|U_i|$. Affermiamo che per ogni $k > 1$

$$E \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i \subseteq \bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i. \quad (1.17)$$

Preso $x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$ allora esiste $U \in \mathcal{V}$ che non interseca U_1, \dots, U_k con $x \in U$. Siccome $|U_i| \rightarrow 0$, $|U| > 2|U_m|$ per qualche m . Grazie alla selezione di $\{U_i\}_{i \geq 1}$, U deve intersecare U_i per qualche i con $k < i < m$ per il quale $|U| \leq 2|U_i|$. Siccome $U \subseteq B_i$, allora segue (1.17). Inoltre se $\delta > 0$,

$$\mathcal{H}_{\delta}^s\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leq \mathcal{H}_{\delta}^s\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i\right) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} |B_i|^s = 6^s \sum_{i=k+1}^{\infty} |U_i|^s,$$

preso k abbastanza grande da assicurare che $|B_i| \leq \delta$ per $i > k$. Inoltre $\mathcal{H}_{\delta}^s(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = 0$ per ogni $\delta > 0$, così $\mathcal{H}^s(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = 0$, che prova (i).

Per dimostrare (ii), possiamo supporre che il ρ scelto all'inizio della dimostrazione è il numero corrispondente a ε e E dato dal Lemma 1.20. Se $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \infty$, allora (ii) è banale. Altrimenti, da (i) e dal Lemma 1.20,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(E) &= \mathcal{H}^s\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) + \mathcal{H}^s\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right)\right) \\ &= 0 + \mathcal{H}^s\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right)\right) \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

1.4 Misura di Lebesgue

La misura di Lebesgue n -dimensionale si ottiene come un'estensione dell'usuale definizione di volume in \mathbb{R}^n (dove con "volume" intendiamo la lunghezza in \mathbb{R}^1 e l'area in \mathbb{R}^2). Sia C in coordinate a blocchi in \mathbb{R}^n nella forma

$$C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

dove $a_i < b_i \forall i$. Definiamo il volume di C come

$$V(C) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

Definizione 1.26. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definiamo la *misura esterna di Lebesgue n -dimensionale* come

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} V(C_i), \quad (1.18)$$

dove l'estremo inferiore è preso su tutti i ricoprimenti di E dati da una successione $\{C_i\}_{i \geq 1}$ di plurintervalli.

Osservazione 1.27. È facile vedere che \mathcal{L}^n è una misura esterna. Inoltre \mathbb{R}^n coincide con il volume di E se E è un plurintervallo. Quest'ultima affermazione segue dall'approssimazione della somma in (1.18) con una somma finita e dividendo poi E tramite i piani che contengono le facce dei C_i .

Siccome qualsiasi plurintervallo C_i può essere decomposto in sottopurintervalli più piccoli che non modificano la somma in (1.18), è sufficiente prendere l'estremo inferiore dei δ -ricoprimenti di E per qualsiasi $\delta > 0$. La restrizione di \mathcal{L}^n sugli insiemi *Lebesgue misurabili*, indicati anche con \mathcal{L}^n -misurabili, che, grazie al Teorema 1.13 comprende anche gli insiemi Boreliani, è detta *misura di Lebesgue n -dimensionale o volume*. Chiaramente si osserva che le definizioni di \mathcal{L}^1 e \mathcal{H}^1 in \mathbb{R}^n coincidono. Le misure esterne \mathcal{L}^n e \mathcal{H}^n differiscono solo di una costante moltiplicativa. Per arrivare a questo risultato abbiamo però bisogno del seguente teorema che non dimostreremo:

Teorema 1.28. *Il volume n -dimensionale di un insieme convesso chiuso di diametro d è, al massimo, $\pi^{\frac{1}{2}n} (\frac{1}{2}d)^n / (\frac{1}{2}n)!$, il volume di una palla di diametro d .*

Teorema 1.29. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, allora $\mathcal{L}^n(E) = c_n \mathcal{H}^n(E)$, dove $c_n = \pi^{\frac{1}{2}n} / 2^n (\frac{1}{2}n)!$. In particolare $c_1 = 1$ e $c_2 = \pi/4$.*

Dimostrazione. Prendiamo $\varepsilon > 0$ e ricopriamo E con una collezione di insiemi convessi chiusi $\{U_i\}_{i \geq 1}$ tali che $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^n < \mathcal{H}^n(E) + \varepsilon$. Dal Teorema 1.28 $\mathcal{L}^n(U_i) \leq c_n |U_i|^n$, allora abbiamo che $\mathcal{L}^n(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(U_i) < c_n \mathcal{H}^n(E) + c_n \varepsilon$ dalla quale otteniamo che $\mathcal{L}^n(E) \leq c_n \mathcal{H}^n(E)$. Dimostriamo ora la disuguaglianza nel verso opposto. Sia $\{C_i\}_{i \geq 1}$ un ricoprimento di plurintervalli di E tali che

$$\sum_{i=1}^{\infty} V(C_i) < \mathcal{L}^n(E) + \varepsilon \quad (1.19)$$

Possiamo supporre che questi plurintervalli siano aperti, infatti è sufficiente espanderli leggermente e questa disuguaglianza viene conservata. Per ogni i la palla chiusa contenuta in C_i di raggio al massimo δ forma una classe di Vitali per C_i . Dal Teorema 1.25, esiste una famiglia di palle disgiunte $\{B_{ij}\}_{j \geq 1}$ in C_i di diametro al massimo δ con $\mathcal{H}^n(C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}) = 0$. Siccome \mathcal{L}^n è una misura di Borel, $\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_{ij}) = \mathcal{L}^n(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}) \leq \mathcal{L}^n(C_i)$. Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^n(E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n(C_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n(B_{ij}) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n(C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |B_{ij}|^n = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_n^{-1} \mathcal{L}^n(B_{ij}) \\ &\leq c_n^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(C_i) < c_n^{-1} \mathcal{L}^n(E) + c_n^{-1} \varepsilon \end{aligned}$$

da (1.19). Perciò $c_n \mathcal{H}_\delta^n(E) \leq \mathcal{L}^n(E) + \varepsilon \forall \varepsilon$ e δ , quindi dall'arbitrarietà di ε e δ segue $c_n \mathcal{H}_\delta^n(E) \leq \mathcal{L}^n(E)$. \square

Uno dei risultati classici della teoria della misura di Lebesgue è il teorema di densità di Lebesgue.

Teorema 1.30 (Teorema di densità di Lebesgue). *Sia E un sottoinsieme \mathcal{L}^n -misurabile di \mathbb{R}^n . Allora la densità di Lebesgue di E in x ,*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))},$$

esiste e vale 1 se $x \in E$ e 0 se $x \notin E$, eccetto per un insieme di \mathcal{L}^n -misura 0.

Osservazione 1.31. Nel teorema precedente con $B_r(x)$ si denota la palla chiusa di centro x e raggio r e r tende a 0 da destra.

Dimostrazione. La dimostrazione segue direttamente dal teorema differenziale di Lebesgue con $f = \chi_E$. \square

Capitolo 2

Proprietà di base della densità

2.1 Introduzione

Ricordiamo che un sottoinsieme E di \mathbb{R}^n è definito un s -insieme, con $0 \leq s \leq n$, se E è un \mathcal{H}^s -misurabile e $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$. In generale escludiamo il caso in cui $s = 0$ perché banalmente gli 0-insiemi sono insiemi finiti di punti e le loro proprietà sono chiare. Nei seguenti capitoli tratteremo delle proprietà locali degli s -insiemi, in particolare per quanto riguarda la densità e l'esistenza di tangenti. Considereremo insiemi misurabili di \mathcal{H}^s -misura σ -finita. Solitamente s sarà fissata e, dove non c'è ambiguità, i termini “misura”, “misurabile” e “per quasi ogni” si riferiscono alla misura \mathcal{H}^s . Definiamo innanzitutto la densità di un insieme, argomento centrale per le considerazioni future. Le densità sono indicative della misura locale di un insieme comparata con la misura “attesa”. Indichiamo con $B_r(x)$ la palla chiusa di centro x e raggio r così che $|B_r(x)| = 2r$.

Definizione 2.1. La *densità superiore sferica* e *densità inferiore sferica* di un s -insieme E in un punto $x \in \mathbb{R}^n$ sono definiti rispettivamente come

$$\bar{D}^s(E, x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s}$$

e

$$\underline{D}^s(E, x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s}$$

In particolare se $\bar{D}^s(E, x) = \underline{D}^s(E, x)$ diciamo che la densità di E in x esiste e denotiamo il valore con $D^s(E, x)$.

Definizione 2.2. Un punto $x \in E$ tale per cui $D^s(E, x) = 1$ è detto punto *regolare* di E . Altrimenti è detto punto *irregolare*. Un s -insieme E è detto *regolare* se \mathcal{H}^s -quasi tutti i suoi punti sono regolari e *irregolare* se quasi tutti i suoi punti sono irregolari.

È importante mettere in evidenza fin da subito che non esiste un teorema analogo al teorema di densità di Lebesgue; non è vero in generale che un s -insieme ha densità 1 per quasi tutti i suoi punti. Infatti uno dei principali risultati è che un s -insieme non può essere regolare a meno che s non sia un intero. Inoltre se s è intero, un s -insieme si decompone in una parte regolare e una irregolare.

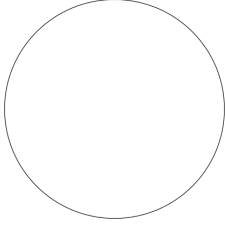


Figura 2.1: Circonferenza - esempio di un 1-insieme regolare

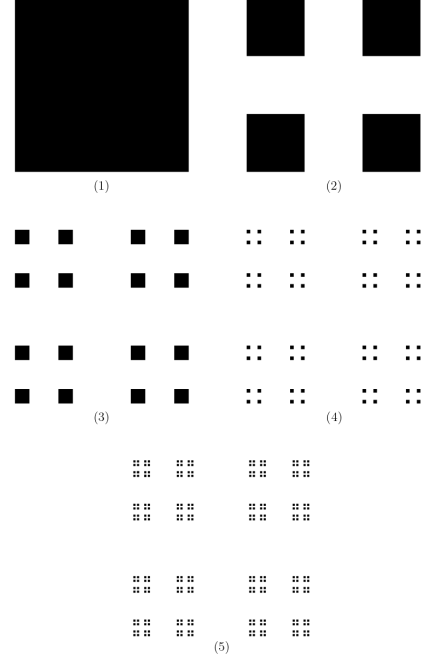


Figura 2.2: Cantor dust - esempio di un 1-insieme irregolare

Nella nostra trattazione siamo principalmente interessati a densità sferiche, ma è comunque utile introdurre la *densità convessa superiore* di un s -insieme E definita come

$$\bar{D}_c^s(E, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sup \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} \right\}, \quad (2.1)$$

dove l'estremo superiore è calcolato su tutti gli insiemi convessi U con $x \in U$ e $0 < |U| \leq r$. Siccome ogni insieme è contenuto in un insieme di uguale diametro, allora questo è equivalente a calcolare l'estremo superiore su tutti gli insiemi U con $x \in U$ e $0 < |U| \leq r$. In particolare la densità convessa superiore definita in (2.1) non cambia se il sup viene calcolato su convessi aperti.

Siccome $B_r(x)$ è convesso e $x \in U$, allora $U \subseteq B_r(x)$ con $r = |U|$ e abbiamo la relazione

$$2^{-s} \bar{D}_c^s(E, x) \leq \bar{D}^s(E, x) \leq \bar{D}_c^s(E, x). \quad (2.2)$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (2.2). La famiglia delle palle $B_{\frac{r}{2}}(x)$ è contenuta nella famiglia degli insiemi U di diametro r , in quanto sono particolari convessi di diametro r . Quindi segue direttamente che $\bar{D}^s(E, x) \leq \bar{D}_c^s(E, x)$.

Per l'altra disuguaglianza, siccome $U \subseteq B_r(x)$ per $x \in U$ e $r = |U|$, allora $2^{-s} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} \leq \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s}$. La disuguaglianza è conservata anche quando passiamo al sup sugli U tali che $|U| = r$. Vale inoltre che

$$\sup_{r > M} \sup_{U \text{ t.c. } |U|=r} 2^{-s} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} \leq \sup_{r > M} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s}$$

Inoltre $\sup_{r>M} \geq \inf_{r>M} \geq \inf_{r>0}$ allora

$$\inf_{r>0} \sup_{U \text{ t.c. } |U|=r} \frac{2^{-s} \mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} \leq \sup_{r>M} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s}$$

Passando all' $\inf_{M>0}$ nella componente a destra della disuguaglianza ottengo la tesi \square

Elenchiamo ora delle nozioni generali che sono utilizzate frequentemente per poi provare alcuni risultati di base sulle densità. Innanzitutto gli insiemi di punti definiti in termini di proprietà metriche o di misure sono misurabili rispetto una misura appropriata. In questa trattazione verificare che un insieme è misurabile sarà quasi sempre una formalità perché gli insiemi considerati possono essere visti come combinazioni di insiemi misurabili tramite \liminf , \limsup , unioni numerabili o intersezioni, ecc. . . . Potremmo inoltre considerare $\bigcap_{\rho>0} E_\rho$, dopo aver analizzato la definizione degli insiemi E_ρ , come l'intersezione numerabili sui razionali positivi $\bigcap_{\rho \in \mathbb{Q}^+} E_\rho$. Alcune dimostrazioni per la misurabilità le troviamo nel Lemma 2.5, ma successivamente assumeremo, senza esplicitarlo, che gli insiemi coinvolti sono misurabili.

Inoltre molte delle dimostrazioni comprendono la verifica del fatto che un insieme di punti definito da una proprietà specifica ha misura nulla. Dobbiamo mostrare che un insieme $E = \{x : \psi(x) > 0\}$ ha misura di Hausdorff nulla, dove ψ è una funzione a valori reali. Un approccio standard è quello di mostrare che $\forall \alpha > 0$ l'insieme $\{x : \psi(x) > \alpha\}$ ha misura nulla, allora anche l'unione numerabile $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x : \psi(x) > \frac{1}{j}\}$ deve avere misura nulla. Per questo è sufficiente mostrare che $\mathcal{H}^s\{x : \psi(x) > \alpha\} < \varepsilon \forall \alpha, \varepsilon > 0$.

Infine menzioniamo l'idea di "uniformizzazione". Se vogliamo dimostrare che una proprietà vale per quasi ogni punto di un insieme E , allora è sufficiente mostrare che $\forall \varepsilon > 0$, c'è un sottoinsieme F di E con misura di $E \setminus F < \varepsilon$ e con la proprietà che vale su tutto F . Il vantaggio di questo fatto ci permette di scegliere come F un insieme che ha maggiore regolarità rispetto a E . Per esempio, F può essere scelto chiuso grazie al Teorema 1.19, con l'ulteriore proprietà che copre uniformemente F . Useremo F per identificare questo tipo di insieme, tralasciando così le irregolarità di E . Spesso, infatti, se un risultato può essere provato per un insieme sotto opportune assunzioni topologiche e uniformi, è una questione puramente tecnica quella di estendere il risultato in generale.

2.2 Stime elementari della densità

In questa sezione ci concentreremo sulle proprietà fondamentali di un s -insieme provando alcuni risultati che sono validi per qualsiasi s . Prima di tutto verificheremo la misurabilità della densità come funzione f di x . È più semplice infatti parlare della misurabilità di una funzione piuttosto che di un insieme definito da qualche funzione.

Definizione 2.3. La funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è *misurabile* (rispettivamente *Borel misurabile*) se l'insieme $\{x : f(x) < c\}$ è un insieme misurabile (rispettivamente è un insieme di Borel) per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Osservazione 2.4. Una definizione analoga si può ottenere sostituendo a ' $<$ ' i simboli ' \leq ', ' \geq ' o ' $>$ '. Inoltre dalla definizione di continuità della funzione segue che funzioni continue su \mathbb{R}^n sono Borel-misurabili.

Lemma 2.5. *Sia E un s -insieme.*

- i. $\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x))$ è *semicontinua superiormente* e di conseguenza è una funzione Borel misurabile in x per ogni r .

ii. $\underline{D}^s(E, x)$ e $\bar{D}^s(E, x)$ sono funzioni Borel misurabili di x .

Dimostrazione. i. Sia dato $r, \alpha > 0$ definiamo

$$F = \{x : \mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) < \alpha\}.$$

Sia $x \in F$. Per $\varepsilon \searrow 0$ (ε converge a 0 in maniera decrescente), allora $B_{r+\varepsilon}(x)$ decresce a $B_r(x)$, allora dalla continuità di \mathcal{H}^s risulta

$$\mathcal{H}^s(E \cap B_{r+\varepsilon}(x)) \searrow \mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)).$$

Siccome possiamo trovare ε tale che $\mathcal{H}^s(E \cap B_{r+\varepsilon}(x)) < \alpha$, se $|x - y| \leq \varepsilon$, allora $B_r(y) \subseteq B_{r+\varepsilon}(x)$ e $\mathcal{H}^s(E \cap B_r(y)) < \alpha$. Quindi F è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n . Questo è vero per ogni α allora possiamo concludere che $\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x))$ è semicontinua superiormente in x .

ii. Usando la parte (i), l'insieme

$$\{x : \mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) < \alpha(2r)^s\} \quad (2.3)$$

è aperto. Scelto $\rho > 0$ e definito

$$F_\rho = \{x : \mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) < \alpha(2r)^s \text{ per qualche } r < \rho\},$$

abbiamo che (2.3) è dato dall'unione di tali insiemi F_ρ . Sia ora

$$\{x : \underline{D}^s(E, x) < \alpha\} = \bigcap_{\rho > 0} F_\rho;$$

siccome F_ρ cresce quando ρ decresce, possiamo considerare questa intersezione su un insieme numerabile di valori razionali positivi di ρ . Pertanto $\{x : \underline{D}^s(E, x) < \alpha\}$ è un G_δ , e quindi un insieme di Borel per ogni α ; allora $\underline{D}^s(E, x)$ è una funzione Borel-misurabile in x . Un argomento molto simile prova la misurabilità di $\bar{D}^s(E, x)$ ma omettiamo la dimostrazione di questa parte. □

Grazie al precedente lemma possiamo affermare che insiemi come $\{x : \underline{D}^s(E, x) > \alpha\}$ sono \mathcal{H}^s -misurabili per ogni s -insieme E . Un'altra conseguenza è che insiemi della forma

$$\{x : \mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) < \alpha(2r)^s \text{ per qualche } r \leq \rho\}$$

sono \mathcal{H}^s -misurabili (come insiemi aperti). Nel corso di questa trattazione capiterà di definire insiemi in modo molto simile a quelli precedenti e per brevità ometteremo la dimostrazione della loro misurabilità.

Teorema 2.6. *Se E è un s -insieme in \mathbb{R}^n , allora $\bar{D}_c^s(E, x) = 0$ per \mathcal{H}^s -quasi ogni $x \notin E$.*

Dimostrazione. Fissiamo $\alpha > 0$; mostreremo che l'insieme

$$F = \{x \notin E : \bar{D}_c^s(E, x) > \alpha\}$$

ha misura nulla. Dalla regolarità di \mathcal{H}^s dato $\delta > 0$ possiamo trovare un chiuso $E_1 \subseteq E$ con $\mathcal{H}^s(E \setminus E_1) < \delta$. Per $\rho > 0$ consideriamo

$$\mathcal{V} = \{U : U \text{ chiuso e limitato, } 0 < |U| \leq \rho, U \cap E_1 = \emptyset \text{ e } \mathcal{H}^s(E \cap U) > \alpha|U|^s\} \quad (2.4)$$

Allora \mathcal{V} è una classe di Vitali di insiemi chiusi per F , da (2.1) e dalla chiusura di E_1 , possiamo quindi usare il Teorema 1.25(i) che ci permette di trovare una successione disgiunta di insiemi $\{U_i\}_{i \geq 1}$ in \mathcal{V} con o $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \infty$ o $\mathcal{H}^s(F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = 0$. Ma dalla (2.4),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s &< \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E \cap U_i) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{H}^s(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \mathcal{H}^s(E \setminus E_1) < \frac{\delta}{\alpha} < \infty, \end{aligned}$$

perché $\{U_i\}_{i \geq 1}$ sono disgiunti e sono disgiunti anche da E_1 . Concludiamo che $\mathcal{H}^s(F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = 0$, allora

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\rho^s(F) &\leq \mathcal{H}_\rho^s(F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) + \mathcal{H}_\rho^s(F \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \leq \\ &\leq \mathcal{H}^s(F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) + \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s < 0 + \frac{\delta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Questo è verificato per ogni $\delta > 0$ e per ogni $\rho > 0$, allora $\mathcal{H}^s(F) = 0$, come richiesto. \square

Teorema 2.7. *Se E è un s -insieme in \mathbb{R}^n , allora $\bar{D}_c^s(E, x) = 1$ per \mathcal{H}^s -quasi ogni $x \in E$.*

Dimostrazione. Mostriamo che vale \geq .

Usando la definizione di misura di Hausdorff mostriamo che $\bar{D}_c^s(E, x) \geq 1$ quasi ovunque in E . Sia $\alpha < 1$ e $\rho > 0$ e consideriamo

$$F = \{x \in E : \mathcal{H}^s(E \cap U) < \alpha |U|^s \text{ per ogni convesso } U \text{ con } x \in U \text{ e } |U| \leq \rho\}. \quad (2.5)$$

Allora F è un sottoinsieme di Borel di E . Per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un ρ -ricoprimento di F formato da insiemi convessi $\{U_i\}_{i \geq 1}$ tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s < \mathcal{H}^s(F) + \varepsilon.$$

Quindi, assumendo che ogni U_i contiene qualche punto di F , e usando (2.5),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(F) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F \cap U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E \cap U_i) < \\ &< \alpha \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s < \alpha(\mathcal{H}^s(F) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Siccome abbiamo scelto $\alpha < 1$ e la disuguaglianza vale per ogni $\varepsilon > 0$, possiamo concludere che $\mathcal{H}^s(F) = 0$. Possiamo definire un tale F per ogni $\rho > 0$, allora, dalla definizione, $\bar{D}_c^s(E, x) \geq \alpha$ per quasi ogni $x \in E$. Questo è vero per ogni $\alpha < 1$, allora concludiamo che $\bar{D}_c^s(E, x) \geq 1$ quasi ovunque in E .

Mostriamo ora che vale \leq .

Per fare questo usiamo un procedimento che prevede l'utilizzo di una classe di Vitali. Dato $\alpha > 1$, definiamo $F = \{x \in E : \bar{D}_c^s(E, x) > \alpha\}$. In questo modo F è un sottoinsieme misurabile di E . Allora dato $F_0 = \{x \in F : \bar{D}_c^s(E \setminus F, x) = 0\}$. Allora $\mathcal{H}^s(F \setminus F_0) = 0$ dal Teorema 2.6.

Usiamo ora la definizione di densità convessa, $\bar{D}_c^s(F, x) \geq \bar{D}_c^s(E, x) - \bar{D}_c^s(E \setminus F, x) > \alpha$ se $x \in F_0$. Inoltre

$$\mathcal{V} = \{U : U \text{ chiuso e convesso e } \mathcal{H}^s(F \cap U) > \alpha|U|^s\} \quad (2.6)$$

è una classe di Vitali per F_0 , allora dal Teorema 1.25(ii) si trova, dato $\varepsilon > 0$, una successione disgiunta di insiemi $\{U_i\}_{i \geq 1}$ in \mathcal{V} con $\mathcal{H}^s(F_0) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s + \varepsilon$. Dalla (2.6)

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_0) < \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F \cap U_i) + \varepsilon \leq \frac{1}{\alpha} \mathcal{H}^s(F) + \varepsilon.$$

Questa disuguaglianza vale per ogni $\varepsilon > 0$, allora $\mathcal{H}^s(F) = 0$ se $\alpha > 1$, come richiesto. \square

Corollario 2.8. *Se E è un s -insieme in \mathbb{R}^n , allora $D^s(E, x) = 0$ per \mathcal{H}^s -quasi ogni $x \notin E$.*

Dimostrazione. Segue dalla disuguaglianza (2.2) usando il Teorema 2.6. \square

Corollario 2.9. *Se E è un s -insieme in \mathbb{R}^n , allora*

$$2^{-s} \leq \bar{D}^s(E, x) \leq 1$$

per quasi ogni $x \in E$.

Dimostrazione. Segue dalla disuguaglianza (2.2) usando il Teorema 2.7. \square

Il Corollario 2.8 ha diverse conseguenze molto importanti.

La prima è che la densità di un sottoinsieme misurabile di un s -insieme coincide con la densità dell'insieme originale in quasi ogni punto del sottoinsieme (che andremo a dimostrare a breve). Questo risultato ci permette di scartare il parte "brutta" dell'insieme e concentrarci sullo studio di un insieme dove la proprietà di densità vale quasi ovunque.

Corollario 2.10. *Sia F un sottoinsieme misurabile di un s -insieme E . Allora $\underline{D}^s(F, x) = \underline{D}^s(E, x)$ e $\bar{D}^s(F, x) = \bar{D}^s(E, x)$ per quasi ogni $x \in F$.*

Dimostrazione. Definiamo $H = E \setminus F$ allora dal Corollario 2.8 ricaviamo che $D^s(H, x) = 0$ in quasi ogni $x \in F$. Per tali x

$$\begin{aligned} \underline{D}^s(E, x) &= \underline{D}^s(F, x) + D^s(H, x) = \underline{D}^s(F, x), \\ \bar{D}^s(E, x) &= \bar{D}^s(F, x) + D^s(H, x) = \bar{D}^s(F, x). \end{aligned}$$

\square

Corollario 2.11. *Sia $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ un unione numerabile di s -insiemi disgiunti con $\mathcal{H}^s(E) < \infty$. Allora per ogni k*

$$\underline{D}^s(E_k, x) = \underline{D}^s(E, x) \text{ e } \bar{D}^s(E_k, x) = \bar{D}^s(E, x).$$

per quasi ogni $x \in E_k$.

Dimostrazione. Basta applicare il Corollario 2.10 al sottoinsieme E_k di E . \square

Corollario 2.12. *Sia E un s -insieme. Se E è insieme regolare (rispettivamente irregolare) allora qualsiasi sottoinsieme misurabile di E di misura positiva è regolare (rispettivamente irregolare).*

Dimostrazione. La dimostrazione segue direttamente dal Corollario 2.10 e dalla definizione di regolarità. \square

Corollario 2.13. *L'intersezione di un insieme regolare (rispettivamente irregolare) con un insieme misurabile è un insieme regolare (rispettivamente irregolare). L'intersezione di un insieme regolare e di un insieme irregolare è un insieme di misura nulla.*

Dimostrazione. La prima affermazione segue dal Corollario 2.12. L'altra affermazione segue dal fatto che l'intersezione deve essere sia regolare che irregolare. \square

Teorema 2.14 (Teorema di decomposizione). *Sia E un s -insieme, l'insieme dei punti regolari di E è un insieme regolare, e l'insieme dei punti irregolari di E è un insieme irregolare.*

Dimostrazione. Dal Lemma 2.5 sia l'insieme dei punti regolari che quello dei punti irregolari sono misurabili, allora dal Corollario 2.10 segue il teorema. \square

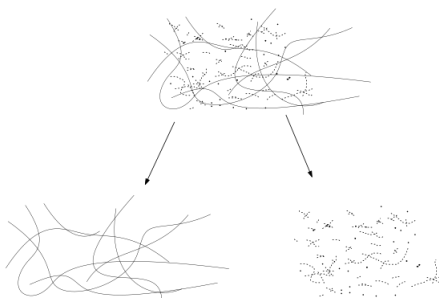


Figura 2.3: Decomposizione di un 1-insieme in una parte regolare e una parte irregolare

Osservazione 2.15. Il Teorema di decomposizione è molto importante perché ci permette di trattare in maniera separata la parte regolare e quella irregolare di un s -insieme.

Si possono ottenere anche limitazioni per la *densità angolare superiore* di un s -insieme di \mathbb{R}^n con $n \geq 2$. La densità angolare è stata introdotta per riuscire a studiare le proprietà tangenziali di un s -insieme. Se \mathbf{e} è un vettore unitario e θ un angolo, sia $S(x, \mathbf{e}, \theta)$ il cono chiuso infinito (considerato in una sola direzione) di vertice x e asse nella direzione di \mathbf{e} , formato dai punti y tali che il segmento $[x, y]$ forma un angolo di ampiezza al più θ con \mathbf{e} . Definiamo $S_r(x, \mathbf{e}, \theta) = B_r(x) \cap S(x, \mathbf{e}, \theta)$ il settore sferico di raggio r . Le densità angolari sono definite analogamente alle densità sferiche, dove $S_r(x, \mathbf{e}, \theta)$ sostituisce $B_r(x)$. Allora

$$\bar{D}^s(E, x, \mathbf{e}, \theta) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap S_r(x, \mathbf{e}, \theta))}{(2r)^s}$$

e

$$\underline{D}^s(E, x, \mathbf{e}, \theta) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap S_r(x, \mathbf{e}, \theta))}{(2r)^s}$$

sono rispettivamente la *densità angolare superiore* e la *densità angolare inferiore* di E in x . Dal Lemma 2.5, con l'opportuna sostituzione di $B_r(x)$ seguono le proprietà di misurabilità per le densità angolari e per gli insiemi ad essi associati.

Si possono ricavare le seguenti stime (che non dimostreremo)

$$\begin{aligned} \bar{D}^s(E, x, \mathbf{e}, \theta) &\leq 2^{-s} |S_1(x, \mathbf{e}, \theta)|^s \bar{D}_c^s(E, x) \\ \underline{D}^s(E, x, \mathbf{e}, \theta) &\leq 2^{-s} |S_1(x, \mathbf{e}, \theta)|^s \end{aligned}$$

per quasi ogni $x \in E$.

Calcolando il diametro del settore sferico si possono ricavare delle stime ancora più precise; la limitazione superiore della densità angolare superiore data da:

$$\bar{D}^s(E, x, \mathbf{e}, \theta) \leq \begin{cases} 2^{-s} & (0 < \theta \leq \frac{\pi}{6}) \\ (\sin \theta)^s & (\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \\ 1 & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi) \end{cases}$$

e quella inferiore per la densità angolare superiore data da:

$$\bar{D}^s(E, x, \mathbf{e}, \theta) \geq \begin{cases} 0 & (0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \\ 2^{-s} & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi) \end{cases}$$

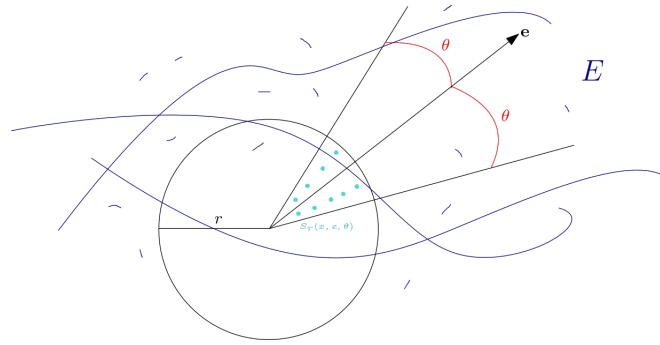


Figura 2.4: Densità angolare di ampiezza θ e direzione \mathbf{e}

Capitolo 3

Struttura degli insiemi di dimensione intera

3.1 Introduzione

In questo capitolo verranno discusse le proprietà di densità degli s -insiemi in \mathbb{R}^n , con s intero. Abbiamo visto che un s -insieme si può suddividere in una parte regolare e una irregolare, ognuna delle quali presenta proprietà differenti. Lo scopo principale sarà quello di caratterizzare insiemi regolari come sottoinsiemi di unioni numerabili di curve rettificabili, legando la teoria della misura con le idee descrittive di topologia.

3.2 Curve e continui

Gli 1-insiemi e le curve rettificabili sono profondamente legati. Vedremo infatti che un 1-insieme regolare, formato da un insieme di misura 0, è un sottoinsieme di una famiglia numerabile di curve rettificabili.

Definizione 3.1. Una *curva* (o *curva di Jordan*) Γ è l'immagine di una funzione iniettiva e continua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, dove $[a, b] \subset \mathbb{R}$ è un intervallo chiuso.

Definizione 3.2. Un *continuo* è un insieme connesso e compatto.

Osservazione 3.3. Ogni curva è un continuo. Ciò segue dal fatto che l'immagine continua di un insieme compatto e connesso è un insieme compatto e connesso.

Siccome ogni curva è un insieme di Borel allora è \mathcal{H}^s -misurabile. Inoltre, una biiezione continua tra insiemi compatti ha un'inversa continua ed in questo modo possiamo dire che una curva è omeomorfa all'immagine di un intervallo chiuso.

Definizione 3.4. La *lunghezza* di una curva Γ viene definita come

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \sup \sum_{i=1}^m |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \quad (3.1)$$

dove l'estremo superiore è preso tra tutte le divisione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ di $[a, b]$ e $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una parametrizzazione di Γ come nella Definizione 3.1.

Osservazione 3.5. In particolare la sommatoria in (3.1) non decresce se dividiamo l'intervallo in sottointervalli sempre più piccoli.

Definizione 3.6. Se $\mathcal{L}(\Gamma) < \infty$ allora la curva si dice *rettificabile*.

Osservazione 3.7. Le definizioni precedenti non coprono la casistica delle curve con autointersezioni.

Lemma 3.8. Sia $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa continua con $\psi(a) \neq \psi(b)$. Allora $\psi[a, b]$ contiene una curva che unisce $\psi(a)$ a $\psi(b)$.

Dimostrazione. Sia \mathcal{K} una famiglia di sottoinsiemi chiusi non vuoti $K \subseteq [a, b]$ che rispettano le seguenti proprietà:

- L'estremo inferiore a_K di K soddisfa $\psi(a) = \psi(a_K)$.
- L'estremo superiore b_K di K soddisfa $\psi(b) = \psi(b_K)$.
- Per ogni sottointervallo aperto (c, d) di $[a, b] \setminus K$ abbiamo che $\psi(c) = \psi(d)$.

Osserviamo che \mathcal{K} non è vuoto perché $[a, b] \in \mathcal{K}$.

Prima di proseguire abbiamo bisogno del seguente lemma:

Lemma 3.9. Consideriamo un sottoinsieme ordinato tramite inclusione $\{K_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{K}$, cioè l'insieme I è ordinato quindi se $i < j$ allora K_i è un sottoinsieme proprio di K_j . Allora $K_\infty = \bigcap_{i=1}^\infty K_i$ è un elemento di \mathcal{K} .

Dimostrazione. Essendo K un'intersezione di insiemi compatti, non vuoti e contenuti l'uno nell'altro allora K è non vuoto. Consideriamo una componente interna (c, d) di $[a, b] \setminus K_\infty$, per tutti gli $i \in I$ sufficientemente piccoli esiste una componente connessa di $[a, b] \setminus K_i$ che contiene (c_i, d_i) tale che se i decresce allora $d_i \nearrow d$ e $c_i \searrow c$. Siccome $\psi(c_i) = \psi(d_i)$, dalla continuità segue che $\psi(c) = \psi(d)$. Con un argomento simile si mostra che $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{K_i} = a_{K_\infty}$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} b_{K_i} = b_{K_\infty}$ e dalla continuità si ha che $\psi(a_{K_\infty}) = \psi(a)$ e $\psi(b_{K_\infty}) = \psi(b)$. Perciò $K_\infty \in \mathcal{K}$. \square

Per il lemma di Zorn \mathcal{K} ha un elemento minimale K . Questo elemento K ha la seguente proprietà: per ogni $c < d \in K$, se $\psi(c) = \psi(d)$ allora (c, d) è una componente interna di $[a, b] \setminus K$. Se così non fosse potrei trovare un elemento più piccolo di \mathcal{K} rimuovendo tutti i punti di $K \cap (c, d)$.

Inoltre K non ha punti isolati. Per assurdo supponiamo che $p \in K$ sia isolato. Se $p \neq a_K, b_K$ allora esistono due componenti (c, p) e (p, d) di $[a, b] \setminus K$ tali che $\psi(c) = \psi(p) = \psi(d)$, perciò $K \setminus \{p\} \in \mathcal{K}$. E se $p = a_K$ allora c'è una componente (p, d) di $[a, b] \setminus K$ tale che $\psi(d) = \psi(p) = \psi(a)$ implica che $K \setminus \{p\} \in \mathcal{K}$. Si dimostra similmente quando $p = b_K$.

Per ogni $t \in [a, b]$ definiamo $f(t) = \mathcal{L}^1(K \cap [a, t])$ quando $\exists! t$ tale che $\psi(t) = u$ e in tal caso poniamo $\psi_0(u) = \psi(f^{-1}(u))$. Altrimenti, se ci sono più punti nell'intervallo (c, d) che finiscono su u , allora $\psi_0(u) = \psi(c) = \psi(d)$. La funzione ψ_0 è continua perché composizione di funzioni continue. È inoltre iniettiva perché supposto $\psi_0(t_1) = \psi_0(t_2)$ allora $t_1 = t_2$ per come è stata costruita la funzione. \square

Osservazione 3.10. Se dividiamo $\psi([a, b])$ in due curve $\psi([a, c])$ e $\psi([c, b])$ dove $a < c < b$, allora la somma delle lunghezze delle due nuove curve è identica alla lunghezza della curva originale. Possiamo quindi dire che \mathcal{L} è addittiva sulle curve con un estremo in comune.

Definizione 3.11. Una curva Γ si dice *parametrizzabile per lunghezza d'arco* se data $\psi_0 : [0, \mathcal{L}(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$, definita come immagine di Γ , allora $\mathcal{L}(\psi_0|_{[0, t]}) = t$ per ogni $t \leq \mathcal{L}(\Gamma)$.

Osservazione 3.12. Si può dimostrare che ogni curva rettificabile ammette una parametrizzazione per lunghezza d'arco.

In particolare se ψ rappresenta la curva rettificabile Γ parametrizzata per lunghezza d'arco allora da (3.1) ho che

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leq |t_1 - t_2|. \quad (3.2)$$

Quindi ψ è una funzione assolutamente continua.

Lemma 3.13. *Se Γ è una curva, allora $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \mathcal{L}(\Gamma)$.*

Dimostrazione. Sia Γ una curva che collega z e w . Denotiamo con π la proiezione ortogonale da \mathbb{R}^n alla retta passante per z e w , (dove supponiamo $z < w$). Allora $|\pi(x) - \pi(y)| \leq |x - y|$ se $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dal Lemma 1.21 si ha che $\mathcal{H}^1(\Gamma) \geq \mathcal{H}^1(\pi(\Gamma)) \geq \mathcal{H}^1([z, w]) = \mathcal{L}([z, w]) = |z - w|$, siccome $[z, w] \subseteq \pi(\Gamma)$. Se supponiamo ora che Γ è definita da $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ allora $\mathcal{H}^1(\psi[t, u]) \geq |\psi(t) - \psi(u)|$ per qualsiasi t e u . Allora se $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ è una qualsiasi suddivisione dell'intervallo $[a, b]$,

$$\sum_{i=1}^m |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^1(\psi[t_{i-1}, t_i]) = \mathcal{H}^1(\Gamma),$$

dato che gli archi $\psi[t_{i-1}, t_i]$ di Γ sono disgiunti eccetto per gli estremi. Passando al sup sulle suddivisioni segue che $\mathcal{L}(\Gamma) \leq \mathcal{H}^1(\Gamma)$. Assumiamo infine che $\mathcal{L}(\Gamma) < \infty$, il caso $\mathcal{L}(\Gamma) = \infty$ è banale, e sia ψ la parametrizzazione per lunghezza d'arco di Γ , siccome $\psi : [0, \mathcal{L}(\Gamma)] \rightarrow \Gamma$ è una funzione suriettiva, vale (3.2), allora il Lemma 1.21 implica che $\mathcal{H}^1(\Gamma) \leq \mathcal{H}^1([0, \mathcal{L}(\Gamma)]) = \mathcal{L}(\Gamma)$. \square

Osservazione 3.14. Una conseguenza del lemma precedente, insieme alla (1.14), è che se Γ è una curva rettificabile allora $\mathcal{H}^s(\Gamma) = \infty$ se $s < 1$ altrimenti $\mathcal{H}^s(\Gamma) = 0$ se $s > 1$.

Corollario 3.15. *Sia ψ una parametrizzazione a lunghezza d'arco di una curva rettificabile Γ . Se E è un sottoinsieme Lebesgue misurabile di $[0, \mathcal{L}(\Gamma)]$, allora $\psi(E)$ è un sottoinsieme \mathcal{H}^1 -misurabile di \mathbb{R}^n e $\mathcal{H}^1(\psi(E)) = \mathcal{L}^1(E)$.*

Dimostrazione. Siccome E è Lebesgue misurabile per il Teorema 1.29 è anche \mathcal{H}^1 -misurabile e di conseguenza $\psi(E)$ è \mathcal{H}^1 -misurabile essendo la parametrizzazione a lunghezza d'arco. L'uguaglianza vale nel caso in cui E sia un intervallo chiuso per il Lemma 3.13. Per un generico insieme E segue da criteri standard di coincidenza di misure. \square

Osservazione 3.16. Questo corollario ci permette di usare i risultati della misura di Lebesgue anche sulle curve. Per esempio dal Teorema 1.30, se E è un sottoinsieme \mathcal{H}^1 -misurabile della curva Γ , allora per tutti gli $x \in E$ abbiamo che $\mathcal{H}^1(E \cap I) \setminus \mathcal{H}^1(I) \rightarrow 1$ quando $\mathcal{H}^1(I) \rightarrow 0$ e I è un sottoarco di Γ contenente x .

Lemma 3.17. *Sia E un continuo tale che $x, y \in E$. Se $|x - y| = \rho$, allora $\mathcal{H}^1(E \cap B_\rho(x)) \geq \rho$. In particolare, $\mathcal{H}^1(E) \geq |E|$.*

Dimostrazione. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ definita da $f(z) = |z - x|$. Allora f è una mappa continua tale che per $z, w \in \mathbb{R}^n$

$$|f(z) - f(w)| \leq |z - w|. \quad (3.3)$$

Supponiamo che l'insieme $f(E \cap B_\rho(x))$ contenga un intervallo $[0, \rho]$, altrimenti per qualche $0 < r < \rho$, $E = (E \cap B_r(x)) \cup (E \setminus B_r(x))$ sarebbe una decomposizione di E come unione disgiunta di insiemi chiusi. Applicando il Lemma 1.21 alla mappa f si ha che

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(E \cap B_\rho(x)) &\geq \mathcal{H}^1(f(E \cap B_\rho(x))) \\ &\geq \mathcal{H}^1([0, \rho]) = \mathcal{L}^1([0, \rho]) = \rho. \end{aligned}$$

L'ultima parte segue dal fatto che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $x, y \in E$ tali che $|x - y| > |E| - \varepsilon$. \square

Proseguiamo ora analizzando le proprietà basilari di densità delle curve rettificabili.

Lemma 3.18. *Una curva rettificabile è un 1-insieme regolare.*

Dimostrazione. Se Γ è rettificabile, $\mathcal{L}(\Gamma) < \infty$, allora dal Lemma 3.13 ho che $\mathcal{H}^1(\Gamma) < \infty$. Siccome Γ contiene almeno due punti distinti, il Lemma 3.17 implica che $\mathcal{H}^1(\Gamma) > 0$, allora Γ è un 1-insieme.

Sia x un punto di Γ diverso da uno dei due estremi e supponiamo che x divida Γ in due sottocurve rettificabili Γ_+ e Γ_- . Dal Lemma 3.17, $\mathcal{H}^1(\Gamma_- \cap B_\rho(x)) \geq \rho$ e $\mathcal{H}^1(\Gamma_+ \cap B_\rho(x)) \geq \rho$ con ρ sufficientemente piccolo, $\mathcal{H}^1(\Gamma \cap B_\rho(x)) \geq 2\rho$. Quindi in tutti i punti di Γ eccetto gli estremi si ha $\underline{D}^1(\Gamma, x) \geq 1$. Questo risultato insieme al Corollario 2.9 implica che $D^1(\Gamma, x) = 1$ per quasi ogni $x \in \Gamma$. \square

Procediamo ora con la discussione dell'esistenza di una retta tangente per le curve rettificabili.

Definizione 3.19. Sia E un s -insieme di \mathbb{R}^n allora esso ha una *tangente* in x nella direzione $\pm\theta$ se $\bar{D}^s(E, x) > 0$ e per ogni angolo $\phi > 0$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-s} \mathcal{H}^s(E \cap (B_r(x) \setminus S_r(x, \theta, \phi) \setminus S_r(x, -\theta, \phi))) = 0. \quad (3.4)$$

Osservazione 3.20. Ovviamente la retta che passa attraverso x nella direzione $\pm\theta$ è la tangente. Chiaramente un s -insieme può avere al più una tangente in ogni suo punto. Mostriamo questo fatto per le curve rettificabili con il seguente lemma.

Lemma 3.21. *Sia Γ una curva rettificabile con estremi x e y , e sia ϕ un angolo positivo. Sia E un insieme di punti di Γ che appartengono ad una coppia arbitrariamente piccola di sottoarchi di Γ che sottendono corde che formano un angolo più grande di 2ϕ tra di loro. Allora $\mathcal{H}^1(E) \leq \frac{\mathcal{L}(\Gamma) - |x - y|}{1 - \cos(\phi)}$.*

Dimostrazione. Denotiamo con L la retta che passa attraverso x e y e sia \mathcal{V} la collezione formata dai sottoarchi chiusi di Γ che sottendono corde che formano angoli più grandi di ϕ con L . Dalle condizioni del lemma, \mathcal{V} è una classe di Vitali di E . Quindi usando il teorema di ricoprimento, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare una collezione finita di sottoarchi disgiunti di Γ , $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ che appartengono a \mathcal{V} tale che

$$\mathcal{H}^1(E) \leq \sum_{i=1}^m |\Gamma_i| + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^m \mathcal{L}(\Gamma_i) + \varepsilon. \quad (3.5)$$

Se $\Gamma'_0, \dots, \Gamma'_m$ sono gli archi complementari, allora considerando le proiezioni ortogonali su L e usando il fatto che la proiezione non fa aumentare le lunghezze, si osserva che

$$\cos(\phi) \sum_{i=1}^m \mathcal{L}(\Gamma_i) + \sum_{i=0}^m \mathcal{L}(\Gamma'_i) \geq |x - y|.$$

Siccome $\sum_{i=1}^m \mathcal{L}(\Gamma_i) + \sum_{i=0}^m \mathcal{L}(\Gamma'_i) = \mathcal{L}(\Gamma)$ si ottiene, usando (3.5),

$$\mathcal{H}^1(E) - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^m \mathcal{L}(\Gamma_i) \leq \frac{(\mathcal{L}(\Gamma) - |x - y|)}{1 - \cos(\phi)}.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. \square

Corollario 3.22. *Se $\phi > 0$ e E è un insieme di punti di una curva rettificabile Γ che appartengono ad una coppia di sottoarchi arbitrariamente piccoli di Γ e che sottendono corde che formano un angolo più grande di 2ϕ tra di loro, allora $\mathcal{H}^1(E) = 0$.*

Dimostrazione. Sia dato $\varepsilon > 0$, dall'equazione (3.1) possiamo trovare i punti x_0, x_1, \dots, x_m su Γ , con x_0 e x_m estremi di Γ tali che

$$\mathcal{L}(\Gamma) < \sum_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}| + \varepsilon.$$

Denotiamo con Γ_i la porzione di Γ compresa tra x_{i-1} e x_i . Applichiamo il Lemma 3.21 su ogni Γ_i si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(E) &= \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^1(E \cap \Gamma_i) \leq \sum_{i=1}^m \frac{(\mathcal{L}(\Gamma_i) - |x_i - x_{i-1}|)}{1 - \cos(\phi)} \\ &= \frac{(\mathcal{L}(\Gamma) - \sum_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}|)}{1 - \cos(\phi)} < \frac{\varepsilon}{1 - \cos(\phi)}. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che $\mathcal{H}^1(E) = 0$. \square

Teorema 3.23. *Una curva rettificabile Γ ha una tangente in quasi ogni suo punto.*

Dimostrazione. Siccome il continuo Γ ha almeno due punti, dal Lemma 3.17 si ottiene che $\bar{D}^1(E, x) \geq \frac{1}{2}$ in tutti i punti $x \in \Gamma$.

Sia Γ parametrizzata dalla funzione $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Segue dal Corollario 3.22 che per quasi ogni $x \in \Gamma$ possiamo definire un vettore unitario θ tale che, dato $\phi > 0$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che se $\psi(t) = x$ e $|u - t| < \varepsilon$, allora

$$\psi(u) \in S(x, \theta, \phi) \cup S(x, -\theta, \phi).$$

Inoltre, se ρ è positivo, $\psi(u) \notin B_\rho(x)$ se $|u - t| \geq \varepsilon$ (si scelga altrimenti una successione di numeri $\{u_i\}$ con $|u_i - t| \geq \varepsilon$ e $\psi(u_i) \rightarrow x$; quindi esiste u tale che $|u - t| \geq \varepsilon$ e $\psi(u) = x = \psi(t)$). Allora

$$\Gamma \cap (B_\rho(x) \setminus S_\rho(x, \theta, \phi) \setminus S_\rho(x, -\theta, \phi)) = \emptyset.$$

e perciò segue (3.4) \square

Definizione 3.24. Un 1-insieme contenuto in un'unione numerabile di curve rettificabili è chiamato *Y-insieme*.

Corollario 3.25. *Un Y-insieme è un 1-insieme regolare.*

Dimostrazione. Applicando il Corollario 2.12 al Lemma 3.18 si ottiene che una curva rettificabile contiene un 1-insieme di densità 1 in quasi ogni suo punto. Lo stesso vale per un Y-insieme dal Corollario 2.11. \square

Corollario 3.26. *Un Y -insieme ha una tangente in quasi ogni suo punto.*

Dimostrazione. Dal Corollario 3.25, un Y -insieme ha una densità inferiore positiva quasi ovunque. Applicando il Corollario 2.10 al Teorema 3.23, un 1-insieme contenente una curva rettificabile soddisfa (3.4) quasi ovunque, così dal Corollario 2.11 un Y -insieme ha una tangente in quasi ogni suo punto. \square

Lemma 3.27. *Sia E un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^n tale che se $x, y \in E$ il segmento $[x, y]$ forma un angolo di al più $\phi < \frac{\pi}{2}$ con una retta fissata L . Allora E è un sottoinsieme di una curva rettificabile.*

Definizione 3.28. Un insieme con le proprietà descritte nel Lemma precedente è chiamato *insieme Lipschitziano*.

Dimostrazione. Possiamo assumere che E sia chiuso. Sia $\Pi(t)$ l'iperpiano perpendicolare a L a distanza t dall'origine e siano a e b i valori estremi per i quali $\Pi(t)$ interseca E . Allora $\Pi(t)$ può contenere, al più, un punto di E per ogni t , se ci fossero più di due punti infatti si formerebbe un angolo di $\frac{\pi}{2}$; denotiamo con $\psi(t)$ questo punto se esiste, altrimenti se $a < t < b$ sia $\psi(t)$ il punto di $\Pi(t)$ che giace nel segmento che collega i due punti di E più vicini a $\Pi(t)$, da ciascun lato. Il segmento $[\psi(t_1), \psi(t_2)]$ forma un angolo di ampiezza al più ϕ con L se $t_1 \neq t_2$, così $|\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leq \frac{|t_1 - t_2|}{\cos(\phi)}$. Dall'equazione (3.1), ψ definisce una curva rettificabile. \square

Definizione 3.29. Un insieme E viene detto *connesso per archi* se dati $x, y \in E$ allora esiste una curva continua contenuta in E che collega x e y .

Lemma 3.30. *Un continuo E con $\mathcal{H}^1(E) < \infty$ è connesso per archi.*

Dimostrazione. È una conseguenza del Lemma 3.17. Prendiamo $z, w \in E$. Osserviamo che E è connesso per catena, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ si può determinare una catena di punti $z = x_0, x_1, \dots, x_m = w$ in E con $|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon$ per $1 \leq i \leq m$.¹ Eliminiamo ora i punti intermedi della catena assumendo che $|x_i - x_j| > \varepsilon$ se $|i - j| \geq 2$. Quindi nessun punto di \mathbb{R}^n appartiene a più di due palle $B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(x_i)$, perciò assumendo che $m \geq 2$ e usando il Lemma 3.17,

$$2\mathcal{H}^1(E) \geq \sum_{i=0}^m \mathcal{H}^1(E \cap B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(x_i)) \geq \frac{1}{2}m\varepsilon$$

Denotiamo ora con Γ_ε la curva poligonale ottenuta unendo i punti x_0, x_1, \dots, x_m ,

$$\mathcal{L}(\Gamma_\varepsilon) = \sum_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}| \leq m\varepsilon \leq 4\mathcal{H}^1(E). \quad (3.6)$$

Per $0 \leq t \leq 1$, indichiamo con $\psi_\varepsilon(t)$ il punto su Γ_ε che identifica una porzione di lunghezza t volte la lunghezza della curva, cioè la lunghezza tra $z = \psi_\varepsilon(0)$ e $\psi_\varepsilon(t)$ è pari a $t\mathcal{L}(\Gamma_\varepsilon)$. Allora se $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ dalla (3.6) si ottiene

$$|\psi_\varepsilon(t_1) - \psi_\varepsilon(t_2)| \leq \mathcal{L}(\psi_\varepsilon[t_1, t_2]) \leq |t_1 - t_2|4\mathcal{H}^1(E), \quad (3.7)$$

Tutte le curve $\{\Gamma_\varepsilon\}_{\varepsilon \leq 1}$ sono contenute in un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^n perciò la famiglia di funzioni $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon \leq 1}$ che vanno dall'intervallo $[0, 1]$ a \mathbb{R}^n sono uniformemente limitate e dall'equazione

¹Questa affermazione è una conseguenza del fatto che E è connesso: non è difficile dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme $\{w \in E : \exists x_0, x_1, \dots, x_m \in E \text{ tali che } x_0 = z, x_m = w \text{ e } \forall i = 1, \dots, m |x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon\}$ è sia aperto che chiuso in E .

(3.7), sono equicontinue. Per il teorema di Ascoli-Arzelà queste funzioni sono una famiglia di funzioni sequenzialmente compatte, cioè esiste una successione di indici $\varepsilon(j) \rightarrow 0$ e una funzione continua $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\psi_{\varepsilon(j)}$ converge uniformemente a ψ definita su $[0, 1]$. Sia $\psi[0, 1] = \Gamma$. Chiaramente $\psi(0) = z$ e $\psi(1) = w$. Inoltre se $x \in \Gamma$ allora dato $\delta > 0$, possiamo trovare $\varepsilon(j) < \frac{1}{2}\delta$ tale che $\Gamma_{\varepsilon(j)}$ interseca la palla $B_{\frac{1}{2}\delta}(x)$. Quindi c'è un punto di E in $B_\delta(x)$. Siccome E è chiuso possiamo concludere che $x \in E$, e allora $\Gamma \subseteq E$. Se ψ è iniettiva, allora Γ è una curva. Altrimenti possiamo ridurre Γ ad una curva che collega z e w con il Lemma 3.8. \square

Lemma 3.31. *Sia E un compatto connesso per archi con $\mathcal{H}^1(E) < \infty$; allora è formato da un'unione numerabile di curve rettificabili e un insieme di \mathcal{H}^1 -misura nulla.*

Dimostrazione. Costruiamo induttivamente una successione di curve $\{\Gamma_j\}$. Sia Γ_1 una curva in E ottenuta unendo i punti più distanti di E . Supponiamo di aver definito le curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$. Sia x il punto di E a massima distanza d_k da $\bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$. Se $d_k = 0$ il processo termina e segue il risultato. Altrimenti sia Γ_{k+1} una curva di E che unisce x con $\bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$ con Γ_{k+1} disgiunta da $\bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$ eccetto per un estremo. Dal Lemma 3.17,

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_{k+1}) \geq d_k. \quad (3.8)$$

Allora

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(\Gamma_j) \leq \mathcal{H}^1(E) < \infty, \quad (3.9)$$

perciò $d_j \rightarrow 0$. Se $x \in E$ e la distanza d di x da $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$ è positiva, allora $d_j < d$ per qualche j , e x dovrebbe essere stato scelto come l'estremo di Γ_{j+1} , quindi avremmo una contraddizione. Possiamo concludere che E è contenuto nella chiusura di $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$. Dal Lemma 3.13, $\mathcal{L}(\Gamma_j) = \mathcal{H}^1(\Gamma_j) \leq \mathcal{H}^1(E) < \infty$ e dunque Γ_j è una curva rettificabile per ogni j . Siccome per ogni k , $\bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$ è chiuso allora

$$\mathcal{V} = \left\{ B_r(x) : x \in E \setminus \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j \text{ e } B_r(x) \cap \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j = \emptyset \right\}$$

è una classe di Vitali per $E \setminus \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$. Sia x il centro per qualche $B \in \mathcal{V}$. Siccome x appartiene alla chiusura di $\bigcup_{j=k+1}^{\infty} \Gamma_j$, ci sono punti in questa unione arbitrariamente vicini ad x . Questi punti possono essere connessi tramite una successione di archi in $\bigcup_{j=k+1}^{\infty} \Gamma_j$ ad un punto di $\bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$, necessariamente non in B , perciò dal Lemma 3.17,

$$\frac{1}{2}|B| \leq \mathcal{H}^1\left(B \cap \bigcup_{j=k+1}^{\infty} \Gamma_j\right)$$

per qualsiasi $B \in \mathcal{V}$. Quindi, dato $\varepsilon > 0$ possiamo usare il teorema di Vitali per scegliere una successione disgiunta di palle $\{B_i\}$ in \mathcal{V} tale che

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j\right) &\leq \sum_{i=1}^k |B_i| + \varepsilon \leq 2 \sum_{i=1}^k \mathcal{H}^1\left(B_i \cap \bigcup_{j=k+1}^{\infty} \Gamma_j\right) + \varepsilon \\ &\leq 2 \mathcal{H}^1\left(\bigcup_{j=k+1}^{\infty} \Gamma_j\right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathcal{H}^1\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j\right) \leq 2\mathcal{H}^1\left(\bigcup_{j=k+1}^{\infty} \Gamma_j\right).$$

Dalla (3.9) la parte a destra della disuguaglianza tende a zero se $k \rightarrow \infty$ perciò $\mathcal{H}^1(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j) = 0$, come richiesto. \square

Teorema 3.32. *Sia E un continuo con $\mathcal{H}^1(E) < \infty$. Allora E è formato da un'unione numerabile di curve rettificabili e un insieme di \mathcal{H}^1 -misura nulla.*

Dimostrazione. Essendo E un continuo di misura finita allora per il Lemma 3.30 è connesso per archi e per il Lemma 3.31 segue la tesi. \square

Corollario 3.33. *Sia E un continuo con $\mathcal{H}^1(E) < \infty$. Allora E è regolare e ha una tangente in quasi ogni suo punto.*

Dimostrazione. Dal Teorema 3.32, E è un Y -insieme unito ad un insieme di misura nulla, perciò il risultato segue dai Corollari 3.25 e 3.26. \square

3.3 Densità e caratterizzazione degli 1-insiemi regolari

Restringiamo l'attenzione ai sottoinsiemi del piano.

Definizione 3.34. Un 1-insieme è detto *Z-insieme* se la sua intersezione con ogni curva rettificabile è un insieme di \mathcal{H}^1 -misura nulla.

Lemma 3.35. *L'intersezione di uno Z-insieme con un continuo di \mathcal{H}^1 -misura finita ha misura nulla.*

Dimostrazione. La tesi segue dal Teorema 3.32 e dalla definizione di Z -insieme. \square

Definizione 3.36. Una *coppia cerchio* è una figura formata da due dischi di uguale raggio ognuno con il centro sul bordo dell'altro.

Lemma 3.37. *Sia E un continuo in \mathbb{R}^2 . Supponiamo che $\{B_i\}_{i \geq 1}$ sia una successione numerabile semidisgiunta di dischi chiusi ognuno contenuto in E e tale che $|B_i| \geq d$ solo per un numero finito di i per qualsiasi $d > 0$. Se Γ_i è il bordo di B_i allora l'insieme*

$$F = (E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$$

è un continuo.

Prima di proseguire con la dimostrazione ricordiamo che una famiglia di insiemi viene detta *famiglia semidisgiunta* se nessun membro di essa è contenuto in altri membri diversi da esso (Definizione 1.22).

Dimostrazione. Notiamo che $F = (E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int} B_i) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ perciò per mostrare che F è chiuso è sufficiente mostrare che $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i} \subseteq F$. Se $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i} \setminus (E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int} B_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int} B_i$, allora $x \in \text{int} B_k$. Sia $d > 0$ la distanza di x dal bordo di B_k . Se Γ_j interseca $B_{\frac{1}{2}d}(x)$, allora certamente B_j interseca $B_{\frac{1}{2}d}(x)$ ed interseca anche $\mathbb{R}^2 \setminus B_k$, siccome $B_j \not\subseteq B_k$. Quindi $|\Gamma_j| \geq \frac{1}{2}d$, così solo un numero finito di Γ_j può intersecare $B_{\frac{1}{2}d}(x)$. Siccome $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i}$ possiamo concludere che

per qualche k , $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^k \Gamma_i} = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i \subseteq F$, come richiesto.

Per provare che F è connesso supponiamo per assurdo che $F = F_1 \cup F_2$, dove F_1 e F_2 sono insiemi chiusi disgiunti. Sia

$$\begin{aligned} E_1 &= F_1 \cup \bigcup_{\{i: \Gamma_i \subseteq F_1\}} B_i, \\ E_2 &= F_2 \cup \bigcup_{\{i: \Gamma_i \subseteq F_2\}} B_i. \end{aligned}$$

In particolare ogni Γ_i è contenuto o in E_1 o in E_2 e dunque $E = E_1 \cup E_2$. Siccome i dischi $\{B_i\}_{i \geq 1}$ sono semidisgiunti e $F \cap B_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$ per ogni i allora $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. L'insieme E_1 è chiuso infatti per $x \in \overline{\bigcup_{\{i: \Gamma_i \subseteq F_1\}} B_i}$, allora x è il limite di una successione di punti in $\bigcup_{i=1}^k B_i$ per qualche k , oppure x è il limite di una successione di dischi limitati nell'insieme chiuso F_1 e raggio che tende a 0. In ogni caso $x \in E_1$. Similmente si mostra che E_2 è chiuso, allora $E = E_1 \cup E_2$ è una decomposizione disgiunta di E in insiemi chiusi. Siccome E è connesso allora uno tra E_1 e E_2 è vuoto quindi uno tra F_1 e F_2 è vuoto. \square

Osservazione 3.38. Indichiamo con $R(x, y) = \text{int}(B_{|x-y|}(x) \cap B_{|x-y|}(y))$ l'intersezione della coppia di cerchi con centri rispettivamente x e y .

Lemma 3.39. *Sia E un 1-insieme in \mathbb{R}^2 e consideriamo $\alpha > 0$. Sia E_0 un sottoinsieme compatto di E con $\mathcal{H}^1(E_0) > 0$, tale che $\mathcal{H}^1(E \cap R(x_1, x_2)) \geq \alpha|x_1 - x_2|$, $\forall x_1, x_2 \in E_0$. Allora esiste un continuo H tale che $0 < \mathcal{H}^1(H \cap E) \leq \mathcal{H}^1(H) < \infty$.*

Dimostrazione. Con una tecnica standard di uniformizzazione, usando il Corollario 2.9, possiamo trovare $\rho_1 > 0$ e un insieme compatto $F \subseteq E_0$ con $\mathcal{H}^1(F) > 0$ tale che

$$\mathcal{H}^1(B_r(x) \cap E) \leq 2 \cdot 2r \text{ se } x \in F \text{ e } 0 < r \leq \rho_1. \quad (3.10)$$

Inoltre dai Corollari 2.8 e 2.9 esistono un punto $y \in F$ e un numero ρ con $0 < \rho \leq \frac{1}{10}\rho_1$ tali che

$$\mathcal{H}^1((E \setminus F) \cap B_r(y)) < 2r \cdot 10^{-3}\alpha \quad (0 < r \leq 3\rho) \quad (3.11)$$

e

$$\mathcal{H}^1(F \cap B_\rho(y)) > \frac{1}{4} \cdot 2\rho = \frac{1}{2}\rho. \quad (3.12)$$

Possiamo assumere che il bordo Γ del disco $B_\rho(y)$ contiene qualche punto di F , si può ridurre ρ se è necessario. Sia \mathcal{C} la famiglia di dischi chiusi

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{B_r(x) : x \in F \cap B_\rho(y), 0 < r < 2\rho \\ &\text{e } \mathcal{H}^1((E \setminus F) \cap B_r(x)) \geq \alpha r\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dal Lemma 1.23 possiamo trovare una successione, finita o numerabile, di dischi chiusi e disgiunti $\{B_i\}_{i \geq 1}$ in \mathcal{C} tale che $\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \subseteq \bigcup_{i \geq 1} B'_i$, dove B'_i è il disco chiuso concentrico con B_i e di raggio 5 volte maggiore. Inoltre possiamo considerare i dischi $\{B'_i\}_{i \geq 1}$ semidisgiunti. Indichiamo con Γ_i il perimetro di B'_i . Dato

$$G = (F \cap B_\rho(y)) \cup \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} B'_i,$$

definiamo

$$H = (G \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B'_i) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i. \quad (3.14)$$

Proseguiamo ora dividendo la dimostrazione in 6 step per mostrare che H è un continuo con le proprietà richieste:

1. G è chiuso: siccome $F \cap B_\rho(y)$ e Γ sono chiusi, è sufficiente mostrare che $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} B'_i} \subseteq G$. Se $z \in \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} B'_i}$, allora anche $z \in \bigcup_{i=1}^k B'_i \subseteq G$ per qualche $k < \infty$, oppure z è il limite di una sottosuccessione dei dischi $\{B'_i\}_{i \geq 1}$. Siccome $\sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^2 < \infty$, allora $|B'_i| \rightarrow 0$ per $i \rightarrow \infty$, quindi, z è il punto limite dei centri dei dischi che sono tutti contenuti nel chiuso $F \cap B_\rho(y)$.
2. G è connesso: supponiamo per assurdo che $G = G_1 \cup G_2$, dove G_1 e G_2 sono insiemi disgiunti, non vuoti e chiusi. Ogni sottoinsieme connesso di G deve essere contenuto in uno solo tra G_1 e G_2 , perciò assumiamo che $\Gamma \subseteq G_1$. Ogni B'_i ha un centro in $B_\rho(y)$, allora se B'_i contiene punti su Γ o all'esterno, deve intersecare Γ e essere contenuto in G_1 . Quindi $G_2 \subseteq \text{int}B_\rho(y)$. Se G'_1 è dato dall'unione di $\mathbb{R}^2 \setminus B_\rho(y)$ con G_1 , così che G'_1 sia chiuso, connesso e disgiunto da G_2 . Siccome entrambi G'_1 e G_2 contengono punti di F , sia $x_1 \in F \cap G'_1$ e $x_2 \in F \cap G_2$ i punti che minimizzano la distanza $r = |x_1 - x_2|$. Siccome $\Gamma \subseteq G'_1$ contiene un punto di F , $0 < r < 2\rho$. La regione $R(x_1, x_2)$ è disgiunta da F , altrimenti r potrebbe essere ulteriormente ridotto allora

$$\begin{aligned} 0 < \alpha r &\leq \mathcal{H}^1(E \cap R(x_1, x_2)) = \mathcal{H}^1((E \setminus F) \cap R(x_1, x_2)) \\ &\leq \mathcal{H}^1((E \setminus F) \cap B_r(x_2)). \end{aligned}$$

Siccome $x_2 \in F \cap B_\rho(y)$ e $r < 2\rho$, $B_r(x_2)$ è un membro di \mathcal{C} e quindi $B_r(x_2) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B'_i \subseteq G$. Quindi $B_r(x_2) = (B_r(x_2) \cap G'_1) \cup (B_r(x_2) \cap G_2)$ è una decomposizione di $B_r(x_2)$ in insiemi chiusi disgiunti con x_1 nel primo e x_2 nel secondo. Chiaramente, questo è assurdo, siccome $B_r(x_2)$ è connesso. Perciò G è connesso.

3. H è un continuo: dai due punti precedenti G è un continuo, perciò dal Lemma 3.37 H è un continuo.
4. $\sum_{i=1}^{\infty} |B'_i| \leq \frac{1}{8}\rho$: usando l'equazione (3.13), il fatto che i B_i siano disgiunti e la (3.11) si osserva che

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |B'_i| &= 5 \sum_{i=1}^{\infty} |B_i| \leq \frac{10}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^1((E \setminus F) \cap B_i) \\ &\leq \frac{10}{\alpha} \mathcal{H}^1((E \setminus F) \cap B_{3\rho}(y)) \leq \frac{10}{\alpha} \cdot 6\rho 10^{-3} \alpha \leq \frac{1}{8}\rho. \end{aligned}$$

5. $\mathcal{H}^1(H) < \infty$: siccome $H \subseteq E \cup \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$, usando il punto precedente si ottiene,

$$\mathcal{H}^1(H) \leq \mathcal{H}^1(E) + 2\pi\rho + \pi \sum_{i=1}^{\infty} |B'_i| < \infty.$$

6. $\mathcal{H}^1(H \cap E) > 0$: dalla definizione di H

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(H \cap E) &\geq \mathcal{H}^1(G \cap E) - \mathcal{H}^1\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B'_i\right) \\ &\geq \mathcal{H}^1(F \cap B_\rho(y)) - \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(E \cap B'_i) \\ &\geq \mathcal{H}^1(F \cap B_\rho(y)) - 2 \sum_{i=1}^{\infty} |B'_i| \\ &\geq \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{4}\rho = \frac{1}{4}\rho > 0, \end{aligned}$$

dove si usa (3.10) (notiamo infatti che $|B'_i| < 20\rho \leq 2\rho_1$), (3.12) e il punto (4). □

Teorema 3.40. *Sia E uno Z -insieme in \mathbb{R}^2 . Allora $\underline{D}^1(E, x) \leq \frac{3}{4}$ in quasi ogni suo punto $x \in E$.*

Dimostrazione. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$ l'insieme $E_1 = \{x : \bar{D}^1(E, x) > \frac{3}{4} + \alpha\}$ abbia misura positiva. Allora dal Teorema 2.7, da Egoroff e Luisin, possiamo trovare un 1-insieme compatto $E_2 \subseteq E_1$ e $\rho > 0$ tale che

$$\mathcal{H}^1(E \cap B_r(x)) > \left(\frac{3}{4} + \alpha\right)2r \quad (x \in E_2, 0 < r \leq \rho) \quad (3.15)$$

e

$$\mathcal{H}^1(E \cap U) < (1 + \alpha)|U| \quad (x \in E_2 \cap U, 0 < |U| \leq 3\rho). \quad (3.16)$$

Sia E_0 un sottoinsieme compatto di E_2 con $0 < \mathcal{H}^1(E_0) < \infty$ e $|E_0| \leq \rho$. Se $x_1, x_2 \in E_0$, allora $r = |x_1 - x_2| \leq \rho$, siccome ogni circonferenza interseca E in un insieme di misura nulla

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(E \cap R(x_1, x_2)) &= \mathcal{H}^1(E \cap B_r(x_1)) + \mathcal{H}^1(E \cap B_r(x_2)) - \mathcal{H}^1(E \cap (B_r(x_1) \cup B_r(x_2))) \\ &\geq 2\left(\frac{3}{4} + \alpha\right)2r - (1 + \alpha)3r = \alpha r = \alpha|x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

usando le equazioni (3.15) e (3.16) con $U = B_r(x_1) \cap B_r(x_2)$. Applicando il Lemma 3.39 a $E_0 \subseteq E$, deduciamo che esiste un continuo H con $0 < \mathcal{H}^1(H \cap E) \leq \mathcal{H}^1(H) < \infty$. Siccome E è uno Z -insieme questo è impossibile dal Lemma 3.35. Possiamo concludere che $\mathcal{H}^1(E_1) = 0$ se $\alpha > 0$, come richiesto. □

Corollario 3.41. *Sia E un 1-insieme irregolare in \mathbb{R}^2 . Allora $\underline{D}^1(E, x) \leq \frac{3}{4}$ in quasi ogni $x \in E$.*

Dimostrazione. Dal Corollario 3.25 nessun sottoinsieme di E di misura positiva è contenuto in una curva rettificabile. Quindi E è uno Z -insieme e il risultato segue immediatamente dal Teorema 3.40. □

Osservazione 3.42. Abbiamo mostrato che insiemi regolari e irregolari hanno un comportamento molto diverso, infatti quelli regolari hanno densità inferiore pari ad 1, mentre quelli irregolari hanno densità al più $\frac{3}{4}$ quasi ovunque. Non è possibile costruire 1-insiemi con densità inferiore strettamente compresa tra $\frac{3}{4}$ e 1 in un insieme di misura positiva. L'esatto limite superiore di $\underline{D}^1(E, x)$ non è ancora stato dimostrato sebbene in generale si crede che il valore corretto sia $\frac{1}{2}$. La prima stima di Besicovitch è stata $1 - 10^{-2576}$, per poi essere ridotta a $\frac{3}{4}$.

Teorema 3.43. *Un 1-insieme irregolare è uno Z -insieme. Un 1-insieme regolare è dato dall'unione di un Y -insieme e un insieme di \mathcal{H}^1 -misura nulla.*

Dimostrazione. Se E è irregolare, allora E interseca ogni curva rettificabile Γ in un insieme di misura nulla, altrimenti $E \cap \Gamma$ sarebbe un Y -insieme e quindi regolare.

Se E è regolare, allora $\underline{D}^1(E, x) = 1$ quasi ovunque, perciò dal Teorema 3.40 e dal Corollario 2.10 abbiamo che qualunque sottoinsieme misurabile di E di misura positiva interseca almeno una curva rettificabile in un insieme di misura positiva. Usiamo questo fatto per definire induttivamente una successione di curve rettificabili $\{\Gamma_j\}_{j \geq 1}$. Scegliamo Γ_1 in modo tale che

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_1 \cap E) \geq \frac{1}{2} \sup\{\mathcal{H}^1(\Gamma \cap E) : \Gamma \text{ rettificabile}\} > 0$$

Supponiamo di aver individuato $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ e abbiamo $E_k = E \setminus \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$ di misura positiva, sia Γ_{k+1} una curva rettificabile con

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_{k+1} \cap E_k) \geq \frac{1}{2} \sup\{\mathcal{H}^1(\Gamma \cap E_k) : \Gamma \text{ rettificabile}\} > 0. \quad (3.17)$$

Il processo termina in tempo finito se esiste un k tale che le curve $\{\Gamma_j\}_{j=1}^k$ coprono quasi tutto E , in tal caso la conclusione è chiara. Altrimenti

$$\infty > \mathcal{H}^1(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(\Gamma_{k+1} \cap E_k),$$

cosicché $\mathcal{H}^1(\Gamma_{k+1} \cap E_k) \rightarrow 0$. Se $\mathcal{H}^1(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j) > 0$, allora possiamo trovare una curva rettificabile Γ con $\mathcal{H}^1(\Gamma \cap (E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j)) = d > 0$. Ma per qualche k abbiamo che $\mathcal{H}^1(\Gamma_{k+1} \cap E_k) < \frac{1}{2}d$ e potremmo selezionare Γ piuttosto che Γ_{k+1} , in accordo con la (3.17). Quindi $\mathcal{H}^1(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j) = 0$, così E è dato dall'unione di $\bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap \Gamma_j)$, che è un Y -insieme, e un insieme di misura nulla. \square

Concludiamo mostrando una proprietà topologica degli insiemi irregolari.

Definizione 3.44. Un insieme viene detto *totalmente disconnesso* se nessuna coppia di punti appartiene alla stessa componente connessa.

Osservazione 3.45. Quindi data una coppia di punti nell'insieme, c'è una decomposizione in due sottoinsiemi chiusi e disgiunti, ognuno dei quali contiene uno dei due punti.

Corollario 3.46. *Un 1-insieme irregolare E è totalmente disconnesso.*

Dimostrazione. Se x e y appartengono entrambi allo stesso sottoinsieme chiuso e connesso F di E , allora dal Lemma 3.17 $|x - y| \leq \mathcal{H}^1(F) < \infty$. Ma E è uno Z -insieme e quindi $\mathcal{H}^1(F) = \mathcal{H}^1(E \cap F) = 0$ dal Lemma 3.35. Quindi $x = y$. \square

Bibliografia

- [1] Falconer K.J. (2003) *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Second Edition, John Wiley & Sons Inc.
- [2] Falconer K. J. (1985) *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press.
- [3] Folland G. B. (1999) *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, second edition, John Wiley & Sons Inc.