



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Studio dell'interazione fluido-struttura con un metodo “immersed boundary” accoppiato alla peridinamica

Relatore: *Prof. Francesco Picano*

Correlatore: *Prof. Mirco Zaccariotto*

Prof. Ugo Galvanetto

Laureando: *Piermario Campagnari*

Matricola: 1129088

Anno Accademico 2016/2017

Indice

1	Introduzione	1
2	Peridinamica	3
2.1	Equazioni del moto	4
2.2	Discretizzazione numerica	6
2.3	Coefficiente di riduzione del volume	7
2.4	Condizioni al contorno	8
2.5	Condizioni di carico	9
3	Metodo dei contorni immersi per le equazioni di Navier-Stokes	11
3.1	Equazioni generali	12
3.2	Discretizzazione spaziale	13
3.3	Funzione delta	14
3.4	Moto delle particelle solide	16
3.5	Multidirect Forcing	17
4	Validazione del codice	19
4.1	Solutore di Navier-Stokes	19
4.1.1	Runge-Kutta del 3 ordine low-storage	20
4.1.2	Metodo di proiezione	21
4.1.3	Condizioni al contorno	23
4.1.4	Moto di Poiseuille	24
4.2	Modulo sul metodo dei contorni immersi	25
4.2.1	Cilindro stazionario a basso numero di Re	25
4.3	Solutore peridinamico	28
4.3.1	Benchmark 1d	29
5	Accoppiamento Metodo dei contorni immersi e Peridinamica	31
5.1	Trasmissione dei carichi	33
5.2	Trasmissione degli spostamenti	35

6	Simulazioni	37
6.1	Configurazione geometrica	37
6.2	Influenza del coefficiente di smorzamento del materiale	39
6.3	Influenza del numero di Reynolds	41
7	Conclusioni	47

Capitolo 1

Introduzione

Lo studio delle interazioni fluido-struttura è un problema che interessa diversi settori, a partire dall'aeroelasticità, con il fenomeno più macroscopico e distruttivo del flutter, fino ad arrivare alla medicina ad esempio con il sistema circolatorio.

Nonostante i numerosi sforzi effettuati, ad oggi, non è ancora stata trovata una teoria che possa descrivere queste interazioni. Al fine di fornire strumenti utili per affrontare queste problematiche, sono state proposte molte tecniche numeriche, che si suddividono in due macrocategorie: accoppiamento a una via o a due vie. Nell'accoppiamento a una via si considera solo la trasmissione dell'informazione dei carichi applicati dal fluido al solido. Al contrario, nell'accoppiamento a due vie, si ha una duplice trasmissione di informazioni, in quanto oltre all'informazione dei carichi applicati si considera l'informazione relativa alla deformazione trasmessa dal solido al fluido. Naturalmente, le tecniche con accoppiamento a due vie forniscono una soluzione più accurata e aderente alla realtà, ma complicano notevolmente i codici numerici. In letteratura, sono presenti numerose tecniche numeriche che utilizzano varie strategie, ma nessuna di esse è in grado di analizzare il problema in maniera esaustiva.

In questa tesi si propone una nuova tecnica per studiare le interazioni fluido-struttura con accoppiamento a due vie, utilizzando le equazioni di Navier-Stokes per la risoluzione del campo fluido e accoppiandole alla peridinamica per la risoluzione delle deformazioni del corpo attraverso la tecnica dei contorni immersi ("immersed boundary"). La scelta di queste due tecniche non è casuale, in quanto hanno vantaggi che le rendono particolarmente adatte per l'utilizzo nello studio di interazioni fluido-struttura. Il metodo "immersed boundary" (o dei contorni immersi) permette di ricavare le forze che il fluido e la struttura si scambiano in alcuni punti Lagrangiani che discretizzano l'interfaccia fluido-solido. Inoltre permette di ricalcolare in maniera efficiente le forze scambiate anche se il corpo si muove nel tempo, poiché essa è indipendente dalla griglia euleriana che descrive e risolve il fluido. La

peridinamica invece, è una teoria che permette di simulare la deformazione dei corpi, ma grazie alla sua formulazione integrale, a differenza dei metodi FEM, permette anche di risolvere facilmente discontinuità (come cricche) all'interno del corpo solido. Un ulteriore vantaggio della peridinamica, almeno nella formulazione bond-based, è quello di essere facilmente parallelizzabile avendo una dipendenza solo locale.

Si ritiene che accoppiando queste due tecniche si possa ottenere uno strumento che, diversamente da quanto effettuato dalle altre tecniche numeriche, oltre a risolvere problemi di interazione fluido-struttura classici, possa permettere anche di studiare facilmente problemi più particolari, sempre dovuti a interazioni fluido-struttura, come la nascita e la propagazione delle cricche all'interno del corpo solido o l'erosione di corpi immersi. Si ritiene inoltre possibile che lo strumento permetta di studiare le deformazioni massime a cui è soggetto il corpo immerso e nel caso in cui queste siano maggiori delle deformazioni massime ammissibili, sia in grado di valutare il punto in cui avviene la rottura e, addirittura, di valutare la traiettoria dei componenti che si separano dal corpo principale. Ciò potrebbe essere di notevole interesse nel caso di rottura di un componente e ci si voglia assicurare che esso non vada a impattare su altri corpi o nel problema della fratturazione idraulica, ad esempio nel "fracking" petrolifero..

Nel lavoro di tesi, è stato implementato in un codice numerico l'accoppiamento fluido-strutturale a due vie con il metodo descritto, basato su peridinamica e Navier-Stokes con contorni immersi. Tale metodologia rappresenta una novità assoluta dal punto di vista scientifico in quanto non risulta ancora alcuna pubblicazione a riguardo. Il codice numerico è stato positivamente testato in casi semplici per valutarne l'accuratezza. Sono stati quindi analizzati problemi più complessi in cui il fluido impone una grande deformazione alla struttura e si riscontra un mutuo accoppiamento tra fluido e struttura. I risultati ottenuti sono estremamente promettenti e mostrano le grandi potenzialità di questo metodo.

Capitolo 2

Peridinamica

La Peridinamica è una recente teoria del continuo basata su un approccio non locale e formulata con equazioni integrali, questo la rende particolarmente adatta nello studio della propagazione di cricche all'interno di materiali solidi. Infatti, molti metodi comuni basati sulla meccanica del continuo classica sono formulati tramite l'utilizzo di equazioni alle differenze parziali (il caso più comune è il metodo degli Elementi Finiti), le quali richiedono tecniche specifiche nel caso di discontinuità e molte di queste richiedono una conoscenza a priori della direzione di propagazione della cricca. La Peridinamica grazie alla sua formulazione integrale, riesce a superare i limiti delle formulazioni classiche della teoria del continuo, inoltre, nessuna conoscenza pregressa sulla direzione di propagazione della cricca è richiesta, poiché essa è in grado espandersi liberamente rispettando i limiti geometrici e fisici esistenti. La Peridinamica si basa sull'assunzione base che un corpo sia composto da punti materiali che interagiscono con altri punti che si trovano all'interno di una distanza finita chiamata orizzonte (δ). L'interazione viene chiamata bond (legame) e si comporta di fatto come una molla, maggiore è la deformazione che subisce e maggiore è la forza di richiamo che nasce fra i due punti. In questa tesi viene utilizzata la formulazione "bond-base", la quale considera il comportamento di ogni singolo bond indipendente da tutti gli altri.

Questa teoria però presenta dei limiti, prima di tutto la formulazione classica era stata sviluppata per risolvere problemi dinamici, per risolvere problemi statici esistono delle tecniche che introducono smorzamenti (veri o fittizi) che portano il corpo ad assumere una configurazione stabile statica. Inoltre il limite principale della Peridinamica è legato all'efficienza computazionale, infatti, per migliorare la descrizione del corpo, bisognerebbe aumentare i punti che descrivono il corpo e aumentare l'orizzonte (quindi aumentare il numero di punti che influiscono sul nodo considerato), ma ciò non è possibile senza andare ad influire pesantemente sull'efficienza computazionale.

2.1 Equazioni del moto

L'equazione che controlla il moto dei punti assume la forma:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i = \int_{H_i} \mathbf{f}[\mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t), \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i] dV_j + \mathbf{b}(\mathbf{x}_i, t) \quad (2.1)$$

$$\forall \mathbf{x}_j \in H_i \quad (2.2)$$

dove H_i è la regione circolare di raggio δ centrata nel punto \mathbf{x}_i , \mathbf{u} è il campo vettoriale dello spostamento, \mathbf{b} è un vettore di densità di forza volumica, \mathbf{f} viene chiamata funzione di forza a coppie e rappresenta la forza che il punto \mathbf{x}_j esercita sul punto \mathbf{x}_i fig.2.1. Le lettere in grassetto rappresentano vettori. Un punto sopra una lettera rappresenta una derivata prima temporale, mentre due punti rappresenta una derivata seconda temporale.

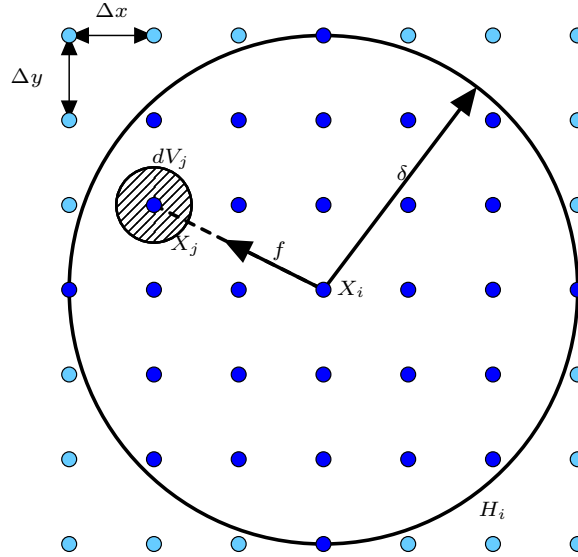


Figura 2.1: orizzonte del punto X_i e rappresentazione della forza f agente tra X_i e X_j

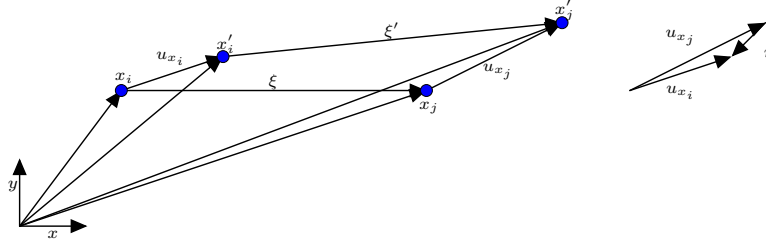
Come accennato prima, il corpo viene schematizzato come un insieme di punti materiali, più il numero dei punti aumenta e più il corpo viene discretizzato meglio, con il numero dei punti che tende all'infinito esso può essere visto come un corpo continuo.

La forza \mathbf{f} agisce lungo la linea congiungente i due punti \mathbf{x}_j e \mathbf{x}_i , perciò non è in grado di produrre nessun momento. Definiamo inoltre:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) \quad (2.4)$$

rispettivamente la posizione relativa iniziale e lo spostamento relativo corrente.


 Figura 2.2: posizione relativa iniziale ξ e spostamento relativo corrente η

La deformazione del bond può essere espressa dalla seguente formula:

$$s = \frac{|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}| - |\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{\xi}|} \quad (2.5)$$

dove $|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}|$ rappresenta la lunghezza del bond deformato mentre $|\boldsymbol{\xi}|$ rappresenta la lunghezza del bond indeformato.

Per la Terza Legge di Newton la funzione di forza \mathbf{f} deve soddisfare la relazione:

$$\mathbf{f}(-\boldsymbol{\eta}, -\boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.6)$$

Un esempio semplice di materiale utilizzato nella descrizione bond-based della peridinamica è chiamato *Prototype Microelastic Brittle* (PMB). Tale materiale è caratterizzato da alcune proprietà simili a quelle delle molle meccaniche:

1. l'allungamento del bond s è il rapporto tra la forza peridinamica \mathbf{f} e la rigidità del bond c , chiamato *costante elastica della molla*
2. il bond si rompe quando il suo allungamento raggiunge il valore limite s_0 , chiamato *stretch critico*. Qualora un bond si rompa, esso non può più essere ripristinato. Si rende, perciò, il bond tempo-dipendente.
3. i bond non possono rompersi a compressione

Per un materiale PMB possiamo perciò calcolare la funzione di forza a coppie \mathbf{f} tramite l'equazione:

$$\mathbf{f} = cs\mu(\xi) \frac{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}|} \quad (2.7)$$

dove c è la rigidità del bond, $\mu(\xi)$ è una funzione scalare tempo-dipendente che tiene conto della storia del bond e assume valore 1 o 0 a seconda dello stato del bond:

$$\begin{cases} \mu(\xi) = 1, & \text{se } s < s_0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.8)$$

Utilizzando considerazioni riguardanti l'energia elastica di deformazioni e considerando di lavorare in una condizione di plane strain, è possibile ricavare un'espressione che permetta il calcolo della rigidezza del bond c :

$$c = \frac{48E}{5\pi\delta^3} \quad (2.9)$$

dove E è il modulo di elasticità del materiale reale.

L'utilizzo della formulazione bond-based ha come conseguenza principale, l'imposizione del coefficiente di Poisson che, nel caso di plane strain, assume un valore costante di $\nu = 0,25$

2.2 Discretizzazione numerica

Per risolvere numericamente l'equazione della peridinamica, si deve, prima di tutto, discretizzare il corpo in una serie di punti chiamati *nodi*: ad ogni viene associato un certo volume, e l'insieme di tutti questi volumi deve ricoprire il volume del corpo iniziale. La distanza fra due nodi vicini viene chiamato *spaziatura dei nodi* ed è indicata con il simbolo Δx . Il nodo in analisi viene chiamato *nodo sorgente*, mentre tutti i nodi che si trovano all'interno dell'orizzonte vengono chiamati come *nodi famiglia* e sono riferiti al nodo sorgente in analisi. Tutti i bond che collegano il nodo sorgente ai nodi famiglia vengono chiamato *bond famiglia* e anch'essi sono riferiti al nodo sorgente in analisi. I *bond famiglia* vengono determinati nella fase iniziale della risoluzione e rimangono costanti, non possono perciò, nascere altri bond, ma possono morire (o meglio rompersi) nel caso in cui lo stretch superi lo stretch limite

L'equazione della peridinamica nella forma discretizzata assume la seguente forma:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_{j=1}^M \mathbf{f}(\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_j^n - \mathbf{x}_i^n)\beta(\Delta x^3) + \mathbf{b}_i^n \quad (2.10)$$

dove i è l'indice del nodo sorgente, e viene mantenuto costante nell'equazione (2.10), j è l'indice del nodo famiglia e può variare da 1 a M (numero massimo di nodi famiglia per quel nodo sorgente), Δx^3 è il volume del nodo sorgente j , n è l'istante temporale e β è il coefficiente di riduzione del volume che verrà spiegato più in dettaglio nella sezione 2.3.

La risoluzione procede con il calcolo della forza a coppie \mathbf{f} tramite le equazioni (2.7) e (2.5), verificando che il bond non sia rotto o danneggiato tramite l'eq.(2.8)

Per l'integrazione temporale viene utilizzato lo stesso schema utilizzato per la parte relativa al metodo dei contorni immersi, ovvero un metodo di Rounge-Kutta di 3° ordine low storage completamente esplicito.

Considerando le equazioni:

$$\frac{d\dot{u}}{dt} = \ddot{u} \quad (2.11)$$

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} \quad (2.12)$$

esse possono essere risolte tramite il metodo numerico citato sopra. Il passo predictor assumerà la forma:

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n(ik)} = \dot{\mathbf{u}}^{n(ik)} + \beta_{ik} dt \cdot \ddot{\mathbf{u}}^{n(ik)} \quad (2.13)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n(ik)} = \mathbf{u}^{n(ik)} + \beta_{ik} dt \cdot \dot{\mathbf{u}}^{n(ik)} \quad (2.14)$$

Mentre il passo corrector assumerà la forma:

$$\dot{\mathbf{u}}^{n(ik)} = \tilde{\mathbf{u}}^{n(ik)-1} + \alpha_{ik} dt \cdot \ddot{\mathbf{u}}^{n(ik)-1} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{u}^{n(ik)} = \tilde{\mathbf{u}}^{n(ik)} + \alpha_{ik} dt \cdot \dot{\mathbf{u}}^{n(ik)} \quad (2.16)$$

dove ik è il sottopasso di Runge-Kutta che si sta risolvendo, può variare tra 0 e 2, $n(ik)$ è l'istante temporale che si sta risolvendo. α e β sono i coefficienti di Runge-Kutta, variano in funzione del sottopasso che si sta risolvendo e assumono i valori indicati nella sezione Il metodo di Runge-Kutta è un metodo esplicito ovvero propaga la soluzione dell'istante n all'istante $n+1$ senza verificare nessun equilibrio. Questo tipo di metodi permettono di aumentare notevolmente le velocità di calcolo, ma richiedono, affinché siano stabili, che il passo temporale Δt utilizzato sia minore del passo massimo. In questo caso, il passo massimo è calcolabile con la seguente formula:

$$\Delta t_{max} = \frac{(|\xi|_{min})}{(c_k)_{max}} \quad (2.17)$$

dove $(|\xi|_{min})$ è la lunghezza minima dei bond, e $(c_k)_{max}$ è la velocità del suono maggiore all'interno del materiale e si calcola come:

$$(c_k)_{max} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.18)$$

Per aumentare la certezza che la soluzione sia stabile e aderente alla realtà, viene utilizzato un $\Delta_t = 0.5\Delta t_{max}$ o minore.

2.3 Coefficiente di riduzione del volume

Come già esposto in precedenza, un nodo appartiene alla famiglia di un nodo sorgente se si trova a una distanza minore o uguale a δ . Il volume associato al nodo verrà quindi conteggiato nell'eq.(2.10) solo se il nodo farà parte della

famiglia. Questa formulazione comporta un ovvio errore facilmente interpretabile grazie alla fig.2.3. La circonferenza nera corrisponde all'orizzonte δ , mentre i punti blu rappresentano i nodi famiglia. Vediamo che si prefigurano due casi: nel primo caso il nodo (denotati con una croce nella figura) non rientra all'interno dell'orizzonte ma una parte del volume associato ad esso sì, poiché il nodo giace all'esterno dell'orizzonte l'intero volume viene ignorato e di conseguenza si ha una stima del volume complessivo minore rispetto a quello reale. Nel secondo caso invece il nodo è un nodo famiglia, ma non l'intero volume associato ad esso ricade nell'orizzonte, in tal caso il volume verrà conteggiato completamente e quindi il volume totale discretizzato sarà maggiore del volume reale. Per limitare ciò si potrebbe pensare di aumentare la risoluzione della griglia, tale approccio può ridurre l'errore ma il problema comunque persiste.

La soluzione risiede nell'utilizzare un coefficiente di riduzione del volume che viene definito come:

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{se } |\xi| \leq \delta - 0.5\Delta x \\ \frac{\delta + 0.5\Delta x - |\xi|}{\Delta x}, & \text{se } \delta - 0.5\Delta x < |\xi| \leq \delta + 0.5\Delta x \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.19)$$

il quale cerca di tener conto della quantità effettiva di volume che viene intercettato dall'orizzonte o, in altri termini, cerca di compensare la sovrastima del volume (corrispondente all'area con il doppio tratteggio) dei nodi famiglia nei bordi con la sottostima dei nodi esterni (corrispondente alla zona con il singolo tratteggio).

2.4 Condizioni al contorno

L'equazione del moto generale eq.(2.1) mostra che non sono necessarie condizioni al contorno naturali. In letteratura, viene spiegato molto dettagliatamente il concetto del perché le condizioni al contorno possano essere applicate attraverso forze di volume \mathbf{b} .

Le condizioni di vincolo vengono imposte vincolando gli spostamenti, velocità e accelerazioni dei nodi ai valori che devono avere al fine di soddisfare quel tipo di vincolo, ad esempio una condizione di incastro viene imposta con $\mathbf{u} = 0, \dot{\mathbf{u}} = 0$.

L'integrazione temporale di $\ddot{\mathbf{u}}$ richiede due condizioni iniziali: una sullo spostamento iniziale e uno sulla sua derivata prima:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (2.20)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad (2.21)$$

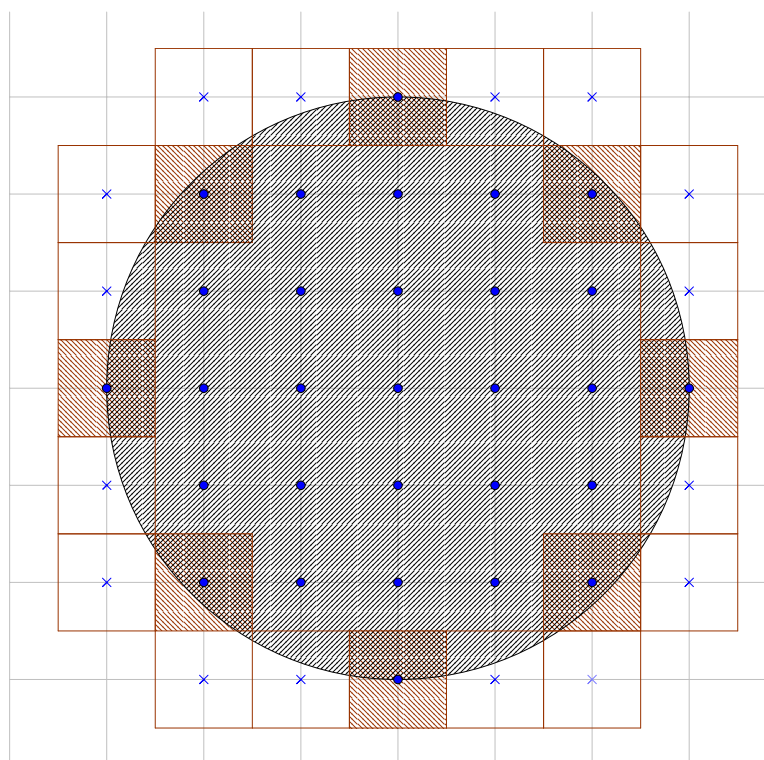


Figura 2.3: Spiegazione grafica del coefficiente di riduzione del volume: la circonferenza nera rappresenta un orizzonte, le croci indicano i nodi esterni all'orizzonte con una parte del volume comunque intercettata (singolo tratteggio nero), i punti pieni indicano i nodi compresi nell'orizzonte, quelli contrassegnati dal doppio tratteggio sono caratterizzati dall'aver una parte del volume esterna all'orizzonte

2.5 Condizioni di carico

In modo analogo alle condizioni al contorno, le condizioni di carico vengono imposte direttamente, imponendo il valore del vettore \mathbf{b} nell'Eq.(2.10) dei nodi su cui agisce il carico.

Capitolo 3

Metodo dei contorni immersi per le equazioni di Navier-Stokes

Il metodo dei contorni immersi è una tecnica molto famosa che permette di simulare flussi bifase o, in generale, permette di simulare il moto di un fluido attorno ad elementi con forma complessa. Il metodo fu sviluppato da Peskin (1972) per simulare i movimenti del cuore e il flusso del sangue nei vasi sanguigni. Da allora numerose modifiche e miglioramenti sono stati apportati al metodo per migliorarne sia l'efficienza che l'accuratezza.

Il metodo è caratterizzato dal fatto che le condizioni di impermeabilità e di aderenza non vengono imposte direttamente ma vengono imposte aggiungendo un termine forzante addizionale nelle vicinanze della superficie del corpo immerso in modo tale che le condizioni vengano di fatto rispettate. In altre parole, conoscendo la velocità della superficie del corpo immerso (nulla, se il corpo è fermo, non nulla, se il corpo è in movimento) è possibile calcolare la forza che bisogna applicare al fluido in modo tale che esso assuma velocità esattamente uguale a quella della superficie, in questo modo si è sicuri di rispettare le condizioni al contorno. Il metodo è inoltre molto vantaggioso nello studio di interazioni fluido-struttura, poiché il termine forzante che viene aggiunto è proprio la forza che il fluido imprime al corpo solido, quindi con lo stesso algoritmo si riesce sia a risolvere il campo fluido che a ricavare le forze scambiate. Lo stesso algoritmo è in grado anche di calcolare la traiettoria di corpi immersi non vincolati, infatti conoscendo le forze che il fluido impone sul corpo è possibile risolvere le equazioni di Newton-Eulero e quindi risolvere la dinamica del corpo, inteso come corpo rigido.

Un ulteriore vantaggio del metodo dei contorni immersi è l'efficienza computazionale, difatti esso si compone di due griglie, una lagrangiana e una euleriana completamente indipendenti fra di loro. La griglia euleriana discre-

tizza l'intero campo fluido ed è fissa nel tempo, mentre la griglia lagrangiana, solidale al corpo immerse, ne descrive la superficie tramite dei punti su cui viene calcolata la velocità che il fluido deve avere. Le due griglie si scambiano informazioni solo tramite una funzione Delta di Dirac la quale ha il compito di interpolare o di distribuire le grandezze fra le due griglie. Questa schematizzazione è efficiente poiché non vi è la necessità di ricreare queste griglie ad ogni istante in cui il corpo si muove, le due griglie continueranno a scambiarsi informazioni indipendentemente dalla posizione reciproca. Di contro abbiamo una perdita di accuratezza dovuto all'errore nell'imporre le condizioni al contorno, ovvero avremo che il corpo non sarà completamente impermeabile oppure ci sarà una condizioni di slip sulla superficie. section

3.1 Equazioni generali

Le equazioni di Navier-Stokes per un fluido incompressibile sono:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1a)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (3.1b)$$

dove \mathbf{u} è la velocità adimensionalizzata, p è la pressione adimensionalizzata, \mathbf{f} è il termine delle forze di volume.

Questo sistema di equazioni viene imposto sull'interno dominio Ω , il quale comprende sia il volume occupato attualmente dal fluido Ω_f che il volume che occupano i N_l che descrivono il contorno del corpo immerso.

Lo scopo del metodo dei contorni immersi è quello di calcolare e di imporre un valore di velocità che permetta di soddisfare le condizioni al contorno nei punti desiderati. Per far ciò possiamo riscrivere l'equazione (3.1b) in questo modo

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \mathbf{rhs}^{n+1/2} + \mathbf{f}^{n+1/2} \quad (3.2)$$

dove il termine $\mathbf{rhs}^{n+1/2}$ raggruppa il termine convettivo, di pressione e viscoso ad un istante di tempo intermedio fra l'istante n e l'istante $n+1$. Esplicitando il termine forzante che imporrà la velocità desiderata si ottiene:

$$\mathbf{f}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{u}_p - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \quad (3.3)$$

dove \mathbf{u}_p è la velocità che si vuole imporre. Tale termine forzante verrà calcolato solo in alcuni punti, e sarà nullo in tutti gli altri. La scelta di questi

punti è stato oggetto di notevoli studi e pubblicazioni, ed è di notevole importanza per la stabilità e l'efficienza del metodo. Uhlmann et al. [[9]] propongono di valutare i termini forzanti solo in corrispondenza dei punti Lagrangiani, perciò possiamo riscrivere (3.3) come:

$$\mathbf{F}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{U}_p - \mathbf{U}^n}{\Delta t} \forall \mathbf{X}_l \quad (3.4)$$

Dove si sono utilizzate le lettere maiuscole per indicare che le grandezze vengono valutate nei punti Lagrangiani \mathbf{X}_l . Utilizzando questo approccio la velocità che si vuole imporre all'interfaccia tra fluido e solido è semplicemente la velocità dell'oggetto solido inteso come corpo rigido:

$$\mathbf{U}_p(\mathbf{X}_l) = \mathbf{u}_c + \boldsymbol{\omega}_c \times (\mathbf{X}_l - \mathbf{x}_c) \quad (3.5)$$

dove $\mathbf{u}_c, \boldsymbol{\omega}_c, \mathbf{x}_c$ sono rispettivamente la velocità traslazione, rotazionale e le coordinate del punto centrale del corpo solido.

Per completare il calcolo dei termini forzanti si deve introdurre una funzione che permetta di correlare le grandezze Lagrangiane e Euleriane ($\mathbf{F}^{1/2}, \mathbf{f}^{1/2}$), tale funzione verrà analizzata nella sezione 3.3.

3.2 Discretizzazione spaziale

Come già esposto precedentemente, il metodo dei contorni immersi impone l'utilizzo di due diverse griglie, una Lagrangiana e una Euleriana (Fig. 3.1) su cui vengono definite le grandezze di interesse. Queste due griglie sono indipendenti una dall'altra e comunicano tra di loro solo attraverso la funzione delta.

La griglia Euleriana consiste in una griglia di tipo cartesiano, fissa nel tempo, composta da nodi $\mathbf{x}_{ijk} = (i, j, k)\Delta x$ uniformemente distribuiti per coprire l'intero dominio Ω (Δx è la dimensione della mesh, mentre gli interi i, j, k sono gli indici della griglia). L'utilizzo di una griglia uniforme è necessaria perchè il processo di interpolazione utilizzato sia coerente.

La griglia Lagrangiana, consiste in N_L punti per ogni corpo solido che si sta analizzando, distribuiti equamente sopra l'interfaccia fluido-solido dei corpi. Tali punti avranno coordinate costanti rispetto un sistema di riferimento solidale ai corpi immersi, di conseguenza, la griglia Lagrangiana sarà solidale ai corpi e si muoverà con essi.

Per calcolare il numero complessivo dei punti Lagrangiani N_L si richiede che ogni punto di controllo abbia un volume che sia equivalente al volume di una griglia Euleriana, ovvero si richiede: $\Delta V_l \approx h^n$ con n il numero di dimensioni nello spazio del problema. Aumentare il numero di punti rispetto a quello che si ottiene con questa imposizione non permette di migliorare la soluzione e aumenta i tempi di calcolo.

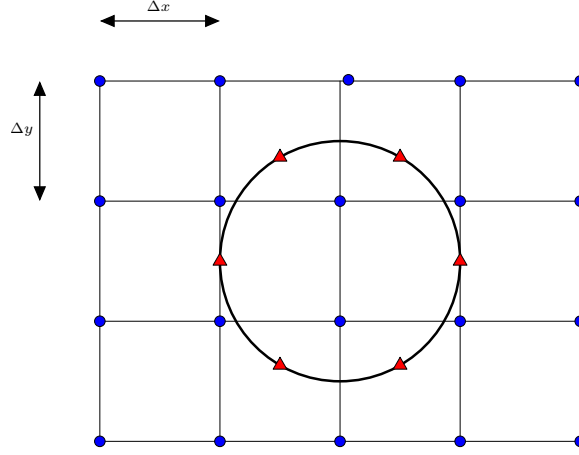


Figura 3.1: griglia lagrangiana (triangoli rossi) e griglia euleriana (punti blu)

Considerando un corpo circolare, definiamo un numero N_L di elementi attorno alla circonferenza che lo delimita. Gli elementi sono settori equiripartiti di una corona circolare con raggio interno e esterno rispettivamente r_1, r_2 . Il raggio reale del corpo corrisponde al raggio del punto intermedio r_c rispetto al raggio interno e esterno perciò $r_c = (r_1 + r_2)/2$. Inoltre si prende la profondità radiale di un elemento uguale alla spaziatura della mesh Δx , $\Delta x = r_2 - r_1$. Tutto ciò ci permette di scrivere che la superficie di un elemento ΔV_l :

$$\delta V_l = \frac{2\pi r_c \Delta x}{N_L} \quad (3.6)$$

Associamo ad ogni elemento descritto sopra un punto Lagrangiano e distribuendoli equamente lungo la circonferenza del corpo. Richiedendo che $\Delta V_l \approx h^n$, si ottiene la seguente condizione per il calcolo del numero complessivo N_L

$$N_L \approx 2\pi \frac{r_c}{\Delta x} \quad (3.7)$$

La situazione si semplifica notevolmente nel caso di corpo rettangolare, è infatti facile dire che $\Delta V_l = \Delta x^2$ e il numero di punti totali si ricava come:

$$N_L = 2 \left(\frac{a}{\Delta x} + \frac{b}{\Delta y} \right) \quad (3.8)$$

con a e b le due dimensioni del rettangolo

3.3 Funzione delta

Una grandezza espressa nel sistema di riferimento Euleriano può essere espressa nel sistema di riferimento Lagrangiano tramite un'interpolazione, mentre

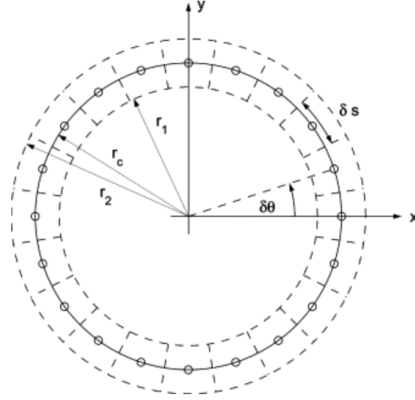


Figura 3.2: schema per la definizione di una particella circolare, tratteggiati sono rappresentati il volume assegnato ad ogni punti lagrangiano(cerchi)

il procedimento inverso avviene tramite un processo di "distribuzione". Entrambe queste operazioni vengono svolte da una funzione delta di Dirac regolarizzata.

$$\mathbf{U}_l = \sum_{ijk} \mathbf{u}_{ijk} \delta_d(\mathbf{x}_{ijk} - \mathbf{X}_l^n) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (3.9)$$

$$\mathbf{f}_{ijk}^{n+1/2} = \sum_l \mathbf{F}_l^{n+1/2} \delta_d(\mathbf{x}_{ijk} - \mathbf{X}_l^n) \Delta V_l \quad (3.10)$$

La forma della funzione delta è di notevole importanza per l'efficienza dell'intero metodo. Numerose sono le espressioni per la funzione delta che si possono trovare in letteratura, in questa tesi viene utilizzata la formulazione di Roma et al. [[7]] con un'ampiezza di tre celle Euleriane poiché permette di preservare alcune proprietà, come spiegato meglio in seguito.

Un'approssimazione bidimensionale della funzione delta di Dirac viene fornita dal prodotto:

$$\delta_d^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta_d^1(x - x_0) \delta_d^1(y - y_0) \quad (3.11)$$

dove

$$\delta_d^1(x - x_0) = \frac{1}{h} \phi\left(\frac{x - x_0}{h}\right) \quad (3.12)$$

è un'approssimazione monodimensionale della funzione delta, con h dimensione della cella euleriana e ϕ funzione continua definita nel seguente modo

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{6}(5 - 3|r| - \sqrt{-3(1 - |r|)^2 + 1}) & \text{se } 0.5 \leq |r| \leq 1.5 \\ \frac{1}{3}(1 + \sqrt{-3r^2 + 1}) & \text{se } |r| \leq 0.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.13)$$

con $r = (x - x_0)/h$.

La funzione ϕ è definita in questo modo poiché deve soddisfare alcune proprietà. In particolare

1. $\phi(r)$ è continua per tutti gli r numeri reali;
2. $\phi(r) = 0, |r| \geq 1.5$;
3. $\sum_i \phi(r - i) = 1, \forall r$;
4. $\sum_i (r - i)\phi(r - i) = 1, \forall r$,
5. $\sum_i \{\phi(r - i)\}^2 = \frac{1}{2}, \forall r$

con $-\infty < i < \infty$

Tramite la proprietà (1) si garantisce che non vi siano "salti" nelle operazioni di interpolazione e di distribuzione. La proprietà (2) garantisce che la funzione delta abbia un raggio finito (in questo caso pari a 3 celle euleriane).

Nell'operazione di distribuzione delle forze la proprietà (3) garantisce la conservazione del momento angolare, mentre le proprietà (3) e (4) insieme garantiscono la conservazione del momento angolare.

Concludendo la proprietà (5) nasce dal considerare come le forze di un punto immerso del contorno influenzano il moto dello stesso, e dal richiedere che tal influenza sia la stessa indipendentemente dalla posizione del punto considerato rispetto alla mesh.

3.4 Moto delle particelle solide

Conoscendo la forza complessiva che agisce su una particella solida è possibile conoscere il moto delle particelle solide poiché esse sono governate dalle equazioni di conservazione della quantità di moto e della quantità di momento angolare.

$$\rho_p V_p \frac{d\mathbf{u}_c}{dt} = \oint_{\partial V} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dA + (\rho_p - \rho_f) V_p \mathbf{g} - V_p \nabla p_e + \mathbf{F}_c \quad (3.14)$$

$$I_p \frac{d\boldsymbol{\omega}_c}{dt} = \oint_{\partial V} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dA + \mathbf{T}_c \quad (3.15)$$

dove ρ_p è la densità del corpo, V_p è il volume del corpo $\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + \mu_f(\nabla u + \nabla u^T)$ è il tensore dello stress per un fluido Newtoniano con \mathbf{I} il tensore unità, e \mathbf{n} è il tensore normale uscente alla superficie ∂V del corpo, \mathbf{g} è l'accelerazione di gravità e I_p è il momento di inerzia del corpo. \mathbf{F}_c e \mathbf{T}_c rappresentano le forze esterne agenti sul sistema.

Si può, perciò correlare la distribuzione di forze nei punti Lagrangiani con le forze e i momenti totali fluidodinamici agenti sulle particelle solide.

In [1] è mostrato come ciò si ottiene. Sostituendo ciò nelle equazioni (3.14) e (3.15) si ottiene

$$\rho_p V_p \frac{d\mathbf{u}_c}{dt} \approx -\rho_f \sum_{l=1}^{N_l} \mathbf{F}_l^{n+1/2} \Delta V_l + \rho_f \frac{d}{dt} \left(\int_{V_p} \mathbf{u} dV \right) + (\rho_p - \rho_f) V_p \mathbf{g} + \mathbf{F}_c^{n+1/2} \quad (3.16)$$

$$I_p \frac{d\omega_c}{dt} \approx -\rho_f \sum_{l=1}^{N_l} \mathbf{r}_l^n \times \mathbf{F}_l^{n+1/2} \Delta V_l + \rho_f \frac{d}{dt} \left(\int_{V_p} \mathbf{r} \times \mathbf{u} dV \right) + \mathbf{T}_c^{n+1/2} \quad (3.17)$$

Risolvendo l'equazioni (3.1a),(3.1b),(3.16),(3.17) è possibile risolvere il campo fluido e il moto delle particelle.

3.5 Multidirect Forcing

L'uso di una funzione delta di Dirac regolarizzata per le operazioni di distribuzione comporta la ripartizione della forza imposta attorno all'interfaccia del corpo solido. Nella fig. 3.3 i cerchi rappresentano il raggio di azione della funzione delta per i due punti Lagrangiani indicati con i triangoli. Si nota che i cerchi si sovrappongono in alcune zone, ciò indica che i punti Euleriano che si trovano nella zona di sovrapposizioni forzano contemporaneamente entrambi i punti Lagrangiani. Di conseguenza la velocità che si vuole imporre al punto Lagrangiano considerato potrebbe non essere ben imposta dal termine forzante aggiuntivo. Per migliorare la soluzione Luo

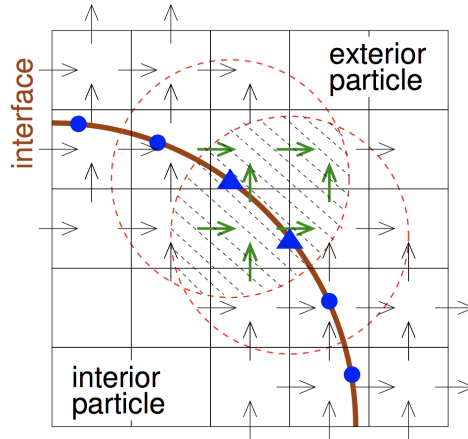


Figura 3.3: zona di sovrapposizione in cui più punti Euleriani, forzano contemporaneamente più punti Lagrangiani

et al.[4] e Kriebitzsch et al. [3] proposero uno schema *multidirect forcing*.

Questo metodo si propone di determina iterativamente il termine forzante aggiuntivo sui punti Euleriani coinvolti, in modo tale che complessivamente essi impongano la velocità desiderata sul punto Lagrangiano considerato.

Di seguito si riporta lo schema:

do $s=1, N_s$

$$\mathbf{U}_l^{**,s-1} = \sum_{ijk} \mathbf{u}_{ijk}^{**,s-1} \delta_d(\mathbf{x}_{ijk} - \mathbf{X}_l^n) \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (3.18a)$$

$$\mathbf{F}_l^{n+1/2,s} = \mathbf{F}_l^{n+1/2,s-1} + \frac{\mathbf{U}_p(\mathbf{X}_l^n) - \mathbf{U}_l^{**,s-1}}{\Delta t}, \quad (3.18b)$$

$$\mathbf{f}_{ijk}^{n+1/2,s} = \sum_l \mathbf{F}_l^{n+1/2,s} \delta_d(\mathbf{x}_{ijk} - \mathbf{X}_l^n) \Delta V_l, \quad (3.18c)$$

$$\mathbf{u}^{**,s} = \mathbf{u}^* + \Delta t \mathbf{f}^{n+1/2,s}, \quad (3.18d)$$

enddo

N_s è il numero totale di iterazioni svolte sulla forza. Breugem et al. [1] hanno dimostrato che il valore massimo di iterazioni può essere scelto a piacere, ma, per contenere il tempo di calcolo, consigliano di mantenere un valore basso. Più precisamente, hanno dimostrato che un valore pari a 2 permette già di ottenere buoni risultati senza gravare troppo sull'efficienza del metodo. Si nota inoltre che il caso con N_s pari a 1 corrisponde al metodo originale di Uhlmann.

Capitolo 4

Validazione del codice

In questo capitolo viene esposto il funzionamento dei singoli codici e come essi siano stati validati. L'intero codice è stato scritto in Fortran90, compilato in doppia precisione. Lo sviluppo del codice è avvenuto in tre step, prima di procedere allo step successivo, si è validato lo step sviluppato tramite esempi di cui si conosce la soluzione analitica:

- il primo step coincide con lo sviluppo di un solutore di Navier-Stokes 2d incompressibile, il quale è stato testato imponendo un moto di Poiseuille e verificando che i risultati forniti dal solutore coincidessero con la soluzione analitica
- il secondo step coincide con l'introduzione nel solutore 2d della parte relativa al metodo dei contorni immersi, in questo caso, si è verificata la bontà del codice, simulando un cilindro immerso in un fluido a basso numero di Re
- in ultimo si è sviluppato, in un modulo a se stante, la parte relativa alla peridinamica, il test case in questo caso consiste in un elemento monodimensionale sottoposto a uno spostamento iniziale e libero di oscillare nel tempo.

Solo in seguito alla certezza che ogni parte a se stante fosse corretta, si è proceduto allo sviluppo del codice accoppiato. Di seguito entreremo nei dettagli dei singoli step e analizzeremo i risultati ottenuti per ognuno di esso.

4.1 Solutore di Navier-Stokes

L'integrazione temporale avviene tramite un metodo esplicito di Runge-Kutta a 3 passi low-storage, mentre l'integrazione spaziale avviene tramite uno schema alle differenze finite.

Per evitare possibili fluttuazioni nella soluzione della velocità del fluido (\mathbf{u}), si utilizza una griglia completamente sfalsata, ovvero la velocità non

viene definita nel nodo (i, j) ma bensì, nel caso di u_x , nella posizione $(i + 1/2, j)$, mentre nel caso di u_y nella posizione $(i, j + 1/2)$ (Fig.4.1). A differenza della velocità, la pressione può essere definita nel nodo (i, j) senza problemi.

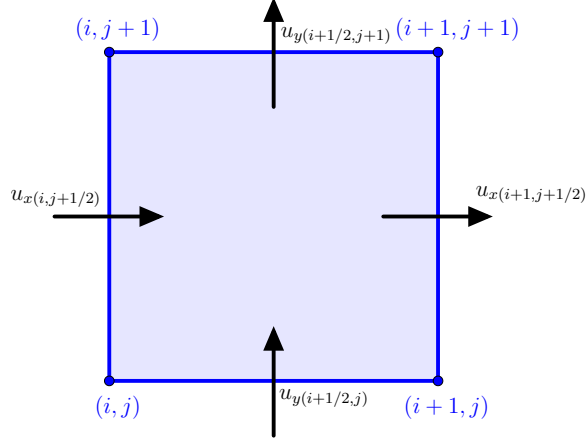


Figura 4.1: griglia sfalsata

4.1.1 Runge-Kutta del 3 ordine low-storage

L'integrazione temporale avviene tramite un metodo di Runge-Kutta completamente esplicito accurato al terzo ordine. Questo metodo ricade nei metodi low-storage in cui le quantità ad ogni sotto-passo dipendono dalla soluzione dei soli due sotto-passi precedenti. Considerando la seguente l'equazione generale temporale:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = RHS[f] \quad (4.1)$$

dove f è una generica quantità, mentre RHS rappresenta il membro destro (right-hand-side) della rispettiva equazione di evoluzione.

Perciò il metodo di Runge-kutta al terzo ordine low-storage può essere scritto come:

$$f_1 = f^n + \alpha_1 Dt RHS[f^n] \quad (4.2)$$

$$f_2 = f_1 + Dt(\alpha_2 RHS[f_1] + \beta_2 RHS[f^n]) \quad (4.3)$$

$$f_3 = f_2 + Dt(\alpha_3 RHS[f_2] + \beta_3 RHS[f_1]) \quad (4.4)$$

$$f^{n+1} = f_3 \quad (4.5)$$

dove i pedici si riferiscono ai substep, mentre gli apici si riferiscono ai time-step fisici. Oppure, in maniera analoga, scrivendo un passo predictor:

$$\tilde{f}^{n(ik)} = f^{n(ik)-1} + \beta_{ik} dt \cdot \dot{f}^{n(ik)-1} \quad (4.6)$$

Tabella 4.1: coefficienti di Rounge-Kutta

indice	1	2	3
α_i	8/15	5/12	3/4
β_i	0	-17/60	-5/12

e uno corrector:

$$f^{n(ik)} = \tilde{f}^{n(ik)} + \alpha_{ik} dt \cdot \dot{f}^{n(ik)} \quad (4.7)$$

dove ik è il sottopasso di Rounge-Kutta che si sta risolvendo, che può variare tra 0 e 2, e $n(ik)$ è l'istante temporale che si sta risolvendo. La tabella 4.1 contiene i coefficienti usati. Il metodo viene definito low-storage perchè utilizza tre differenti campi contemporaneamente per l'evoluzioni di ogni variabile. Ciò è possibile perchè ogni sotto-step è costituito da un metodo di Adams-Bashforth che dipende solo dai due precedenti sotto-step temporali.

4.1.2 Metodo di proiezione

Le equazioni di Navier-Stokes per un fluido incompressibile eq.(3.1a) e eq.(3.1b) possono essere risolte numericamente facilmente utilizzando il metodo delle proiezioni di Chorin. Tale metodo, chiamato anche metodo frazionale, permette in maniera agevole di separare velocità e pressione imponendo l'incompressibilità del fluido.

L'idea principale del metodo è quella di risolvere il problema in due step (da qui il termine metodo frazionale):

- **step 1:** si calcola una velocità intermedia \mathbf{u}^* ignorando il contributo della pressione
- **step 2:** si corregge la velocità intermedia considerando anche l'apporto della pressione, risolvendo un'equazione di Poisson e si ricava il campo di velocità all'istante $n + 1$

Di seguito viene riportato lo schema:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta t(-\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u}^{n+1/2} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2}) \quad (4.8a)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (4.8b)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi \quad (4.8c)$$

La funzione ϕ viene chiamata pressione di correzione ed è il termine che porta il campo intermedio \mathbf{u}^* non a divergenza nulla nel campo finale \mathbf{u}^{n+1} a divergenza nulla.

Per migliorare l'efficienza del metodo si può modificare lo schema tenendo conto anche della pressione ad un istante intermedio. In questo modo il campo intermedio \mathbf{u}^* risente anche della pressione, e la risoluzione dell'equazione di Poisson eq.(4.8b), la più dispendiosa come tempo di calcolo, sarà più rapida.

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta t(-\nabla p^{n-1/2} - \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u}^{n+1/2} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2}) \quad (4.9a)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (4.9b)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi \quad (4.9c)$$

$$p^{n+1/2} = p^{n-1/2} + \phi \quad (4.9d)$$

Nella figura 4.2 viene riportato il diagramma di flusso del solutore di Navier-Stokes

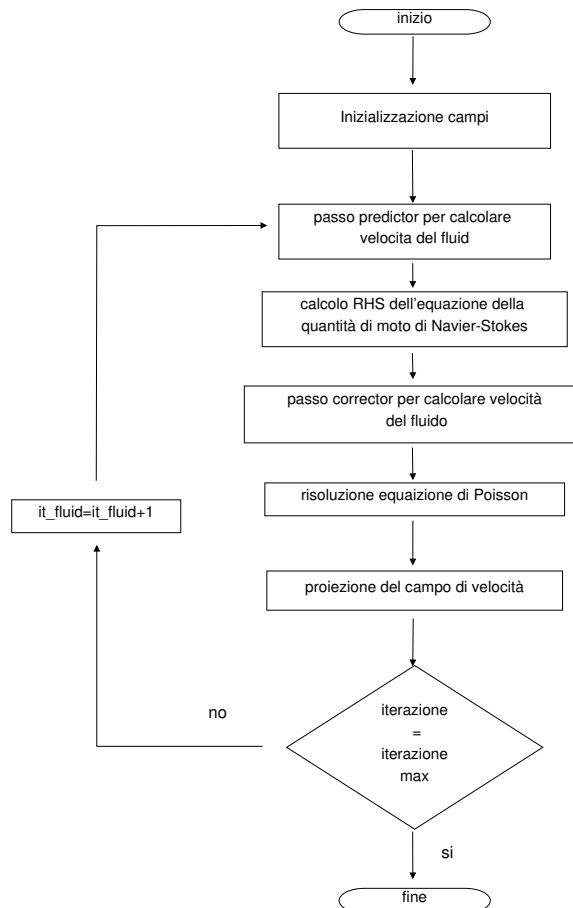


Figura 4.2: Diagramma di flusso del solutore di Navier-Stokes

4.1.3 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno vengono imposte sulla velocità tramite "ghost nodes", ovvero nodi ausiliari che vengono aggiunti all'esterno della griglia reale. (Fig. 4.3) In questo modo condizioni al contorno di Dirichelet $u_{x(i,j)} = 0$ vengono imposte facilmente nel modo seguente:

$$u_{x(i,j)} = \frac{u_{x(i+1/2,j)} + u_{x(i-1/2,j)}}{2} = 0 \implies u_{x(i+1/2,j)} = -u_{x(i-1/2,j)} \quad (4.10)$$

oppure condizioni al contorno di Neumann $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{u_{x(i+1/2,j)} - u_{x(i-1/2,j)}}{\Delta x} = 0 \implies u_{x(i+1/2,j)} = u_{x(i-1/2,j)} \quad (4.11)$$

Le condizioni iniziali vengono imposte sulla velocità imponendo ai nodi la velocità che devono avere, ad esempio: $u_{x(i+1/2,j)} = c$.

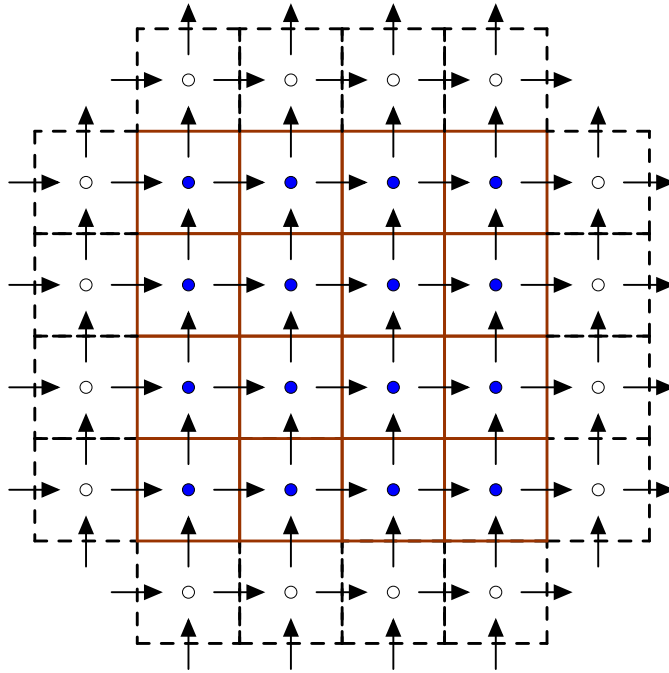


Figura 4.3: le linee tratteggiate rappresentano i ghost nodes, mentre le linee continue rappresentano i nodi reali e l'intero dominio fluido

In modo analogo si possono imporre condizioni di Neumann per la pressione:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p(i,j) - p(i-1,j)}{\Delta x} = 0 \implies p(i,j) = p(i-1,j) \quad (4.12)$$

o condizioni di Dirichelet $p(i,j) = 0$ imponendole direttamente sui nodi interessati.

4.1.4 Moto di Poiseuille

Il moto di Poiseuille è una delle poche semplici soluzioni analitiche delle equazioni di Navier-Stokes. Consideriamo il moto laminare di un fluido incompressibile all'interno di un canale di lunghezza indefinita. Utilizzando un sistema di riferimento in cui l'asse x è lungo la direzione del canale, e l'asse y perpendicolare ad esso, si ricava facilmente che l'unica componente della velocità diversa da zero è la componente u lungo l'asse x e si ricava che è funzione solo di y ($u = u(y)$). Si ricava inoltre che il moto è forzato dal gradiente di pressione lungo l'asse x e che l'equazione che permette di ricavare la velocità è la seguente:

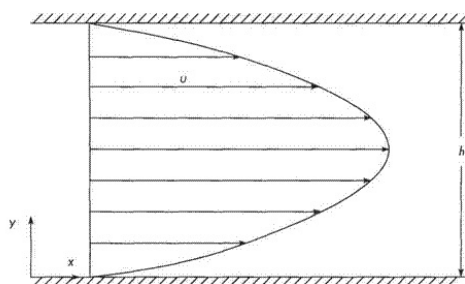


Figura 4.4: schematizzazione del moto di Poiseuille

$$u(y) = -\frac{Re}{2} \frac{\partial p}{\partial x} y(1-y) \quad (4.13)$$

scritta in forma adimensionale.

Quello che si nota, è che il profilo di velocità ha un andamento parabolico lungo la direzione y , e tale andamento rimane immutato per tutta la lunghezza del canale. Ragionando in modo inverso, si può dire che dando al canale un ingresso parabolico, tale profilo sarà mantenuto costante per tutta la lunghezza del canale e per ogni istante temporale. Quello che è stato effettuato per verificare che il solutore fosse corretto, è stato proprio controllare che il profilo parabolico in ingresso rimanesse costante (a meno della precisione del metodo) per ogni iterazione. Si è impostata una simulazione con i seguenti parametri:

- Lunghezza del canale lungo l'asse x : $Lx = 20$
- Lunghezza del canale lungo l'asse y : $Ly = 1$
- Numero di punti utilizzati lungo la direzione x : $nx = 100$
- Numero di punti utilizzati lungo la direzione y : $ny = 40$
- passo temporale $Dt = 10^{-5}$
- Numero di Reynolds $Re = 100$

- profilo di velocità in ingresso parabolica con velocità media U_0

Il profilo di velocità teorico viene confrontato con il profilo di velocità per $x = 15.1$ ottenuto dalla simulazione nella Fig.4.5. Notiamo che l'andamento simulato ricalca molto fedelmente il profilo teorico, solo nelle zone vicine alle pareti si ha un leggero scostamento tra le due soluzioni. Si è scelto di confrontare il profilo teorico con un profilo non nella zona terminale poiché tale zona è piuttosto delicata e potrebbe fornire risultati poco significativi al fine della validazione.

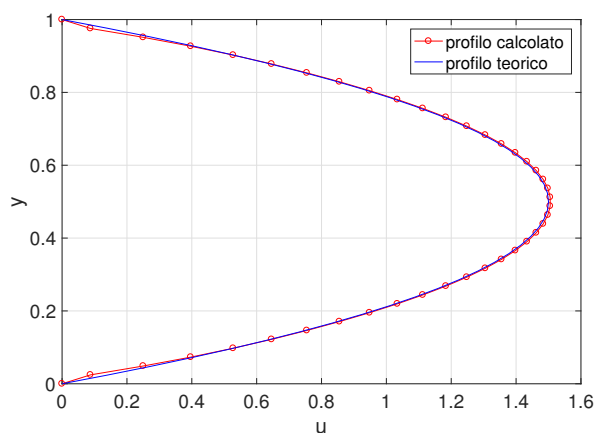


Figura 4.5: Confronto tra profilo di velocità teorico e quello ottenuto dalle simulazioni.

4.2 Modulo sul metodo dei contorni immersi

Il modulo relativo al metodo dei contorni immersi si innesta direttamente sul solutore di Navier-Stokes. Viene inserito dopo il calcolo del passo corrector per la velocità e prima della risoluzione dell'equazione di Poisson e della proiezione del campo di velocità. Viene, inoltre, utilizzato lo schema multidirect force per migliorare la soluzione. Nella Fig. 4.6 viene riportata il diagramma di flusso del solo modulo dei contorni immersi implementato con lo schema multi-direct force, sottolineando come si implementa all'interno del solutore di Navier-Stokes.

4.2.1 Cilindro stazionario a basso numero di Re

Per verificare la bontà del modulo dei contorni immersi si è simulata la presenza di un cilindro stazionario in un canale a $Re = 40$ e $Re = 50$, si è poi calcolato il coefficiente di Drag C_d e si sono confrontato i valori ricavati con valori trovati in letteratura nelle medesime condizioni. Il flusso

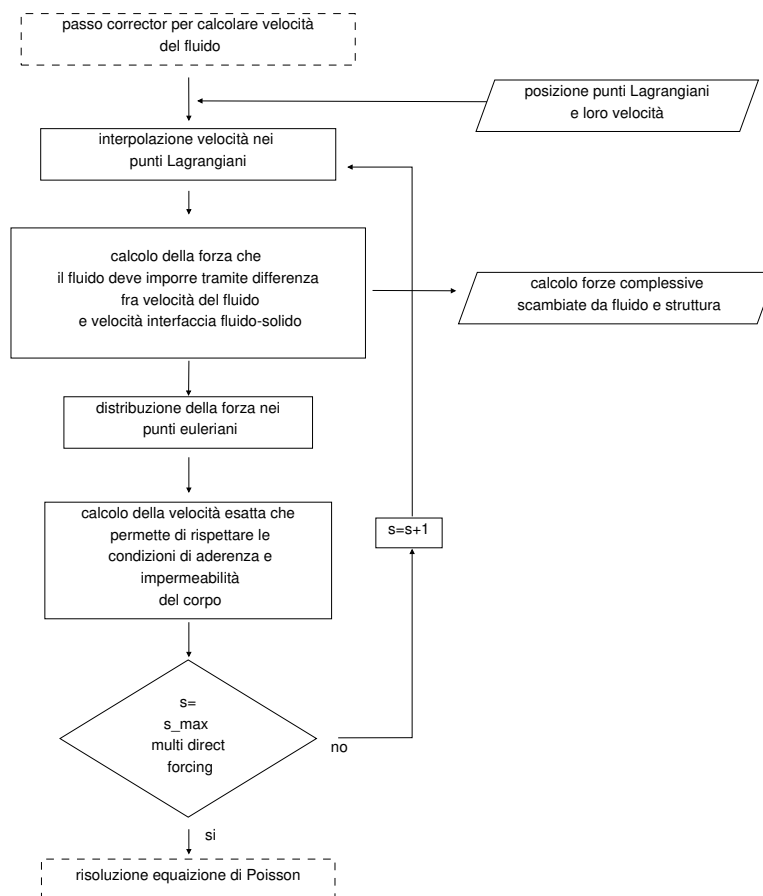


Figura 4.6: Diagramma di flusso del solo modulo dei contorni immersi. I passaggi tratteggiati sono i punti di innesto sul solutore di Navier-Stokes

attorno a un cilindro a questi valori di Reynolds è caratterizzato dall'essere stazionario. Si avrà una zona di separazione del fluido a valle del corpo che rimarrà attaccata al corpo.

Si è impostata una simulazione con i seguenti parametri:

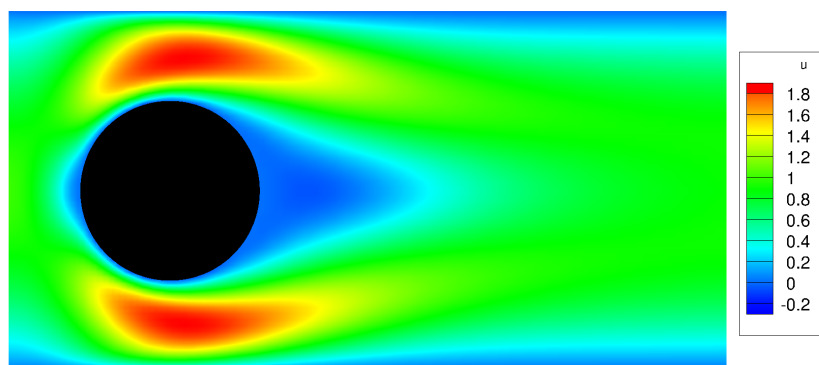
- Lunghezza del canale lungo l'asse x : $Lx = 4$
- Lunghezza del canale lungo l'asse y : $Ly = 1$
- Numero di punti utilizzati lungo la direzione x : $nx = 120$
- Numero di punti utilizzati lungo la direzione y : $ny = 60$
- Diametro del cilindro $D = 1$
- passo temporale $Dt = 10^{-2}$
- Numero di Reynolds $Re = 50$

- Profilo parabolico della velocità in ingresso, con velocità massima = U_0
- Condizioni di aderenza e impermeabilità sulle pareti

Nella Fig.4.7 viene paragonato l'andamento teorico (con $D/H=0.9$) con quello trovato dalla simulazione. Si nota come l'andamento simulato approssimi bene l'andamento previsto dalla teoria.



(a) Campo di moto teorico avente $D/H=0.9$



(b) Campo di moto simulato

Figura 4.7: Confronto tra campo di moto teorico e simulato

Il coefficiente di Drag è definito come:

$$Cd = \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho_f D U_0^2} \quad (4.14)$$

ed funzione sia del numero di Reynolds, sia dalla conformazione geometrica. Numerosi articoli sono disponibili in letteratura, i quali calcolano il coefficiente di Drag per le varie configurazioni e per i vari numeri di Reynolds. La Fig.4.8 estratta da [8], permette di ricavare il coefficiente di Drag in funzione del numero di Reynolds e del coefficiente di bloccaggio (D/H).

La Tab.4.2 riporta i risultati ottenuti per $Re=40$ e $Re=50$ comparati con i dati ricavabili dalla Fig.4.8. Notiamo che i risultati sono leggermente discordanti, ciò è principalmente dovuto ai limiti della versione del metodo dei contorni immersi utilizzata. L'utilizzo della funzione delta interpolante di Roma [7] con raggio d'azione di 3 mesh euleriane, di fatto rende il

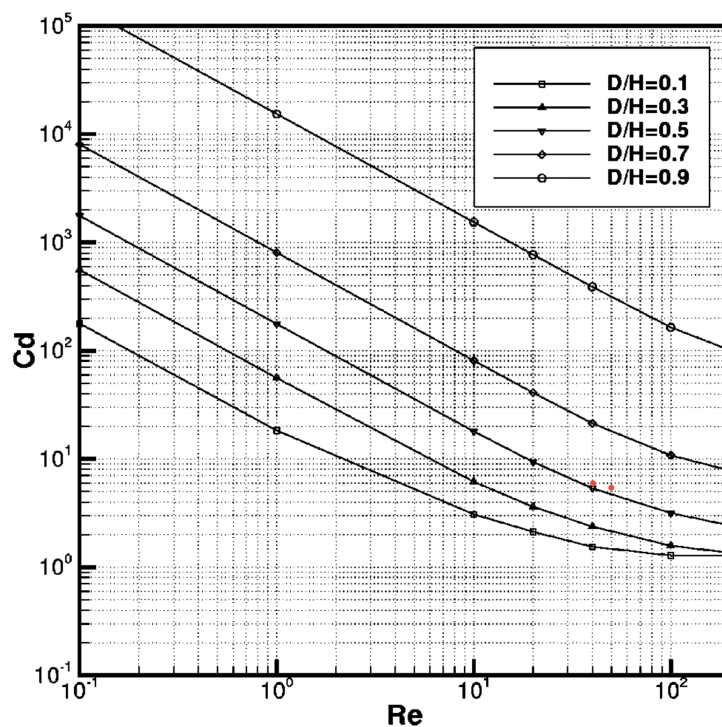


Figura 4.8: Coefficiente di drag in funzione del numero di Reynold e del coefficiente di bloccaggio(D/H). In rosso i risultati ottenuti dalle simulazioni.

Tabella 4.2: confronto tra coefficienti di Drag

Re	40	50
C_d di riferimento	~ 5.5	~ 5
C_d calcolato	6.00	5.55

corpo leggermente più grande. Questo si ripercuote in questa simulazione aumentando leggermente il diametro del cilindro e quindi il coefficiente di bloccaggio, portando a stimare un C_d leggermente più alto. Per rimediare a questo errore Breughem [1] propone di utilizzare un raggio di ritrazione nella definizione del diametro, in modo da compensare la sovrastima effettuata dalla funzione interpolante.

4.3 Solutore peridinamico

La Fig.4.9 riporta il diagramma di flusso del solo modulo peridinamico, mettendo in risalto quelli che sono gli input e gli output del modulo.

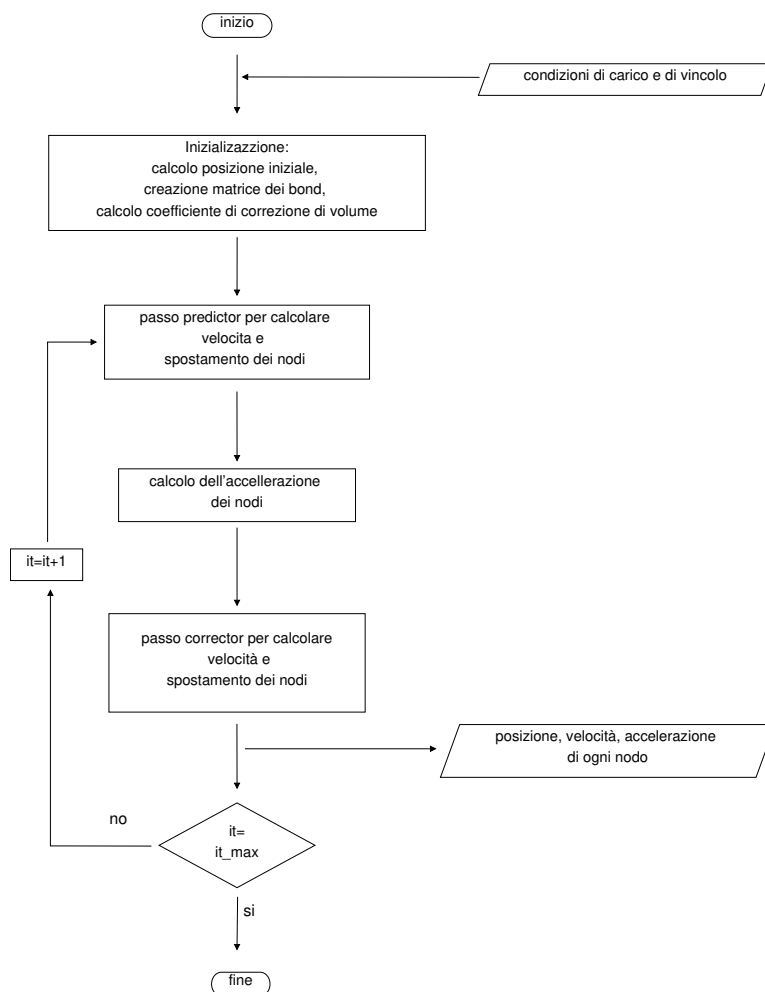


Figura 4.9: Diagramma di flusso del modulo relativo alla peridinamica

4.3.1 Benchmark 1d

Come test case per il modulo peridinamico si è utilizzato l'esempio proposto da [5] il quale consiste in un elemento 1D, sottoposto a una deformazione iniziale

$$\mathbf{u}_k = \epsilon \mathbf{x}_k \tag{4.15}$$

poiché vincolato ad un'estremità, per $t > 0$ l'elemento inizia a oscillare lungo la sua direzione e continuerà per un tempo indefinito. In questo caso ci si è assicurati che lo spostamento massimo e la frequenza ricavata dal solutore coincidano con i risultati teorici.

Analiticamente si ricava che lo spostamento dell'elemento è previsto dalla

seguente equazione:

$$u_x(x, t) = \frac{8\epsilon L}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} t\right) \quad (4.16)$$

La simulazione viene impostata con i seguenti parametri:

- Lunghezza dell'elemento $Lx = 1$ m
- Larghezza dell'elemento $Ly = 0.001$ m
- Numero di punti utilizzati lungo la direzione x : $nx = 1000$
- Numero di punti utilizzati lungo la direzione y : $ny = 1$
- passo temporale $Dt = 1.94598 \cdot 10^{-7}$ s
- Volume associato ad ogni punto $DV = 1 \cdot 10^{-9}$ m
- Modulo di Young $E = 200$ GPa
- densità dell'elemento $\rho = 7840$ kg m⁻³

Nella Fig.4.10 vengono confrontati gli spostamenti teorici e gli spostamenti ricavati dal solutore per il punto con $x = 0.5L$ dell'elemento.

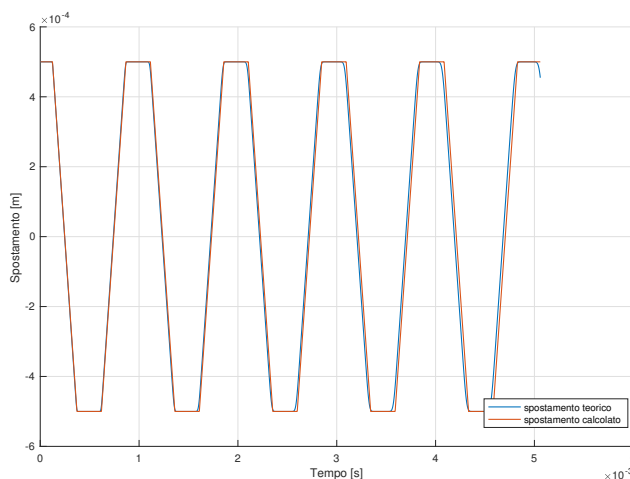


Figura 4.10: Confronto tra soluzione teorica e soluzione numerica per $x = 0.5L$

Quello che si nota dalla Fig.4.10 è come i dati ricavati dal solutore siano in accordo con quelli previsti teoricamente, almeno per tempi di integrazione contenuti. Infatti si nota che le due soluzioni tendano ad allontanarsi per t crescenti, ciò è dovuto all'utilizzo di un solutore esplicito che, non verificando l'equilibrio, non assicura che ogni istante temporale sia corretto.

Capitolo 5

Accoppiamento Metodo dei contorni immersi e Peridinamica

Il codice svolge separatamente i due blocchi relativi alla peridinamica e al metodo dei contorni immersi. Questi due blocchi sono completamente indipendenti e scambiano fra di loro informazioni di carichi applicati dal fluido e posizione istantanea dei punti Lagrangiani.

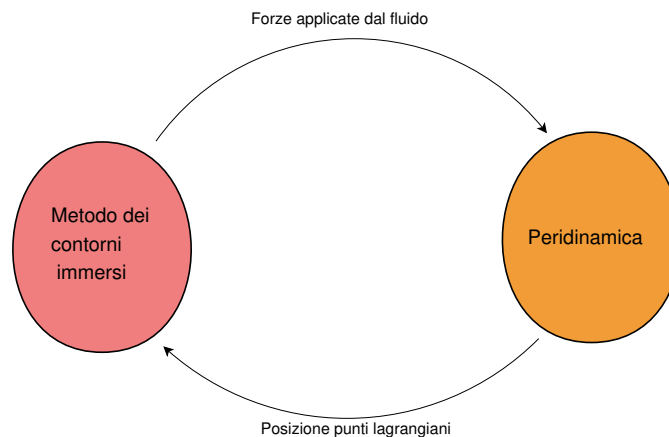


Figura 5.1: blocchi principali e loro interazioni

Nella Fig.5.2 viene riportato il diagramma di flusso schematizzato dell'intero codice. Tramite questo diagramma è possibile comprendere come i due blocchi dialoghino fra di loro.

Lo schema evidenzia bene come le forze calcolate dal modulo fluidodinamico, le quali sono funzioni del campo di velocità del fluido e dalla posizione istantanea e dalla velocità dei punti Lagrangiani, vengano calcolate dal blocco fluidodinamico e date come ingresso al blocco peridinamico. Allo stesso

modo, si nota molto bene come la posizione dei punti Lagrangiani vengano calcolate appena prima di risolvere il modulo fluidodinamico.

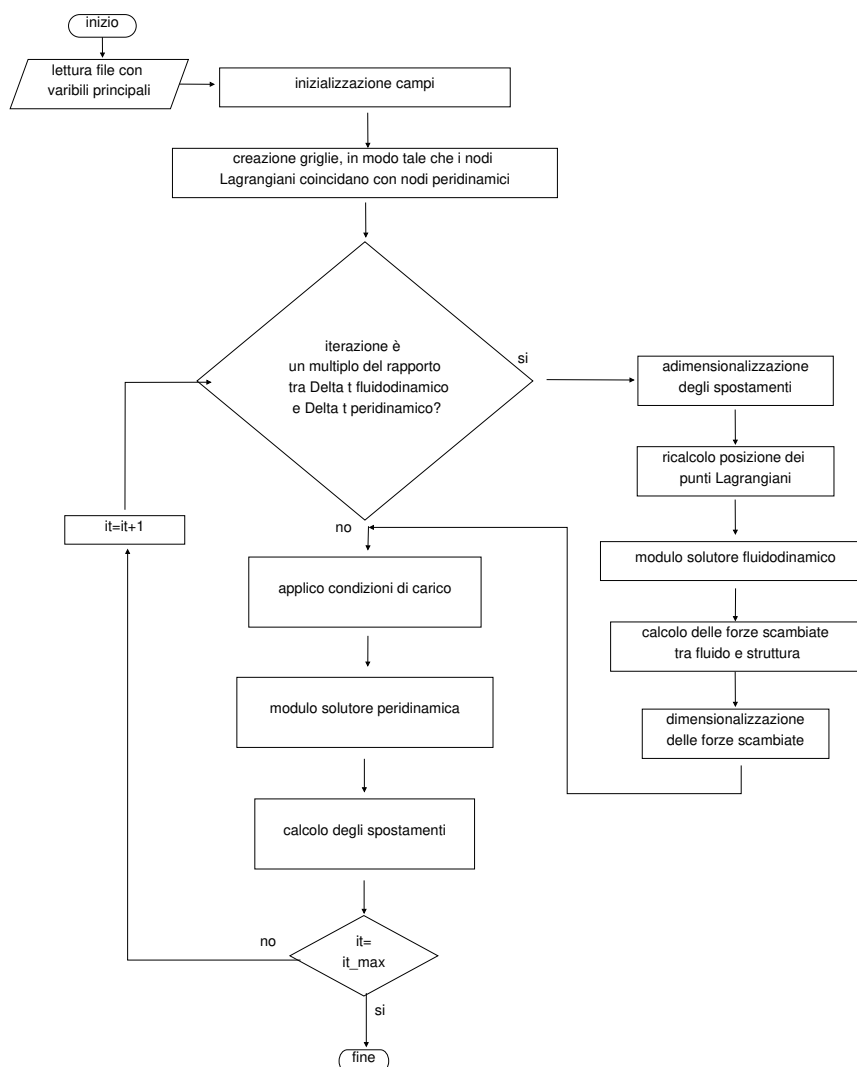


Figura 5.2: diagramma di flusso generale del codice

Bisogna però porre molta attenzione nel far dialogare i due moduli: innanzitutto bisogna tenere a mente che le equazioni di Navier-Stokes sono state risolte in maniera adimensionalizzata poiché, per una serie di motivi, ciò è più agevole, mentre le equazioni della Peridinamica vengono risolte in forma dimensionale. Questa differenza di formulazione porta i due moduli a non poter scambiarsi informazioni direttamente, e vi è la necessità di introdurre un fattore dimensionalizzante o adimensionalizzante quando le informazioni vengono scambiate tra di essi.

In secondo luogo bisogna valutare con quale frequenza i due moduli deb-

bano dialogare fra di loro, in linea generale i due moduli andrebbero richiamati sempre contemporaneamente, in questo modo si è sicuri di risolvere in modo adeguato il problema e di accoppiarlo correttamente. Questa soluzione però, non è la preferibile, poiché richiamare contemporaneamente entrambi i moduli rischia di incidere notevolmente sull'efficienza dell'intero codice. Così si preferisce richiamare i due moduli con frequenze diverse, ma utilizzare questa strategia equivale a considerare che il corpo si muova per stati di quasi equilibrio e ciò potrebbe non essere vero. In tal caso si hanno due soluzioni, o utilizzare la via teoricamente preferibile, ovvero richiamare insieme i due moduli, oppure aggiungere un coefficiente di smorzamento legato alla velocità di spostamento dei punti peridinamici nell'eq.(2.10) in modo tale che diventi la (5.1), in questo modo si aiuta il corpo a deformarsi per stati di equilibrio.

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_{j=1}^M \mathbf{f}(\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_j^n - \mathbf{x}_i^n) \beta(\Delta x^3) + c \dot{\mathbf{u}}_i^n + \mathbf{b}_i^n \quad (5.1)$$

Si intuisce perciò come la scelta di queste frequenze non è di semplice risoluzione, bisogna capire qual'è la scala temporale del fenomeno dominante e adeguare i moduli ad essa. Inoltre, bisogna anche sapere a quali fenomeni si è interessati. Ad esempio in un codice incompressibile (come quello sviluppato qui) non vengono risolte le equazioni di propagazioni delle onde meccaniche nel fluido, di conseguenza non ha senso risolvere vibrazioni ad alte frequenza del solido che possono essere trasmesse al fluido, poiché queste non vengono risolte nel fluido. In tal caso bisogna introdurre un sistema di filtraggio che elimini le vibrazioni ad alta frequenza.

5.1 Trasmissione dei carichi

La trasmissione dei carichi fra campo fluido e struttura non è di immediata soluzione. Riuscire a ricavare uno sistema equivalente di forze da applicare alla griglia peridinamica, partendo da un sistema di forze applicato a una griglia lagrangiana, non è banale e richiede uno studio approfondito e dedicato.

Il problema può però essere semplificato notevolmente scegliendo prima di tutto una geometria del corpo favorevole, e in seguito una posizione relativa fra griglia lagrangiana e peridinamica adeguata (Fig.5.3). Infatti, facendo coincidere esattamente i punti lagrangiani con i nodi della griglia peridinamica, tutto il carico agente su un nodo lagrangiano si scarica completamente sul nodo coincidente peridinamico, facendo diventare banale la trasmissione di carichi tra le due griglie.

Va ricordato però che, sia l'equazione della peridinamica che le equazioni di Navier-Stokes, contengono termini forzanti espressi come densità di forza

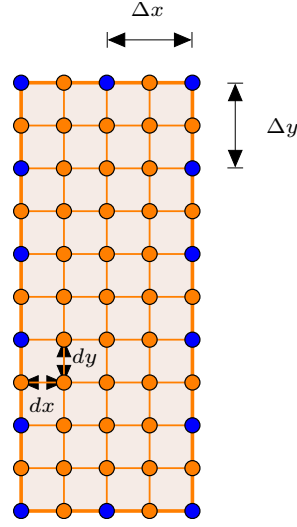


Figura 5.3: Scelta favorevole del corpo immerso e delle griglie. I punti blu rappresentano i nodi lagrangiani mentre i punti arancioni indicano i nodi peridinamici

riferita per unità di volume, ma l'unità di volume per la peridinamica è diversa da quella utilizzata nella fluidodinamica. Detto ciò possiamo scrivere:

$$\mathbf{F}_l dV_l = \mathbf{b}_i dV_p \implies \mathbf{b}_i = \mathbf{F}_l \frac{dV_l}{dV_i} \quad (5.2)$$

Dove nel caso 2D $dV_l = dx \cdot dy$ e $dV_p = \Delta x \cdot \Delta y$

Per ricavare il coefficiente che dimensionalizza le forze si parte dall'equazioni di Navier-Stokes dimensionalizzata:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial t_d} + \nabla \cdot \mathbf{u}_d \mathbf{u}_d \right) = -\frac{\nabla p_d}{\rho_f} + \nu_f \nabla^2 \mathbf{u}_d + \mathbf{f}_d \quad (5.3)$$

dove il pedice d rappresenta grandezze dimensionalizzate, ρ_f e ν_f sono rispettivamente la densità e la viscosità del fluido. Essa diventa adimensionalizzata estraendo le grandezze caratteristiche (contraddistinte con il pedice 0):

$$\left(\frac{L_0}{T_0} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{V_0^2}{L_0} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} \right) = -\frac{p_0}{\rho_0 L_0} \nabla p + \frac{\nu V_0}{L_0^2} \nabla^2 \mathbf{u} + F_0 \mathbf{f} \quad (5.4)$$

ricordando che:

$$T_0 = \frac{L_0}{V_0} \quad (5.5)$$

$$p_0 = \rho_0 V_0^2 \quad (5.6)$$

si ricava

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} \right) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{F_0 L_0}{V_0^2} \mathbf{f} \quad (5.7)$$

Confrontando l'espressione (5.7) con l'eq di Navier-Stokes adimensionalizzata risolta nel modulo IBM (Eq. (3.1b)), e ricordando che il termine \mathbf{f} rappresenta un'accelerazione, si ricava il coefficiente:

$$f^* = \rho_f \frac{V_0^2}{L_0} \quad (5.8)$$

Perciò la relazione di passaggio sarà la seguente:

$$\mathbf{F}_l = f^* \mathbf{b}_i \quad (5.9)$$

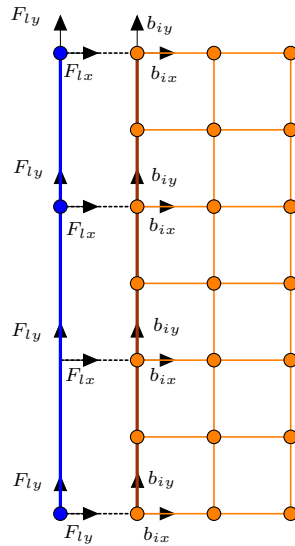


Figura 5.4: Trasferimento dei carichi tra le due griglie. La linea blu rappresenta l'interfaccia fluido-solido. Le due griglie sono sfalsate solo per chiarezza grafica

5.2 Trasmissione degli spostamenti

Anche le informazioni relative allo spostamento calcolati nella parte peridinamica non sono facilmente trasmissibili alla griglia lagrangiana in generale. Nello stesso modo però, l'utilizzo di un corpo rettangolare, con le griglie sovrapposte permette di risolvere il problema in maniera relativamente semplice. Lo spostamento dei punti lagrangiani del corpo sarà uguale allo spostamento dei punti peridinamici corrispondenti.

$$\Delta \mathbf{X}_l = \mathbf{u}_i \quad (5.10)$$

In questo caso il coefficiente adimensionalizzante è facilmente ricavabile e permette di ottenere le seguenti relazioni di passaggio:

$$\Delta \mathbf{X}_l = \frac{\mathbf{u}_i}{L_0} \quad (5.11)$$

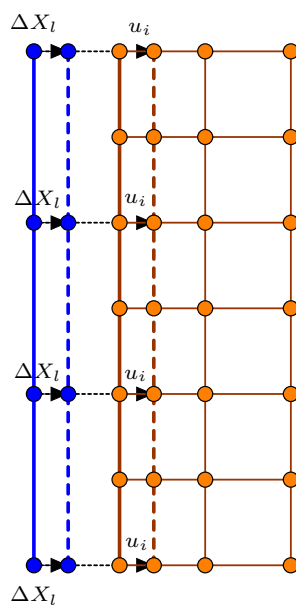


Figura 5.5: Trasferimento degli spostamenti tra le due griglie. La linea blu rappresenta l'interfaccia fluido-solido. Le due griglie sono sfalsate solo per chiarezza grafica

Capitolo 6

Simulazioni

In questo capitolo verranno svolte alcune simulazioni per dimostrare le capacità del codice sviluppato, verranno poi discussi i risultati mettendo in luce punti di forza e punti deboli del lavoro svolto. Tutte le simulazioni sono basate sulla stessa configurazione geometrica, varieranno per la scelta del numero di Reynolds e del coefficiente di smorzamento.

6.1 Configurazione geometrica

Come già detto, la configurazione geometrica simulata è la stessa per tutte le simulazioni svolte. Nello specifico si tratta di una simulazione 2D relativo ad un diaframma, simmetrico rispetto l'asse x , asse di moto del fluido. La proprietà di simmetria ci permette di simulare solo metà del campo (Fig. 6.1).

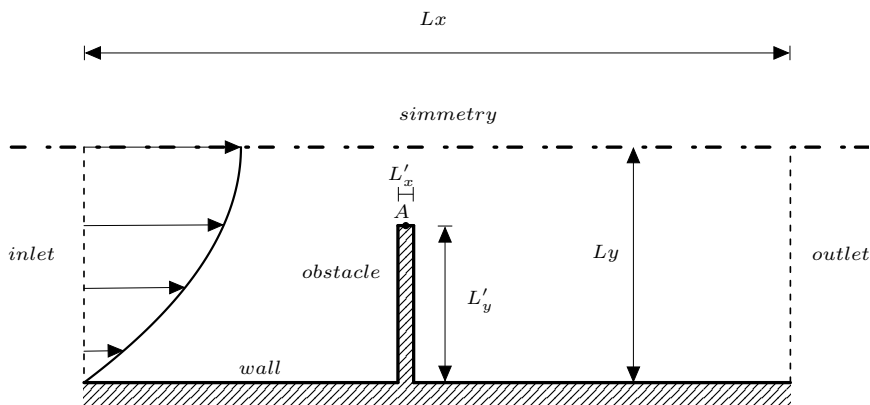


Figura 6.1: schematizzazione geometrica delle simulazioni

La griglia fluida viene estesa per tutto il canale compreso il corpo solido, mentre la griglia peridynamica è estesa solo al corpo solido. Come descritto nel capitolo precedente la griglia Lagrangiana viene creata in modo tale

che abbia i nodi coincidenti con la griglia peridinamica (nella Fig. 6.2a un dettaglio delle due griglie, mentre nella Fig. 6.2b un dettaglio della griglia peridinamica e della griglia euleriana fluidodinamica).

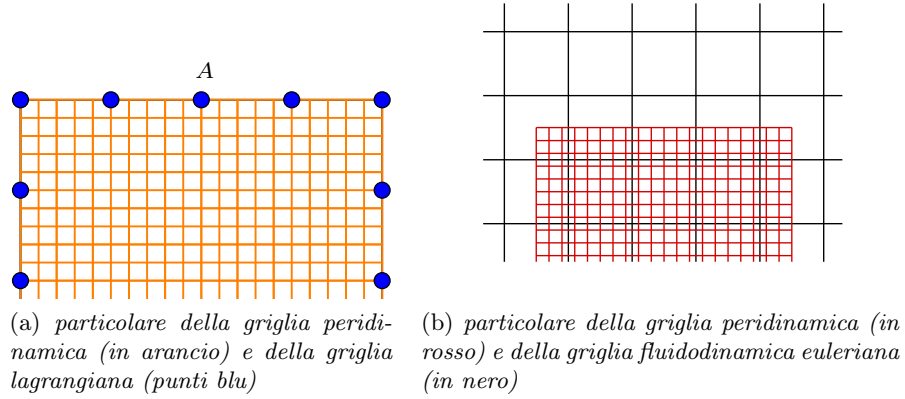


Figura 6.2: Particolari delle griglie utilizzate nelle simulazioni

I parametri generali impostati per le simulazioni sono:

- Lunghezza adimensionale del canale $Lx = 4.5$ m
- Semi-larghezza adimensionale del canale $Ly = 1.5$ m
- Numero di punti fluidi utilizzati lungo la direzione x : $nx = 180$
- Numero di punti fluidi utilizzati lungo la direzione y : $ny = 60$
- Passo temporale fluidodinamico $Dt_f = 3 \cdot 10^{-3}$ s
- Densità del fluido $\rho_f = 1000$ kg m⁻³
- Lunghezza caratteristica $L_0 = 10^{-2}$ m
- Velocità caratteristica $U_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ m
- Numero di punti Lagrangiani $N_l = 44$
- Altezza del diaframma $L'_x = 10^{-2}$ m
- Larghezza del diaframma $L'_y = 10^{-3}$ m
- Numero di punti peridinamici lungo la direzione x : $nx_p = 20$
- Numero di punti peridinamici lungo la direzione y : $ny_p = 200$
- Passo temporale fluidodinamico $Dt_f = 3 \cdot 10^{-5}$ s
- Rapporto tra orizzonte e passo $m = 3$

- Volume associato ad ogni punto perid dinamico $DV = 1 \cdot 10^{-8} \text{m}$
- Modulo di Young del solido $E = 73.4 \cdot 10^2 \text{Pa}$
- Densità del solido $\rho = 2440 \text{kg m}^{-3}$

La viscosità cinematica del fluido ν_f si ricava dalla definizione di numero di Reynolds:

$$Re = \frac{L_0 U_0}{\nu_f} \implies \nu_f = \frac{U_0 L_0}{Re} \quad (6.1)$$

Essa viene variata al variare di Re in modo da conservare immutati la velocità e la lunghezza caratteristica. I parametri non menzionati variano da simulazione a simulazione.

Prima di utilizzare il codice accoppiato, la soluzione viene inizializzata, ovvero si utilizza il solo modulo fluidodinamico per calcolare la soluzione stazionaria (considerando il corpo infinitamente rigido). Partendo da questa soluzione, il codice accoppiato calcola deformazioni del corpo e conseguente campo fluido.

6.2 Influenza del coefficiente di smorzamento del materiale

Per studiare l'influenza del coefficiente di smorzamento del materiale sulla soluzione, si è impostata una simulazione avente tutti i parametri esposti precedentemente e numero di Reynolds costante pari a 125. Sono state svolte 3 simulazioni differenti aventi rispettivamente: $c = 10^5 \text{N s m}^{-1}$, $c = 10^4 \text{N s m}^{-1}$, $c = 10^6 \text{N s m}^{-1}$. La fase di inizializzazione, essendo indipendente dal coefficiente di smorzamento del materiale, è uguale per tutte le simulazioni.

Nelle Fig. 6.3 è riportato il campo di velocità lungo x e la deformata del solido per vari istanti temporali, mentre nelle Fig. 6.4 è riportato il confronto della deformata del corpo a vari istanti di tempo al variare del coefficiente di smorzamento. La Fig. 6.5a riporta in un unico diagramma lo spostamento del punto A in funzione del tempo per le varie simulazioni, mentre la Fig. 6.5b è un ingrandimento della Fig. 6.5a per visualizzare meglio le micro-oscillazioni residue.

La prima cosa che si nota studiando la Fig. 6.5a è che la condizione di equilibrio per le tre simulazioni è la stessa, perciò essa è indipendente dal coefficiente di smorzamento, esattamente come predetto dalla teoria. Notiamo inoltre che la differenza principale fra i tre casi è la modalità con cui si raggiunge l'equilibrio: nel primo caso si ha solo una piccola oscillazione intorno all'equilibrio, nel secondo caso le oscillazioni sono caratterizzate

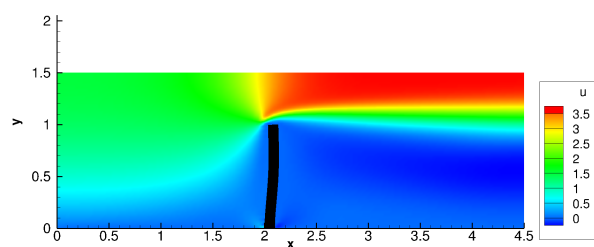
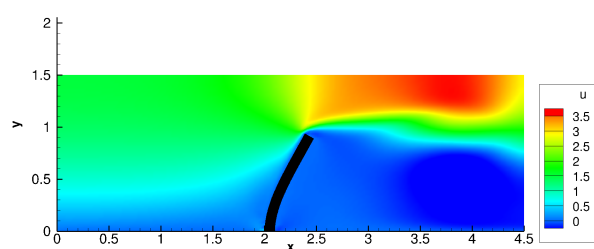
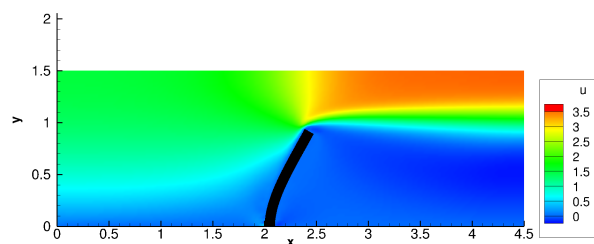
(a) $t = 0$ s(b) $t = 2.7$ s(c) $t = 10$ s

Figura 6.3: Campo di moto lungo la direzione x a vari istanti temporali con $c = 10^5 \text{Ns m}^{-1}$

da una frequenza e ampiezza maggiore, mentre nel terzo caso si raggiunge l'equilibrio senza oscillazioni. Queste considerazioni ci portano a capire l'importanza del coefficiente di smorzamento: un coefficiente troppo basso comporta delle oscillazioni ampie con frequenze elevate, le quali non possono essere ignorate dal fluido e quindi è necessario aumentare la frequenza di risoluzione del campo fluido, in modo da far catturare al fluido queste fluttuazioni, oppure bisogna introdurre un sistema per filtrare queste frequenze elevate le quali non vengono risolte dal campo fluido essendo incompressibile. Di contro, un coefficiente di smorzamento alto comporta un numero di oscillazioni basso o nullo, non vi è quindi la necessità di richiamare il modulo fluido frequentemente poichè gli spostamenti del corpo fra un istante fluido e l'altro sono monotoni e piccoli, compatibili con la precisione del modulo

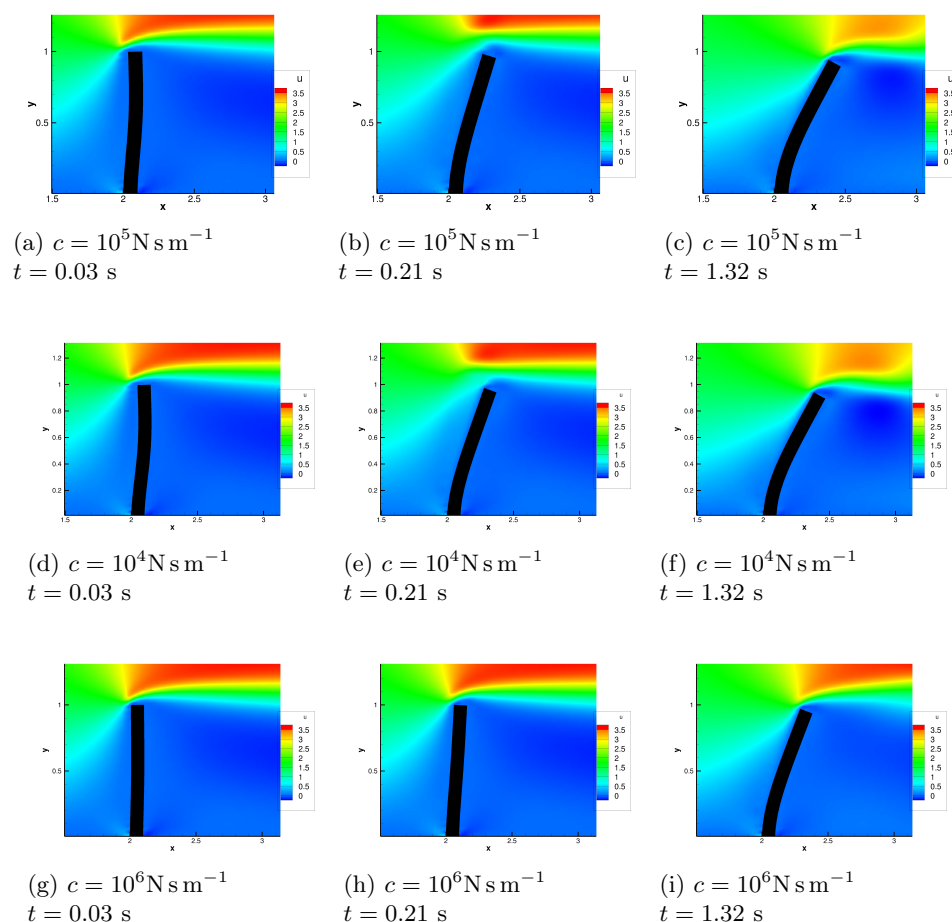


Figura 6.4: Confronto a vari istanti di tempo della deformata del corpo al variare del coefficiente di smorzamento

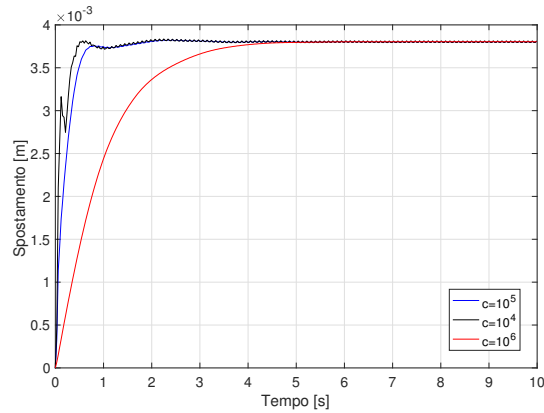
fluido.

Un'altra cosa importante da osservare, sono le ampiezze delle microscillazioni (Fig. 6.5b) che rimangono nonostante macroscopicamente il corpo abbia raggiunto l'equilibrio. Esattamente come per le oscillazioni macroscopiche, le oscillazioni microscopiche diminuiscono all'aumentare del coefficiente di smorzamento.

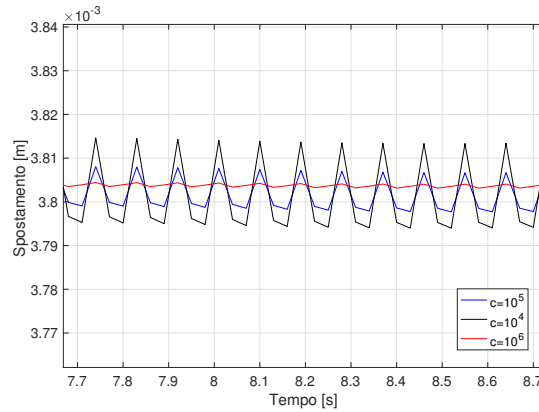
6.3 Influenza del numero di Reynolds

Per studiare l'influenza del numero di Reynolds sulla soluzione, si è impostata una simulazione che utilizza come coefficiente di smorzamento $c = 10^5 \text{ N s m}^{-1}$, e si sono svolte 2 simulazioni aventi rispettivamente:

- $Re = 125$ e quindi $\nu_f = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}$,



(a) *Spostamento del punto A in funzione del tempo al variare del coefficienti di smorzamento*



(b) *Zoom delle micro-oscillazioni residue*

Figura 6.5: Influenza del coefficiente di smorzamento sulla dinamica del corpo

- $Re = 500$ e quindi $\nu_f = 4 \cdot 10^{-7} \text{mm}^2 \text{s}^{-1}$.

Poichè variando il numero di Reynolds si varia tutto il campo di moto del fluido, si esegue l'inizializzazione per ogni simulazione.

Le Fig.6.8 e 6.9 riportano il campo di velocità lungo x e la deformazione del solido in vari istanti temporali, per le varie simulazioni. Quello che si nota è che, mentre per la prima simulazione si ha un rilascio di vorticità solo nel transitorio iniziale, nella seconda simulazione si ha un rilascio continuo di vorticità dovuta all'alto numero di Reynolds, rendendo di fatto impossibile raggiungere una soluzione stazionaria. Di conseguenza anche il solido non riesce a raggiungere una soluzione stazionaria poichè il rilascio di vorticità continua comporta un continuo cambio delle forze che vengono scambiate, le quali continuano a forzare il corpo ad oscillare.

Analizzando la fig. 6.7 che riporta lo spostamento del punto A in funzione del tempo al variare del numero di Reynolds. Oltre ad avere la conferma del

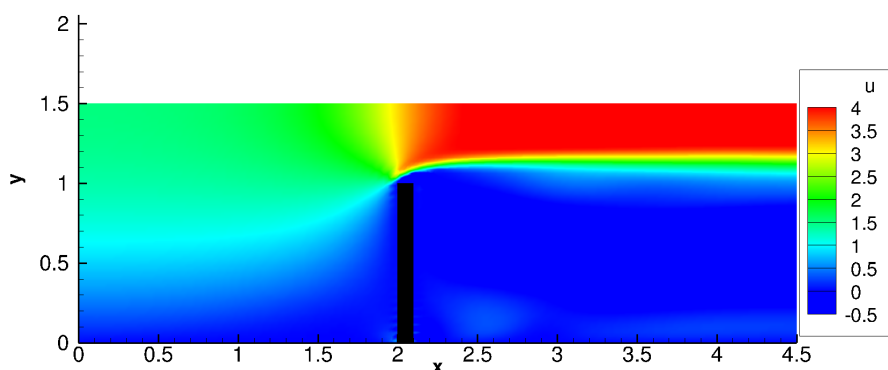


Figura 6.6: campo di velocità iniziale per $t = 0$, $Re = 500$ e $c = 10^5 \text{N s m}^{-1}$

fatto che la simulazione ad alto numero di Reynolds rende di fatto impossibile il raggiungimento della condizione di equilibrio, si nota che l'oscillazione avviene con media praticamente uguale alla condizione stazionaria a basso numero di Reynolds. Ciò implica che la forza media scambiata tra caso a basso e alto numero di Reynolds è la stessa e non dipende da esso.

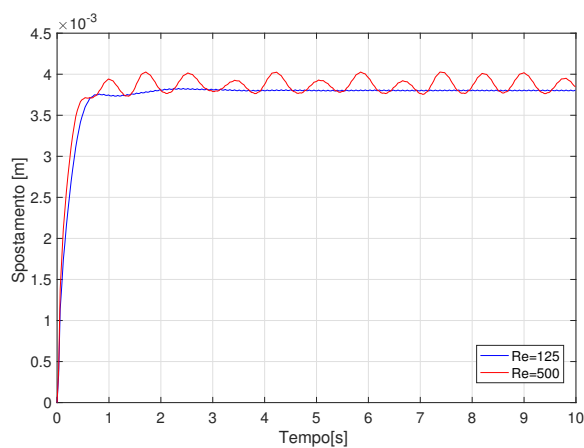


Figura 6.7: particolare della griglia peridinamica (in arancio) e della griglia lagrangiana (punti blu)

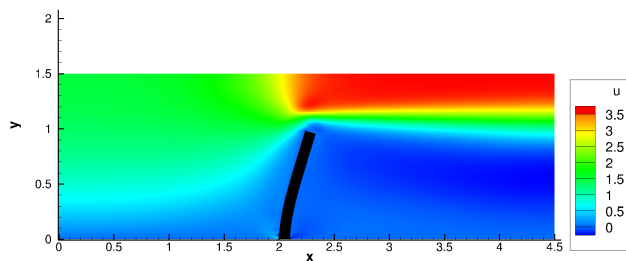
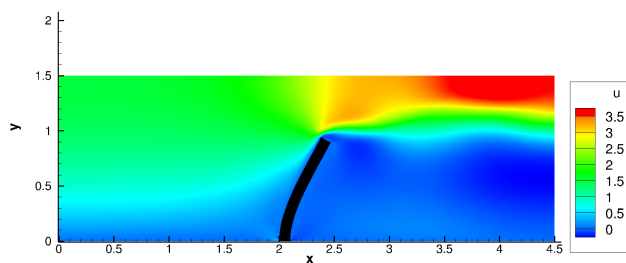
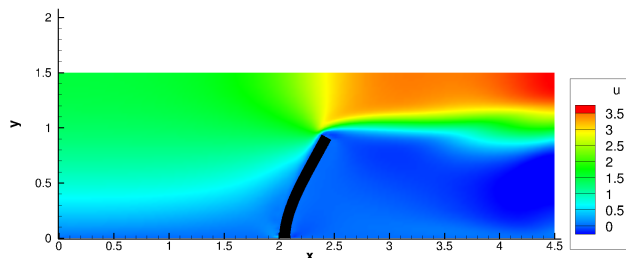
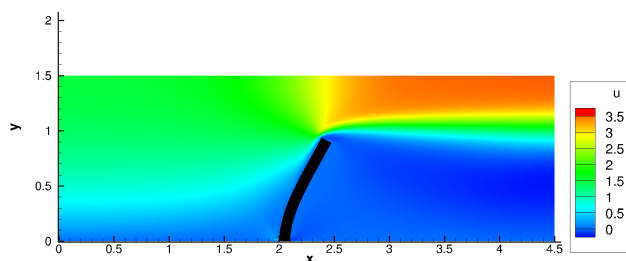
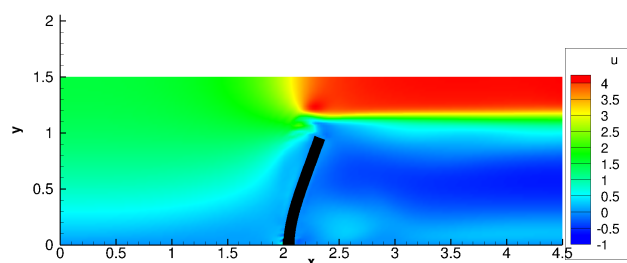
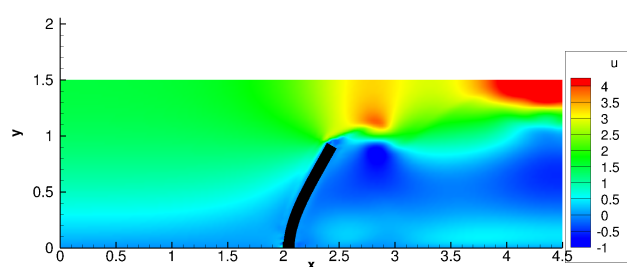
(a) $t = 0.21$ s(b) $t = 1.20$ s(c) $t = 3.6$ s(d) $t = 10$ s

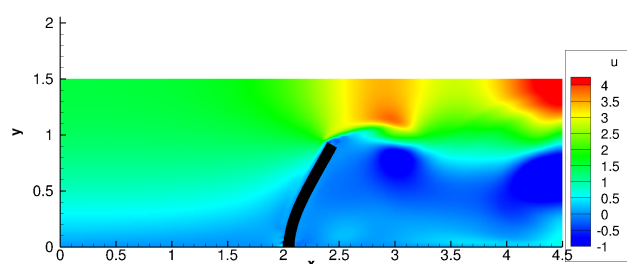
Figura 6.8: Campo di moto lungo la direzione x a vari istanti temporali con $Re = 125$ $c = 10^5 \text{ N s m}^{-1}$



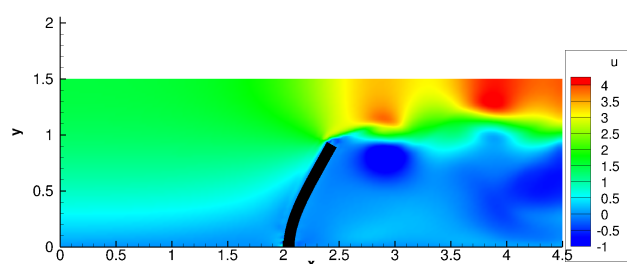
(a) $t = 0.21$ s



(b) $t = 1.20$ s



(c) $t = 3.6$ s



(d) $t = 10$ s

Figura 6.9: Campo di moto lungo la direzione x a vari istanti temporali con $Re = 500$ $c = 10^5 \text{ N s m}^{-1}$

Capitolo 7

Conclusioni

L'obiettivo principale di questa tesi è quello di proporre un nuovo approccio numerico per lo studio di interazioni fluido-struttura: un solutore Navier-Stokes con la teoria della peridinamica tramite il metodo dei contorni immersi. Tale approccio, a conoscenza dell'autore, non è mai stato proposto nonostante i numerosi vantaggi teorici che presenta. Per dimostrare la bontà della tecnica numerica è stato sviluppato un codice 2d incompressibile in Fortran90 che accoppia due moduli: il primo, per il fluido, basato sulle equazioni di Navier-Stokes e il metodo dell'immersed boundary e il secondo, per il corpo, basato sulla peridinamica, entrambi sviluppati e validati dall'autore. Il codice è stato poi testato simulando un semplice esempio, valutando gli effetti del coefficiente di smorzamento e del numero di Reynolds sulla soluzione.

Il modulo relativo al metodo dei contorni immersi si innesta direttamente su un solutore di Navier-Stokes 2d incompressibile basato su griglie sfalsate, il quale utilizza il metodo delle proiezioni. Prima di procedere all'implementazione del metodo dei contorni immersi, si è validato il solutore di Navier-Stokes simulando un moto di Poiseuille. Sono stati confrontati i risultati numerici con i risultati teorici e si è verificato che la differenza fra i due fosse compatibile con la precisione richiesta al codice.

Si è poi implementato il metodo dei contorni immersi tramite la formulazione di Direct-Forcing proposta da Uhlmann, la quale utilizza come funzione interpolante la funzione delta di Dirac. Si è deciso di implementare il Multi-Direct Forcing proposto da Breugem per migliorare la precisione della soluzione. Anche in questo caso, prima di procedere, si è validato il modulo fin qui ottenuto tramite la simulazione di un cilindro stazionario immerso in un canale. Si è calcolato il coefficiente di Drag, effettuando due simulazioni uguali le quali differiscono solo per il numero di Reynolds, la prima con Reynolds pari a 40 e la seconda con Reynolds pari a 50. I dati ottenuti sono poi stati confrontati con risultati ottenuti in letteratura in condizioni analoghe. Il modulo si è dimostrato attendibile anche se, anche

se vi è uno certo scostamento rispetto ai dati di riferimento, questo è dovuto ai limiti intrinseci della formulazione del metodo dei contorni immersi utilizzata. La funzione interpolante di Roma ha come conseguenza fisica quella di creare una shell non perfettamente impermeabile attorno all'interfaccia fluido-solido, shell con dimensioni leggermente maggiori rispetto alle dimensioni reali del corpo. Perciò, oltre a non imporre una perfetta condizione di impermeabilità, si simula un cilindro con dimensioni leggermente maggiori rispetto a quelli reali. Sono state proposte delle tecniche per minimizzare questo effetto che potranno essere considerati in eventuali sviluppi futuri.

Infine si è sviluppato il modulo relativo alla peridinamica, basandolo sulla formulazione bond-based della stessa. La validazione è stata effettuata simulando il moto di un elemento monodimensionale sottoposto a uno spostamento iniziale e poi lasciato libero di oscillare. Anche in questo caso, si è confrontato l'andamento teorico con l'andamento ottenuto dalla simulazione, e ci si è assicurati che l'errore fosse sotto alla precisione utilizzata.

I due moduli interagiscono scambiandosi informazioni. Il modulo dei contorni immersi risolve il campo fluido e calcola le forze che il fluido imprime al solido in alcuni punti Lagrangiani che descrivono l'interfaccia fluido-solido. Tali forze vengono poi passate al modulo della peridinamica, il quale, in funzione delle forze applicate, calcola le deformazioni a cui è soggetto il corpo. L'informazione relativa alla deformazione viene poi scambiata nuovamente al modulo del fluido, ed esso, in funzione della nuova posizione del corpo, risolve nuovamente il campo fluido e ricalcola le forze che vengono scambiate e il ciclo ricomincia.

Si è scelto però, per non incidere troppo sull'efficienza del codice complessivo, di non richiamare entrambi i moduli contemporaneamente, ma di richiamare il modulo fluidodinamico un numero di volte tale per cui la risoluzione del campo fluido sia comunque adeguata, ma che non appesantisca troppo il codice. Questa soluzione però richiede estrema cautela, poiché tra i due istanti in cui si risolve il campo fluido si considera che il corpo si muova per stati di equilibrio, ciò però può non essere vero e va verificato prima di utilizzare questa strategia. In questa tesi, per assicurarsi che ciò effettivamente avvenga, si è utilizzato un coefficiente di smorzamento proporzionale alla velocità dei punti peridinamici.

Un'ulteriore problematica legata all'accoppiamento dei due moduli riguarda lo scambio di informazioni tra la griglia Lagrangiana del fluido e la griglia peridinamica del solido, tale argomento richiederebbe uno studio approfondito a se stante. Il problema però può essere notevolmente semplificato tramite una scelta favorevole della geometria del corpo e alla scelta mirata delle dimensioni e della disposizione delle due griglie, e ciò è quello che è stato fatto in questo lavoro.

Infine, per testare e dimostrare le capacità del codice accoppiato, è stato simulato un diaframma simmetrico. Si è anche analizzato l'influenza del coefficiente di smorzamento sulla soluzione e si è notato come utilizzare un

coefficiente di smorzamento elevato assicuri che il corpo si muova per stati di equilibrio. Si nota inoltre che coefficienti di smorzamento più contenuti comportano oscillazioni del corpo ad alta frequenza le quali devono essere filtrate poiché non vengono risolte dal campo fluido essendo incompressibile. Utilizzando un coefficiente di smorzamento intermedio si è poi valutato l'effetto del numero di Reynolds agendo solo sulla viscosità del fluido e non sulle altre caratteristiche. Quello che si osserva è che a bassi numeri di Reynolds il corpo si deforma e raggiunge una configurazione deformata stabile rilasciando un pò di vorticità, mentre a alti numeri di Reynolds vi è un continuo rilascio di vorticità, ciò comporta una continua oscillazione del corpo e la conseguente impossibilità di raggiungere la configurazione di equilibrio.

I risultati ottenuti sono già più che buoni e dimostrano la grande potenzialità del metodo. Nell'elaborato sono state anche evidenziate diverse prospettive di attività di ricerca focalizzate al miglioramento del metodo. Tali aspetti, fuori dalla portata del presente lavoro, potranno essere oggetto di successivi studi.

Bibliografia

- [1] Wim-Paul Breugem. A second-order accurate immersed boundary method for fully resolved simulations of particle-laden flows. *Journal of Computational Physics*, 231(13):4469 – 4498, 2012.
- [2] Bahattin Kilic. *Peridynamic theory for progressive failure prediction in homogeneous and heterogeneous materials*. The University of Arizona, 2008.
- [3] Sebastian Kriebitzsch, Martin Van der Hoef, and Hans Kuipers. Direct numerical simulations of gas-particle flows using an immersed boundary method. In *Proceedings of the Academy Colloquium Immersed Boundary Methods: Current Status and Future Research Directions (KNAW, Amsterdam, The Netherlands, 15–17 June 2009)*, 2010.
- [4] Kun Luo, Zeli Wang, Jianren Fan, and Kefa Cen. Full-scale solutions to particle-laden flows: Multidirect forcing and immersed boundary method. *Physical Review E*, 76(6):066709, 2007.
- [5] Erdogan Madenci and Erkan Oterkus. *Peridynamic theory and its applications*, volume 17. Springer, 2014.
- [6] Rajat Mittal and Gianluca Iaccarino. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 37(1):239–261, 2005.
- [7] Alexandre M Roma, Charles S Peskin, and Marsha J Berger. An adaptive version of the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, 153(2):509 – 534, 1999.
- [8] Mehmet Sahin and Robert G. Owens. A numerical investigation of wall effects up to high blockage ratios on two-dimensional flow past a confined cylinder. 16, 05 2004.
- [9] Markus Uhlmann. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *Journal of Computational Physics*, 209(2):448 – 476, 2005.

- [10] M. Zaccariotto, F. Luongo, G. sarego, and U. Galvanetto. Examples of applications of the peridynamic theory to the solution of static equilibrium problems. *The Aeronautical Journal*, 119(1216):677–700, 2015.