



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

**APPLICAZIONE
DEL TRACKING
AL PENDOLO SEMPLICE**

**Tracking application to the simple
pendulum**

Laureanda:
Anna FRIGO

Relatore:
Prof. Mauro BISIACCO

30 settembre 2013

Indice

1	Introduzione	3
2	Modello Fisico	4
3	Sistema in catena aperta	7
4	Presentazione del problema e obiettivi	10
5	Progetto del Compensatore	14
5.1	Prima soluzione	14
5.1.1	Caso ω_0 MOLTO MINORE di ω_n	14
5.2	Seconda soluzione	28
5.2.1	Caso ω_0 MOLTO MAGGIORE di ω_n	28
5.2.2	Caso $\omega_0 > \omega_n, \omega_0 < \omega_n$	44
5.2.3	Caso ω_0 UGUALE a ω_n	45
6	Modello Reale	46

1 Introduzione

Lo scopo di questa tesi é quello di analizzare un sistema fisico, costituito da un pendolo semplice al quale viene applicato un motore elettrico, che ne controlla le oscillazioni. Viene innanzitutto modellato il sistema ricavando l'equazione differenziale che ne descrive il moto e, linearizzandola, viene successivamente trasformata nel dominio di Laplace ricavandone la funzione di trasferimento corrispondente.

Successivamente, si analizza il sistema in catena aperta, assegnando dei possibili valori numerici alla funzione di trasferimento, in modo che possa rappresentare realmente un pendolo che oscilla.

Poi viene introdotto e spiegato l'obiettivo principale di questa tesi: controllare le oscillazioni del pendolo tramite un motorino elettrico.

Si progettano, quindi, dei controllori che siano in grado di rendere stabile il sistema linearizzato e tali da far sì che esso inseguia perfettamente una sinusoidale.

Questa sinusoidale, di pulsazione ω_0 , posta all'ingresso del sistema rappresenta le oscillazioni che il pendolo é forzato a compiere.

Affinché il sistema possa inseguire tale sinusoidale é necessario nel controllore il termine $\frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$, perciò si distinguono vari casi di progetto, in base al valore assunto da ω_0 .

Alla fine dell'analisi di ogni possibile situazione si vede come il sistema finale funzioni e rispetti stabilità e *tracking*.

Infine, si analizza anche il caso in cui il sistema é quello originario, non lineare, e si verifica che, utilizzando lo stesso compensatore progettato per il caso lineare, esso é stabile e insegue perfettamente la sinusoidale.

2 Modello Fisico

Il sistema che prendiamo in esame é costituito da un pendolo semplice: assumiamo che il filo sia inestensibile, abbia lunghezza l e massa nulla (trascurabile). All'estremitá inferiore del pendolo é applicata una pallina, la quale é sottoposta all'effetto della forza di gravità e a quello di una forza di attrito viscoso (dovuto al contatto con l'aria). Nell'estremitá superiore, invece, é collegato un motorino elettrico che ci permetterà di controllare il movimento del pendolo. Infatti esso applica al moto del pendolo una forza legata ad una coppia motrice, rappresentata dall'equazione:

$$\tau = ku,$$

dove u rappresenta l'ingresso del nostro sistema.

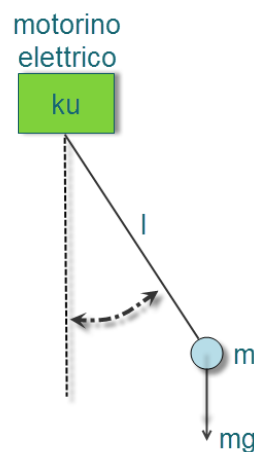


Figura 1: Schema semplificato del modello fisico.

Introduciamo quindi i parametri descrittivi del sistema:

- l é la lunghezza del filo
- m é la massa della pallina applicata al pendolo
- mg é l'entitá della forza di gravitá
- $\vartheta(t)$ é l'angolo che il filo forma all'istante t con la verticale
- $\nu\dot{\vartheta}(t)$ é la forza di attrito viscoso

- $\tau(t)$ rappresenta la coppia motrice applicata dal motorino elettrico
- k é un coefficiente di proporzionalitá
- $u(t)$ rappresenta una tensione elettrica che comanda il motore elettrico
- $a(t)$ é l'accelerazione
- $v(t)$ é la velocitá

Per trovare l'equazione del moto del pendolo semplice prendiamo in considerazione le tre forze applicate al sistema e le scomponiamo nelle direzioni radiali e tangenziali. Le componenti radiali vengono annullate dalla tensione del filo. Utilizzando la legge di Newton possiamo descrivere le componenti tangenziali come segue:

$$ma(t) = -mg \sin \vartheta(t) - \nu \dot{\vartheta}(t) - \frac{1}{l}ku(t)$$

Attraverso alcuni passaggi

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= -g \sin \vartheta(t) - \frac{\nu}{m} \frac{d\vartheta(t)}{dt} - \frac{1}{ml}ku(t) \\ l \frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} &= -g \sin \vartheta(t) - \frac{\nu}{m} \frac{d\vartheta(t)}{dt} - \frac{1}{ml}ku(t) \\ \frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} &= -\frac{g \sin \vartheta(t)}{l} - \frac{\nu}{ml} \frac{d\vartheta(t)}{dt} - \frac{1}{ml^2}ku(t) \end{aligned}$$

ricaviamo l'equazione del moto del pendolo semplice controllato dal motore:

$$\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} + \frac{\nu}{ml} \frac{d\vartheta(t)}{dt} + \frac{g}{l} \sin \vartheta(t) = -\frac{1}{ml^2}ku(t)$$

Questo sistema non fa ricorso ad alcuna variabile ausiliaria, ma utilizza le sole variabili d'interesse: $u(t)$ é l'ingresso del sistema e $\vartheta(t)$ ne costituisce l'uscita.

Il sistema, però, non è lineare per la presenza della funzione seno; tuttavia possiamo fare un'ipotesi di lavoro, che permette di fare ragionevoli approssimazioni dei termini non lineari: $\sin \vartheta \simeq \vartheta$, in un intorno di $\vartheta = 0$.

Linearizziamo quindi l'equazione appena ricavata:

$$\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} + \frac{\nu}{ml} \frac{d\vartheta(t)}{dt} + \frac{g}{l}\vartheta(t) = -\frac{1}{ml^2}ku(t)$$

per semplicità, inoltre, poniamo:

- $\omega_n^2 := \frac{g}{l}$
- $2\xi\omega_n := \frac{\nu}{ml}$
- $h := -\frac{k}{ml^2}$

e sostituendo tali parametri otteniamo così la relazione lineare:

$$\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{d\vartheta(t)}{dt} + \omega_n^2\vartheta(t) = hu(t).$$

Abbiamo trovato il *modello ingresso/uscita* del nostro sistema.

Ricaviamo ora la funzione di trasferimento corrispondente:

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{-\frac{k}{ml^2}}{s^2 + \frac{\nu}{ml}s + \frac{g}{l}} = \frac{h}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

dove abbiamo inserito i parametri introdotti.

3 Sistema in catena aperta

Consideriamo ora il sistema come l'abbiamo descritto nel paragrafo precedente, cioè comprensivo del pendolo semplice e del motore elettrico. Finora l'abbiamo trattato in modo puramente teorico. Assegniamo ora dei valori numerici ai parametri precedentemente introdotti, i quali ci permettono di fare riferimento ad un possibile sistema reale. I parametri che verranno usati per tracciare i grafici della $G(s)$ sono i seguenti:

- $l = 0.2m$
- $m = 0.05kg$
- $g = 9.81ms^{-2}$
- $k = -2\frac{Nm}{V}$

Consideriamo la $G(s)$ ricavata prima:

$$G(s) = \frac{h}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

il cui denominatore costituisce un termine trinomio scomponibile in una coppia di poli complessi coniugati.

Assegniamo dei valori numerici ai parametri appena introdotti:

- $\xi = 0.01$
- $\omega_n = 10^{1.5} = 31.6228$
- $h = 1000$

La funzione di trasferimento diventa quindi:

$$G(s) = \frac{h}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1000}{s^2 + 0.632s + 1000}$$

Tracciamone ora i diagrammi di Bode e di Nyquist.

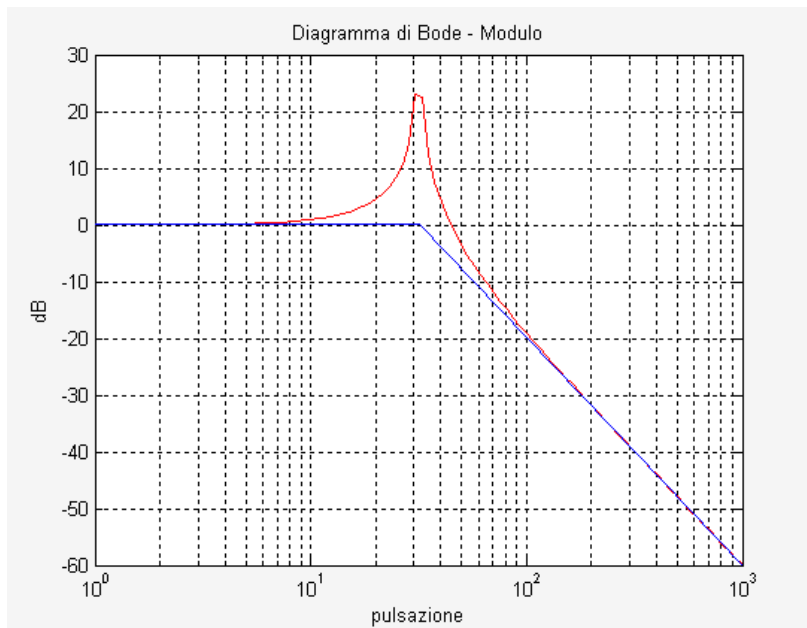


Figura 2: Diagramma di Bode del modulo di $G(s)$

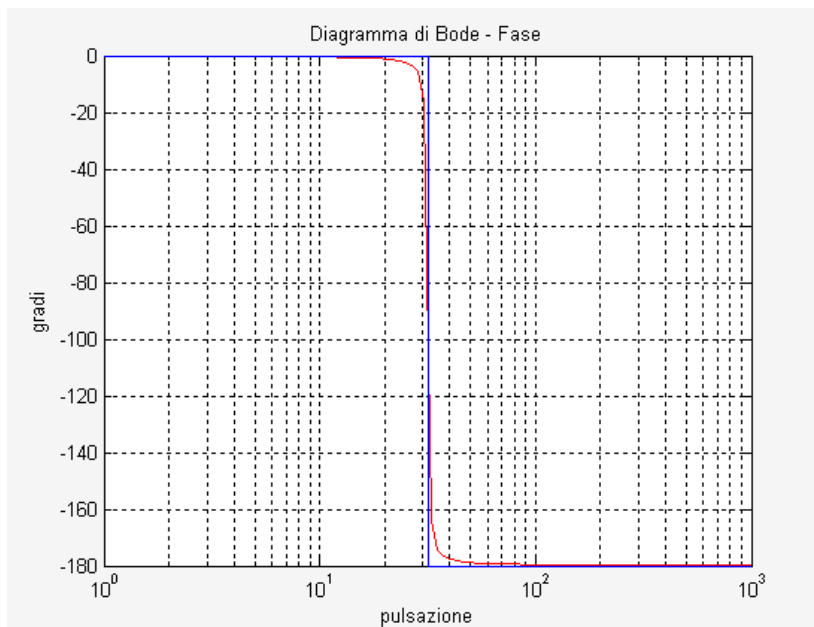


Figura 3: Diagramma di Bode della fase di $G(s)$

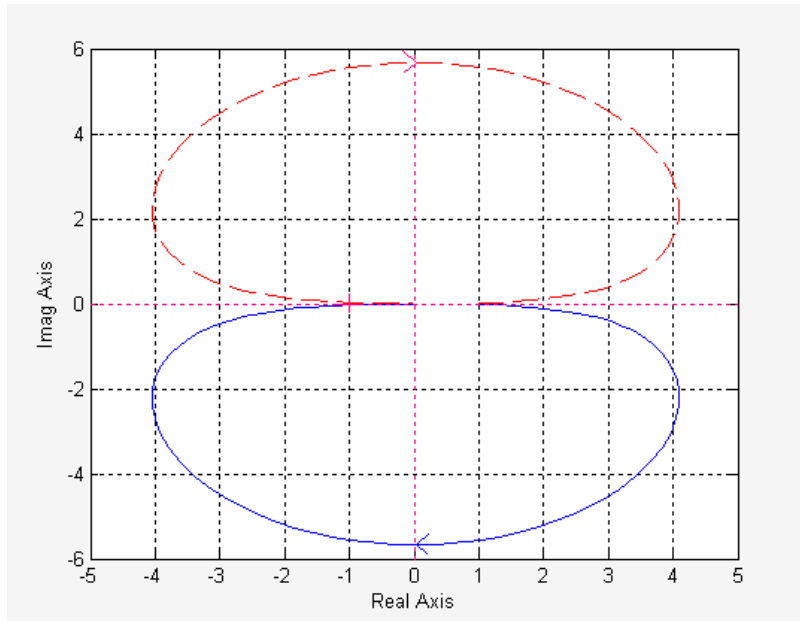


Figura 4: Diagramma di Nyquist di $G(s)$

Notiamo, dal diagramma delle ampiezze, che la $G(s)$ ha un guadagno pari a uno ($0db$); inoltre la fase si abbassa di -90° in corrispondenza di ω_n , a causa della presenza dei due poli complessi coniugati, per scendere poi fino a -180° .

Analizziamo ora la stabilità della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

tramite il diagramma di Nyquist.

Dal diagramma non si nota molto bene, ma il grafico compie $N = 0$ giri attorno al punto $-1 + j0$. Inoltre la $G(s)$ presenta i seguenti due poli complessi coniugati:

$$p_{1,2} = -0.316 \pm j31.62$$

Quindi $N = n_{G_+} = 0$ implica $n_{W_+} = 0$ ed il sistema ad anello chiuso é BIBO stabile.

4 Presentazione del problema e obiettivi

Abbiamo ora la funzione di trasferimento $G(s)$ che descrive il nostro sistema: un pendolo semplice collegato ad un motorino elettrico, il quale deve essere in grado, tramite un compensatore $C(s)$, di controllare le oscillazioni che il pendolo esegue durante il suo moto. Il sistema, cioè, deve riuscire ad inseguire perfettamente (a regime) una sinusoidale posta come ingresso. Questo è quello che viene definito come *tracking* (problema di asservimento): vogliamo che l'uscita del sistema approssimi, secondo certi criteri, l'andamento desiderato del segnale di riferimento, che in questo caso è costituito dalla sinusoidale. Quindi dobbiamo progettare un controllore che per prima cosa garantisca la stabilità e ci permetta inoltre di risolvere il problema del *tracking*.

Fattore essenziale affinché il sistema possa inseguire la sinusoidale è che il controllore contenga il termine

$$\frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$$

dove il parametro ω_0 coincide con la frequenza della sinusoidale che imposteremo come ingresso del nostro sistema.

Vediamo come impostare il problema del progetto del controllore $C(s)$ tracciando il diagramma di Bode della funzione $G(s)$ (il cui valore numerico è stato definito in precedenza) moltiplicata per il termine $\frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$; alla frequenza assegniamo un valore a caso $\omega_0 = 0.1$:

$$\begin{aligned} G(s) \cdot \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} &= \\ &= \frac{1000}{s^2 + 0.632s + 1000} \cdot \frac{1}{s^2 + 0.01} \\ &= \frac{1000}{s^4 + 0.632s^3 + 1000s^2 + 0.00632s + 10} \end{aligned}$$

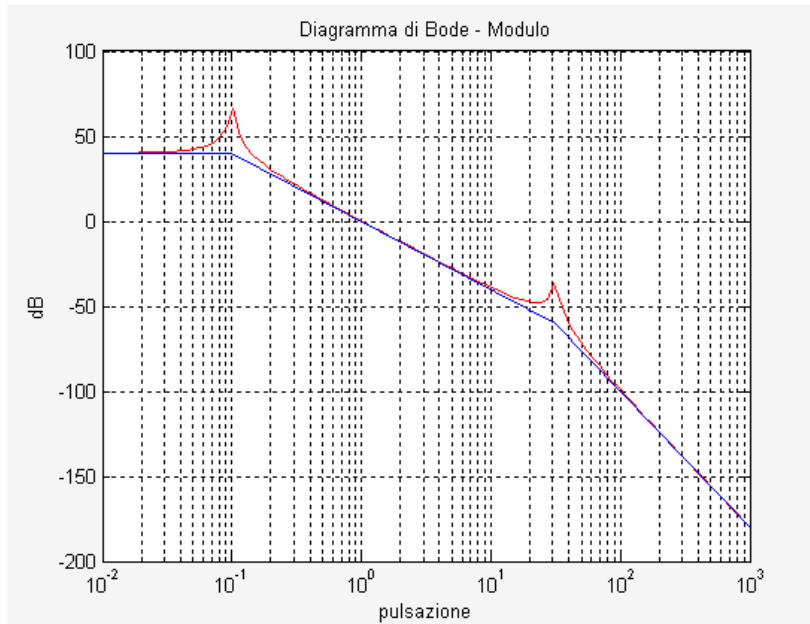


Figura 5: Diagramma di Bode del modulo di $G(s) \cdot \frac{1}{s^2+0.01}$

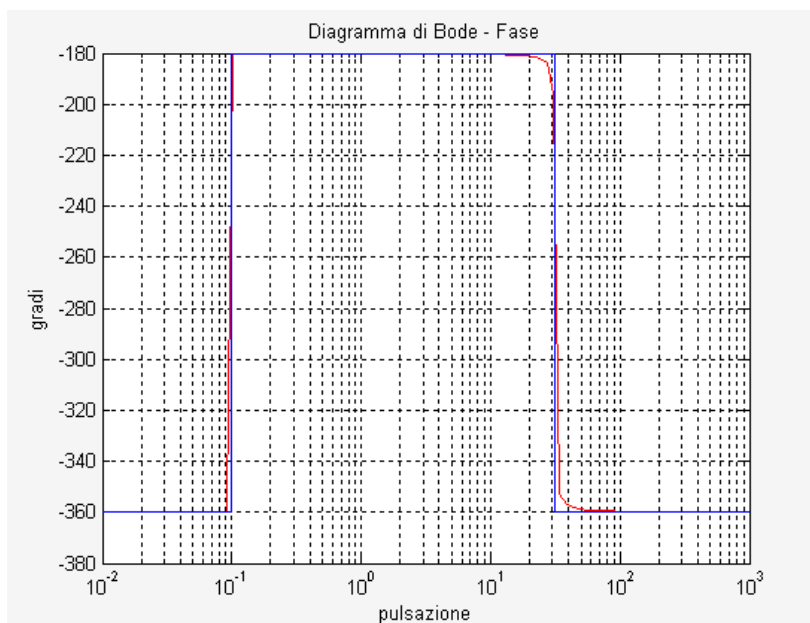


Figura 6: Diagramma di Bode della fase di $G(s) \cdot \frac{1}{s^2+0.01}$

Come si può vedere dalla figura, il diagramma delle ampiezze è caratterizzato dalla presenza di due picchi, in quanto la funzione $G(s) \cdot C(s)$ contiene quattro poli complessi coniugati, i quali fanno diminuire sempre di più la pendenza del diagramma, che nel tratto finale è pari a -80db/dec . Inoltre causano anche l'abbassamento della fase fino ad un valore di -360° . Il primo picco, che è quello che corrisponde a ω_0 , va all'infinito in quanto il termine $s^2 + \omega_0^2$ è un trinomio con ξ pari a zero. Il secondo picco corrisponde, invece, a ω_n che vale $\omega_n = 10^{1.5}$.

Per raggiungere il nostro scopo, progettando il controllore, dobbiamo quindi partire dall'analisi di questo diagramma che prende in considerazione solo il termine $\frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$. Per poter avere stabilità nel nostro sistema finale e fare in modo che esso inseguia una sinusoide è necessario inserire nel compensatore $C(s)$, che andremo a progettare, zeri e poli in modo tale da avere una certa pulsazione di attraversamento ω_a ed un certo margine di fase m_φ .

Considerando una sinusoide come ingresso del nostro sistema, la pulsazione di attraversamento non determina più il tempo di salita nella risposta al gradino, ma ora indica la rapidità del sistema, cioè la velocità con la quale esso insegue la sinusoide. Inoltre il margine di fase, in questo caso, indica il carattere con cui la risposta del sistema raggiunge la sinusoide: è richiesto un valore di almeno 90° per avere un comportamento monotono, e non oscillante, come sarebbe se il valore fosse più basso.

Assegnando a caso il valore $\omega_0 = 0.1$ abbiamo ottenuto (si può vedere dalla figura) due picchi abbastanza lontani tra loro poiché ω_n è molto più grande di ω_0 : il picco corrispondente a ω_0 si trova prima di quello che corrisponde a ω_n . Manteniamo fisso il valore di ω_n , che caratterizza $G(s)$ la quale rappresenta il nostro modello fisico: ω_n non può quindi cambiare e rimane al valore assegnato. Variando, invece, il valore della frequenza ω_0 andiamo incontro a situazioni diverse rispetto al grafico ottenuto con il valore 0.1: ponendo ω_0 maggiore di ω_n la posizione dei due picchi si inverte ed incontriamo prima quello corrispondente a ω_n . Avvicinando il valore di ω_0 a quello di ω_n otteniamo due picchi vicini tra loro, sia nel caso in cui ω_0 sia minore di ω_n che maggiore. Arriviamo, infine, alla situazione in cui i due picchi coincidono, quando il valore di ω_0 è uguale a ω_n .

Riassumendo: teniamo ω_n ad un valore fisso assegnatogli e variamo invece il valore di ω_0 ; in base ad esso cambia la configurazione del diagramma che otteniamo. Il progetto del compensatore che ci permette di arrivare agli scopi prefissati, stabilità e *tracking*, dipende quindi dalla frequenza ω_0 , che con il suo valore fa variare la posizione reciproca dei due picchi, sempre presenti nel diagramma di Bode.

Per capire come affrontare il problema del progetto schematizziamo l'analisi delle posizioni reciproche dei due picchi raggruppandole in due problemi principali: ω_0 é piú piccola di ω_n e ω_0 é piú grande di ω_n . In entrambi i casi dobbiamo capire dove puó trovarsi la frequenza di attraversamento: se trasliamo il diagramma delle ampiezze troppo in alto o troppo in basso puó succedere che uno dei due picchi attraversi l'asse delle ascisse e in questo caso avremo piú frequenze di attraversamento. Dobbiamo invece fare in modo che il sistema abbia un'unica ω_a , cioè un'unica velocità di inseguimento della sinusoidale. La ω_a dovrà quindi trovarsi entro una certa fascia di valori.

5 Progetto del Compensatore

Come abbiamo accennato poco fa, in base ai valori che assume ω_0 dobbiamo affrontare diversi problemi di progetto del compensatore. Raggruppiamo le diverse situazioni che si possono presentare in due problemi principali: essi sono risolvibili con due tipi diversi di controllore, i quali si differenziano a seconda della quantità di zeri che contengono. Abbiamo quindi due soluzioni diverse che ora analizzeremo, tramite le quali distinguiamo i due casi principali e tutti i sottocasi che essi comprendono.

5.1 Prima soluzione

5.1.1 Caso ω_0 MOLTO MINORE di ω_n

Prendiamo in considerazione il diagramma della figura precedente, che corrisponde al caso in cui $\omega_0 \ll \omega_n$, da cui siamo partiti per analizzare il problema: in questo caso i due picchi sono lontani tra loro e nessuno dei due attraversa l'asse delle ascisse. La pulsazione di attraversamento ω_a infatti è unica e si trova all'incirca in 10^0 ; il margine di fase, invece, ha un valore del tutto inaccettabile, a causa dei poli complessi coniugati presenti in ω_0 . Il margine di fase vale all'incirca $m_\varphi = 0^\circ$; per poterlo alzare è necessario uno zero. Il compensatore che dobbiamo usare in questo caso è quindi del tipo:

$$C(s) = \frac{A(1 + Bs)}{s^2 + 0.01}$$

I coefficienti A e B li dobbiamo scegliere in modo tale da soddisfare i requisiti richiesti: stabilità, inseguimento della sinusoide, m_φ di circa 90° e ω_a compresa tra ω_0 e ω_n . L'ultima specifica ci dà un criterio riguardo ω_a che dobbiamo seguire per questo specifico caso (ω_0 molto minore di ω_n): se ω_a fosse maggiore di ω_n ricadremmo nel caso (che tratteremo in seguito) in cui i due picchi sono vicini tra loro, mentre se ω_a fosse minore di ω_0 avremmo più frequenze di attraversamento, perché il picco infinito relativo a ω_0 attraverserebbe l'asse delle ascisse. Abbiamo quindi quattro poli da controllare, invece di due, e una fase molto più bassa (-360°), perciò non basterebbe un solo zero nel compensatore. I casi in questione li analizzeremo in seguito.

Dobbiamo calcolare ora i coefficienti A e B ; in questo caso dei valori adeguati sono:

$$A = 10^{-1.5}, B = 10$$

quindi il controllore diventa

$$C(s) = \frac{10^{-1.5}(1 + 10s)}{s^2 + 10^{-2}}$$

Vediamo di seguito i diagrammi di Bode della funzione

$$\begin{aligned} C(s) \cdot G(s) &= \frac{10^{-1.5}(1 + 10s)}{s^2 + 10^{-2}} \cdot \frac{1000}{s^2 + 0.632s + 1000} \\ &= \frac{316.2s + 31.62}{s^4 + 0.632s^3 + 1000s^2 + 0.00632s + 10} \end{aligned}$$

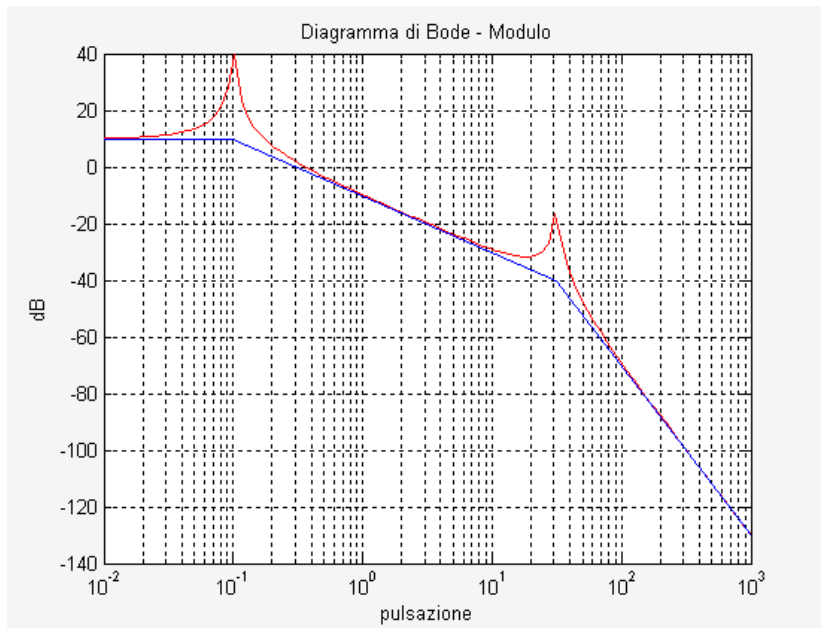


Figura 7: Diagramma di Bode del modulo di $C(s) \cdot G(s)$

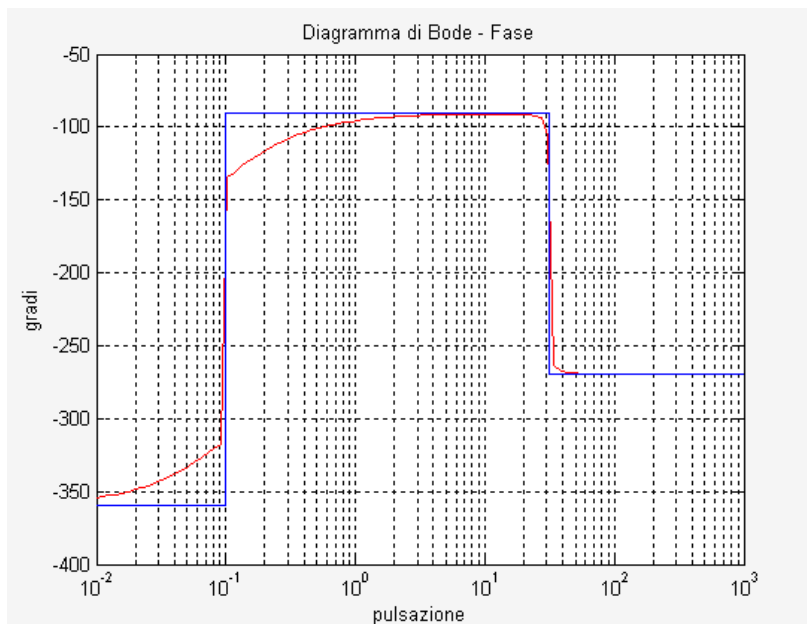


Figura 8: Diagramma di Bode della fase di $C(s) \cdot G(s)$

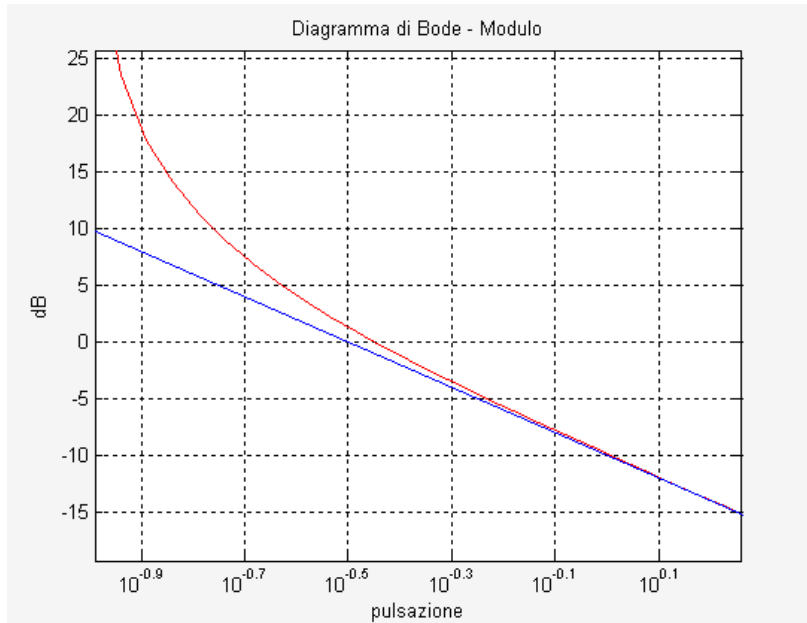


Figura 9: Pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 10^{-0.5}$.

La funzione ottenuta ha un guadagno di 10db ; lo abbiamo abbassato rispetto al modulo della funzione $G(s) \cdot \frac{1}{s^2+0.01}$ con il coefficiente A . Abbiamo inoltre posizionato uno zero in 10^{-1} ($B = 10$) per migliorare il margine di fase: ora vale $m_\varphi = 90^\circ$. La pulsazione di attraversamento ω_a é compresa tra $\omega_0 = 10^{-1}$ e $\omega_n = 10^{1.5}$ e facendo lo zoom del diagramma delle ampiezze vediamo che vale $\omega_a \simeq 10^{-0.5}$ (Figura 9).

Vediamo inoltre come il secondo picco (ω_n) stia al di sotto dell'asse delle ascisse per fare in modo di non avere più frequenze di attraversamento.

Dal diagramma di Nyquist si nota che $N = 0$, inoltre la funzione $C(s) \cdot G(s)$ ha due coppie di poli complessi coniugati con parte reale non negativa

$$p_{1,2} = -0.316 \pm j31.62$$

$$p_{3,4} = \pm j0.1$$

Quindi con il controllore appena progettato riusciamo a rendere stabile il sistema e far sí che inseguia la sinusoide: raggiungiamo cioè gli scopi prefissati.

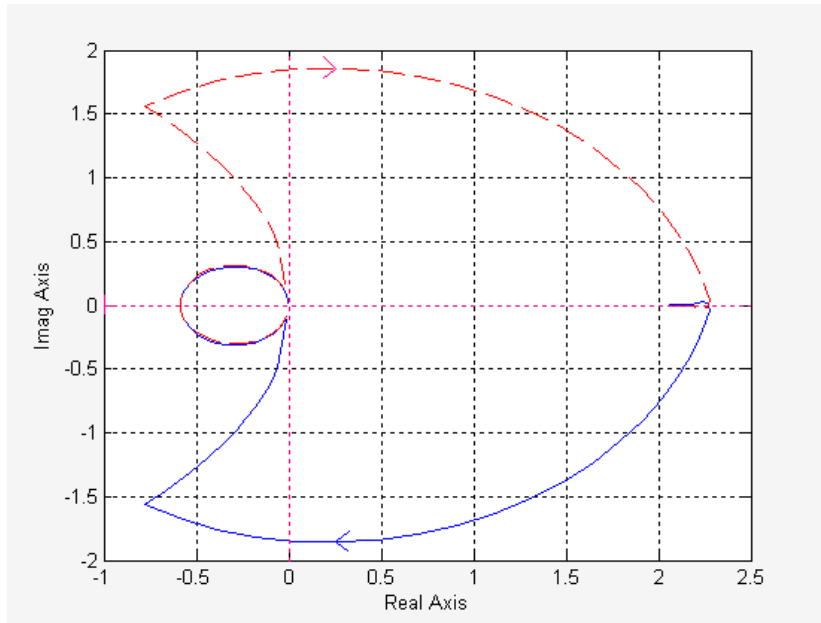


Figura 10: Diagramma di Nyquist di $C(s) \cdot G(s)$

Con *Simulink* costruiamo il grafico del nostro sistema utilizzando la funzione $C(s) \cdot G(s)$ che abbiamo ricavato e facendone la retroazione negativa.

Vediamo realmente come il sistema insegue e raggiunga perfettamente una sinusoide posta all'ingresso, alla quale abbiamo attribuito una frequenza pari a ω_0 .

Siamo quindi riusciti a progettare il controllore $C(s)$ che ci permette di soddisfare i nostri obiettivi nel caso in cui ω_0 é molto minore di ω_n .

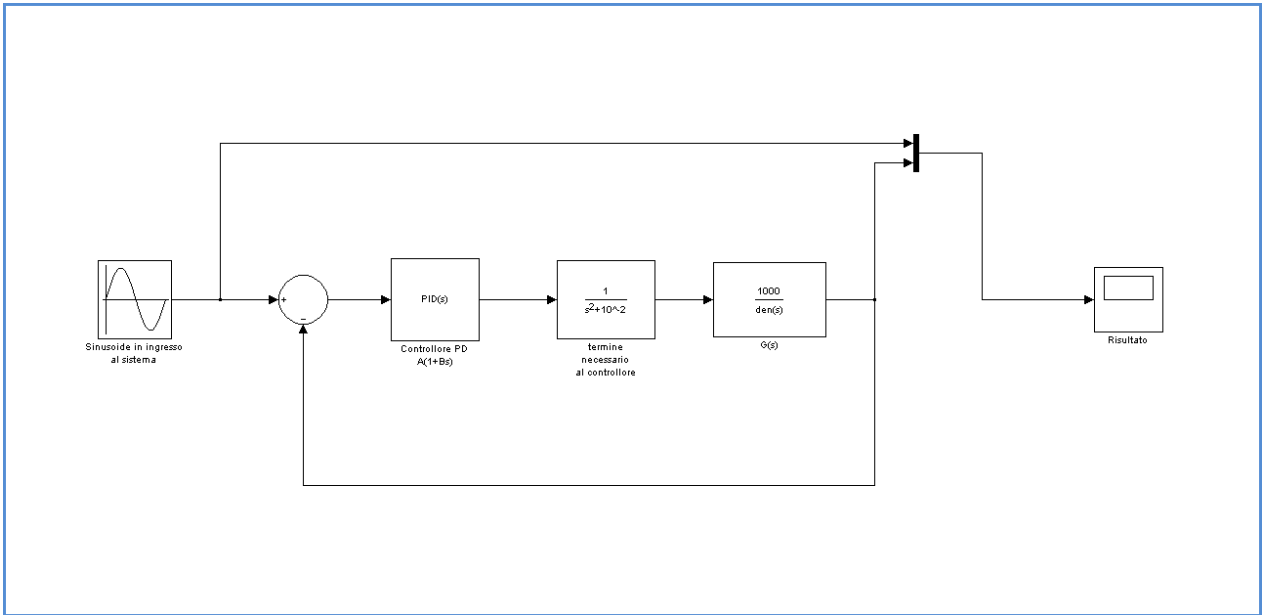


Figura 11: Struttura dell'intero sistema.

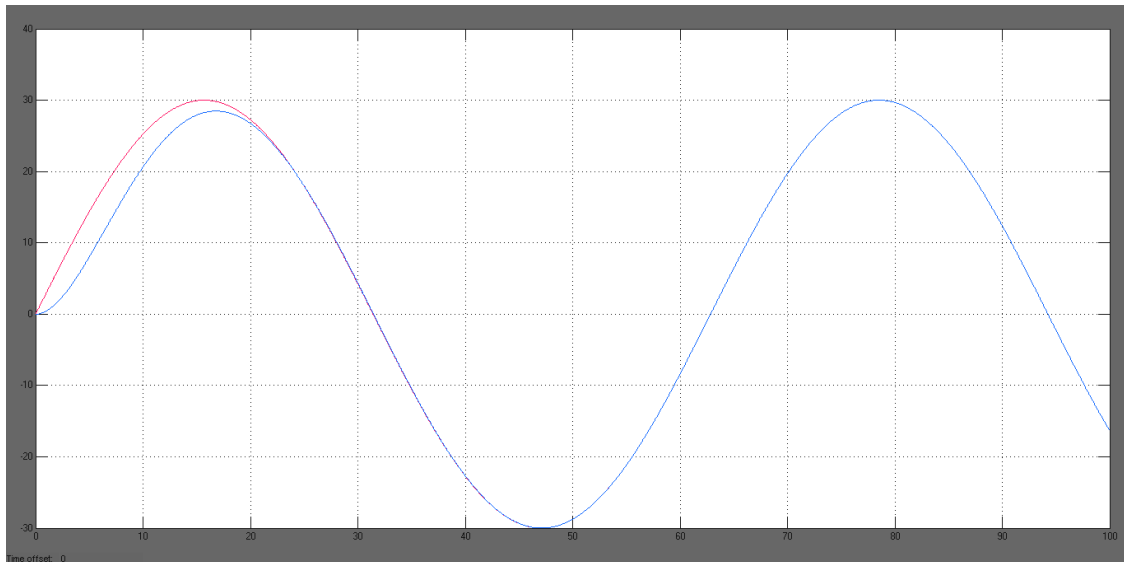


Figura 12: Comportamento del sistema retroazionato.

Vogliamo ora, tenendo fisso ω_n poter spostare ω_0 cioè traslare il picco relativo a ω_0 verso l'alto e, progettando un controllore sempre del tipo $C(s) = \frac{A(1+Bs)}{s^2+\omega_0^2}$, mantenere la stessa pulsazione di attraversamento trovata prima ($\omega_a = 10^{-0.5}$).

Notiamo innanzitutto che per poter avere la stessa ω_a cambiando i valori di A e B , cioè avendo a disposizione soltanto uno zero, ω_0 dovrà trovarsi su un punto della retta che passa per ω_a e che con pendenza di $-20db/dec$ arriva in ω_n a $-40db$.

Vogliamo quindi trovare una strategia per calcolare i coefficienti A e B tali che ci permettano di spostare ω_0 mantenendo la stessa ω_a e $m_\varphi \simeq 90^\circ$, cioè ottenere sempre un sistema stabile e che inseguia la sinusoidale. I coefficienti A e B dipenderanno, ovviamente, da ω_0 .

Nei tre esempi che seguono attribuiamo a ω_0 valori minori di 10^{-1} (come supposto all'inizio)

- $\omega_0 = 10^{-1.5}$
- $\omega_0 = 10^{-2}$
- $\omega_0 = 10^{-3.5}$

e progettiamo un controllore adatto:

1. Nel primo caso, $\omega_0 = 10^{-1.5}$, notiamo che per avere il picco posizionato sulla retta individuata prima, abbiamo bisogno di avere un guadagno pari a $20db$. Riusciamo ad avere la stessa ω_a con:

$$C_1(s) = \frac{10^{-2}(1 + 10^{1.5}s)}{s^2 + 10^{-3}}$$

2. Nel secondo esempio, $\omega_0 = 10^{-2}$, abbiamo bisogno invece di un guadagno superiore, $30db$, quindi progettiamo:

$$C_2(s) = \frac{10^{-2.5}(1 + 10^2s)}{s^2 + 10^{-4}}$$

3. Per il terzo esempio, infine, in cui $\omega_0 = 10^{-3.5}$ usiamo:

$$C_3(s) = \frac{10^{-4}(1 + 10^{3.5}s)}{s^2 + 10^{-7}}$$

ottenendo un guadagno di $60db$.

In questi esempi, in cui il valore di ω_0 diminuisce, abbiamo modificato A per poter aumentare il guadagno. Poiché, infatti, il guadagno della $G(s)$ é pari a $0db$, mentre quello del termine $\frac{1}{s^2+\omega_0^2}$ vale $\frac{1}{\omega_0^2}$ e cresce al decrescere di ω_0 , per aumentare il guadagno del necessario abbiamo dovuto attribuire ad A valori sempre piú piccoli:

- per avere guadagno pari a $20db \implies A = 10^{-2}$
- guadagno pari a $30db \implies A = 10^{-2.5}$
- guadagno pari a $60db \implies A = 10^{-4}$

Confrontando i tre esempi fatti, ricaviamo un'espressione che ci permette di mantenere $\omega_a = 10^{-0.5}$ al variare di ω_0 :

$$A = \omega_0 \cdot \omega_a$$

$$B = \frac{1}{\omega_0}$$

Sono quindi questi i valori da attribuire ai coefficienti A e B per progettare un controllore che mantenga stabilitá, *tracking* e stessa pulsazione di attraversamento. Avere la stessa ω_a significa che il sistema é in grado di rispondere con la stessa velocitá, ovunque sia posizionato il picco, cioé per qualsiasi valore della frequenza della sinusoide.

Dai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ moltiplicata per ciascun controllore dei tre esempi possiamo vedere come questa logica funzioni, mentre dal diagramma di Nyquist della funzione $C_3(s) \cdot G(s)$ vediamo come viene mantenuta la stabilitá del sistema.

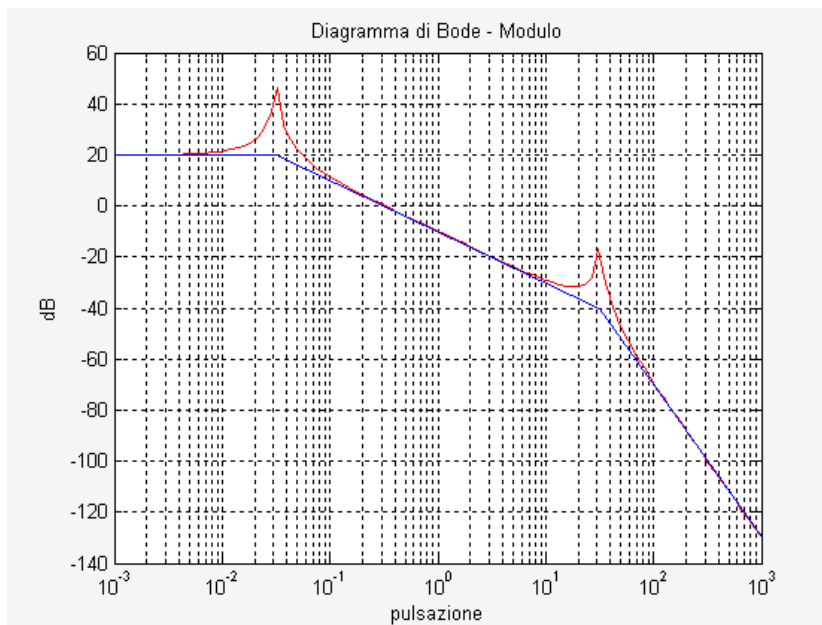


Figura 13: Diagramma di Bode del modulo di $C_1(s) \cdot G(s)$

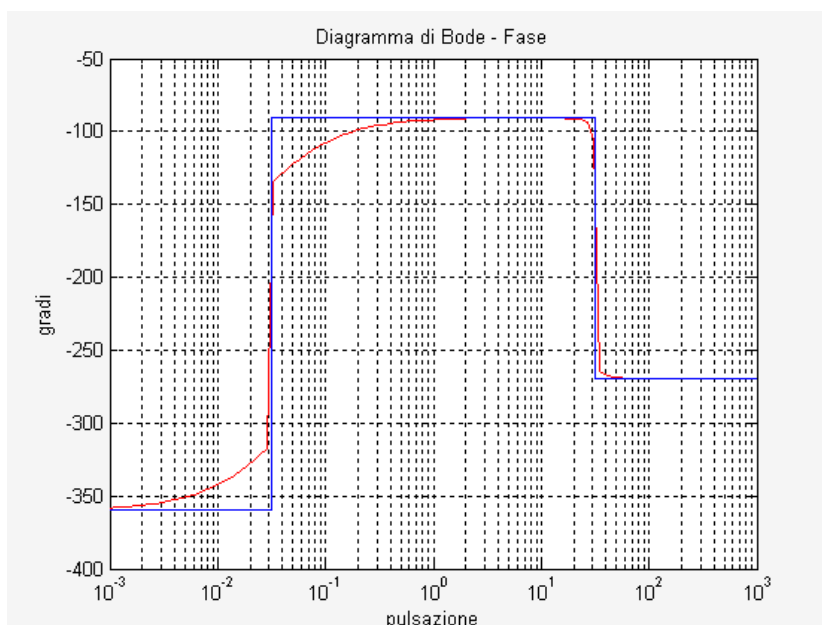


Figura 14: Diagramma di Bode della fase di $C_1(s) \cdot G(s)$

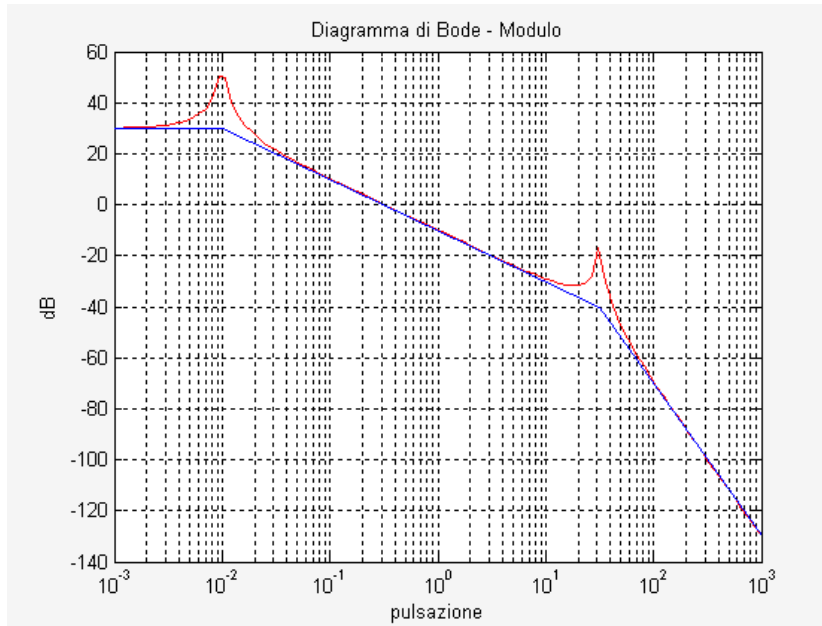


Figura 15: Diagramma di Bode del modulo di $C_2(s) \cdot G(s)$

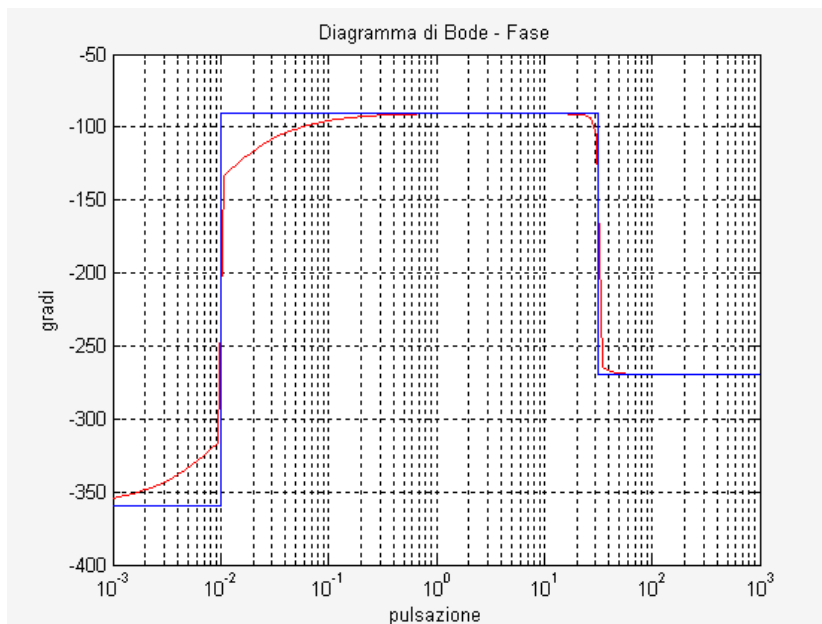


Figura 16: Diagramma di Bode della fase di $C_2(s) \cdot G(s)$

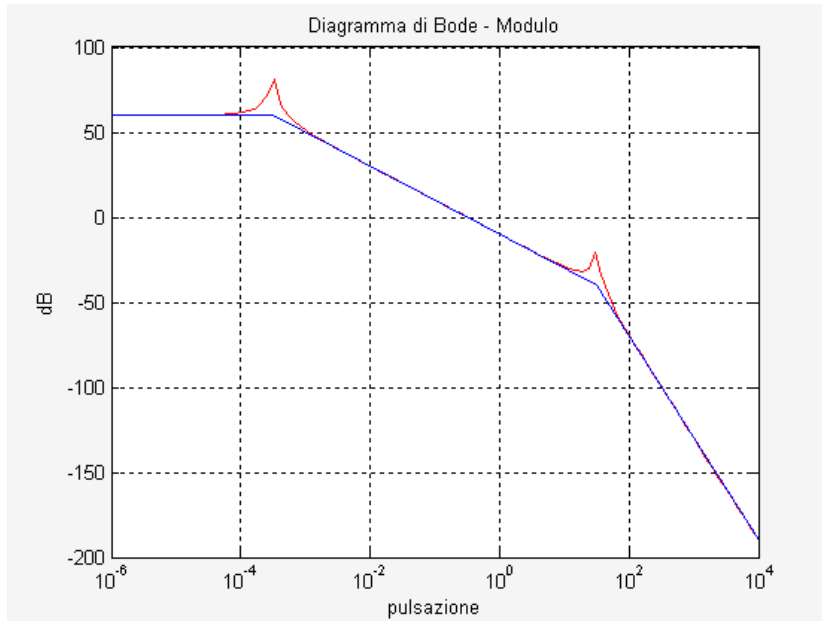


Figura 17: Diagramma di Bode del modulo di $C_3(s) \cdot G(s)$

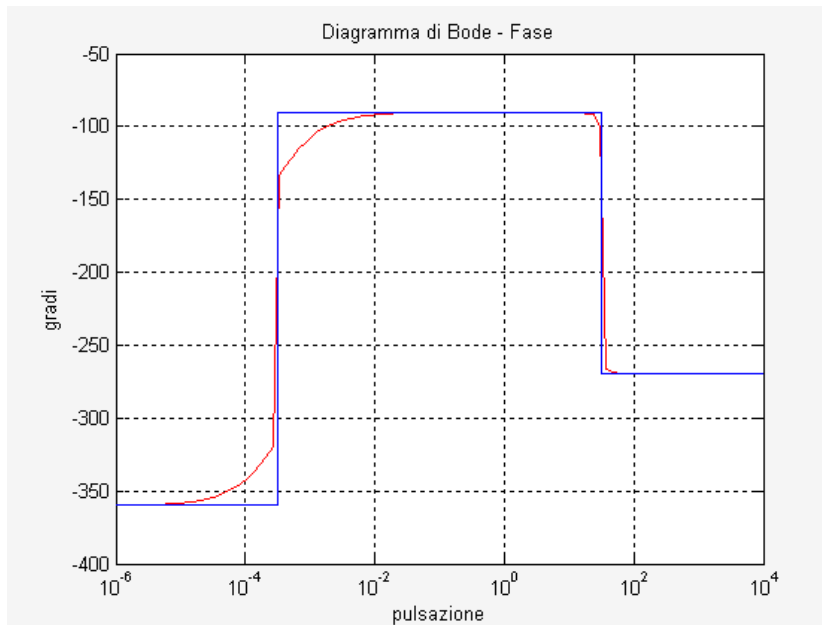


Figura 18: Diagramma di Bode della fase di $C_3(s) \cdot G(s)$

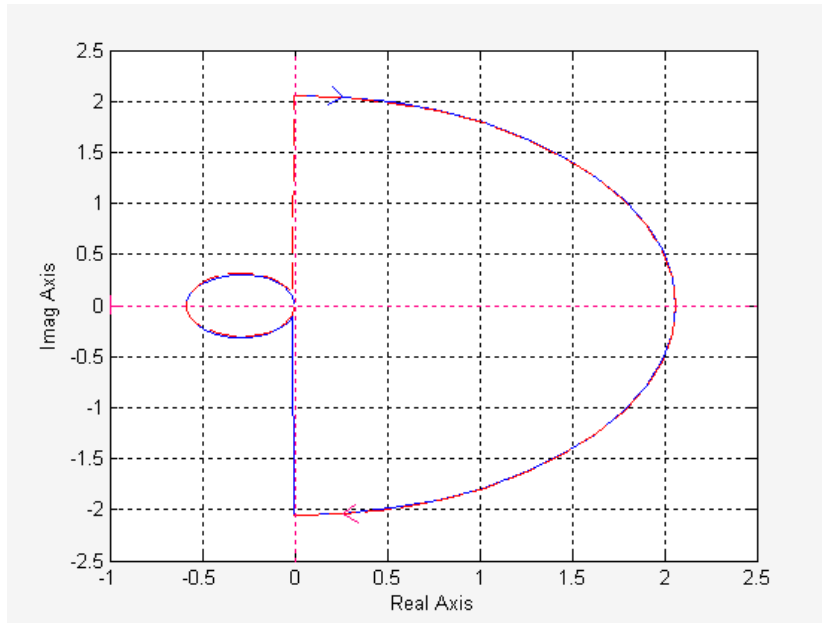


Figura 19: Diagramma di Nyquist di $C_3(s) \cdot G(s)$

Utilizzando lo schema *Simulink* dell'intero sistema visto poco fa verificiamo, infine, che tutto funzioni correttamente: ci aspettiamo che, inserendo di volta in volta i tre controllori progettati e cambiando di conseguenza anche il valore della frequenza della sinusoide in ingresso, il sistema continui ad inseguirla con la stessa velocità.

Vediamo dai risultati che si verifica ciò che ci aspettavamo: il sistema con i diversi controllori insegue perfettamente le varie sinusoidi.

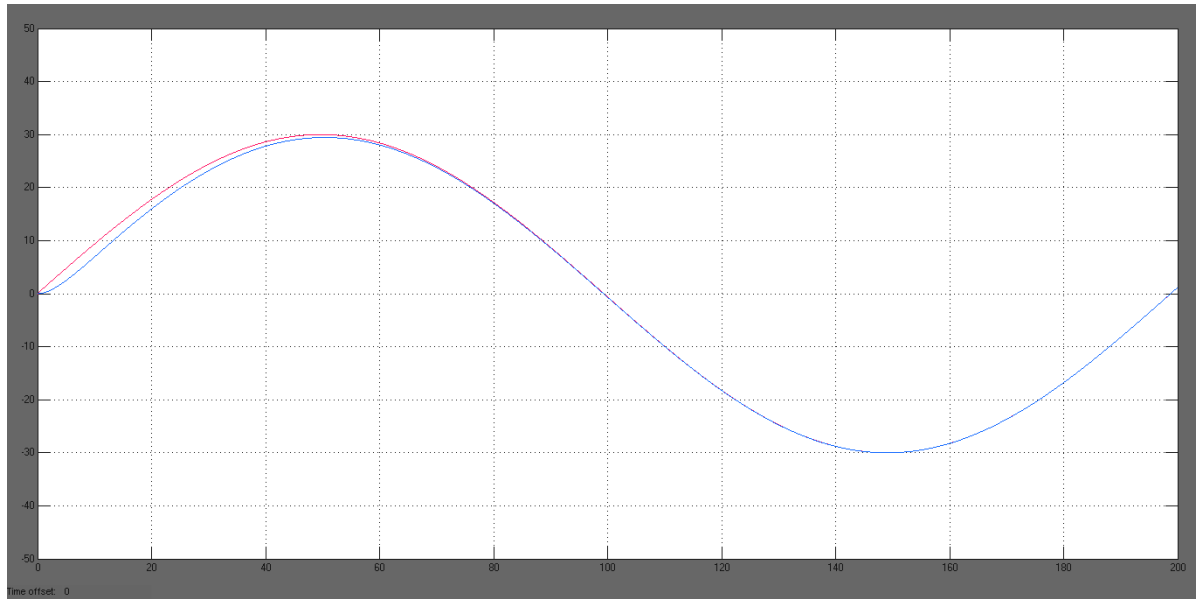


Figura 20: Comportamento del sistema $C_1(s) \cdot G(s)$ retroazionato.

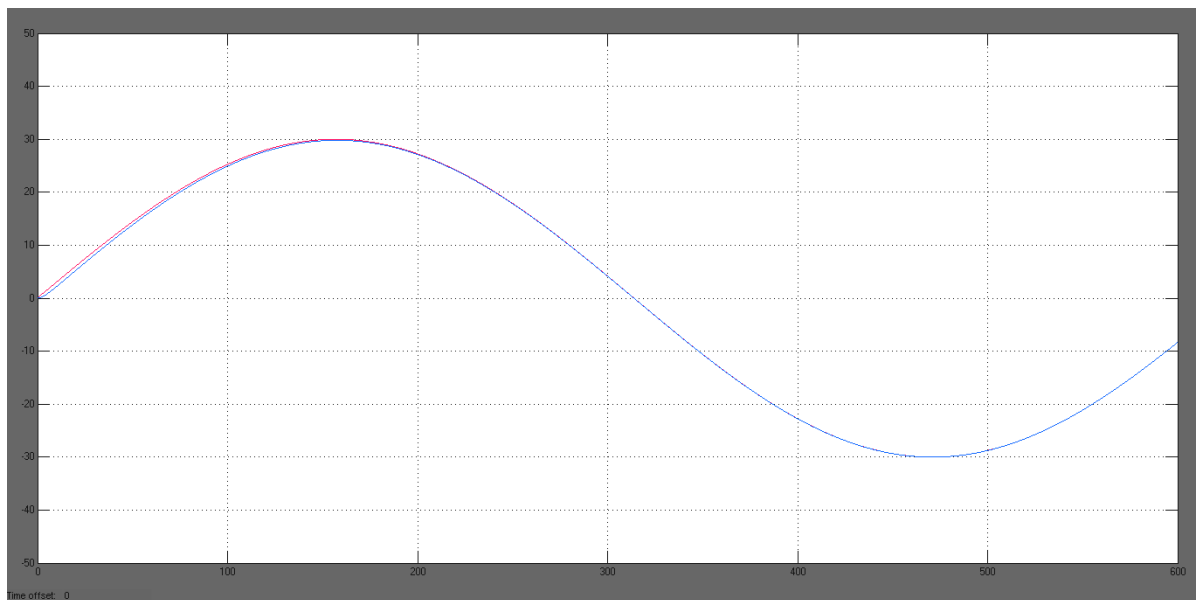


Figura 21: Comportamento del sistema $C_2(s) \cdot G(s)$ retroazionato.

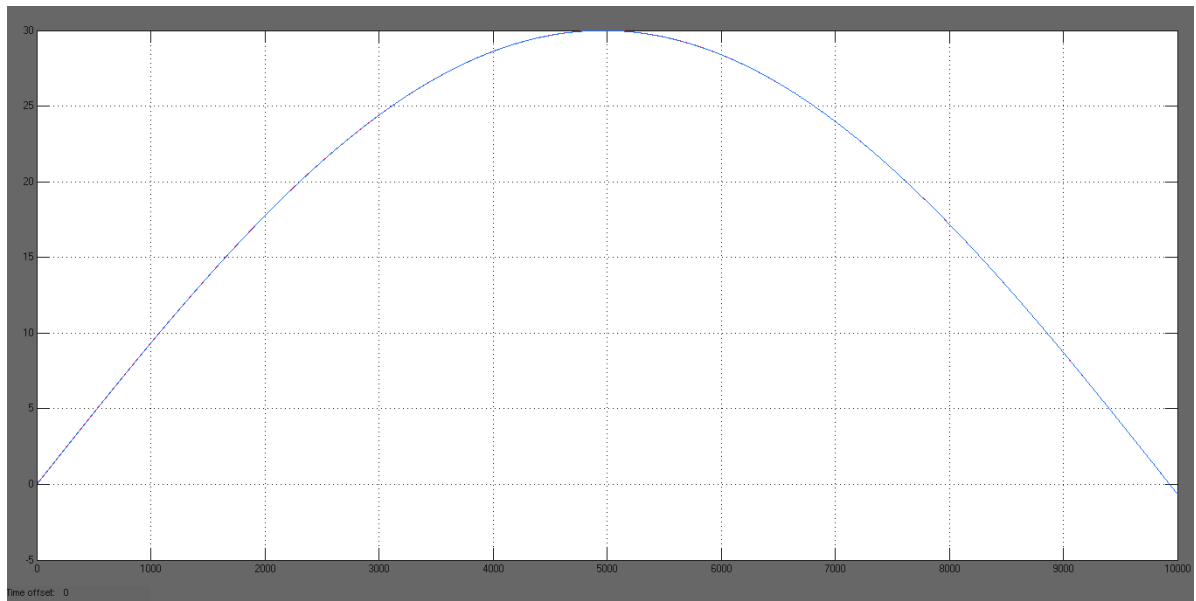


Figura 22: Comportamento del sistema $C_3(s) \cdot G(s)$ retroazionato.

5.2 Seconda soluzione

Nel paragrafo precedente abbiamo trattato il caso in cui ω_0 é molto minore di ω_n . Analizziamo di seguito gli altri casi cui avevamo accennato.

5.2.1 Caso ω_0 MOLTO MAGGIORE di ω_n

Consideriamo ora ω_0 molto maggiore di ω_n , ad esempio $\omega_0 = 10^3$. Inseriamo il diagramma di Bode della funzione

$$\begin{aligned} G(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 10^6} &= \\ &= \frac{1000}{s^2 + 0.632s + 1000} \cdot \frac{1}{s^2 + 10^6} \end{aligned}$$

a pagina seguente.

In questo caso dobbiamo innanzitutto traslare il diagramma del modulo al di sopra dell'asse delle ascisse aumentando il guadagno e, inoltre, dobbiamo fare in modo di migliorare anche il margine di fase per avere stabilit . Infatti abbiamo una fase troppo bassa a causa della presenza di quattro poli complessi. Per migliorare la fase saranno quindi necessari tre zeri nel controllore, che la porteranno da -360° a circa -90° . La frequenza di attraversamento si trover  necessariamente dopo ω_0 ; il picco infinito, infatti, verr  traslato sopra l'asse delle ascisse per evitare di avere pi  frequenze di attraversamento: il nostro obiettivo rimane quello di avere un'unica ω_a .

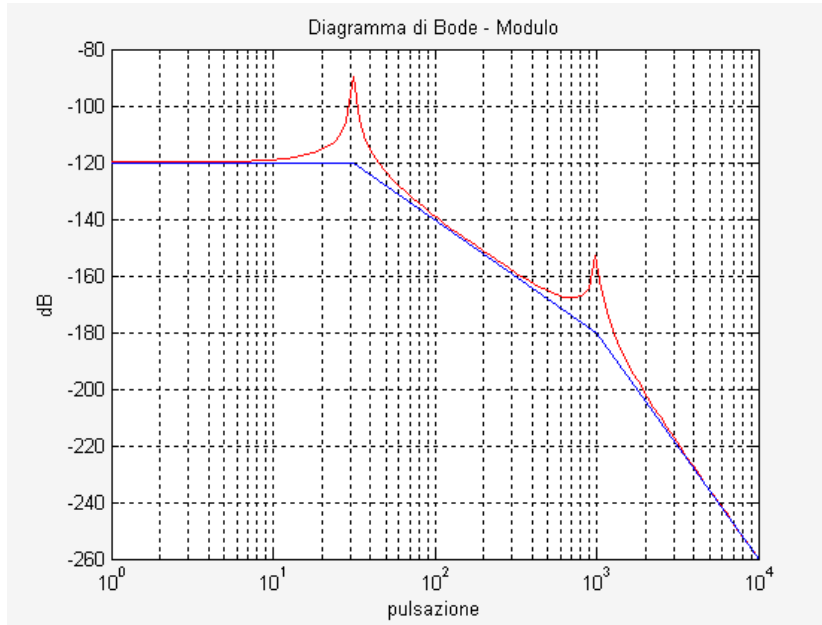


Figura 23: Diagramma di Bode del modulo di $G(s) \cdot \frac{1}{s^2+10^6}$

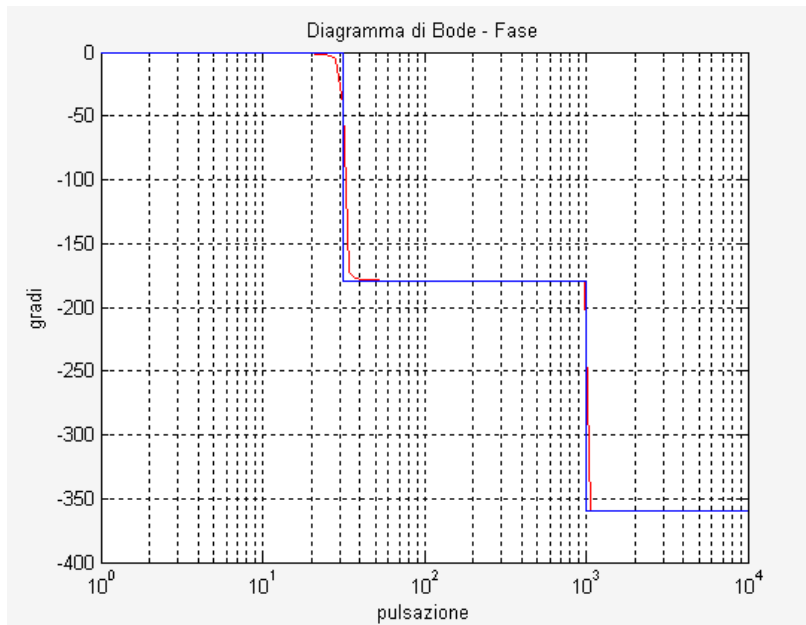


Figura 24: Diagramma di Bode della fase di $G(s) \cdot \frac{1}{s^2+10^6}$

Progettiamo ora un controllore adatto ad avere un'unica ω_a e un buon m_φ , quindi tale da garantire al sistema stabilit  e inseguimento della sinusoide.

Un possibile controllore in grado di verificare tutti i requisiti richiesti  :

$$C_4(s) = \frac{10^{10}(1 + 10^{-3}s)^3}{(s^2 + 10^6)(1 + 10^{-7}s)}$$

Il numeratore di $C_4(s)$   ora della forma $A(1 + Bs)^3$, con $A = 10^{10}$ e $B = 10^{-3}$, soltanto che al posto di un solo zero ne abbiamo posizionato tre tutti in $\omega_0 = 10^3$; inoltre abbiamo aggiunto un polo in alta frequenza (10^7) per rendere propria la funzione.

Dai diagrammi di Bode e di Nyquist della funzione

$$\begin{aligned} C_4(s) \cdot G(s) &= \\ &= \frac{10^{10}(1 + 10^{-3}s)^3}{(s^2 + 10^6)(1 + 10^{-7}s)} \cdot \frac{1000}{s^2 + 0.632s + 1000} \end{aligned}$$

si nota che la pulsazione di attraversamento si trova all'incirca in 10^4 e il margine di fase vale $m_\varphi \simeq 90^\circ$; inoltre si vede come viene garantita la stabilit  del sistema dal momento che la funzione non ha poli a parte reale positiva e il diagramma di Nyquist non compie nessun giro attorno al punto $-1 + j0$: vale infatti $N = +1 - 1 = 0$.

Notiamo inoltre che in questo caso la pulsazione di attraversamento   molto maggiore rispetto a quella dei casi analizzati in precedenza (ω_a infatti era compresa tra ω_0 e ω_n): questo significa che ora il sistema   pi  veloce rispetto a prima e raggiunge la sinusoide in un tempo molto pi  piccolo.

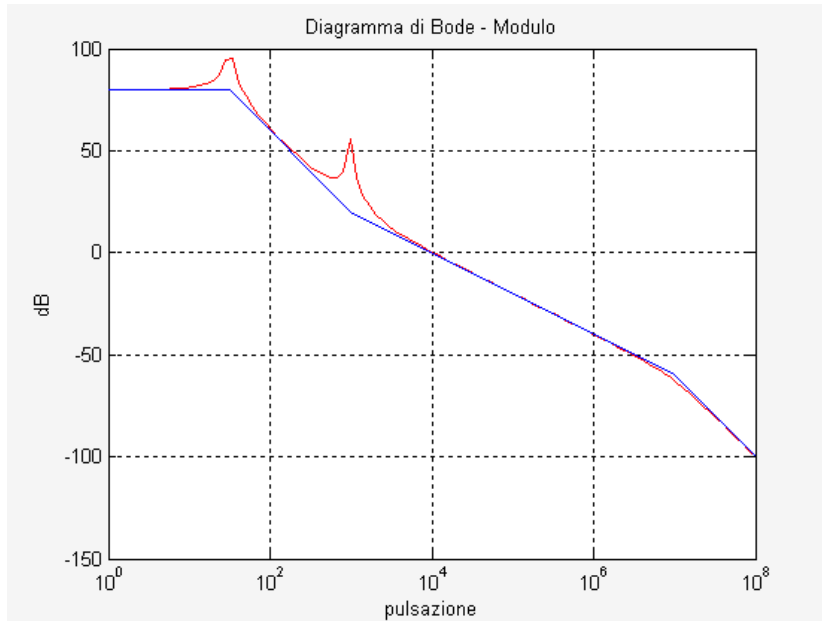


Figura 25: Diagramma di Bode del modulo di $C_4(s) \cdot G(s)$

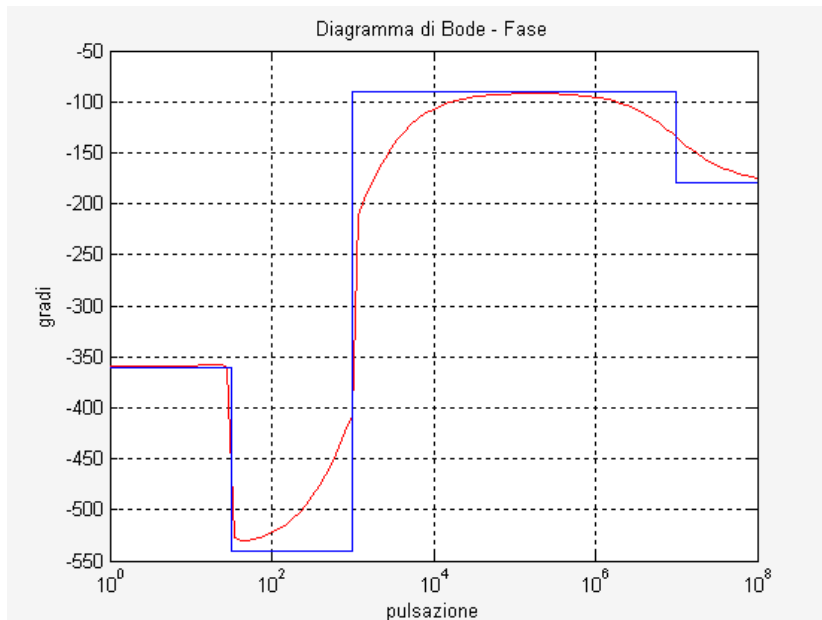


Figura 26: Diagramma di Bode della fase di $C_4(s) \cdot G(s)$

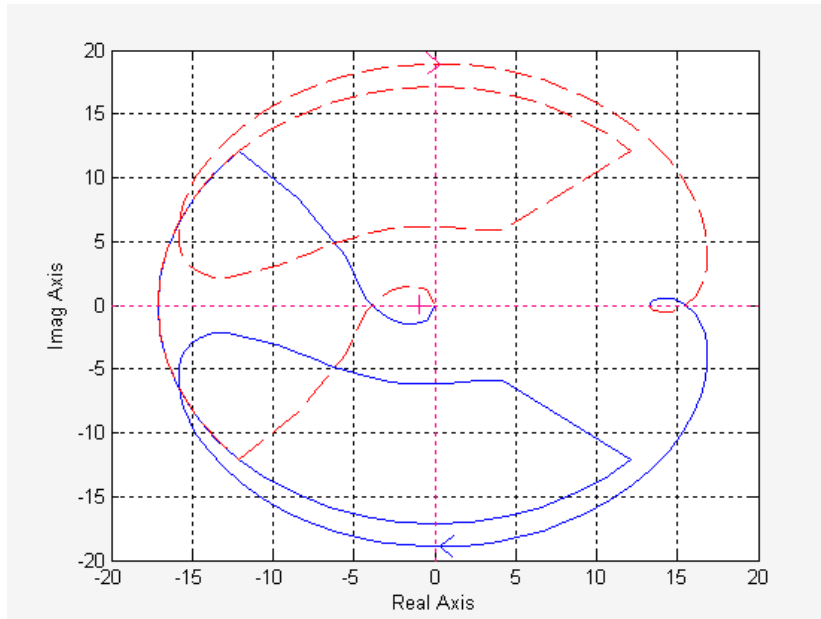


Figura 27: Diagramma di Nyquist di $C_4(s) \cdot G(s)$

Come il sistema insegue perfettamente la sinusoide si può vedere dal comportamento del nuovo schema *Simulink* di Figura 28.

In questo grafico abbiamo cambiato il modo di generare la sinusoide: ora essa viene generata tramite opportuni gradini e la funzione di trasferimento $\frac{1}{1+\frac{s^2}{\omega_0^2}}$.

Anche in questo caso (ω_0 molto maggiore di ω_n), quindi, siamo riusciti a progettare un certo controllore $C_4(s)$ che ci permette di raggiungere i nostri scopi.

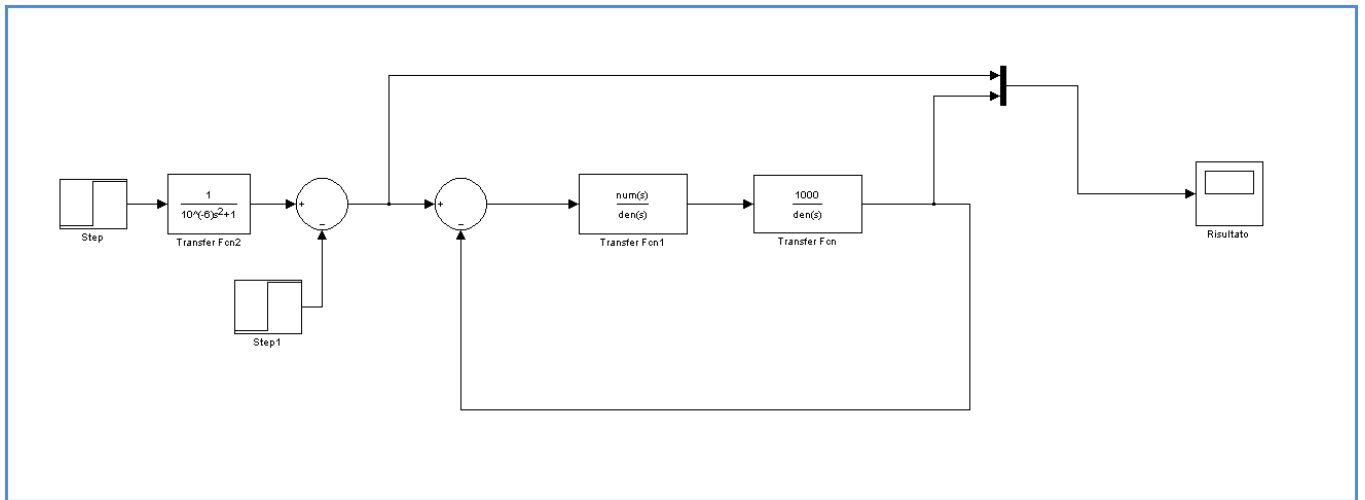


Figura 28: Struttura dell'intero sistema con $C_4(s)$

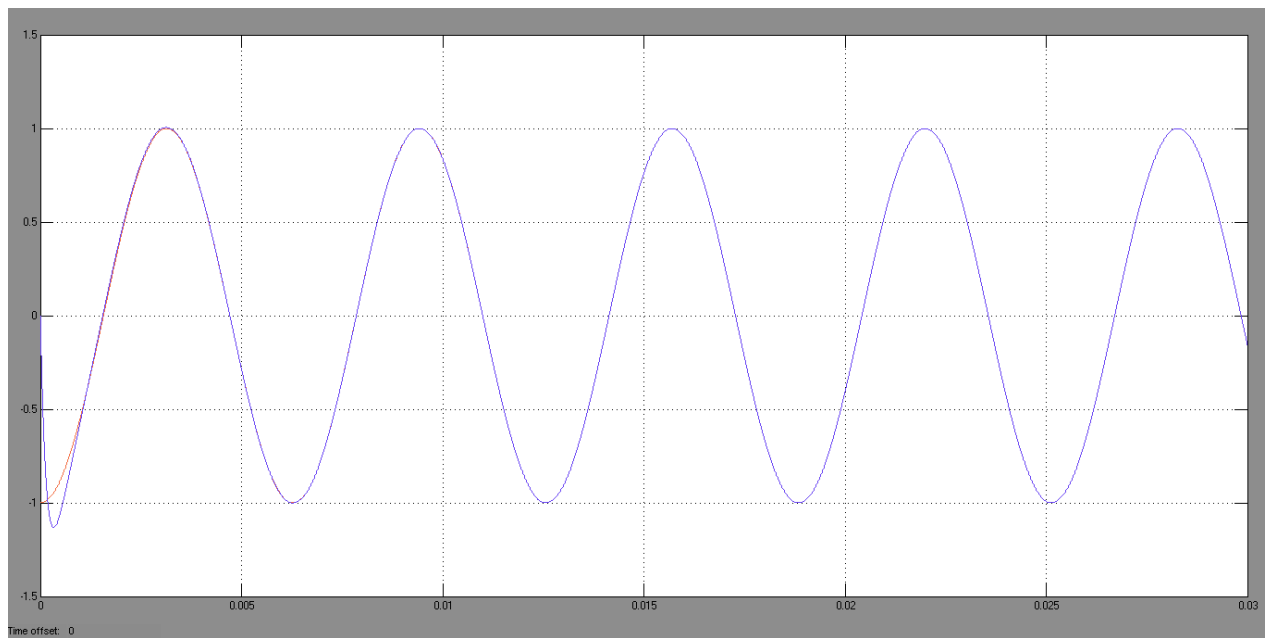


Figura 29: Comportamento del sistema $C_4(s) \cdot G(s)$ retroazionato.

Come controesempio, possiamo vedere dalle figure successive che, mantenendo nel sistema la funzione $C_4(s) \cdot G(s)$ ma cambiando il valore della frequenza della sinusoide in ingresso, il sistema non insegue piú l'ingresso.

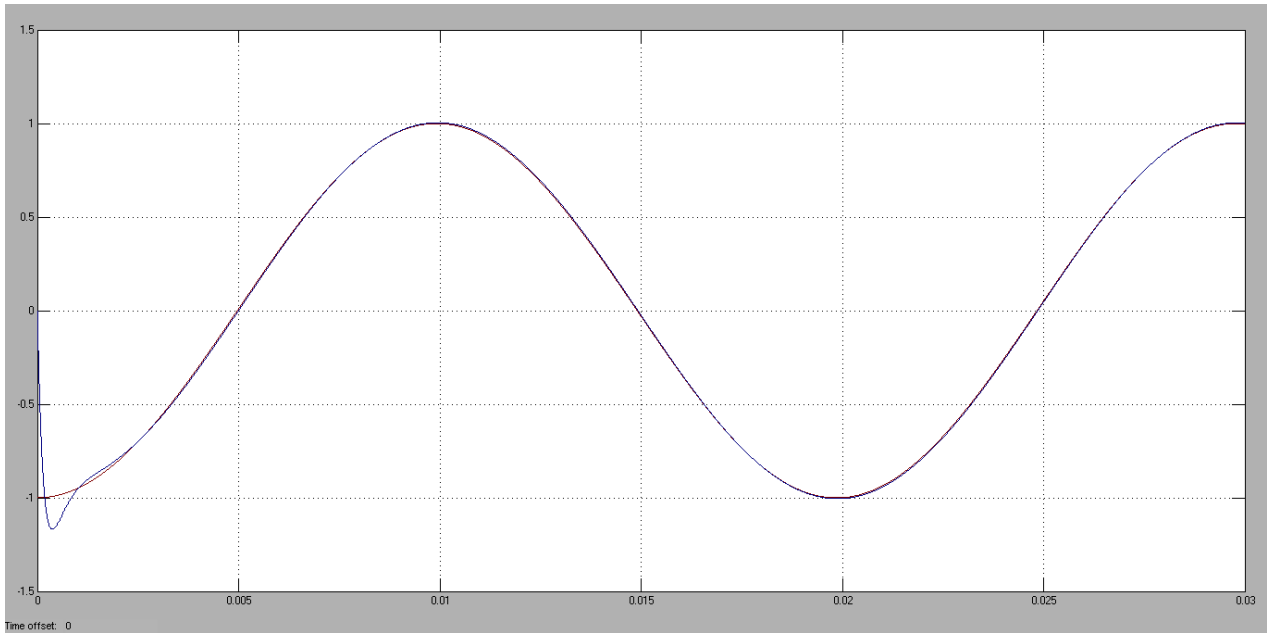


Figura 30: Comportamento del sistema $C_4(s) \cdot G(s)$ retroazionato con frequenza della sinusoide pari a $\omega_1 = 10^{2.5}$.

Per motivi grafici, da questa figura non si nota che il sistema non insegue la sinusoide: questo é dovuto al fatto che l'errore a regime permanente é molto piccolo. Infatti esso vale:

$$e_{rp} = \frac{1}{|CG|_{\omega_i}}$$

dove $|CG|_{\omega_i}$ é il guadagno della funzione CG a quella particolare frequenza (ω_i).

Qui abbiamo ipotizzato che $\omega_1 = \sqrt{10^5} = 10^{2.5}$: a questa frequenza il diagramma del modulo della funzione $C_4(s) \cdot G(s)$ ha guadagno all'incirca pari a $40db$ (vedi figura 25), quindi l'errore diventa molto piccolo.

Si può notare che il sistema non insegue la sinusoide dallo zoom che abbiamo fatto del risultato precedente:

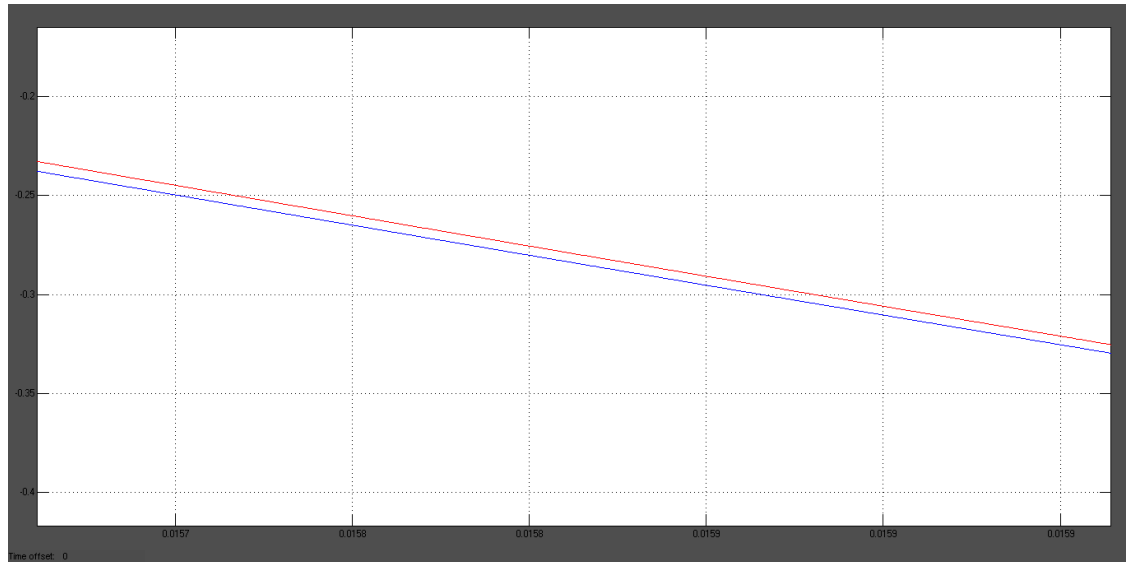


Figura 31: Zoom del risultato precedente con $\omega_1 = 10^{2.5}$.

Come si vede, abbiamo due linee distinte: una relativa alla sinusoide in ingresso e l'altra che rappresenta l'uscita del sistema.

La differenza si nota maggiormente aumentando la frequenza, piú precisamente assumendo $\omega_2 = 10^4$, caso in cui la funzione $C_4(s) \cdot G(s)$ ha guadagno pari all'incirca a $0db$.

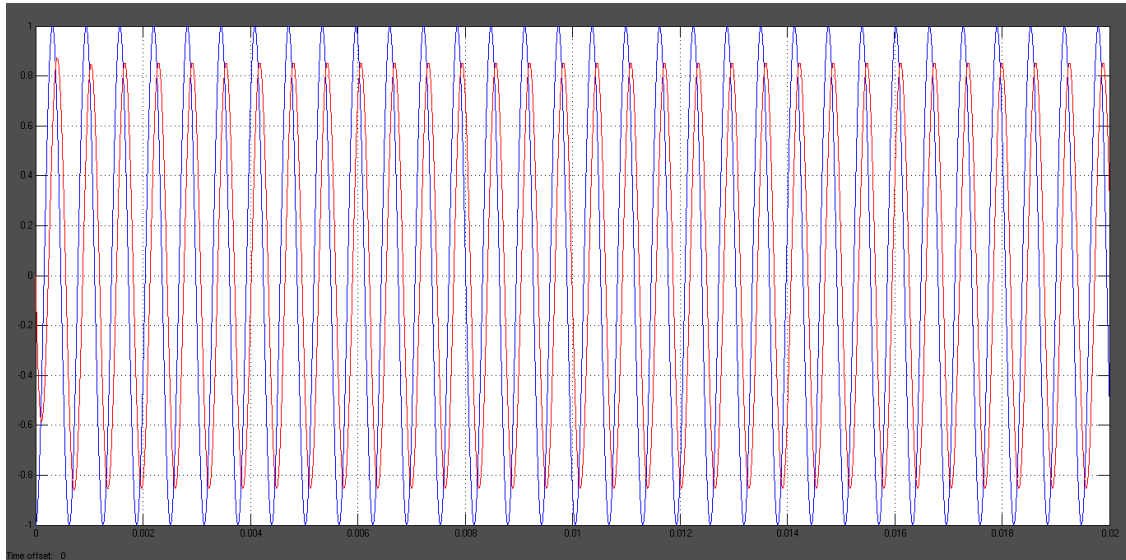


Figura 32: Comportamento del sistema $C_4(s) \cdot G(s)$ retroazionato con frequenza della sinusoide pari a $\omega_2 = 10^4$.

In questo paragrafo, quindi per il caso in cui $\omega_0 \gg \omega_n$, abbiamo progettato il controllore $C_4(s)$, il quale é in grado di verificare tutti i requisiti richiesti; esso é della forma:

$$C(s) = \frac{A(1 + Bs)^3}{(s^2 + \omega_0^2)(1 + Cs)}$$

Vogliamo ora ricavare un'espressione che ci permetta di calcolare i coefficienti A e B , cioé una formula generale che sia in grado di determinare un controllore adatto quando ci troviamo nel caso in cui ω_0 é molto maggiore di ω_n .

Come abbiamo fatto nel caso precedente ($\omega_0 \ll \omega_n$), vediamo, quindi, degli esempi di possibili controllori tali da garantire stabilitá e *tracking* al sistema quando $\omega_0 \gg \omega_n$. Manteniamo il valore $\omega_0 = 10^3$ per semplicitá di progetto, altrimenti dovremmo lavorare con potenze di 10 molto alte.

1. Nel primo esempio progettiamo:

$$C_5(s) = \frac{10^{11}(1 + 10^{-3}s)^3}{(s^2 + 10^6)(1 + 10^{-7}s)}$$

con il quale la funzione $C_5(s) \cdot G(s)$ assume guadagno iniziale pari a $100db$ e pulsazione di attraversamento $\omega_a = 10^5$.

2. Con il controllore

$$C_6(s) = \frac{10^{12}(1 + 10^{-3}s)^3}{(s^2 + 10^6)(1 + 10^{-7}s)}$$

otteniamo, invece, guadagno pari a $120db$ e $\omega_a = 10^6$.

3. Infine, utilizzando il controllore

$$C_7(s) = \frac{10^{15}(1 + 10^{-3}s)^3}{(s^2 + 10^6)(1 + 10^{-10}s)}$$

abbiamo $\omega_a = 10^9$ e guadagno di $180db$.

Nel controllore dell'ultimo esempio abbiamo posizionato il polo ad una frequenza maggiore rispetto ai due esempi precedenti, in modo tale che non interferisse con il diagramma del modulo della funzione $C_7(s) \cdot G(s)$ modificandone la pulsazione di attraversamento.

Confrontando gli esempi fatti, ricaviamo una formula che ci permette di calcolare i coefficienti A e B di un possibile controllore adatto al caso $\omega_0 \gg \omega_n$, sempre mantenendo fisso ω_n .

$$A = \omega_0 \cdot \omega_a \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2$$

$$B = \frac{1}{\omega_0}$$

Inoltre, nell'espressione del controllore é presente anche il coefficiente C , che indica la posizione del polo in alta frequenza, il cui valore che può assumere non ha restrizioni, a patto che sia posizionato dopo ω_a .

Possiamo vedere come queste espressioni siano valide e corrette dai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ moltiplicata per ciascun controllore dei tre esempi, mentre dal diagramma di Nyquist della funzione $C_5(s) \cdot G(s)$ vediamo come viene mantenuta la stabilità del sistema: vale infatti $N = +1 - 1 = 0$ e la funzione $C_5(s) \cdot G(s)$ non ha poli a parte reale negativa.

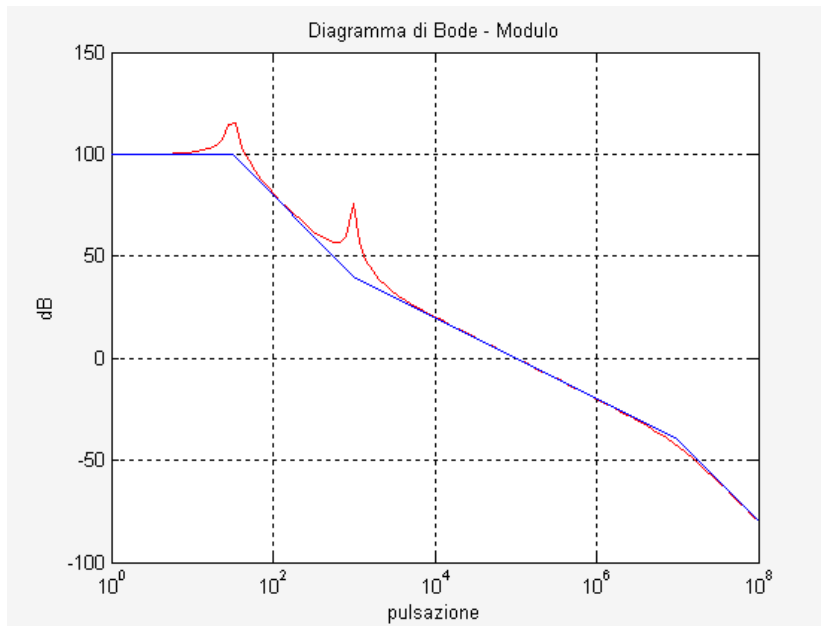


Figura 33: Diagramma di Bode del modulo di $C_5(s) \cdot G(s)$

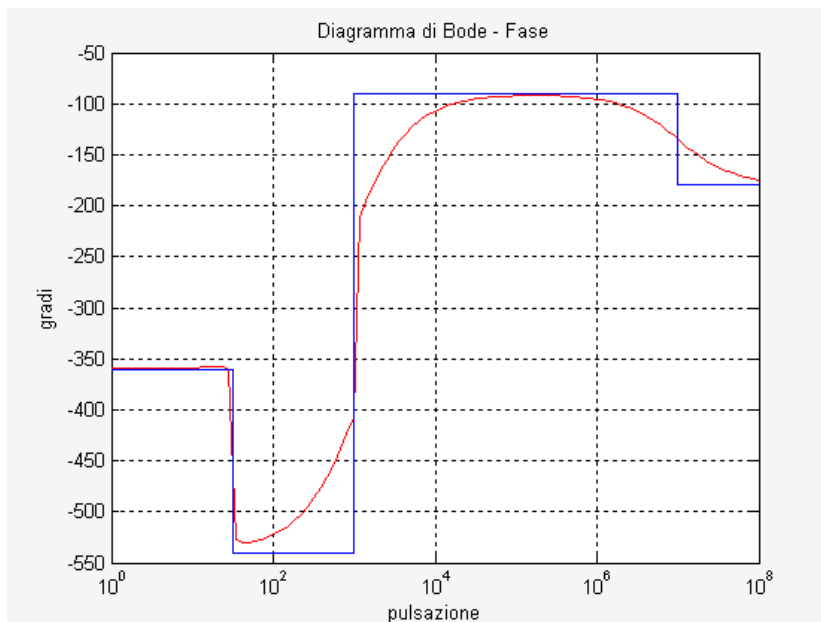


Figura 34: Diagramma di Bode della fase di $C_5(s) \cdot G(s)$

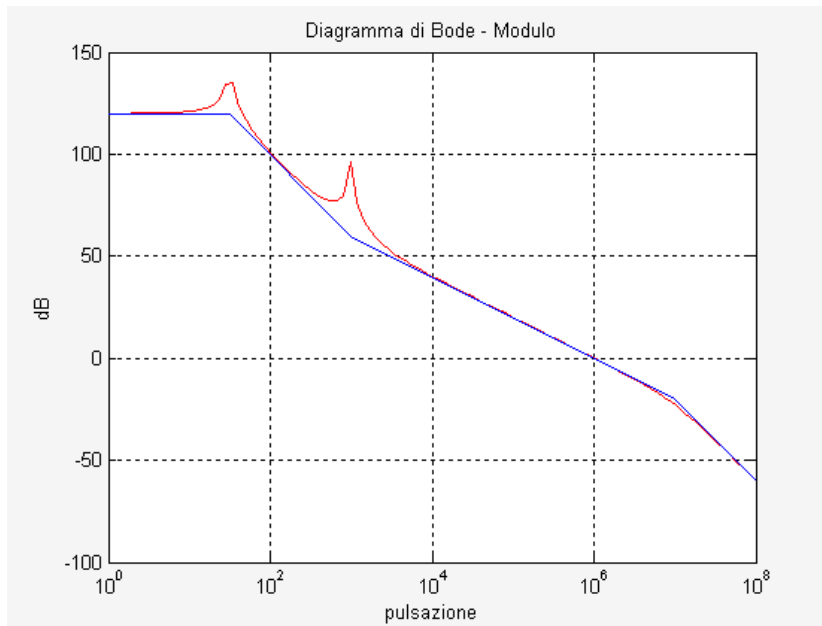


Figura 35: Diagramma di Bode del modulo di $C_6(s) \cdot G(s)$

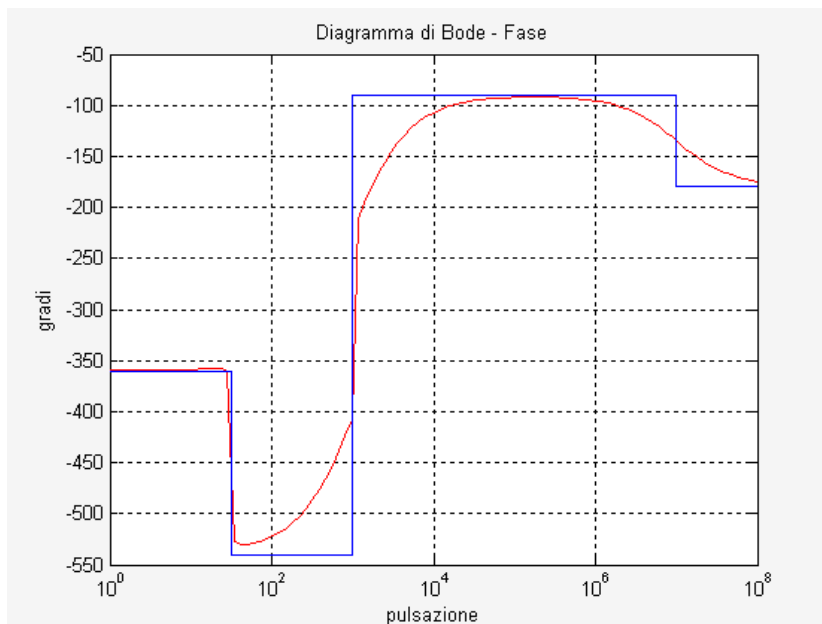


Figura 36: Diagramma di Bode della fase di $C_6(s) \cdot G(s)$

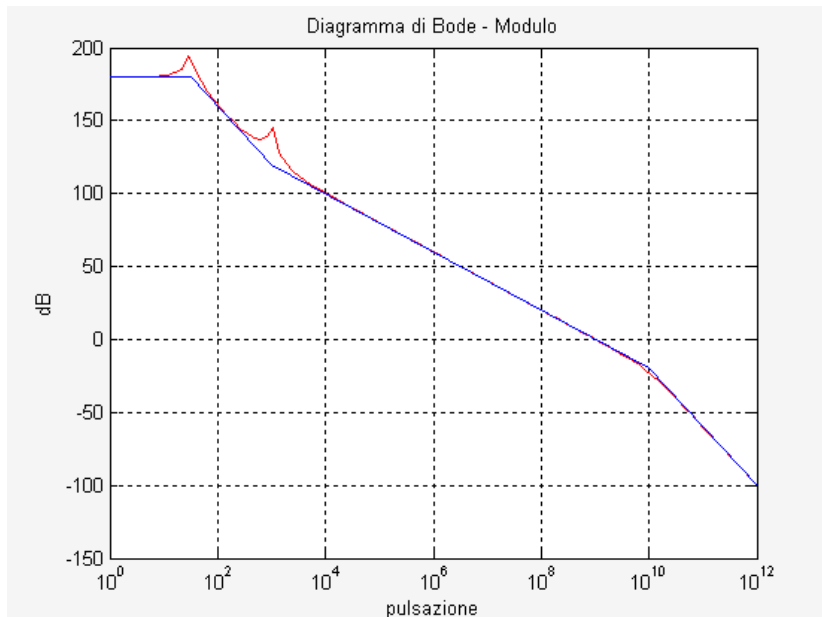


Figura 37: Diagramma di Bode del modulo di $C_7(s) \cdot G(s)$

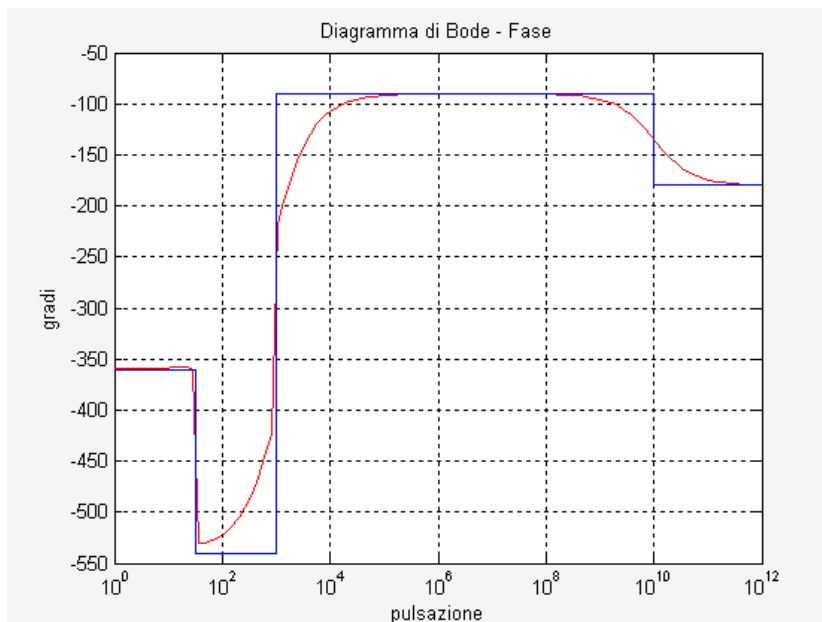


Figura 38: Diagramma di Bode della fase di $C_7(s) \cdot G(s)$

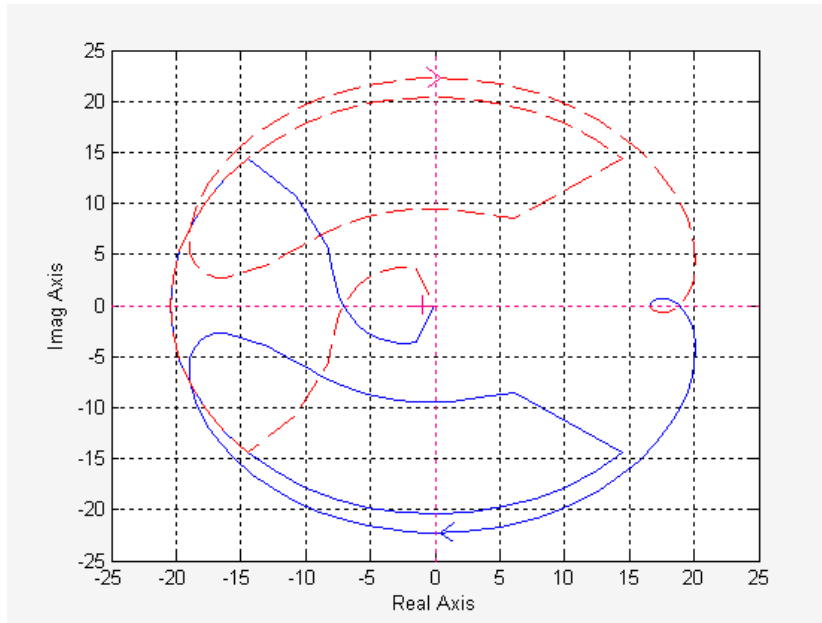


Figura 39: Diagramma di Nyquist di $C_5(s) \cdot G(s)$

Utilizzando lo schema *Simulink* della Figura 28 vediamo, infine, che i controllori dei primi due esempi funzionano correttamente e garantiscono al sistema l'inseguimento della sinusoide.

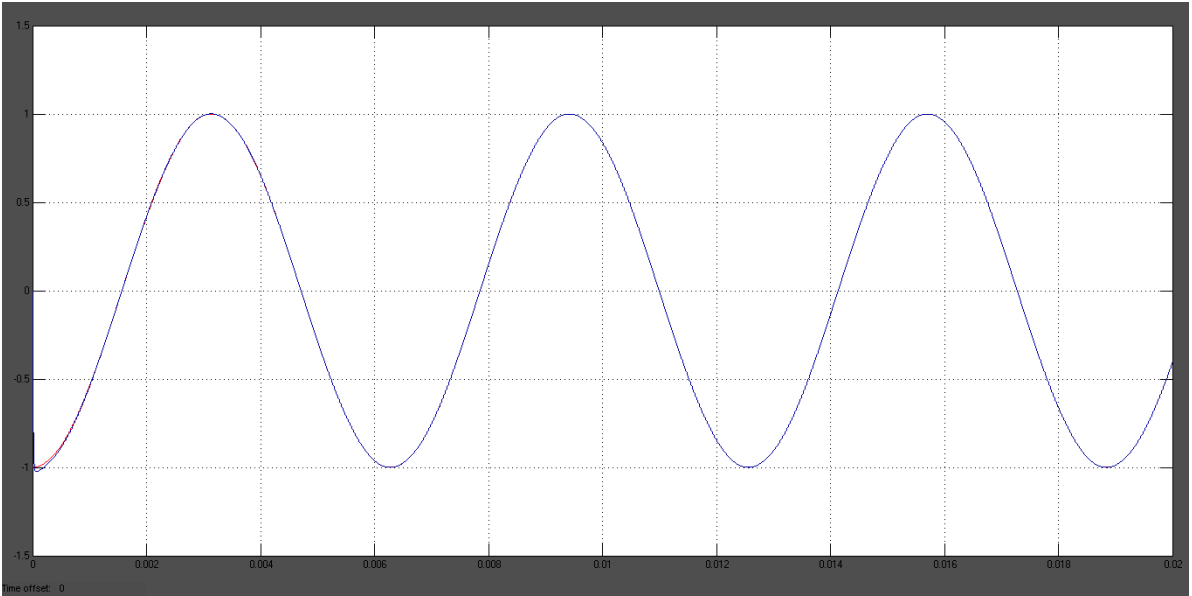


Figura 40: Comportamento del sistema $C_5(s) \cdot G(s)$ retroazionato.

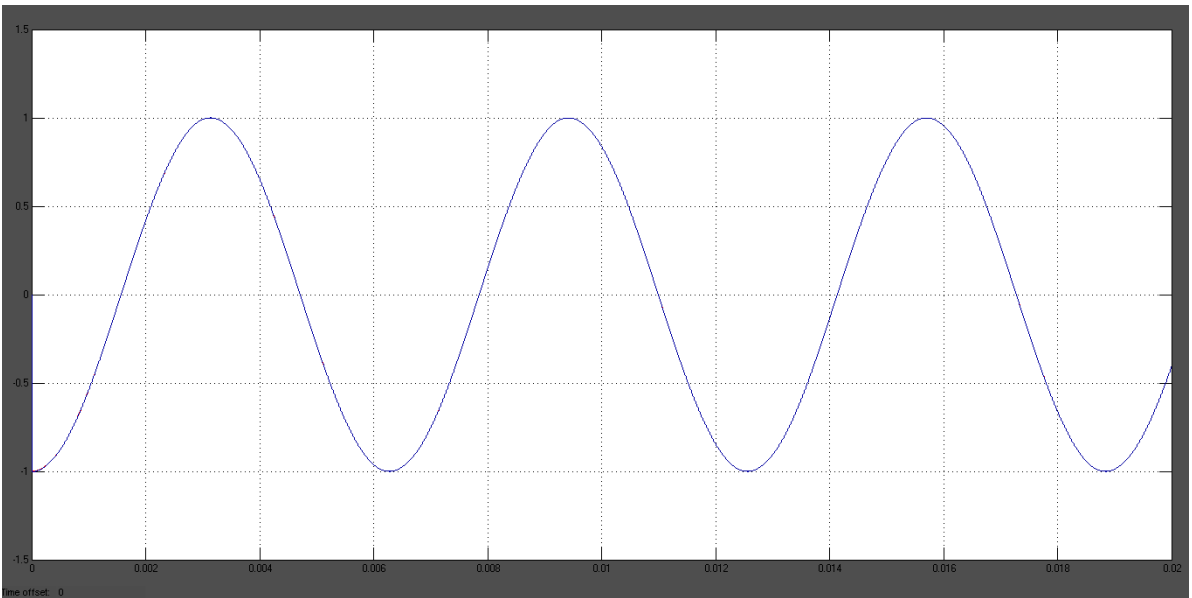


Figura 41: Comportamento del sistema $C_6(s) \cdot G(s)$ retroazionato.

5.2.2 Caso $\omega_0 > \omega_n$, $\omega_0 < \omega_n$

Ipotizziamo ora che i due picchi relativi a ω_0 e a ω_n si trovino vicini, sia nel caso in cui $\omega_0 > \omega_n$, che $\omega_0 < \omega_n$.

In entrambi i casi, dai diagrammi di Bode della funzione $G(s) \cdot \frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$ si noterebbe come la fase sia molto bassa (-360°) e il modulo abbia una pendenza nel tratto finale pari a -80db/dec . Tutto questo é dovuto al fatto che la funzione presenta quattro poli complessi, coniugati a due a due.

L'analisi di questo caso é quindi del tutto identica a quella del caso precedente. Anche in questo caso, infatti, per avere stabilitá e *tracking* una possibile soluzione sarebbe quella di posizionare tre zeri in ω_0 se $\omega_0 > \omega_n$, in ω_n se invece $\omega_0 < \omega_n$.

Il controllore che verifica i requisiti richiesti é sempre della forma:

$$C(s) = \frac{A(1 + Bs)^3}{(s^2 + \omega_0^2)(1 + Cs)}$$

i cui coefficienti sono ricavabili dalle espressioni:

$$A = \omega_0 \cdot \omega_n \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2$$

$$B = \frac{1}{\omega_0}$$

5.2.3 Caso ω_0 UGUALE a ω_n

Analizziamo ora il caso in cui ω_0 coincide con ω_n : in questo caso i due picchi andranno a sovrapporsi.

Possiamo trattare questa situazione semplicemente come caso particolare dei casi precedenti. Infatti, poiché i due picchi coincidono, avremo nel diagramma di Bode della funzione una fase molto bassa (-360°) e una pendenza del modulo che nel tratto finale vale -80db/dec , causate entrambe dalla presenza in $\omega_0 \equiv \omega_n$ di quattro poli complessi.

Il controllore sarà, quindi, sempre del tipo:

$$C(s) = \frac{A(1 + Bs)^3}{(s^2 + \omega_0^2)(1 + Cs)}$$

con $B = \frac{1}{\omega_0}$, il quale indica la presenza dei tre zeri in ω_0 , un polo in alta frequenza per rendere proprio il controllore e

$$A = \omega_0 \cdot \omega_a \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2 = \omega_0 \cdot \omega_a$$

poiché ω_0 e ω_n coincidono.

Con un controllore di questa forma riusciamo, anche in questo caso, a perseguire i nostri obiettivi: stabilità e *tracking*.

6 Modello Reale

Finora abbiamo considerato solo il modello linearizzato del sistema fisico e basandoci su tale modello abbiamo trovato dei compensatori adeguati. In questo capitolo vogliamo invece analizzare come si comporta il sistema non linearizzato e verificare se i compensatori vanno bene anche in tal caso. In particolare vogliamo vedere come il sistema non linearizzato funzioni, cioè insegua perfettamente la sinusoide, con il primo compensatore progettato:

$$C(s) = \frac{10^{-1.5}(1 + 10s)}{s^2 + 10^{-2}}$$

Riprendiamo dunque l'equazione ricavata precedentemente che descrive il moto del sistema non linearizzato:

$$\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} + \frac{\nu}{ml} \frac{d\vartheta(t)}{dt} + \frac{g}{l} \sin\vartheta(t) = -\frac{1}{ml^2} ku(t)$$

Tale equazione si può riscrivere nella forma:

$$\ddot{\vartheta}(t) + A\dot{\vartheta}(t) + B \sin \vartheta(t) = Cu(t)$$

$$\ddot{\vartheta}(t) = -A\dot{\vartheta}(t) - B \sin \vartheta(t) + Cu(t)$$

dove i parametri inseriti valgono rispettivamente:

- $A = 0.632$
- $B = 1000$
- $C = 1000$

tali valori li abbiamo ricavati analizzando il sistema in catena aperta.

Usando *Simulink* implementiamo lo schema che rappresenta il modello dato da tale equazione. Su questo schema dovremo ora vedere se il compensatore $C(s)$ é in grado di far funzionare il sistema, ottenendo stabilit  e *tracking*.

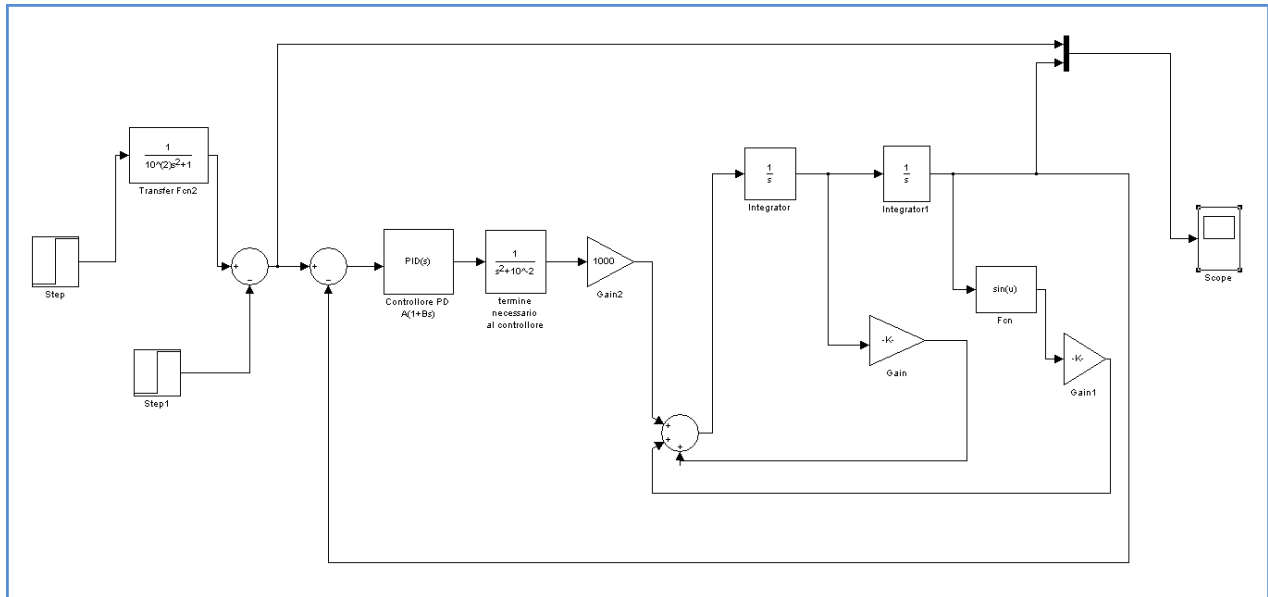


Figura 42: Schema *Simulink* dell'intero sistema non linearizzato con il controllore $C(s)$.

Inseriamo l'andamento ottenuto: il sistema non linearizzato insegue perfettamente la sinusoide con lo stesso controllore progettato per il sistema lineare.

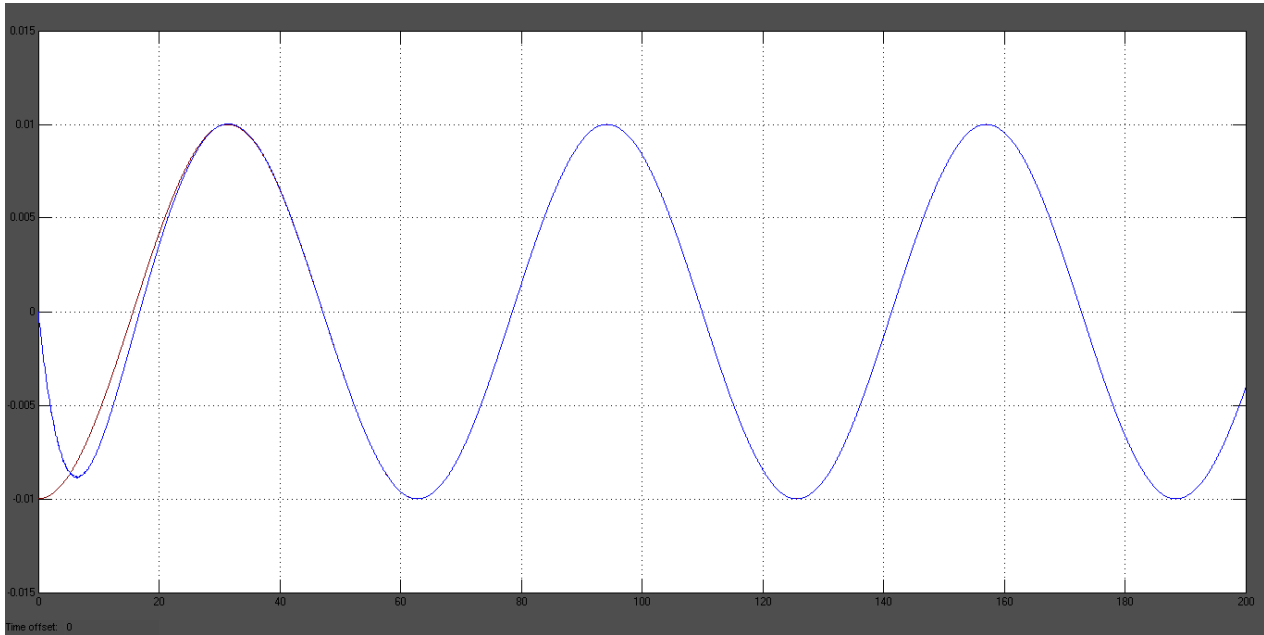


Figura 43: Comportamento del sistema non linearizzato retroazionato con ampiezza della sinusoide pari a 0.01.

Abbiamo raggiunto, quindi, gli obiettivi prefissati.

Nella figura precedente, dove abbiamo ottenuto l'andamento del sistema, abbiamo imposto come ampiezza della sinusoide il valore 0.01: con tale ampiezza le due sinusoidi si sovrappongono perfettamente.

Cambiando l'ampiezza, ad esempio ponendo il valore 1, vediamo come le sinusoidi non si sovrappongono perfettamente:

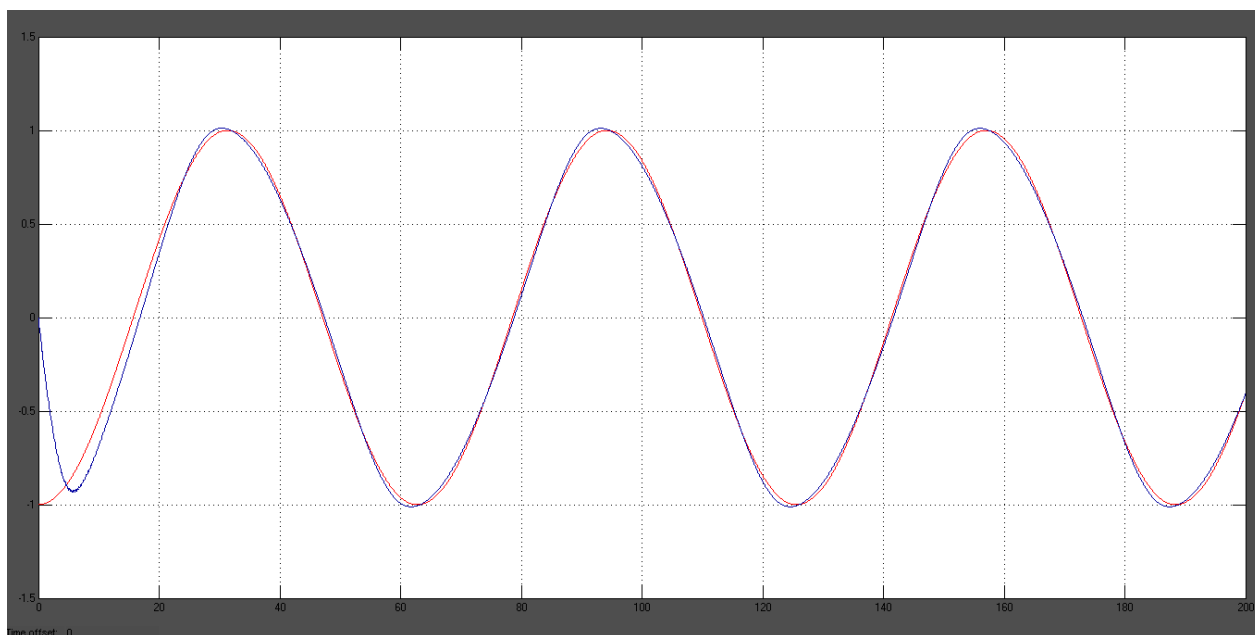


Figura 44: Comportamento del sistema non linearizzato retroazionato con ampiezza della sinusoide pari a 1.

Quindi con valori di ampiezza piú grandi le cose peggiorano, mentre si ottiene un buon comportamento con valori sempre piú piccoli.

Questo fenomeno é dovuto al fatto che il sistema é non lineare: la non linearitá, infatti, influisce sul comportamento del sistema tramite l'ampiezza della sinusoide che poniamo come ingresso. Se l'ampiezza aumenta, significa che le oscillazioni della sinusoide diventano piú ampie, quindi aumenta l'angolo $\vartheta(t)$, e di conseguenza ciò causa l'uscita dell'angolo dal piccolo intorno dell'origine dove vale l'approssimazione $\sin \vartheta(t) \simeq \vartheta(t)$, approssimazione la cui validitá é alla base della sostituibilitá del sistema non lineare con la sua versione non linearizzata.

La non linearitá, quindi, incide maggiormente all'aumentare dell'angolo $\vartheta(t)$.

Facciamo ora un'ulteriore verifica dei risultati ottenuti cambiando la frequenza della sinusoide in ingresso. Ipotizziamo che valga 10^{-2} (invece di essere uguale a $\omega_0 = 10^{-1}$): ci aspettiamo che il sistema non linearizzato non insegua piú la sinusoide, come avevamo verificato anche per il caso lineare.

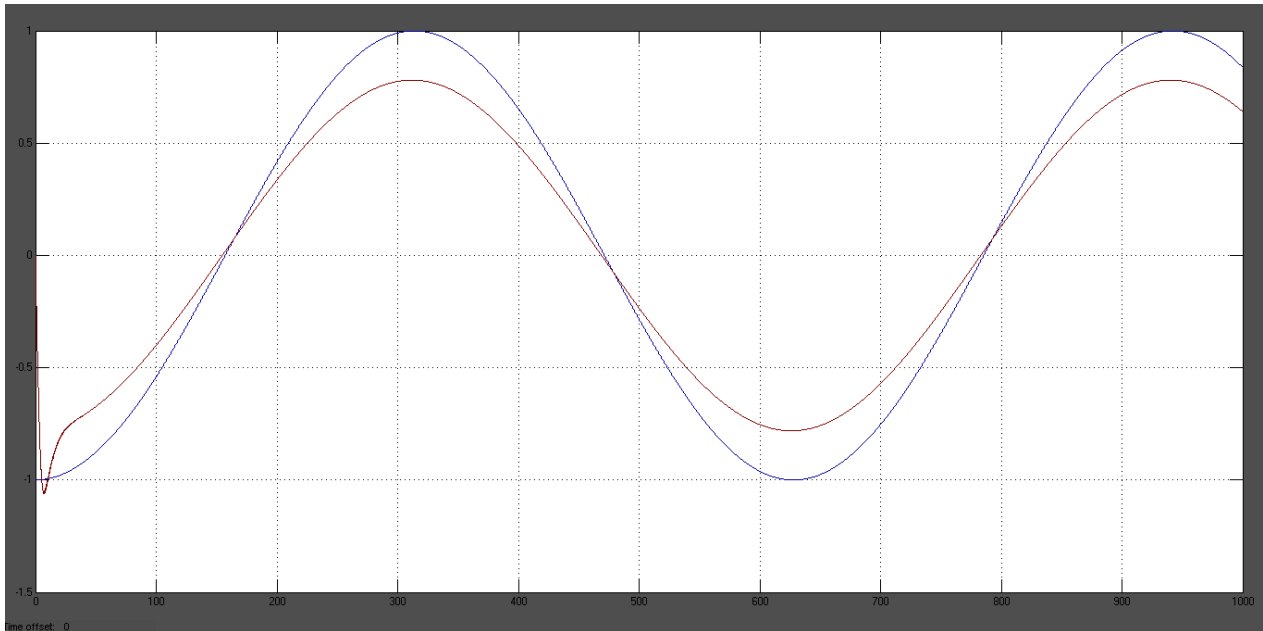


Figura 45: Comportamento del sistema non linearizzato retroazionato con sinusoidi di ampiezza 0.01, ma frequenza diversa.

Si nota molto bene come nella figura vi siano due sinusoidi ben distinte: modificando la frequenza, quindi, non abbiamo piú *tracking*.

Con questo controesempio concludiamo la nostra trattazione.