

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Studio della dinamica di alcuni
sistemi meccanici anolonomi**

Relatori:

Prof. Francesco Fassò

Dott. Nicola Sansonetto

Laureanda:

Sara Galasso

Anno Accademico 2014/2015

al papà,
per la forza dimostrataci

Indice

Introduzione	vii
1 Sistemi meccanici anolonomi	1
1.1 Vincoli anolonomi	1
1.2 Esempio: moto di puro rotolamento	2
1.3 Equazioni del moto	3
1.4 Equazioni di Poincaré-Hamel	5
2 Integrali primi e simmetrie	7
2.1 Integrali primi	8
2.2 Simmetrie	8
3 Alcuni sistemi anolonomi classici	11
3.1 Moto su un cilindro verticale	12
3.1.1 Descrizione del sistema	12
3.1.2 Dinamica del sistema	14
3.2 Moto su una sfera	15
3.2.1 Descrizione del sistema	15
3.2.2 Dinamica del sistema	17
4 Studio del moto su un paraboloide rovesciato	21
4.1 Moto su un paraboloide rovesciato	21
4.1.1 Descrizione del sistema	21
4.1.2 Dinamica del sistema	23
4.2 Conclusioni	27
Bibliografia	29

Introduzione

Un ambito della Fisica Matematica ampiamente in sviluppo è la meccanica dei sistemi anolonomi, che trova oggi numerose applicazioni nella teoria del controllo e in robotica. Un sistema anolonomo è un sistema soggetto a dei vincoli sulle velocità, che non nascono come conseguenza di restrizioni alle configurazioni permesse. Esempi classici coinvolgono corpi rigidi che rotolano senza strisciare su superfici, per i quali si impone che la velocità del punto di contatto sia in ogni istante nulla.

Il primo a studiare la dinamica di una sfera che rotola senza strisciare su un piano orizzontale fu Eulero, ma solamente oltre un secolo dopo (1894) Hertz introdusse i termini *olonomo* e *anolonomo* ([3]).

La difficoltà nel trattare i sistemi anolonomi, anche se comuni e apparentemente semplici, nasce dal fatto che la loro descrizione non rientra nella meccanica Lagrangiana (o Hamiltoniana). La ricerca in dinamica anolonomica, quindi, da una parte cerca di costruire un formalismo generale, dall'altra, rinunciando alla generalità, indaga specifici sistemi.

Nella tesi si studia la dinamica di una sfera rigida omogenea pesante che rotola senza strisciare su alcune superfici di rivoluzione. Si descrivono dapprima due esempi classici di sistemi anolonomi (capitolo 3), nei quali la sfera è vincolata alla superficie di un cilindro verticale e a quella di una sfera di raggio maggiore. Per questi sistemi è noto che il punto di contatto fra la sfera e la superficie genericamente compie delle oscillazioni periodiche confinate tra due paralleli della stessa, senza cadere.

Nella trattazione vengo usate come coordinate delle velocità le proiezioni della velocità angolare della sfera sul sistema di riferimento ad essa solidale, in luogo delle derivate degli angoli di Eulero. Le equazioni che ne derivano sono le *equazioni di Poincaré-Hamel*, che si introducono al paragrafo 1.4.

Si indaga poi il caso, ancora non studiato in letteratura, in cui la superficie sulla quale avviene il moto di puro rotolamento sia una superficie di rivoluzione concava. Nello specifico, si considera un paraboloide con asse verticale e concavità verso il basso, della forma $z = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, e ci si domanda se, ed eventualmente sotto quali condizioni, la sfera pesante non cada.

Per la ricerca della soluzione delle equazioni del moto del sistema si utilizzano metodi di risoluzione numerica, e vengono analizzati i risultati al variare dei parametri caratteristici.

Capitolo 1

Sistemi meccanici anolonomi

1.1 Vincoli anolonomi

Per un sistema meccanico costituito da N punti materiali non vincolati soggetto a forze, l'atto di moto del sistema è dato dalle coppie (X, \dot{X}) in \mathbb{R}^{6N} e il moto del sistema è descritto dalle $3N$ equazioni di Newton

$$M\ddot{X} = F(X, \dot{X}, t).$$

Per sistemi vincolati lo spazio delle fasi è un sottoinsieme di \mathbb{R}^{6N} . In particolare un sistema vincolato è detto *olonomo* se la sua configurazione X è ristretta ad una sottovarietà $Q \subset \mathbb{R}^{3N}$ di dimensione n , detta *varietà delle configurazioni* del sistema. In questo caso le velocità \dot{X} devono essere, in ogni istante, tangenti a Q , ovvero $\dot{X} \in T_X Q$. L'atto di moto del sistema appartiene dunque al fibrato tangente di Q :

$$TQ = \{(X, \dot{X}) \in \mathbb{R}^{6N} : X \in Q, \dot{X} \in T_X Q\}.$$

Ad un sistema meccanico si possono anche imporre delle restrizioni sulle velocità, ovvero $\dot{X} \in D_X \subset T_X Q$, senza necessariamente limitare le posizioni permesse al sistema. In questo caso i vincoli non sono, in generale, olonomi.

Per vincoli *lineari* nelle velocità, ossia della forma

$$X \in Q, \quad \tilde{S}(X)\dot{X} = 0, \quad (1.1)$$

con $\tilde{S}(X)$ matrice il cui nucleo è D_X , il sottoinsieme D_X dello spazio tangente è un sottospazio r -dimensionale di $T_X Q$ per ogni $X \in Q$, con $r < n$. La collezione $D = \{D_X : X \in Q\}$ che assegna per ogni $X \in Q$ un sottospazio D_X è una *distribuzione* su Q . Precisamente,

Definizione 1. Una distribuzione regolare r -dimensionale su una varietà Q è una sottovarietà $D \subset TQ$ del fibrato tangente tale che per ogni $X \in Q$ l'insieme $D_X = D \cap T_X Q$ è un sottospazio vettoriale r -dimensionale di $T_X Q$.

La distribuzione D su Q è detta *integrabile* se esiste una foliazione di Q in sottovarietà $Q' \subset Q$ con in ogni punto D_X come spazio tangente, ovvero $T_X Q' = D_X \quad \forall X \in Q'$.

Definizione 2. *Un sistema meccanico è soggetto a vincoli anolonomi se il suo atto di moto (X, \dot{X}) è ristretto ad appartenere ad una sottovarietà $(n+r)$ -dimensionale M del fibrato tangente alla varietà delle configurazioni Q*

$$M = \{(X, \dot{X}) \in \mathbb{R}^{6N} : X \in Q, \dot{X} \in D_X\} \subset TQ, \quad (1.2)$$

e $D_X \subset T_X Q$ è la fibra di una distribuzione D non integrabile di dimensione $r < n$.

La sottovarietà M è detta *varietà vincolare* del sistema.

Ci si riferisce dunque spesso ai vincoli anolonomi come quei vincoli che non sono olonomi, nel senso che non possono essere espressi tramite equazioni della forma $g(X) = 0$.

Sia vincoli olonomi che anolonomi possono soddisfare, o meno, la condizione di idealità. Un vincolo è detto *ideale* se le reazioni vincolari che esso può espletare sul sistema sono tutti e soli i vettori Φ ortogonali a D :

$$\Phi \cdot V = 0 \quad \forall V \in D. \quad (1.3)$$

In questa trattazione verranno sempre considerati vincoli anolonomi lineari, ideali e indipendenti dal tempo (ossia $g(X, \dot{X}, t) = g(X, \dot{X})$).

1.2 Esempio: moto di puro rotolamento

Si introducono qui, in forma generale, alcune caratteristiche dei sistemi meccanici anolonomi costituiti da corpi rigidi vincolati a una superficie e soggetti al vincolo di puro rotolamento. Nei capitoli 3 e 4 verranno approfonditi alcuni esempi.

Un sistema meccanico noto è il *corpo rigido*, un sistema costituito da un insieme di N punti (di cui almeno tre non allineati), soggetti al vincolo (olonomo) di rigidità, per il quale $\|x_\alpha - x_\beta\| = l_{\alpha\beta}$, $1 \leq \alpha < \beta \leq N$. Il sistema ha sei gradi di libertà. La varietà delle configurazioni è diffeomorfa a $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$, per cui lo spazio delle fasi ha dimensione $d = 12$ ed è diffeomorfo a $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Si impongono a tale sistema due vincoli, l'uno olonomo, l'altro anolonomo:

- vincolo olonomo: il centro di massa C del corpo sia limitato a muoversi su una superficie Σ in \mathbb{R}^3 . Allora l'atto di moto del sistema appartiene

al fibrato tangente ad una varietà delle configurazioni di dimensione $n = 5$:

$$(X, \dot{X}) \in T(\Sigma \times \text{SO}(3)).$$

- vincolo anolonomo: il corpo rigido rotoli senza strisciare sulla superficie, compia cioè un moto di *puro rotolamento*. Questa condizione si traduce nell'imporre che il punto di contatto P del corpo con la superficie abbia in ogni istante velocità nulla, ossia, sfruttando la relazione fondamentale delle velocità per i corpi rigidi:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times (P - C) = 0, \quad (1.4)$$

con \mathbf{v}_P e \mathbf{v}_C le velocità del punto di contatto e del centro di massa, rispettivamente, e $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del corpo rigido.

La varietà vincolare del sistema è diffeomorfa a $\Sigma \times \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$ ed ha dimensione $n + r = 8$.

Questo sistema meccanico, se soggetto a forze esterne conservative, come la forza peso, è conservativo, in quanto i vincoli imposti compiono lavoro nullo.

1.3 Equazioni del moto

Anche per i sistemi vincolati le equazioni che ne descrivono il moto sono le equazioni di Newton; adesso però, in aggiunta alle forze attive, compaiono anche le reazioni vincolari, tali da permettere in ogni istante che l'atto di moto del sistema soddisfi alle condizioni del vincolo. Esse saranno quindi della forma:

$$M\ddot{X} = F(X, \dot{X}, t) + \Phi. \quad (1.5)$$

Per una trattazione più agevole da qui si descriverà il sistema in coordinate locali (q, \dot{q}) .

Per la linearità dei vincoli anolonomi, le fibre del rappresentativo locale della distribuzione D si possono descrivere come il nucleo di una matrice $k \times n$ $S(q)$ di rango $k = n - r$:

$$D_q = \{\dot{q} \in \mathbb{R}^n : S(q)\dot{q} = 0\}.$$

La varietà vincolare è allora:

$$M = \{(q, \dot{q}) \in Q \times \mathbb{R}^n : S(q)\dot{q} = 0\}. \quad (1.6)$$

Indicando con R_i , $i = 1, \dots, n$, le componenti della reazione vincolare Φ nella base naturale del fibrato tangente alla varietà delle configurazioni, $R = (R_1, \dots, R_n)$ appartiene all'immagine della matrice trasposta di $S(q)$: $R \in \text{Im}S^T(q)$. Esiste perciò una curva $t \mapsto \lambda^t$ tale che

$$R^t = S^T(q^t)\lambda^t, \quad \forall t \mapsto q^t. \quad (1.7)$$

Le $\lambda^t \in \mathbb{R}^k$ sono dette *moltiplicatori di Lagrange*.

Le informazioni dinamiche del sistema sono contenute nella Lagrangiana $L(q, \dot{q})$, con $(q, \dot{q}) \in TQ$. Per sistemi meccanici conservativi essa è la differenza tra l'energia cinetica T e l'energia potenziale V del sistema:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q),$$

con $T = \frac{1}{2}\dot{q} \cdot A(q)\dot{q}$ e $A(q)$ matrice cinetica del sistema.

In queste condizioni, il sistema meccanico anolonomo soddisfa la seguente

Proposizione 1. *Per ogni dato iniziale $(X_0, \dot{X}_0) \in M$ esiste un'unica soluzione $t \mapsto (X^t, \Phi^t)$ alle equazioni (1.5) con quelle condizioni iniziali. La sua rappresentativa locale $t \mapsto (q^t, \lambda^t)$ soddisfa allora il sistema di equazioni*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q^t, \dot{q}^t) - \frac{\partial L}{\partial q}(q^t, \dot{q}^t) = S^T(q^t)\lambda^t \\ S(q^t)\dot{q}^t = 0 \end{cases}. \quad (1.8)$$

Di questo fatto se ne riporta la dimostrazione, seguendo [8], essendo illustrativa per ricavare operativamente le equazioni del moto di sistemi meccanici anolonomi, come quelli trattati nel seguito.

Dimostrazione. Si assuma inizialmente che esista una curva $t \mapsto (X^t, \Phi^t)$ soluzione dell'equazione (1.5). Per la condizione di idealità (1.3), il moto vincolato soddisfa il principio di d'Alembert

$$(M\ddot{X}^t - F(X^t, \dot{X}^t, t)) \cdot V = 0 \quad \forall V \in D, t \in \mathbb{R}.$$

Allora, per $R^t = S^T(q^t)\lambda^t$ la curva rappresentativa del moto in coordinate locali $t \mapsto (q^t, \lambda^t)$ soddisfa il sistema

$$\begin{cases} A(q^t)\ddot{q}^t + l(q^t, \dot{q}^t) = S^T(q^t)\lambda^t \\ S(q^t)\dot{q}^t = 0 \end{cases}, \quad (1.9)$$

con $l_i = \sum_{j,k=1}^n \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial V}{\partial q_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Derivando la seconda della (1.9),

$$S(q^t)\ddot{q}^t + \sigma(q^t, \dot{q}^t) = 0,$$

con $\sigma_i = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial S_{ik}}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_k$, $i = 1, \dots, n$, e sostituendovi l'espressione di \ddot{q}^t ricavata dalla prima della (1.9),

$$\ddot{q}^t = A^{-1}(q^t)[S^T(q^t)\lambda^t - l(q^t, \dot{q}^t)],$$

si ottiene

$$S(q^t)A^{-1}(q^t)[S^T(q^t)\lambda^t - l(q^t, \dot{q}^t)] + \sigma(q^t, \dot{q}^t) = 0.$$

La matrice $SA^{-1}S^T$ è invertibile, quindi l'espressione può essere risolta per λ^t :

$$\lambda^t = [S(q^t)A^{-1}(q^t)S^T(q^t)]^{-1}[S(q^t)A^{-1}(q^t)l(q^t, \dot{q}^t) - \sigma(q^t, \dot{q}^t)]. \quad (1.10)$$

I moltiplicatori di Lagrange, e di conseguenza R , sono quindi funzione delle sole (q, \dot{q}) . Allora è unica la curva $t \mapsto (q^t, \dot{q}^t)$ che, per ogni valore iniziale (q_0, \dot{q}_0) , soddisfa (1.9), con λ^t data da (1.10).

Per dimostrare l'esistenza del moto vincolato si consideri la soluzione unica $t \mapsto q^t$ con dato iniziale (q_0, \dot{q}_0) dell'equazione

$$A\ddot{q}^t + l = S^T(SA^{-1}S^T)^{-1}(SA^{-1}l - \sigma).$$

Tale curva soddisfa $S(q^t)\ddot{q}^t + \sigma(q^t, \dot{q}^t) = 0$, cioè $\frac{d}{dt}(S(q^t)\dot{q}^t) = 0$. Perciò, essendo $S(q^t)\dot{q}^t = S(q_0)\dot{q}_0 = 0$, si ha che $(q^t, \dot{q}^t) \in M$ per ogni t , e questo prova l'enunciato. \square

1.4 Equazioni di Poincaré-Hamel

Può essere vantaggioso, soprattutto nel trattare sistemi anolonomi, utilizzare delle coordinate sullo spazio tangente T_qQ diverse dalle coordinate sollevate \dot{q} . Infatti non sempre le coordinate (q, \dot{q}) sono la scelta migliore per l'analisi della dinamica di un sistema meccanico, e con delle coordinate adatte le equazioni del moto possono semplificarsi.

Il vettore velocità del sistema W sullo spazio tangente T_XQ può essere espresso in una base $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ diversa da quella naturale $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$:

$$W = \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_\alpha \mathbf{e}_\alpha = \sum_{\sigma=1}^n v_\sigma \mathbf{u}_\sigma;$$

la base $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è detta *anolonoma*.

Per passare da una base all'altra si utilizzano due matrici $n \times n$, Λ e X , con $X\Lambda = \mathbb{I}$ (si adotta la convenzione che termini con gli stessi indici sono sommati):

$$\mathbf{u}_\sigma = X_{\sigma\alpha} \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{e}_\alpha = \Lambda_{\alpha\sigma} \mathbf{u}_\sigma;$$

le coordinate nelle due basi diventano:

$$v_\sigma = \Lambda_{\sigma\alpha} \dot{q}_\alpha, \quad \dot{q}_\alpha = X_{\alpha\sigma} v_\sigma, \quad (1.11)$$

con $\alpha, \sigma = 1, \dots, n$.

La Lagrangiana del sistema scritta nelle coordinate (q, v) è $\tilde{L}(q, v) = L(q, \dot{q}(v))$ per $v = \Lambda\dot{q}$.

Si dimostra che le equazioni di Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$, scritte nelle coordinate (q, v) , sono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_\rho} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\alpha} X_{\alpha\rho} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_\sigma} c_{\rho\tau}^\sigma v_\tau, \quad (1.12)$$

dette *equazioni di Poincaré-Hamel*.

I coefficienti $c_{\rho\tau}^\sigma$ sono detti *coefficienti di struttura* associati alla base anolonomica, e dipendono dalla scelta delle basi:

$$c_{\rho\tau}^\sigma(q) = \left(\frac{\partial \Lambda_{\sigma\beta}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial \Lambda_{\sigma\alpha}}{\partial q_\beta} \right) X_{\beta\tau} X_{\alpha\rho}. \quad (1.13)$$

Si omette la semplice dimostrazione, che usa la regola della catena.

Le equazioni del moto del sistema anolonomo diventano allora:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_\rho} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\alpha} X_{\alpha\rho} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_\sigma} c_{\rho\tau}^\sigma v_\tau = S^T(q)\lambda(q, v) \\ S(q)v = 0 \end{cases}. \quad (1.14)$$

Capitolo 2

Integrali primi e simmetrie

Fino a questo punto la trattazione dei vincoli anolonomi non è troppo dissimile da quella dei vincoli olonomi. Tuttavia mentre per i secondi ci sono degli strumenti generali per lo studio delle equazioni del moto, primo fra tutti il teorema di Noether, per i primi mancano ancora delle metodologie generali di risoluzione.

Nel capitolo precedente (paragrafo 1.3) si è visto che la dinamica di un sistema meccanico soggetto a vincoli anolonomi è descritta da $n + r$ equazioni del primo ordine

$$\dot{\xi} = X(\xi)$$

con ξ delle opportune coordinate sulla varietà vincolare del sistema M , e X un campo vettoriale su M .

L'integrabilità di un'equazione differenziale, in generale, è legata principalmente a due fattori: gli integrali primi e le simmetrie.

- L'esistenza di integrali primi del sistema permette di abbassare l'ordine dell'equazione restringendosi agli insiemi di livello dell'integrale primo, che foliano lo spazio delle fasi.
- L'esistenza di simmetrie del campo vettoriale permette pure di abbassare la dimensione dello spazio delle fasi, tramite un'operazione di quoziente.

I sistemi olonomi sono un caso speciale di sistemi vincolati; per essi esiste infatti un profondo legame tra simmetrie ed integrali primi. Il teorema di Noether assicura che l'invarianza della Lagrangiana del sistema sotto un'azione di \mathbb{R} o S^1 sullo spazio delle configurazioni implichi l'esistenza di un integrale primo, il momento dell'azione.

Per i sistemi anolonomi invece il teorema di Noether non vale in forma così generale. Basti pensare ad esempio che la presenza di una coordinata ignorabile nella Lagrangiana non assicura che il momento coniugato sia

conservato. Infatti, se $\frac{\partial L}{\partial r}(q, r, \dot{q}, \dot{r}) = 0$, in generale, si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^t}(q^t, r^t, \dot{q}^t, \dot{r}^t) = S^T(q^t, r^t) \lambda(q^t, r^t, \dot{q}^t, \dot{r}^t).$$

Di seguito si richiamano alcune definizioni e le procedure per l'abbassamento dell'ordine dell'equazione differenziale che descrive il sistema. Nei prossimi paragrafi si denota con M una varietà differenziabile liscia di dimensione finita.

2.1 Integrali primi

Definizione 3. Sia $\dot{\xi} = X(\xi)$, con $\xi \in M$. La funzione $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ è un integrale primo del campo vettoriale X se i suoi insiemi di livello sono invarianti per il flusso Φ_X di X :

$$f \circ \Phi_X^t = f \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

L'esistenza di k integrali primi funzionalmente indipendenti $f = (f_1, \dots, f_k)$, ossia tali che $rk \left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(\xi) \right) = k$, $\forall \xi \in M, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, d$, comporta la foliazione dello spazio delle fasi in sottovarietà invarianti di dimensione $d - k$. Questo permette di abbassare l'ordine dell'equazione; infatti il teorema di Dini assicura che, sotto le condizioni di cui sopra, esista localmente un sistema di coordinate $(u, y) = (u_1, \dots, u_k, y_1, \dots, y_{d-k})$ per cui $f = f(u)$; allora l'equazione diventa

$$\begin{cases} \dot{u} = 0 \\ \dot{y} = Y(u, y) \end{cases}$$

Si determina quindi la soluzione del sistema ristretto $\dot{y} = Y(u, y)$ di $d - k$ equazioni differenziali su un insieme di livello degli integrali primi.

Nel caso in cui il campo vettoriale X abbia $d - 1$ integrali primi funzionalmente indipendenti, i loro comuni insiemi di livello individuano le orbite del sistema.

2.2 Simmetrie

Definizione 4. Un'azione Ψ di $G = \mathbb{R}, S^1$ su M è un'azione di simmetria per un campo vettoriale X su M se

$$\Psi_g \circ \Phi_t^X = \Phi_t^X \circ \Psi_g \quad \forall g \in G, \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

ovvero

$$(\Psi_g)_* X = X \quad \forall g \in G. \quad (2.3)$$

Si dice allora che X è invariante sotto l'azione Ψ .

Esempio. Se il campo vettoriale è indipendente da una o più coordinate, allora esso è invariante sotto traslazione delle stesse.

Si consideri lo spazio quoziente M/G rispetto alla relazione di equivalenza data dall'appartenere alla stessa Ψ -orbita, ossia $\xi \sim \xi'$ se e solo se $\xi' = \Psi_g(\xi)$ per $g \in G$; la *proiezione canonica* π è una mappa $\pi: M \rightarrow M/G$ che associa ad ogni punto ξ la sua classe di equivalenza $\pi(\xi) = [\xi]$.

Se M/G è una varietà e π è una sommersione, allora X si proietta su un campo vettoriale \bar{X} su M/G e $\bar{\Phi}$ tale che

$$\bar{\Phi}_t \circ \pi = \pi \circ \bar{\Phi}_t$$

è il flusso di \bar{X} .

Il problema di integrare $\dot{\xi} = X(\xi)$ si riduce all'integrazione del sistema *ridotto* \bar{X} di ordine $d - 1$ nello spazio delle fasi ridotto M/G , che permette di descrivere l'evoluzione della proiezione della soluzione sullo spazio quoziente. La dinamica del sistema completo, che contiene le informazioni sulla componente della soluzione lungo l'orbita del gruppo, si ricostruisce allora tramite l'integrazione di un'equazione nota, detta *equazione di ricostruzione*.

Capitolo 3

Alcuni sistemi anolonomi classici

Si studiano in questo capitolo due sistemi meccanici anolonomi classici. In entrambi si vuole studiare la dinamica di una sfera omogenea pesante, di raggio r e momento d'inerzia $I = \frac{2}{5}mr^2$, vincolata a rotolare senza strisciare su una superficie, un cilindro verticale nel primo caso, una sfera di raggio $R > r$ nel secondo.

Si utilizzano come coordinate lagrangiane per il corpo rigido la posizione del centro di massa e gli angoli di Eulero $(\varphi, \psi, \theta) \in \text{SO}(3)$ secondo la convenzione [11], indicata nella figura 3.1.

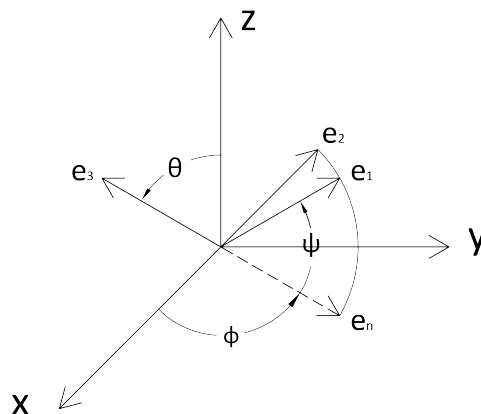


Figura 3.1: Angoli di Eulero.

Le coordinate della velocità angolare della sfera, $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z + \dot{\psi} \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \mathbf{e}_n$,

nel sistema di riferimento dello spazio $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ sono

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_y = -\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{cases} . \quad (3.1)$$

La Lagrangiana del sistema è della forma

$$L = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_C\|^2 + \frac{1}{2}I\|\boldsymbol{\omega}\|^2 - mgz$$

con \mathbf{v}_C la velocità del centro di massa della sfera e $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare.

3.1 Moto su un cilindro verticale

3.1.1 Descrizione del sistema

Siano r il raggio della sfera e $R > r$ il raggio del cilindro.

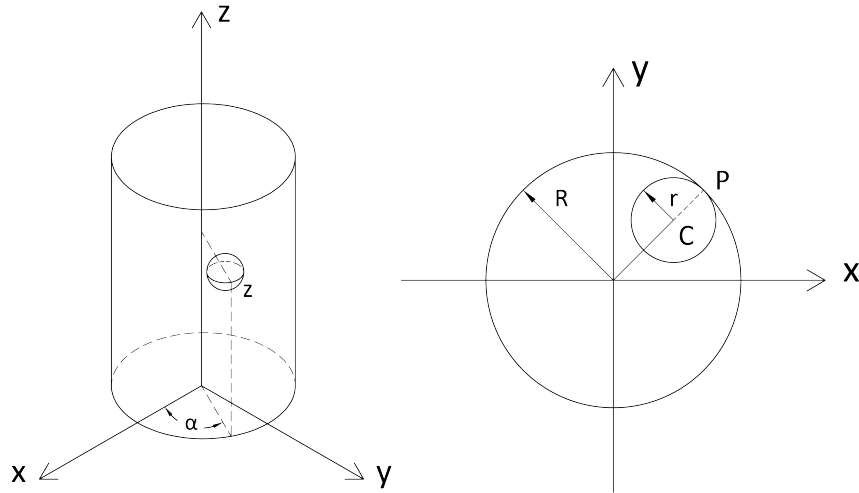


Figura 3.2: Cilindro.

La varietà delle configurazioni ha dimensione 5 ed è diffeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R} \times \text{SO}(3)$. Su di essa si introducono delle coordinate locali $(\alpha, z, \varphi, \psi, \theta)$, come indicato in figura 3.2.

Le posizioni del punto di contatto con la superficie e del centro di massa della sfera sono, rispettivamente:

$$P = \begin{pmatrix} R \cos \alpha \\ R \sin \alpha \\ z \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} (R - r) \cos \alpha \\ (R - r) \sin \alpha \\ z \end{pmatrix}$$

Lo spazio delle fasi del sistema olonomo è il fibrato tangente alla varietà delle configurazioni: $T(S^1 \times \mathbb{R} \times \text{SO}(3)) \cong S^1 \times \mathbb{R} \times \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^2 \times$

\mathbb{R}^3 . Si sceglie di descrivere l'atto di moto del sistema nelle coordinate $(\alpha, z, \varphi, \psi, \theta, \dot{\alpha}, \dot{z}, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$, con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le proiezioni della velocità angolare della sfera sul sistema di riferimento solidale alla stessa, con i primi due assi ruotati di un angolo α sul piano xy e il terzo coincidente con l'asse z :

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_x \cos \alpha + \omega_y \sin \alpha \\ \omega_2 = -\omega_x \sin \alpha + \omega_y \cos \alpha \\ \omega_3 = \omega_z \end{cases}$$

La Lagrangiana del sistema è:

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}I(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) + \frac{1}{2}m(\dot{\alpha}^2(R-r)^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

Definendo le costanti

$$a \equiv \frac{I}{m(R-r)^2}, \quad b \equiv \frac{g}{R-r}$$

e la nuova variabile

$$\zeta \equiv \frac{z}{R-r},$$

la Lagrangiana diventa

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}a(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}^2 + \dot{\zeta}^2) - b\zeta. \quad (3.2)$$

Il vincolo di puro rotolamento (1.4), posto $c \equiv \frac{R-r}{r}$, si scrive come:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{1}{c}\omega_3 \\ \dot{\zeta} = \frac{1}{c}\omega_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Allora la varietà vincolare M , diffeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R} \times \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$, è parametrizzata da $(\alpha, \zeta, \varphi, \psi, \theta, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Il vincolo si può anche esprimere nella forma $S(q)v = 0$ con:

$$S(q) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Dinamica del sistema

Le equazioni del moto del sistema sono le equazioni di Poincaré-Hamel nella forma (1.14):

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{1}{c} \omega_3 \\ \dot{\zeta} = \frac{1}{c} \omega_2 \\ \dot{\varphi} = -\omega_1 \sin(\varphi - \alpha) \cot \theta + \omega_2 \cos(\varphi - \alpha) \cot \theta + \omega_3 \\ \dot{\psi} = \omega_1 \sin(\varphi - \alpha) \csc \theta - \omega_2 \cos(\varphi - \alpha) \csc \theta \\ \dot{\theta} = \omega_1 \cos(\varphi - \alpha) + \omega_2 \sin(\varphi - \alpha) \\ \dot{\omega}_1 = -\frac{1}{c} \omega_2 \omega_3 \\ \dot{\omega}_2 = \frac{c_1}{ac^2 + 1} (ac \omega_1 \omega_3 - bc) \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

La Lagrangiana (3.2) e il vincolo (3.3) non dipendono dall'orientazione della sfera (poiché non dipendono dalle variabili (φ, ψ, θ)). Le equazioni del moto sono allora invarianti sotto l'azione del gruppo $\text{SO}(3)$ ed è possibile passare allo spazio ridotto $S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ [9], nel quale la dinamica è descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{1}{c} \omega_3 \\ \dot{\zeta} = \frac{1}{c} \omega_2 \\ \dot{\omega}_1 = -\frac{1}{c} \omega_2 \omega_3 \\ \dot{\omega}_2 = \frac{c_1}{ac^2 + 1} (ac \omega_1 \omega_3 - bc) \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Il campo vettoriale (3.5), definito nello spazio quotientato con $\text{SO}(3)$, è invariante sotto l'azione di S^1 , corrispondente alla rotazione attorno all'asse verticale del cilindro. E' quindi possibile passare, per quanto visto in 2.2, al sistema ridotto in $S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 / S^1$ diffeomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \ni (\zeta, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Si osserva inoltre che la coordinata ω_3 è un integrale primo per il sistema: ciò permette anche di restringersi a un insieme di livello $\omega_3 = \Omega$.

Si nota infine che, in tale sistema ridotto, le equazioni per le velocità angolari si disaccoppiano. Pertanto, per la sua integrazione ci si riduce al sistema 2-dimensionale per (ω_1, ω_2) :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\frac{\Omega}{c} \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \frac{c_1}{ac^2 + 1} (ac \Omega \omega_1 - bc) \end{cases} \quad (3.6)$$

Soluzione analitica

L'integrale generale di (3.6) è:

$$\begin{cases} \omega_1(t) = \frac{A}{c} \sqrt{\frac{ac^2+1}{a}} \cos\left(\sqrt{\frac{a}{ac^2+1}} \Omega t - B\right) + \frac{b}{a\Omega} \\ \omega_2(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{a}{ac^2+1}} \Omega t - B\right) \end{cases} \quad (3.7)$$

ove A e B sono le due costanti di integrazione.

Da questo si ricostruisce la dinamica, alla quale si è interessati, del centro di massa della sfera, tramite le prime due equazioni della (3.5):

$$\begin{cases} \alpha(t) = \alpha_0 - \frac{\Omega}{c} t \\ \zeta(t) = -\frac{A}{c\Omega} \sqrt{\frac{ac^2+1}{a}} \cos\left(\sqrt{\frac{a}{ac^2+1}} \Omega t - B\right) + \zeta_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Perciò una sfera pesante che rotola senza strisciare sulla superficie di un cilindro verticale, nella condizione iniziale che la componente verticale del momento angolare sia non nulla, cioè per $\Omega \neq 0$, non cade, bensì compie delle oscillazioni tra due paralleli del cilindro. In particolare il suo moto è periodico. L'ampiezza della banda di oscillazione dipende da Ω : all'aumentare della velocità la banda si restringe.

Graficamente:

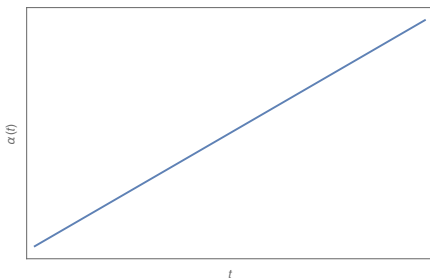


Figura 3.3: $\alpha(t)$ per $\Omega > 0$.

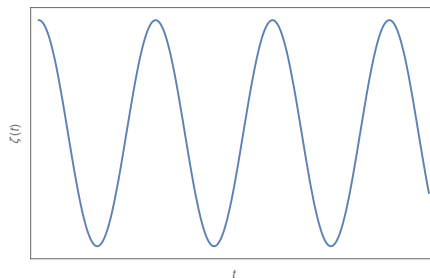


Figura 3.4: $\zeta(t)$ per $\Omega > 0$.

3.2 Moto su una sfera

3.2.1 Descrizione del sistema

La descrizione del sistema è del tutto simile a quella del precedente. Siano r il raggio della sfera in moto e $R > r$ il raggio della superficie sferica.

La varietà delle configurazioni ha dimensione 5 ed è diffeomorfa a $S^1 \times]0, \pi[\times \text{SO}(3)$. Su di essa si introducono delle coordinate locali $(\alpha, \beta, \varphi, \psi, \theta)$,

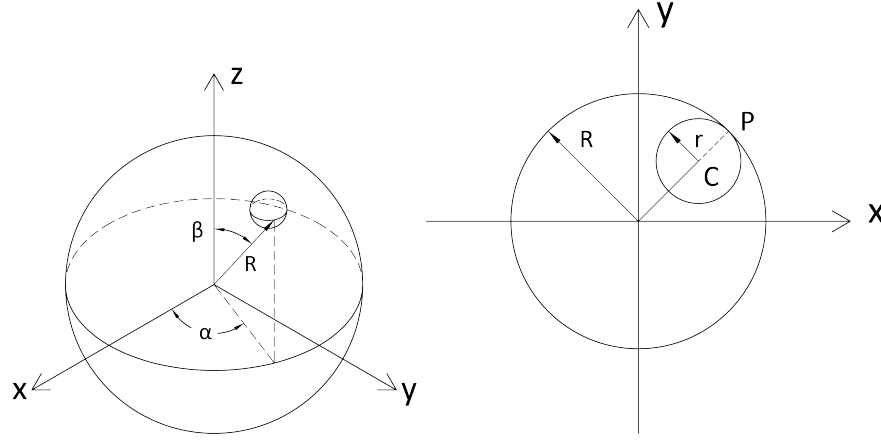


Figura 3.5: Sfera.

come indicato in figura 3.5.

Le posizioni del punto di contatto con la superficie e del centro di massa sono, rispettivamente:

$$P = \begin{pmatrix} R \cos \alpha \sin \beta \\ R \sin \alpha \sin \beta \\ R \cos \beta \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} (R - r) \cos \alpha \sin \beta \\ (R - r) \sin \alpha \sin \beta \\ (R - r) \cos \beta \end{pmatrix}$$

Lo spazio delle fasi del sistema olonomo è il fibrato tangente alla varietà delle configurazioni: $T([0, \pi[\times \text{SO}(3)) \cong S^1 \times]0, \pi[\times \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$. Si sceglie di descrivere l'atto di moto del sistema nelle coordinate $(\alpha, \beta, \varphi, \psi, \theta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$, con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le proiezioni della velocità angolare della sfera sul sistema di riferimento solidale alla stessa, con il primo asse normale uscente alla superficie, il secondo tangente alla superficie e parallelo al piano xy e il terzo normale ai primi due:

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_x \cos \alpha \cos \beta + \omega_y \sin \alpha \cos \beta - \omega_z \sin \beta \\ \omega_2 = -\omega_x \sin \alpha + \omega_y \cos \alpha \\ \omega_3 = \omega_x \cos \alpha \sin \beta + \omega_y \sin \alpha \sin \beta + \omega_z \cos \beta \end{cases}.$$

La Lagrangiana del sistema è:

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}a(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) + \frac{1}{2}(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta) - b \cos \beta, \quad (3.9)$$

in cui si è posto $a \equiv \frac{I}{m(R-r)^2}$, $b \equiv \frac{g}{R-r}$.

Il vincolo di puro rotolamento (1.4), posto $c \equiv \frac{r}{R-r}$, si scrive come:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{c}{\sin \beta} \omega_1 \\ \dot{\beta} = -c \omega_2 \end{cases}. \quad (3.10)$$

Allora la varietà vincolare M , diffeomorfa a $S^1 \times]0, \pi[\times \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$, è parametrizzata da $(\alpha, \beta, \varphi, \psi, \theta, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Il vincolo si può anche esprimere nella forma $S(q)v = 0$ con:

$$S(q) = \begin{pmatrix} \sin \beta & 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2.2 Dinamica del sistema

Le equazioni del moto del sistema sono le equazioni di Poincaré-Hamel nella forma (1.14):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = \frac{c}{\sin \beta} \omega_1 \\ \dot{\beta} = -c \omega_2 \\ \dot{\varphi} = -\omega_1 (\sin \beta + \sin(\varphi - \alpha) \cot \theta \cos \beta) + \omega_2 \cos(\varphi - \alpha) \cot \theta + \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \omega_3 (\cos \beta - \sin(\varphi - \alpha) \cot \theta \sin \beta) \\ \dot{\psi} = \omega_1 \sin(\varphi - \alpha) \csc \theta \cos \beta - \omega_2 \cos(\varphi - \alpha) \csc \theta + \omega_3 \sin(\varphi - \alpha) \csc \theta \sin \beta \\ \dot{\theta} = \omega_1 \cos(\varphi - \alpha) \cos \beta + \omega_2 \sin(\varphi - \alpha) + \omega_3 \cos(\varphi - \alpha) \sin \beta \\ \dot{\omega}_1 = \frac{1}{a + c^2} (ac \omega_2 \omega_3 + c(a + c^2) \omega_1 \omega_2 \cot \beta) \\ \dot{\omega}_2 = -\frac{1}{a + c^2} (ac \omega_1 \omega_3 + c(a + c^2) \omega_1^2 \cot \beta + bc \sin \beta) \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

La Lagrangiana (3.9) e il vincolo (3.10) non dipendono dall'orientazione della sfera (poiché non dipendono dalle variabili (φ, ψ, θ)). Le equazioni del moto sono allora invarianti sotto l'azione del gruppo $\text{SO}(3)$ ed è possibile passare allo spazio ridotto $S^1 \times]0, \pi[\times \mathbb{R}^3$ [9], nel quale la dinamica è descritta dalle equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = \frac{c}{\sin \beta} \omega_1 \\ \dot{\beta} = -c \omega_2 \\ \dot{\omega}_1 = \frac{1}{a + c^2} (ac \omega_2 \omega_3 + c(a + c^2) \omega_1 \omega_2 \cot \beta) \\ \dot{\omega}_2 = -\frac{1}{a + c^2} (ac \omega_1 \omega_3 + c(a + c^2) \omega_1^2 \cot \beta + bc \sin \beta) \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Il campo vettoriale (3.12), definito nello spazio quozientato con $\text{SO}(3)$, è invariante sotto l'azione di S^1 , corrispondente alla rotazione attorno all'asse verticale della sfera. E' quindi possibile passare, per quanto visto in 2.2, al sistema ridotto in $S^1 \times]0, \pi[\times \mathbb{R}^3 / S^1$ diffeomorfo a $]0, \pi[\times \mathbb{R}^3 \ni (\beta, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Si osserva inoltre che la coordinata ω_3 è un integrale primo per il sistema: ciò permette anche di restringersi a un insieme di livello $\omega_3 = \Omega$.

Le equazioni del moto, nel sistema ridotto, sono allora:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -c\omega_2 \\ \dot{\omega}_1 = \frac{1}{a+c^2}(ac\Omega\omega_2 + c(a+c^2)\omega_1\omega_2 \cot \beta) \\ \dot{\omega}_2 = -\frac{1}{a+c^2}(ac\Omega\omega_1 + c(a+c^2)\omega_1^2 \cot \beta + bc \sin \beta) \end{cases} \quad (3.13)$$

Per tale sistema ci sono due ulteriori integrali primi:

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}a(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega^2) + \frac{1}{2}(\dot{\beta}^2 + c^2\omega_1^2) + b \cos \beta \\ K = a\Omega \cos \beta - (a+c^2)\omega_1 \sin \beta \end{cases} \quad (3.14)$$

Allora, per quanto visto nel paragrafo 2.1, le orbite del sistema ridotto sono date dall'intersezione degli insiemi di livelli di E e K .

Soluzione numerica

Si cerca la soluzione del sistema (3.13) tramite integrazione numerica.

Si consideri inizialmente il caso in cui la sfera abbia velocità iniziale nulla. In questo caso, come ci si aspetta, essa cade fino al fondo della superficie sferica su cui rotola senza strisciare, quindi, per conservazione dell'energia, risale sulla parete opposta fino allo stesso livello di partenza. Il moto si ripete poi periodicamente.

Di seguito si riportano i grafici del moto delle coordinate del centro di massa (α, β) nel caso in cui tutte le componenti della velocità iniziale siano nulle.

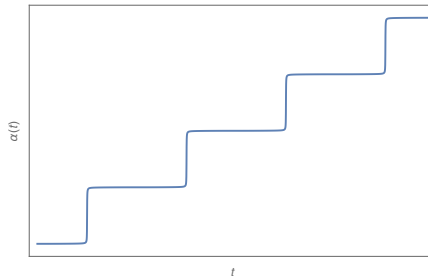


Figura 3.6: $\alpha(t)$ per $\Omega = 0$.

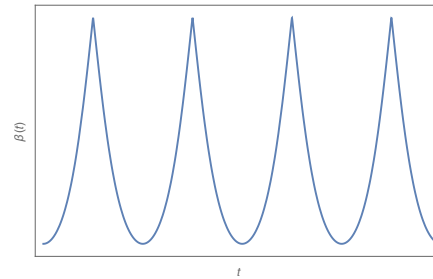


Figura 3.7: $\beta(t)$ per $\Omega = 0$.

Nel caso in cui la componente orizzontale della velocità iniziale della sfera sia non nulla, la sfera compie delle oscillazioni tra due paralleli della superficie,

la cui ampiezza e frequenza dipendono dalla velocità iniziale. In particolare se la velocità è molto superiore a zero, il moto è limitato ad uno dei due emisferi della superficie sferica.

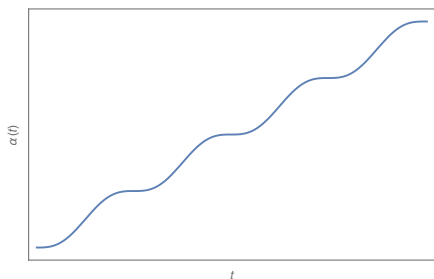


Figura 3.8: $\alpha(t)$ per $\Omega > 0$.

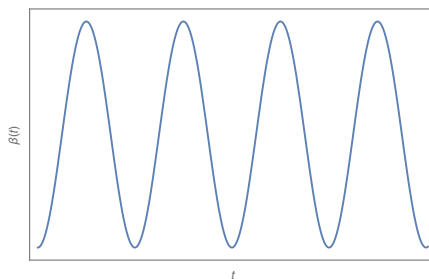


Figura 3.9: $\beta(t)$ per $\Omega > 0$.

Capitolo 4

Studio del moto su un paraboloido rovesciato

Ci si domanda a questo punto se le caratteristiche del moto viste nel capitolo precedente si estendano anche nel caso in cui la superficie di rivoluzione sulla quale la sfera rotola senza strisciare sia concava verso il basso. Si analizza l'esempio in cui questa sia un paraboloido con l'asse verticale.

4.1 Moto su un paraboloido rovesciato

4.1.1 Descrizione del sistema

Si consideri una sfera omogenea pesante di raggio r , il cui centro di massa C è vincolato alla superficie di un paraboloido della forma $z = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, parametrizzato in coordinate polari come $(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha, -\frac{\rho^2}{2})$; si impone quindi il vincolo anolonomo di puro rotolamento.

La varietà delle configurazioni del sistema, diffeomorfa a $S^1 \times]0, +\infty[\times \text{SO}(3)$, sia parametrizzata dalle coordinate locali $(\alpha, \rho, \varphi, \psi, \theta)$.

Le posizioni del centro di massa e del punto di contatto con la superficie sono, rispettivamente:

$$C = \begin{pmatrix} \rho \cos \alpha \\ \rho \sin \alpha \\ -\frac{\rho^2}{2} \end{pmatrix} \quad P = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 1}} \begin{pmatrix} \rho \cos \alpha (r + \sqrt{\rho^2 + 1}) \\ \rho \sin \alpha (r + \sqrt{\rho^2 + 1}) \\ r - \frac{\rho^2}{2} \sqrt{\rho^2 + 1} \end{pmatrix}$$

Lo spazio delle fasi del sistema olonomo è il fibrato tangente alla varietà delle configurazioni: $T(S^1 \times]0, +\infty[\times \text{SO}(3)) \cong S^1 \times]0, +\infty[\times \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$. Si sceglie di descrivere l'atto di moto del sistema nelle coordinate $(\alpha, \rho, \varphi, \psi, \theta, \dot{\alpha}, \dot{\rho}, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$, con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le proiezioni della velocità angolare della sfera sul sistema di riferimento solidale alla stessa, con i primi due

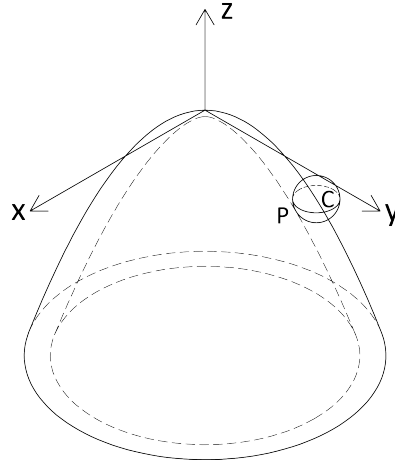


Figura 4.1: Paraboloide.

assi ruotati di un angolo α sul piano xy e il terzo coincidente con l'asse z :

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_x \cos \alpha + \omega_y \sin \alpha \\ \omega_2 = -\omega_x \sin \alpha + \omega_y \cos \alpha \\ \omega_3 = \omega_z \end{cases}$$

La Lagrangiana che descrive il sistema è:

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}a(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}^2 \rho^2 + \dot{\rho}^2(\rho^2 + 1)) + g\frac{\rho^2}{2}, \quad (4.1)$$

dove si è posto $a \equiv \frac{I}{m}$.

Il vincolo di puro rotolamento (1.4) si scrive come:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{r}{\rho\sqrt{\rho^2 + 1}}(\omega_1 - \rho\omega_3) \\ \dot{\rho} = -\frac{r}{\sqrt{\rho^2 + 1}}\omega_2 \end{cases}. \quad (4.2)$$

Allora la varietà vincolare M , diffeomorfa a $S^1 \times]0, +\infty[\times \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$, è parametrizzata da $(\alpha, \rho, \varphi, \psi, \theta, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Il vincolo si può anche esprimere nella forma $S(q)v = 0$ con:

$$S(q) = \begin{pmatrix} \rho\sqrt{\rho^2 + 1} & -r & 0 & 0 & r\rho \\ 0 & \sqrt{\rho^2 + 1} & 0 & r & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1.2 Dinamica del sistema

Le equazioni del moto del sistema sono le equazioni di Poincaré-Hamel nella forma (1.14):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = \frac{r}{\rho\sqrt{\rho^2+1}}(\omega_1 - \rho\omega_3) \\ \dot{\rho} = -\frac{r}{\sqrt{\rho^2+1}}\omega_2 \\ \dot{\varphi} = -\omega_1 \sin(\varphi - \alpha) \cot \theta + \omega_2 \cos(\varphi - \alpha) \cot \theta + \omega_3 \\ \dot{\psi} = \omega_1 \sin(\varphi - \alpha) \csc \theta - \omega_2 \cos(\varphi - \alpha) \csc \theta \\ \dot{\theta} = \omega_1 \cos(\varphi - \alpha) + \omega_2 \sin(\varphi - \alpha) \\ \dot{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+1}(a+r^2)} \left(\frac{r}{\rho}(a+r^2)\omega_2(\omega_1 - \rho\omega_3) - \frac{r^3}{(\rho^2+1)^2}\omega_2(\rho\omega_1 + \omega_3) \right) \\ \dot{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+1}(a+r^2)} \left(-rg\rho - \frac{r}{\rho}(\omega_1 - \rho\omega_3) \left(\frac{r^2}{(\rho^2+1)^2}(\omega_1 - \rho\omega_3) + a\omega_1 \right) \right) \\ \dot{\omega}_3 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+1}(a+r^2)} \left(\frac{r^3\rho}{(\rho^2+1)^2}\omega_2(\rho\omega_1 + \omega_3) \right) \end{array} \right. \quad (4.3)$$

La Lagrangiana (4.1) e il vincolo (4.2) non dipendono dall'orientazione della sfera (poiché non dipendono dalle variabili (φ, ψ, θ)). Le equazioni del moto sono allora invarianti sotto l'azione del gruppo $SO(3)$ ed è possibile passare allo spazio ridotto $M^5 = M/SO(3) \cong S^1 \times]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ [9]. La dinamica su M^5 è descritta dalle equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = \frac{r}{\rho\sqrt{\rho^2+1}}(\omega_1 - \rho\omega_3) \\ \dot{\rho} = -\frac{r}{\sqrt{\rho^2+1}}\omega_2 \\ \dot{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+1}(a+r^2)} \left(\frac{r}{\rho}(a+r^2)\omega_2(\omega_1 - \rho\omega_3) - \frac{r^3}{(\rho^2+1)^2}\omega_2(\rho\omega_1 + \omega_3) \right) \\ \dot{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+1}(a+r^2)} \left(-rg\rho - \frac{r}{\rho}(\omega_1 - \rho\omega_3) \left(\frac{r^2}{(\rho^2+1)^2}(\omega_1 - \rho\omega_3) + a\omega_1 \right) \right) \\ \dot{\omega}_3 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+1}(a+r^2)} \left(\frac{r^3\rho}{(\rho^2+1)^2}\omega_2(\rho\omega_1 + \omega_3) \right) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Le equazioni del moto (4.4) sono invarianti sotto l'azione di S^1 , corrispondente alla rotazione attorno all'asse verticale del paraboloide. Per quanto visto nel paragrafo 2.2, è allora possibile passare al sistema ridotto in

$M^4 = M^5/S^1 \cong]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ nelle variabili $(\rho, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\frac{r}{\sqrt{\rho^2 + 1}}\omega_2 \\ \dot{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 1}(a + r^2)} \left(\frac{r}{\rho}(a + r^2)\omega_2(\omega_1 - \rho\omega_3) - \frac{r^3}{(\rho^2 + 1)^2}\omega_2(\rho\omega_1 + \omega_3) \right) \\ \dot{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 1}(a + r^2)} \left(-rg\rho - \frac{r}{\rho}(\omega_1 - \rho\omega_3) \left(\frac{r^2}{(\rho^2 + 1)^2}(\omega_1 - \rho\omega_3) + a\omega_1 \right) \right) \\ \dot{\omega}_3 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 1}(a + r^2)} \left(\frac{r^3\rho}{(\rho^2 + 1)^2}\omega_2(\rho\omega_1 + \omega_3) \right) \end{cases} \quad (4.5)$$

Soluzione numerica

Tramite integrazione numerica, si cerca l'andamento del moto del centro di massa della sfera, individuato dalle coordinate (α, ρ) , risolvendo il sistema ridotto (4.5) e ricostruendo poi il moto completo tramite la prima di (4.4).

La dinamica del sistema dipende dai parametri iniziali $r, \rho(0), \omega_3(0)$, al variare dei quali cambia il moto del centro di massa. Non sono invece rilevanti i valori di $\alpha(0), \omega_1(0), \omega_2(0)$, che vengono fissati a zero.

Per un raggio r fissato, si presentano i seguenti scenari:

- Se $\omega_3(0)$ è minore (in modulo) di un certo valore di soglia $\omega_{3,s}$, dipendente da r , la sfera dopo un breve transiente cade lungo la superficie del paraboloide; in figura 4.2 e 4.3 si riportano le traiettorie di α e di ρ , rispettivamente.

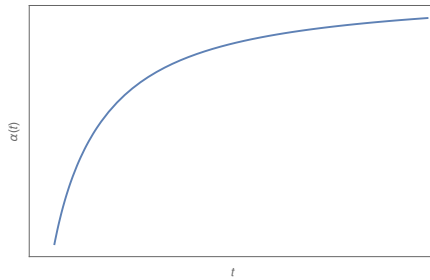


Figura 4.2: $\alpha(t)$ per $\omega_3(0) < \omega_{3,s}$.

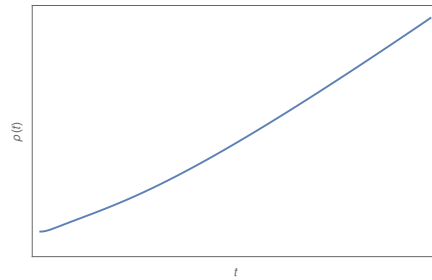


Figura 4.3: $\rho(t)$ per $\omega_3(0) < \omega_{3,s}$.

- Se $\omega_3(0)$ è maggiore di $\omega_{3,s}$ e $\rho(0)$ è minore di un valore di soglia $\rho_s(\omega_{3,0})$ dipendente da $\omega_{3,0} \equiv \omega_3(0)$, la sfera anche in questo caso, dopo un transiente, cade lungo la superficie (figure 4.4 e 4.5).

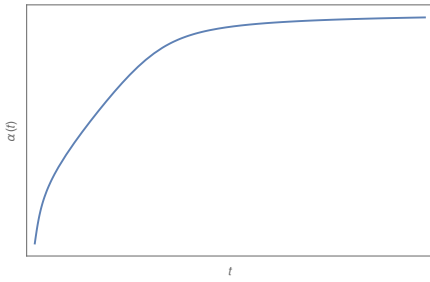


Figura 4.4: $\alpha(t)$ per $\omega_3(0) \geq \omega_{3,s}$ e $\rho(0) < \rho_s(\omega_{3,0})$.

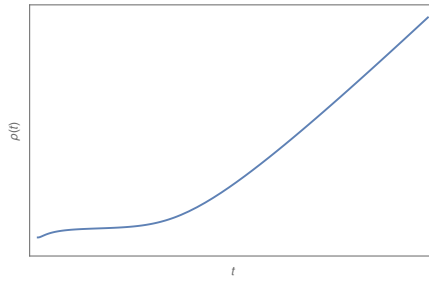


Figura 4.5: $\rho(t)$ per $\omega_3(0) \geq \omega_{3,s}$ e $\rho < \rho_s(\omega_{3,0})$.

- c. Se $\omega_3(0)$ è maggiore di $\omega_{3,s}$ e $\rho(0)$ è maggiore di $\rho_s(\omega_{3,0})$, allora la sfera compie delle oscillazioni tra due paralleli del paraboloide, la cui ampiezza e frequenza dipendono da $\omega_3(0)$ (figure 4.6 e 4.7).

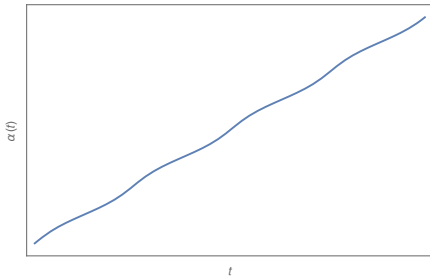


Figura 4.6: $\alpha(t)$ per $\omega_3(0) \geq \omega_{3,s}$ e $\rho(0) \geq \rho_s(\omega_{3,0})$.

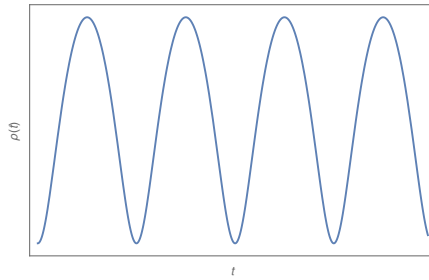


Figura 4.7: $\rho(t)$ per $\omega_3(0) \geq \omega_{3,s}$ e $\rho(0) \geq \rho_s(\omega_{3,0})$.

Analisi dei risultati

In questo paragrafo si discutono i risultati numerici ottenuti, per comprendere più chiaramente la dinamica del sistema al variare dei parametri dai quali dipende.

I risultati indicano che il tipo di moto della sfera dipende dalla velocità iniziale impressale e dall'altezza alla quale inizialmente si trova. In particolare, al di sotto di una certa velocità di soglia, determinata dal raggio r , essa cade; così come pure nel caso in cui, per una fissata $\omega_3(0)$, il raggio del paraboloide sia inferiore ad un valore di soglia dipendente da $\omega_3(0)$. Quando invece sono soddisfatte le condizioni $\omega_3(0) \geq \omega_{3,s}$ e $\rho(0) \geq \rho_s(\omega_{3,0})$, la sfera compie un moto oscillatorio, confinato tra due paralleli, analogamente ai sistemi considerati nel capitolo 3; in particolare essa non cade.

Per meglio visualizzare le diverse casistiche si consideri la figura 4.8, nella quale sono riportati i valori minimi di ρ_0 in funzione di $\omega_{3,0}$ per i quali il moto

della sfera è oscillatorio. La velocità di soglia $\omega_{3,s}$ corrisponde al più piccolo valore che può assumere $\omega_3(0)$: al di sotto di $\omega_{3,s}$ la sfera cade qualunque sia ρ_0 . Per valori maggiori, l'andamento di ρ_0 è decrescente, ovvero all'aumentare del raggio del paraboloide, corrispondentemente, al diminuire della curvatura, la velocità minima richiesta diminuisce. Inoltre, come intuibile, ρ deve avere un valore iniziale maggiore del raggio della sfera.

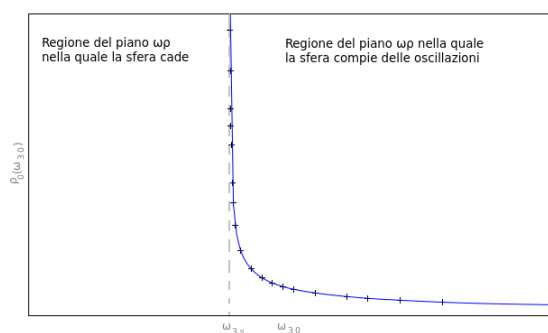


Figura 4.8: $\rho_0(\omega_{3,0})$: interpolazione.

L'ampiezza delle oscillazioni, in quest'ultimo caso, dipende ancora da $\omega_3(0)$ e da $\rho(0)$. Essa cresce linearmente all'aumentare di $\rho(0)$ (figura 4.9), mentre decresce, molto rapidamente in prossimità della soglia, in funzione di $\omega_3(0)$ (figura 4.10). In particolare, esiste, per quanto visto nel punto precedente, una ampiezza di oscillazione massima, corrispondente a $\omega_{3,s}$.

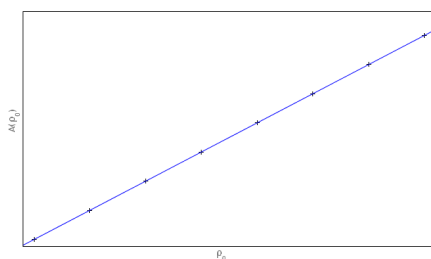


Figura 4.9: $A(\rho_0)$.

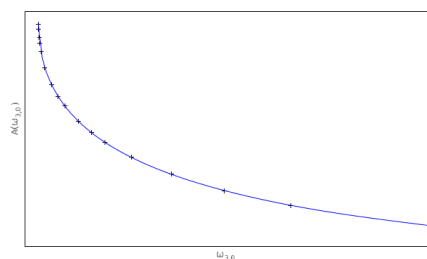
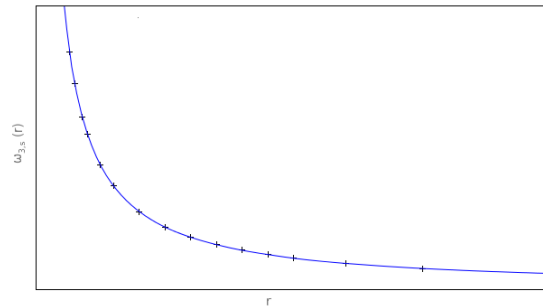


Figura 4.10: $A(\omega_{3,0})$.

Infine, si considera la dipendenza della velocità di soglia dal raggio della sfera. Come indicato in figura 4.11, risulta che al diminuire del raggio la velocità di soglia aumenta.

Figura 4.11: $\omega_{3,s}(r)$.

4.2 Conclusioni

Il sistema meccanico anolonomo studiato nella tesi mostra che, sotto certe condizioni, il moto di una sfera pesante che rotola senza strisciare su una superficie è oscillatorio anche nel caso in cui questa sia concava. Le condizioni che devono essere soddisfatte dipendono dai valori iniziali della componente verticale della velocità angolare e del raggio del paraboloide, e dal raggio della sfera.

Si potrebbe approfondire la descrizione del sistema verificando se le oscillazioni compiute dal centro di massa della sfera siano periodiche, come ci si potrebbe aspettare per analogia con i sistemi nei quali la superficie considerata è un cilindro verticale o una sfera.

Questo è uno studio molto preliminare. Dovrà essere continuato anche con tecniche analitiche, come ad esempio l'individuazione e l'esame degli integrali primi.

Bibliografia

- [1] Abate, M. e Tivena, F., *Geometria differenziale*, Unitext, Springer-Verlag Italia, Milano, (2011).
- [2] Benenti, S., *Meccanica dei sistemi anolonomi*, Complementi alle Lezioni di Meccanica Razionale di T. Levi-Civita e U. Amaldi, CampoMat, (2012), cap. 11, pp. 213-257.
- [3] Bloch, A.M., Marsden, J.E. e Zenkov, D.V., *Nonholonomic Dynamics*, Notices of the American Mathematical Society, (2005), vol. 52, pp. 324-333.
- [4] Bloch, A.M., Marsden, J.E. e Zenkov, D.V., *Quasivelocities and Symmetries in Nonholonomic Systems*, Dynamical Systems, (2009), vol. 24, pp. 187-122.
- [5] Borisov, A.V. e Mamaev, I.S., *On the History of the Development of the Nonholonomic Dynamics*, Regular and Chaotic Dynamics, (2002), vol. 7, n. 1.
- [6] Fassò, F., *Dispense per il corso di Istituzioni di Fisica Matematica per il corso di laurea in Fisica*, Università di Padova, (A.A. 2013-2014).
- [7] Fassò, F., *Note per il corso Sistemi Dinamici*, Università di Padova, (A.A. 2014-2015).
- [8] Fassò, F. e Sansonetto, N., *Conservation of Energy and Momenta in Nonholonomic Systems with Affine Constraints*, Regular and Chaotic Dynamics, (2015), vol. 20, pp. 449-462.
- [9] Fassò, F., Giacobbe, A. e Sansonetto, N., *Periodic flows, rank-two Poisson structures and nonholonomic mechanics*, Regular and Chaotic Dynamics, (2005), vol. 10, pp. 267-284.
- [10] Favretti, M., *Note per il corso di meccanica analitica*, Università di Padova, (A.A. 2014-2015).
- [11] Goldstein, H., Poole, C.P. e Safko, J.L., *Classical Mechanics*, 3a ed, Addison Wesley, San Francisco, (2002).

-
- [12] Marle, Ch.-M., *On Symmetries and Constants of Motion in Hamiltonian Systems with Nonholonomic Constraints*, Classical and Quantum Integrability (Warsaw, 2001), Banach Center Publ., vol. 59, Warsaw: Polish Acad. Sci., (2003), pp. 223-242.
- [13] Neimark, Ju.I. e Fufaev, N.A., *Dynamics of Nonholonomic Systems*, Translation of Mathematical Monographs, vol. 33, Providence, R.I: AMS, (1972).
- [14] Poincaré, H., *Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, (1901), vol. 132, pp. 369-371.