UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÁ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Tesi di Laurea

Introduzione alla teoria dei giochi

Relatore: Prof. Sandro Zampieri

Laureanda: Francesca Ferrari

Anno Accademico 2011 - 2012

Ad Angelo, Stefania ed Enrico

Indice

1 Introduzione

La teoria dei giochi è la scienza matematica che ha come oggetto di studio le strategie per la risoluzione di giochi di società, quali ad esempio scacchi o poker, in cui l'esito della sfida è determinato dalle scelte dei giocatori. Al di là di questa applicazione ludica, la teoria dei giochi fornisce dei modelli che possono essere applicati a situazioni di conflitto di interesse fra due o più entità antagoniste.

L'importanza di questa disciplina è tale da averle consentito di imporsi in ambito economico.

Precedentemente, il modello privilegiato dagli economisti era quello noto come "modello di Robinson Crusoe" ovvero una visione della società in cui l'obiettivo principale é quello di massimizzare i beni ottenuti dalla natura; tuttavia, questa visione diventa riduttiva e inesatta se si pensa di passare da una società composta da una persona ad una in cui sono presenti due entità: in questa nuova situazione, infatti, è molto probabile che entrambi desiderino lo stesso bene, senza escludere la possibilità che questo sia presente in quantità limitata o non sufficiente per entrambi. Dunque la differenza fondamentale nel passaggio da una società composta da un uomo isolato ad una composta almeno da due risiede nel fatto non siamo più in presenza di un problema di ottimizzazione bensì di competizione: ciascuno dei due individui non esiterà ad agire in modo razionale, cercando di prevedere il comportamento dell'antagonista e agendo di conseguenza.

Nonostante possa sembrare un paradosso, il modello di Robinson Crusoe presenta maggiori affinità con il modello di una società composta da n persone, con n sufficientemente grande. Ciò trova motivazione nel fatto che la probabilità che numerose persone si accordino per agire insieme e recare danno ad uno solo è molto bassa.

2 Classificazione dei giochi

Esistono diversi modi per classificare i giochi di società; essi possono essere raggruppati, ad esempio, a seconda del numero di giocatori necessari (e.g.: gli scacchi sono un gioco per due persone).

Anche la quantità di informazione disponibile a ciascun giocatore è un fattore discriminante: è sufficiente pensare a come può variare un gioco di carte nel momento in cui i partecipanti scoprono cosa è in mano ai loro avversari; una partita giocata "a carte scoperte" è dunque profondamente diversa da una partita giocata con informazione limitata e i ragionamenti fatti dai partecipanti per scegliere le proprie mosse variano a seconda delle due circostanze.

Un'altra distinzione può essere fatta sul numero massimo di mosse consentite; con questo criterio si individuano i giochi finiti e i giochi infiniti. Per alcuni giochi, ad esempio, è consentita solo una mossa: il gioco "sasso, carta, forbice" è tra questi.

Una delle principali distinzioni è legata al pagamento effettuato al termine di ogni partita; si può supporre che ad ogni esito sia associato un pagamento determinato dalle regole del gioco. Supponiamo che ad un gioco partecipino n giocatori indicati dalle lettere $P_1, P_2, ..., P_n$ e che il valore p_i indichi la quantità di denaro che il giocatore P_i riceve alla fine della partita (se p_i è negativo allora il giocatore P_i deve pagare).

I giochi per cui vale la relazione $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0$ sono detti *giochi a somma zero*. Questa categoria comprende i giochi di società che tipicamente si usano per scommettere soldi (ad esempio poker). In essi non avviene creazione o distuzione di beni. Tuttavia anche i *giochi a somma non nulla* sono molto importanti perchè presentano una forte analogia con i processi economici, in grado di incrementare o decrementare la quantità di beni dei partecipanti.

3 Giochi rettangolari

Nell'analisi delle strategie di risoluzione dei giochi si farà riferimento ad una classe di giochi particolare, quelli chiamati *rettangolari*; Si tratta di giochi a somma zero da due persone.

Il modello di questi giochi è molto semplice: ciascuno dei due giocatori deve effettuare una scelta fra le possibili mosse che ha a disposizione e l'esito della partita dipende dalla scelta di entrambi i partecipanti. Al termine della partita si effettua uno scambio di denaro sulla base di una matrice che prende il nome di *matrice dei pagamenti,* in cui ciascun elemento a_{ij} indica l'importo che il giocatore P_1 , dopo aver effettuato la mossa i, riceve da P_2 se quest'ultimo effettua la scelta j.

Il seguente esempio ha lo scopo di illustrare quanto detto: si consideri la seguente matrice dei pagamenti

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$$

Se, ad esempio, il giocatore P_1 sceglie 2 e allo stesso tempo il giocatore P_2 decide di giocare 1 allora il giocatore P_1 riceve il valore -3, ovvero deve pagare un importo pari a 3. Se invece i giocatori P_1 e P_2 giocano rispettivamente i numeri 1 e 3 il giocatore P_1 riceve un pagamento pari a 2.

Data una matrice dei pagamenti, la domanda principale che ci si pone è se esiste un modo ottimale di giocare.

Se si considera ad esempio la matrice:

$$A = \begin{Vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -5 & -6 \end{Vmatrix}$$

si noterà che ogni elemento della prima riga è maggiore di ciascun elemento delle righe inferiori e che l'ultima riga contiene i valori più bassi; da questa osservazione si deduce che per il giocatore P_1 sarà più vantaggioso scegliere il numero 1.

Con un ragionamento analogo, il giocatore P_2 sarà indotto a scegliere il numero 3, dal momento che la terza colonna presenta, rispetto alle altre, i valori più bassi.

Tuttavia non tutte le matrici dei pagamenti presentano la struttura evidenziata in questo esempio: non è garantita la presenza di una riga con valori maggiori rispetto alle altre o una colonna con valori minori; di conseguenza si rende necessario cercare un approccio matematico per determinare la strategia migliore.

4 Approccio matematico ai giochi rettangolari: ricerca del punto di sella

Si faccia riferimento al generico gioco rettangolare caratterizzato dalla matrice dei pagamenti:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Si tratta di una matrice con m righe e n colonne, dove m è il numero di scelte a disposizione del giocatore P_1 e n quelle a disposizione di P_2.

Il partecipante P_1, per scegliere il numero da giocare, deve tener conto del seguente ragionamento: egli sa che, scegliendo il numero i, la cifra che P_2 deve pagargli al termine del gioco sarà *almeno*

$$\min_j a_{ij}$$

Quindi, per assicurarsi un guadagno minimo più alto possibile, dovrà scegliere un numero i tale da assicurargli di avere almeno:

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right)$$

In modo simile, il giocatore P_2 dovrà cercare di massimizzare, con un'accurata scelta della colonna, il valore minimo che può ricevere dall'antagonista P_1.

È bene ricordare che la matrice dei pagamenti è stata definita come la *matrice avente per elementi a_{ij} i valori che P_2 è tenuto a pagare a P_1 al termine di ogni partita*, in base alle rispettive scelte. Dunque, se si vuole analizzare *ciò che riceve P_2* è necessario considerare l'opposto dei valori presenti nella matrice, ovvero $-a_{ij}$.

La scelta di P_2 dovrà essere tale da permettergli di ottenere almeno:

$$\max_j \left(\min_i (-a_{ij}) \right)$$

Al fine di ragionare sugli stessi valori a_{ij} per entrambi i giocatori, si possono utilizzare due relazioni elementari sui massimi e minimi:

$$\max_x [-f(x)] = -\min_x f(x)$$

e

$$\min_x [-f(x)] = -\max_x f(x)$$

Di conseguenza, l'obbiettivo di P_2 può essere riscritto nel seguente modo, tenendo conto del fatto che l'intervallo di variazione di i e j è finito e dunque esistono sia il minimo che il massimo:

$$\max_j \left(\min_i (-a_{ij}) \right) = \max_j \left(-\max_i a_{ij} \right) = -\min_j \left(\max_i a_{ij} \right)$$

ovvero P_2 giocherà in modo tale da *ottenere almeno* $-\min_j (\max_i a_{ij})$oppure, da un altro punto di vista, in modo da *far guadagnare a P_1 al massimo* $\min_j (\max_i a_{ij})$.

Ciascuno dei due giocatori giocherà in modo da raggiungere un obiettivo: il primo dei due cercherà di ottenere almeno $\max_i (\min_j a_{ij})$ mentre il secondo giocherà in modo da impedirgli di superare il valore $\min_j (\max_i a_{ij})$.

Tra questi due valori esiste un'importante relazione, che sarà ripresa anche in seguito:

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) \leq \min_j \left(\max_i a_{ij} \right)$$

Al fine di giustificare quanto appena scritto, enunciamo il seguente:

Teorema Siano A e B due insiemi e sia f una funzione di due variabili tale che

$f : A \times B \to \mathbb{R}$

$f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$

Supponiamo che esistano entrambi

$$\max_{x \in A} \left(\min_{y \in B} f(x, y) \right)$$

e

$$\min_{y \in B} \left(\max_{x \in A} f(x, y) \right)$$

Allora i due valori soddisfano

$$\max_{x \in A} \left(\min_{y \in B} f(x, y) \right) \leq \min_{y \in B} \left(\max_{x \in A} f(x, y) \right)$$

Dimostrazione Per definizione di minimo di una funzione, la seguente relazione è valida al variare di x e y:

$$\min_{y \in B} f(x,y) \leq f(x,y)$$

e, per definizione di massimo,

$$\max_{x \in A} f(x,y) \geq f(x,y)$$

da cui si ricava la relazione

$$\min_{y \in B} f(x,y) \leq \max_{x \in A} f(x,y)$$

Analizzando questa espressione si nota che il membro a destra è indipendente da y e di conseguenza si può scrivere

$$\min_{y \in B} f(x,y) \leq \min_{y \in B} \left(\max_{x \in A} f(x,y) \right)$$

In modo simile, si può constatare nella precedente relazione, la parte a sinistra del segno $\leq$è indipendente da x e pertanto

$$\max_{x \in A} \left(\min_{y \in B} f(x,y) \right) \leq \min_{y \in B} \left(\max_{x \in A} f(x,y) \right)$$

Corollario Una matrice

$$M = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

può essere considerata come una funzione di due variabili $f(i,j) = a_{ij}$ definita per $i \in [1,m]$ e $j \in [1,n]$. Se si considera come insieme A quello formato dai primi m interi positivi e come insieme B quello formato dai primi n numeri interi positivi, si può applicare a questa funzione il teorema appena dimostrato, ritrovando la relazione scritta precedentemente

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) \leq \min_j \left(\max_i a_{ij} \right)$$

Ricordiamo qual è il significato che è stato attribuito a questi due valori: il termine a sinistra è il valore minimo che il primo giocatore può ottenere con una scelta accurata del numero da giocare: il suo scopo è quello di ottenere almeno tale vincita; egli sta dunque ponendo un limite inferiore all'importo ricevuto da P_2.

Il termine a destra rappresenta invece il massimo valore che P_1 può vincere, dal momento che il secondo giocatore gli impedirà, con la sua scelta, di ottenere un importo più alto.

Può verificarsi che i due membri coincidano, ovvero

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right) = v$$

In tal caso il primo giocatore sa che può vincere v e che il suo antagonista gli impedirà di avere di più, mentre P_2 può cercar di guadagnare -v e giocare di conseguenza.

Questa situazione è di notevole importanza e, come enunciato nel teorema sottostante, il suo verificarsi è legato alla presenza di un punto di sella, di cui si fornisce di seguito una definizione.

Definizione Sia f una funzione a valori reali

$$f : A \times B \to \mathbb{R}$$

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y)$$

Il punto (x_0, y_0), dove $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, è detto *punto di sella* se soddisfa le condizioni:

$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \qquad \forall x \in A$

$f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y) \qquad \forall y \in B$

Teorema Sia f una funzione a valori reali,

$f : A \times B \to \mathbb{R}$

$f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ e si supponga che esistano entrambi

$$\max_{x \in A} \left(\min_{y \in B} f(x, y) \right)$$

e

$$\min_{y \in B} \left(\max_{x \in A} f(x, y) \right).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè si verifichi

$$\max_{x \in A} \left(\min_{y \in B} f(x, y) \right) = \min_{y \in B} \left(\max_{x \in A} f(x, y) \right)$$

è che f possegga un punto di sella $(x_0\ y_0)$. Si avrà dunque che

$$f(x_0, y_0) = \max_{x \in A} \left(\min_{y \in B} f(x, y) \right) = \min_{y \in B} \left(\max_{x \in A} f(x, y) \right)$$

Corollario Si consideri la generica matrice dei pagamenti

$$M = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Applicando il teorema sopra enunciato a questa funzione di due variabili $(i, j) \in A \times B$ si conclude che la condizione necessaria e sufficiente affinchè sia soddisfatta

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right)$$

è la presenza di un punto di sella, ovvero una coppia di interi (x_0, y_0)tale che a$_{x_0 y_0}$sia allo stesso tempo il minimo della sua riga e il massimo della colonna.

Riassumendo, se la matrice dei pagamenti di un gioco rettangolare presenta un punto di sella (x_0, y_0) ,per quanto detto in precedenza, la strategia migliore per il primo giocatore è scegliere x_0, mentre per il secondo è giocare y_0.

L'elemento $a_{x_0 y_0}$prende il nome di *valore del gioco*.

Primo esempio di gioco rettangolare. Due giocatori devono mostrare contemporaneamente le dita di una mano. Possono scegliere entrambi un numero da 1 a 5 e al termine del gioco P_1 riceve un importo sulla base della seguente matrice dei pagamenti:

$$A = \begin{Vmatrix} 6 & 2 & -4 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & -2 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Per capire se esiste una strategia migliore, calcoliamo i valori

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right)$$

e

$$\min_j \left(\max_i a_{ij} \right)$$

e vediamo se coincidono.

Eseguendo il calcolo si trova:

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = -1$$

$$\min_j \left(\max_i a_{ij} \right) = -1$$

i due valori sono coincidenti. Infatti la matrice A presenta un punto di sella per $i = 4$ e $j = 3$. Il valore $a_{43} = -1$ è il minimo della sua riga e il massimo della colonna. Quindi per P_1 la scelta migliore è mostrare quattro dita mentre per l'avversario P_2 la strategia da seguire è scegliere di mostrarne tre.

Il valore del gioco è -1.

Secondo esempio di gioco rettangolare. Due amici, Aldo (A) e Biagio (B) fanno delle scommesse sull'esito di un loro tiro: entrambi, dopo aver scelto "pari o dispari", mostrano le dita di una mano. La somma delle dita alzate determina, oltre al vincitore, anche l'importo che egli riceve dall'altro. Questa è la matrice dei pagamenti nel caso in cui il giocatore A abbia scommesso "pari" e, di conseguenza, B abbia scelto "dispari":

	0	1	2	3	4	5
0	0	-1	2	-3	4	-5
1	-1	2	-3	4	-5	6
2	2	-3	4	-5	6	-7
3	-3	4	-5	6	-7	8
4	4	-5	6	-7	8	-9
5	-5	6	-7	8	-9	10

dove la prima riga e la prima colonna indicano il numero di dita mostrate rispettivamente da A e B.

Si nota subito che non esiste nessun numero tale da essere contemporaneamente il minimo della riga e il massimo della colonna: infatti

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = -5$$

$$\min_j \left(\max_i a_{ij} \right) = 4$$

i due valori sono diversi, a conferma di quanto detto. Per questo gioco rettangolare non si può procedere con la strategia descritta finora: in caso di assenza del punto di sella l'approccio matematico è diverso.

5 Approccio matematico ai giochi rettangolari in assenza del punto di sella

I giochi per cui non esiste un punto di sella nella matrice dei pagamenti sono molti; per fare un esempio consideriamo il seguente gioco

Testa o croce Due giocatori, P_1 e P_2, devono scrivere testa o croce su un foglio. Dopo averlo scritto, devono mostrare contemporaneamente la loro scelta all'avversario. Se la parola scritta è la stessa allora P_1 vince altrimenti il vincitore è P_2.La matrice dei pagamenti per questo gioco è

	T	C
T	1	-1
C	-1	1

Questa matrice non ha punti di sella quindi non c'è una scelta in grado di garantire, per P_1 e per P_2,il raggiungimento di un obiettivo. Inoltre, è da ricordare che ogni giocatore non sa quale mossa potrebbe scegliere l'avversario.

Supponiamo che P_1 decida di affidare la sua scelta al lancio di una moneta. Dunque sia la probabilità di scegliere testa sia quella di puntare su croce è $\frac{1}{2}$. Il valore atteso di P_1, supponendo che P_2 giochi croce è $(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Lo stesso si ottiene con l'ipotesi che P_2 intenda giocare testa: $1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

Supponiamo ora che, al posto di una moneta, P_1 utilizzi un dispositivo che assegni una certa probabilità x alla scelta "testa" e una probabilità *(1-x)* a "croce"; in modo simile, si supponga che anche P_2 utilizzi un dispositivo che assegni una probabilità y a "testa" e *(1-y)* a "croce".

L'aspettazione di P_1 si esprime:

$$\begin{aligned} E(x,y) &= xy - y(1-x) - x(1-y) + (1-x)(1-y) \\ &= 4xy - 2x - 2y + 1 = 4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Si può notare che, nel caso in cui $x>\frac{1}{2}$, l'aspettazione di P_1 dipende dalla probabilità con cui il suo avversario sceglie testa: il valore atteso di P_1potrebbe benissimo essere negativo: basta considerare il caso in cui P_2scelga croce.

Anche nel caso in cui $x<\frac{1}{2}$ il giocatore P_1 potrebbe incorrere in un'aspettazione negativa: ciò accadrebbe per $y>\frac{1}{2}$, ovvero se ad esempio P_2 scegliesse testa.

Questo ragionamento mostra che nessun valore di x diverso da $\frac{1}{2}$ salva P_1 dal rischio di avere un'aspettazione negativa. Data la simmetria del problema, la stessa conclusione vale per la probabilità y con cui P_2 sceglie "testa". Da ciò si conclude che il modo migliore di giocare, per entrambi i giocatori, è scegliere "testa" o "croce" con uguale frequenza.

Si consideri il gioco rettangolare caratterizzato dalla seguente matrice dei pagamenti:

$$A = \begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix}$$

sia x la probabilità con cui P_1 sceglie di giocare il numero 1 e, similmente, sia y quella con cui P_2 gioca 1. Dunque l'aspettazione di P_1 in funzione di queste due probabilità è

$$\begin{aligned} E(x,y) &= -3xy + 2x(1-y) + 4y(1-x) - 2(1-x)(1-y) \\ &= -11xy + 4x + 6y - 2 = -11\left(x-\frac{6}{11}\right)\left(y-\frac{4}{11}\right)+\frac{2}{11} \end{aligned}$$

Scrivendo l'aspettazione in quest'ultima forma, si nota subito che se P_1 sceglie $x=\frac{6}{11}$ il valore di $E(x,y)$ è esattamente $\frac{2}{11}$ mentre, con una diversa scelta della probabilità x, l'aspettazione di P_1 potrebbe essere inferiore a tale valore. Dunque è conveniente per il primo giocatore, cercare di ottenere $\frac{2}{11}$ e giocare il primo numero con una probabilità pari a $\frac{6}{11}$.

Il ragionamento per il secondo giocatore è analogo: la sua aspettazione vale esattamente $-\frac{2}{11}$ se gioca il numero 1 con probabilità $y=\frac{4}{11}$ e il numero 2 con probabilità $(1-y)=\frac{7}{11}$; in caso contrario, non può aver la certezza di pagare meno di $\frac{2}{11}$. Quindi la scelta per lui ottimale è di giocare 1 e 2 rispettivamente con probabilità $\frac{4}{11}$ e $\frac{7}{11}$. Sembra ragionevole pertanto dire che $\frac{2}{11}$ è il *valore del gioco*.

Quanto appena detto può essere espresso con la relazione:

$$E\left(x,\frac{4}{11}\right)\leq E\left(\frac{6}{11},\frac{4}{11}\right)\leq E\left(\frac{6}{11},y\right)$$

e questa mette in evidenza il fatto che il punto $\left(\frac{6}{11},\frac{4}{11}\right)$ è il punto di sella della funzione E(x,y).

Quindi, in assenza del punto di sella della matrice dei pagamenti, si può definire in questo modo la strategia migliore per un gioco rettangolare 2x2: sia E(x,y) l'aspettazione del primo giocatore, dove x è la frequenza con cui P_1 sceglie 1 e y è quella con cui P_2 sceglie 1, si dice che x^* e y^* sono frequenze ottimali rispettivamente per P_1 e P_2 se

$$E\left(x,y^*\right)\leq E\left(x^*,y^*\right)\leq E\left(x^*,y\right)\qquad\qquad \forall x,y\in[0,1]$$

Strategia ottimale per giochi con matrice mxn Si consideri il gioco rettangolare descritto dalla generica matrice

$$A=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \cdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{Vmatrix}$$

si definisce *strategia mista* per P_1 la m-upla $\begin{Vmatrix}x_1 & \cdots & x_m\end{Vmatrix}$ di numeri reali non negativi, tali da soddisfare la condizione

$$\sum_{i=1}^{m}x_i=1$$

Questi valori rappresentano la frequenza con cui P_1 sceglie di giocare i valori 1,2,...,m. Sia S_m l'insieme delle m-uple che rispettano queste condizioni.

In modo analogo si definisce una strategia mista per P_2, ovvero una n-upla di numeri reali non negativi $\begin{Vmatrix}y_1 & \cdots & y_n\end{Vmatrix}$ tali da soddisfare

$$\sum_{j=1}^{n}y_j=1$$

che rappresentano la frequenza (o la probabilità) con cui il secondo giocatore sceglie rispettivamente 1,2,...,n. Sia S_n l'insieme delle n-uple che rappresentano una strategia mista per P_2.

Supponiamo che il primo giocatore adotti la strategia mista $X=\begin{Vmatrix}x_1 & \cdots & x_m\end{Vmatrix}$ e che il suo avversario P_2 adotti $Y=\begin{Vmatrix}y_1 & \cdots & y_n\end{Vmatrix}$; allora l'aspettazione di P_1 è data da:

$$E\left(X,Y\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_iy_j$$

Come è stato fatto nel caso 2x2, anche per giochi rettangolari con matrici di dimensione m×n si può trovare una strategia ottimale per P_1 e P_2.

Sia X^*una m-upla appartenente all'insieme S_m delle strategie miste per P_1 e sia Y^* una n-upla appartenente a S_n; se X^* e Y^* soddisfano la relazione

$$E(X,Y^*) \leq E(X^*,Y^*) \leq E(X^*,Y) \qquad \forall X \in S_m,\ \forall Y \in S_n$$

allora X^* e Y^* si dicono ***strategie miste ottimali*** rispettivamente per il primo e il secondo giocatore.

La coppia ordinata di vettori $\|X^*\ Y^*\|$ prende il nome di *soluzione del gioco* o *punto di sella strategico*.

Quest'ultimo nome può essere motivato considerando che il primo giocatore può assicurarsi, facendo uso della strategia mista X*, un guadagno minimo pari a $E(X^*,Y*)$, indipendentemente dalla scelta dell'avversario; d'altra parte il secondo giocatore può impedire a P_1 di ottenere più di $E(X^*,Y*)$, utilizzando la strategia mista ottimale Y*.

Per i giochi rettangolari le due quantità

$$v_1 = \max_{X \in S_m}\left(\min_{Y \in S_n} E(X,Y)\right)$$

e

$$v_2 = \min_{Y \in S_n}\left(\max_{X \in S_m} E(X,Y)\right)$$

esistono sempre e sono uguali. Di conseguenza, esistono strategie miste per P_1 e P_2 tali da soddisfare la relazione

$$E(X,Y^*) \leq E(X^*,Y^*) \leq E(X^*,Y)$$

6 Esempio

sasso, carta, forbice Come esempio pratico di quanto detto finora, illustriamo il noto gioco "sasso, carta, forbice". I due giocatori che si sfidano hanno la possibilità di scegliere uno tra i seguenti segni:

- sasso: mano chiusa a pugno
- carta: mano aperta con le dita stese
- forbice: mano chiusa con indice e medio stesi

I due giocatori, al segnale convenuto, devono mostrare la propria scelta contemporaneamente. Per decretare il vincitore valgono le seguenti regole:

- la carta avvolge il sasso
- la forbice taglia la carta
- il sasso rompe le forbici

Ipotizzando un pagamento di un euro da parte del giocatore che perde il turno, la matrice dei pagamenti per questo gioco é:

	S	C	F
S	0	-1	1
C	1	0	-1
F	-1	1	0

come si può facilmente notare, non esiste nessun a_{ij} tale da essere il minimo della riga e il massimo della colonna quindi questa matrice dei pagamenti non presenta punti di sella. Infatti,

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = -1$$

e

$$\min_j \left(\max_i a_{ij} \right) = 1$$

questi due valori sono differenti, a supporto dell'affermazione fatta.

Sia quindi $X = (x_1, x_2, x_3)$ il vettore che rappresenta la strategia mista di P_1 e sia $Y = (y_1, y_2, y_3)$ quello che rappresenta la strategia mista del secondo giocatore. Per come sono stati definiti questi vettori devono essere rispettate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 0 \leq x_i \leq 1 & \forall i \\ 0 \leq y_j \leq 1 & \forall j \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

Si intende ora trovare il valore di x_i e y_j, ovvero la strategia ottimale per i due giocatori. Indicando con v il valore del gioco, ovvero

$$v = E\left(X^*, Y^*\right)$$

e, ricordando quali sono gli obiettivi dei due giocatori, si impostano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} (0)\,x_1 + (1)\,x_2 + (-1)\,x_3 \geq v \\ (-1)\,x_1 + (0)\,x_2 + (1)\,x_3 \geq v \\ (1)\,x_1 + (-1)\,x_2 + (0)\,x_3 \geq v \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (0)\,y_1 + (-1)\,y_2 + (1)\,y_3 \leq v \\ (1)\,y_1 + (0)\,x_2 + (-1)\,y_3 \leq v \\ (-1)\,y_1 + (1)\,y_2 + (0)\,x_3 \leq v \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

I metodi risolutivi forniti dall'algebra elementare non sono sufficienti per risolvere un sistema contenente disuguaglianze. In alternativa, si propone il seguente metodo: risolvere il sistema lineare che si ottiene sostituendo i simboli "$\leq$" e "$\geq$" con "$=$" e, successivamente valutare se, nonostante le limitazioni applicate, si è in grado di calcolare dei valori x_i e y_j tali da rispettare le condizioni scritte in alto.

Il sistema di equazioni lineari è il seguente:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = v \\ -x_1 + x_3 = v \\ x_1 - x_2 = v \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -y_2 + y_3 = v \\ y_1 - y_3 = v \\ -y_1 + y_2 = v \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

e, risolvendo il sistema, si ricava questa soluzione per il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} \\ x_3 = \frac{1}{3} \\ y_1 = \frac{1}{3} \\ y_2 = \frac{1}{3} \\ y_3 = \frac{1}{3} \\ v = 0 \end{cases}$$

Si nota subito che tutti i valori x_i sono compresi fra zero e uno e che la loro somma è pari all'unità. Lo stesso vincolo è rispettato dai valori trovati per y_j. In questo caso, la restrizione imposta per risolvere il sistema non ha impedito di trovare una soluzione.

Dunque, la strategia mista ottimale per P_1 è data da $X^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ mentre per P_2 è $Y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Il valore del gioco è $v = 0$.

7 Esempio

Si consideri il gioco rettangolare descritto dalla seguente matrice dei pagamenti:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

come si può notare, questa matrice non presenta punti di sella.

Dunque, come nell'esempio precedente, si impostano le disuguaglianze:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq v \\ -x_1 + 3x_2 \geq v \\ 2x_1 + x_2 \geq v \\ x_1 + x_2 = 1 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 \leq v \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \leq v \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

Dove $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3)$ sono le strategie miste rispettivamente per P_1 e P_2.

A differenza dell'esempio precedente, le restrizioni che si pongono sostituendo i simboli "$\leq$" e "$\geq$" con "$=$" impediscono di trovare degli x_i e y_j tali da soddisfare i vincoli

$$\begin{cases} 0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall i \\ 0 \leq y_j \leq 1 \qquad \forall j \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

Per cercare una soluzione adatta, si può procedere studiando vari casi: si può iniziare sostituendo il primo simbolo "$\geq$" con "$>$" e le restanti disuguaglianze con delle uguaglianze. Se, risolvendo il nuovo sistema, si ottengono nuovamente soluzioni non accettabili, non resta che modificare un altro simbolo e analizzare in ordine i vari casi.

Effettuando la prima modifica il sistema diventa:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 > v \\ -x_1 + 3x_2 = v \\ 2x_1 + x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 = v \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 = v \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

A questo punto, per terminare correttamente l'esercizio, è essenziale citare un teorema:

si può dimostrare che, dati i vettori di strategia mista ottimale $X^* = \begin{Vmatrix} x_1^* & \cdots & x_m^* \end{Vmatrix}$ e $Y^* = \begin{Vmatrix} y_1^* & \cdots & y_n^* \end{Vmatrix}$rispettivamente per P_1 e P_2, se si verifica che

$$E\left(i, Y^*\right) < v$$

allora $x_i^* = 0$.

Similmente, se si verifica

$$E\left(X^*, j\right) > v$$

allora $y_j^* = 0$.

Nel caso dell'esercizio che stiamo analizzando si è supposto che $E\left(X^*, 1\right) > v$; per il teorema appena citato possiamo concludere che $\mathrm{y}_1 = 0$.

Proseguendo con la soluzione dell'esercizio:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = v \\ 2x_1 + x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

da cui, dopo pochi passaggi, si giunge a

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \\ x_2 = \frac{3}{5} \\ v = \frac{7}{5} \end{cases}$$

Per quanto riguarda la strategia mista del secondo giocatore invece:

$$\begin{cases} -y_2 + 2y_3 = v = \frac{7}{5} \\ 3y_2 + y_3 = v = \frac{7}{5} \\ y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} y_2 = \frac{1}{5} \\ y_3 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Notiamo che i valori trovati per gli x_i e y_j rispettano tutti i vincoli imposti; si tratta quindi delle strategie miste cercate. Concludendo, la strategia mista ottimale per il giocatore P_1è data da $X^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, quella del secondo giocatore è invece $Y^* = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$

8 Bibliografia e documentazione online consultata

- John Charles Chenoweth McKinsey, “Introduction to the Theory of Games”, Dover publications, 2003
- Davide Vannoni, “teoria dei giochi”

  http://web.econ.unito.it/vannoni/docs/thgiochi.pdf
- Alessandro Agnetis, “Introduzione alla teoria dei giochi”

  http://www.dii.unisi.it/~agnetis/introgiochi.pdf
- Marco Li Calzi, “Un eponimo ricorrente: Nash e la teoria dei giochi”

  http://venus.unive.it/licalzi/NashEponimo.pdf
- Gian Italo Bischi, “Un’introduzione alla Teoria dei Giochi”

  http://matematica.unibocconi.it/articoli/unintroduzione-alla-teoria-dei-giochi
- Maria Simonetta Barnabei, “Teoria dei Giochi”

  http://www.unicam.it/matinf/pls/Teoria%20dei%20Giochi.pdf