



Università degli Studi di Padova

Facoltà di Ingegneria

***Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi
Industriali***

Tesi di Laurea di Primo Livello

***Modelli di Previsione: Esplicativi ed
Estrapolativi***

Relatore:

prof. Romanin Jacur Giorgio

Laureanda:

Signorini Alice

Anno accademico 2011 – 2012

INDICE

INTRODUZIONE	4
CAPITOLO 1 - MODELLI DI PREVISIONE	5
1.1.IL PROCESSO PREVISIONALE	5
1.2.METODOLOGIE DI PREVISIONE	7
1.3.SELEZIONE E ADOZIONE DI UNA METODOLOGIA DI PREVISIONE	8
CAPITOLO 2 - MODELLI ESPLICATIVI	10
2.1.REGRESSIONE LINEARE SEMPLICE	11
2.2.VALUTAZIONE DEI MODELLI DI REGRESSIONE	14
2.3.REGRESSIONE LINEARE MULTIPLA	20
CAPITOLO 3 - MODELLI ESTRAPOLATIVI	22
3.1.NUMERI INDICE	23
3.2.VALUTAZIONE DI MODELLI ESTRAPOLATIVI	24
3.3.COMPONENTI DI UNA SERIE STORICA	26
3.4.MODELLI A MEDIA MOBILE	27
3.5.SCOMPOSIZIONE DI UNA SERIE STORICA	29
3.6.MODELLI DI SMOOTHING ESPONENZIALE	33
3.7.METODI AUTOREGRESSIVI	41
3.8.COMBINAZIONEDI METODI PREVISIONALI	43
CONCLUSIONI	45
RINGRAZIAMENTI	47
BIBLIOGRAFIA	48

INTRODUZIONE

La previsione di dati ed informazioni relative all'evoluzione di variabili aziendali è di importanza cruciale per l'impostazione di politiche di pianificazione e programmazione nell'impresa stessa.

Per pianificare, infatti, la produzione di un'azienda, non basta sapere che la domanda di prodotti o servizi è in aumento o diminuzione, ma è fondamentale prevedere l'andamento della domanda futura dei prodotti, dei prezzi, dei costi delle materie prime e di tutti quei fattori che si ritengono influenti nell'attività di produzione, cioè il tasso di cambiamento del fenomeno studiato.

Questo elaborato si propone di approfondire degli strumenti matematici di previsione per poter affrontare delle scelte in azienda. In particolar modo si approfondiranno due diverse categorie di modelli di previsione: i modelli esplicativi e quelli estrapolativi.

I modelli esplicativi cercano di identificare in forma funzionale gli eventuali nessi logici che legano tra loro due o più grandezze; i modelli estrapolativi, invece, tentano di identificare in forma funzionale le eventuali regolarità evidenziate da una serie temporale di osservazioni riferite a una medesima grandezza.

La scelta del modello e dello strumento da utilizzare, come si vedrà in seguito, dipende da diversi fattori. Si cercherà, quindi, di indicare una metodologia per l'analisi dei costi e benefici che una tecnica previsionale comporta.

CAPITOLO 1 - Modelli di Previsione

Le imprese sono chiamate ad operare in un ambiente economico competitivo e caratterizzato da una forte turbolenza. Per questo motivo si richiede l'adozione di politiche gestionali dinamiche, capaci di fornire reazioni tempestive di fronte ai continui cambiamenti a livello tecnologico, organizzativo e ambientale. Infatti, ogni decisione all'interno di un'azienda, dipende in larga misura da eventi e condizioni che si verificheranno nel futuro. In questo quadro emerge la forte esigenza di formulare previsioni che riguardano il futuro.

Le previsioni, infatti, svolgono un ruolo centrale che si colloca alla base dell'intero processo decisionale. Previsioni imprecise ed inadeguate rischiano, quindi, di invalidare le conclusioni raggiunte attraverso la faticosa realizzazione e risoluzione di un modello di decisione, secondo il principio noto come garbage in garbage out.

Tendenzialmente, soprattutto in passato, nelle imprese una larga parte dei processi decisionali si basava su decisioni che provenivano in prevalenza da valutazioni empiriche e opinioni soggettive.

Si è scorta, negli ultimi anni, una marcata tendenza al cambiamento, che ha condotto, in molti casi, all'adozione di tecniche previsionali più evolute e di natura quantitativa.

1.1. Il processo previsionale

Con in termine di processo previsionale si intende riferirsi a quel complesso di attività, più o meno esplicite, che conducono alla formulazione di una previsione.

1.1.1. Previsioni e Predizioni

Spesso i termini previsione e predizione sono utilizzati come sinonimi; è giusto però, fare una distinzione tra i significati dei due termini.

La *previsione* consente di associare delle probabilità di occorrenza a eventi futuri, oppure di specificare intervalli di confidenza alla stima di grandezza che saranno osservabili e misurabili nel futuro.

La *predizione* consiste invece nell'identificazione dello specifico valore che una grandezza misurabile assumerà nel futuro.

I modelli che verranno descritti in seguito forniscono predizioni sotto forma di stime puntuali del valore atteso di grandezze misurabili. Risulta agevole, quindi, associare alle predizioni così formulate le corrispondenti previsioni, utilizzando strumenti classici della statistica inferenziale per derivare i relativi intervalli di confidenza.

1.1.2.Obiettivi del processo previsionale

Le previsioni costituiscono un'informazione rilevante per diverse categorie di decisioni aziendali.

Tutte le funzioni di un'impresa utilizzano in qualche misura informazioni di natura previsionale per sviluppare le proprie decisioni. Tuttavia, gli obiettivi di questi processi decisionali sono assai differenti, e differenti risultano pertanto le opportunità che le previsioni devono offrire in ciascuna situazione.

Gli obiettivi del processo previsionale, quindi, sono molto vari e spaziano in tutti gli ambiti organizzativi e gestionali dell'impresa.

L'obiettivo principale di tutti i modelli previsionali, però, è quello di conoscere una stima del valore atteso insieme a una stima dell'errore che il modello di previsione può produrre.

1.1.3.Orizzonte di programmazione

L'ampiezza dell'orizzonte di previsione è un fattore che caratterizza in modo significativo il processo previsionali.

Le previsioni, infatti, possono riguardare un immediato futuro, fino a 12 mesi, dove le previsioni rappresentano il sostegno per decisioni di carattere operativo; ad esempio nel caso di previsioni della domanda di un prodotto per i successivi due mesi e il ricorso a nuovi fornitori e/o terzisti. Oppure possono essere rivolte alla pianificazione a medio termine, tra 12 e 24 mesi, dove si costruiscono previsioni per supportare decisioni relative ai piani aggregati di produzione: definizione dei volumi di produzione per famiglie di prodotti, definizione dei turni lavorativi giornalieri, ricorso alla cassa

integrazione, etc. Vengono definite decisioni di carattere tattico. Infine possono avere come oggetto un'ampia estensione futura, oltre i 24 mesi, dove si formulano previsioni che fungono da supporto alle decisioni manageriali per quanto riguarda i piani di sviluppo dell'impresa: acquisti di società, costruzione di nuovi stabilimenti, aumento della capacità produttiva, etc. Vengono definite decisioni di carattere strategico.

Nelle tre situazioni descritte, caratterizzate rispettivamente da un breve, medio e lungo orizzonte di previsione, gli obiettivi dei decisori che intendono utilizzare le previsioni sono molto diversi, così come diverso è il grado di accuratezza e di dettaglio che si richiede alle corrispondenti previsioni.

La scelta dell'orizzonte di previsione dipende dal problema specifico: è infatti funzione del tempo necessario per l'implementazione di una decisione

1.2. Metodologie di previsione

Esistono quattro tipi principali di tecniche di previsione, che saranno presentati qui di seguito.

1.2.1. Modelli estrapolativi

I metodi estrapolativi utilizzano i valori di una serie storica di osservazioni relative ad una grandezza per ricavarne le eventuali regolarità che si manifestano e per proiettarne l'andamento nel futuro.

Ad esempio, sulla base di una serie storica dei volumi di vendita settimanali per un prodotto, un metodo estrapolativo cerca di identificare un'eventuale stagionalità o tendenza che consentono di prevedere l'andamento delle vendite nelle settimane future.

1.2.2. Modelli esplicativi

I metodi esplicativi cercano di identificare relazioni quantitative di natura funzionale tra la grandezza di cui si vuole ottenere la previsione e un insieme di variabili che si ritiene possano influenzarne il valore.

Ad esempio, si può cercare di spiegare il volume delle vendite di un prodotto sulla base del valore degli investimenti pubblicitari sostenuti per diversi canali di comunicazione,

quali televisione, quotidiani, periodici, cartelloni pubblicitari. Questa analisi suggerisce l'esistenza di un modello esplicativo della forma

$$\text{Volume di vendite} = f(\text{investimenti pubblicitari})$$

La forma funzionale e il valore degli eventuali parametri della funzione f vengono determinati sulla base di osservazioni delle diverse variabili in corrispondenza di periodi passati.

1.2.3. Metodi di conteggio e inferenza statistica

I metodi di conteggio, e più in generale i metodi di inferenza statistica, vengono utilizzati per stimare medie e percentuali di una popolazione.

Ad esempio, possono venire utilizzati nel quadro di un'indagine di mercato rivolta a stabilire quanti consumatori preferiscono un prodotto rispetto ad altri prodotti simili che possono essere considerati sostitutivi.

Nel seguito questa classe di metodi non verrà presa in considerazione.

1.3. Selezione e adozione di una metodologia di previsione

La scelta di una metodologia di previsione dipende principalmente dalle caratteristiche e dagli obiettivi delle decisioni per le quali verrà utilizzata. La lunghezza dell'orizzonte temporale, la disponibilità e l'omogeneità di un'ampia base di dati storici, le caratteristiche del prodotto a cui le previsioni si riferiscono, come la fase del ciclo di vita, sono alcuni dei fattori che influenzano la scelta di un metodo.

Ad esempio, nella fase iniziale del ciclo di vita del prodotto, non essendo disponibili i dati di vendita, si può ricorrere unicamente a test di mercato e a opinioni soggettive per la previsione delle vendite. Nella fase di maturità o declino del prodotto, invece, si hanno a disposizione tutti i dati di cui si necessita per poter utilizzare in maniera vantaggiosa i modelli quantitativi.

Si deve inoltre considerare l'analisi di costi e benefici legati all'adozione di una determinata classe di metodi. In generale, le analisi empiriche indicano che raramente è

giustificata l'adozione di tecniche previsionali molto sofisticate, che si rivelano poco robuste in relazione al carattere dinamico della serie di dati di origine economica.

Metodi più semplici quali regressioni esplicative e modelli di smoothing estrapolativi, che verranno descritti nei prossimi capitoli, si rivelano, di solito, molto più efficaci in relazione alla formulazione di previsioni aziendali.

1.3.1. Identificazione dei parametri

Una volta individuata una classe di metodi previsionali da utilizzare, è necessario procedere all'identificazione dei parametri del modello. Questa attività viene condotta utilizzando le osservazioni disponibili, e comporta solitamente la risoluzione di un problema di ottimizzazione, che consiste nella minimizzazione della somma dei quadrati degli scarti.

1.3.2. Monitoraggio delle previsioni

Dopo aver sviluppato e messo a punto un modello di previsione, è necessario tenere sotto controllo i risultati che esso produce, per valutarne l'efficacia.

In pratica, questa attività di monitoraggio si riduce a confrontare ciascuna delle previsioni formulate mediante il modello con le corrispondenti realizzazioni osservate.

Ad esempio, se si utilizza un modello estrapolativo per prevedere la domanda futura nel corso di quattro settimane, si confrontano i valori previsti con le vendite registrate. Nel caso emergano significativi dati discordanti, è necessario rivedere il modello, procedendo ad una nuova identificazione dei parametri, o addirittura operare una diversa scelta per la forma funzionale del modello.

CAPITOLO 2 - Modelli Esplicativi

I metodi esplicativi cercano di identificare relazioni quantitative di natura funzionale tra la grandezza di cui si vuole ottenere la previsione e un insieme di variabili che si ritiene possano influenzarne il valore.

Si ipotizza che esista un legame di natura causale tra una variabile y , detta dipendente, di cui si vuole prevedere il valore e un insieme di m variabili x_1, x_2, \dots, x_m , dette indipendenti. Si postula inoltre che questo legame possa venire espresso mediante una relazione funzionale

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Le previsioni formulate con l'ausilio di un modello esplicativo non devono necessariamente dipendere da istanti temporali, a differenza di quanto avviene per una serie storica.

Un modello esplicativo consente di acquisire una migliore comprensione del fenomeno indagato, e permette di valutare gli effetti sulla variabile dipendente determinati da diverse combinazioni di valori assegnati alle variabili indipendenti.

Nei modelli che vengono considerati in questo elaborato si assume che il legame funzionale tra la variabile dipendente e le variabili indipendenti sia lineare.

Questa ipotesi può apparire limitativa, in quanto esistono sicuramente esempi di legami causali di natura non lineare. Molti tipi di legami non lineari, però, possono essere ricondotti allo studio di legami lineari mediante l'applicazione di opportune trasformazioni. Ad esempio, un legame del tipo

$$y = a + bx^2$$

Può essere linearizzato mediante la trasformazione

$$z = x^2 \quad y = a + bz$$

Allo stesso modo, i legami di tipo esponenziale possono essere linearizzati attraverso il logaritmo.

Queste considerazioni indicano che i modelli lineari risultano, in realtà, più generali di quanto a prima vista potrebbe sembrare.

Un modello esplicativo ha lo scopo fondamentale di cogliere un legame semplice e tendenziale tra la variabile dipendente e le variabili indipendenti. L'obiettivo dell'analisi non consiste nella ricerca di una funzione f tale che la funzione $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ sia soddisfatta da tutti i punti corrispondenti alle osservazioni disponibili del fenomeno indagato. Se così fosse, si ricorrerebbe ai metodi di interpolazione propri dell'analisi numerica.

In pratica, affinché un legame esplicativo risulti efficace, è necessario che la funzione f assuma una forma lineare, quadratica, logaritmica o esponenziale.

2.1. Regressione Lineare Semplice

Nel caso in cui si consideri un legame lineare tra la variabile dipendente y e le variabili indipendenti x_1, x_2, \dots, x_m si parla di modello di regressione lineare.

Se poi la variabile indipendente x è unica, ricaviamo un modello di regressione lineare semplice, nel quale viene ipotizzato un legame lineare tra la variabile dipendente y e la (unica) variabile indipendente x .

La regressione lineare semplice riguarda la ricerca, o meglio, la stima di una relazione tra due fenomeni attraverso un campione di osservazioni.

Si suppone di disporre di n coppie di osservazioni $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$.

Considerato che il modello di regressione lineare è rappresentato dall'equazione:

$$y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i$$

Il modello di regressione lineare semplice è rappresentato come un modello probabilistico:

$$y = A + Bx + \varepsilon$$

e come un modello deterministico:

$$y = A + Bx$$

in cui A e B rappresentano i parametri da stimare e ε rappresenta una variabile casuale, detta residuo o rumore, che spiega le eventuali discrepanze tra i valori osservati della variabile dipendente y e i valori previsti dal modello deterministico.

Si richiede che la variabile casuale ε soddisfi le seguenti assunzioni:

1. Deve avere una distribuzione normale, con media 0 e deviazione standard σ .
2. I residui u_i e u_j corrispondenti a due osservazioni y_i e y_j devono essere indipendenti, per qualunque scelta di i e j .

2.1.1. Calcolo della retta di predizione

I coefficienti A e B che compaiono nel modello di regressione lineare descritto, sia in forma probabilistica che deterministica, non sono in generale noti, e devono perciò essere stimati sulla base delle osservazioni disponibili.

Si tratta, in pratica, di un classico problema di statistico inferenziale, in cui le n osservazioni sono considerate un campione estratto dalla popolazione, mentre A e B rappresentano parametri incogniti caratteristici della popolazione.

Indichiamo come a e b le stime puntuali di A e B ottenute sulla base del campione, e definiamo la retta di predizione

$$f = a + bx$$

dove f rappresenta la predizione del valore y .

Questa predizione si fonda su due assunzioni, che devono essere convalidate da un punto di vista statistico, utilizzando gli strumenti che verranno descritti in seguito.

Stiamo ipotizzando che il modello deterministico rappresenti una ragionevole approssimazione del modello probabilistico. Inoltre, si deve verificare che gli stimatori puntuali a e b producano un'accettabile approssimazione dei parametri A e B .

Gli errori di predizione, che rappresentano le realizzazioni dei residui, sono definiti come

$$e_i = f_i - y_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Gli stimatori a e b dei coefficienti A e B vengono determinati in modo da minimizzare lo scarto quadratico totale

$$SSE = \sum_{i=1}^n (f_i - y_i)^2$$

Occorre quindi minimizzare la seguente funzione rispetto alle variabili a e b

$$SSE = \sum_{i=1}^n [(a + bx_i) - y_i]^2$$

Poiché SSE è una funzione quadratica di a e b , è possibile calcolare analiticamente il valore della soluzione ottimale, ricavando le espressioni

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i & \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\ S_{xx} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \\ S_{xy} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n} \end{aligned}$$

In alcuni casi può risultare utile imporre il passaggio della retta di predizione per l'origine degli assi, ovvero $a = 0$.

Si ricava allora la seguente espressione per b , ottenuta minimizzando SSE

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Come già detto in precedenza, il modello di regressione lineare si basa sull'assunzione che i residui seguano una distribuzione normale di media 0 e deviazione standard σ .

Il modello deterministico sarà tanto più aderente al modello probabilistico quanto più la deviazione standard σ risulta prossima a 0. Si può quindi calcolare uno stimatore puntuale non distorto della varianza σ^2 , dato dalla seguente espressione

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{SSE}{n - 2}$$

Per ridurre gli errori di arrotondamento che si generano mediante l'impiego dell'espressione $SSE = \sum_{i=1}^n [(a + bx_i) - y_i]^2$, si osserva che il calcolo di SSE si effettua utilizzando le relazioni

$$SSE = S_{yy} - b S_{xy}$$

dove

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n}$$

2.2. Valutazione dei modelli di regressione

Apparentemente è molto agevole calcolare i coefficienti a e b , questo, però, non deve illudere che il modello sviluppato sia anche significativo. Nel caso di modelli esplicativi, come per ogni altro modello di previsione, è molto importante analizzare l'attendibilità dei risultati ottenuti, prima di utilizzare conclusioni a cui si è giunti in maniera affrettata che potrebbero rivelarsi errate e infondate.

In particolare, esistono diversi criteri per valutare la qualità di un modello di regressione lineare.

2.2.1. Normalità e indipendenza dei residui

Il primo criterio che verrà preso in considerazione riguarda la verifica dell'ipotesi di normalità dei residui.

Questa verifica può essere condotta applicando uno dei numerosi test di normalità disponibili, quali il test chi-quadro oppure il test di Kolmogorov-Smirnov.

Un secondo criterio, per valutare l'attendibilità di un modello di regressione lineare, consiste nella verifica dell'ipotesi di indipendenza dei residui corrispondenti a osservazioni distinte. Anche in questo caso si fa riferimento ad un test statistico, denominato test di Durbin-Watson.

2.2.1.1. Test Chi-quadro: questo test utilizza la variabile casuale chi-quadro χ^2 per verificare se l'ipotesi nulla è probabilisticamente compatibile con i dati.

Lo scopo del test è quello di conoscere se le frequenze osservate differiscono significativamente da quelle teoriche.

Il test consiste nel rapporto:

$$\chi^2 = \frac{(\text{frequenze osservate} - \text{frequenze attese})^2}{\text{frequenze attese}}$$

Se $\chi^2 = 0$ le frequenze osservate coincidono esattamente con quelle teoriche. Se invece $\chi^2 > 0$ esse differiscono. Più grande è il valore di χ^2 , più grande è la discrepanza tra le frequenze osservate e quelle teoriche.

Nella pratica le frequenze teoriche vengono calcolate sulla base di un'ipotesi H_0 . Se sulla base di questa ipotesi il valore calcolato di χ^2 è più grande di un certo valore critico, dovremmo concludere che le frequenze osservate differiscono significativamente dalle frequenze attese e dovremmo rifiutare H_0 al corrispondente livello di significatività. Altrimenti dovremmo accettarla, o almeno non rifiutarla.

Tale procedimento è chiamato test Chi-quadro dell'ipotesi.

2.2.1.2. Test di Kolmogorov-Smirnov: è un metodo di analisi statistica che permette di confrontare tra loro un campione di dati ed una distribuzione teorica nota allo scopo di verificare l'ipotesi statistica che la popolazione da cui provengono i dati sia quella presa in esame.

Considerata una serie di dati provenienti da qualche campionamento, ci si chiede, quindi, se questi dati corrispondono a una qualche distribuzione nota.

Sia x una variabile casuale continua con funzione di ripartizione $F(x)$, dove una funzione di ripartizione è definita come una funzione di variabile reale che racchiude le informazioni su un insieme di dati riguardanti la sua distribuzione prima o dopo un certo punto.

Come detto in precedenza lo scopo del test è quello di verificare che la variabile casuale x abbia funzione di ripartizione uguale a una $F_0(x)$ nota. In simboli il problema di ipotesi è del tipo:

$H_0: F(x) = F_0(x)$ per ogni x , cioè la serie di dati segue una distribuzione nota

$H_1: F(x) \neq F_0(x)$ per qualche x , cioè la serie di dati non segue una distribuzione nota

Sia quindi (x_1, x_2, \dots, x_n) un campione casuale di ampiezza m della variabile casuale x . Sulla base di esso si vuole costruire un test per il problema di ipotesi. Poiché tale problema riguarda la funzione di ripartizione della variabile casuale x , si basa la

statistica test sulla funzione di ripartizione empirica. Dette quindi $x(1), x(2), \dots, x(n)$ le n variabili casuali campionarie ordinate, la funzione di ripartizione empirica è definita come:

$$\widehat{F}_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq x(1) \\ \frac{k}{n} & \text{se } x(k) \leq x < x(k+1) \\ 1 & \text{se } x \geq x(n) \end{cases}$$

O equivalentemente in forma compatta:

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{x_i \leq x}$$

Dove $I_{x_i \leq x}$ è la funzione indicatrice.

Poiché la funzione $\widehat{F}_n(x)$ stima la vera funzione di ripartizione $F(x)$, è logico basarsi su una qualche “distanza” tra $\widehat{F}_n(x)$ e $F_0(x)$. Se $\widehat{F}_n(x)$ e $F_0(x)$ sono “vicine” (cioè “sufficientemente simili”) si accetta l’ipotesi nulla, mentre si rifiuta se $\widehat{F}_n(x)$ e $F_0(x)$ sono “lontane” (cioè sono “molto dissimili”). Come “distanza” si usa la seguente:

$$D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |\widehat{F}_n(x) - F_0(x)|$$

Cioè la massima differenza (in valore assoluto) tra la funzione di ripartizione empirica e la funzione di ripartizione teorica (ipotizzata come vera). Per valori “grandi” di D_n si rifiuta l’ipotesi nulla, mentre la si accetta per valori “piccoli” di D_n .

2.2.1.3. Test Durbin-Watson: è una statistica test utilizzata per rilevare la presenza di autocorrelazione dei residui in un’analisi di regressione.

Si considera un modello di regressione lineare:

$$y = A + Bx + \varepsilon$$

Se e_t è il residuo associato all’osservazione nel periodo t , il test statistico è:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2}$$

Il valore del test statistico è sempre compreso tra 0 e 4.

Un valore 2 indica che non appare nessuna autocorrelazione. Valori piccoli di d indicano che i residui successivi sono, in media, vicini in valore l'uno all'altro, o correlati positivamente. Valori grandi di d indicano che i residui successivi sono, in media, molto differenti in valore l'uno dall'altro, o correlati negativamente.

2.2.2. Pendenza della retta

Si osserva che un intervallo di confidenza al $(1 - \alpha)\%$ per il coefficiente B è dato da

$$b \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{S_{xx}}}$$

dove $t_{\alpha/2}$ rappresenta il percentile di ordine $\alpha/2$ della distribuzione t -Student con $n - 2$ gradi di libertà.

Questo intervallo consente di formulare un terzo criterio per la valutazione del modello di regressione lineare.

Si può affermare che il modello risulta non significativo se l'intervallo di confidenza espresso contiene il valore zero. Infatti, se zero appartiene all'intervallo, questo significa che il coefficiente B della variabile indipendente può essere sia positivo che negativo con probabilità significativamente diversa da zero.

In altri termini, il modello non è in grado di stabilire se all'aumentare della variabile indipendente, la variabile dipendente debba crescere oppure decrescere. Si noti che anche nei casi in cui il valore dello stimatore b appare sufficientemente discosto da zero, può accadere che il valore zero sia compreso nell'intervallo di confidenza, se la varianza dell'errore σ^2 risulta elevata.

2.2.3. Coefficiente di correlazione lineare

Il coefficiente di correlazione lineare, detto anche coefficiente di Pearson, è il più noto indicatore di qualità di un modello di regressione lineare, esso misura l'intensità del legame lineare e il senso di tale legame.

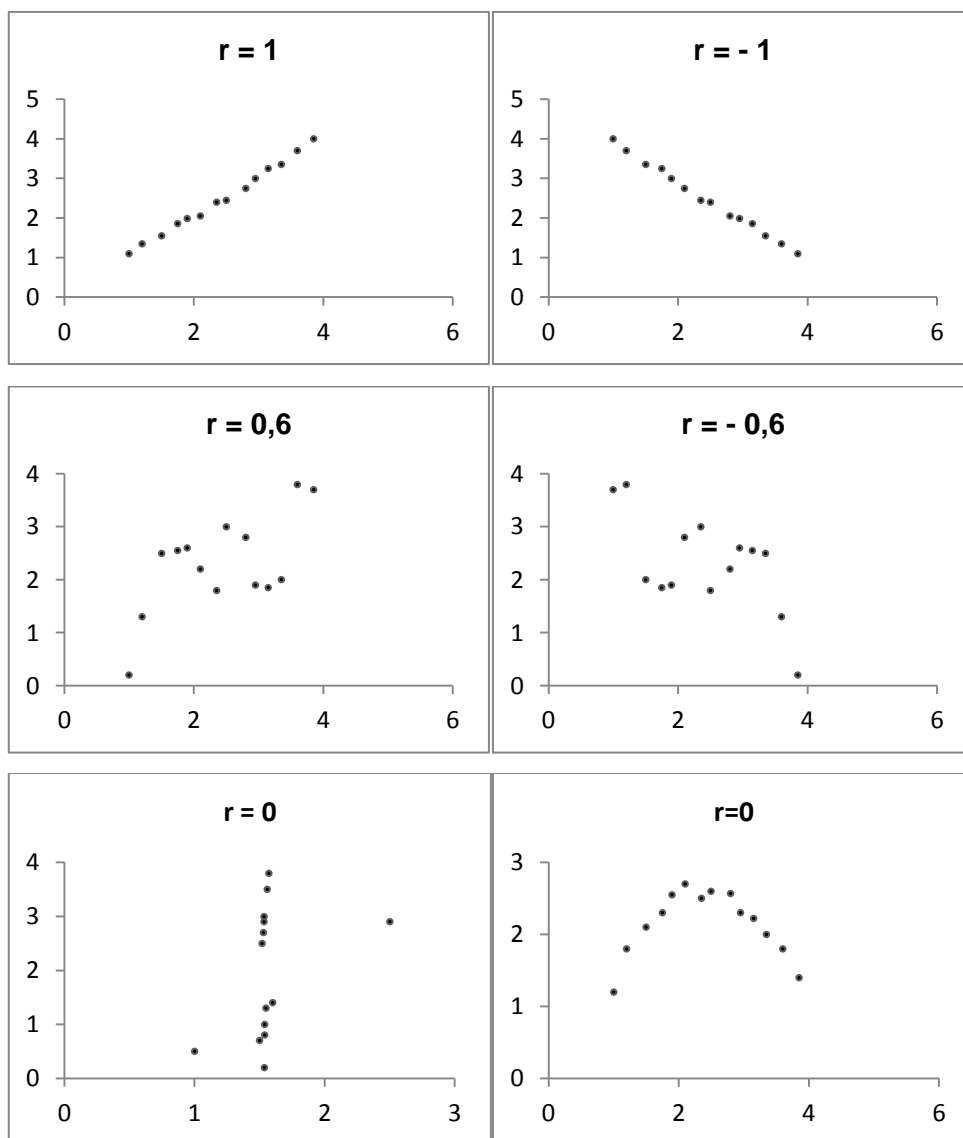
Esso è definito come

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

Il valore del coefficiente lineare r è compreso tra -1 e 1 .

In particolare, si può dare del coefficiente di correlazione lineare la seguente interpretazione, illustrata anche dalle successive illustrazioni:

1. Se $r > 0$ significa che la retta di regressione punta verso l'alto, mentre se $r < 0$ la retta è inclinata verso il basso
2. Se $|r| \cong 1$ significa che esiste una forte correlazione lineare
3. Se $|r| \cong 0$ significa che esiste una debole correlazione lineare



Le figure illustrano l'andamento del coefficiente di correlazione lineare per diversi gruppi di dati. È opportuno osservare che il coefficiente di correlazione lineare può essere nullo anche in presenza di un forte legame non lineare tra la variabile dipendente e la variabile indipendente. In casi simili si deve ricorrere a modelli di regressione non lineari.

In pratica, si ritiene non accettabile un modello che presenti un coefficiente di regressione lineare inferiore a 0,5 – 0,6.

2.2.4.Coefficiente di determinazione

Il coefficiente di determinazione è definito come

$$r^2 = \frac{S_{yy} - SSE}{S_{yy}}$$

Il coefficiente di determinazione coincide con il quadrato del coefficiente di regressione lineare. Risulta, quindi, compreso tra 0 e 1, e quanto più il suo valore è vicino a 1 tanto più attendibile è il modello di regressione lineare.

Uno dei motivi che giustificano l'introduzione del coefficiente di determinazione deriva dalla sua interpretazione. Vale infatti la relazione

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (f_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

che consente di interpretare il coefficiente di determinazione r^2 come la percentuale di varianza totale spiegata dal modello.

Infatti si ha

$$\begin{aligned} f_i - \bar{y} &= (y_i - \bar{y}) - (y_i - f_i) = \\ &= \text{variazione totale} - \text{variazione non spiegata} = \text{variazione spiegata} \end{aligned}$$

2.2.5.Test di F-statistica

Un altro criterio di valutazione di un modello di regressione lineare si basa sul test di F -statistica.

Si definisce la statistica

$$F = \frac{r^2/m}{(1 - r^2)/(n - m - 1)}$$

dove n indica il numero di osservazioni e m il numero di variabili indipendenti. Nel caso di regressione lineare si ha $m = 2$.

La statistica F segue la distribuzione F con $n - m$ e $m - 1$ gradi di libertà. La regione di rifiuto del test al $(1 - \alpha)\%$, che corrisponde quindi all'accettazione del

modello, è espressa dalla condizione $F > F_\alpha$, dove F_α è il percentile di ordine α della distribuzione F .

Se si hanno valori di significatività prossimi a zero indicano che il modello non può essere respinto sulla base del test di F -statistica.

2.2.6. Limiti di confidenza e di predizione

Un altro indicatore per la valutazione di un modello di regressione è rappresentato dall'intervallo di predizione all'interno del quale è ragionevole che si collochino le osservazioni della variabile dipendente per ogni dato della variabile indipendente.

Un intervallo di predizione al $(1 - \alpha)\%$ per $y|x = x_p$ è dato da

$$f \pm t_{\alpha/2} s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$$

La distribuzione t -Student ha $n - 2$ gradi di libertà.

2.3. Regressione lineare multipla

I modelli di regressione lineare multipla rappresentano l'estensione della regressione semplice al caso in cui il numero m di variabili indipendenti sia maggiore di 1.

La maggior parte dei concetti introdotti in precedenza per la regressione lineare semplice possono venire estesi alla regressione lineare multipla.

Si suppone infatti di disporre di n $(m + 1)$ -uple di osservazioni $(x_1, x_2, \dots, x_m, y_i)$

$i = 1, 2, \dots, n$.

Anche per la regressione multipla viene formulato un modello probabilistico

$$y = A + B_1x_1 + B_2x_2 + \dots + B_mx_m + \varepsilon$$

e un modello deterministico

$$y = A + B_1x_1 + B_2x_2 + \dots + B_mx_m$$

in cui A, B_1, B_2, \dots, B_m sono parametri da stimare, e ε rappresenta il residuo.

A proposito di residuo devono essere soddisfatte le medesime assunzioni già espresse per la regressione semplice.

Anche il calcolo della retta di predizione

$$f = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m$$

segue i medesimi principi.

Le stime puntuali a, b_1, b_2, \dots, b_m dei coefficienti A, B_1, B_2, \dots, B_m vengono ricavate attraverso la minimizzazione della somma dei quadrati degli scarti e la loro espressione risulta nota analiticamente.

L'unica differenza di qualche rilievo riguarda la definizione e le modalità di calcolo del coefficiente di correlazione lineare r .

Quest'ultimo viene ricavato come radice quadrata del coefficiente di determinazione r^2 . Risulta, infatti, più semplice estendere la definizione di coefficiente di determinazione al multiplo, e da questa ricavare r .

In un modello di regressione lineare multipla si possono, inoltre, calcolare i coefficienti di correlazione lineare tra le coppie di variabili indipendenti.

In generale, si ritiene necessario che questi coefficienti assumano valori sufficientemente piccoli (inferiori a 0,4 – 0,5), tali da indicare una sostanziale assenza di correlazione lineare tra le coppie di variabili indipendenti. In caso contrario si dice che il modello è multi-collineare.

In presenza del fenomeno di multi-collinearità si procede all'eliminazione di almeno una delle variabili indipendenti che risultano tra loro linearmente dipendenti.

I rimanenti criteri per valutare la qualità di un modello di regressione multipla rimangono in sostanza invariati rispetto quanto descritto a proposito della regressione lineare semplice.

CAPITOLO 3 - Modelli Estrapolativi

Una serie storica è una sequenza di valori A_t assunti da una grandezza misurabile, in corrispondenza di specifici istanti temporali t , di norma collocati uniformemente – giorni, settimane, mesi, trimestri, anni, ed esprime la dinamica di un certo fenomeno nel tempo.

Ad esempio, le vendite settimanali di un prodotto, registrate per un periodo di 4 anni, rappresentano una serie storica.

Le serie storiche vengono studiate sia per interpretare un fenomeno, individuando componenti di trend, di ciclicità, di stagionalità, sia per prevedere il suo andamento futuro.

Una variabile serie storica è una variabile casuale che corrisponde alle osservazioni di una serie storica, quindi all'osservazione del fenomeno.

I metodi estrapolativi utilizzano i valori di una serie storica di osservazioni relative ad una grandezza per ricavare le eventuali regolarità che si manifestano e per proiettarne l'andamento nel futuro.

Indichiamo come F_{t+1} una predizione del valore della serie storica A_{t+1} per il periodo $t + 1$.

Supponendo di trovarsi al periodo t , e di disporre dei valori di una serie storica per k periodi nel passato, la forma generale di un modello estrapolativo è la seguente:

$$F_{t+1} = f(A_t, A_{t-1}, \dots, A_{t-k+1})$$

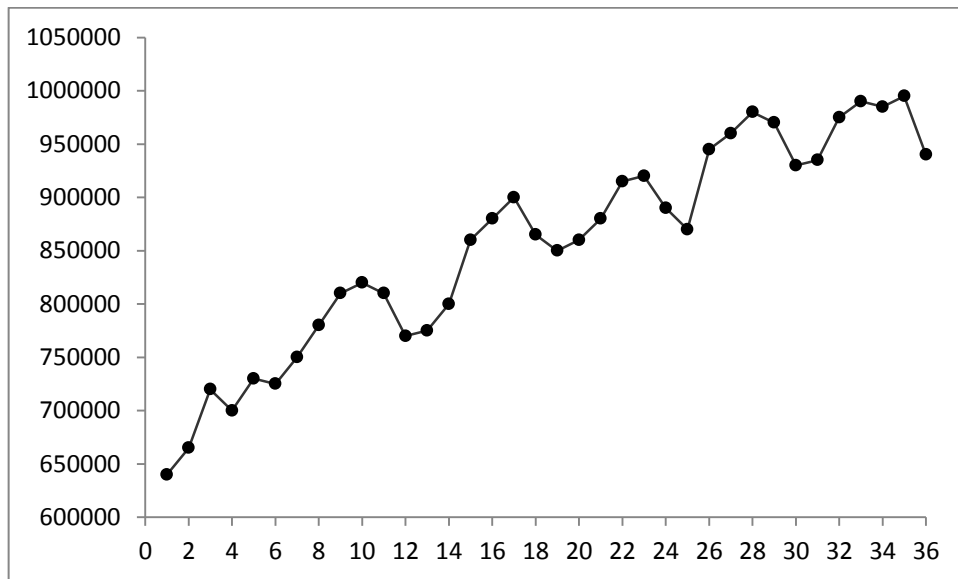
Lo sviluppo di un modello estrapolativo comporta la scelta della forma funzionale f più idonea a rappresentare la specifica serie storica oggetto della previsione.

Le previsioni formulate al tempo t e riferite a periodi successivi a $t + 1$ si basano sull'applicazione del modello ai valori noti fino al tempo t e a predizioni formulate per i periodi successivi sulla base del modello stesso, ovvero

$$F_{t+m} = f(F_{t+m-1}, F_{t+m-2}, \dots, F_{t+1}, A_t, A_{t-1}, \dots, A_{t-k+1})$$

Risulta pertanto evidente che le previsioni divengono sempre meno attendibili quanto più ci si spinge nel futuro con l'orizzonte di previsione m .

Esempio di una serie storica: si considerino i dati di un consumo bimestrale di energia elettrica in una regione italiana, relativo ad un periodo di 6 anni, per un totale di 36 osservazioni. Il grafico di seguito evidenzia l'andamento della serie storica



3.1. Numeri indice

I numeri indice risultano talvolta convenienti nella rappresentazione di una serie storica. Costituiscono esempi di numeri indice gli indicatori di tipo finanziario, gli indici di borsa o gli indicatori del tasso di inflazione.

Un numero indice semplice I_t è il rapporto tra il valore di una singola osservazione A_t della serie storica al tempo t e il suo valore A_0 al tempo t_0 , moltiplicato per 100:

$$I_t = \frac{A_t}{A_0} (100)$$

Un numero indice composto I_t di h serie storiche $A_t^1, A_t^2, \dots, A_t^h$ è il rapporto tra la somma $A_t = A_t^1 + A_t^2 + \dots + A_t^h$ dei valori delle serie storiche al tempo t e la corrispondente somma $A_0 = A_0^1 + A_0^2 + \dots + A_0^h$ dei valori al tempo t_0 , moltiplicato per 100:

$$I_t = \frac{A_t}{A_0} (100)$$

Un numero indice composto pesato I_t di h serie storiche $A_t^1, A_t^2, \dots, A_t^h$ è il rapporto tra la somma pesata $A_t = w^1 A_t^1 + w^2 A_t^2 + \dots + w^h A_t^h$ dei valori delle serie storiche al tempo t e la corrispondente somma dei valori al tempo t_0 $A_0 = w^1 A_0^1 + w^2 A_0^2 + \dots + w^h A_0^h$, moltiplicato per 100:

$$I_t = \frac{A_t}{A_0} (100)$$

3.2. Valutazione di modelli estrapolativi

È importante misurare la qualità delle previsioni principalmente per due motivi. Da un lato, in fase di scelta e identificazione di un modello, la misura di qualità delle previsioni è necessaria per confrontare tra loro modelli posti in alternativa. Inoltre, in fase di controllo e monitoraggio, la valutazione delle previsioni consente di stabilire se un modello è ancora efficace oppure se è necessaria una sua revisione.

Si suppone di disporre di n osservazioni nel passato e delle corrispondenti n previsioni. Si definisce l'errore di previsione al tempo t

$$E_t = A_t - F_t$$

e l'errore percentuale al tempo t

$$PE_t = \frac{A_t - F_t}{A_t} (100)$$

3.2.1. Misure di distorsione

Le misure di distorsione vengono utilizzate per discriminare i modelli di previsione sulla base degli errori medi con segno. In particolare, si definisce l'errore medio ME

$$ME = \frac{\sum_{i=1}^n E_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (A_i - F_i)}{n}$$

e l'errore percentuale medio MPE

$$MPE = \frac{\sum_{i=1}^n PE_i}{n}$$

Un modello è preferibile ad un altro se determina un errore medio, e quindi un errore percentuale medio, più prossimo al valore zero.

3.2.2. Misure di dispersione

Le misure di dispersione vengono utilizzate per discriminare i modelli di previsione sulla base degli errori medi assoluti. Si definisce quindi lo scarto medio assoluto MAD

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^n |E_i|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n |A_i - F_i|}{n}$$

e lo scarto percentuale medio assoluto $MAPE$

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^n |PE_i|}{n}$$

Spesso si preferisce esprimere la misura di dispersione attraverso lo scarto quadratico medio MSE

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (E_i)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (A_i - F_i)^2}{n}$$

in quanto la funzione MSE è una funzione derivabile, mentre lo scarto medio assoluto MAD non lo è, e ciò influisce sulla struttura del problema di minimizzazione che deve essere risolto nella fase di identificazione dei parametri del modello.

La deviazione standard degli errori SDE è definita come

$$SDE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (E_i)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (A_i - F_i)^2}{n}}$$

Anche in questo caso, un modello si ritiene preferibile ad un altro se determina una dispersione inferiore.

3.2.3. Segnale di tracking

Una misura di errore utilizzata nella fase di controllo e monitoraggio delle previsioni è il segnale di tracking TS_n definito come

$$TS_n = \frac{\sum_{i=1}^n E_i}{\sum_{i=1}^n |E_i|}$$

Di solito, nel corso del monitoraggio di un modello previsionale, si utilizza una stima del segnale di tracking al tempo t , ottenuta mediante le seguenti formule ricorsive

$$TS_t = \left| \frac{D_t}{G_t} \right|$$

$$D_t = \beta E_t + (1 - \beta)D_{t-1}$$

$$G_t = \beta |E_t| + (1 - \beta)G_{t-1}$$

Dove β è un parametro tale che $0 < \beta < 1$.

In pratica il monitoraggio avviene per eccezione: il segnale di tracking, che si vorrebbe quanto più possibile vicino a 0, viene confrontato con il segnale di soglia U_t assegnato, compreso tra 0 e 1. Se la condizione $TS_t \leq U_t$ è violata viene generato un segnale di allarme, e il modello in uso deve essere rettificato.

3.3. Componenti di una serie storica

L'identificazione e l'analisi delle componenti di una serie storica presuppone che questa possa essere rappresentata nella forma

$$\text{valori osservati} = \text{andamento ricorrente} + \text{fluttuazioni casuali}$$

In particolare si considerano quattro componenti principali di una serie storica A_t :

Tendenza: la tendenza a lungo termine descrive l'andamento medio della serie storica nel tempo, e può essere crescente, decrescente o stabile. La tendenza può manifestare un profilo lineare, polinomiale, esponenziale, logaritmico.

Ciclicità: la ciclicità si riferisce alle oscillazioni ondulatorie di una serie storica, che si manifestano con periodicità irregolare, in conseguenza dei cicli economici. La periodicità risulta solamente dell'ordine di qualche anno, e pertanto nelle previsioni di breve termine questa componente viene spesso identificata con la tendenza.

Stagionalità: la stagionalità deriva dalle fluttuazioni ondulatorie di periodicità regolare e di breve periodo, che si manifestano nell'arco dei giorni di una settimana, dei mesi o dei trimestri di un anno. Queste oscillazioni sono di solito persistenti, e trovano ragione

nei cicli naturali con cui si sviluppano i consumi, oppure in stagionalità del prodotto della serie storica.

Fluttuazione casuale: la fluttuazione casuale è la componente di una serie storica destinata a rappresentare tutte le variazioni insite nei dati che non possono venire spiegate dalle altre componenti. In generale, una volta identificate le altre componenti, si vuole che le fluttuazioni casuali seguano la distribuzione normale, con media 0 e varianza a sua volta prossima a 0.

Come si vedrà in seguito, alcuni modelli estrapolativi possono essere interpretati sulla base della seguente relazione funzionale, che pone in luce la dipendenza della serie storica dalle sue quattro componenti

$$A_t = f(T_t, C_t, Q_t, \varepsilon_t)$$

3.4. Modelli a media mobile

La media mobile a k punti M_t al tempo t viene calcolata come la media aritmetica di k osservazioni consecutive della serie storica A_t , tali che il tempo t appartenga ai k punti prescelti. È possibile calcolare diversi valori della media mobile, in dipendenza dalla posizione occupata dal tempo t nella sequenza delle k osservazioni utilizzate.

Si definisce, in particolare, media mobile a k punti centrata la media aritmetica di k osservazioni tali che t sia il punto di mezzo dell'insieme di istanti corrispondenti alle osservazioni, nell'ipotesi che k sia dispari

$$M_t = \frac{A_{t+\frac{k-1}{2}} + A_{t+\frac{k-1}{2}-1} + \dots + A_{t-\frac{k-1}{2}}}{k}$$

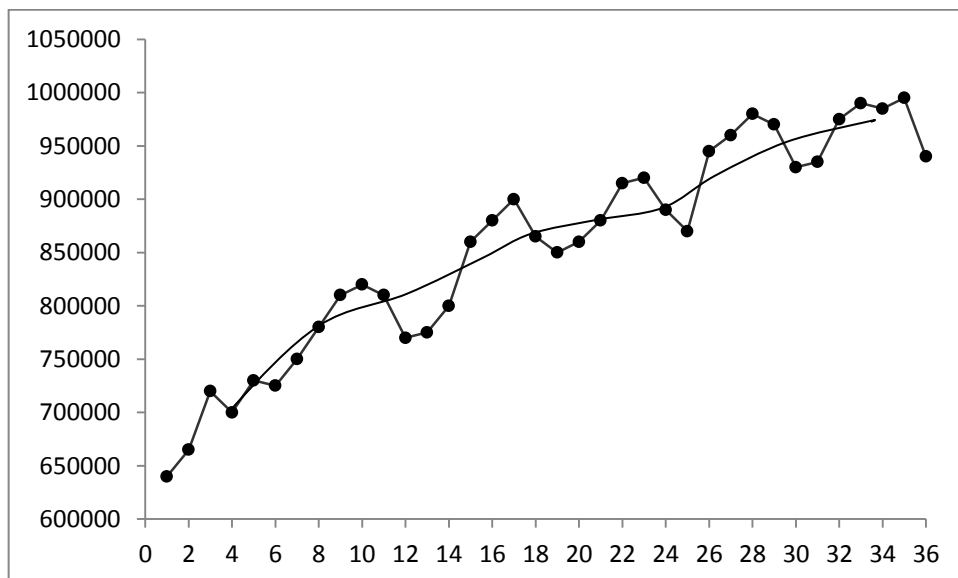
Se k è pari, si ricorre a una procedura di calcolo a due stadi, in modo ricorsivo, incentrando il primo insieme di medie mobili sui punti intermedi degli intervalli temporali, e successivamente calcolando la media mobile per questi ultimi con $k = 2$

$$M_t = \frac{A_{t+\frac{k}{2}} + A_{t+\frac{k}{2}-1} + \dots + A_{t-\frac{k}{2}+1}}{k} + \frac{A_{t+\frac{k}{2}-1} + A_{t+\frac{k}{2}-2} + \dots + A_{t-\frac{k}{2}}}{k}$$

Si parla di media mobile a k punti pesata, centrata o non, quando vengono associati dei pesi alle k osservazioni della serie storica che intervengono nel calcolo della media.

La media mobile può essere impiegata per depurare la serie storica delle componenti di stagionalità e fluttuazione casuale.

La figura successiva illustra l'andamento della media mobile centrata di parametro $k = 6$ per la serie storica relativa al consumo di energia elettrica. Come si può notare, la media mobile smorza le fluttuazioni della serie storica dovute alla componente di stagionalità e alla componente casuale.



La media mobile può inoltre venire impiegata per formulare delle predizioni, facendo corrispondere il periodo t all'ultima delle k osservazioni, e ponendo

$$F_{t+1} = \frac{A_t + A_{t-1} + \dots + A_{t-k+1}}{k}$$

oppure, nel caso di media mobile pesata,

$$F_{t+1} = \frac{w_t A_t + w_{t-1} A_{t-1} + \dots + w_{t-k+1} A_{t-k+1}}{\sum_{i=1}^k w_i}$$

Si può verificare che vale la relazione

$$F_{t+1} = F_t + \frac{A_t}{k} - \frac{A_{t-k}}{k}$$

ovvero che la predizione per il periodo $t + 1$ è pari alla predizione per il periodo t cui viene aggiunto un termine correttivo, pari a $1/k$ della differenza tra l'osservazione più recente A_t e l'osservazione A_{t-k} , eliminata dalla media mobile più recente.

3.5.Scomposizione di una serie storica

La scomposizione di una serie storica consiste nell'identificazione delle quattro componenti descritte in precedenza (tendenza, ciclicità, stagionalità, fluttuazione casuale).

Si tratta di un'attività prevalentemente rivolta all'analisi e alla comprensione della struttura della serie storica, che tuttavia consente di formulare previsioni circa i valori futuri.

Per scomporre una serie storica si deve, in primo luogo, postulare una forma funzionale per la dipendenza di A_t dalle sue componenti.

Si può, ad esempio, assumere un modello additivo

$$A_t = T_t + C_t + Q_t + \varepsilon_t$$

oppure un modello moltiplicativo

$$A_t = T_t \times C_t \times Q_t \times \varepsilon_t$$

oppure, ancora, un modello ibrido, che coniughi componenti moltiplicative e additive.

Nel caso di un modello moltiplicativo si indica di seguito i passi di una metodologia di scomposizione di una serie storica.

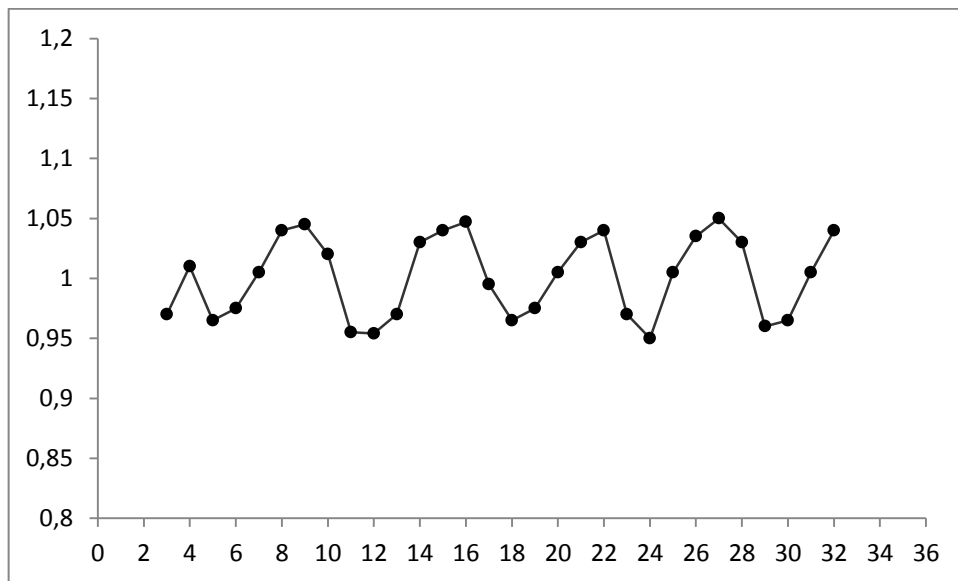
In primo luogo si determina la componente congiunta di tendenza e ciclicità, mediante il calcolo della media mobile centrata M_t

$$T_t C_t \cong M_t$$

Si è osservato in precedenza che la media mobile tende a depurare la serie storica dalle componenti di stagionalità e di fluttuazione casuale.

In seguito si determina la componente congiunta di stagionalità e di fluttuazione casuale attraverso il calcolo

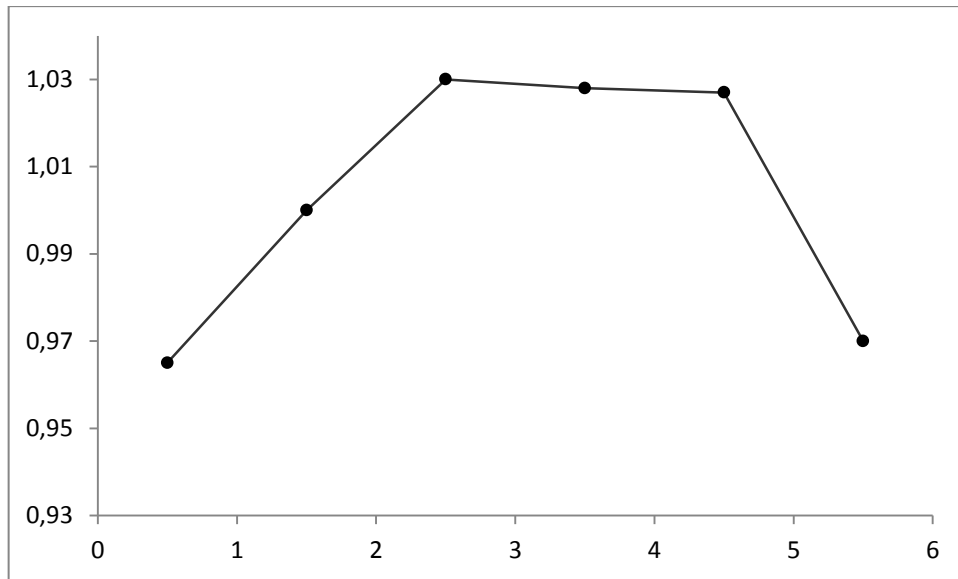
$$Q_t \varepsilon_t = \frac{A_t}{T_t C_t} \cong \frac{A_t}{M_t}$$



La figura indica il valore dei termini $Q_t \varepsilon_t$ per la serie storica del consumo di energia elettrica. Come si vede, tali valori oscillano intorno ad 1, e mostrano una periodicità di parametro $L = 6$.

Si procede quindi al calcolo degli indici di stagionalità $Q_l, l = 1, 2, \dots, L$ ottenuti come media dei $Q_t \varepsilon_t$ per i periodi omologhi a l , in modo da eliminare l'effetto delle fluttuazioni casuali. Si indicano con n_l gli indici dei periodi omologhi a l . Ad esempio, se la stagionalità corrisponde ai mesi di un anno, i periodi omologhi al mese di gennaio sono tutti i mesi di gennaio compresi nella serie storica. Si pone quindi

$$Q_l = \frac{\sum_{t \in n_l} Q_t \varepsilon_t}{|n_l|}$$



La figura mostra il valore dei 6 indici di stagionalità per la serie storica dell'esempio, relativa al consumo elettrico.

Si può, quindi, destagionalizzare la serie storica, dividendo ogni osservazione per l'indice di stagionalità corrispondente:

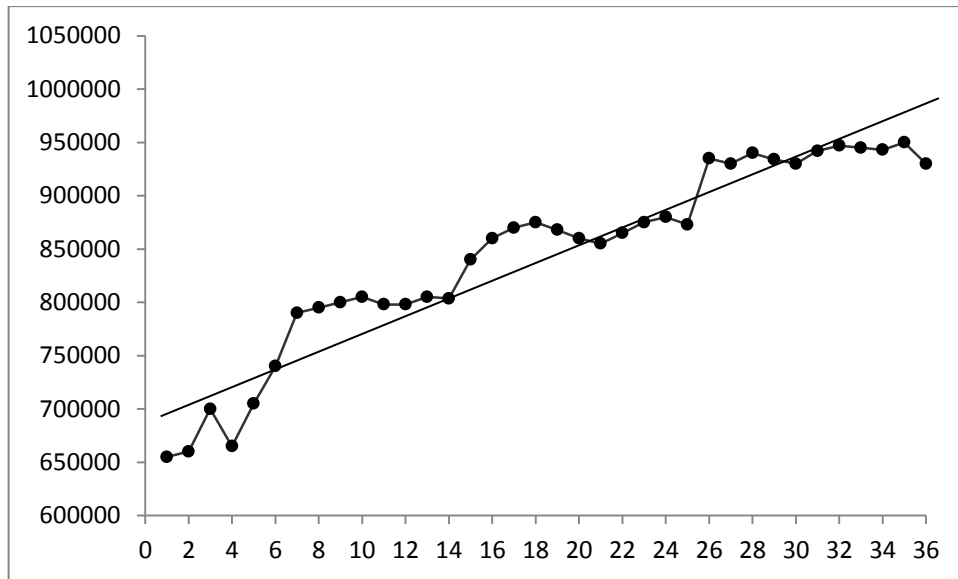
$$\frac{A_t}{Q_{l(t)}} = T_t \times C_t \times \varepsilon_t$$

dove $l(t)$ indica il tipo di periodo corrispondente a t .

Si procede quindi a determinare le componenti di tendenza, attraverso l'identificazione di una curva di regressione (lineare, quadratica, esponenziale) delle osservazioni in funzione del tempo.

Ad esempio, se si postula un legame lineare, è possibile determinare la retta di predizione

$$T_t = a + bt$$



La figura mostra i valori destagionalizzati e la retta di tendenza per la serie storica relativa al consumo di energia elettrica

Per isolare la componente ciclica non stagionale occorre rimuovere dalla serie storica le componenti di stagionalità, di fluttuazione casuale e di tendenza

$$C_t = \frac{T_t C_t}{T_t} \cong \frac{M_t}{T_t}$$

Anche per la componente di ciclicità si può ricavare una curva di regressione, postulandone la forma funzionale.

In questo modo la scomposizione della serie storica è conclusa e le sue quattro componenti moltiplicative sono state isolate.

Infine, è possibile ricavare le previsioni future sulla base della scomposizione sviluppata. Infatti se si vuole formulare le previsioni per gli L periodi successivi, è sufficiente utilizzare la proiezione delle componenti di tendenza e di ciclicità, e stagionalizzare mediante gli indici di stagionalità

$$F_{t+i} = T_{t+i} \times C_{t+i} \times Q_{l(t+i)} \quad i = 1, 2, \dots, L$$

3.6. Modelli di Smoothing Esponenziale

I modelli di smoothing esponenziale rappresentano un metodo estrapolativo di agevole impiego che risulta piuttosto efficace, almeno nelle sue versioni più articolate, per la previsione di fenomeni di natura aziendale.

3.6.1. Smoothing esponenziale semplice (Brown)

Si osservi che i modelli di smoothing esponenziale possono essere interpretati come generalizzazione dei modelli a media mobile. Si è infatti osservato che per questi ultimi vale la relazione

$$F_{t+1} = F_t + \frac{A_t}{k} - \frac{A_{t-k}}{k}$$

Se il modello a media mobile non si discosta troppo dalla serie storica, si può ritenere accettabile l'approssimazione

$$\frac{A_{t-k}}{k} \cong \frac{F_t}{k}$$

e quindi ricavare la relazione

$$F_{t+1} \cong F_t + \frac{A_t}{k} - \frac{F_t}{k}$$

che può essere espressa nella forma

$$F_{t+1} \cong \frac{1}{k}A_t + \left(1 - \frac{1}{k}\right)F_t$$

La predizione per il periodo $t + 1$ è approssimata da una combinazione lineare convessa dell'osservazione più recente e della predizione per il periodo t .

Come estensione naturale della precedente espressione si può quindi considerare la relazione

$$F_{t+1} = \alpha A_t + (1 - \alpha)F_t$$

in corrispondenza di un parametro α , tale che $0 \leq \alpha \leq 1$. Si può riscrivere nella forma

$$F_{t+1} = F_t + \alpha(A_t - F_t) = F_t + \alpha E_t$$

Questa espressione esprime una proprietà di feedback negativo del modello che si sta ricavando: la previsione per il periodo $t + 1$ è pari alla previsione per il periodo t

corretta di una frazione α dell'errore commesso al tempo t . Quindi, se la previsione più recente è sbagliata per difetto, la successiva viene corretta per eccesso, e viceversa.

Si può dimostrare che un metodo estrapolativo che soddisfa la relazione vista in precedenza di feedback negativo è rappresentato dal modello di smoothing esponenziale semplice, definito come segue. Dato un parametro α , tale che $0 \leq \alpha \leq 1$, si definisce ricorsivamente la media smorzata al tempo t come

$$S_t = \alpha A_t + (1 - \alpha)S_{t-1}$$

ponendo $S_1 = A_1$.

Si definisce la previsione per il periodo $t + 1$ come

$$F_{t+1} = S_t$$

Si verifica che per il metodo di smoothing esponenziale valgono le relazioni

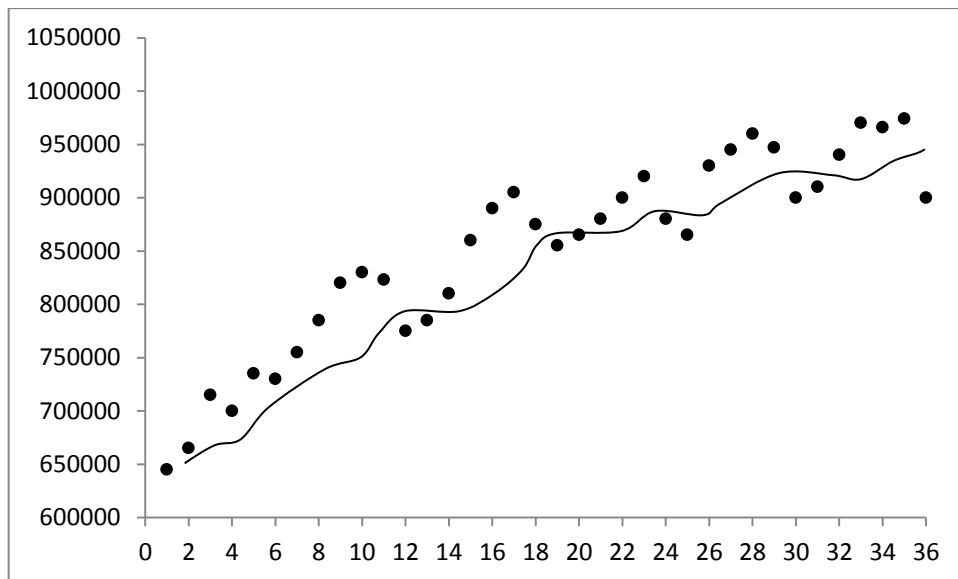
$$\begin{aligned} S_1 &= A_1 \\ S_2 &= \alpha A_2 + (1 - \alpha)S_1 \\ S_3 &= \alpha A_3 + (1 - \alpha)S_2 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ S_t &= \alpha A_t + (1 - \alpha)S_{t-1} \end{aligned}$$

da cui si ricava, supponendo di disporre di n osservazioni nel passato,

$$F_{t+1} = S_t = \alpha A_t + \alpha(1 - \alpha)A_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 A_{t-2} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{n-1} A_{t-n+1}$$

Questa relazione consente di ricavare un'interpretazione del parametro α : se $\alpha \cong 0$ il modello risulta meno reattivo, nel senso che attribuisce un peso quasi uniforme a tutte le osservazioni del passato; se $\alpha \cong 1$ il modello risulta più reattivo, nel senso che attribuisce un peso molto maggiore alle osservazioni più recenti.

La scelta del parametro α viene operata in modo da minimizzare lo scarto quadratico medio, o un altro degli indicatori di dispersione definiti in precedenza.

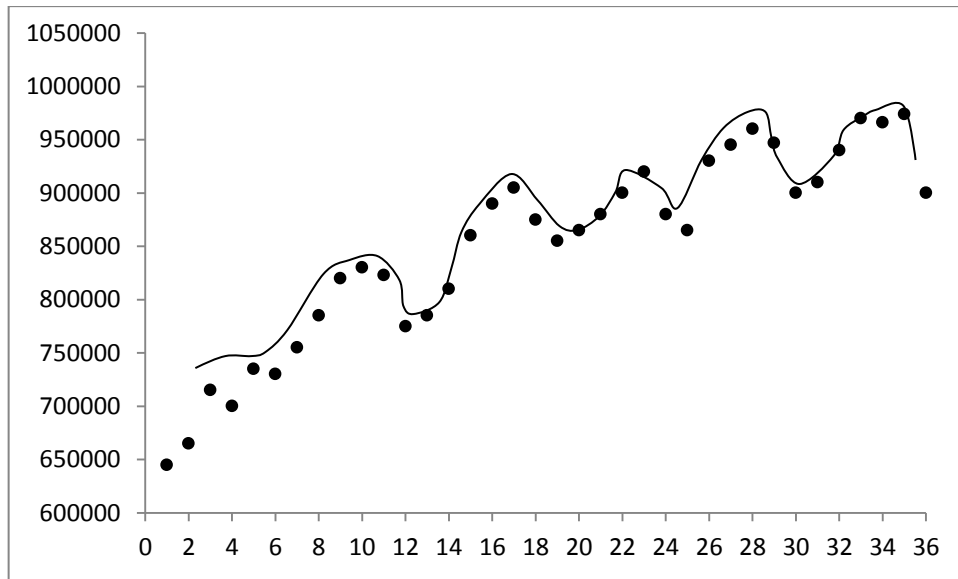


La figura mostra un modello di smoothing esponenziale semplice con $\alpha = 0,3$ per la serie storica del consumo di energia elettrica.

3.6.2.Smoothing con tendenza lineare (Holt)

Il modello di smoothing esponenziale semplice non è in grado di cogliere la tendenza eventualmente presente tra le componenti di una serie storica. Di conseguenza, se applicato ad una serie storica con tendenza crescente o decrescente, il modello semplice risulta costantemente in ritardo rispetto alle osservazioni reali, e produce previsioni distorte, per difetto o per eccesso.

Risulta tuttavia possibile estendere il modello semplice, per incorporare una componente di tendenza, ottenendo il modello di smoothing esponenziale con correzione di tendenza.



La figura mostra un modello di smoothing esponenziale di Holt con $\alpha = 0,5$ e $\beta = 0,7$ per la serie storica del consumo di energia.

Infatti, accanto alla media smorzata S_t si definisce una tendenza smorzata apparente lineare T_t , destinata ad approssimare la componente additiva di tendenza (si osservi che risulta possibile definire anche correzioni di tendenza quadratiche o esponenziali)

$$S_t = \alpha A_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1})$$

$$T_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$$

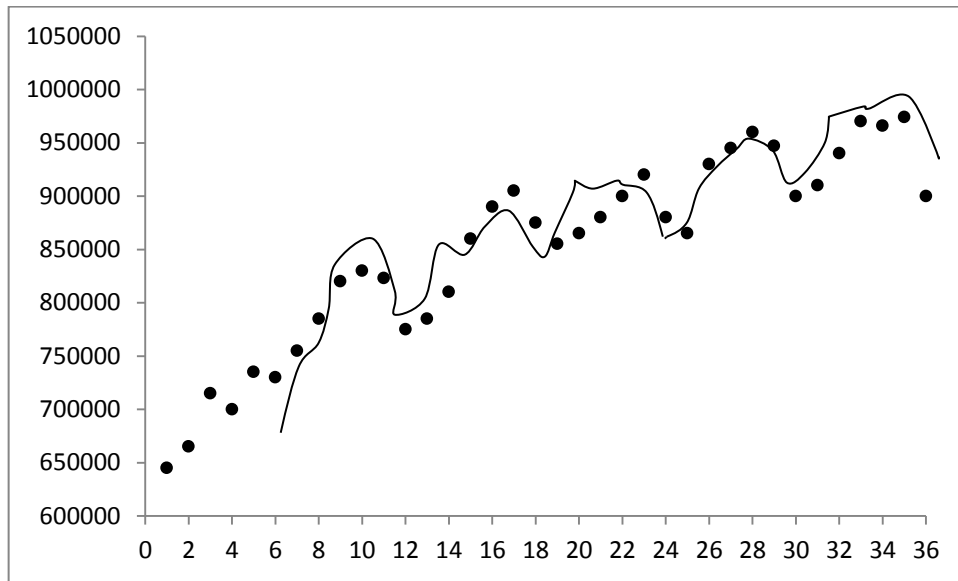
dove β è un secondo parametro del modello, tale che $0 \leq \beta \leq 1$. Per β vale un'interpretazione analoga a quella già fornita per α : se $\beta \cong 0$ si attribuisce un peso quasi uniforme alle tendenze manifestatesi nel passato, mentre se $\beta \cong 1$ si attribuisce un peso molto maggiore alle tendenze più recenti.

Si definisce la previsione per il periodo $t + 1$ come

$$F_{t+1} = S_t + T_t$$

La scelta dei parametri α e β avviene in modo da minimizzare le misure di dispersione.

3.6.3. Smoothing con tendenza e stagionalità (Winters)



La figura mostra un modello di smoothing esponenziale di Winters con $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,3$ e $\gamma = 0,3$ per la serie storica del consumo di energia elettrica

Nella serie storica è presente anche una componente di stagionalità, è necessario estendere ulteriormente il modello di smoothing esponenziale.

Accanto a media e tendenza smorzate si definisce infatti un indice di stagionalità smorzato Q_t , destinato ad approssimare la componente moltiplicativa di stagionalità, supposto di avere L periodi per ogni ciclo

$$S_t = \alpha \frac{A_t}{Q_{t-L}} + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1})$$

$$Q_t = \gamma \frac{A_t}{S_t} + (1 - \gamma)Q_{t-L}$$

$$T_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$$

dove γ è un terzo parametro del modello, tale che $0 \leq \gamma \leq 1$. Per γ vale un'interpretazione già fornita per α e β : se $\gamma \cong 0$ si attribuisce un peso quasi uniforme alle stagionalità manifestatesi nel passato, mentre se $\gamma \cong 1$ si attribuisce un peso molto maggiore alle stagionalità più recenti.

Si definisce la previsione per il periodo $t + 1$ come

$$F_{t+1} = (S_t + T_t)Q_{t-L+1}$$

La scelta dei parametri α , β e γ avviene in modo da minimizzare le misure di dispersione.

3.6.4. Smoothing adattativo semplice

Una ulteriore estensione dei modelli di smoothing esponenziale può essere ottenuta facendo dipendere i parametri del modello dal tempo t , mediante formule di aggiornamento adattativo. Si indica in seguito come si può formulare un modello di smoothing semplice adattativo.

Seguendo una procedura analoga è possibile definire modelli adattativi che includono componenti di tendenza e di stagionalità.

Il parametro α viene fatto dipendere dal periodo t , e indicato come α_t , attraverso una serie di formule di aggiornamento automatico

$$S_t = \alpha_t A_t + (1 - \alpha_t) S_{t-1}$$

$$\alpha_t = \left| \frac{D_t}{G_t} \right|$$

$$D_t = \beta E_t + (1 - \beta) D_{t-1}$$

$$G_t = \beta |E_t| + (1 - \beta) G_{t-1}$$

Si nota che l'aggiornamento di α_t segue la medesima formula già introdotta per il segnale di tracking. Da un punto di vista intuitivo, questo significa che se il modello è poco distorto, il corrispondente valore di α_t è prossimo a 0, mentre nel caso contrario cresce e si avvicina a 1.

Si definisce la previsione per il periodo $t + 1$ come

$$F_{t+1} = S_t$$

La scelta dei parametri α_0 e β avviene in modo da minimizzare le misure di dispersione.

3.6.5. Smoothing a tendenza ridotta

Si è osservato empiricamente che spesso la componente di tendenza si riduce nel tempo. Ad esempio, questo comportamento è confermato nelle previsioni delle vendite di un prodotto allorché questo attraversa le fasi di crescita e maturità nel corso del suo ciclo di vita. Per questa ragione sono stati sviluppati smoothing a tendenza ridotta.

Il modello che viene preso in considerazione prevede una riduzione automatica della componente di tendenza proiettata nel futuro mediante un parametro ϕ

$$S_t = \alpha A_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1})\phi$$

$$T_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}\phi$$

Si definisce la previsione per il periodo $t + m$ come

$$F_{t+m} = S_t + T_t \sum_{i=1}^m \phi^i$$

Anche in questo caso, la scelta dei parametri α , β , e ϕ avviene in modo da minimizzare le misure di dispersione.

3.6.6. Valori iniziali per i modelli di smoothing esponenziale

Un problema che emerge, in relazione all'applicazione di modelli di smoothing esponenziale, riguarda l'inizializzazione dei parametri.

Si consideri ad esempio il modello semplice

$$S_t = \alpha A_t + (1 - \alpha)S_{t-1}$$

Se si sviluppa all'indietro la relazione ricorsiva si ottiene, per il primo periodo,

$$S_1 = \alpha A_1 + (1 - \alpha)S_0$$

Come si vede, è necessario inizializzare la sequenza attribuendo un valore a S_0 .

Più in generale, nel modello di Winters, è necessario determinare anche gli indici di stagionalità iniziali e il valore iniziale per la tendenza smorzata.

Per il calcolo degli indici di stagionalità iniziali si ricorre ad una tecnica di scomposizione che utilizza le osservazioni del primo ciclo.

Il calcolo di S_0 e T_0 si basa generalmente sulla minimizzazione degli scarti quadratici, o di qualche altra misura di dispersione. In alternativa, si possono impiegare tecniche di backforecasting: si calcolano i valori iniziali S_0 e T_0 come risultato di previsioni ottenute applicando il modello alla serie storica considerata dal periodo t al periodo 1, ovvero dalle ultime alle prime.

3.6.7. Eliminazione di tendenza e stagionalità

Data una generica serie storica A_t non stazionaria, esistono diversi metodi per ottenere una serie storica trasformata D_t che sia stazionaria, ovvero che possieda una componente di tendenza T_t costituita da una retta orizzontale:

1. È possibile ricavare la componente di tendenza T_t , attraverso la metodologia di scomposizione indicata in precedenza sulla scomposizione di una serie storica, e successivamente eliminarla dalla serie storica stessa, mediante sottrazione o divisione

$$D_t = A_t - T_t$$

oppure

$$D_t = \frac{A_t}{T_t}$$

2. In alternativa, in modo meno intuitivo ma spesso più efficace, si può ricorrere a differenziazioni successive dei valori della serie storica

$$D_t = A_t - A_{t-1}$$

D'altra parte, è anche possibile rimuovere la componente di stagionalità da una serie storica A_t , ovvero destagionalizzare la serie storica, ricavando una nuova serie storica B_t

$$B_t = \frac{A_t}{Q_t}$$

Di conseguenza, a fronte di una serie storica che presenti componenti di tendenza e stagionalità è possibile procedere in tre modi per sviluppare un modello di previsione:

1. Applicare il modello di Winters alla serie originale A_t .
2. Applicare il modello di Holt alla serie storica dopo avere destagionalizzato i dati.

3. Applicare il modello di Brown alla serie storica ottenuta destagionalizzando e depurando alla componente di tendenza.

Le indagini empiriche hanno evidenziato che, in generale, non è possibile prevedere quale delle tre metodologie indicate risulti migliore rispetto alle misure di dispersione.

3.7. Metodi Autoregressivi

I metodi autoregressivi si basano sull'idea di identificare legami tra le osservazioni di una serie storica in corrispondenza dei diversi periodi, attraverso lo studio dell'autocorrelazione tra osservazioni separate da un intervallo temporale fisso.

Più precisamente, fissato uno scarto temporale s si definisce una nuova serie storica

$$B_t = A_{t-s} \quad t > s$$

ottenuta dalla serie originale per traslazione, e si analizza la correlazione tra le variabili A_t e B_t .

Ad esempio, se A_t possiede una componente di stagionalità di periodo L , le serie storiche A_t e B_t risultano fortemente correlate allorché $s = L$.

In generale, per lo sviluppo di modelli autoregressivi si assume che la serie storica sia stazionaria, ovvero che la sua traiettoria rimanga in equilibrio intorno ad una media costante. Per derivare una serie storica stazionaria si può procedere come indicato nel paragrafo sulla eliminazione di tendenza e stagionalità.

I modelli autoregressivi, che saranno presentati successivamente, risultano più flessibili e generali dei modelli di smoothing esponenziale.

Tuttavia, le indagini empiriche hanno indicato che non sempre il maggior sforzo richiesto dallo sviluppo e dall'identificazione di un modello autoregressivo risulta giustificato dal miglioramento della capacità previsionale rispetto a metodi più semplici.

3.7.1. Modelli autoregressivi (AR)

Un modello autoregressivo (AR) di ordine p ha la forma generale

$$A_t = \gamma + \phi_1 A_{t-1} + \phi_2 A_{t-2} + \dots + \phi_p A_{t-p} + \varepsilon_t$$

I parametri $\gamma, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ vengono determinati con il metodo dei minimi quadrati, in modo da minimizzare lo scarto quadratico medio.

Il termine ε_t è una variabile casuale, indicata come rumore, che rappresenta la componente di fluttuazione casuale. In condizioni ideali, essa dovrebbe seguire la distribuzione normale, con media 0.

La previsione per il periodo t viene formulata come:

$$F_{t+1} = \gamma + \phi_1 A_t + \phi_2 A_{t-1} + \dots + \phi_p A_{t-p+1}$$

3.7.2. Modelli a media mobile (MA)

Un modello a media mobile (MA) di ordine q ha la forma generale

$$A_t = \gamma + \varepsilon_t - \vartheta_1 E_{t-1} - \vartheta_2 E_{t-2} - \dots - \vartheta_q E_{t-q}$$

dove i termini $E_{t-1}, E_{t-2}, \dots, E_{t-q}$ rappresentano gli errori di predizione nei q periodi passati.

I parametri $\gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_q$ vengono determinati con il metodo dei minimi quadrati, in modo da minimizzare lo scarto quadratico medio.

Il termine ε_t rappresenta il rumore e, anche in questo caso, dovrebbe seguire una distribuzione normale.

La previsione per il periodo t viene formulata come:

$$F_{t+1} = \gamma - \vartheta_1 E_t - \vartheta_2 E_{t-1} - \dots - \vartheta_q E_{t-q+1}$$

3.7.3. Modelli autoregressivi a media mobile (ARMA)

Un modello autoregressivo a media mobile (ARMA) di ordine p e q ha la forma generale

$$A_t = \gamma + \varepsilon_t + \phi_1 A_{t-1} + \phi_2 A_{t-2} + \dots + \phi_p A_{t-p} - \vartheta_1 E_{t-1} - \vartheta_2 E_{t-2} - \dots - \vartheta_q E_{t-q}$$

I parametri $\gamma, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_q$ vengono determinati con il metodo dei minimi quadrati, in modo da minimizzare lo scarto quadratico.

La previsione per il periodo t viene formulata come

$$F_{t+1} = \gamma + \phi_1 A_t + \phi_2 A_{t-1} + \dots + \phi_p A_{t-p+1} - \vartheta_1 E_t - \vartheta_2 E_{t-1} - \dots - \vartheta_q E_{t-q+1}$$

3.7.4. Modelli autoregressivi integrati a media mobile (ARIMA)

Nel caso in cui la serie storica A_t non sia stazionaria, è possibile applicare il modello ARMA(p, q) alla serie storica R_t ottenuta mediante d differenziazioni successive della serie storica originaria. Si ottiene in questo modo un modello autoregressivo integrato a media mobile ARIMA(p, d, q)

$$R_t = \gamma + \varepsilon_t + \phi_1 R_{t-1} + \phi_2 R_{t-2} + \dots + \phi_p R_{t-p} - \vartheta_1 z_{t-1} - \vartheta_2 z_{t-2} - \dots - \vartheta_q z_{t-q}$$

dove i termini $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-q}$ rappresentano gli errori di previsione per la serie storica stazionaria R_t .

I parametri $\gamma, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_q$ vengono determinati con il metodo dei minimi quadrati, in modo da minimizzare lo scarto quadratico medio.

La previsione per il periodo t viene formulata come:

$$F_{t+1} = \gamma + \phi_1 R_t + \phi_2 R_{t-1} + \dots + \phi_p R_{t-p+1} - \vartheta_1 z_t - \vartheta_2 z_{t-1} - \dots - \vartheta_q z_{t-p+1}$$

3.8. Combinazioni di metodi previsionali

La combinazione di metodi previsionali è una delle tecniche di previsione che si sono rivelate più efficaci nel corso delle indagini empiriche condotte su numerose serie storiche di origine aziendale.

In pratica, si tratta di considerare una somma pesata di previsioni, ottenute attraverso l'impiego di diversi modelli previsionali.

Ad esempio, si potrebbero utilizzare diversi modelli di smoothing, caratterizzati da valori differenti per i parametri, insieme a modelli di tipo autoregressivo e modelli a media mobile.

Dati m modelli di previsione F_1, F_2, \dots, F_m riferiti alla medesima serie storica A_t , è possibile costruire un nuovo modello F_c come combinazione degli m predittori originali, mediante l'impiego di m pesi w_1, w_2, \dots, w_m

$$F_c = \frac{\sum_{i=1}^m w_i F_i}{\sum_{i=1}^m w_i}$$

È possibile dimostrare che il modello F_c risulta ottimale, nel senso che minimizza lo scarto quadratico medio MSE, se e solo se i pesi sono dati da

$$w = \frac{S^{-1}e}{e^T S^{-1}e}$$

dove e è un vettore unitario, e S la matrice di covarianza degli errori di previsione determinati dagli m modelli.

In pratica, la stima della matrice S risulta problematica. Si tende quindi ad assumere che gli errori generati siano indipendenti, e si assegna lo stesso peso a tutti i modelli.

In alternativa si può determinare w mediante tecniche di statistica Bayesiana.

L'evidenza empirica indica che il modello F_c è migliore dei singoli modelli componenti, in termini di diminuzione delle misure di dispersione.

Ad esempio, numerose indagini empiriche suggeriscono che il miglioramento percentuale dell'errore assoluto medio MAD oscilla intorno al valore medio del 6%, su un campione di serie storiche e di modelli componenti analizzati, con punte di miglioramento pari al 80%.

CONCLUSIONI

Mentre in passato la maggior parte dei processi decisionali in azienda si basava su decisioni che provenivano da valutazioni empiriche e soggettive, nell'ultimo periodo si è scorta una tendenza al cambiamento che ha portato le aziende a focalizzarsi maggiormente sulle tecniche previsionali più evolute di natura tecnica e qualitativa.

La scelta di una metodologia di previsione dipende principalmente dalle caratteristiche e dagli obiettivi delle decisioni per le quali verrà utilizzata, come ad esempio la lunghezza dell'orizzonte temporale, le caratteristiche del prodotto a cui si riferiscono le previsioni, il ciclo di vita e la disponibilità e l'omogeneità di un'ampia base di dati storici.

Oltre a ciò si deve considerare l'analisi dei costi e dei benefici legati all'utilizzo di un metodo o di una classe di metodi piuttosto che di un altro.

In generale si è visto che molto spesso non è conveniente utilizzare metodi molto sofisticati e con costi elevati, in quanto, generalmente, si ottengono buoni risultati molto efficaci con l'utilizzo di semplici metodi statistici come regressioni esplicative e modelli di smoothing estrapolativi.

Si deve poi considerare che ogni risultato ottenuto va monitorato per controllarne l'efficacia.

Poiché i modelli esplicativi cercano di identificare una relazione quantitativa e di natura funzionale tra la grandezza di cui si vuole ottenere la previsione e un insieme di variabili che potrebbero influenzarne il valore, potrebbe essere difficile calcolare la bontà delle previsioni perché non sono basate su un procedimento formalizzato e qualitativo. Questi modelli sono prevalentemente utilizzati per previsioni di medio e lungo termine.

Nei modelli estrapolativi, poiché la variabile interna è per definizione la domanda commerciale stessa, quale rilevata a consuntivo nei passati periodi di vendita, l'evoluzione della domanda dipende unicamente dalla variabile tempo, ed è quindi un

fenomeno intrinseco in ogni specifico bene. La previsione, quindi, viene fatta unicamente basandosi sui valori passati della domanda.

I metodi estrapolativi sono adatti a previsioni nel breve periodo, oltre la loro affidabilità tende a diminuire; essi non sono adatti a segnalare i punti di svolta del trend.

RINGRAZIAMENTI

Desidero ringraziare innanzitutto il professor Giorgio Romanin Jacur, relatore di questa tesi, per la disponibilità e per la cortesia dimostratami, e per l'aiuto fornito durante la stesura.

Un sentito ringraziamento, inoltre, al mio ragazzo, ai miei genitori, a mio fratello, ai miei amici e compagni di studi che, standomi vicino nei momenti più difficili e nei momenti felici, grazie al loro supporto morale mi hanno permesso di raggiungere questo traguardo.

BIBLIOGRAFIA

- C. Vercellis, 1997, *Modelli e Decisioni. Strumenti e metodi per le decisioni aziendali*, Bologna, Edizioni Esculapio
- G. Bruno, 2005, *Operations Management. Modelli e metodi per la logistica*, Italia, Edizioni Scientifiche Italiane
- D. M. Levine, T.C. Krehbiel, M.L. Berenson, 2006, *Statistica*, Milano, Apogeo
- Milanato, 2008, *Demand Planning*, Milano, Springer – Verlag
- D. Piccolo, 1990, *Introduzione all'analisi delle serie storiche*, Roma, NIS
- <http://www.it.wikipedia.org>
- <http://www.irccsdebellis.it/html/dipuninf/statistica>
- <http://automatica.ing.unibs.it/mco/ms/regressione>
- <http://wwwcdf.pd.infn.it>
- <http://w3.uniroma1.it/chemo/heritage/correlazione>
- <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook>
- <http://www.statix.ch>
- <http://economia.unipr.it/>
- <http://www.na.icar.cnr.it>
- <http://www.ds.unifi.it>