



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA

DELL'INNOVAZIONE DEL PRODOTTO

TESI DI LAUREA

**ANALISI NUMERICHE PER LA
DETERMINAZIONE DELL'EFFETTO DI
SHIELDING IN PIASTRE CRICcate SOGGETTE
A CARICHI CICLICI:
IL MODELLO CJP (2007-2011)**

RELATORI: CH.MO PROF. PAOLO LAZZARIN

ING. FILIPPO BERTO

LAUREANDO: MARCO BISINELLA

ANNO ACCADEMICO: 2010-2011

Ringraziamenti

Ringrazio infinitamente i miei *genitori* che mi hanno dato l'opportunità di studiare. Non potrò mai dimenticare i loro sacrifici, il supporto che mi hanno dato, i consigli e gli insegnamenti. Un grazie a *mia madre* che, a seguito di questo mio periodo di tesi trascorso tutti i giorni presso il laboratorio dottorandi, ha avuto l'opportunità di utilizzare la cucina per gli scopi per i quali è stata acquistata e non come aula studio nella quale deve regnare un rigoroso silenzio. Un grazie va ovviamente a *mio padre* (il principale sponsor di questa avventura) che non mi ha mai fatto mancare nulla, né tantomeno l'affetto ed il supporto, e che da oggi, appena rincaserà potrà sedersi a tavola senza attendere che finisca di spostare i libri in soggiorno.

Non posso dimenticare *mia sorella Giulia* per almeno 2 motivi, il primo perché se non la cito si incazza a morte e mi romperà le scatole per il resto della vita, il secondo perché le voglio bene e ci tenevo lo sapesse.

Ringrazio il *prof. Lazzarin*, per il quale nuttivo grande soggezione trasformatasi ora in profonda stima. Se fossi obbligato a descriverlo userei la frase "un professore dal quale non si finisce mai di imparare".

Ci tengo particolarmente a ringraziare il *prof. Berto* per avermi seguito da vicino in questi ultimi 7 mesi, per essere stato disponibile per qualsiasi confronto e chiarimento (e per avere avuto indirettamente il merito di farmi capire di non acquistare mai un'Alfa!).

Ringrazio tutti i membri del laboratorio dottorandi, in particolare gli *ing. Zappalorto, Salviato, Carraro e Marangon* che hanno sempre contribuito a rendere piacevole l'ambiente, pur rimanendo questo un luogo serio e di lavoro.

Ringrazio mia cugina Irene, che sopporta e accetta sempre con inconsueto buongrado i miei dispetti, e con la stessa mi scuso anticipatamente per i dispetti futuri.

Voglio ringraziare di cuore l'amico mio *Simone*, compagno di studi e di spritz (più spritz che studi), valido supporto morale nei momenti universitari più difficili, instancabile "sparac@zz@te" nei momenti maggiormente allegri, ottimo copilota e pilota quando c'è da aggredire l'asfalto. (Rimane tuttora imbattuto il suo record su pista bagnata nel GP Pozzetto-Vicenza!!!)

Non posso dimenticare il buon *Andrea*, compagno di studi e di tesi, anch'egli conosciuto qui all'università e col quale ho stretto subito una profonda amicizia...sembra siano passati 2 mesi da quando ci rompevamo la testa su Matematica A e Fisica 1 ed invece sono ormai passati 7 anni...Andrea, semo diventai veci!!!!

Non posso certamente dimenticare l'allegra combriccola del week-end, *Paolo, Andrea* ed *Enrico*, neanche a dirlo, tutti dottori meccanici!!! Prometto loro che da oggi, alla domenica pomeriggio, quando ci sarà una McLaren in pista, non userò più la scusa "Mi disp. Devo restare a casa a studiare"...ne troverò però un'altra!

Ora che non ho più parole da scrivere, né capelli in testa, ringrazio ancora tutti e prometto di far tesoro di quanto da voi imparato in questo percorso. Grazie mille!

Indice

Sommario	i
Introduzione	v
Capitolo 1: La Meccanica della Frattura Lineare Elastica	1
1.1 Storia e sviluppo della MFLE	1
1.2 La MFLE in campo statico.....	4
1.2.1 Introduzione e modi di carico	4
1.2.2 Fattore di intensificazione delle tensioni K (SIF) e stati tensionali	6
1.2.3 La T-stress	10
1.2.4 La propagazione instabile della cricca	11
1.3 La MFLE in presenza di sollecitazioni a fatica.....	14
1.3.1 Introduzione.....	14
1.3.2 Le fasi del danneggiamento.....	15
1.3.3 Le tipologie di approccio alla progettazione a fatica	16
1.3.4 La propagazione dei difetti dovuta a sollecitazioni di fatica e la legge di Paris.....	17
1.3.4.1 Legge di Walker.....	24
1.3.4.2 Legge di Forman	25
1.3.4.3 Legge di Forman modificata.....	25
1.3.4.4 Legge di McEvil	25
1.3.5 Stima della vita a fatica per sollecitazioni ad ampiezza costante	25
Capitolo 2: La Plasticità ed il fenomeno del Crack Closure.....	27
2.1 Introduzione	27
2.2 Limiti di applicabilità della MFLE e formazione di una zona plastica apicale.....	28

2.3 Dimensione della zona plastica	29
2.3.1 Correzione di Irwin alla dimensione della zona plastica.....	31
2.4 La forma della zona plastica.....	33
2.5 Raggio plastico r_p più esteso della zona di singolarità: approccio di Irwin	36
2.6 Raggio plastico r_p più esteso della zona di singolarità: approccio di Dugdale	37
2.7 Il fenomeno del Crack Closure.....	41
2.7.1 Plasticity-induced crack closure	43
2.7.2 Alcune caratteristiche tipiche del Crack Closure.....	49
2.7.3 Problemi relativi alla quantificazione del Crack Closure.....	50
Capitolo 3: Il modello CJP.....	53
3.1 Introduzione al modello CJP.....	53
3.2 Il sistema di forze agenti sulla cricca.....	54
3.3 Il frame analitico del modello CJP e alcune considerazioni	56
3.4 Verifica agli elementi finiti del modello CJP (ipotesi di comportamento “isotropic hardening” del materiale).....	67
3.4.1 Load Step 1	72
3.4.2 Load Step 2.....	78
3.4.3 Load Step 3	82
3.4.4 Valutazione del parametro E e discussione dei risultati.....	90
3.5 Verifica agli elementi finiti del modello CJP (ipotesi di comportamento “kinematic hardening” del materiale).....	93
3.5.1 Load Step 1	94
3.5.2 Load Step 2.....	102
3.5.3 Load Step 3	107
3.5.4 Valutazione del parametro E e discussione dei risultati.....	114
3.6 Conclusioni.....	116

Capitolo 4: Studio del valore dei coefficienti del modello CJP e dei termini di ordine superiore nell'espressione di Irwin.....	119
4.1 Introduzione e inquadramento analitico.....	119
4.2 Determinazione del numero di termini di ordine superiore utili a descrivere il campo di tensione sulla bisettrice.....	121
4.2.1 Caso in cui si considerano 5 termini di ordine superiore	121
4.2.2 Caso in cui si considerano 4 termini di ordine superiore	127
4.2.3 Caso in cui si considerano 3 termini di ordine superiore	129
4.3 Studio del valore dei coefficienti del modello CJP e opportuni confronti (6 casi)	132
4.4 Conclusioni	153

Capitolo 5: Utilizzo delle equazioni delle tensioni del modello CJP per riprodurre i campi di tensione fuori e sulla bisettrice	159
5.1 Introduzione e inquadramento analitico.....	159
5.2 Calcolo della T-stress.....	161
5.3 Plottaggio dei campi di tensione.....	162
5.3.1 Plottaggio delle distribuzioni di tensione sulla bisettrice ($\theta=0^\circ$).....	164
5.3.2 Plottaggio delle distribuzioni di tensione sulla direzione collocata a $\theta=22,5^\circ$	170
5.3.3 Plottaggio delle distribuzioni di tensione sulla direzione collocata a $\theta=45^\circ$	179
5.3.4 Plottaggio delle distribuzioni di tensione sulla direzione collocata a $\theta=67,5^\circ$	188
5.3.5 Conclusioni e discussione dei risultati ottenuti	197
5.4 Confronto tra campi di tensione calcolati nell'ipotesi di comportamento lineare elastico e comportamento elastoplastico	198
5.4.1 Conclusioni e alcune considerazioni.....	204

Capitolo 6: Proposta di modifica del modello CJP.....	207
6.1 Introduzione	207
6.2 Il nuovo frame analitico ed il parametro F.....	207

6.3 La nuova versione del fattore di intensificazione delle tensioni KF	216
6.4 Rappresentazione dei campi di tensione σ_y ottenuti a partire dalla nuova versione dei potenziali complessi	220
Conclusioni, sviluppi e migliorie future	225
Bibliografia.....	233
Appendice.....	237
• Codice fornito al software FEM ANSYS® 11.0 per descrivere la curva monotona ed il comportamento <i>isotropic hardening</i> del materiale.....	237
• Codice fornito al software FEM ANSYS® 11.0 per descrivere la curva monotona ed il comportamento <i>kinematic hardening</i> del materiale.....	239

Sommario

Nel primo capitolo è riportata una introduzione generale alla Meccanica della Frattura Lineare Elastica (MFLE). Dopo un breve excursus sulla “storia” di questa disciplina vengono descritti i tre modi di carico secondo i quali si può sollecitare una piastra criccata e successivamente presentati i *fattori di intensificazione delle tensioni* (SIF) K_I , K_{II} , K_{III} . Si prosegue poi con l’elencare le equazioni che descrivono i campi di tensione per i vari modi di carico precisandone le condizioni di validità da rispettare affinché tali equazioni possano essere correttamente utilizzate. Si analizza successivamente il fenomeno della propagazione instabile di una cricca prima di entrare nell’ambito delle MFLE in presenza di sollecitazioni a fatica. Dopo una breve digressione sulle varie fasi del danneggiamento e sulle diverse tipologie di approcci alla progettazione a fatica vengono illustrate una serie di leggi che permettono di descrivere l’evoluzione a fatica di un difetto (tra queste anche la legge di Paris, alla quale è stato riservato maggior spazio).

Nel secondo capitolo del presente lavoro di tesi si introducono gli effetti che la plasticità induce su una cricca ed in particolare sul fenomeno di propagazione della stessa. Anzitutto vengono brevemente descritte le diverse teorie che si possono adottare in funzione della dimensione della zona plastica (MFEP e MFPS); si prosegue poi con un’ampia analisi, corredata dalle opportune trattazioni analitiche, delle dimensioni e della forma della zona plastica che si viene a formare all’apice della cricca. Vengono poi esposti i modelli di Irwin e Dugdale. Il capitolo si conclude con una ampia analisi del fenomeno del *crack closure*, nella quale viene riservata particolare attenzione al fenomeno del *plasticity-induced crack closure* e come quest’ultimo influenzi la propagazione a fatica di una cricca.

Il capitolo 3 affronta in dettaglio il modello CJP, principale argomento del presente lavoro di tesi. All’inizio del capitolo vengono approfonditamente descritti gli obiettivi del modello e “la fisica del problema”, cioè il sistema di forze agenti su una cricca (sulla zona plastica all’apice e sui fianchi della stessa). Il capitolo prosegue con la presentazione dei 3 nuovi fattori di intensificazione delle tensioni (K_F , K_R , K_S) che il modello introduce al fine di descrivere i fenomeni di *crack closure* e *shielding*. Successivamente, a partire dai potenziali complessi proposti dagli autori del modello si propone una trattazione analitica basata sull’approccio di Muskhelishvili-Kolosoff al termine della quale vengono ricavate le espressioni delle componenti di tensione σ_x , σ_y e τ_{xy} nelle quali compaiono dei coefficienti che, una volta tarati, dovrebbero permettere al modello di descrivere gli effetti di crack closure sulla propagazione di una cricca. Il capitolo si completa con una verifica del modello CJP agli

elementi finiti nella quale vengono determinati gli andamenti delle tensioni sulla bisettrice e sui fianchi di una cricca, sia in relazione ad una prima fase di carico sia ad una successiva fase di scarico e ancora ad una seconda fase di carico. Per ciascuna fase sono poi stati determinati gli andamenti dei nuovi SIF seguendo la definizione di questi data dagli autori del modello. Queste analisi sono anzitutto eseguite nell'ipotesi di comportamento *isotropic hardening* del materiale e successivamente ripetute ipotizzando un comportamento *kinematic hardening*.

Oggetto del capitolo 4 sono i coefficienti che compaiono nelle espressioni delle tensioni del modello CJP e nei termini di ordine superiore dell'equazione di Irwin. In particolare nel presente capitolo sono stati condotti una serie di tentativi per determinare qual è il numero di termini di ordine superiore che bisogna considerare al fine di ottenere la miglior approssimazione del reale campo di tensione σ_y sulla bisettrice. Nel capitolo si prosegue poi con una ulteriore serie di tentativi volta ora a determinare il valore dei coefficienti che compaiono delle espressioni di tensione del modello CJP che consentono di ottenere ancora la migliore approssimazione del campo di tensione σ_y sulla bisettrice. In particolare, per quanto riguarda i coefficienti del modello CJP, si sono eseguiti diversi tentativi nei quali i coefficienti stessi venivano tarati in campo lineare elastico oppure all'interno della zona plastica.

Nel capitolo 5, al fine di testare la validità del modello, sono state utilizzate le espressioni delle componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} (ricavate nel capitolo 3 e nelle quali vengono sostituiti ai coefficienti i rispettivi valori determinati nel capitolo 4) per confrontare i campi di tensione che il modello permette di riprodurre con quelli che si possono ottenere mediante una analisi FEM elastoplastica nell'ipotesi di comportamento a incrudimento cinematico del materiale. Tali confronti sono stati condotti non solo sulla bisettrice, ma anche per angoli diversi ($\theta=22.5^\circ$, 45° e 67.5°). Il capitolo si conclude con ulteriori paragoni ora tra i risultati ottenuti da analisi FEM nell'ipotesi di comportamento lineare elastico del materiale con quelli ottenuti da analisi FEM elastoplastiche nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening.

Nell'ultimo capitolo del presente lavoro di tesi si propone una modifica da apportare al modello CJP, in particolare ai potenziali complessi di partenza ai quali viene aggiunto per l'appunto un termine. Conseguenza di tale modifica è la variazione dell'espressione della componente di tensione σ_y e della definizione del SIF K_F , nelle quali compare ora un nuovo termine F che nella proposta degli autori risultava assente. Tale termine è stato successivamente adoperato per tentare di estendere la capacità del modello CJP di riprodurre il campo di tensione σ_y lineare elastico anche al campo di tensione presente nella zona plastica. Un successivo tentativo ha visto come oggetto ancora il nuovo termine F utilizzato

ora con l'obiettivo di legare il particolare andamento del termine suddetto al SIF K_F al fine di rendere quest'ultimo di valore costante oltre che meglio descrivere il fenomeno di *shielding*.

Introduzione

Negli ultimi anni lo studio della resistenza alla frattura di strutture o di organi meccanici ha assunto considerevole importanza in virtù delle applicazioni che queste strutture trovano in svariati settori, tra i quali i trasporti, in particolare in aeronautica. Tale studio è stato favorito e ben supportato dall'enorme evoluzione degli elaboratori avvenuta negli ultimi decenni del '900. Questa ha infatti permesso un grande sviluppo e diffusione dei metodi di calcolo numerici, in particolare gli elementi finiti, che consentono di ottenere ormai in breve tempo soluzioni dettagliate di problemi non lineari, impensabili fino a poco tempo fa.

Le teorie fondamentali, che emergono da ricerche bibliografiche, affrontano il problema della frattura nei materiali mediante considerazioni di tipo energetico e/o di tipo tensionale. Un nuovo "strumento matematico", recentemente presentato, prende il nome di modello CJP e fa riferimento proprio a considerazioni di carattere tensionale.

Obiettivo del seguente lavoro di tesi è descrivere, applicare ed approfondire il modello CJP presentato in contributi recenti (2007-2011) da Christopher, James e Patterson. Di questi autori si riporta qui di seguito l'abstract dell'articolo "*A quantitative evaluation of fatigue crack shielding forces using photoelasticity*".

"Quest'opera introduce un nuovo modello matematico per le tensioni attorno all'apice di una cricca a fatica, considerando gli effetti della plasticità attraverso un'analisi della sua influenza di "shielding" (ovvero di protezione, schermatura) sul campo elastico circostante il difetto. La capacità del modello di descrivere gli effetti della cosiddetta "plasticità-indotta da carichi ciclici" sui campi tensionali elastici attorno alla cricca è valutata e confermata usando la tecnica della fotoelasticità a tutto campo. L'obiettivo consiste nel determinare la forma di quelle componenti di tensione protettive per la propagazione della cricca (generate necessariamente all'interfaccia elasto-plastica lungo ai fianchi e alla sommità del difetto) e come esse influenzano i campi elastici di tensione in corrispondenza all'apice di tale cricca, in condizioni di carico ciclico. Tale modello è stato applicato, con successo, per analizzare la crescita di una cricca a fatica in un provino di policarbonato CT."

C.J. Christopher - M.N. James - E.A. Patterson - K.F. Tee. Maggio 2008, pubblicato da Springer Science

L'argomento attualmente assume sempre crescente interesse in letteratura ed è stato oggetto di ricerca dei maggiori esperti in questo ambito.

Si è ritenuto opportuno riportare l'abstract dell'articolo sopra citato perché esso riassume in modo sintetico ma al tempo stesso preciso gli obiettivi del modello CJP studiato nel presente

lavoro. Nelle analisi che saranno condotte non verrà adottata la tecnica della fotoelasticità, bensì si utilizzerà un codice di analisi FEM (precisamente ANSYS®11.0), oramai divenuto uno strumento indispensabile nelle attività di un progettista e che ne ha radicalmente trasformato il modo di operare. Infatti, accanto all'approccio tradizionale basato sulla definizione di grandezze nominali il progettista può ora operare secondo un approccio fondato sulla definizione di grandezze locali, la cui quantificazione viene fatta seguendo in dettaglio la storia di carico in un punto ben definito del componente che si sta considerando. Secondo questa filosofia il modello CJP introduce tre nuovi fattori di intensificazione di tensione con l'obiettivo di descrivere tramite quest'ultimi gli effetti di *shielding* sul campo elastico dovuti alla formazione di una zona deformata plasticamente all'apice e sui fianchi di una cricca soggetta a carichi di fatica.

Si ritiene fondamentale spiegare, ai fini della comprensione del presente lavoro, le motivazioni ed i ragionamenti che hanno spinto gli autori a definire il modello così com'è presentato nell'articolo qui sopra citato. Alla base del modello CJP vi è l'idea che sono le tensioni σ_x e τ_{xy} situate all'interfaccia tra il materiale deformato elasticamente e quello deformato plasticamente a causare il rallentamento della propagazione della cricca. Gli autori ricercavano quindi una espressione che incorporasse la forza di chiusura (il fenomeno del *crack closure*) proveniente da tali zone. Dall'osservazione di immagini di cricche, ottenute con la tecnica della fotoelasticità, con coinvolto il fenomeno del crack closure, appariva chiaro agli ideatori del modello che gli effetti del fenomeno sono significativi in termini asintotici. Essi decisero quindi di determinare le espressioni delle tensioni che incorporano anche gli effetti della forza di chiusura modellando extra-termini logaritmici sulla soluzione di Williams e Westergaard, che nella versione originale prevede tensioni tendenti all'infinito quando ci si avvicina all'apice della cricca. In altre parole, uno degli obiettivi degli autori era quello di ricercare termini idealizzati che tendessero ad infinito e che fossero in grado di rappresentare le forze di chiusura assumendo che queste giacciono all'interfaccia tra la zona deformata plasticamente ed il circostante materiale in campo lineare elastico. Poiché le tensioni che compaiono nella soluzione di Westergaard sono dell'ordine di $r^{-0,5}$ sembrava loro ragionevole ipotizzare che le forze di chiusura dovessero avere anch'esse questo ordine di crescita (inteso cioè come tendenza all'infinito) lungo i fianchi della cricca, da qui l'idea di introdurre il termine logaritmico.

A partire dalle considerazioni qui sopra riportate, nel presente lavoro di tesi ci si pone l'obiettivo di eseguire un attento studio del modello, atto a testarne la validità e, qualora sia necessario, formulare eventuali critiche ovviamente adeguatamente argomentate. Nel capitolo

conclusivo, a partire da una modifica apportata alla trattazione analitica basata sui potenziali complessi su cui si fonda il modello, verrà presentata una proposta di variazione del frame analitico del modello stesso. Questo lavoro di tesi spera di dare così un contributo ad un ulteriore sviluppo del modello CJP.

La Meccanica della Frattura Lineare Elastica

Capitolo 1

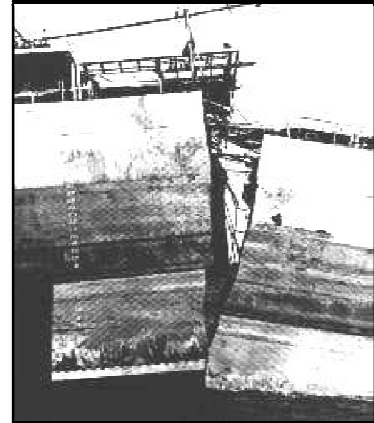
1.1 Storia e sviluppo della MFLE

Nel 1913 Inglis formulò una soluzione teorica elastica della distribuzione dello stato tensionale in prossimità di difetti di generica forma ellittica in strutture bidimensionali. Secondo tali previsioni, per raggi di curvatura del difetto ellittico tendenti a zero lo stato tensionale tende ad infinito. Tali risultati generarono sconforto e disinteresse in quanto i concetti tradizionali fino ad all'ora sviluppati per valutare molto semplicemente la resistenza dei materiali non riuscivano a giustificare il motivo per cui un materiale con un piccolo difetto non si rompeva sotto l'applicazione di un carico ridottissimo.

Alcuni anni dopo, nel 1921, Griffith pubblicò i risultati delle sue ricerche sulla frattura dei materiali fragili in presenza di difetti [1]; precisamente egli formulò un criterio energetico in grado di spiegare il comportamento a frattura del vetro e di correlare l'influenza dei difetti sulla resistenza a rottura dei vetri stessi. Si può ritenere che questi primi studi coincidano con la nascita della Meccanica della Frattura, una disciplina che si pone come scopo principale quello di valutare l'influenza dei difetti nei materiali e di trovare relazioni quantitative tra dimensioni dei difetti, sforzo applicato e resistenza dei materiali. Il lavoro di Griffith restò per anni lettera morta. Il problema era dovuto al fatto che il criterio da lui proposto poteva essere applicato solo a materiali idealmente fragili (cioè con comportamento puramente lineare-elastico), per i quali il lavoro di frattura può essere uguagliato alla sola energia di superficie (energia cioè necessaria per rompere i legami del materiale e creare due superfici per distacco). I materiali metallici hanno invece tutti una percentuale più o meno grande di duttilità a causa della quale la formulazione energetica di Griffith non funzionava.

L'evento che diede un grosso e decisivo impulso allo sviluppo di questa nuova disciplina si verificò, qualche anno più tardi durante la seconda guerra mondiale, quando vi furono i famosi cedimenti delle navi americane "Liberty", e successivamente degli aerei britannici "Comet", primi aerei civili a reazione. Le navi Liberty erano state costruite secondo un progetto innovativo nel quale la struttura dello scafo era completamente saldata e non chiodata, in modo da risparmiare sui tempi di realizzazione delle navi. Delle 2700 navi che erano state costruite circa 900 si danneggiarono seriamente in seguito alla formazione di

cricche¹. Di queste circa 400 presentarono cedimenti, di cui almeno 90 gravi e 20 catastrofici, con la rottura completa della nave in 2 tronconi [2].



Le ricerche condotte su questi cedimenti mostrarono che non erano stati commessi errori di progetto in quanto gli sforzi erano sempre inferiori a quelli ammissibili dei materiali, però si constatò che le fratture iniziavano sempre dalle saldature, quando vi erano difetti, oppure da intagli in zone di forti concentrazioni degli sforzi e che il materiale sottoposto alla prova Charpy rivelava bassi valori di tenacità. Nello specifico le cause che furono individuate alla base degli affondamenti delle navi Liberty furono nei difetti nelle saldature, nelle forti concentrazioni di tensione causate da fori a spigolo vivo acuti praticati sulla coperta delle navi, e a causa dell'acciaio impiegato, avente un valore di tenacità non adeguato (sebbene lo stesso non aveva dato problemi in strutture rivettate). Gli avvenimenti catastrofici legati agli aerei Comet si verificarono invece a seguito della propagazione di cricche originate sugli spigoli vivi degli oblo della fusoliera.

¹ Si definisce *cricca* un intaglio acuto avente raggio di raccordo all'apice nullo e angolo di apertura tra i due lembi nullo o prossimo a zero.

Venne istituito un gruppo di ricerca sotto la guida di Irwin nel “Naval Research Laboratory”, che, riprendendo gli studi di Inglis e Griffith, diede un grosso contributo allo sviluppo della Meccanica della Frattura [2]. Tra il 1945 ed il 1960 furono quindi gettate le basi della MFLE, attraverso una serie di studi fondamentali. Nel 1948 Irwin e Orowan [3] considerarono il lavoro di deformazione plastica all’apice della cricca all’interno del bilancio energetico di Griffith, consentendo così di estendere l’approccio energetico al caso dei materiali metallici. Successivamente nel 1956, lo stesso Irwin introdusse il concetto di *Strain Energy Release Rate*, come estensione della teoria di Griffith. Di fondamentale importanza il lavoro ancora di Irwin del 1957 nel quale diede una interpretazione fisica agli sviluppi analitici relativi allo studio di soluzioni elastiche dello stato tensionale all’apice di una cricca (Westergaard, 1937), definendo il parametro di tensione, il fattore teorico di intensificazione delle tensioni K [4]. Si arrivò così alla definizione della Meccanica della Frattura Lineare Elastica (MFLE).

Molti studi sono stati condotti da allora nell’ambito di questa disciplina. Sono stati seguiti approcci di tipo energetico o secondo la definizione del fattore di intensificazione degli sforzi; la Meccanica della Frattura inizialmente relativa al campo lineare elastico è stata poi estesa al campo elasto-plastico (Rice [5], 1968) ed è stata studiata la propagazione dei difetti a fatica (Paris [6], 1964, il quale definisce il legame tra i parametri della MF e la crescita a fatica della cricca, proponendo un approccio nuovo allo studio del danneggiamento a fatica di un materiale). Senz’altro l’aspetto più innovativo che ne è conseguito è una nuova filosofia di progettazione, detta *damage tolerant* (vedi paragrafo 1.3.3). Nella meccanica classica, secondo cioè un approccio di tipo tradizionale alla progettazione, il calcolo della resistenza o meno di un componente consiste nel sintetizzare la criticità di uno stato generico di tensione, al più triassiale, mediante una tensione monoassiale equivalente che verrà poi confrontata direttamente con la tensione limite del materiale scelto. Nel caso la sollecitazione ammissibile del materiale soddisfi il confronto con lo sforzo equivalente calcolato, per la meccanica classica, il componente verificato non sarà interessato da rotture. Una progettazione secondo la meccanica classica è però basata sull’ipotesi che la struttura o l’organo di macchina siano esenti da difetti. (Nella meccanica classica l’evento “presenza di un difetto” non è accettabile!). Come detto però, questo tipo di approccio progettuale si è rivelato inadeguato nel caso di alcune inesplicabili rotture di strutture e/o componenti assoggettati a carichi di esercizio anche ben inferiori a quelli di progetto. (Alcune navi Liberty si spezzarono letteralmente in 2 tronconi mentre erano ormeggiate in porto). Secondo la progettazione *damage tolerant* si ammette invece che nei materiali siano presenti dei difetti, purché sia valutata con correttezza la pericolosità del difetto stesso. Se la frattura è il risultato

dell'esistenza di una cricca nel componente, un approccio per valutare l'impatto che una cricca ha sull'integrità di una struttura sarà quello di condurre uno studio accurato di come si modifichi il campo delle tensioni in prossimità della cricca stessa, cercando di individuare come e per quali valori della tensione nominale esso diventi improvvisamente critico, permettendo alla cricca di propagarsi attraverso la struttura. E' proprio tale studio che dà vita alla Meccanica della Frattura.

Va sottolineato, a questo punto, che l'approccio basato sulla teoria della Meccanica della Frattura non ha sostituito le procedure "classiche" di progettazione, bensì è da considerarsi un completamento/estensione della meccanica classica.

La MFLE, utilizzando strumenti propri della meccanica del continuo, permette di correlare l'intensità e la distribuzione delle tensioni nell'intorno dell'apice del difetto alla tensione nominale ed alle dimensioni, forma ed orientamento del difetto. Tale teoria è valida sostanzialmente in presenza di cricche e quando nel materiale non si abbia plasticizzazione estesa intorno al difetto (in altre parole, quando si ha un cedimento plastico su piccola scala intorno ad esso – *small scale yielding*). La maggior parte dei materiali da costruzione, ed in particolare quelli metallici, tendono però a deformarsi plasticamente sotto gli elevati sforzi localizzati all'apice della cricca. Si distinguono pertanto altre due teorie: la Meccanica della Frattura Elasto-Plastica (MFEP) e la Meccanica della Frattura Post-Snervamento (MFPS), le quali studiano rispettivamente l'estensione della zona plasticizzata e la definizione dei contorni (MFEP) e l'andamento delle tensioni e delle deformazioni all'interno della zona plasticizzata, per materiali a comportamento non lineare (MFPS).

1.2 La MFLE in campo statico

1.2.1 Introduzione e modi di carico

Nella Meccanica della Frattura Lineare Elastica l'analisi delle tensioni è condotta sulla base di considerazioni puramente elastiche, dunque facendo esplicito riferimento alla teoria dell'elasticità. Per alcune configurazioni di strutture criccate, assumendo quindi che il materiale abbia un comportamento isotropo e lineare-elastico è possibile determinare le espressioni analitiche degli sforzi (tensioni) nell'intorno dell'apice della cricca.

Westergaard, Irwin, Sneddon e Williams per primi dimostrarono che se si assume un sistema di coordinate polari (r, θ) con l'origine posta in corrispondenza dell'apice della cricca lo stato di tensione in un qualunque elemento criccato, purché abbia un comportamento lineare elastico, ha la seguente espressione [2]:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) + O[r] \quad (1.1)$$

dove: σ_{ij} = tensore degli sforzi (o tensore delle tensioni)

r e θ = sistema di coordinate definito in figura 1.1

K = costante (parametro che verrà definito “fattore di intensificazione delle tensioni”)

f_{ij} = funzione adimensionale nella variabile θ

$O[r]$ = termini di ordine superiore

Se $r \rightarrow 0$ il primo termine della 1.1 tende all'infinito mentre gli altri termini rimangono costanti o tendono ad annullarsi. L'equazione 1.1 descrive una singolarità alla $\frac{1}{\sqrt{r}}$.

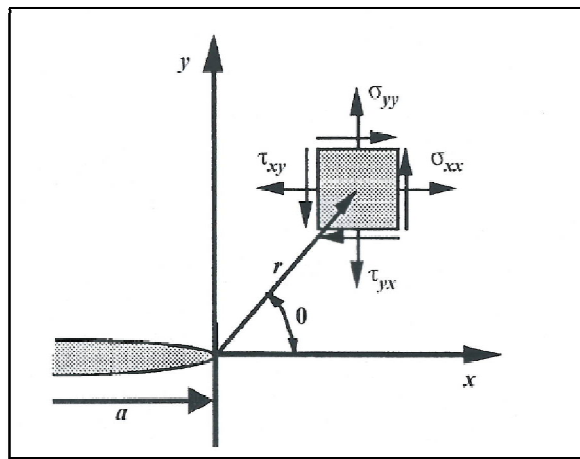


Figura 1.1 Definizione del sistema di coordinate assunto all'apice della cricca.

La relazione prima scritta è del tutto generale, infatti qualunque sia il modo di carico lo sforzo all'apice della cricca è descritto dalla singolarità dell'equazione 1.1. Il valore di K e della funzione f_{ij} dipendono, invece, dal modo di carico.

Si distinguono tre modi di carico, come si vede dalla figura 1.2:

1. il *modo I (opening mode)*, quando il carico è applicato in direzione normale al piano della cricca. Le deformazioni sono simmetriche rispetto ai piani x-y e x-z.
2. il *modo II (sliding mode o shear mode)*, quando il carico è di taglio applicato in direzione parallela al piano della cricca. Le deformazioni sono simmetriche rispetto al piano x-y e antisimmetriche rispetto al piano x-z.
3. il *modo III (tearing mode)*, quando l'azione di taglio è applicata nel piano normale alla cricca. Le deformazioni sono antisimmetriche rispetto ai piani x-y e x-z.

Il modo I di apertura è in realtà il più studiato. Infatti oltre ad essere il caso di carico più comune, il materiale, di sua natura, predilige tale modo di propagazione del difetto in quanto, in genere, è quello che richiede meno energia. Sono comuni anche situazioni di modo misto

(es. modo I-II), anche se con l'evolvere della propagazione della cricca questa di solito sceglie quelle direzioni dove lo stato tensionale introduce puro modo I.

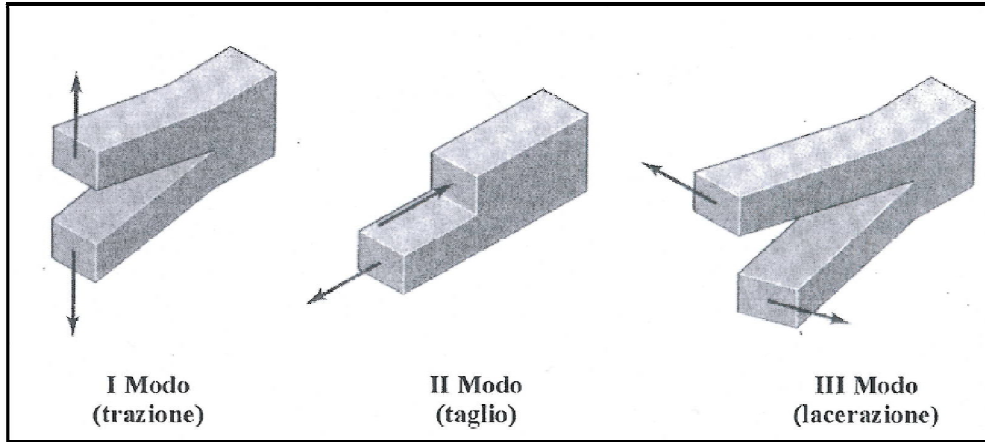


Figura 1.2 Rappresentazione dei tre modi di carico.

1.2.2 Fattore di intensificazione delle tensioni K (SIF) e stati tensionali

K viene chiamato *fattore di intensificazione delle tensioni* (SIF) e per ogni modo di carico ha un pedice diverso, in particolare: K_I , K_{II} , K_{III} . Tale parametro caratterizza l'intensità del campo di tensione, cioè riassume in sé la gravosità del campo tensionale.

La distribuzione degli sforzi all'apice della cricca viene così definita, rispettivamente per il modo I, II e III:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\theta) \quad (1.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\theta)$$

E' bene sottolineare come lo studio di ciascun modo, individualmente considerato, porti alla soluzione di qualunque problema complesso in quanto ogni caso reale può essere ricondotto ad una delle tre situazioni base di figura 1.2 o ad una qualunque combinazione di esse.

Quindi, se il modo di carico è misto, lo stato di sforzo totale è dato da:

$$\sigma_{ij}^{totale} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (1.3)$$

Si consideri ora l'equazione 1.1 e la si adatti alla condizione di modo I puro. Essa risulta:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}^I(\theta) + O[r] \quad (1.4)$$

Si ha che:

$$\text{per } \theta = 0 \rightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}; \tau_{xy} = 0.$$

$$\text{per } r \rightarrow \infty \rightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0.$$

- La soluzione cade in difetto per $\theta = 0$ e $r = 0$, dovendo la σ_{xx} essere in questo caso nulla. Tale problema è dovuto alla singolarità presente. In realtà spostandosi di un valore $r > 0$ piccolo a piacere, dall'apice della cricca la soluzione torna ad essere valida.
- La soluzione cade anche in difetto per $r \rightarrow \infty$, in quanto la σ_{yy} dovrebbe tendere al valore di tensione nominale applicata σ_{nom} e non a zero come prevede la formula 1.4.
- L'espressione dello stato tensionale riportata non vale quindi in tutto il campo della struttura ma solo nelle vicinanze della cricca. Lontano dalla cricca altri termini dovranno aggiungersi, termini di ordine superiore in r , che invece possono essere trascurati nella vicinanza della cricca come accade infatti nella 1.2.

Nella tabella 1.1 sono riportate le espressioni dei campi di sforzo nell'intorno di una cricca caricata secondo modo I e secondo modo II. In tabella 1.2 sono riportate le espressioni degli spostamenti sempre per il modo I e per il modo II. In tabella 1.3, infine, sono riportate le relazioni che forniscono i valori degli sforzi e degli spostamenti per il modo III di carico.

	modo I ²	modo II
σ_{xx}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
σ_{yy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
τ_{xy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
σ_{zz}	0 (sforzo piano) $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (deformazione piana)	0 (sforzo piano) $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (deformazione piana)
τ_{xz}, τ_{yz}	0	0

Tabella 1.1 Tensioni nell'intorno dell'apice di una cricca caricata secondo modo I e modo II in un materiale lineare elastico e isotropo.

² Le equazioni che descrivono i campi di tensione di modo I sono spesso note con il nome di *equazioni di Irwin*. Le condizioni di validità di tali espressioni sono le seguenti:

- 1) Ovviamente carico di modo I
- 2) $r < 0.1a$ dove a corrisponde alla semiampiezza di cricca. Cioè la distanza del punto analizzato dell'apice della cricca non deve essere eccessiva, in quanto lontano dall'apice della cricca il campo reale delle tensioni tende ad un valore costante (nominale), mentre il campo descritto dalle equazioni di Irwin continua a variare con la stessa legge. Questo aspetto verrà ripreso successivamente nella trattazione.
- 3) $\sigma_{nom,g} \leq 0.6\sigma_s$ La tensione nominale misurata sull'area lorda deve essere minore di 0.6 volte la tensione di snervamento del materiale in uso. Sull'apice la tensione assume infatti un valore infinito, pertanto in una zona ristretta si ha plasticizzazione. Ciò che interessa è però che il materiale si possa considerare a comportamento lineare-elastico al di fuori della zona plasticizzata. Perché le equazioni di Irwin siano valide è quindi necessario che la condizione suddetta sia rispettata. Questo aspetto verrà ripreso successivamente nella trattazione.

	modo I	modo II
u_x	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$
u_y	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$
Dove: μ è il modulo di elasticità tangenziale (indicato in molti testi col simbolo G) $k = 3 - 4\nu$ per stato piano di tensione $k = \frac{(3-\nu)}{(1+\nu)}$ per stato piano di deformazione		

Tabella 1.2 Spostamenti nell'intorno dell'apice di una cricca per i modo di carico I e II in un materiale lineare elastico ed isotropo.

modo III
$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
$u_z = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Tabella 1.3 Tensioni e spostamenti nell'intorno dell'apice di una cricca caricata secondo il modo III in un materiale lineare elastico ed isotropo.

Se si considera il modo I di carico, le espressioni delle tensioni vicino all'apice della cricca, riportate in tabella 1.1, lungo l'asse r per $\theta = 0$, in accordo con quanto detto precedentemente risultano:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \end{aligned} \tag{1.5}$$

L'espressione completa dello sforzo σ_{yy} , la quale dovrà quindi interessare anche i termini di ordine superiore, lungo l'asse r per $\theta = 0$ vale invece:

$$\sigma_{yy} = \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\right) + Cr^0 + Dr^{1/2} + \dots \tag{1.6}$$

In figura 1.3 è rappresentato l'andamento degli sforzi descritti dalle equazioni 1.5 e 1.6. Si vede che se r è molto piccolo, il primo termine della equazione 1.6 diventa molto grande (infinito per $r \rightarrow 0$); perciò gli altri termini possono essere trascurati, mentre per r grande gli altri termini dell'equazione non sono più trascurabili. Si può definire quindi una zona in cui la *singolarità è dominante*, dove cioè r è sufficientemente piccolo in modo tale che le tensioni siano ben descritte dalle equazioni 1.5.

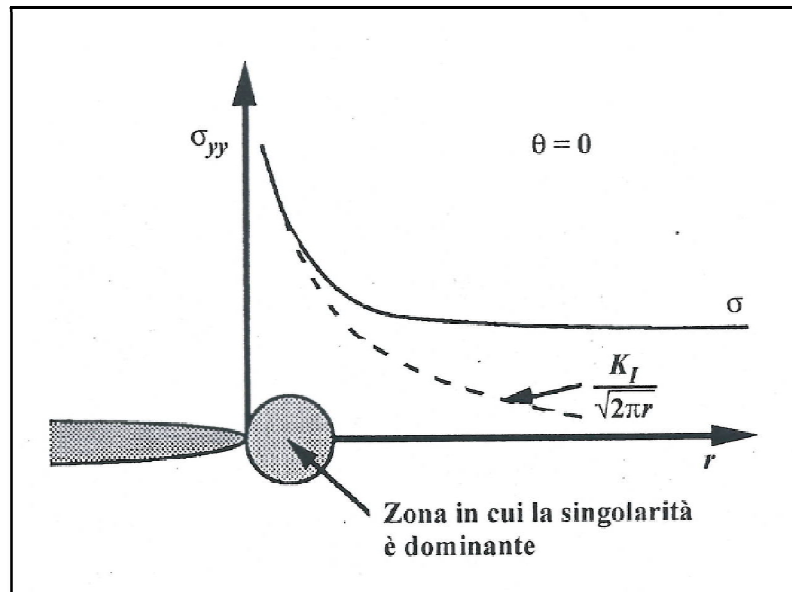


Figura 1.3 Definizione della zona in cui la singolarità è dominante e lo stato di tensione è descritto dal fattore di intensificazione delle tensioni K [2].

L'analisi dimensionale della 1.1 indica che il fattore di intensificazione delle tensioni deve essere direttamente proporzionale alle tensioni nominali e alla radice quadrata di una lunghezza caratteristica $[MPa\sqrt{m}]$. In base ad analisi condotte da Griffith su strutture in vetro contenenti difetti ed a successive estensioni a materiali più duttili, si è trovato che tale lunghezza caratteristica è la lunghezza del difetto. In forma del tutto generale il fattore di intensificazione delle tensioni può essere quindi espresso dalla relazione (Irwin):

$$K_I = \alpha \sigma \sqrt{\pi a} \tag{1.7}$$

$$K_I = Y \sigma \sqrt{a} \text{ con } Y = \alpha \sqrt{\pi}$$

dove:

- α è una funzione adimensionale che prende il nome di fattore di forma e dipende da tutti i fattori geometrici che influenzano lo sforzo all'apice della cricca (cioè dipende dalla geometria del sistema³ (rapporti geometrici), dalla forma e dalla posizione del difetto, oltre che dal tipo di carico).
- σ (meglio indicata con $\sigma_{\text{nom,g}}$) è la tensione nominale misurata sull'area lorda agente in direzione normale al difetto.

³ Nel caso di cricca centrata su piastra infinita (cioè nel caso in cui le dimensioni della piastra sono di un ordine di grandezza superiori a quelle della cricca) il fattore di forma α assume valore unitario. In generale nei casi di elementi di dimensioni finite non esistono soluzioni in forma chiusa del fattore di intensificazione delle tensioni come per il caso di cricca centrata su piastra infinita (frame analitico di Westergaard con interpretazione fisica da parte di Irwin), però in letteratura sono disponibili le funzioni di forma, determinate soprattutto tramite programmi di calcolo numerici, per moltissime geometrie e condizioni di carico.

- a identifica invece la dimensione caratteristica del difetto. In particolare a corrisponde alla semiampiezza della cricca⁴ (figura 1.4).

Si può osservare che nel caso in cui vari la lunghezza della cricca o il valore della tensione nominale dell'organo meccanico cambia solo K_I . Risulta pertanto che il fattore di intensificazione delle tensioni non è una caratteristica del materiale, ma è semplicemente il parametro che individua l'entità del campo di tensione che si ha in prossimità del vertice di cricca.

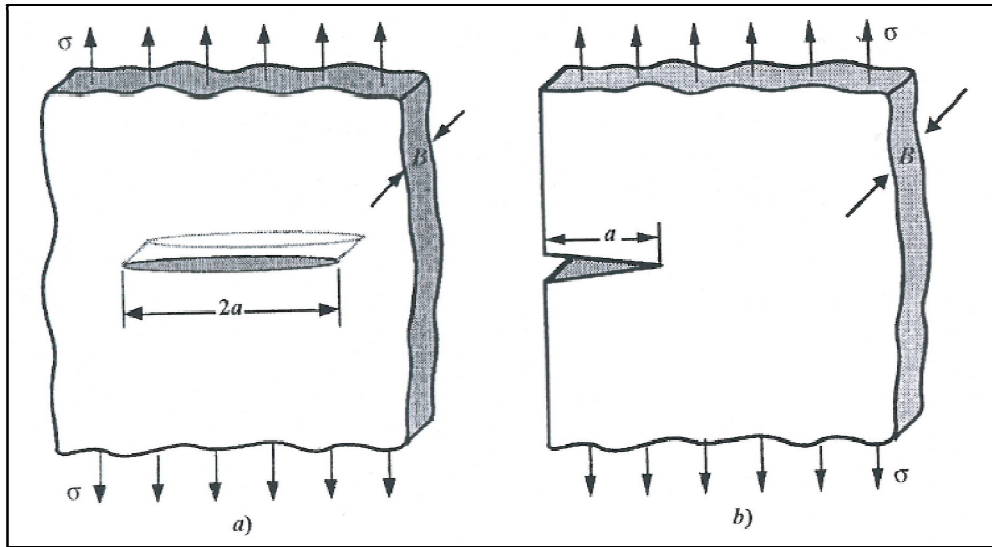


Figura 1.4 a) Cricca passante centrale su una piastra di dimensioni infinite; b) cricca laterale su una piastra infinita [2].

1.2.3 La T-stress

Si ponga nuovamente attenzione all'espressione 1.1. Come detto, per quanto di validità generale, essa riporta solamente le componenti dominanti di tensione in prossimità della cricca ma evidenzia anche la presenza di termini non dominanti. Si potrebbe dimostrare, seguendo l'approccio di Williams, che la formulazione generale (in analogia a quanto già scritto nella 1.6) risulta essere il seguente sviluppo in serie:

$$\sigma_{ij} = A_1 r^{-1/2} f_{ij}^I(\theta) + o_{ij}(r^0) + o_{ij}(r^{1/2}) + \dots \quad (1.8)$$

Il secondo termine a destra dell'uguale, con esponente zero, non è singolare ma nemmeno tende a valori infinitesimi per $r \rightarrow 0$, come invece accade per i successivi termini di ordine superiore (con esponente maggiore di zero). Si può riscrivere la 1.8 con maggior dettaglio sostituendo anche ad A_1 il suo reale valore, cioè $A_1 = K_I/\sqrt{2\pi}$. Si ha quindi:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + T \delta_{ix} \delta_{jx} + O[r] \quad (1.9)$$

⁴ E' utile ricordare la seguente convenzione: tutte le cricche con due apici sono considerate di lunghezza $2a$, mentre quelle con un solo apice sono considerate di lunghezza a .

con δ_{ij} detta delta di Kronecker, ovvero una funzione di due variabili discrete che vale uno per $i = j$ o zero per $i \neq j$ (per capire meglio δ_{ij} , si pensi che la matrice identità $n \times n$ si può scrivere come $[\delta_{ij} | i, j = 1, 2, \dots, n]$). La 1.9 può essere riscritta come segue:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} f_{xx}^I(\theta) & f_{xy}^I(\theta) \\ f_{yx}^I(\theta) & f_{yy}^I(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + O[r] \quad (1.10)$$

dove il primo termine (singolare e dominante in prossimità dell'apice del difetto) rappresenta in forma compatta le equazioni di Irwin per il modo I indicate in tabella 1.1 (si consideri la seguente notazione $\sigma_{xy} = \tau_{xy}$). Questa trattazione però, è svolta allo scopo di evidenziare il secondo termine a destra dell'uguale, generalmente indicato con "termine T" o "T-stress", contenente la tensione non singolare $\sigma_{xx} = T$. Per esempio, una cricca di lunghezza $2a$ posta nel piano x - z e sotto l'azione di un carico remoto uniforme biassiale dato da σ_{xx}^∞ e σ_{yy}^∞ è soggetta a:

$$K_I = \sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi a} \quad \text{e} \quad T = \sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty$$

Sebbene, come già sottolineato, il primo termine a destra dell'uguale nell'espressione 1.10 sia sufficientemente adeguato per descrivere e trattare la maggior parte dei problemi relativi alla crescita di cricche di fatica in campi di tensione lineare elastici, l'omissione del T-stress può indurre significanti errori in alcune situazioni di fatica. Esempi di tali situazioni sono:

- (i) presenza di cricche di fatica di dimensioni ridotte,
- (ii) cricche soggette a carichi ottenuti per combinazione di due o più modalità di apertura I, II, III (*mixed-mode loading*) in cui le tensioni di taglio giacenti nel piano del difetto sono molto maggiori di quelle di trazione,
- (iii) piccole cricche di poco inclinate rispetto alle direzioni del carico di trazione.

Inoltre, le differenti geometrie dei provini possono influenzare in vari modi il comportamento di snervamento in prossimità dell'apice del difetto a causa delle differenze dei valori assunti proprio dal termine T-stress.

1.2.4 La propagazione instabile della cricca

La propagazione instabile della cricca avviene quando gli sforzi all'apice della cricca stessa raggiungono un valore critico, troppo alto perché il materiale li possa sopportare. Poiché lo stato di sforzo è determinato dal fattore di intensificazione delle tensioni si può anche dire che la frattura si manifesta se K raggiunge un valore critico, che viene chiamato K_c (*fracture toughness, o resistenza a frattura, o tenacità*). La condizione di propagazione instabile della cricca si raggiunge quindi se:

$$K_I = K_c \quad (1.11)$$

Per una piastra infinita caratterizzata da una cricca centrale di ampiezza $2a$ (vedi figura 1.4a) è valida l'espressione

$$K_C = \sigma_R \sqrt{\pi a} \quad (1.12)$$

dove σ_R corrisponde alle tensione di rottura misurata sull'area lorda in presenza di un difetto di ampiezza $2a$.

I principali parametri da cui dipende K_C sono:

- 1) spessore della piastra
- 2) tipo di materiale
- 3) temperatura

Per diversi spessori t della piastra utilizzata per la determinazione del K_C si trovano valori di K_C che variano secondo, ad esempio, le curve rappresentate in figura 1.5 e 1.6. Si osserva che per valori grandi dello spessore t la curva tende asintoticamente ad un valore minimo di K_C che viene indicato col simbolo K_{Ic} (*plane strain fracture toughness o resistenza a rottura nel caso di deformazione piana*).

Le reali condizioni di utilizzo di un organo meccanico spesso non si conoscono e quindi non si può ricavare il valore più adatto di K_C , di conseguenza i manuali in genere riportano i valori di K_{Ic} , così che sia consentita una progettazione in condizioni di sicurezza. Le norme ASTM prevedono una formula per lo spessore minimo del provino in corrispondenza del quale si è sicuri di aver raggiunto l'asintoto K_{Ic} . Tale formula è riportata in figura 1.5

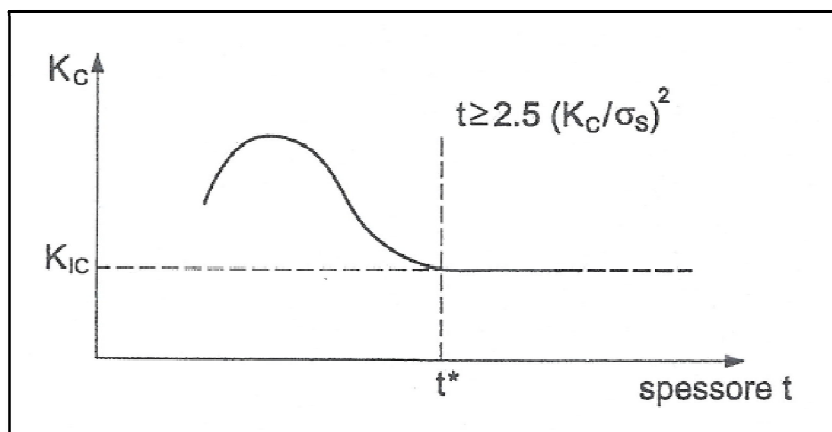


Figura 1.5 Possibile andamento della tenacità a frattura K_C al variare dello spessore [7].

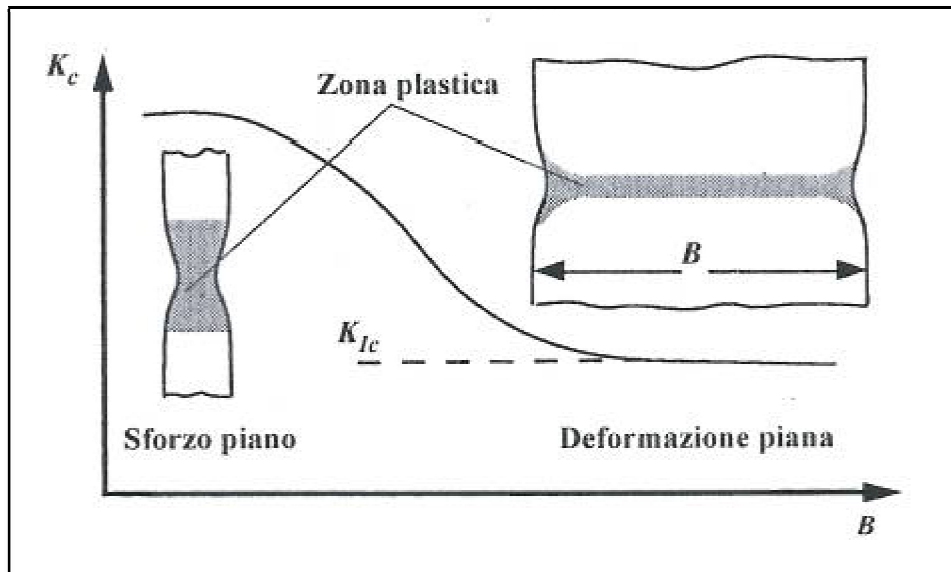


Figura 1.6 Influenza dello spessore sui valori di tenacità [2].

Si riporta in figura 1.7 un grafico che indica come varia K_{Ic} in funzione del carico di snervamento σ_{sn} per varie classi di materiali (leghe di alluminio, leghe di titanio e acciaio). In generale, per tutte le classi di materiali, si può osservare che all'aumentare del carico di snervamento diminuisce il valore di K_{Ic} . Si riporta invece in figura 1.8 un esempio di un possibile andamento di K_{Ic} con la temperatura. Si vede come da un valore circa costante di K_{Ic} a basse temperature, si passa ad un forte gradiente in prossimità di 0°C . La curva al crescere della temperatura non continua a salire, ma l'andamento si stabilizza nuovamente. Da sottolineare è il notevole salto dei valori di K_{Ic} al variare della temperatura attorno a 0°C . In conseguenza di questo fenomeno una struttura a 20°C può avere un certo comportamento (resistere alla propagazione della cricca), mentre a temperature molto basse ($-30\div 40^{\circ}\text{C}$) può manifestare un comportamento del tutto diverso (valori di K_{Ic} estremamente bassi e quindi maggiore possibilità di rottura). In sostanza una struttura con cricche o difetti che resiste a temperatura ambiente ordinaria, non è detto resista altrettanto bene nel caso in cui la temperatura di esercizio scenda, eccezionalmente, a temperature molto più basse, per cui possono verificarsi in tali condizioni pericolosissime rotture di schianto, in assenza di qualunque preavviso. A seconda del tipo di materiale usato il "gradino" che si manifesta nella curva può essere traslato a destra o a sinistra. Questa proprietà è molto importante in sede di progetto per la scelta del materiale più idoneo. In figura 1.8, oltre alla curva di K_{Ic} è rappresentato, al diminuire della temperatura, anche l'andamento di σ_s .

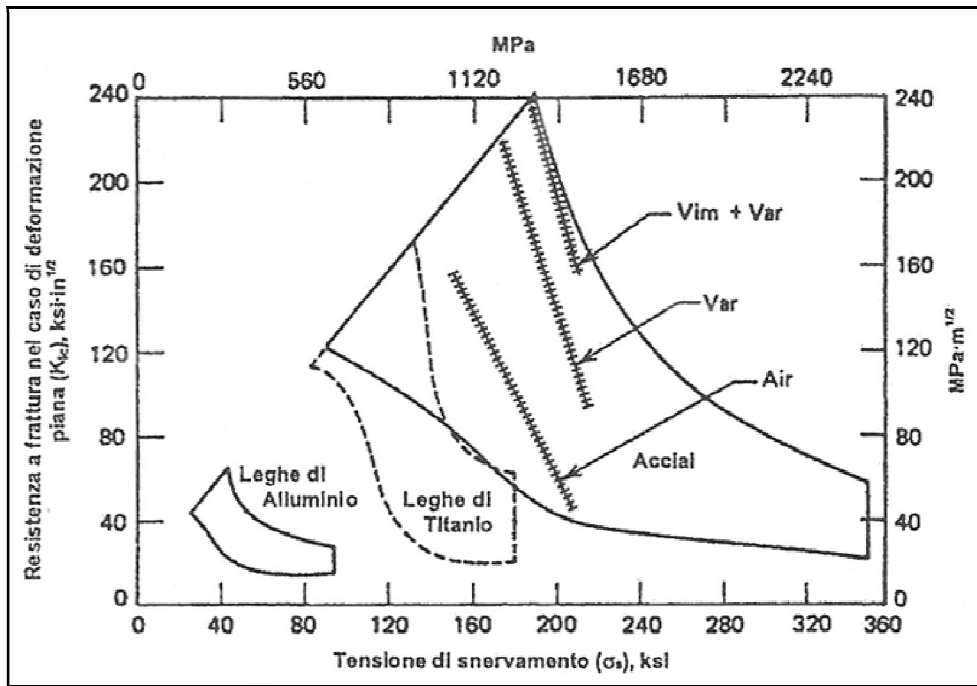


Figura 1.7 Influenza del tipo di materiale sul K_{Ic} [7].

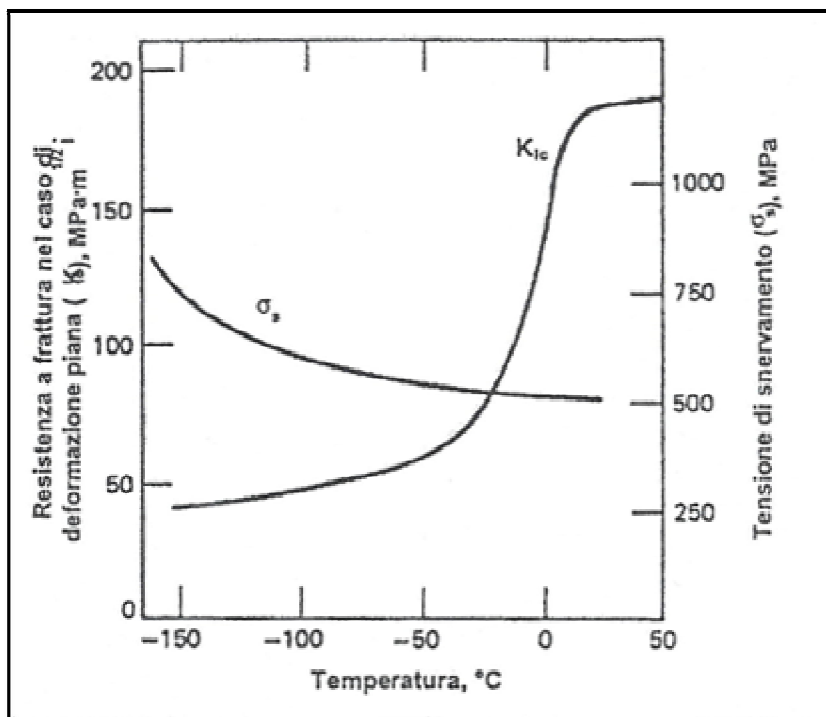


Figura 1.8 Influenza della temperatura sul K_{Ic} e sulla σ_{sn} [7].

1.3 La MFLE in presenza di sollecitazioni a fatica

1.3.1 Introduzione

La fatica è una modalità di sollecitazione di un materiale o struttura mediante carichi genericamente variabili nel tempo (sia in modo ciclico che casuale). Per danneggiamento o

rottura a fatica si intende il fenomeno di rottura che interviene in un materiale sollecitato a fatica, in cui i valori della storia o spettro di carico non raggiungono mai un livello sufficiente da causare danneggiamento se applicati singolarmente in modalità statica sul componente o materiale. Il meccanismo di rottura a fatica non è legato ad un generalizzato degrado del materiale, bensì ad un progressivo e localizzato processo di nucleazione e crescita di un difetto sino alle condizioni di propagazione instabile.

1.3.2 Le fasi del danneggiamento

Nell'ambito della vita a fatica di un materiale o componente "integro", si distinguono due fasi fondamentali:

1) Nucleazione del difetto: in questa fase i difetti si identificano inizialmente come micro-cricche o difetti microstrutturali. Questi sono determinati in genere da inclusioni, dislocazione del reticolo cristallino, precipitati, micro-vuoti, zone con cambiamenti di fase, ecc... Una consistente parte della vita a fatica del componente è spesa nella nucleazione di difetti macrostrutturali (macro-cricche) a partire da difetti microstrutturali, ad opera dei carichi variabili. Le cause di nucleazione e crescita delle microcricche ad opera di carichi di fatica rappresentano un aspetto di fondamentale importanza nell'analisi strutturale in quanto tali fasi caratterizzano una parte preponderante della vita complessiva di un componente. Inoltre conoscere le dinamiche di nucleazione di difetti macrostrutturali è essenziale per migliorare i materiali e prevenirne il danneggiamento a fatica;

2) Propagazione del difetto: quando il difetto raggiunge tale fase esso ha dimensioni sufficienti perché la sua crescita possa essere correlata alle proprietà macroscopiche del continuo. Anche i parametri di frattura della MFLE saranno quindi idonei a descrivere le condizioni di crescita del difetto (sia statica che a fatica). Si noti che sebbene in condizioni "ideali" le macrocricche sono generate per nucleazione di difetti microstrutturali, si verifica più facilmente il caso in cui una struttura presenti già dei difetti di tipo macroscopico o prossimi ad essere identificati come tali; si pensi ad esempio a vuoti, porosità, intagli dovuti ad una cattiva finitura superficiale, difetti tecnologici in processi particolarmente delicati come ad esempio quelli di saldatura, che, a causa dei carichi variabili, nucleano fino a diventare cricche, le quali possono crescere fino ad una dimensioni critica tale da provocare la propagazione instabile del difetto, che può portare al cedimento del componente. Può quindi succedere che sia presente una cricca di dimensioni già considerevoli, in tal caso si deve considerare solo la fase di propagazione e non quella di nucleazione.

1.3.3 Le tipologie di approccio alla progettazione a fatica

Lo studio sistematico e la progettazione di un componente perché esso resista a definiti carichi di fatica può essere condotto seguendo 3 approcci distinti:

- 1) Approccio a vita infinita
- 2) Approccio fenomenologico o *safe-life*
- 3) Approccio *fail-safe* (in particolare *damage tolerant*)

Il primo è il metodo più vecchio e collaudato, col quale sono stati iniziati i calcoli di componenti sollecitati a fatica dopo che è stata scoperta l'esistenza del limite di fatica. Tale approccio si basa sulla scelta di far lavorare il componente mantenendo la sollecitazione massima al di sotto del limite di fatica garantendo idealmente così al componente una vita illimitata. Il materiale lavora quindi di regola in campo elastico. L'ipotesi sottintesa è che nel limite di fatica sono "inclusi" tutti i fattori che intervengono sul materiale (discontinuità, difetti, cricche preesistenti) ai quali, con questa impostazione, il progettista non presta attenzione. Non sempre però conviene dimensionare a vita infinita componenti che, in tutta la loro vita utile, o nella vita utile della macchina della quale fanno parte, saranno soggetti a un numero di cicli nettamente inferiore. Utilizzando il diagramma di Wöhler è possibile fare in modo che il componente sia sollecitato a livelli superiori al limite di fatica per durate inferiori alla cosiddetta "durata illimitata". Questo modo di progettare prende il nome appunto di *safe-life*. Questi primi due approcci fanno riferimento a tecniche e teorie quali: curve di Wöhler o curve σ -N, diagrammi di Goodman, fatica oligociclica, fatica multiassiale, ecc.

Più recentemente, in seguito ad una serie di eventi storici, è stato sviluppato un terzo originale approccio alla progettazione di un componente sollecitato da carichi a fatica. Tale approccio, denominato *fail-safe* ha avuto il suo massimo sviluppo in campo aeronautico dove è indispensabile ridurre al massimo i pesi. La caratteristica innovativa di tale filosofia di progettazione è quella di considerare la presenza di eventuali difetti nella struttura e di valutarne la pericolosità. Entrando più nello specifico l'approccio detto *damage tolerant* è un affinamento di quello *fail-safe* e utilizza i parametri della frattura definiti dalla Meccanica della Frattura per controllare la pericolosità dei difetti e valutarne la possibilità e le eventuali velocità di crescita per evitare di arrivare alle dimensioni critiche del difetto per le quali si incorre nel cedimento. Questo approccio richiede continui controlli sulle strutture considerate per evidenziare la presenza e la dimensione dei difetti. Con i concetti della MFLE, nello specifico dalla conoscenza della tenacità a frattura K_C , è possibile sia determinare la lunghezza critica del difetto a_c per data sollecitazione, che la sollecitazione critica per data dimensione del difetto. Per mezzo delle leggi di propagazione del difetto a fatica (che saranno

illustrate in seguito) è possibile determinare l'evoluzione del difetto nel tempo per data sollecitazione di fatica o la diminuzione di resistenza residua (sollecitazione massima applicabile) per valori crescenti di dimensione della cricca.

1.3.4 La propagazione dei difetti dovuta a sollecitazioni di fatica e la legge di Paris

Se in una struttura è presente un difetto e i carichi applicati sono variabili nel tempo, tra un valore minimo P_{min} e uno massimo P_{max} , il difetto può propagare. Il materiale all'apice del difetto plasticizza ciclicamente e al crescere del difetto si forma una striscia di materiale plasticizzato, che viene chiamata "onda plastica" o "scia plastica" e che ha l'aspetto riportato in figura 1.9.

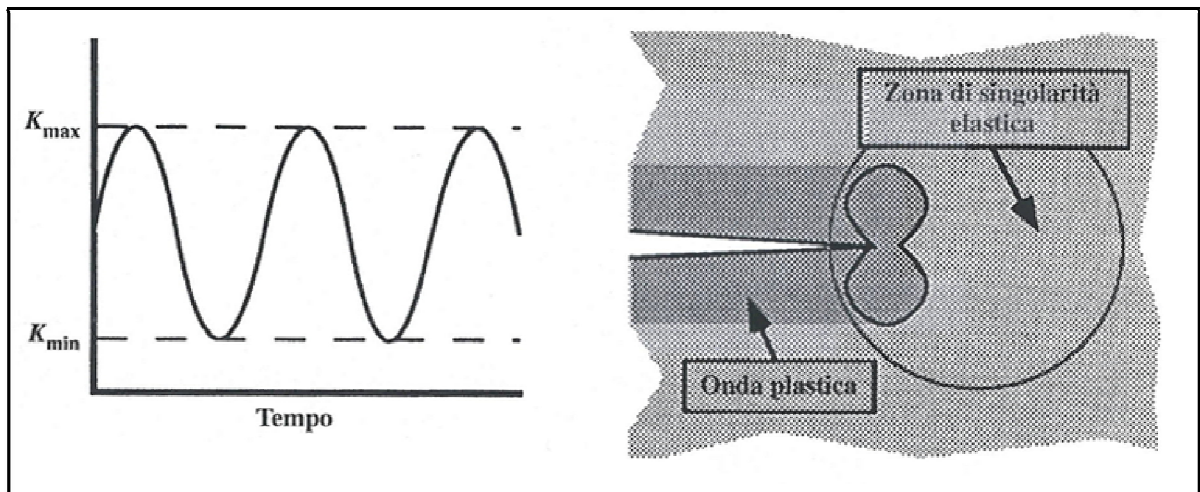


Figura 1.9 Propagazione di un difetto in presenza di plasticità poco estesa.

Se la zona plasticizzata è piccola e compresa nella zona di singolarità elastica è possibile definire in modo univoco il fattore di intensificazione degli sforzi per poter caratterizzare con questo parametro la crescita a fatica del difetto stesso. Da un punto di vista fisico in pratica si vede, studiando i meccanismi di crescita della cricca, che ad ogni ciclo di carico corrisponde la propagazione della cricca stessa di una dimensione Δa . Uno dei possibili modelli di propagazione è riportato in figura 1.10a, in cui sono schematizzati gli scorrimenti e gli arrotondamenti dell'apice della cricca durante la fase di carico, mentre allo scarico l'apice della cricca ritorna acuto ripristinando le condizioni iniziali. Si può affermare così che l'accrescimento del difetto Δa per ciclo aumenta con il valore dell'ampiezza di sforzo $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$, che corrisponde all'ampiezza di carico $\Delta P = P_{max} - P_{min}$, che infatti provoca una maggiore apertura della cricca. Questa a sua volta dipende dal valore del fattore di intensificazione K.

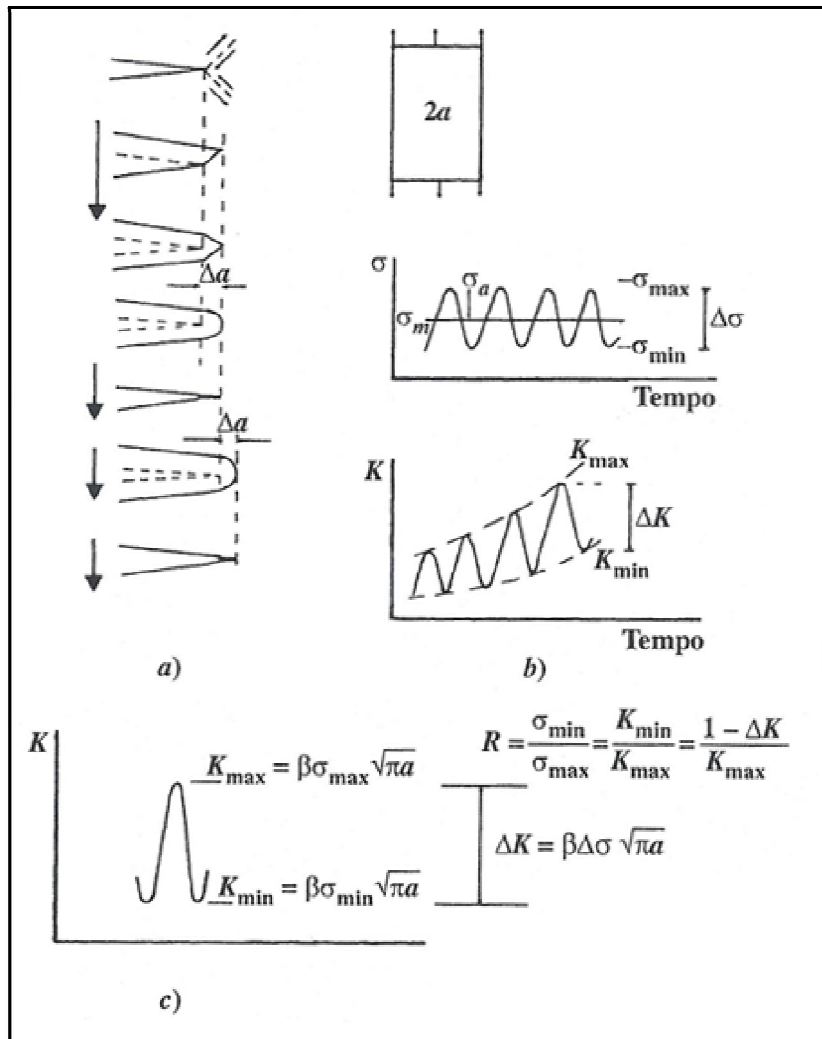


Figura 1.10 a) meccanismi di propagazione; b) andamento degli sforzi e del fattore di intensificazione degli sforzi rispetto al tempo; c) definizione di R e di ΔK .

Con la Meccanica della Frattura si è quindi in grado di seguire e descrivere l'evoluzione a fatica di un difetto quando questo ha raggiunto certe dimensioni minime e quando la zona plasticizzata all'apice è compresa nella zona governata dalla singolarità.

Si ricordi l'equazione fondamentale di Irwin che definisce il SIF K_I per una cricca centrata su una piastra infinita:

$$K_I = \sigma_{nom,g} \sqrt{\pi a} \quad (1.13)$$

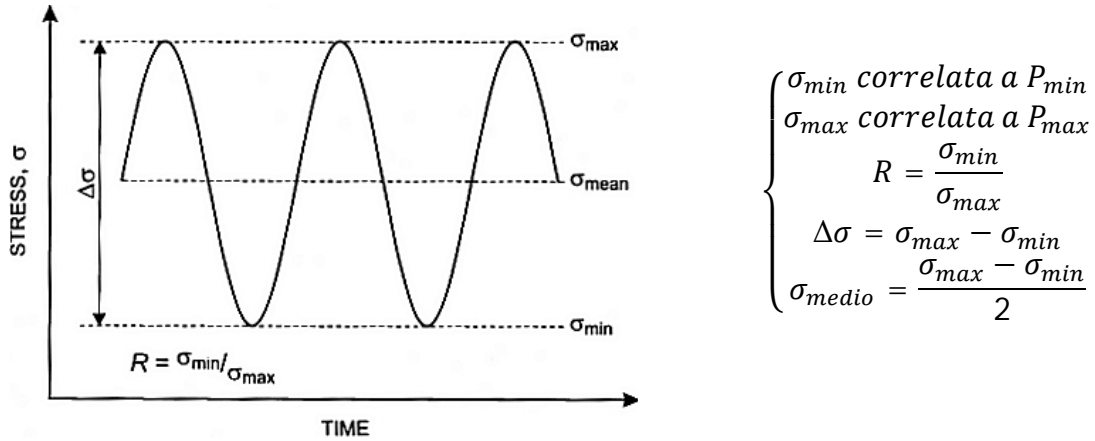
dove si ricordi con il simbolo $\sigma_{nom,g}$ si intende la tensione nominale misurata sull'area lorda della sezione della provetta e a corrisponde alla semiampiezza di cricca.

Tale formula è stata successivamente aggiornata per essere adattata a quei casi in cui la lunghezza della cricca è confrontabile con le dimensioni della piastra.

$$K_I = \beta \sigma_{nom,g} \sqrt{\pi a} \quad (1.14)$$

In tal caso β corrisponde al fattore di forma che, come già detto, tiene conto delle dimensioni della piastra rispetto a quelle della cricca.

Si prenda in riferimento un carico ciclico di tipo sinusoidale (con ampiezza e frequenza costanti); i parametri che definiscono le caratteristiche del ciclo sono indicati qui sotto. In particolare bastano due valori tra i cinque possibili (σ_{min} , σ_{max} , R , $\Delta\sigma$, σ_{medio} (σ_{mean})) per definire univocamente le caratteristiche del ciclo.



Durante un ciclo di carico K varia da un valore minimo:

$$K_{min} = \sigma_{min} \beta \sqrt{\pi a} \quad (1.15)$$

ad un valore massimo:

$$K_{max} = \sigma_{max} \beta \sqrt{\pi a} \quad (1.16)$$

Se ci si riferisce al caso di una sollecitazione non più statica bensì di fatica, la (1.14) può essere aggiornata come segue:

$$\Delta K_I = \beta \cdot \Delta \sigma_{nom,g} \sqrt{\pi a} \quad (1.17)$$

dove $\Delta \sigma_{nom,g}$ è la variazione della tensione $\Delta \sigma_{nom,g} = \sigma_{max} - \sigma_{min}$.

Si considera quindi ora non il valore del SIF K_I bensì il suo range di variazione indicato per l'appunto col simbolo ΔK_I . La velocità di crescita del difetto è così legata al valore di ΔK e di K_{max} . Se si definisce il rapporto tra i fattori di intensificazione delle tensioni come:

$$R = \frac{K_{min}}{K_{max}} \quad (1.18)$$

si può certamente affermare che la velocità di propagazione dipende da ΔK e R . L'uso di questa coppia di parametri è più conveniente rispetto a quella ΔK e K_{max} , infatti quest'ultimo parametro varia al variare della dimensione della cricca, mentre R , in caso di ampiezza costante del carico, rimane costante.

La velocità di propagazione, da/dN , è quindi dipendente da ΔK e da R :

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R) \quad (1.19)$$

Non si può però conoscere a priori come da/dN dipenda da ΔK e da R . E' necessario infatti eseguire prove sperimentali e misurare la velocità di propagazione in funzione di ΔK e di R . In figura 1.11 è riportato lo schema di una prova di propagazione di una cricca in una lastra, mantenendo costante il valore di R . Durante la prova la dimensione del difetto a viene continuamente misurata in modo da ottenerne l'andamento rispetto al numero di cicli di carico N .

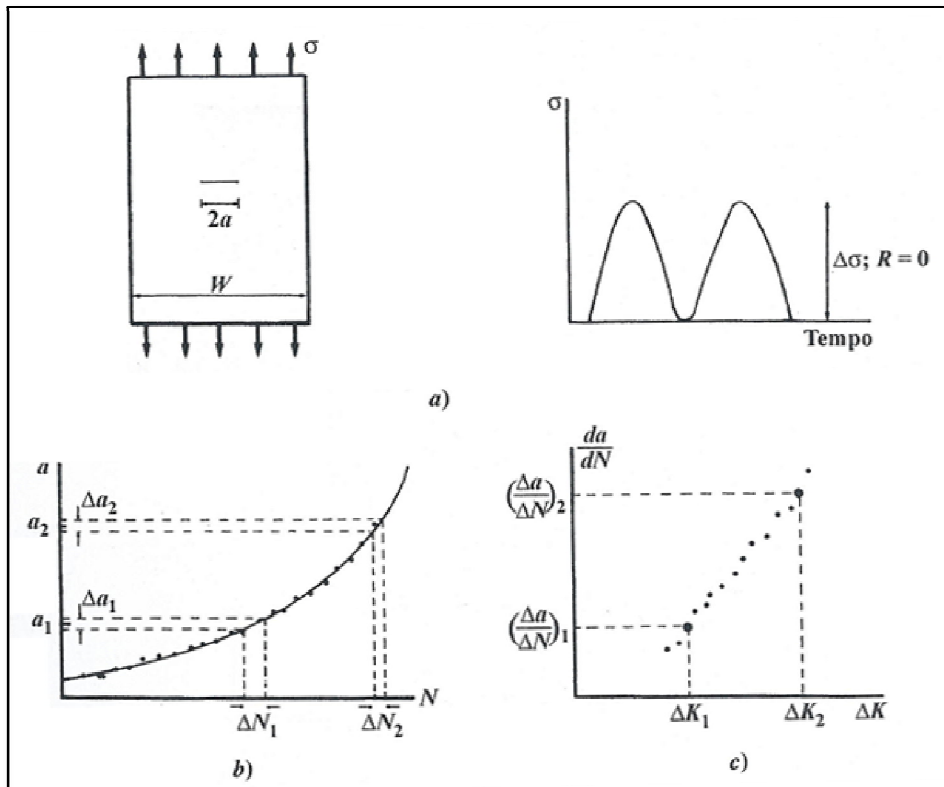


Figura 1.11 Schema di una prova di propagazione: a) lastra con difetto passante centrale sollecitata da uno sforzo variabile; b) determinazione sperimentale della curva $a-N$ e definizione degli intervalli Δa e ΔN ; c) definizione di ΔK e dell'andamento di da/dN rispetto a ΔK .

In questo diagramma vengono considerati più intervalli $\Delta N-\Delta a$ e per ognuno di questi la velocità di crescita del difetto, $\Delta a/\Delta N$, viene considerata costante. Se è noto il fattore di forma β , è possibile calcolare per ogni intervallo il valore di ΔK in corrispondenza di un determinato valore della dimensione del difetto, per esempio il valore medio, che nell'intervallo i -esimo è calcolato come: $a_{im} = (a_{i+1} + a_i)/2$. In questo modo ad ogni valore $\Delta a/\Delta N$ viene associato un valore di ΔK ed è possibile determinare l'andamento della velocità di propagazione, da/dN , in funzione del fattore di intensificazione delle tensioni, ΔK .

In 1.12 è riportato un tipico diagramma velocità di propagazione di un difetto in funzione dell'ampiezza del range del fattore di intensificazione delle tensioni ΔK .

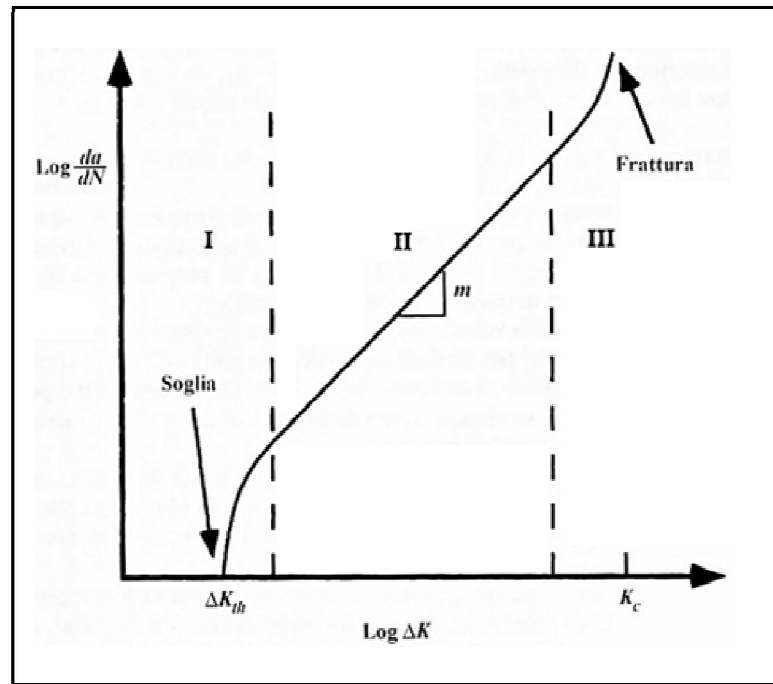


Figura 1.12 Tipico andamento della velocità di propagazione di una cricca: si distinguono le tre zone caratterizzate da diverso comportamento.

Si possono individuare tre regioni a diverso comportamento.

I zona – per velocità di propagazione molto basse, la curva diventa molto ripida e tende a un valore verticale, detto ΔK_{th} , fattore di intensificazione delle tensioni di soglia, valore al di sotto del quale non si ha propagazione apprezzabile dei difetti;

II zona – il legame tra la velocità di propagazione e il fattore di intensificazione degli sforzi è rappresentabile con una retta in un diagramma doppio logaritmico. La relazione che rappresenta questa retta è:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (1.20)$$

dove C ed m sono costanti caratteristiche del materiale, determinate mediante prove eseguite su provini.

L'equazione 1.20 è chiamata legge di Paris, dal nome del ricercatore che per primo negli anni '60 la utilizzò, ed è molto importante, infatti tutte le volte che in una struttura si hanno certi valori di ΔK e di R il materiale risponde con la stessa velocità di crescita del difetto. E' possibile così estendere i risultati delle prove condotte su provini a qualunque struttura.

III zona – la curva diventa di nuovo molto ripida, a causa di una crescita molto veloce del difetto prima della rottura finale dei provini. Se lo spessore e le dimensioni dei provini sono tali da avere zone plasticizzate di dimensioni ridotte la curva tende asintoticamente al valore della tenacità del materiale, K_{Ic} . Se le plasticizzazioni sono invece più estese la definizione di K in questa zona può essere impropria.

Per determinare il valore delle costanti C ed m si devono condurre diverse prove variando il valore della sollecitazione applicata. In figura 1.13a sono riportati i risultati di una serie di prove eseguite su un acciaio AISI 4340 variando il carico applicato. In figura 1.13b sono riportati, invece, i risultati in termini di velocità di propagazione in funzione dell'ampiezza del fattore di intensificazione delle tensioni ottenuti da prove sperimentali.

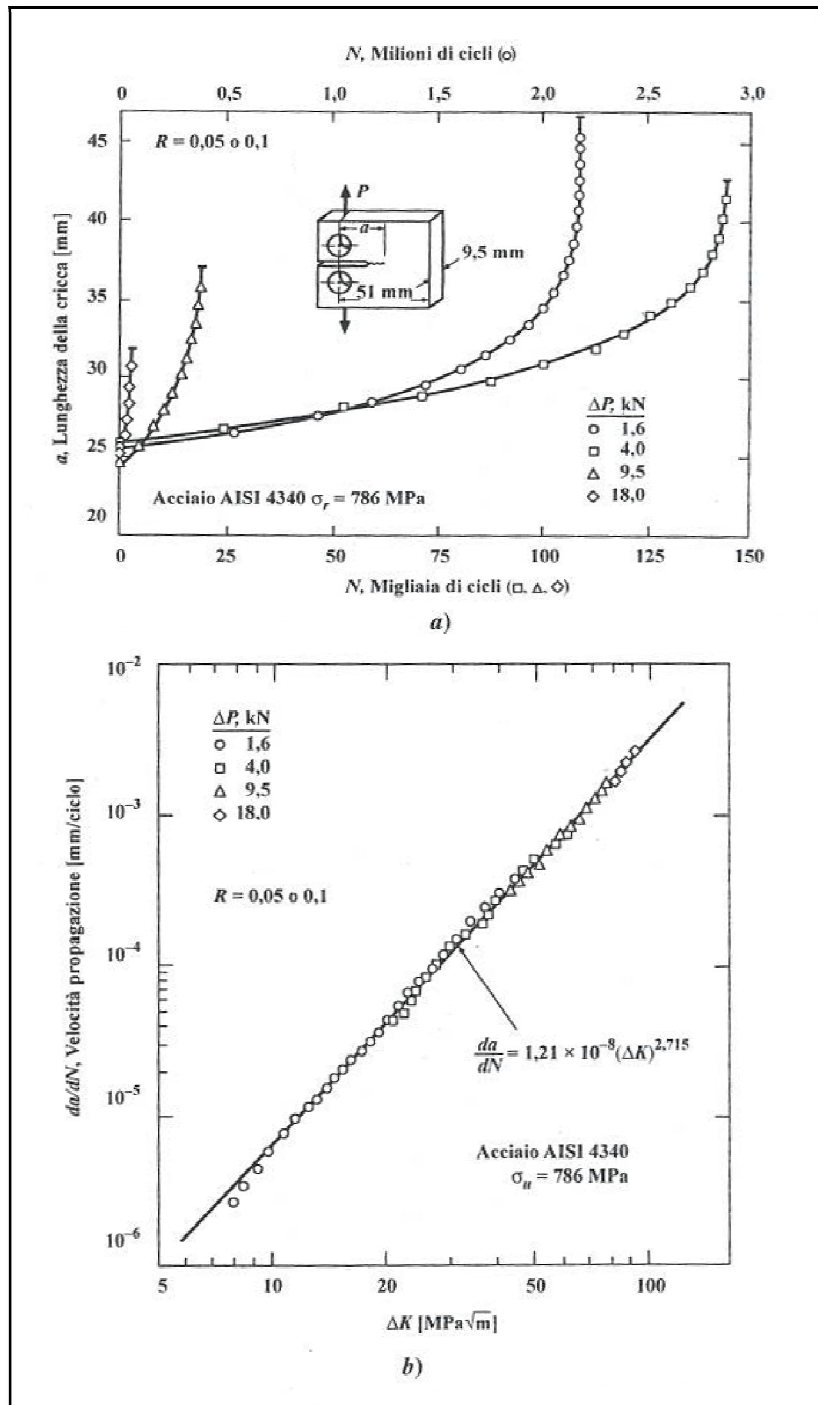


Figura 1.13 a) avanzamento del difetto in funzione del numero di cicli al variare del carico applicato; b) andamento della velocità di propagazione in funzione del fattore di intensificazione degli sforzi per l'acciaio AISI 4340 [8].

Si vede che i valori della velocità di propagazione non sono influenzati dal valore del carico applicato. Infatti per un dato materiale, una volta definite le condizioni di prova (R , frequenza,

condizioni ambientali) la velocità di propagazione dipende solo dal valore di ΔK e anche se si modificano le dimensioni dei provini si devono ottenere gli stessi valori dei coefficienti C ed m .

Il valore di R , invece, influenza notevolmente la velocità di crescita dei difetti, infatti all'aumentare di questo parametro anche da/dN aumenta, spostando verso l'alto le curve, che però nel diagramma doppio logaritmico si mantengono parallele, con la stessa inclinazione m (figura 1.14). Dalla stessa figura si può vedere come anche il valore di soglia ΔK_{th} sia influenzato da R .

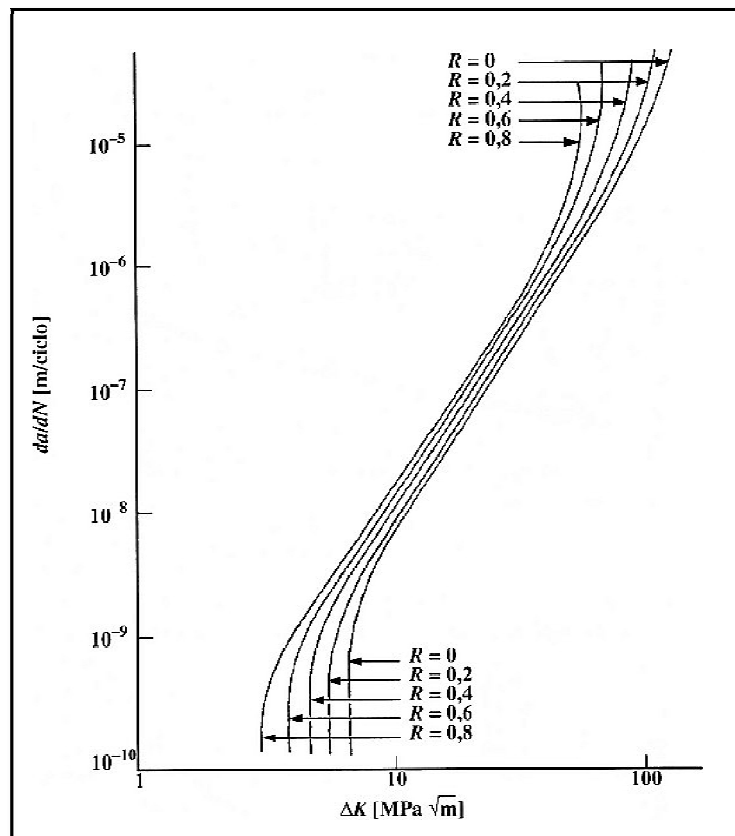


Figura 1.14 Influenza di R sulla velocità di crescita dei difetti [2].

Sebbene la più semplice, la legge di Paris non è l'unica formulazione analitica disponibile per descrivere la crescita a fatica di una cricca. Altre leggi sono state proposte in letteratura, la gran parte delle quali avente natura qualitativa (approccio fenomenologico), ovvero determinate sulla loro più o meno migliore abilità di interpolare bene i dati sperimentali ricavati per certi materiali sollecitati a fatica. Come si vedrà in seguito, mediante tali relazioni è possibile, previa integrazione, calcolare la vita residua a fatica di un componente di materiale e lunghezza di cricca noti.

Come detto, la legge di Paris è molto utilizzata perché è semplice e compatta, non considera però l'effetto di R e schematizza solo il comportamento della fase II di propagazione. Si

riportano molto brevemente qui di seguito altre leggi di propagazione presenti in letteratura che considerano più parametri rispetto alla legge di Paris, ma che sono in genere più complesse.

1.3.4.1 Legge di Walker

Walker per tener conto dell'effetto di R, trascurato della legge di Paris, considera la seguente relazione:

$$\overline{\Delta K} = K_{max}(1 - R)^\gamma \quad (1.21)$$

dove: γ è una costante del materiale. K_{max} ed R sono i parametri che caratterizzano il particolare ciclo di carico. $\overline{\Delta K}$ è il fattore di intensificazione delle tensioni, a R=0, che determina la stessa velocità di propagazione, da/dN , che si ottiene con il ciclo di carico definito da K_{max} e R. Considerando:

$$R = \frac{K_{min}}{K_{max}} = \frac{K_{max} - \Delta K}{K_{max}} \text{ con } K_{max} = \frac{\Delta K}{(1 - R)} \quad (1.22)$$

dalla 1.22 si può ottenere:

$$\overline{\Delta K} = \frac{\Delta K}{(1 - R)^{1-\gamma}} \quad (1.23)$$

Se le costanti C ed m, nel caso particolare di R=0, sono indicate con C_1 e m_1 :

$$\frac{da}{dN} = C_1 \Delta K^{m_1} \text{ per } R = 0 \quad (1.24)$$

poiché $\overline{\Delta K}$ è stato definito per R=0 si può scrivere:

$$\frac{da}{dN} = C_1 \overline{\Delta K}^{m_1} \quad (1.25)$$

e quindi:

$$\frac{da}{dN} = C_1 \left[\frac{\Delta K}{(1 - R)^{1-\gamma}} \right]^{m_1} \quad (1.26)$$

da cui:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_1}{(1 - R)^{m_1(1-\gamma)}} \Delta K^{m_1} \quad (1.27)$$

Quest'ultima può essere riscritta come:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \text{ con } C = \frac{C_1}{(1 - R)^{m_1(1-\gamma)}} \text{ e } m = m_1 \quad (1.28)$$

Questa equazione rappresenta così una famiglia di curve con la stessa pendenza m, che quindi non è influenzata da R, e con una diversa intercetta C.

1.3.4.2 Legge di Forman

Questa legge descrive la propagazione nella seconda e terza fase, considerando ancora l'effetto di R:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_2 \Delta K^{m_2}}{(1-R)K_{Ic} - \Delta K} = \frac{C_2 \Delta K^{m_2}}{(1-R)(K_{Ic} - K_{max})} \quad (1.29)$$

Quando il K_{max} tende al valore della tenacità del materiale, il denominatore della 1.29 tende a zero e quindi la velocità di propagazione tende all'infinito.

1.3.4.3 Legge di Forman modificata

La relazione precedente è modificata in modo da rappresentare anche la propagazione nella prima fase:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_2 \Delta K^{m_2} (\Delta K - \Delta K_{th})^{0,5}}{(1-R)(K_{Ic} - K_{max})} \quad (1.30)$$

Per valori di ΔK che si avvicinano a ΔK_{th} la velocità di propagazione tende ad annullarsi, riuscendo così a riprodurre anche la prima fase.

1.3.4.4 Legge di McEvil

Legge di McEvily è un'altra legge in grado di descrivere l'intero campo di propagazione a fatica ovvero le regioni I, II e III.

$$\frac{da}{dN} = C_1 (\Delta K - \Delta K_{th})^2 \left(1 + \frac{\Delta K}{K_c - K_{max}} \right) \quad (1.31)$$

L'importanza delle varie leggi di interpolazione dei dati sperimentali di propagazione dei difetti sta soprattutto nella loro utilità nel determinare stime del tempo di crescita della cricca (mediante integrazione analitica o numerica).

1.3.5 Stima della vita a fatica per sollecitazioni ad ampiezza costante

Per determinare la vita di un elemento meccanico in cui è presente un difetto occorre eseguire un'integrazione, infatti, anche se $\Delta\sigma$ è costante, ΔK aumenta all'aumentare della lunghezza del difetto a :

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R)$$

$$N_{if} = \int_{N_i}^{N_f} dN = N_f - N_i = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{f(\Delta K, R)} \quad (1.32)$$

Questo integrale fornisce il numero di cicli richiesto perché la cricca propaghi da a_i ad a_f . In certi casi è possibile ottenere una soluzione in forma chiusa.

Essendo:

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m \quad (1.33)$$

$$\Delta K = \beta\Delta\sigma\sqrt{\pi a}$$

se C , β , $\Delta\sigma$, m sono costanti si può scrivere:

$$N_{if} = \frac{a_f^{1-\frac{m}{2}} - a_i^{1-\frac{m}{2}}}{C(\beta\Delta\sigma\sqrt{\pi})\left(1 - \frac{m}{2}\right)} \text{ con } m \neq 2 \quad (1.34)$$

Si potrebbe dimostrare che a_i è il termine più influente sul valore di N_{if} .

Quando β non può essere considerato costante non si riesce a trovare una soluzione in forma chiusa e si deve eseguire una integrazione numerica. Partendo dalla lunghezza iniziale del difetto, a_i , si considera un piccolo incremento del difetto, Δa_1 . Si valuta la dimensione media del difetto ($a_{1m} = a_i + \Delta a_1/2$), ed il valore della funzione di forma $\beta(a_{1m})$, in corrispondenza della dimensione media del difetto. Si ricava poi l'ampiezza del fattore di intensificazione delle tensioni: $\Delta K = \beta(a_{1m})\Delta\sigma\sqrt{\pi a_{1m}}$. Noti i parametri della legge di Paris si può calcolare la

velocità di crescita del difetto in questo primo intervallo: $\left(\frac{da}{dN}\right)_1 = C\Delta K_1^m$ e il numero di cicli necessari perché il difetto avanzi di Δa_1 alla velocità $\left(\frac{da}{dN}\right)_1$: $\Delta N_1 = \frac{\Delta a_1}{\left(\frac{da}{dN}\right)_1}$. A questo punto si

considera l'intervallo successivo Δa_2 e si ripetono i calcoli eseguiti nell'intervallo precedente fino a trovare un valore ΔN_2 . Il procedimento viene ripetuto fino ad arrivare alla dimensione finale del difetto, a_f . La somma di tutti i contributi ΔN fornisce il valore di N_{if} , il numero di cicli di carico necessari per fare propagare il difetto da a_i ad a_f .

La Plasticità ed il fenomeno del Crack Closure

Capitolo 2

2.1 Introduzione

E' stato detto nel capitolo 1 che le tensioni all'apice di una cricca tendono all'infinito. In realtà, in materiali che presentano una certa duttilità, esse non possono essere infinite in quanto interviene il fenomeno dello snervamento con la conseguente formazione di una zona deformata plasticamente. Se l'estensione di tale zona è trascurabile (caso della Meccanica della Frattura Elasto-Plastica, MFEP), e questo si verifica quando la zona plastica è contenuta nella zona in cui la singolarità è dominante, si può valutare comunque il fattore di intensificazione delle tensioni con una buona accuratezza. In caso contrario l'analisi lineare elastica diventa inaffidabile.

Quando il raggio plastico r_p (come si vedrà in seguito è quella grandezza che quantifica l'estensione della zona plastica) non è compreso nella zona di singolarità si possono distinguere due diversi casi: entro certe estensioni vengono ancora valutati i parametri lineari elastici, anche se con opportune correzioni (ex approcci di Irwin o Dugdale), oltre, invece, si devono considerare altri parametri che tengono conto della non linearità del comportamento del materiale (Meccanica della Frattura Post-Snervamento, MFPS, in particolare concetti J-integral e CTOD) [9].

Nel seguito verrà valutata l'estensione della zona plastica (raggio plastico r_p) per i due casi di stato piano di tensione (SPT) e stato piano di deformazione (SPD) e successivamente verranno descritti gli approcci di Irwin e Dugdale. Infine si affronterà il fenomeno del *crack closure*, principale argomento della tesi. Nello specifico si porrà l'attenzione sul fenomeno del *plasticity-induced crack closure* che è attualmente riconosciuto come uno dei numerosi meccanismi di riparo dell'apice di cricca, il quale determina una riduzione dell'effettivo intervallo di tensioni misurate davanti al difetto e responsabili della propagazione del difetto stesso.

2.2 Limiti di applicabilità della MFLE e formazione di una zona plastica apicale

Le previsioni della MFLE valgono per difetti aventi forma di cricche acuminata (idealmente con raggio di curvatura all'apice della cricca uguale a zero). In questo caso la soluzione che si determina in prossimità dell'apice della cricca presenta una singolarità di ordine 0.5 ed il valore analitico delle tensioni normali σ_x e σ_y all'apice della cricca stessa è infinito. Questa è una conseguenza della teoria della elasticità, infatti la legge di Hooke non pone limiti agli sforzi e alle deformazioni ($\sigma=E\varepsilon$). Le soluzioni della MFLE sono basate quindi su un modello teorico che non trova corrispondenza fisica con il reale comportamento del materiale nella zona prossima all'apice della cricca. Infatti:

- Un materiale reale non può avere un difetto il cui apice abbia raggio di curvatura nullo (un certo raggio all'apice del difetto seppur ridottissimo ci sarà sempre);
- Il materiale non può sopportare in maniera indefinita tensioni oltre certi valori e ad un dato istante o si rompe fragilmente o plasticizza in maniera più o meno estesa in funzione dello stato tensionale, della sua tenacità e del suo valore della tensione di snervamento.

Quindi nell'intorno dell'apice del difetto, in un materiale reale, le tensioni non possono arrivare ad un valore infinito e si verificheranno deformazioni plastiche che limiteranno il valore dello sforzo allo snervamento: si dovrà pertanto presupporre la formazione di una regione plasticizzata. E' dunque opportuno analizzare che forma e dimensioni ha la regione che ha subito la deformazione plastica. Per far questo gli approcci oggi disponibili si possono classificare in due categorie:

- Approcci che danno una buona approssimazione delle dimensioni ma fanno riferimento ad una forma non rigorosamente valida (esempio di questo tipo è l'approccio di Irwin (paragrafo 2.2.2));
- Approcci che danno una buona approssimazione della forma tridimensionale della zona plastica ma che sono basati su ipotesi semplicistiche relativamente alle dimensioni (esempio gli approcci che determinano la forma sulla base dei criteri di snervamento).

2.3 Dimensione della zona plastica

Nelle tabelle 1.1 e 1.2 sono già state distinte le due situazioni di stato piano di tensione (SPT) e stato piano di deformazione (SPD) e si è visto che la criticità del campo delle tensioni nell'intorno dell'apice di una cricca dipende anche dallo spessore del componente.

Posticipando tutta la trattazione matematica e riportando ora solo i risultati è possibile dimostrare che l'estensione della zona plastica, indicata col simbolo r_y (*raggio plastico* valutato trascurando la redistribuzione delle tensioni come sarà più chiaro in seguito), risulta:

$$r_y = \frac{K^2}{2\pi\sigma_{sn}^2} \text{ nel caso di sforzo piano}$$

$$r_y = \frac{K^2}{18\pi\sigma_{sn}^2} \text{ nel caso di deformazione piana}$$
(2.1)

dove K è lo *stress intensity factor* e σ_{sn} è la tensione di snervamento del materiale.

La condizione rappresentata dalle 2.1 è raffigurata in figura 2.1. In realtà l'estensione della zona plastica è maggiore, infatti se si riguarda la figura 2.1 si vede che per limitare lo stato di tensione allo snervamento è stata eliminata la parte del diagramma tratteggiata, che rappresenta il carico che non è sopportato localmente perché il materiale plasticizza. Poiché siano rispettate le condizioni di equilibrio questo carico deve comunque essere sostenuto e, a questo scopo, si ha una redistribuzione delle sollecitazioni, che, come si vede dalla figura 2.2, dà luogo a una zona plastica più estesa. E' possibile quindi, alla luce della considerazione appena esposta, "correggere" la definizione dell'estensione della zona plastica r_y fornendo la definizione di r_p (*raggio plastico* valutato considerando la redistribuzione delle tensioni). Tralasciando ancora una volta la trattazione matematica, ma riportando solo i risultati (figura 2.3), si ha:

$$r_p = \frac{K^2}{\pi\sigma_{sn}^2} \text{ nel caso di sforzo piano}$$

$$r_p = \frac{K^2}{3\pi\sigma_{sn}^2} \text{ nel caso di deformazione piana}$$
(2.2)

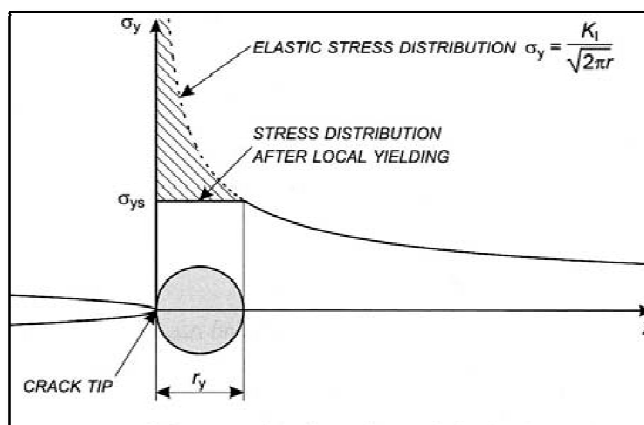


Figura 2.1 Approssimazione del primo ordine della zona plastica all'apice della cricca.

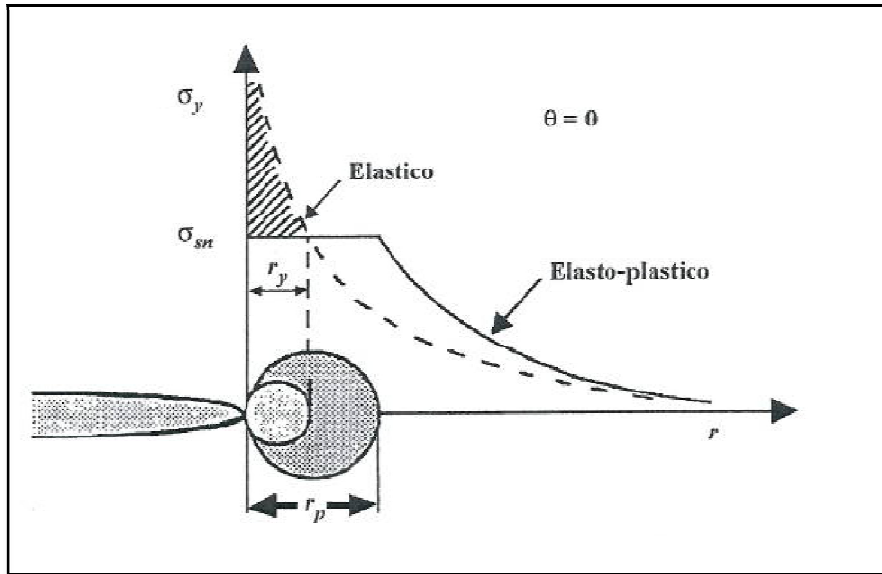


Figura 2.2 Correzione dell'estensione della zona plastica nel caso di stato di sforzo piano.

Entrando ora nel dettaglio, per uno stato piano di tensione SPT, la condizione di snervamento si ha quando una delle tensioni principali raggiunge il valore della tensione di snervamento σ_{sn} (o σ_{ys} dall'inglese "yield stress"), per cui:

$$\text{per } \theta = 0 \rightarrow \sigma_{sn} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_y}} = \frac{\sigma_{nom} \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r_y}} \quad (2.3)$$

da cui risulta:

$$(r_y)_{SPT} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 = \frac{a}{2} \left(\frac{\sigma_{nom}}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (2.4)$$

dove, si ricordi, con r_y si intende il raggio plastico valutato in assenza di redistribuzione. La 2.4 rappresenta la stima del primo ordine della zona plastica.

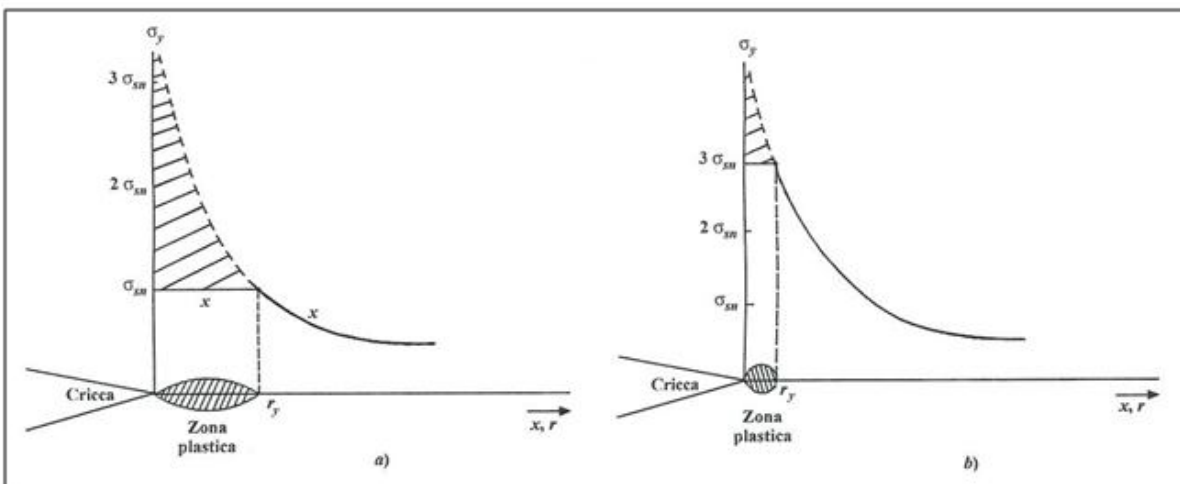


Figura 2.3 Andamento delle tensioni ed estensione della zona plastica all'apice della cricca dopo redistribuzione delle tensioni nel caso: a) stato piano di tensione; b) stato piano di deformazione.

Come già anticipato, la determinazione delle dimensioni e della forma della zona plastica secondo l'approccio semplificato sopra esposto risulta poco accurata. Infatti:

- L'ipotesi che la zona plastica abbia forma circolare con diametro lungo l'asse x di dimensioni r_y è del tutto arbitraria ed infondata;
- L'andamento rettilineo per valori di tensione $\sigma > \sigma_y$ corrisponde ad un comportamento perfettamente plastico del materiale, e quindi non è realistico se il materiale è in campo elastico non lineare o ha un incrudimento plastico (strain-hardening);
- L'operazione di taglio (cut-off) pura e semplice di tutti i valori di tensione al di sopra di σ_y ancora una volta non è rigorosa ma arbitraria.

E' piuttosto evidente che in realtà la zona plastica deve essere più ampia, in quanto l'area della curva tagliata (al disopra di σ_{ys}) rappresenta una parte di carico necessaria all'equilibrio alla traslazione in direzione y. In pratica però si dimostra estremamente difficile riuscire a determinare l'esatta forma e dimensione della zona plastica nei due casi di SPT e SPD.

2.3.1 Correzione di Irwin alla dimensione della zona plastica

Irwin assunse l'ipotesi che nel caso in cui si formi una zona plastica all'apice di una cricca, il comportamento della cricca stessa è equivalente a quello di un'altra cricca avente dimensioni maggiori ma con comportamento perfettamente elastico.

Considerando il comportamento del materiale elastico perfettamente plastico, assumendo per maggiore semplicità uno SPT e limitando l'analisi solo lungo l'asse x ($\theta=0$) si ha:

$$\sigma_y(\theta = 0) = \frac{\sigma \sqrt{\pi a_{eff}}}{\sqrt{2\pi r_y}} \quad 2.5$$

con $a_{eff} = a + \delta$ e $\sigma = \sigma_{nom,g}$.

δ deve essere lungo abbastanza affinché l'area B di figura 2.4 sia uguale all'area A, cioè sia ripristinata la condizione di area complessiva sottesa dalla curva σ_y uguale a quella prevista dalla soluzione puramente elastica.

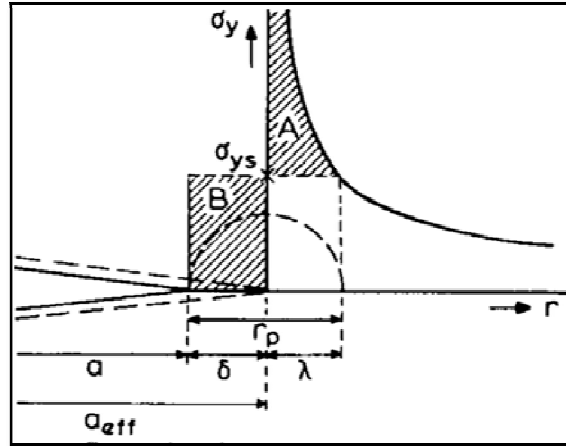


Figura 2.4 Stima con l'approccio di Irwin della zona plastica considerando la redistribuzione di tensione.

Si può pertanto scrivere:

$$\sigma_{ys} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a_{eff}}}{\sqrt{2\pi\lambda}} = \frac{\sigma \sqrt{\pi(a + \delta)}}{\sqrt{2\pi\lambda}} \quad (2.6)$$

da cui, considerando la 2.4, dopo alcuni passaggi si ricava:

$$\lambda = \frac{\sigma^2(a + \delta)}{2\sigma_{ys}^2} \approx \frac{\sigma^2 a}{2\sigma_{ys}^2} \rightarrow \lambda = r_y \quad (2.7)$$

Dovendo essere rispettata la condizione di equilibrio lungo y si può scrivere:

$$A = B \rightarrow \sigma_{ys} \cdot \delta = \int_0^\lambda \frac{\sigma \sqrt{a + \delta}}{\sqrt{2r}} dr - \sigma_{ys} \cdot \lambda \approx \int_0^\lambda \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} dr - \sigma_{ys} \cdot \lambda \quad (2.8)$$

$$\sigma_{ys} \cdot (\delta + r_y) = \int_0^\lambda \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} dr = \int_0^{r_y} \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} dr = \sigma \sqrt{2ar_y} \quad (2.9)$$

Considerando nuovamente la 2.4, dopo alcuni passaggi si può scrivere:

$$(\delta + r_y)^2 = 2ar_y \left(\frac{\sigma}{\sigma_{ys}} \right)^2 = 4r_y^2 \quad (2.10)$$

$$(\delta + r_y)^2 = 4r_y^2 \rightarrow \delta = r_y \quad (2.11)$$

Quindi essendo:

$$\delta = r_y$$

$$\lambda = r_y$$

Si ha:

$$r_p = \delta + \lambda = 2r_y$$

La formula appena ricavata è nota per essere la correzione dell'estensione della zona plastica secondo Irwin.

Si deve tenere presente che quanto visto in precedenza vale per uno stato piano di tensione.

Infatti la condizione di plasticità lungo l'asse x si considera raggiunta quando una delle due

tensioni principali raggiunge il valore della tensione di snervamento (Criterio di Tresca) essendo $\sigma_x = \sigma_y$ e $\sigma_z = 0$.

Nel caso di stato piano di deformazione si deve tenere conto di σ_z nella valutazione del raggiungimento delle condizioni di plasticizzazione. In genere essa si raggiunge per valori di σ_y maggiori di quelli che portavano ad incipiente plasticizzazione in SPT. Utilizzando il criterio di Von Mises come criterio di snervamento del materiale, si potrebbe dimostrare che il valore del raggio plastico r_y vale:

$$(r_y)_{SPD} = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (2.12)$$

Altri approcci sono comunque presenti in letteratura per valutare la zona plastica.

2.4 La forma della zona plastica

Nel precedente paragrafo è stata illustrata l'estensione della zona plastica lungo l'asse delle ascisse ($\theta = 0$); si descrive ora la forma globale della zona plastica.

Per il modo I di carico, gli sforzi nell'intorno dell'apice del difetto possono essere espressi con le seguenti equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \theta \left(1 \mp \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.13)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

Si possono ricavare le tensioni principali:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{aligned} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.14)$$

da cui:

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.15)$$

$$\sigma_3 \begin{cases} = 0 \text{ per tensione piana} \\ = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{2\nu K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \text{ per deformazione piana} \end{cases}$$

Se la condizione di plasticizzazione è espressa con il criterio di von Mises si può scrivere:

$$\sigma_{sn} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \quad (2.16)$$

da cui, sostituendo nella precedente le espressioni delle tensioni principali, si trova:

$$\begin{cases} \frac{K_I^2}{2\pi r_y} \left(1 + \frac{3}{2} \sin^2 \theta + \cos \theta\right) = 2\sigma_{sn}^2 \text{ sforzo piano} \\ \frac{K_I^2}{2\pi r_y} [3 \sin^2 \theta + (1 - \nu^2)(1 + \cos \theta)] = 2\sigma_{sn}^2 \text{ deformazione piana} \end{cases} \quad (2.17)$$

Esprimendo ora le 2.17 in funzione della dimensione r_y della zona plasticizzata si ottiene:

$$\begin{cases} r_y(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{sn}}\right)^2 \left(1 + \cos \theta + \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right) \text{ tensione piana} \\ r_y(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{sn}}\right)^2 \left[(1 - 2\nu)^2(1 + \cos \theta) + \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right] \text{ deformazione piana} \end{cases} \quad (2.18)$$

Analoghe equazioni possono essere scritte per i modi II e III. Nella figura 2.5 sono state tracciate le zone plastiche corrispondenti a queste equazioni per tutti e tre i modi di carico. E' importante ricordare che queste soluzioni non considerano la redistribuzione degli sforzi dovuta a comportamento elasto-plastico del materiale e quindi valgono solo in prima approssimazione.

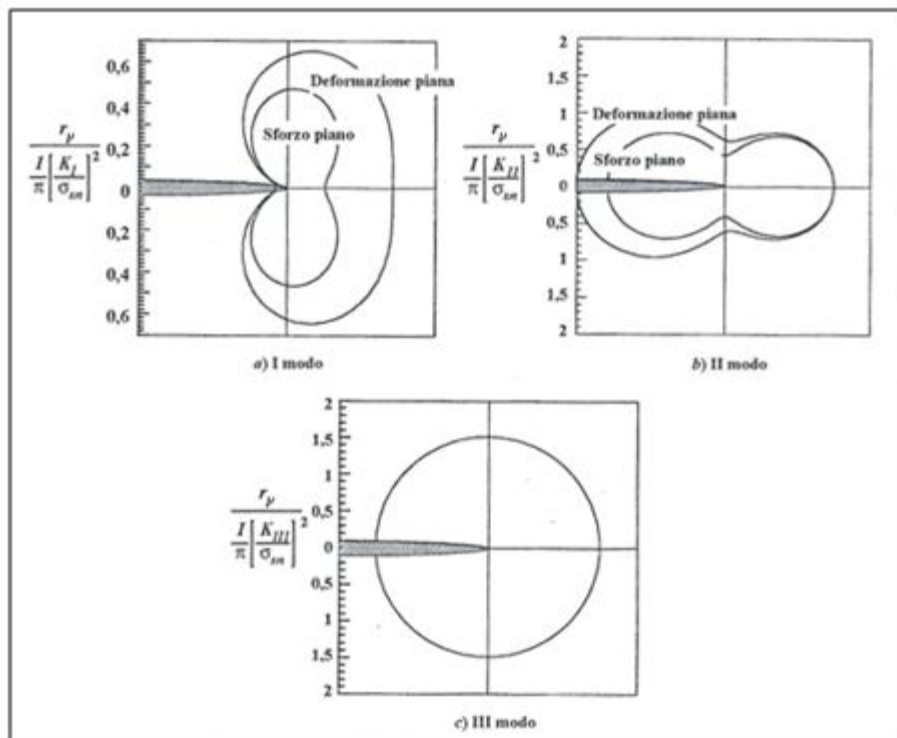


Figura 2.5 Estensione e forma della zona plasticizzata per i tre modi di carico considerando il criterio di von Mises e trascurando la redistribuzione degli sforzi.

La zona plastica all'apice della cricca (vista in sezione nella figura 2.6) è libera di scorrere in assenza di incrudimento (caso perfettamente plastico). In particolare essa tenderà a contrarsi nella direzione dello spessore. Le zone limitrofe di materiale in corrispondenza della cricca e del materiale nel legamento della zona elastica sono invece a confronto piuttosto scariche e quindi non si contraggono altrettanto facilmente. Esse tendono quindi ad esercitare un vincolo alla contrazione (*plastic constraint*). Tale fenomeno introduce tensioni di trazione lungo lo

spessore nella zona plastica e azioni di contrazione lungo lo spessore sul materiale adiacente la zona plastica.

La tensione di trazione prodotta dal *plastic constraint* è massima nelle zone interne e nulla in superficie (essendo questa scarica). Inoltre tale tensione di trazione produce una deformazione trattiva che si oppone alla deformazione contrattiva dovuta all'effetto Poisson. Queste due opposte azioni deformative possono portare all'insorgere di Stati Piani di Deformazione (deformazione risultante nulla nella direzione dello spessore) nelle zone interne centrali della piastra, dove si è detto che il fenomeno del *plastic constraint* è presente.

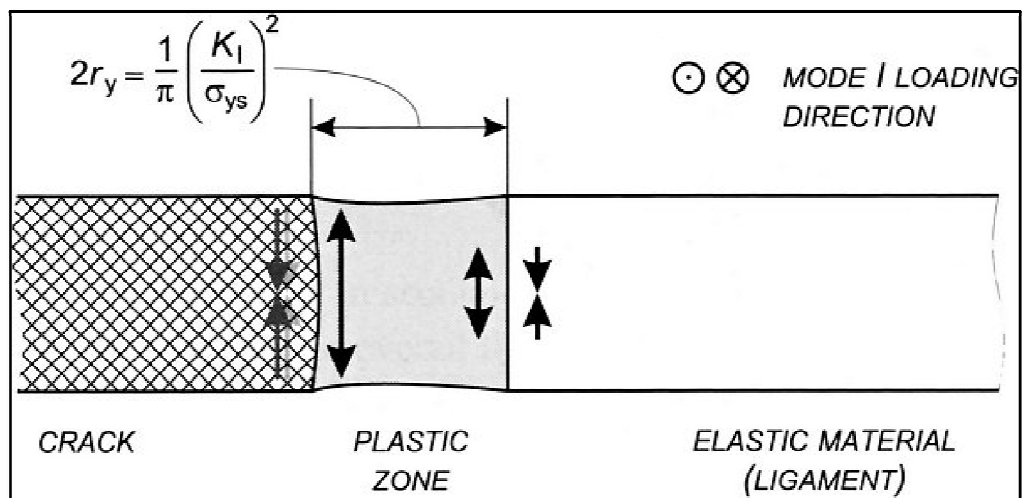


Figura 2.6 Vista in sezione di una cricca e della zona plastica.

Si ribadisce che nella realtà non è mai possibile riscontrare uno stato di deformazione piano "puro" poiché in corrispondenza delle superfici libere si ha uno stato di tensione piano (*plastic constraint* nullo sulle superfici). In un componente spesso e criccato si hanno così condizioni di stato di deformazione piano nella porzione centrale del fronte della cricca, dove lo spostamento secondo z è nullo, e condizioni di stato di tensione piano vicino le superfici. L'estensione della regione plastica varia quindi lungo il fronte della cricca, risultando più piccola nella zona centrale e più estesa nelle zone vicine alle superfici libere (figura 2.7). In particolare, per una piastra di spessore intermedio, in cui non prevale né una situazione di SPT né una di SPD, la forma della zona plastica varia dalla superficie verso l'interno con il progressivo cambiamento dello stato tensionale da bidimensionale (cioè SPT in superficie) a tridimensionale (cioè SPD all'interno).

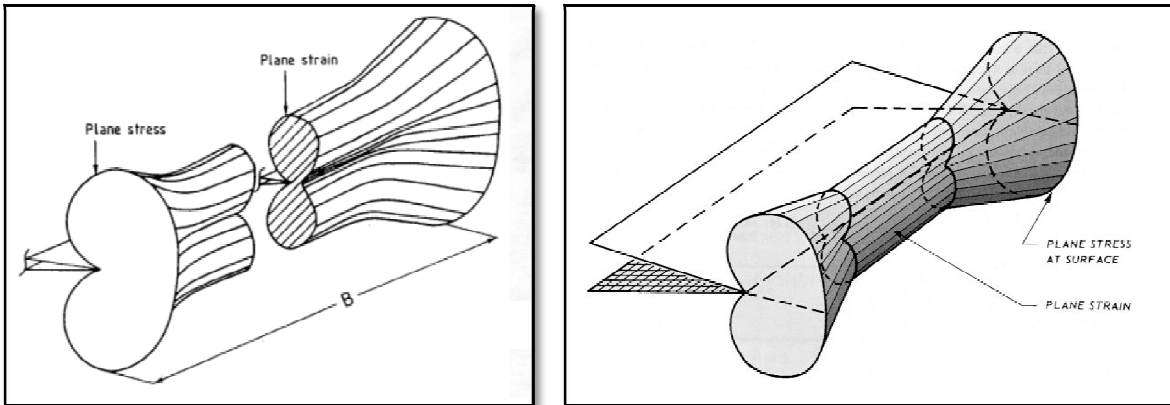


Figura 2.7 Viste tridimensionali della zona plastica di fondo cricca in una geometria infinita con cricca centrale.

Non è facile stabilire mediante semplici procedimenti di calcolo se per una struttura di dato spessore lo stato di tensione in prossimità di una cricca sia del tipo SPT o SPD. Valgono di solito le due regole empiriche di seguito enunciate:

- Si può ipotizzare uno stato SPT su tutto lo spessore se la dimensione della zona plastica in SPT secondo Irwin (cioè r_p) è circa pari allo spessore della struttura;
- Si può ipotizzare invece uno stato di predominante SPD quando l'estensione r_p della zona plastica secondo Irwin (calcolata sulla superficie della struttura) è minore di circa un decimo dello spessore della struttura.

Si precisa inoltre che risulta difficile anche valutare sperimentalmente l'effettiva forma della zona plastica per due principali ragioni:

1. Le tecniche sperimentali più comuni determinano una misura di spostamenti e deformazioni, per cui risulta difficile distinguere se la deformazione misurata in un dato punto è di tipo elastico o plastico;
2. La gran parte delle tecniche sperimentali esegue misure sulla superficie del corpo per cui è complicato indagare sulla forma della zona plastica all'interno.

2.5 Raggio plastico r_p più esteso della zona di singolarità: approccio di Irwin

Nel paragrafo precedente sono state presentate le formule che descrivono l'estensione della zona plastica all'apice della cricca, considerando anche la redistribuzione degli sforzi necessaria per soddisfare l'equilibrio. Tali formule sono qui di seguito riportate:

$$r_p = \frac{K^2}{\pi\sigma_{sn}^2} \text{ nel caso di sforzo piano} \quad (2.19)$$

$$r_p = \frac{K^2}{3\pi\sigma_{sn}^2} \text{ nel caso di deformazione piana} \quad (2.20)$$

Nella figura 2.2 si vede che lo sforzo ridistribuito nella regione elastica è superiore rispetto a quello previsto dalla prima delle 1.5, corrispondendo di fatto ad un fattore di intensificazione delle tensioni effettivo, K_{eff} , superiore. Per tenere conto della redistribuzione delle tensioni e quindi di questo aumento del SIF, Irwin considerò una lunghezza del difetto effettivo, a_{eff} , leggermente maggiore di quella reale, precisamente pose l'apice del difetto "fittizio" nel centro della zona plastica del difetto "reale" (figura 2.8):

$$a_{eff} = a + r_y \quad (2.21)$$

dove r_y è, come già visto, la metà di r_p .

Dopo aver definito a_{eff} , si calcola K_{eff} :

$$K_{eff} = \alpha(a_{eff})\sqrt{\pi a_{eff}} \quad (2.22)$$

Per risolvere questa equazione, poiché anche α è in genere funzione di a , si segue un procedimento iterativo che si articola nei seguenti passi:

- Si calcola il valore di K senza correzione di plasticità ($r_y=0$)
- Si calcola r_y con l'equazione: $r_y = \frac{1}{\beta\pi} \left(\frac{K}{\sigma_{sn}}\right)^2$ dove β è uguale a 2 o a 6 a seconda si abbia uno stato piano di tensione oppure uno stato piano di deformazione.
- Con questo valore di r_y si calcola K_{eff} .

Il procedimento termina quando il valore di K_{eff} non varia più in modo apprezzabile.

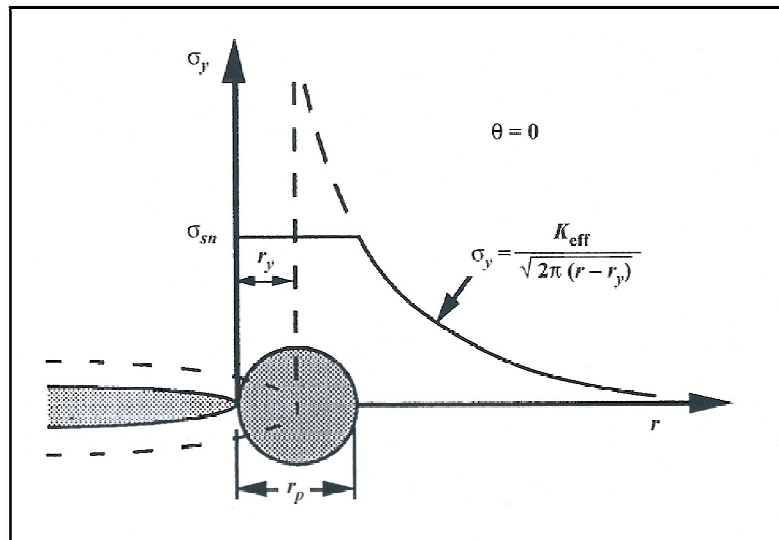


Figura 2.8 Approccio di Irwin il quale considera un K_{eff} assumendo una lunghezza del difetto maggiore.

2.6 Raggio plastico r_p più esteso della zona di singolarità: approccio di Dugdale

Dugdale [10], nel 1960, propose un approccio diverso da quello di Irwin per considerare gli effetti della zona plastica e calcolarne anche le dimensioni. Questo approccio, così come quello di Irwin, si basa sul considerare gli effetti della zona plastica equivalenti ad avere una

cricca di dimensioni maggiori di quelle reali (fisiche). In particolare Dugdale schematizza il difetto come rappresentato in figura 2.9a, in cui si vede agli apici del difetto una striscia di materiale plasticizzato di lunghezza ρ . Il materiale su cui si sviluppa il modello è di tipo elastico perfettamente plastico.

La zona ρ , detta *strip-yield zone*, è la dimensione totale della zona plastica all'apice del difetto. In questo modello, l'apice della cricca si dilata sotto sforzo e la zona plastica apicale che si viene così a creare rappresenta la naturale prosecuzione dell'intaglio nel materiale. Questo cuneo plastico, di lunghezza ρ , si oppone alla separazione fisica del materiale con una tensione che esprime le forze di coesione atomica e che in un materiale non incrudente non può che essere pari a quella di snervamento σ_{sn} . Dunque, nulla cambierebbe nel comportamento strutturale generale se la zona plasticizzata venisse eliminata fisicamente e sostituita con un campo di tensioni locali di chiusura (figura 2.9b).

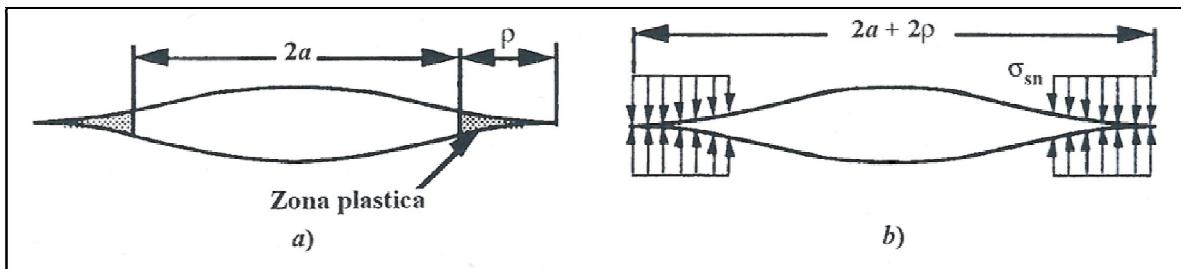


Figura 2.9 Schematizzazione del difetto secondo il modello di Dugdale.

L'approccio di Dugdale consiste pertanto in una applicazione del principio di sovrapposizione tra modalità di carico. In pratica Dugdale modellò il problema schematizzandolo come una cricca di dimensioni $2a+2\rho$, ove i fianchi della cricca prossimi all'apice ed estesi per una lunghezza pari a ρ , sono rinchiusi sotto l'azione di una tensione costante pari alla tensione di snervamento. Con questo modello si trova una soluzione ad un problema elasto-plastico sovrapponendo due soluzioni elastiche: una relativa ad una tensione remota monoassiale agente su una piastra caratterizzata da una cricca di dimensione $2a+2\rho$ (figura 2.10a) e una relativa ad una cricca, sempre delle medesime dimensioni, sottoposta ad una tensione di chiusura costante, pari a σ_{sn} , agente sui fianchi della cricca per una distanza pari a ρ dai due apici del difetto (figura 2.10b).

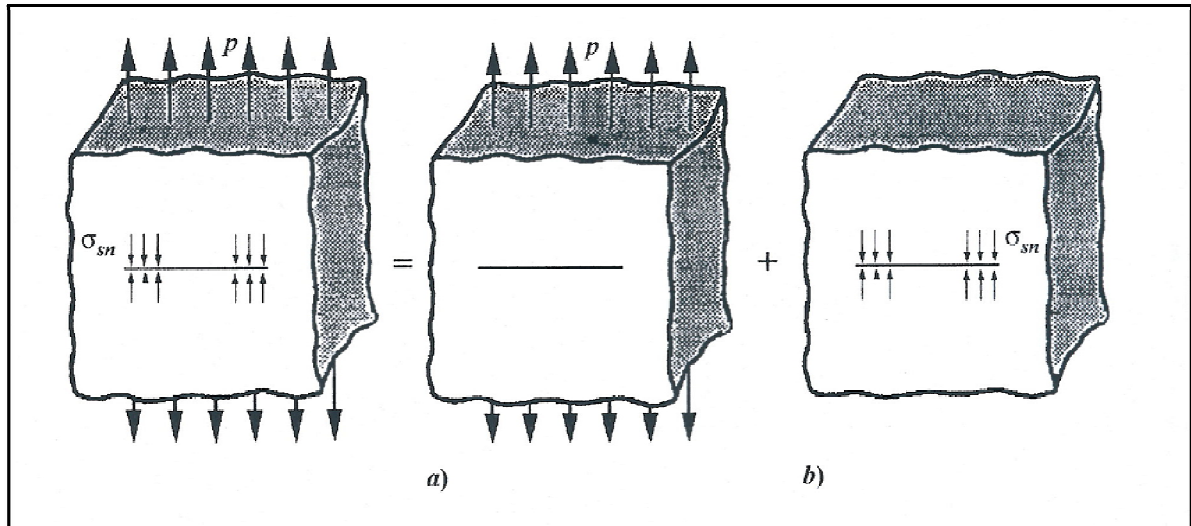


Figura 2.10 Schematizzazione del problema elasto-plastico secondo Dugdale con due soluzioni elastiche.

Poiché nella zona plasticizzata all'apice del difetto gli sforzi sono finiti, precisamente uguali al valore della tensione di snervamento σ_{sn} del materiale, nell'espressione 1.1 delle tensioni il primo termine deve essere nullo, altrimenti si avrebbe uno sforzo infinito all'apice. Tale termine è però nullo solamente se il fattore di intensificazione delle tensioni K è nullo, quindi la dimensione di ρ deve essere tale da far risultare nulla la somma dei SIF delle due soluzioni in cui è stato scomposto il problema (figura 2.10 a e b). Chiamati K_σ e $K_{chiusura}$ rispettivamente i fattori di intensificazione delle tensioni della prima e della seconda soluzione del modello di Dugdale, si deve quindi avere:

$$K_\sigma = K_{chiusura} \quad (2.23)$$

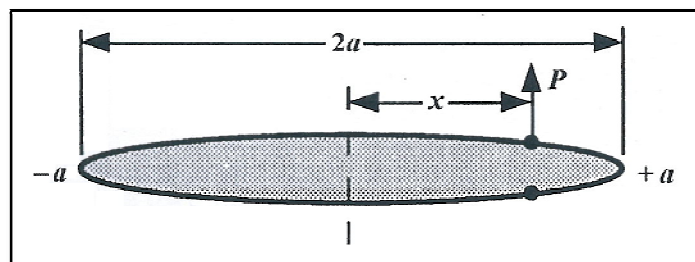


Figura 2.11 Schema utilizzato per determinare il fattore di intensificazione delle tensione $K_{chiusura}$.

Nel caso di difetto con carico applicato sulle facce, si veda figura 2.11, si trova nell'apice vicino al carico:

$$K_{I(+a)} = \frac{P}{\sqrt{\pi \cdot a}} \sqrt{\frac{a + \pi}{a - \pi}} \quad (2.24)$$

$$K_{I(-a)} = \frac{P}{\sqrt{\pi \cdot a}} \sqrt{\frac{a - \pi}{a + \pi}}$$

Nel modello di Dugdale, se si considera la lastra di spessore unitario, si può esprimere il carico applicato P come:

$$P = -\sigma_{sn} dx \quad (2.25)$$

e poiché è applicato su una lunghezza ρ , il valore del fattore di intensificazione delle tensioni

$K_{chiusura}$ diventa:

$$\begin{aligned} K_{chiusura} &= -\frac{\sigma_{sn}}{\sqrt{\pi(a+\rho)}} \int_a^{a+\rho} \left(\sqrt{\frac{a+\rho+x}{a+\rho-x}} + \sqrt{\frac{a+\rho-x}{a+\rho+x}} \right) dx \\ &= -2\sigma_{sn} \sqrt{\frac{a+\rho}{\pi}} \int_a^{a+\rho} \frac{dx}{(a+\rho)^2 + x^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

da cui si ottiene:

$$K_{chiusura} = -2\sigma_{sn} \sqrt{\frac{a+\rho}{\pi}} \cos^{-1} \left(\frac{a}{a+\rho} \right) \quad (2.27)$$

Quando invece il carico è remoto, il fattore di intensificazione degli sforzi K_σ è pari a:

$$K_\sigma = \sigma \sqrt{\pi(a+\rho)} \quad (2.28)$$

dove σ è la tensione nominare remota spesso indicata col simbolo $\sigma_{nom,g}$.

Dovendo essere verificata la 2.23, dalla 2.28 e 2.27 risulta:

$$\frac{a}{a+\rho} = \cos \left(\frac{\pi\rho}{2\sigma_{sn}} \right) \quad (2.29)$$

Si vede che, se $\sigma \rightarrow \sigma_{sn}$, $\rho \rightarrow \infty$, quindi espandendo l'equazione 2.29 con la serie di Taylor risulta:

$$\frac{a}{a+\rho} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi \cdot \sigma}{2 \cdot \sigma_{sn}} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi \cdot \sigma}{2 \cdot \sigma_{sn}} \right)^4 - \frac{1}{6!} \left(\frac{\pi \cdot \sigma}{2 \cdot \sigma_{sn}} \right)^6 + \dots \quad (2.30)$$

Considerando solo i primi due termini della serie e risolvendo rispetto alla dimensione della zona plastica si ottiene:

$$\rho = \frac{\pi^2 \sigma^2 a}{8\sigma_{sn}^2} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{\sigma_{sn}} \right)^2 \quad (2.31)$$

La 2.31 è valida per $\sigma \ll \sigma_{sn}$. Dove σ si ripete è la tensione nominale remota.

Il risultato di questo modello è molto simile a quello di Irwin infatti si vede che le due espressioni finali sono uguali tranne che per i valori $1/\pi$ e $\pi/8$ che, comunque, sono molto vicini numericamente, infatti il primo è pari a 0,318 e il secondo a 0,392.

Anche con il modello di Dugdale si definisce un valore di K_{eff} :

$$K_{eff} = \sigma \sqrt{\pi a \sec \left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{sn}} \right)} \quad (2.32)$$

considerando un valore di $a_{eff} = a + \rho$.

In genere l'espressione 2.32 tende a sovrastimare il K_{eff} .

La figura 2.12 mostra il confronto fra il valore di K (MFLE) e dei K_{eff} calcolati secondo gli approcci di Irwin e Dugdale per una lastra con cricca centrale passante. Si nota che fino ad un

rapporto $\frac{\sigma}{\sigma_{sn}} \sim 0.5$ i valori corretti da Irwin e Dugdale non differiscono dal SIF della MFLE. I K_{eff} di Irwin e Dugdale sono in accordo fino a valori $\frac{\sigma}{\sigma_{sn}} \sim 0.8$. E' ovvio che tanto più piccolo è lo spessore del pezzo tanto più importante diventa la correzione plastica [11].

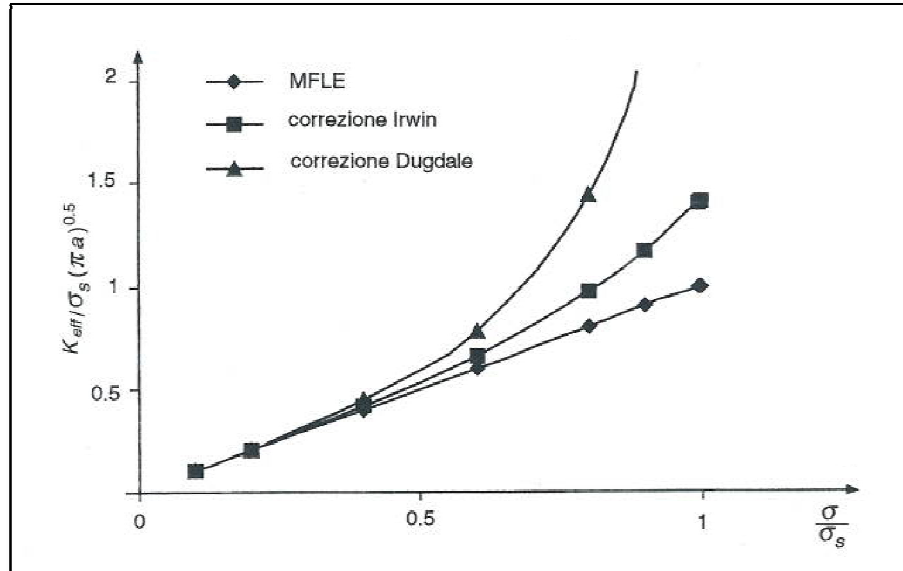


Figura 2.12 Confronto tra il SIF della MFLE e i K_{eff} di Irwin e Dugdale per una piastra con cricca centrale passante [11].

2.7 Il fenomeno del Crack Closure

Nel 1970 Elber [12] formulò la teoria riguardante il fenomeno del *crack closure*. Egli notò che durante la propagazione di una cricca in presenza di carichi alternati, questa rimaneva chiusa per una certa porzione del carico applicato (anche se tale carico era di trazione). In generale, quindi, con il termine *crack closure*, dall'inglese "*chiusura di cricca*", ci si riferisce a quei meccanismi che tendono a chiudere la cricca o a ritardarne gli spostamenti di apertura e propagazione.

Il fenomeno del *crack closure* può essere dovuto alla presenza di tensioni residue all'apice della cricca stessa e attorno alla zona plastica. Queste tensioni residue possono essere di compressione, e quindi, una parte del carico esterno viene spesa per vincere l'effetto di tali tensioni mentre la rimanente parte di carico viene impiegata per aprire la cricca e farla propagare.

Secondo la teoria di Elber il fenomeno del *crack closure* è dovuto alla deformazione plastica di tipo trattivo subita dai nuovi fianchi della cricca che si formano al crescere di questa. In tali zone il materiale deformato plasticamente a trazione si allunga nella direzione perpendicolare alla cricca stessa. Quando il ciclo di carico è nel suo tratto decrescente (in altre parole durante la fase di scarico) la cricca tende a chiudersi. I fianchi della cricca, quando il carico raggiunge

il valore minimo, dovrebbero ritornare a disporsi parallelamente l'un l'altro, in condizioni ideali nell'ipotesi di perfetta linearità elastica. A causa però delle zone sporgenti deformate plasticamente, che entrano in contatto premendo una contro l'altra prima che il carico arrivi al valor minimo (figura 2.13), lo stato tensionale sulla cricca cambia. Secondo la teoria di Elber, quindi, il fenomeno di chiusura della cricca determina dei contatti tra le facce del difetto con conseguente riduzione, dal punto di vista pratico, della cosiddetta "forza guida" per l'avanzamento della cricca di fatica.

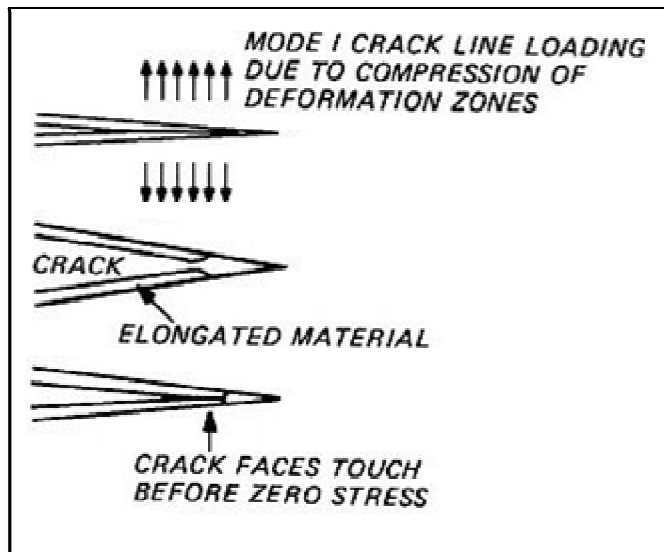


Figura 2.13 Schematizzazione del fenomeno di crack closure.

Lavori sperimentali pubblicati successivamente stabilirono però che il meccanismo di Elber non è il solo a causare la chiusura della cricca; esistono, infatti, altre varianti nel fenomeno di chiusura che influenzano notevolmente il tasso di crescita della cricca a fatica.

Agli inizi degli anni '80 Ritchie, Suresh, Moss e Zamiski catalogarono i diversi casi di *crack closure*, i quali sono caratterizzati da una ampia varietà di fattori meccanici, microstrutturali e ambientali. Il caso studiato da Elber venne catalogato, e divenne da allora noto, come il caso di "*Plasticity-induced crack closure*" proprio a causa della presenza dell'estensione plastica attorno all'apice e ai fianchi di cricca che ne limitavano l'apertura e quindi la propagazione.

Vennero catalogati altri quattro fenomeni di chiusura, determinati da:

- cambiamenti di fase del materiale davanti alla cricca (*Transformation-induced crack closure*).
- microscopica rugosità delle superfici di frattura a fatica (*Roughness-induced crack closure*),
- strato di corrosione formatosi all'interno della cricca a fatica (*Oxide-induced crack closure*),
- fluidi viscosi penetrati all'interno del difetto (*Viscous fluid-induced crack closure*),

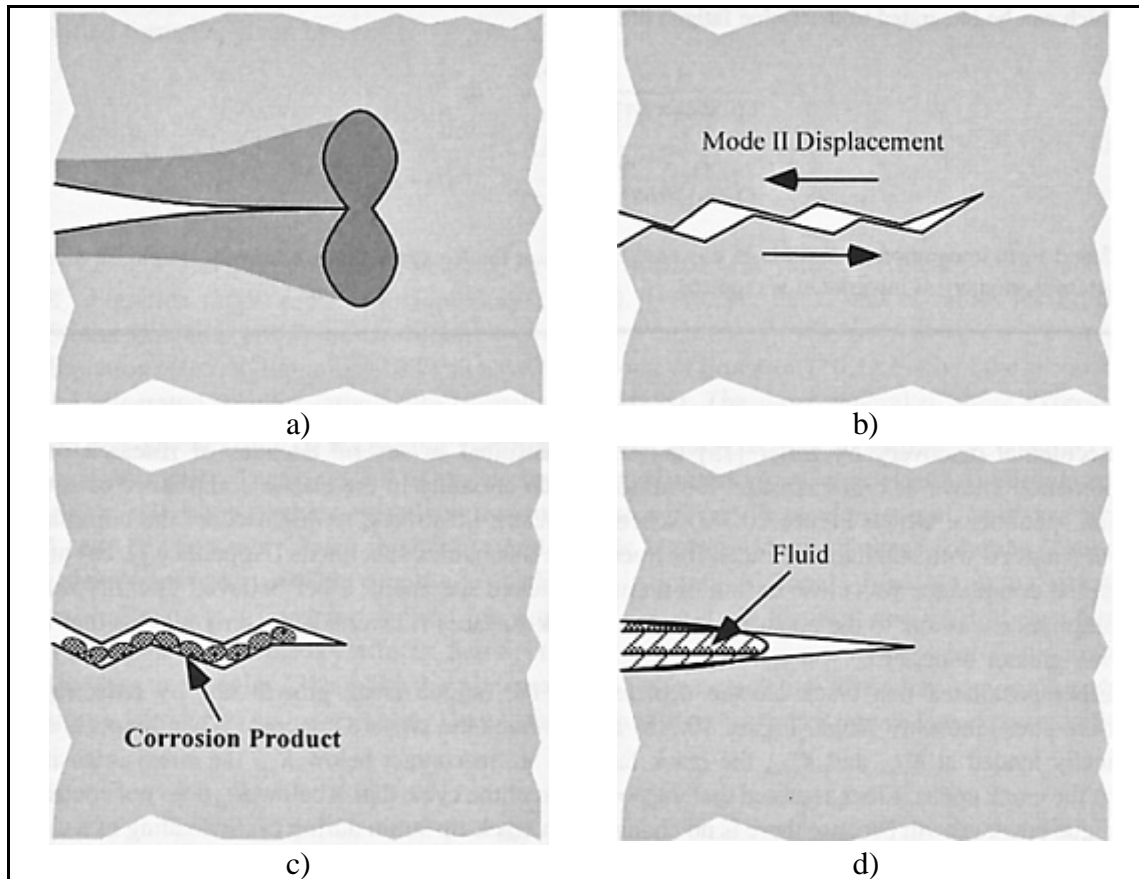


Figura 2.14 Esempi di alcuni fenomeni di crack closure: a) plasticity induced crack closure, b) roughness induced crack closure, c) oxide induced crack closure, d) viscous fluid induced crack closure.

Sebbene i reali meccanismi di chiusura della cricca e il loro effettivo ruolo sulla sua propagazione siano tutt'ora al centro di controversie e pareri contrastanti, il tema del *crack closure* è stato oggetto di numerose ricerche sperimentali e teoriche negli ultimi vent'anni.

2.7.1 Plasticity-induced crack closure

Si focalizzi ora l'attenzione su una particolare modalità di crack closure, precisamente sulla modalità "*plasticity-induced crack closure*".

Trattando il caso di una cricca sottoposta a carichi ciclici e in condizioni di *small-scale yielding* (in accordo con le ipotesi della MFLE) si può utilizzare la legge di Paris (vedi paragrafo 1.3.4) per descrivere il tasso di crescita del difetto a fatica. L'utilizzo delle leggi proprie della MFLE implica che deve essere il fattore di intensificazione delle tensioni K_I a determinare l'intensità del campo di tensioni di fronte alla cricca e le condizioni per la propagazione o meno del difetto. Con la scoperta del meccanismo di chiusura di Elber, tuttavia, si stabilì per la prima volta che i tassi di crescita della cricca non sono influenzati esclusivamente dalle condizioni che si verificano di fronte alla cricca (riassunte, quindi, dal K_I), ma anche dalla natura delle forze di contatto (responsabili della chiusura) tra le facce del difetto dietro all'apice del difetto stesso.

La propagazione di una cricca di fatica dà luogo ad una scia di materiale deformato plasticamente.

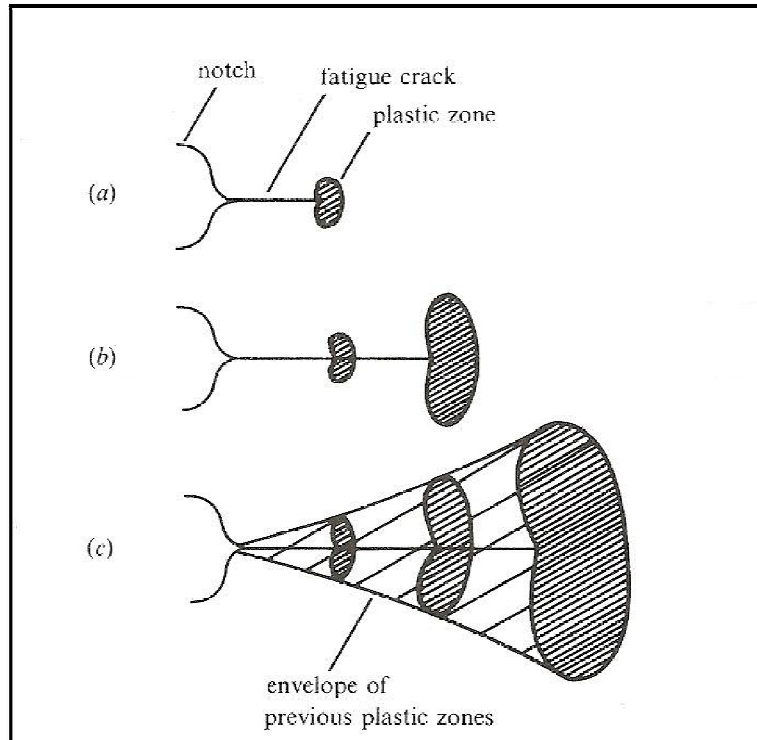


Figura 2.15 Sviluppo della fasciatura plastica, da zone plasticizzate precedentemente, attorno ad una cricca a fatica in fase di avanzamento.

La figura 2.15 mostra lo sviluppo della scia plastica per tre difetti di lunghezza differente sottoposti a carichi ciclici di trazione ad ampiezza costante. Mano a mano che il fronte di cricca avanza, esso si lascia alle spalle una scia di deformazioni residue, dal momento che nella fase di scarico si verificano solo ritorni elastici (e non plastici) del materiale. Incrementando il valore del fattore di intensificazione delle tensioni e le dimensioni della zona plastica per l'avanzamento della cricca, il materiale precedentemente deformato costituisce ora una sorta di fasciatura plastica lungo la scia del difetto.

Si riporta in figura 2.16 il diagramma, ricavato sperimentalmente dal Elber, dell'andamento della tensione applicata σ in funzione dello spostamento δ tra le facce del difetto.

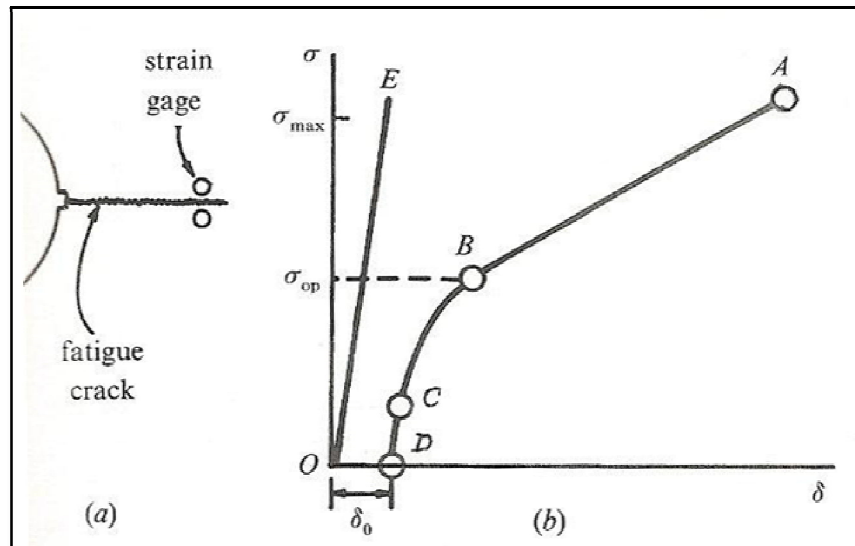


Figura 2.16 Rappresentazione della relazione esistente tra la tensione applicata σ e gli spostamenti δ tra le facce del difetto, misurati con calibro di deformazione (strain gauge). Elber, 1970.

Nella regione compresa tra i punti A e B il grafico esibisce una pendenza costante. Ciò implica che la cricca di fatica è completamente aperta tra i valori della tensione nominale σ_{max} e σ_{op} . Continuando lo scarico dal punto B al punto C, la derivata seconda $d^2\sigma/d^2\delta$ diventa negativa. E' proprio la chiusura delle facce della cricca il solo possibile meccanismo, secondo Elber, che possa spiegare tale andamento della derivata seconda nella regione compresa tra i punti B e C. Infine, nell'ultima parte di scarico oltre il punto C, la curva mostra un altro andamento lineare essendo la pendenza del tratto CD costante. Essa, essendo uguale a quella riscontrata in un identico provino privo di cricche di fatica (figura 2.17), indica che il difetto è perfettamente chiuso al di sotto del livello di tensione corrispondente al punto C. In assenza di carico, $\sigma=0$, si nota un'apertura del difetto "residua" δ_0 coincidente con la distanza iniziale tra le facce del difetto prima dell'applicazione del carico. Tale grafico si può anche esprimere in termini del fattore di concentrazione delle tensioni K piuttosto che della tensione σ . Si consideri a tal proposito la figura 2.18.

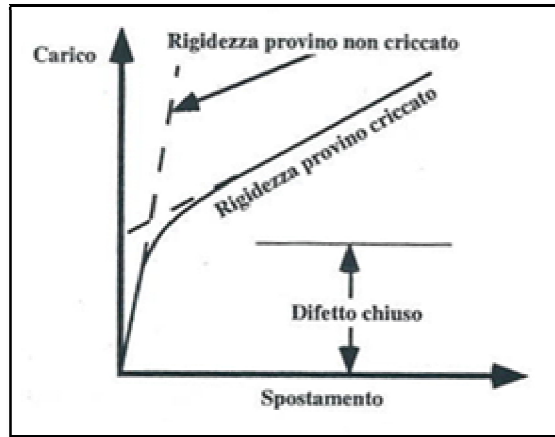


Figura 2.17 Rigidità del provino criccato. Per valori bassi di carico applicato la rigidità del provino criccato è uguale a quella del provino integro.

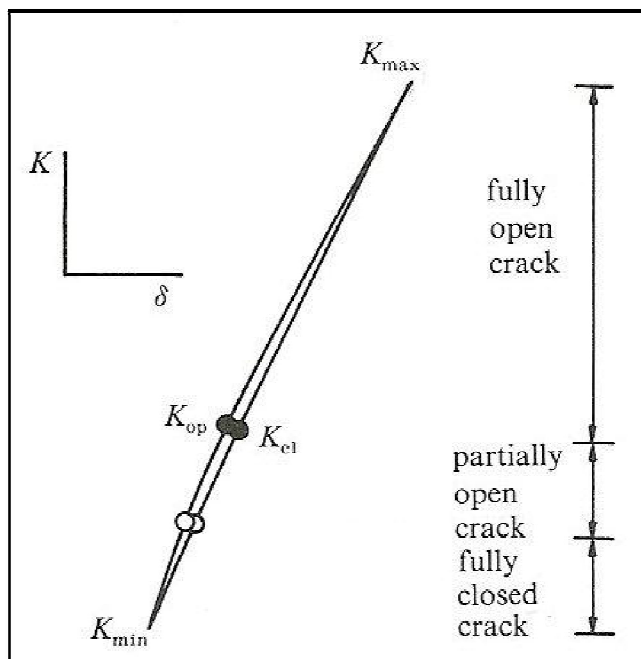


Figura 2.18 Andamento del fattore di intensificazione delle tensioni in funzione degli spostamenti di apertura della cricca durante un ciclo completo a fatica.

In figura 2.18 si nota che applicando il carico di trazione al provino criccato, esso rimane perfettamente chiuso fino a che non si raggiunge un certo valore del fattore di intensificazione delle tensioni (rappresentato dal cerchio bianco in figura). Da questo punto il difetto inizia ad aprirsi gradualmente. Esso risulta completamente aperto solo in corrispondenza del valore K_{op} del fattore di intensificazione delle tensioni. Nella fase di scarico, invece, il primo contatto tra le facce della cricca, e il conseguente inizio della cosiddetta chiusura del difetto, si verifica in corrispondenza di K_{cl} . Al di sotto di tale punto la cricca si chiude gradualmente, e risulterà completamente chiusa al di sotto del valore di intensificazione delle tensioni rappresentato dal cerchio bianco di figura 2.18. Il punto in cui i fianchi della cricca in fase di scarico vengono a contatto non coincide quindi con il punto di K_{min} .

Detto questo si può evidenziare come il valore di carico che segna l'inizio della crack closure sia distintamente individuabile dal diagramma carico-spostamento. In tale diagramma infatti si osserva una marcata variazione della rigidezza del provino (la rigidezza diventa notevolmente più elevata) al decrescere del carico, oltre il punto di prematuro contatto dei fianchi della cricca (vedi figura 2.17). Quando i fianchi della cricca entrano in contatto per reazione si generano carichi di trazione applicati sui fianchi. L'effetto di tali carichi sul K si sovrappone a quello del carico esterno. L'effettivo andamento del K è illustrato nelle due figure 2.19.

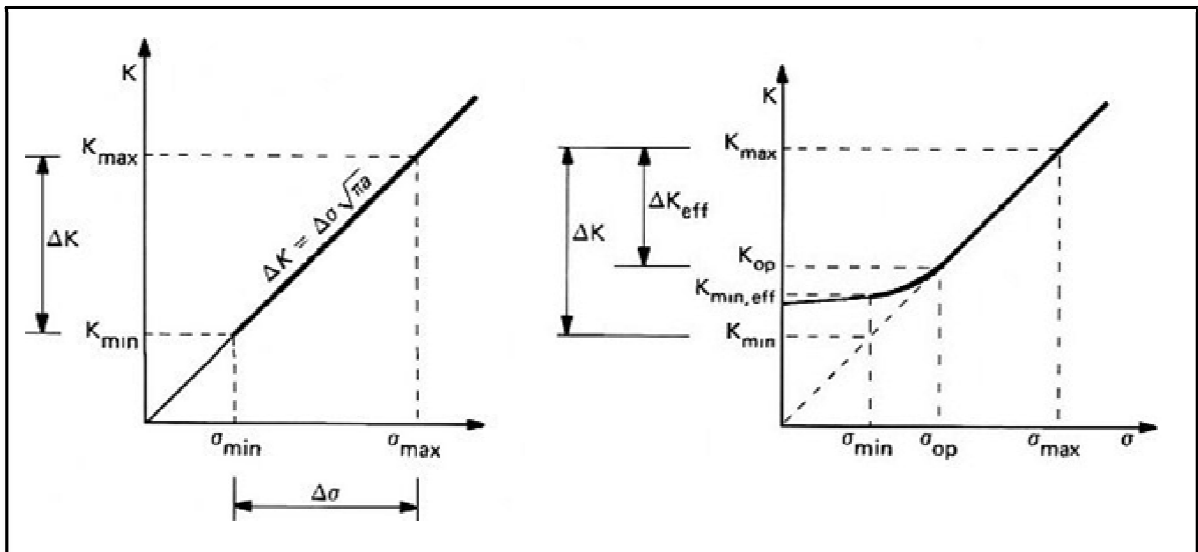


Figura 2.19 Effetto della plasticità indotta dalla chiusura della cricca sullo stress intensity factor.

In altre parole, considerando figura 2.20, al decrescere del carico dal valore di σ_{max} , l'angolo di apertura della cricca decresce a seguito del rilassamento elastico. Le deformazioni sui fianchi fanno sì che la diminuzione elastica dell'angolo di apertura non possa protrarsi sino allo scarico elastico completo (in corrispondenza di σ_{min}). Le forze di reazione del contatto tra i fianchi generano un fattore di intensificazione delle tensioni che cresce al decrescere del carico. Dal momento in cui si verifica la crack closure, il K complessivo quindi è più elevato del K che si avrebbe in assenza di crack closure, ed il ciclo si conclude con un $K_{min,eff} > K_{min}$ che si avrebbe in assenza ancora di crack closure. La parte del range di tensione utile all'avanzamento della cricca non è più $\Delta\sigma$ ma $\Delta\sigma_{eff}$, così come si può adesso definire un ΔK_{eff} come valore effettivamente utile per la propagazione del difetto. Al crescere di R (rapporto nominale di ciclo), in particolare per valori di $R > 0$, i valori di tensione minima sono tali da lasciare la cricca parzialmente aperta e quindi di ridurre il tratto in cui si verifica crack closure. L'effetto di ciò è l'aumento del ΔK_{eff} all'aumentare di R. È ora possibile spiegare il fenomeno di aumento della velocità di propagazione del difetto che si riscontra per valori crescenti di R come l'effetto di un minore o persino assente fenomeno di crack closure.

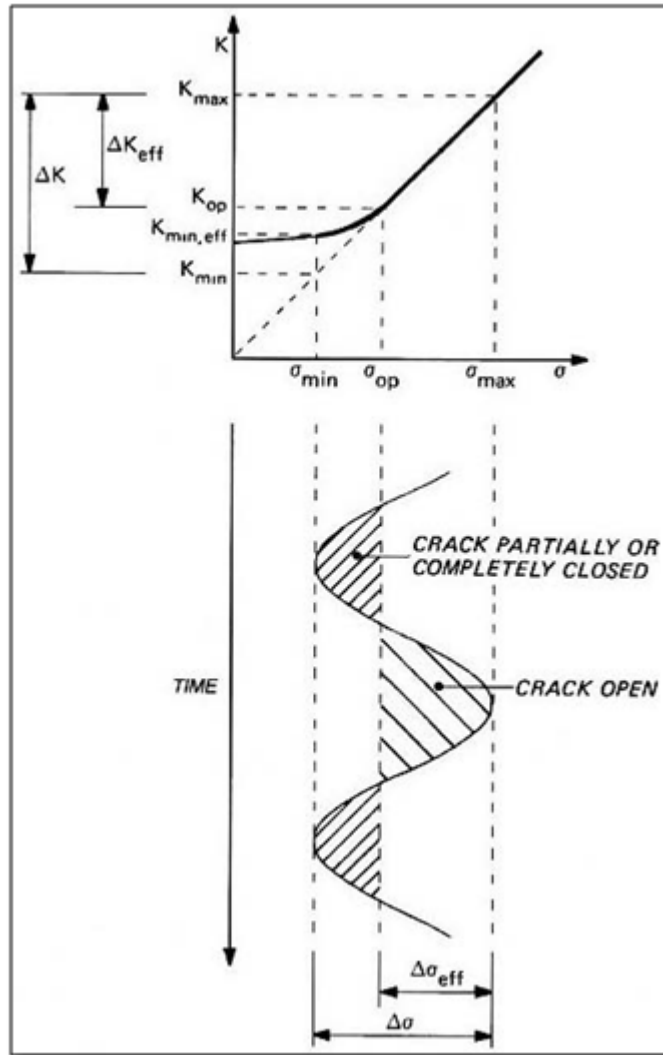


Figura 2.20 Effetto del plasticità induced crack closure sullo stress intensity factor.

Nei suoi studi, quindi, Elber notò che il difetto poteva propagarsi solamente durante quella frazione di carico ciclico in cui le facce della cricca risultavano completamente separate tra loro. In altre parole, il carico che ha effetto nella propagazione è indicato dal valore ΔK_{eff} , che si ottiene a partire dal K_{max} depurato della quota K_{op} (detta di opening) necessaria a vincere le tensioni residue in compressione che chiudono l'apice della cricca. L'ampiezza del fattore di intensificazione effettiva delle tensioni risulta quindi:

$$\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{op} \quad (2.33)$$

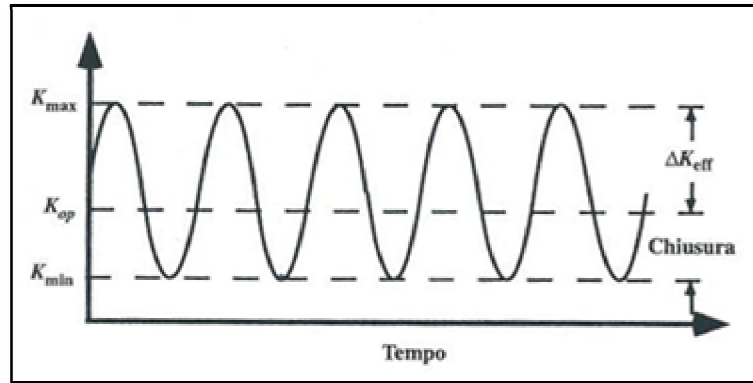


Figura 2.21 Definizione dell'ampiezza del fattore di intensificazione degli sforzi.

Elber definì poi un fattore dell'intensità delle tensioni effettiva come segue:

$$U = \frac{\Delta K_{eff}}{\Delta K} = \frac{K_{max} - K_{op}}{K_{max} - K_{min}} \quad (2.34)$$

e propose infine, una modifica della legge di propagazione di Paris:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K_{eff}^m = C (U \Delta K)^m \quad (2.35)$$

Sono state proposte numerose relazioni empiriche per determinare il valore di U (che dipende da diversi fattori). Tra queste si ricordi quella trovata da Elber per la lega di alluminio:

$$U = 0.5 - 0.4R$$

Valida per $0.1 < R < 0.7$ dove $R = \frac{K_{min}}{K_{max}}$.

2.7.2 Alcune caratteristiche tipiche del Crack Closure

E' evidente, da quanto detto nei paragrafi precedenti, che il *crack closure* è un fenomeno la cui influenza sul tasso di crescita della cricca a fatica è fortemente caratterizzata da fattori microstrutturali e ambientali, nonché dai parametri meccanici di carico. Tuttavia, si riscontrano alcune tendenze e caratteristiche tipiche che sono comuni ai vari tipi di *crack closure* e ad un'ampia varietà di materiali. Ad esempio:

- 1) Il fenomeno del *crack closure* è generalmente più dominante per bassi valori sia di ΔK sia del rapporto nominale di ciclo R; ciò è dovuto al fatto che, in tali condizioni, gli spostamenti di apertura minimi della cricca a fatica sono in media più piccoli e, quindi, più influenzabili dai meccanismi di chiusura. Per il fenomeno di *Plasticity-induced crack closure*, il meccanismo di chiusura del difetto può essere rafforzato, per livelli maggiori di ΔK e R, aumentando la zona deformata plasticamente attorno ad esso.
- 2) Il fenomeno della *crack closure* ha una influenza molto importante anche sul valore di soglia ΔK_{th} , oltre che sul tratto della regione II di un diagramma $da/dN-\Delta K$ (descritta

dalla legge di Paris). Infatti nella zona dei bassi ΔK , i valori bassi di carico determinano piccoli valori di apertura della cricca. In tale situazione quindi, è facile che entrino gioco diversi meccanismi di *crack closure* (ad es. la rugosità della superficie della cricca). In generale per alcuni materiali (quelli per i quali in generale il fenomeno di crack closure è più influente), il valore di ΔK_{th} diminuisce al crescere di R.

- 3) Esiste una caratteristica "scala dimensionale" associata a ciascun processo di chiusura; riferendosi al caso di *Plasticity-induced crack closure*, ad esempio, le dimensioni riguardano l'altezza della zona plastica residua lungo la scia del difetto. Quando tali "dimensioni di chiusura" diventano paragonabili alle "condizioni di apertura" del difetto, si verificano quei contatti tra le facce (individuati per primi da Elber) che influenzano notevolmente il tasso di crescita della cricca a fatica.
- 4) Il grado di chiusura del meccanismo di *crack closure* tende generalmente ad aumentare al crescere della lunghezza del difetto, fino al raggiungimento di una lunghezza "limite"; oltre tale valore la chiusura del difetto è normalmente indipendente dalla sua lunghezza.
- 5) Come già detto, il *crack closure* è causato da meccanismi che si manifestano sia all'apice della cricca (come la formazione del raggio plastico) sia lungo i fianchi della cricca (si pensi alla scia plastica). Per il processo di *Plasticity-induced crack closure*, le deformazioni plastiche dovranno rimanere confinate entro una piccola regione nelle vicinanze dell'apice del difetto; altrimenti, se a deformarsi è l'intero provino, il meccanismo di chiusura non giocherà più un ruolo significativo durante la crescita del difetto.
- 6) Non si possono ancora avanzare conclusioni definitive sugli effetti che le tensioni hanno sull'entità del meccanismo di *crack closure*. Infatti, mentre si è stabilita, sia sperimentalmente che numericamente, la presenza maggiormente dominante del *Plasticity-induced crack closure* sotto carichi di trazione in uno stato di tensione piana piuttosto che di deformazione piana, la situazione opposta è nota verificarsi nella crescita del difetto sotto carichi ciclici di compressione.

2.7.3 Problemi relativi alla quantificazione del Crack Closure

Esistono una serie di complicati problemi relativi alla quantificazione degli effetti del fenomeno di *crack closure* sul comportamento a fatica di materiali ad interesse ingegneristico.

Di seguito, si riportano alcune di queste problematiche, oggetto di sfide sperimentali e teoriche:

- 1) Il *crack closure* è un fenomeno spesso estremamente collegato alle condizioni sperimentali; infatti, la grandezza di tale meccanismo è influenzata da effetti sinergici come la microstruttura del materiale, l'ambiente di prova e lo stato tensionale.
- 2) Anche piccole variazioni, a livello atomico, lungo il percorso di avanzamento della cricca (causate, ad esempio, dai bordi grano, impurità o altre imperfezioni nella microstruttura locale) possono causare notevoli cambiamenti sul tasso di propagazione della cricca, specialmente se in prossimità della soglia a fatica ΔK_{th} , dove gli spostamenti di apertura del difetto sono piccoli.
- 3) Anche se si riuscissero ad annullare gli effetti microstrutturali e ambientali, il meccanismo di chiusura della cricca sarebbe ancora fortemente influenzato dalle dimensioni e dalla geometria del provino, dalle dimensioni del difetto, dallo stato di tensione, dalla storia di carico precedente e dalla posizione in cui esso viene misurato. Dunque, differenti metodi per lo studio del *crack closure* possono fornire misure diverse del fenomeno.
- 4) La maggior parte delle misurazioni del meccanismo di *crack closure* (basate su differenti tipologie di calibri, metodi ad ultrasuoni, a emissione acustica o variazione del potenziale elettrico) non riescono a distinguere le varie tipologie di chiusura, presentate nel paragrafo precedente; infatti, vari meccanismi di chiusura possono manifestarsi contemporaneamente e influenzare il tasso di crescita del difetto, rendendo difficoltosa la misurazione del singolo effetto di *crack closure*.

In conclusione, quindi, il fenomeno di *crack closure* rimane tuttora discusso in termini di misurazione, rilevanza, origine e interpretazione poichè restano ancora da chiarire alcuni suoi aspetti fondamentali (James, 1997). Uno dei principali motivi di questa non completa conoscenza del *crack closure* è sicuramente legato al fatto che le misure sperimentali sono generalmente ottenute tramite metodi indiretti e, quindi, non appropriati.

II Modello CJP

Capitolo 3

Obiettivo del seguente capitolo è la descrizione e l'applicazione del modello CJP presentato da Christopher, James e Patterson, "A quantitative evaluation of fatigue crack shielding forces using photoelasticity"[13].

3.1 Introduzione al modello CJP

L'obiettivo principale del modello che si andrà a descrivere è quello di introdurre un nuovo "strumento" matematico in grado di rappresentare il campo reale delle tensioni presente davanti e attorno ad una cricca sollecitata da carichi di fatica. In particolare tale modello si propone di valutare gli effetti che la regione plastica ha sulle tensioni davanti alla cricca. Tale modello si presta a quantificare gli effetti che il fenomeno della *plasticity-induced crack closure* provoca sul campo tensionale elastico circostante la cricca. Nello specifico, il risultato finale della trattazione è l'introduzione di tre nuovi fattori di intensificazione delle tensioni (K_F , K_R e K_S) grazie ai quali è possibile descrivere, e dunque quantificare, gli effetti di messa in ombra (*shielding*) dell'enclave plastico. I fattori K_R e K_S sono detti, rispettivamente, "fattore di intensificazione del ritardo di cricca" e "fattore di intensificazione delle tensioni di taglio all'interfaccia". La loro "origine" è legata a determinate forze agenti sul difetto durante il carico ciclico a cui è sottoposto. Di seguito verranno esposte e spiegate tali forze. Le espressioni di K_R e K_S ricordano molto quella del fattore di intensificazione delle tensioni K_I , che è il parametro "classico" alla base della Meccanica della Frattura Lineare Elastica. Tale somiglianza non deve stupire dal momento che anche K_R e K_S rappresentano una misura di una intensità di tensione, riferita però in questo caso al fenomeno di *plasticity-induced crack closure*. Il fattore di intensificazione del ritardo di cricca K_R può essere, ad esempio, interpretato come qualcosa di analogo alle tensioni di chiusura associate alla zona plastica nel modello di Dugdale (vedi paragrafo 2.6), con la differenza però di descrivere gli effetti che si verificano non solo in prossimità dell'apice del difetto, ma anche lungo i suoi fianchi interessati dalla plasticità. Gli autori del modello, per poter tener conto del meccanismo di riparo (*shielding*) della zona plastica sul difetto, hanno aggiunto dei termini addizionali alla formulazione "classica" di Westergaard e Irwin, definendo così un modello multi-parametrico che vuole essere più accurato e adatto al caso pratico e reale. Essi hanno cioè ritenuto necessario includere in un unico strumento matematico i ruoli che hanno il SIF K_I , la T-stress

e il fenomeno di plasticity-induced crack closure sul campo di tensioni all'apice della cricca; solo così, secondo gli autori stessi, si possono identificare e capire meglio i reali effetti dell'enclave plastico sul comportamento della cricca.

In definitiva, riassumendo, attraverso questo modello matematico si ritiene sia possibile quantificare il contributo alla propagazione e alla chiusura della cricca legato alle singole forze agenti all'apice e lungo i fianchi e la scia plastica del difetto, nonché le reali distribuzioni di tensione di fronte e attorno alla cricca.

3.2 Il sistema di forze agenti sulla cricca

Come già accennato nell'introduzione precedente, i fattori K_R e K_S sono legati alle forze che agiscono sul difetto durante un carico ciclico. Tali forze sono quelle considerate dagli autori del modello per definire e sviluppare concettualmente proprio il modello che ora si sta esponendo. La figura 3.1 illustra schematicamente le principali forze che agiscono sulla cricca e all'interfaccia tra la zona plastica del difetto e il materiale circostante in campo elastico. Per chiarezza sono illustrate sia le forze agenti sul campo elastico (*elastic field*, metà destra della figura) sia le forze agenti sul campo plastico (*plastic field*, metà sinistra della figura). Si noti come le forze agenti sul campo elastico siano uguali in modulo ma opposte in segno alle forze agenti sul campo plastico; ciò è diretta conseguenza del principio di azione e reazione. Tale caratteristica di "specularità" dei due sistemi di forze consente di concentrare l'attenzione solamente su uno solo dei 2 sistemi: ad esempio su quello agente sulla zona plastica. Si fa notare inoltre che nella realtà non vi è una netta distinzione tra "zona plasticizzata" e "zona elastica", cioè non si riesce ad individuare una interfaccia elasto-plastica ben definita. Tuttavia la schematizzazione in figura 3.1 è comunque utile per apprezzare meglio la fisica del fenomeno e comprendere le tensioni che costituiscono i campi elastico e plastico sul difetto.

Nell'analisi dell'origine di ciascuna delle forze in figura 3.1, si inizia con il considerare le F_{Ax} ed F_{Ay} . E' il carico applicato al provino (in direzione y) a generare tali forze e, quindi, il campo di tensione all'apice della cricca; tale campo, come ampiamente discusso nell'introduzione alla MFLE (capitolo 1), ha una intensità caratterizzata dal fattore di intensificazione delle tensioni K_I , e un andamento descritto dalle equazioni di Irwin. La sollecitazione del provino genera inoltre la tensione T (detta anche T-stress, vedi capitolo 1.2.3) e, di conseguenza, la corrispondente forza F_T ; il verso di tale forza dipende dalla geometria del provino e per tale ragione non ha una orientazione preferenziale in figura. E'

ben noto, dalle equazioni di Irwin, che in prossimità della cricca le tensioni legate alle forze F_{Ax} ed F_{Ay} tenderebbero, teoricamente, ad assumere valori infiniti; nella realtà ciò non è possibile e il tutto si traduce nella formazione di una zona deformata plasticamente davanti all'apice del difetto. Il materiale interessato dalla plasticizzazione rimarrà deformato permanentemente, dando origine a delle tensioni residue (rappresentate in figura dalle forze F_{Px} ed F_{Py}) quando il carico viene rimosso. Queste tensioni residue derivano direttamente dalla interazione all'interfaccia tra il materiale deformato elasticamente e quello deformato in modo permanente. A causa del carico di trazione applicato la deformazione permanente nella zona plasticizzata sarà "espansiva" nella direzione y (direzione di applicazione del carico) e di contrazione nella direzione x in conseguenza degli effetti del rapporto di Poisson. In questa circostanza F_{Px} può essere considerata come forza che ritarda la propagazione della cricca.

Man mano che la cricca si estende, la zona plastica apicale viene lasciata indietro e diventa parte della scia plastica del difetto. Questo materiale è permanentemente deformato, precisamente la scia è espansa in direzione y , al pari della zona plastica all'apice, causando la nascita di forze di contatto (di compressione) F_C quando viene rimosso il carico applicato e la cricca si chiude sotto l'azione del campo elastico. Questo è un classico effetto di chiusura che potrebbe essere modificato dalla presenza di ossidi, detriti e dalla geometria del percorso della cricca.

Come già spiegato, un carico di trazione applicato in direzione y provoca una deformazione permanente presso la cricca che, per effetto Poisson, sarà di compressione in direzione x . Con la propagazione della cricca, il materiale che si trova all'apice diviene parte della scia plastica, la quale risulta quindi anche contratta in direzione x rispetto al materiale elastico circostante. Pertanto quando la cricca è aperta, comparirà una forza di taglio F_S stabilita dai requisiti di compatibilità degli spostamenti. Tale forza F_S stira il materiale plastico e comprime quello elastico. Quando invece la cricca si chiude, come già visto, avviene anche il contatto tra i fianchi della cricca stessa, evento che comporta la generazione della forza di compressione F_C . Inoltre, come appena detto, vi è uno stato tensionale causato dall'effetto di Poisson in direzione x , che sarà più grande, sulla scia plastica in cui il rapporto di Poisson vale 0,5 rispetto al materiale elastico in cui invece il rapporto di Poisson è di circa 0,3 per la maggior parte dei materiali strutturali. Le esigenze di compatibilità in direzione x genereranno una forza di taglio F_S nel senso opposto rispetto a quando la cricca è aperta, così che il taglio netto potrebbe cambiare direzione durante il ciclo di carico, come mostrato in figura 3.1.

La combinazione delle forze F_C e F_P , cioè le forze agenti in direzione y generate in conseguenza della presenza della deformazione plastica permanente, producono un efficace effetto di schermo sull' apice della cricca.

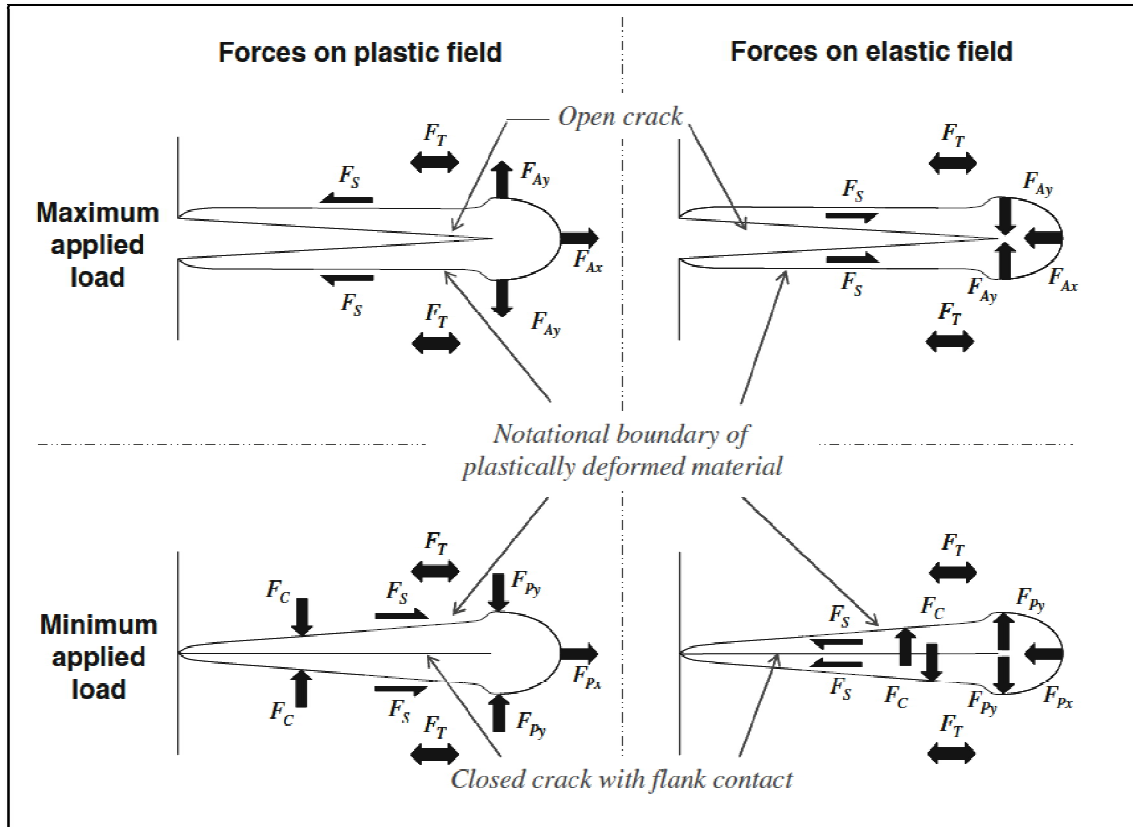


Figura 3.1 Rappresentazione schematica delle forze agenti su una cricca sollecitata da un carico di fatica. In particolare: F_A sono le forze che originano il campo di tensioni caratterizzato dal fattore di intensificazione delle tensioni K_I , F_T rappresenta le forze dovute al T-stress, F_S è la forza di taglio all'interfaccia elasto-plastica e, infine, F_C e F_P sono quelle forze responsabili dell'azione di riparo cricca (*shielding effect*). F_P sono forze residue indotte dalla deformazione plastica del materiale, mentre F_C rappresentano le forze di contatto tra i fianchi del difetto [14].

3.3 Il frame analitico del modello CJP e alcune considerazioni

L'obiettivo principale degli autori è quello di sviluppare un modello matematico in grado di descrivere il campo di tensione all'apice della cricca. Tale modello incorpora termini che tengono conto della singolarità all'apice della cricca, della T-stress e anche degli effetti sul campo tensionale davanti alla cricca derivanti dalla schermatura dovuta alla plasticità.

Si presenta dunque qui di seguito il “frame” analitico del modello CJP che sarà alla base delle analisi che verranno presentate successivamente. Il risultato di tale modello è la definizione di 3 nuovi fattori di intensificazione delle tensioni che permettono principalmente di descrivere gli effetti della plasticità sul fenomeno di propagazione di una cricca già innescata. Successivamente si procede col ricavare i potenziali complessi e le equazioni delle

componenti di tensione seguendo la teoria di Muskhelishvili-Kolosoff a partire da una equazione data dagli autori del modello.

Le equazioni dei tre fattori di intensificazione delle tensioni sono qui di seguito riportate:

$$\begin{aligned}
 K_F &= \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} (\sigma_y + 2Er^{-1/2} \ln(r))] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (A - 3B - 8E) \\
 K_S &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_{xy}) = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} (A + B) \\
 K_R &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_x) = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} (D - 3E)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

dove r rappresenta la coordinata radiale di un sistema polare centrato sull'apice della cricca.

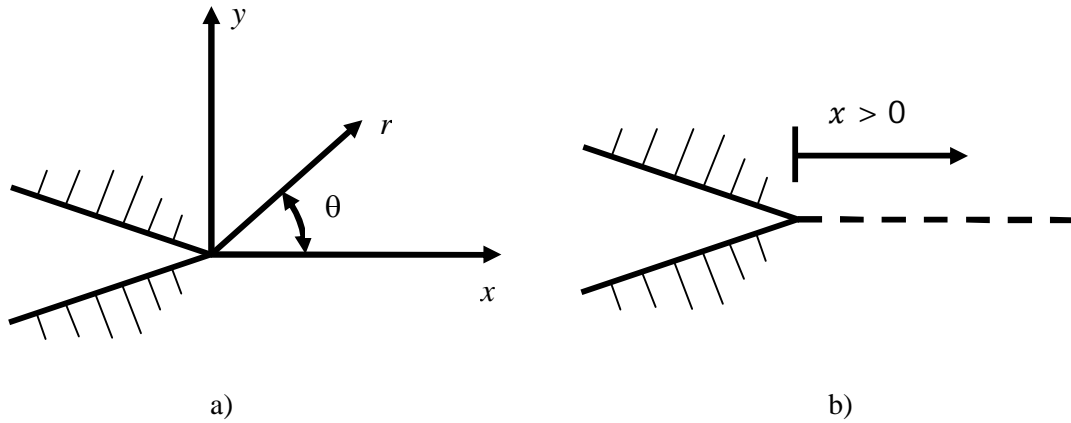


Figura 3.2 a) Sistemi di riferimento polare r, θ e cartesiano x, y centrati sull'apice della cricca. b) Direzione assunta come verso positivo nella definizione dei SIF K_F, K_R e K_S .

Si vuole far notare che tali fattori di intensificazione delle tensioni sono stati ottenuti partendo dall'equazione:

$$(\sigma_y - \sigma_x + i2\sigma_{xy}) = Az^{-1/2} + Bz^{-3/2}\bar{z} + Cz^0 + Dz^{-1/2} \ln z + Ez^{-3/2}\bar{z} \ln z
 \tag{3.2}$$

dove $z = x + iy$ e x, y sono le coordinate di un sistema cartesiano con l'origine centrata sull'apice della cricca.

Come si vede dalla prima equazione delle 3.1, lo *stress intensity factor* K_F si ottiene valutando il limite per r tendente a zero del campo di tensione σ_y lungo la bisettrice della cricca, cioè per $y = 0$ e $x > 0$ nel caso si consideri un sistema di riferimento centrato sull'apice della cricca. In assenza di schermatura ($E = 0$, come indicato dagli autori) l'equazione di K_F si semplifica nella classica espressione del fattore di intensificazione delle tensioni K_I .

Sempre secondo le equazioni 3.1, il secondo SIF K_S (*fattore di intensificazione delle tensioni di taglio all'interfaccia*) si valuta ancora attraverso una operazione di limite per r tendente a zero considerando ora la componente di tensione τ_{xy} lungo i fianchi della cricca, cioè per $x < 0$ nel caso si consideri ancora un sistema di riferimento centrato sull'apice della cricca

stessa. In particolare si assume il segno positivo per $y > 0$, cioè per il fianco superiore della cricca, contrario invece per il fianco inferiore ($y < 0$), per il quale si assume segno negativo. Gli autori suggeriscono di seguire un analogo procedimento per la valutazione del SIF K_R (*fattore di intensificazione del ritardo di cricca*), per il quale però si considera la componente di tensione σ_x . Precisamente gli ideatori del modello indicano il *fattore di intensificazione del ritardo di cricca* K_R come quel parametro utile a caratterizzare le tensioni dirette secondo la direzione di propagazione della cricca. Essi legano infatti K_R al coefficiente E e danno quindi la possibilità di determinare il valore di E proprio a partire dal valore di K_R . La determinazione di K_R come già anticipato avviene valutando il limite per r che tende a zero del campo di tensione σ_x lungo i fianchi della cricca verso l'apice dell'intaglio, cioè per $y = 0$ e $x < 0$ nel caso si consideri ancora un sistema di riferimento centrato sull'apice della cricca.

Si ritiene utile sottolineare come l'espressione 3.2 si riduca alla semplice descrizione di Westergaard del campo di tensione all'apice della cricca quando $C = D = E = (A + B) = 0$, e a quella di Nurse e Patterson basata sull'approccio di Muskhelishvili quando $D = E = 0$. In quest'ultimo caso $C = -T$, dove T corrisponde al termine T-stress, che è stato dimostrato essere un parametro importante per descrivere lo stato di tensione nell'intorno dell'apice di una cricca. In sostanza, i parametri supplementari D ed E sono stati aggiunti dagli autori per permettere al modello di descrivere il campo di tensione lungo il fianco della cricca e di fronte alla cricca. Nell'analisi di seguito si è supposto che sia, come affermato ancora una volta dagli autori, $(D + E) = 0$ al fine di dare l'asintoticità appropriata lungo il fianco della cricca. (*Riportando un passaggio dell'articolo: In the analysis below it has been assumed that $(D + E) = 0$ to give the appropriate asymptotics along the crack flank.*)

Si riporta qui di seguito un estratto dal lavoro degli autori del modello CJP:

The classical stress intensity factor, K_I was obtained by evaluating σ_y in the limit along $y = 0$ towards the crack tip in the negative direction (i.e., $x > 0$):

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} (\sigma_y + 2Er^{-1/2} \ln(r))] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (A - 3B - 8E)$$

in the absence of shielding $E = 0$ and this expression simplifies to the classical definition of the stress intensity factor. The shear stress at the elastic-plastic boundary was characterized by evaluating σ_{xy} in the limit process along the crack flank towards the crack tip:

$$K_S = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_{xy}) = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} (A + B)$$

where the positive sign is taken for $y > 0$, i.e. the top flank in Fig. 1 and $x < 0$, and the negative sign for $y < 0$, i.e. the bottom flank. They identified the retardation intensity factor as

characterizing the direct stresses acting parallel to the direction of crack growth and defined it by evaluating σ_x in the limit along the crack flank towards the crack tip, i.e. $y = 0$ and $x < 0$:

$$K_R = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_x) = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} (D - 3E)$$

Reference Paper: A quantitative evaluation of fatigue crack shielding forces using photoelasticity C.J. Christopher, M.N. James, E.A. Patterson, K.F. Tee, *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008) 4190–4199

Si riporta qui di seguito, come già annunciato, una trattazione basata sull'approccio di Muskhelishvili-Kolosoff nella quale si ricavano le espressioni delle componenti di tensione σ_x , σ_y e τ_{xy} .

Come riferimento di questa trattazione matematica si considera l'articolo *Towards a new model of crack tip stress fields* degli autori *Christopher, James, Patterson, e Tee* [14].

L'equazione di partenza è:

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = Gz^{-\frac{1}{2}} + Hz^{-\frac{3}{2}}\bar{z} + Cz^0 + Dz^{-\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) + Ez^{-\frac{3}{2}}\bar{z} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (3.3)$$

Si ricordi che (Muskhelishvili-Kolosoff):

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\Re\{\phi'(z)\} \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Considerando le analogie tra la 3.3 e la seconda delle 3.4 è logico scrivere:

$$\begin{aligned} 2\phi''(z) &= Hz^{-\frac{3}{2}} + Ez^{-\frac{3}{2}} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \\ 2\psi'(z) &= Gz^{-\frac{1}{2}} + C + Dz^{-\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Integrando una volta rispetto a z la seconda delle 3.5 si ottiene l'espressione del potenziale complesso ψ .

$$\begin{aligned} 2\psi(z) &= \int 2\psi'(z) dz = 2Gz^{\frac{1}{2}} + Cz - 4Dz^{-\frac{1}{2}} + 2Dz^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \\ &= 2Gz^{\frac{1}{2}} + Cz + 2Dz^{\frac{1}{2}} \left[\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) + 2 \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Integrando una volta rispetto a z la prima delle 3.5 si ottiene l'espressione della derivata prima del potenziale complesso ϕ .

$$2\phi'(z) = \int 2\phi''(z) dz = -2Ez^{-\frac{1}{2}} \left[2 + \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \right] - 2Bz^{-\frac{1}{2}} \boxed{-\frac{1}{2}C} \quad (3.7)$$

Il valore $-\frac{1}{2}C$ nel riquadro è la costante di integrazione che deve avere questa forma affinché la componente σ_y non abbia la T-stress.

Integrando ora una volta rispetto a z la 3.7 si ottiene l'espressione del secondo potenziale complesso, ϕ .

$$\phi(z) = -2z^{\frac{1}{2}} \left[H + E \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \right] - \frac{1}{4} Cz \quad (3.8)$$

I due potenziali di partenza sono dunque:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= -2z^{\frac{1}{2}} \left[H + E \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \right] - \frac{1}{4} Cz \\ \psi(z) &= Gz^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{2}z + Dz^{\frac{1}{2}} \left[\ln \left(\frac{z}{z_0} \right) - 2 \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

E' noto che le componenti di tensione possono essere determinate come [15,16]:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= 2\Re\{\phi'(z)\} + \Re\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\} \\ \sigma_{xx} &= 2\Re\{\phi'(z)\} - \Re\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\} \\ \tau_{xy} &= \Im\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Per determinare le componenti di tensione è necessario quindi individuare la parte reale della derivata prima del potenziale complesso ϕ e le parti reali e immaginarie di $\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)$.

$$\phi'(z) = \frac{\partial\phi(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -2z^{\frac{1}{2}} \left[H + E \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \right] - \frac{1}{4} Cz \right\} = -Hz^{-\frac{1}{2}} - Ez^{-\frac{1}{2}} \left[\ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + 2 \right] - \frac{1}{4} C \quad (3.11)$$

Essendo:

$$\begin{aligned} z &= re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) &= \ln \left(\frac{r}{r_0} e^{i(\theta-\theta_0)} \right) = \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + i(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (3.12)$$

E' possibile riscrivere quindi la 3.11 come:

$$\phi'(z) = -Hr^{-\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) - Er^{-\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \left[\ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + i(\theta - \theta_0) + 2 \right] - \frac{1}{4} C \quad (3.13)$$

$$\phi'(z) = -Hr^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} - Er^{-\frac{1}{2}} \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \left[\ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + 2 \right] + \sin \frac{\theta}{2} (\theta - \theta_0) \right\} - \frac{1}{4} C + i(\dots) \quad (3.14)$$

Quindi

$$\Re\phi'(z) = -Hr^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} - Er^{-\frac{1}{2}} \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \left[\ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + 2 \right] + \sin \frac{\theta}{2} (\theta - \theta_0) \right\} - \frac{1}{4} C \quad (3.15)$$

Si determina ora l'espressione di $\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)$ con $\bar{z} = re^{-i\theta}$

$$\begin{aligned} \bar{z}\phi''(z) &= \bar{z} \left[\frac{1}{2} Hz^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} Ez^{-\frac{3}{2}} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \right] \\ \bar{z}\phi''(z) &= \frac{1}{2} Hr^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{5}{2}\theta} + \frac{1}{2} Er^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{5}{2}\theta} \left[\ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + i(\theta - \theta_0) \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\bar{z}\phi''(z) = \frac{1}{2} Hr^{-\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{5}{2}\theta - i \sin \frac{5}{2}\theta \right) + \frac{1}{2} Er^{-\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{5}{2}\theta - i \sin \frac{5}{2}\theta \right) \left[\ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + i(\theta - \theta_0) \right]$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\bar{z}\phi''(z) &= \left\{ \frac{1}{2}Hr^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{5}{2}\theta\right) + \frac{1}{2}Er^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{5}{2}\theta\right)\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right] + (\theta - \theta_0)\sin\left(\frac{5}{2}\theta\right) \right\} \\ &\quad + i\left\{ -\frac{1}{2}Hr^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{5}{2}\theta + \frac{1}{2}Er^{-\frac{1}{2}}\left[(\theta - \theta_0)\cos\left(\frac{5}{2}\theta\right) - \sin\left(\frac{5}{2}\theta\right)\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right] \right\}\end{aligned}\quad (3.17)$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}\psi'(z) &= \frac{1}{2}Gz^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}Dz^{-\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \\ \psi'(z) &= \frac{1}{2}Gr^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}Dr^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right)\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + i(\theta - \theta_0)\right] \\ \psi'(z) &= \left\{ \frac{1}{2}Gr^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}Dr^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + (\theta - \theta_0)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \right\} \\ &\quad + i\left\{ -\frac{1}{2}Gr^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2}Dr^{-\frac{1}{2}}\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - (\theta - \theta_0)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \right\}\end{aligned}\quad (3.18)$$

Si può ora calcolare la parte reale e la parte immaginaria di $\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)$, le quali risultano:

$$\begin{aligned}\Re\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\} &= \left\{ \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\left[H\cos\left(\frac{5}{2}\theta\right) + E\left(\cos\left(\frac{5}{2}\theta\right)\ln\frac{r}{r_0} + (\theta - \theta_0)\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + D\left(\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + (\theta - \theta_0)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right] \right\} + \frac{C}{2}\end{aligned}\quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}\Im\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\} &= -\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\left\{ H\sin\left(\frac{5}{2}\theta\right) + E\left[\sin\left(\frac{5}{2}\theta\right)\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - (\theta - \theta_0)\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right)\right] \right. \\ &\quad \left. + G\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + D\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - (\theta - \theta_0)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \right\}\end{aligned}\quad (3.20)$$

Dalla terza equazione delle 3.10, e ricordando che $D = -E$, si ricava:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= -\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\left\{ H\sin\left(\frac{5}{2}\theta\right) \right. \\ &\quad \left. + E\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\left(\sin\frac{5}{2}\theta - \sin\frac{\theta}{2}\right)\right] + (\theta - \theta_0)\left[\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) - \left(\cos\frac{5\theta}{2}\right)\right] \right\} \\ &\quad + G\sin\frac{\theta}{2}\end{aligned}\quad (3.21)$$

Con la condizione $D = -E$ viene eliminato il contributo logaritmico dalle componenti di tensione τ_{xy} e σ_{yy} lungo i fianchi della cricca, cioè a $\theta = \pi$.

Si considerino ora le seguenti proprietà trigonometriche:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \sin\left(\frac{3\theta}{2} - \theta\right) = \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{5\theta}{2}\right) &= \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \theta\right) = \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\end{aligned}\quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) &= \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \theta\right) = \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\cos(\theta) - \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\sin(\theta) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \theta\right) = \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\cos(\theta) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\sin(\theta)\end{aligned}\quad (3.23)$$

Sottraendo della prima delle 3.22 la seconda e analogamente per le 3.23 si ottiene:

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{5\theta}{2}\right) = -2\sin(\theta)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (3.24)$$

$$\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\sin(\theta) \quad (3.25)$$

Sfruttando le 3.24 e 3.25 è possibile quindi riscrivere complessivamente la τ_{xy} come:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= -\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\left[G\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + H\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)\right] \\ &\quad - Er^{-\frac{1}{2}}\sin(\theta)\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + (\theta - \theta_0)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]\end{aligned}\quad (3.26)$$

Si determina ora l'espressione della componente di tensione σ_{yy} . Si ricordi che:

$$\sigma_{yy} = 2\Re\{\phi'(z)\} + \Re\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\}$$

da cui, note le parti reali di $\phi'(z)$ e $\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)$, si ottiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= 2\left\{-Hr^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - Er^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + 2\right) + (\theta - \theta_0)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\right] - \frac{1}{4}C\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\left\{H\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) + E\left[\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right)\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + (\theta - \theta_0)\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)\right]\right. \\ &\quad \left.+ G\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + D\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + (\theta - \theta_0)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\} + \frac{C}{2}\end{aligned}\quad (3.27)$$

Tenendo in considerazione ancora che $D = -E$ si ricava:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= r^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[-2H - 4E + \frac{G}{2}\right] + \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}H\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) \\ &\quad + Er^{-\frac{1}{2}}\left\{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\left(-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right)\right)\right. \\ &\quad \left.- (\theta - \theta_0)\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{aligned}\quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)[G - 4H - 8E] + H\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right)\right. \\ &\quad \left.+ E\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\left[\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) - 5\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] + (\theta - \theta_0)\left[\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right) - 5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right]\right\}\end{aligned}$$

Infine si passa alla determinazione dell'espressione della componente di tensione σ_{yy} . Si ricordi ancora che:

$$\sigma_{xx} = 2\Re\{\phi'(z)\} - \Re\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} = & 2 \left\{ -Hr^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - Er^{-\frac{1}{2}} \left[\cos\frac{\theta}{2} \left(\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + 2 \right) + (\theta - \theta_0) \sin\frac{\theta}{2} \right] \right\} - \frac{1}{2}C \\
 & - \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}} \left\{ H \cos\frac{5\theta}{2} + E \left[\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + (\theta - \theta_0) \sin\left(\frac{5\theta}{2}\right) \right] \right. \\
 & \left. + G \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + D \left[\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + (\theta - \theta_0) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} - \frac{1}{2}C
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Tenendo in considerazione che $D = -E$ si ricava:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} = & r^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \left(-\frac{1}{2}G - 2H - 4E \right) - \frac{1}{2}Hr^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) \\
 & - Er^{-\frac{1}{2}} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \right) \right] + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \right. \\
 & \left. + (\theta - \theta_0) \left[2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{5\theta}{2}\right) \right] \right\} - C
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} = & -\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [G + 4H + 8E] - \frac{1}{2}Hr^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) \\
 & - \frac{1}{2}Er^{-\frac{1}{2}} \left\{ \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \left[\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right. \\
 & \left. + (\theta - \theta_0) \left[\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} - C
 \end{aligned}$$

In definitiva le espressioni delle tre componenti di tensione sono:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} = & -\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [G + 4H + 8E] - \frac{1}{2}Hr^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) \\
 & - \frac{1}{2}Er^{-\frac{1}{2}} \left\{ \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \left[\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right. \\
 & \left. + (\theta - \theta_0) \left[\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} - C \\
 \sigma_{yy} = & \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [G - 4H - 8E] + H \cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) \right. \\
 & \left. + E \left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \left[\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) - 5\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + (\theta - \theta_0) \left[\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right) - 5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy} = & -\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}} \left[G \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + H \sin\left(\frac{5\theta}{2}\right) \right] \\
 & - Er^{-\frac{1}{2}} \sin(\theta) \left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + (\theta - \theta_0) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Si vogliono riportare ora alcune considerazioni personali relative alla forma dei fattori di intensificazione delle tensioni definiti dagli autori e precedentemente riportati e ampiamente descritti.

Il fattore di intensificazione delle tensioni K_I definito dalla MFLE è come già visto uguale a:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y \tag{3.32}$$

Se si confronta tale equazione appena riportata con la prima delle 3.1 si può vedere come gli autori del modello “estendano” la classica definizione del K_I , valida in regime esclusivamente lineare elastico, al caso elasto-plastico introducendo un termine all’interno del quale compare anche un logaritmo naturale nella variabile r . Per le proprietà matematiche dei logaritmi il termine $\ln(r)$ assumerà valore positivo per $r > 1$ e valore negativo per $r < 1$, mentre tenderà a $-\infty$ quando r tende a zero, cioè al tendere all’apice della cricca. Il termine aggiunto dagli autori per tenere in considerazione gli effetti di *shielding* dovuti alla plasticizzazione che si verifica all’apice della cricca cambia segno lungo la bisettrice della cricca stessa in funzione della distanza dall’apice del punto preso in considerazione. Avendo però E segno negativo nella fase di carico di un ciclo di fatica (come si vedrà in seguito), quanto detto prima relativamente al $\ln(r)$ produce un risultato inaspettato in quanto il termine aggiuntivo assumerà valori positivi per $0 < r < 1\text{mm}$ e valori negativi per $r > 1\text{mm}$. Questo fa sì che nella zona dove si ha la plasticizzazione del materiale in quanto le tensioni giungono al valore dello snervamento il K_F definito dagli autori fornisce in realtà un andamento delle tensioni ancor più alto di quello previsto dalla teoria della MFLE e da Irwin. Assume invece valore negativo per $r > 1\text{mm}$ e ciò comporta un abbassamento del fattore di intensificazione delle tensioni, cosa che corrisponderebbe, dal punto di vista fisico, ad un campo di tensione di minor intensità. Ciò è in contrasto però proprio con la fisica del problema in quanto le tensioni dovrebbero essere superiori al caso di assenza di plasticizzazione in quanto si verifica un fenomeno di redistribuzione delle tensioni dovuto allo snervamento nella zona plastica e giustificato dal rispetto delle condizioni di equilibrio. Tuttavia non conoscendo l’entità di questa redistribuzione di tensione né l’entità dell’effetto di *shielding* sul campo di tensione elastico, il modello può essere considerato in prima analisi corretto a partire però da $r > 1\text{mm}$, rimanendo invece discutibile per $0 < r < 1\text{mm}$.

Si consideri ora la terza equazione delle 3.1. Da un’analisi dimensionale si ricava che l’unità di misura del SIF K_R è $\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{mm}}$. Di conseguenza, per evidenti ragioni matematiche, anche i coefficienti D ed E hanno la stessa unità di misura di K_R . Di dubbia comprensione risulta invece l’unità di misura del K_F . In particolare dalla prima delle 3.1 si può ricavare che l’unità di misura di K_F è pari a $\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{mm}} + \text{MPa}\cdot\ln(\text{mm})\cdot\sqrt{\text{mm}}$. E’ evidente che tale unità di misura difficilmente può essere l’unità di misura di un SIF. Più sensata da un punto di vista dimensionale, per quanto concerne la presenza del logaritmo di una lunghezza all’interno dell’unità di misura del K_F , era l’espressione dello stesso SIF K_F proposta dagli stessi autori nell’ articolo “Towards a new model of crack tip stress fields” [14]. In questo lavoro infatti l’argomento del logaritmo veniva diviso per una lunghezza r_0 (fissata ad un valore unitario) in

modo tale da eliminare per l'appunto dall'unità di misura del K_F la presenza del logaritmo di una lunghezza. Trascurando la validità o meno di quel modo di procedere, la soluzione che si otterrebbe così operando non sarebbe comunque del tutto soddisfacente. Il coefficiente E moltiplica infatti un termine $r^{-0.5}$. Di conseguenza l'unità di misura del K_F risulterebbe ancora $\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{mm}}$ al pari del K_I della MFLE. Ciò non sarebbe concettualmente corretto in quanto il grado di singolarità delle distribuzioni di tensione di modo I all'apice di una cricca (al quale si potrebbe dimostrare sono legate le unità di misura) non è invariante nel caso si consideri un comportamento elasto-plastico piuttosto di un comportamento lineare elastico del materiale. E' stato dimostrato infatti che le pendenze dei campi di tensione in campo elastoplastico non sono uguali alle pendenze dei campi di tensione in campo lineare elastico. Pertanto anche con una eventuale normalizzazione dell'argomento del logaritmo, dal frame analitico non si riesce a capire effettivamente a che campo di tensione si riferisce il SIF K_F . Non si capisce cioè se gli autori con K_F vogliono descrivere esclusivamente come varia il campo tensione fuori dalla zona plasticizzata (cioè in campo lineare elastico dato che $\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{mm}}$ è l'unità di misura di K_I definito per l'appunto in campo lineare elastico) o se vogliono descrivere anche il campo di tensione nella zona plasticizzata (dato che il SIF in esame viene calcolato al tendere all'apice della cricca, cioè sulla zona plastica). Pur non eliminando i dubbi relativi alle unità di misura, si ritiene che la normalizzazione dell'argomento del logaritmo avrebbe più senso se fosse posto $r_0 = r_p$. In tal caso infatti assumendo E valore negativo nella fase di carico, il logaritmo, qualora il suo argomento venisse normalizzato per $r_0 = r_p$, renderebbe il termine aggiuntivo del SIF K_F di valore positivo per $0 < r < r_p$ e negativo per $r > r_p$. Così facendo valori inferiori del SIF suddetto corrisponderebbero ad un campo di tensione di valore inferiore non da una distanza di 1 mm dall'apice (evento che non ha alcun significato fisico in quanto nulla lega gli effetti di shielding e crack closure alla particolare distanza di 1mm dall'apice), bensì da una distanza che corrisponde al raggio plastico, cioè a partire dalla zona deformata elasticamente. Se pertanto il SIF suddetto fosse effettivamente in grado di descrivere gli effetti di shielding e crack closure la normalizzazione dell'argomento del logaritmo con $r_0 = r_p$ permetterebbe di collocare gli effetti dei fenomeni suddetti sulla zona elastica e non semplicemente da una distanza di 1 mm dall'apice come invece fanno gli autori.

Si propone qui di seguito una breve trattazione con la quale si ritiene gli autori del modello abbiano legato i coefficienti G , H , D ed E ai SIF K_F , K_R e K_S .

La componente di tensione σ_y assume sulla bisettrice ($\theta = 0$) la seguente forma:

$$\sigma_y = \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}[G - 4H - 8E] + \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}H - 2r^{-\frac{1}{2}}E \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (3.33)$$

Raccogliendo i termini comuni, dopo alcuni passaggi si perviene alla forma:

$$\sigma_y = \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}[G - 3H - 8E] - 2r^{-\frac{1}{2}}E \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (3.34)$$

Considerando il K_I della MFLE (equazione 3.32), per ottenere un nuovo SIF dalla forma analoga, si moltiplicano entrambi i membri della precedente per $\sqrt{2\pi r}$. Quel che ne risulta è l'espressione qui di seguito riportata:

$$\sqrt{2\pi r}\sigma_y = \sqrt{2\pi r}\left\{\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}[G - 3H - 8E] - 2r^{-\frac{1}{2}}E \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right\} \quad (3.35)$$

Da quest'ultima si può così procedere:

$$\sqrt{2\pi r}\sigma_y = \sqrt{2\pi r}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r}}[G - 3H - 8E] - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r}}4E \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right\}$$

$$\sqrt{2\pi r}\sigma_y + \sqrt{2\pi r}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r}}4E \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \sqrt{2\pi}\frac{1}{2}[G - 3H - 8E]$$

$$\sqrt{2\pi r}\left(\sigma_y + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r}}4E \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) = \sqrt{2\pi}\frac{1}{2}[G - 3H - 8E]$$

$$\sqrt{2\pi r}\left(\sigma_y + 2r^{-\frac{1}{2}}E \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}[G - 3H - 8E]$$

Nominando K_F il termine di sinistra dell'equazione precedente e introducendo il limite per r tendente a zero, cioè valutando il SIF al tendere all'apice della cricca, si ha:

$$K_F = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r}\left(\sigma_y + 2r^{-\frac{1}{2}}E \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}[G - 3H - 8E] \quad (3.36)$$

Si consideri ora l'espressione seguente che descrive la componente di tensione σ_x sui fianchi della cricca, essa si ottiene caratterizzando l'espressioni 3.29 per $\theta = \pi$.

$$\sigma_{xx} = -2\pi E r^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\pi(E + D)r^{-\frac{1}{2}} - C \quad (3.37)$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{1}{2}\pi(5E + D)r^{-\frac{1}{2}} - C$$

Considerando nulla la costante C (in assenza quindi di T-stress come si vedrà più avanti), operando analogamente a quanto fatto in precedenza relativamente alla componente di tensione σ_y si ottiene:

$$\sqrt{2\pi r}\sigma_x = -\sqrt{2\pi r} \cdot \frac{1}{2}\pi(5E + D)r^{-\frac{1}{2}} \quad (3.38)$$

$$\sqrt{2\pi r}\sigma_x = -\frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}}(5E + D)$$

Essendo $E = -D \Rightarrow 2E = -2D$, quindi:

$$\sqrt{2\pi r}\sigma_x = -\frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}}(3E + 2E + D) \quad (3.39)$$

$$\sqrt{2\pi r}\sigma_x = -\frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}}(3E - D)$$

Nominando K_R il termine di sinistra della seconda delle 3.39 e inserendo la notazione di limite si ottiene:

$$K_R = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r}\sigma_x = -\frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}}(3E - D) \quad (3.40)$$

Per concludere si consideri l'espressione seguente che descrive la componente di tensione τ_{xy} sui fianchi della cricca, essa si ottiene caratterizzando l'ultima espressioni 3.31 per $\theta = \pi$.

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}(G + H) \quad (3.41)$$

Operando analogamente a quanto fatto in precedenza relativamente alla altre due componenti di tensione σ_y e σ_x si ottiene:

$$\sqrt{2\pi r} \cdot \tau_{xy} = \sqrt{2\pi r} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)r^{-\frac{1}{2}}(G + H) \quad (3.42)$$

$$\sqrt{2\pi r} \cdot \tau_{xy} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}(G + H)$$

Nominando K_S il termine di sinistra della seconda delle 3.42 e inserendo la notazione di limite si ottiene:

$$K_S = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \cdot \tau_{xy} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}(G + H) \quad (3.43)$$

Riassumendo i risultati ottenuti si ha:

$$K_F = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \left(\sigma_y + 2r^{-\frac{1}{2}}E \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(G - 3H - 8E)$$

$$K_R = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r}\sigma_x = -\frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}}(3E - D) \quad (3.44)$$

$$K_S = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \cdot \tau_{xy} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}(G + H)$$

Le differenze che si notano tra le 3.44 e 3.1 sono dovute solo alle differenti notazioni utilizzate, come si può del resto notare confrontando la 3.2 con la 3.3. Queste ultime sono infatti le equazioni di partenza dalle quali si possono determinare le espressioni delle componenti di tensione utilizzate successivamente per definire i 3 SIF.

3.4 Verifica agli elementi finiti del modello CJP (ipotesi di comportamento "isotropic hardening" del materiale)

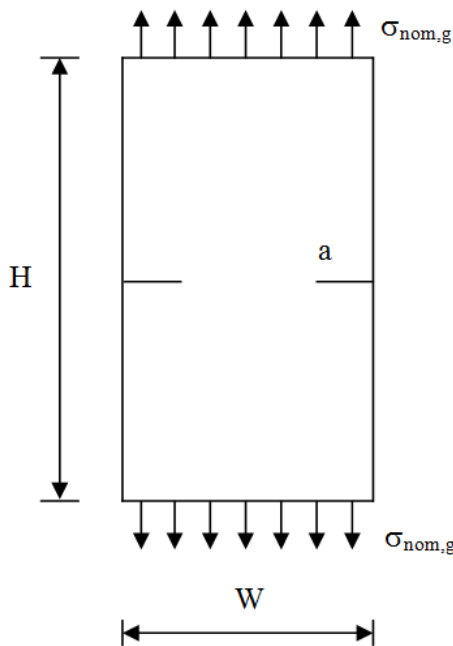
Tutte le analisi FEM qui di seguito descritte sono state condotte utilizzando il codice ANSYS® 11.0. Per verificare la validità del modello CJP ci si è avvalsi di una geometria piana

sollecitata a puro modo I ed indebolita da due cricche laterali. Tenuto conto della presenza di assi di simmetria, al calcolatore è stata modellata una geometria ridotta, al fine di ridurre i tempi di modellazione della geometria stessa e di calcolo. Gli elementi utilizzati sono isoparametrici a 8 nodi (in codice ANSYS definiti *8node plane 82*). Un dettaglio della mesh utilizzata è visibile in figura 3.4. Al fine di analizzare accuratamente i campi di tensione all'apice della cricca è stata realizzata una mesh free molto fitta, nella quale le dimensioni dell'elemento più piccolo è dell'ordine di 10^{-4} mm.

Il materiale adottato per tali analisi è il “materiale saldato generalizzato di Seeger” le cui proprietà sono:

- $E = 206000 \text{ MPa}$
- $n = 6.66$
- $K = 950 \text{ MPa}$.

La geometria analizzata è di seguito riportata:



Le dimensioni di tale piastra sono:

altezza $H = 200\text{mm}$

larghezza $W = 100\text{mm}$

semiampiezza di cricca $a = 20\text{mm}$

La tensione nominale $\sigma_{\text{nom},g}$, misurata sulla *gross area*, è stata imposta di $\sigma_{\text{nom},g} = 50 \text{ MPa}$ di trazione.

Il tipo di analisi utilizzate sono *multilinear isotropic hardening* e *multilinear kinematic hardening*. Questi sono due particolari modelli utilizzati per descrivere il comportamento reologico dei materiali.

E' noto che analizzando un materiale duttile, sottoponendolo ad una prova uniassiale, è possibile definire un diagramma tensione (σ) - deformazione (ϵ), che presenterà una fase elastica lineare ed una plastica. Il confine fra le due fasi è segnato da un valore di tensione di snervamento a trazione $\sigma_{\text{sn}(t)}$, ed uno a compressione $\sigma_{\text{sn}(c)}$. Supponendo di sottoporre un

corpo ad uno stato di tensione di trazione $\sigma_y(t)$ superiore al valore $\sigma_{sn}(t)$, dal momento in cui il materiale viene assoggettato a scarico e successivamente ad una sollecitazione di compressione, la nuova tensione di snervamento a compressione avrà un valore $\sigma'_{sn}(c)$ inferiore a $\sigma_{sn}(c)$. Questo fenomeno fu descritto per la prima volta dall'ingegnere tedesco Bauschinger e si rappresenta come una "traslazione" della superficie di plasticizzazione (incrudimento cinematico, *kinematic hardening*, figura 3.3 sinistra). Un procedimento analogo si verifica anche invertendo l'ordine di applicazione degli sforzi. In un comportamento *kinematic hardening* la tensione alla quale si abbandona allo scarico la fase elastica, dipende dalla deformazione raggiunta. Si ammette che $\sigma'_{sn}(c)$ (punto D) disti da $\sigma_y(t)$ (punto C) quanto due volte $\sigma_{sn}(t)$ (punto B) dista dal punto A.

In figura 3.3 a destra invece è descritto il modello *isotropic hardening*. Sebbene meno vicino al comportamento reale, questo modello è molto usato per la sua semplicità. Nella fase di scarico si percorre il tratto elastico fino a un punto caratterizzato da un valore simmetrico dello sforzo $\sigma_y(t)$, cioè si ha $CD = BC$. Da lì in poi si segue la curva monotona ribaltata [8].

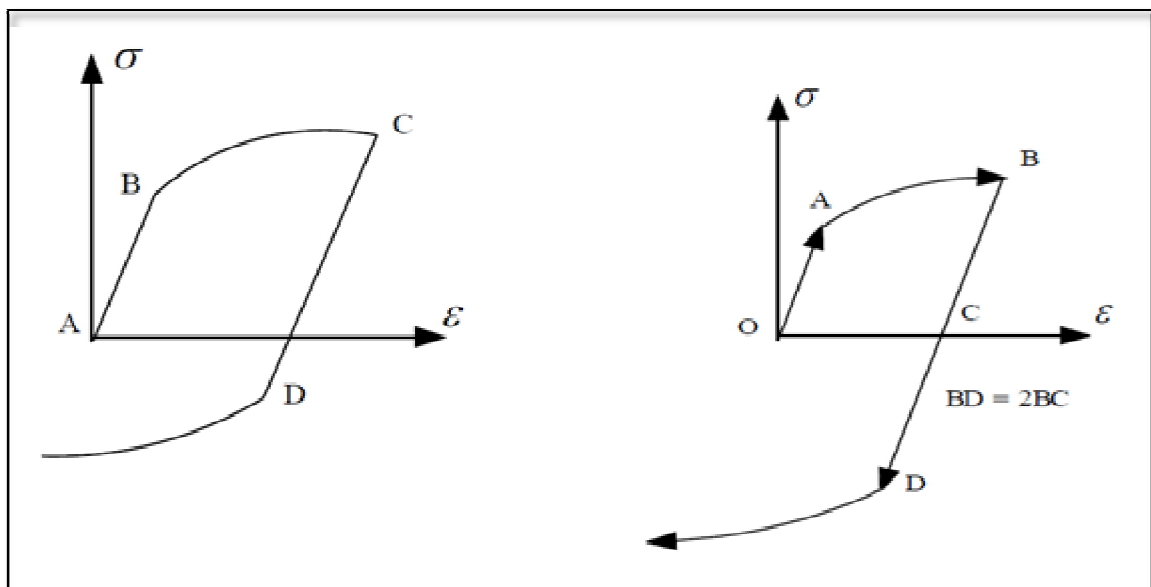
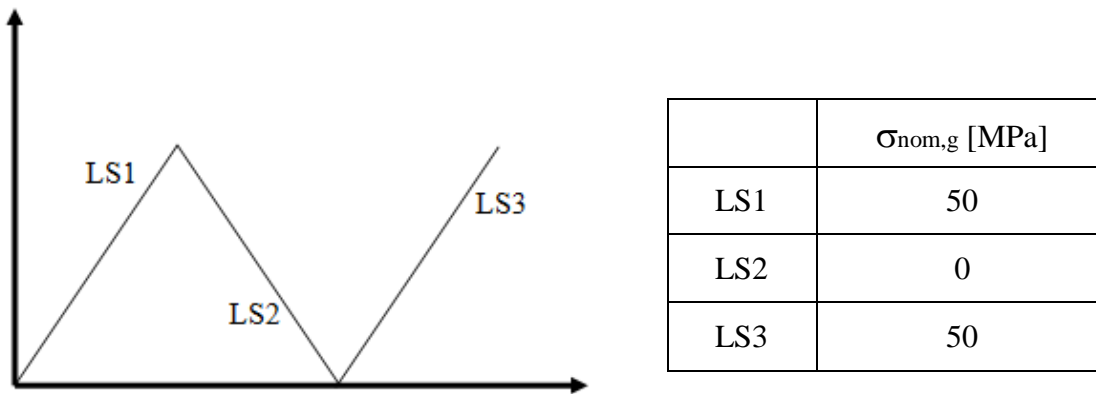


Figura 3.3 Modello kinematic hardening a sinistra e modello isotropic hardening a destra

Nell'analisi numerica è stato imposto non un classico carico di trazione bensì un ciclo costituito da una fase di carico (load step 1, LS1), una fase di scarico (load step 2, LS2) ed infine una seconda fase di carico (load step 3, LS3). Le caratteristiche di ciascuna fase sono sinteticamente riportate nella tabella che segue:



Si riporta qui di seguito anche un immagine rappresentativa della mesh adottata nell'analisi.

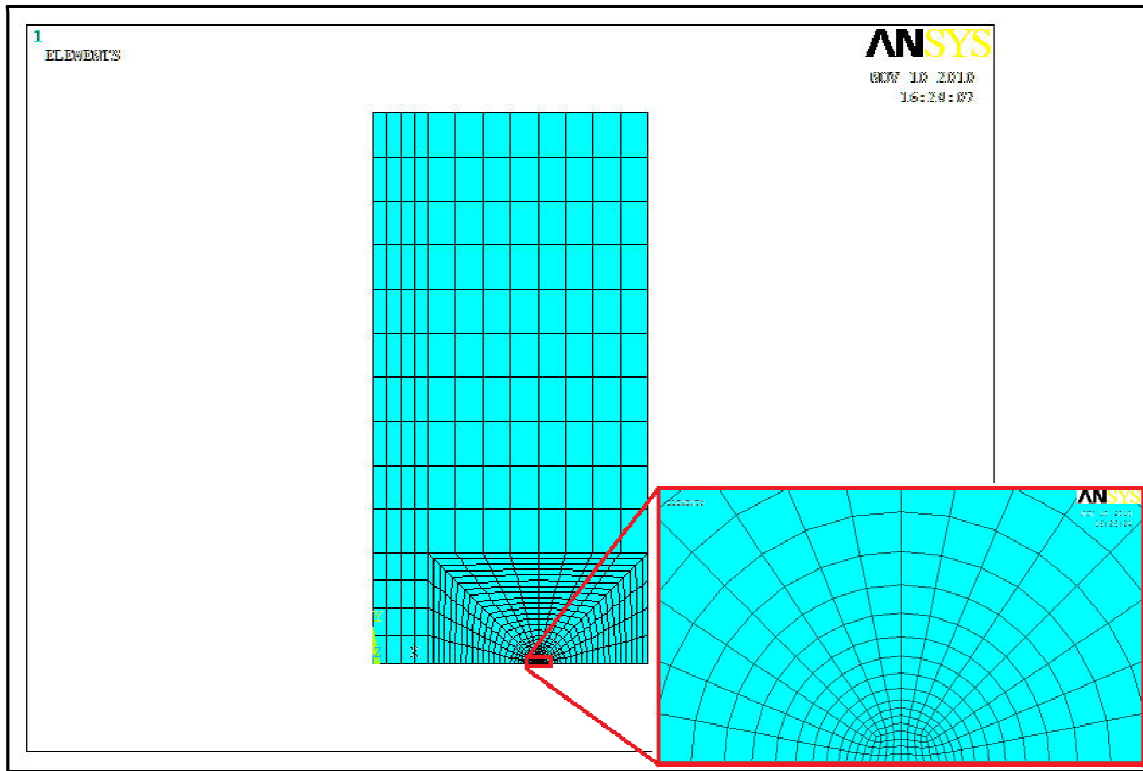


Figura 3.4 Mesh utilizzata per l'analisi.

Vengono ora riportati i risultati ottenuti con le analisi condotte sulla base di un modello *multilinear isotropic hardening* e gli opportuni confronti per ogni singolo step. In particolare si riportano i campi di tensione misurati sulla bisettrice della cricca e sui fianchi della cricca stessa, oltre agli andamenti dei fattori K_I , K_F , K_R e K_S .

Per completezza si riporta qui di seguito (figura 3.5) anche la curva monotona del materiale utilizzata nella simulazione. Come già detto il modello adottato per le analisi di cui si presentano i risultati qui di seguito è il *multilinear isotropic hardening*. Tale modello si distingue dal *bilinear isotropic hardening* per il fatto che la curva monotona del materiale non viene rappresentata con sole 2 spezzate (una che rappresenta il campo lineare elastico e una il

campo plastico), bensì viene rappresentata come somma di più spezzate, nello specifico da 100 spezzate. Il pregio di utilizzare un modello “*multilinear isotropic hardening*” rispetto ad un “*bilinear isotropic hardening*” sta quindi nella miglior precisione e accuratezza dei risultati dell’analisi, al prezzo però di una maggior complessità risolutiva e quindi maggiori tempi di calcolo.

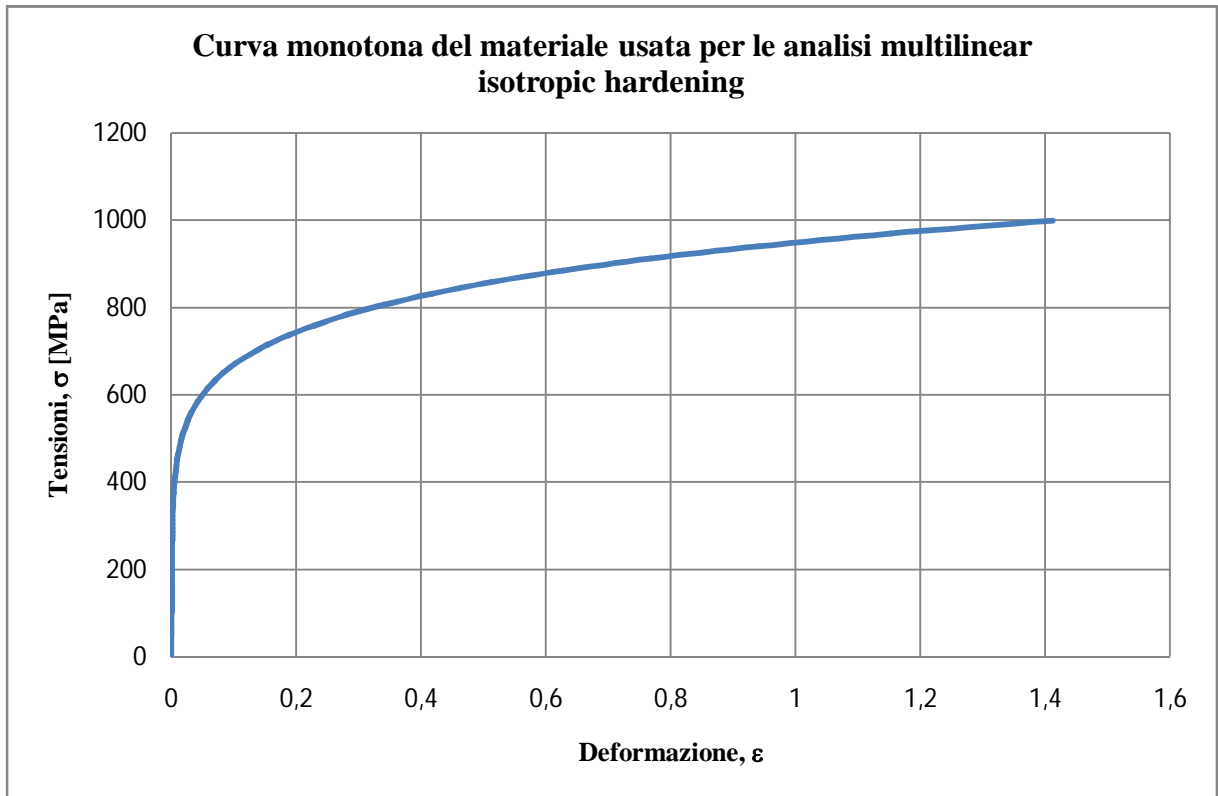


Figura 3.5 Curva monotona del materiale utilizzata nelle simulazioni multilinear isotropic hardening.

3.4.1 Load Step 1

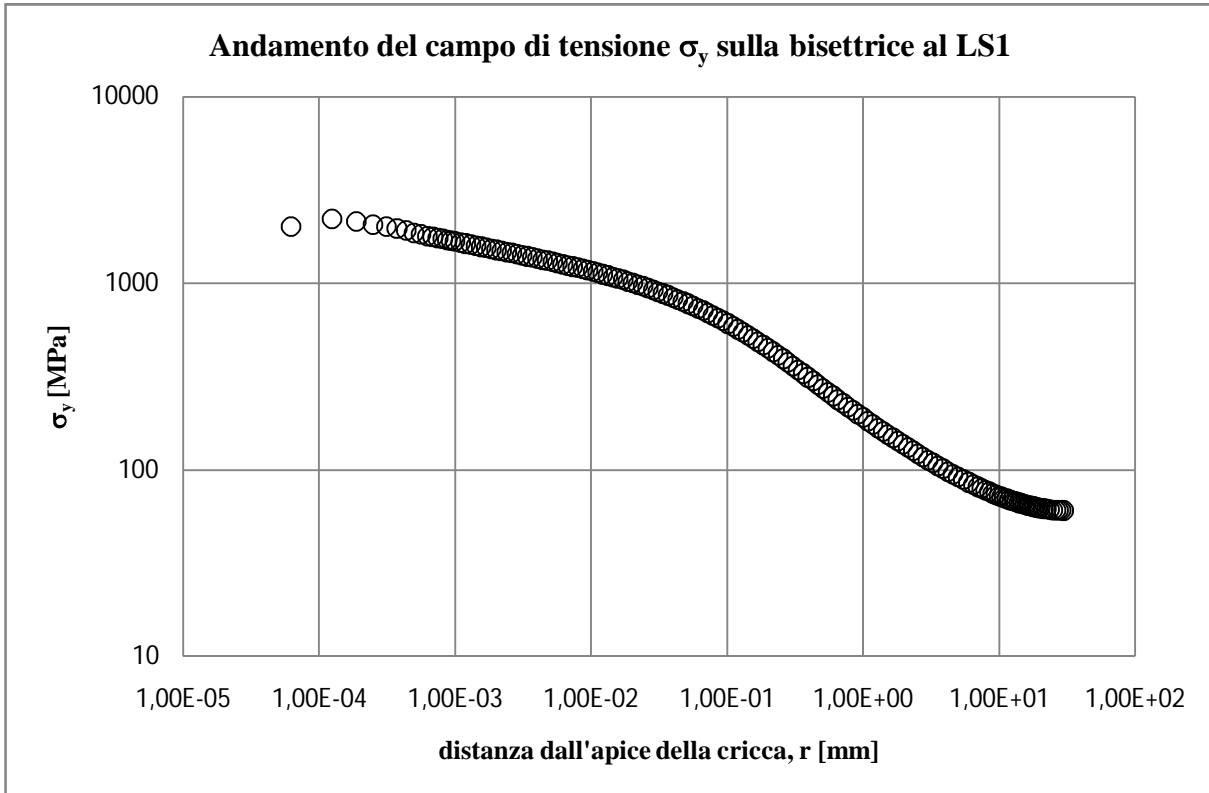


Figura 3.6 Distribuzione di tensione σ_y lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 1 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

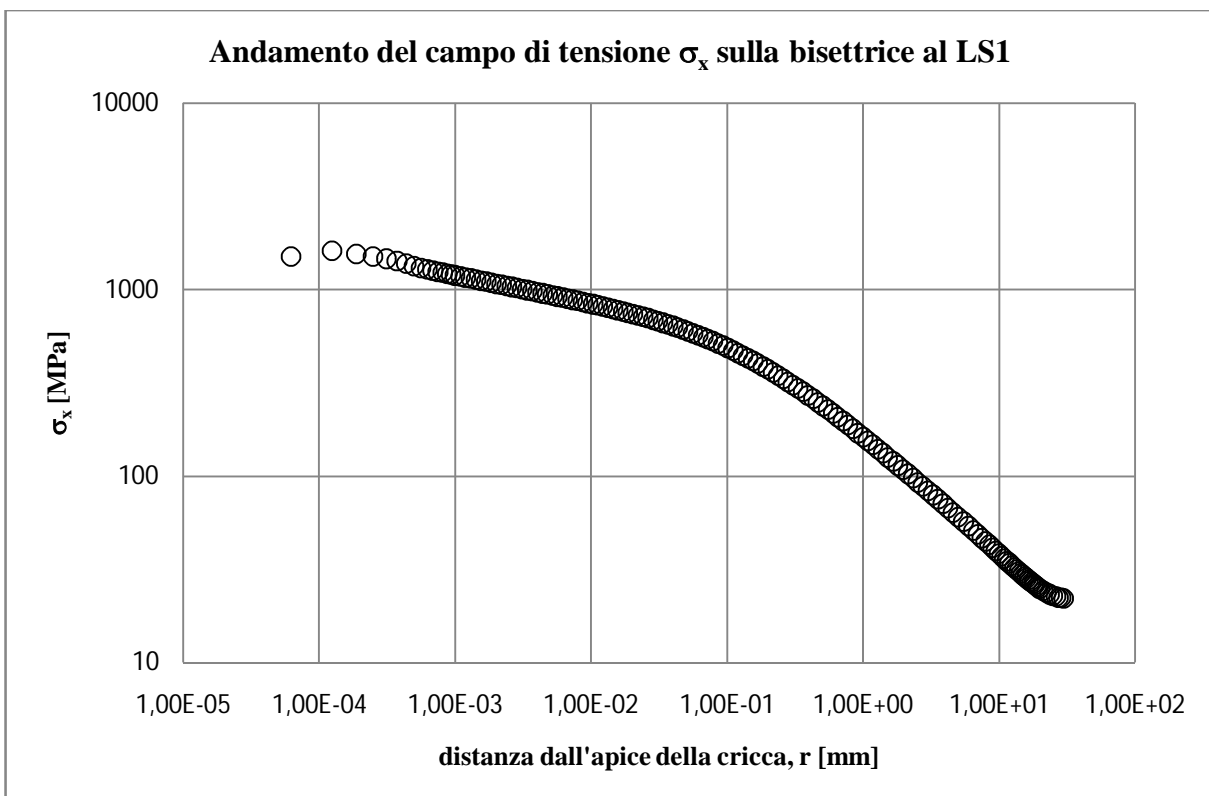


Figura 3.7 Distribuzione di tensione σ_x lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 1 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

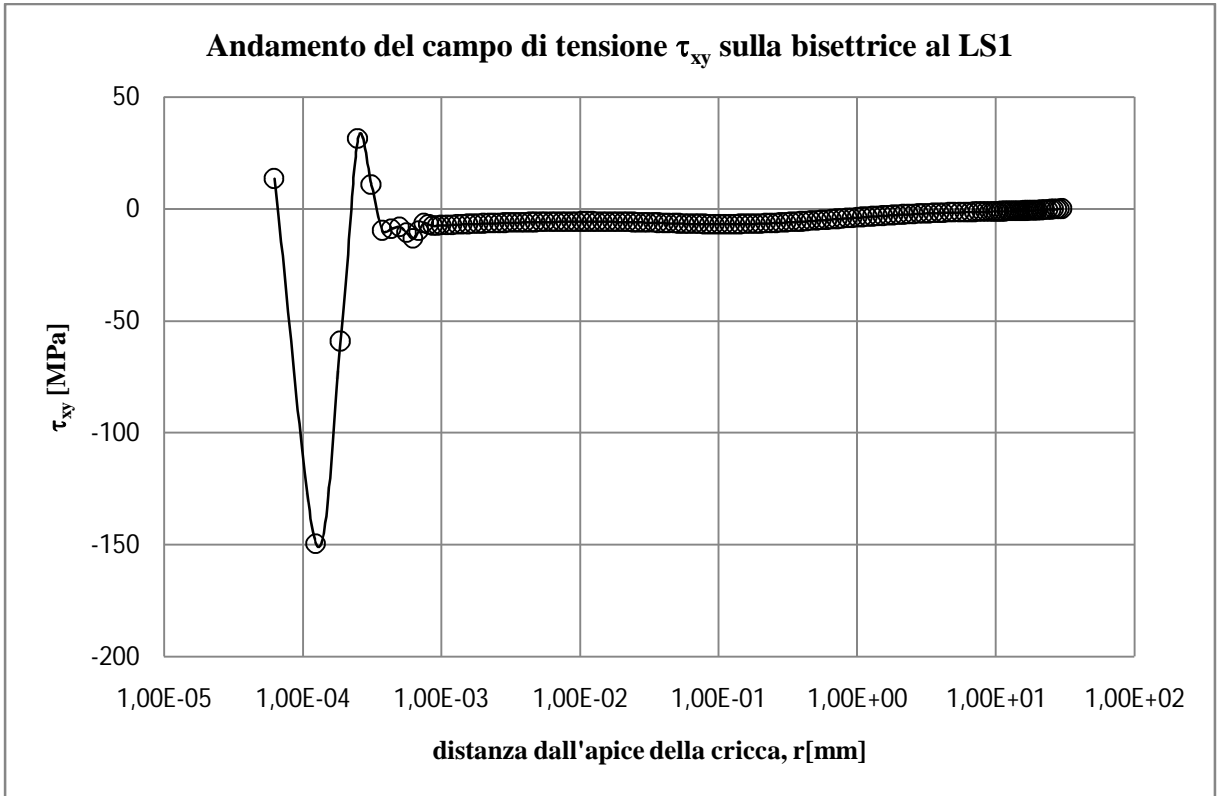


Figura 3.8 Distribuzione di tensione τ_{xy} lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 1 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

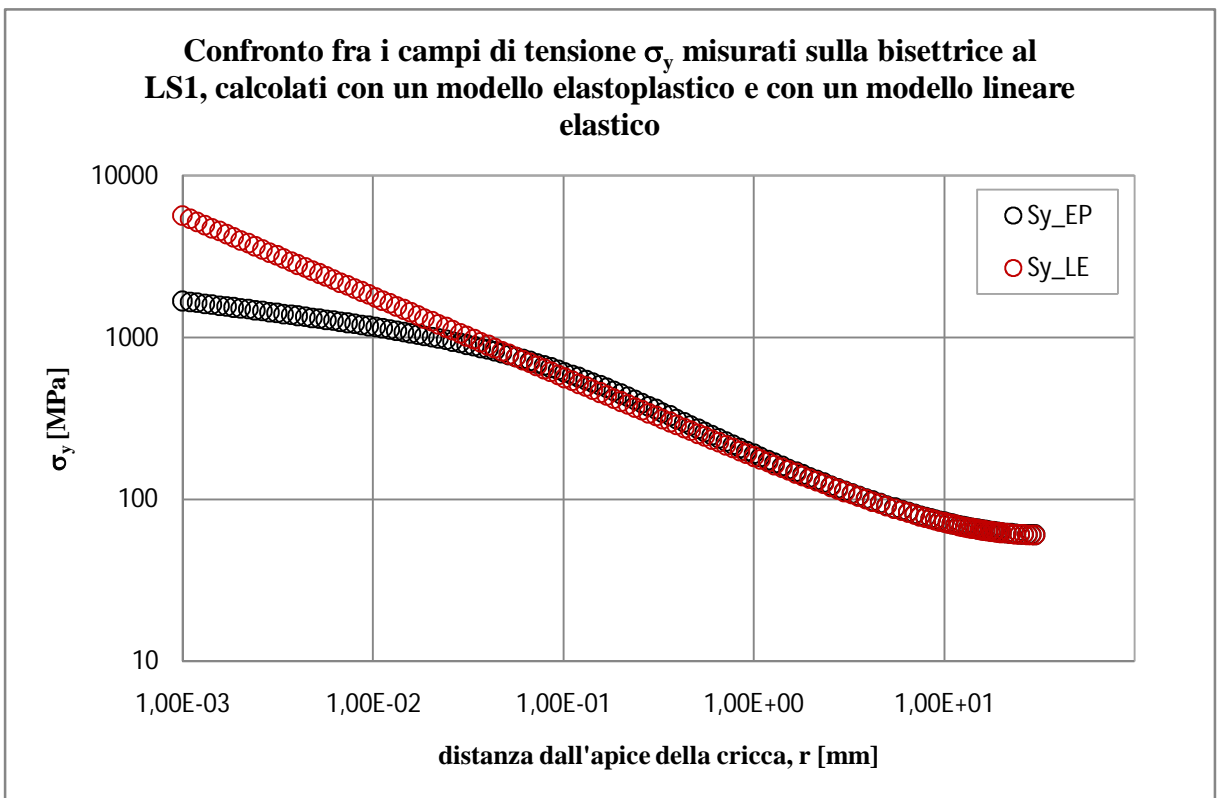


Figura 3.9 Confronto tra le distribuzioni di tensione σ_y lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 1 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale (in nero) e lineare elastico (in rosso).

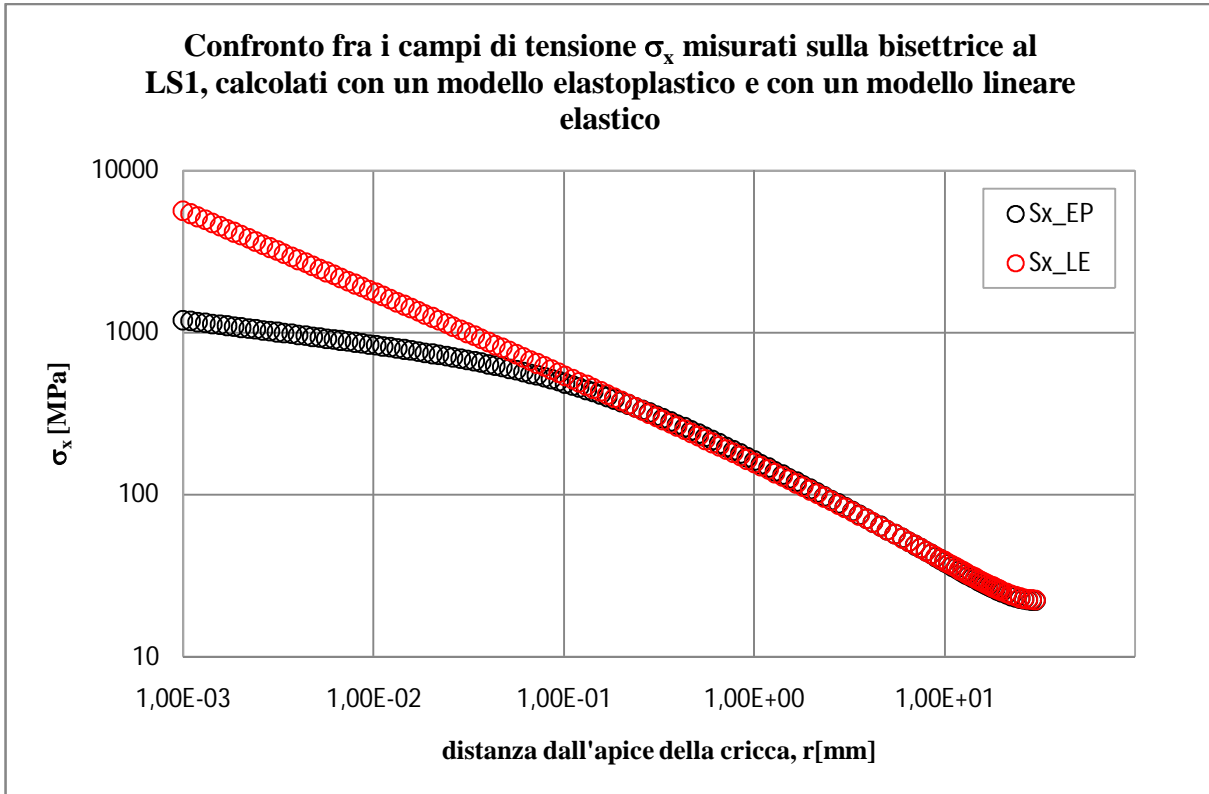


Figura 3.10 Confronto tra le distribuzioni di tensione σ_x lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 1 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale (in nero) e lineare elastico (in rosso).

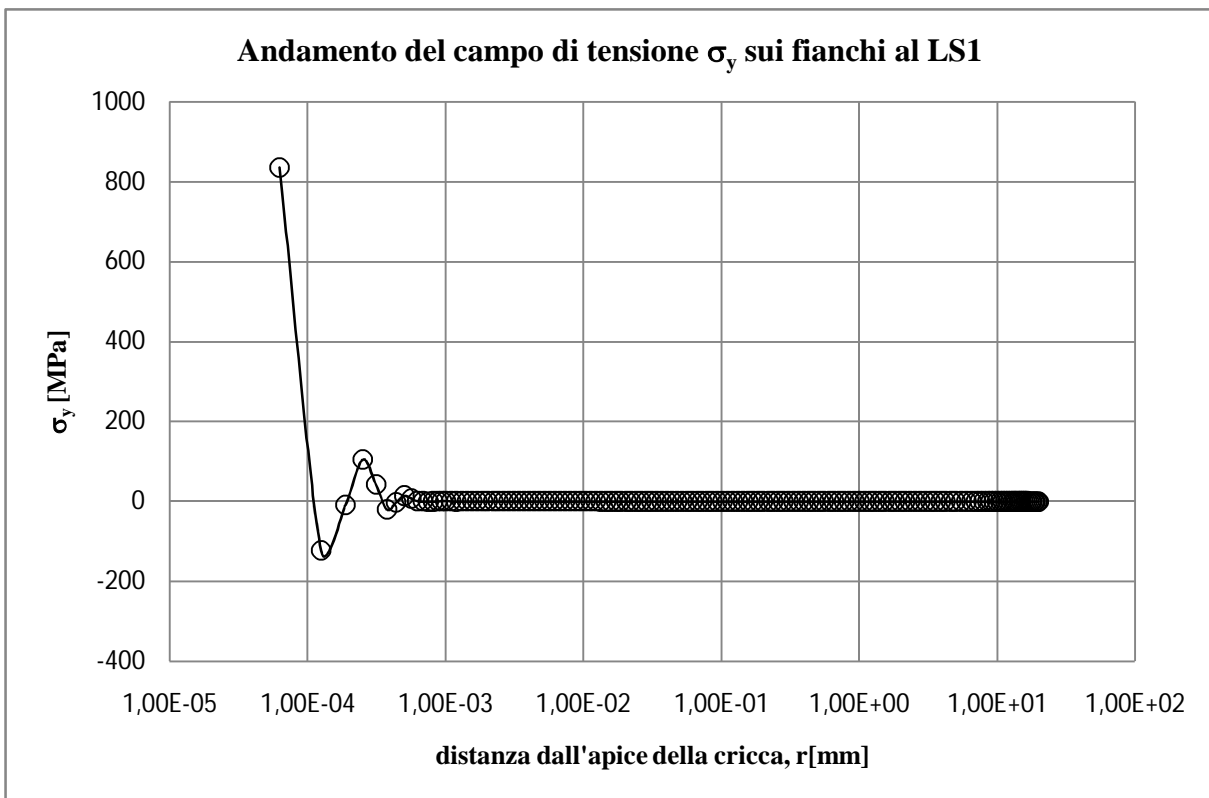


Figura 3.11 Distribuzione di tensione σ_y lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 1 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

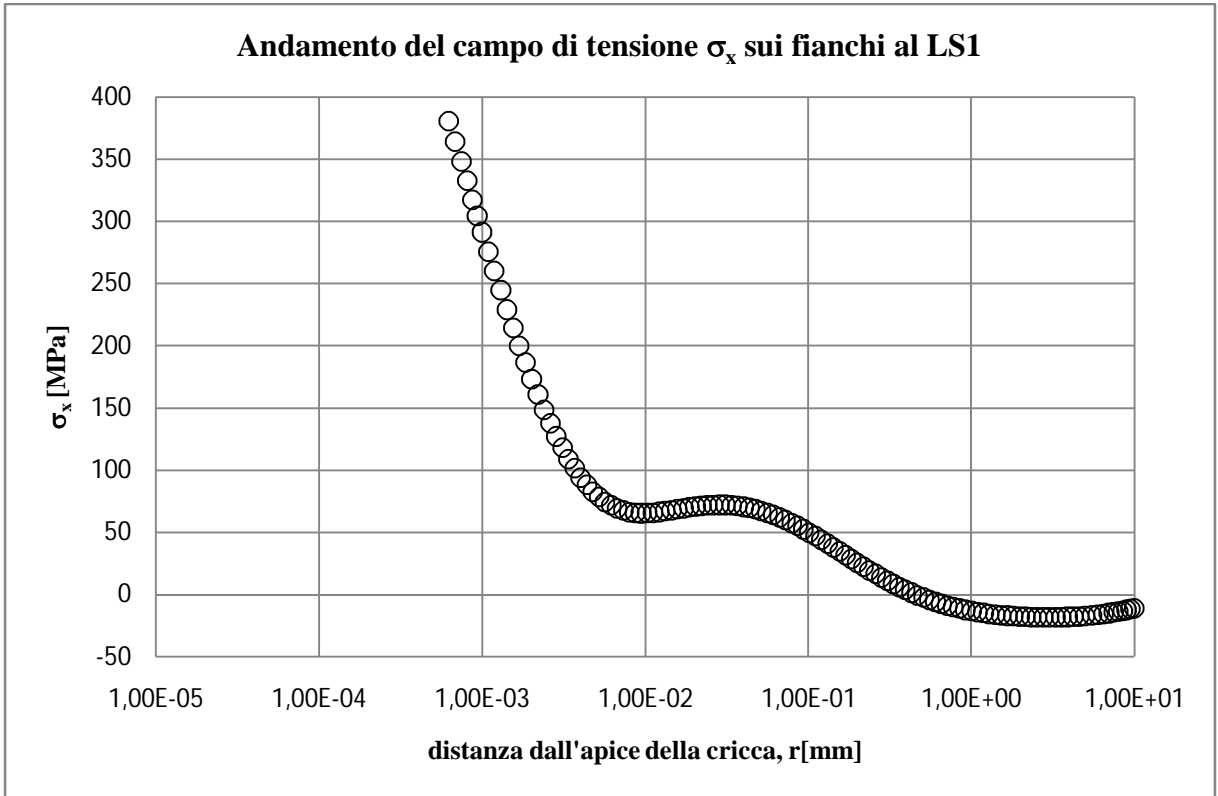


Figura 3.12 Distribuzione di tensione σ_x lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 1 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

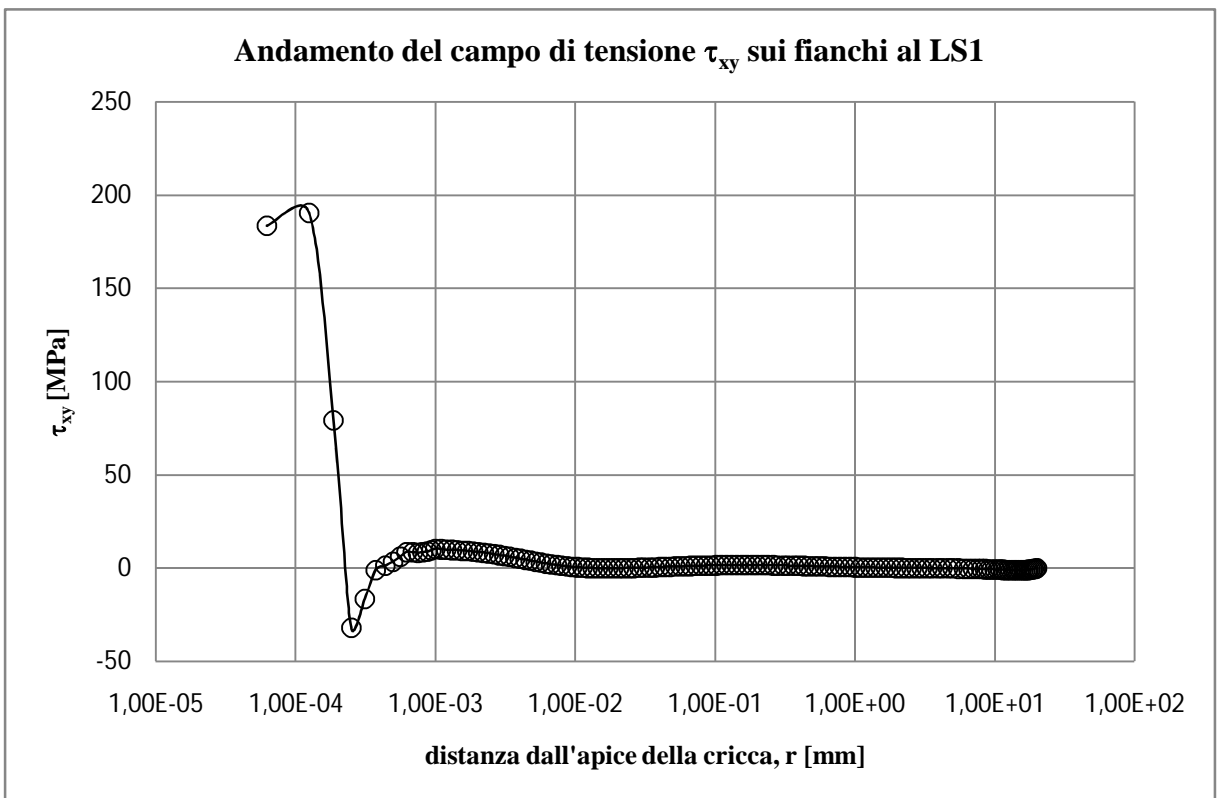


Figura 3.13 Distribuzione di tensione τ_{xy} lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 1 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

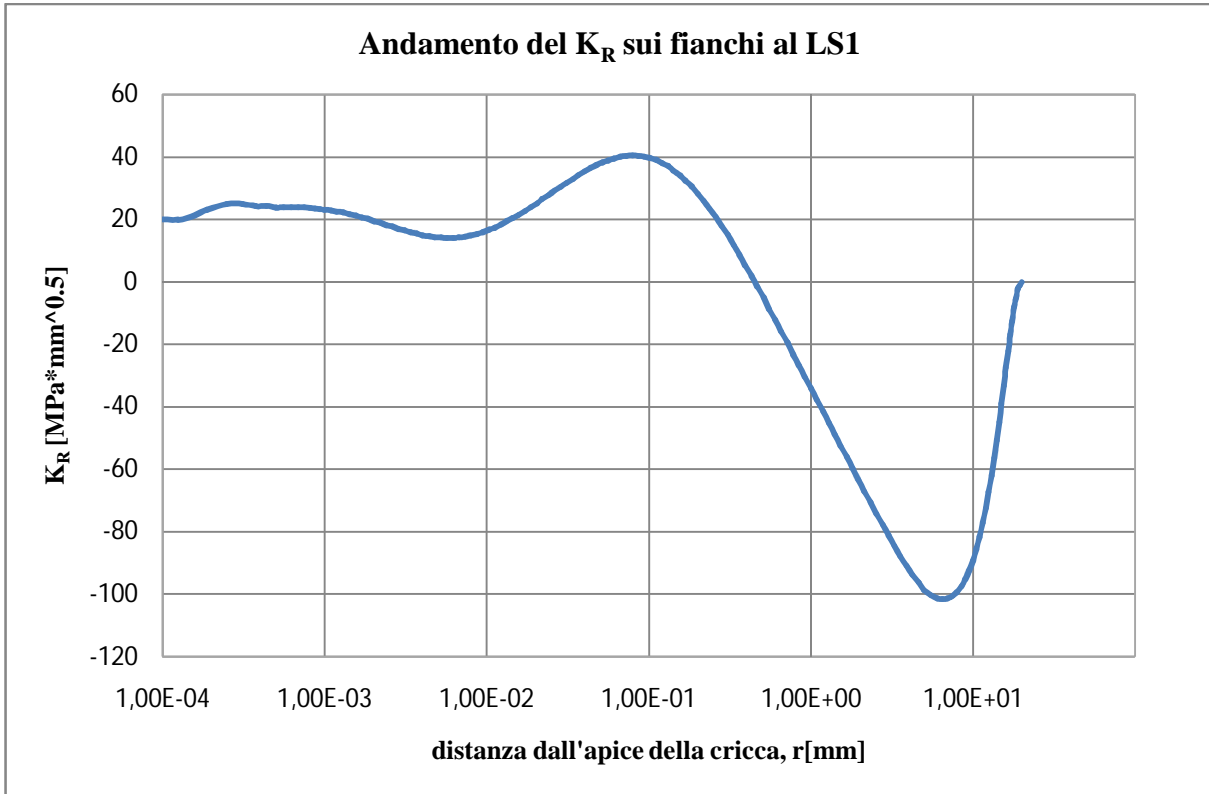


Figura 3.14 Andamento del fattore di intensificazione della tensioni K_R valutato al load step 1.

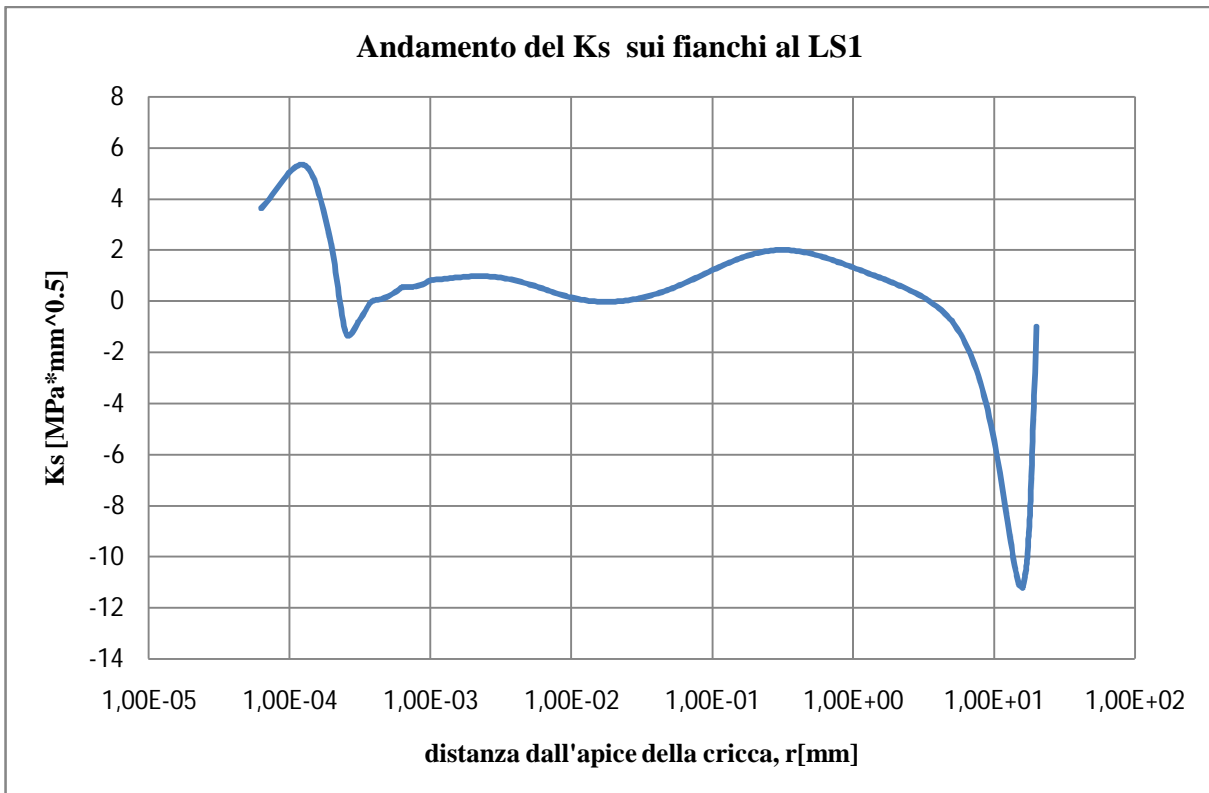


Figura 3.15 Andamento del fattore di intensificazione della tensioni K_S valutato al load step 1.

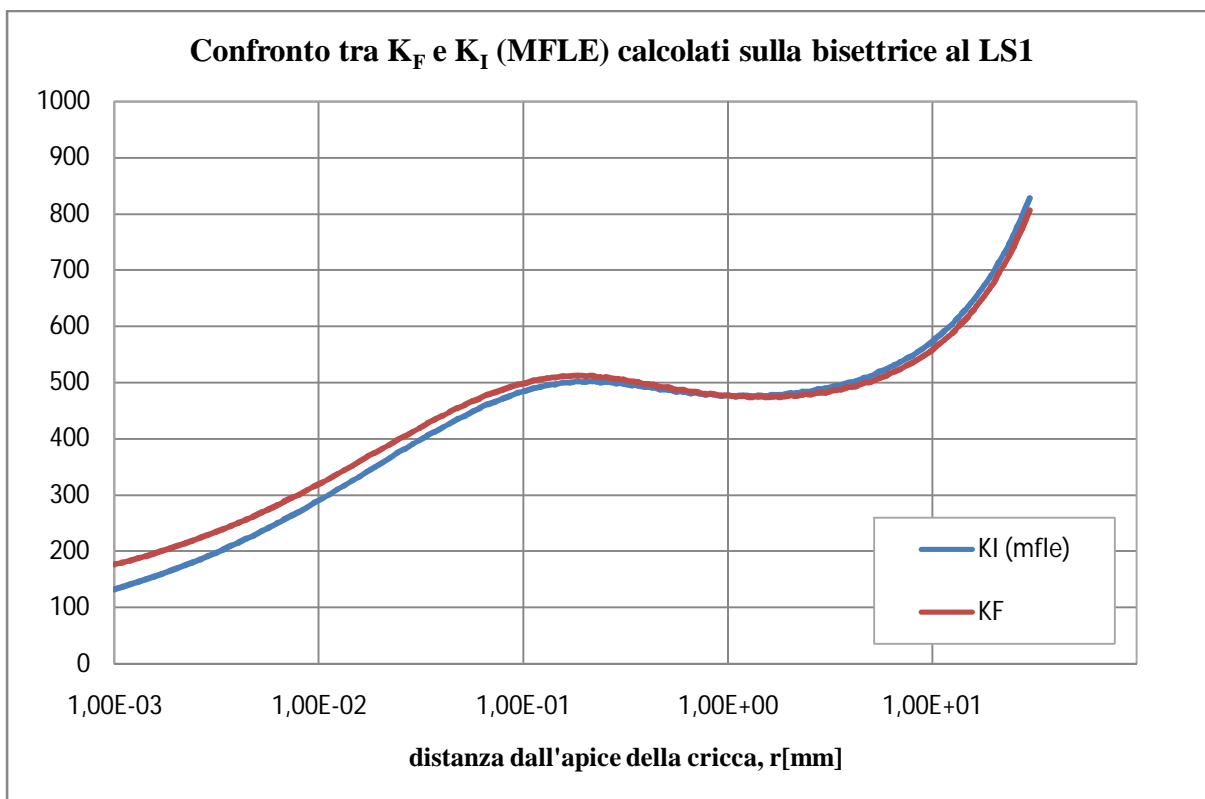


Figura 3.16 Confronto tra l'andamento del K_F (modello CJP) e il K_I della MFLE, utilizzando per il loro calcolo la distribuzione di tensione σ_y determinata con un modello elastoplastico del materiale. Il tutto valutato al load step 1.

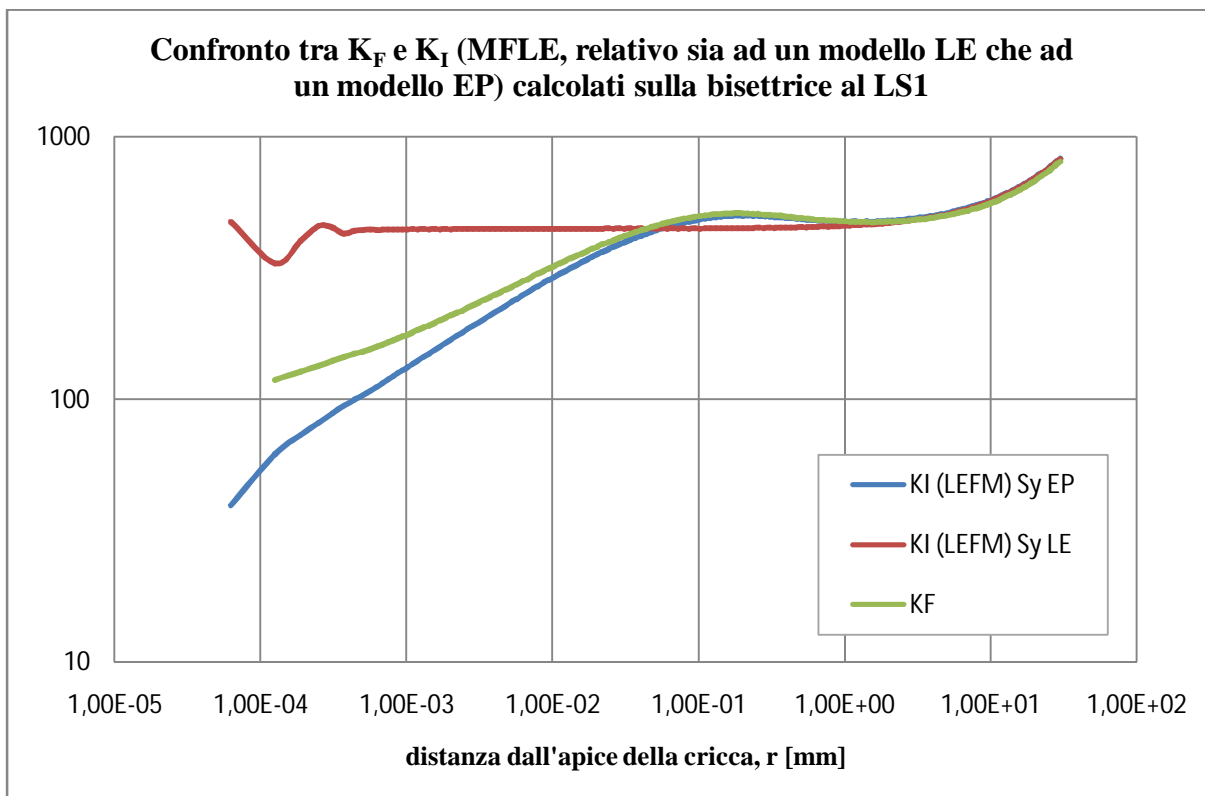


Figura 3.17 Confronto tra l'andamento del K_F (modello CJP) e il K_I della MFLE utilizzando per il calcolo la distribuzione di tensione σ_y determinata con un modello elastoplastico del materiale ed il K_I della MFLE utilizzando per il calcolo la distribuzione di tensione σ_y determinata con un modello lineare elastico del materiale. Il tutto valutato al load step 1.

3.4.2 Load Step 2

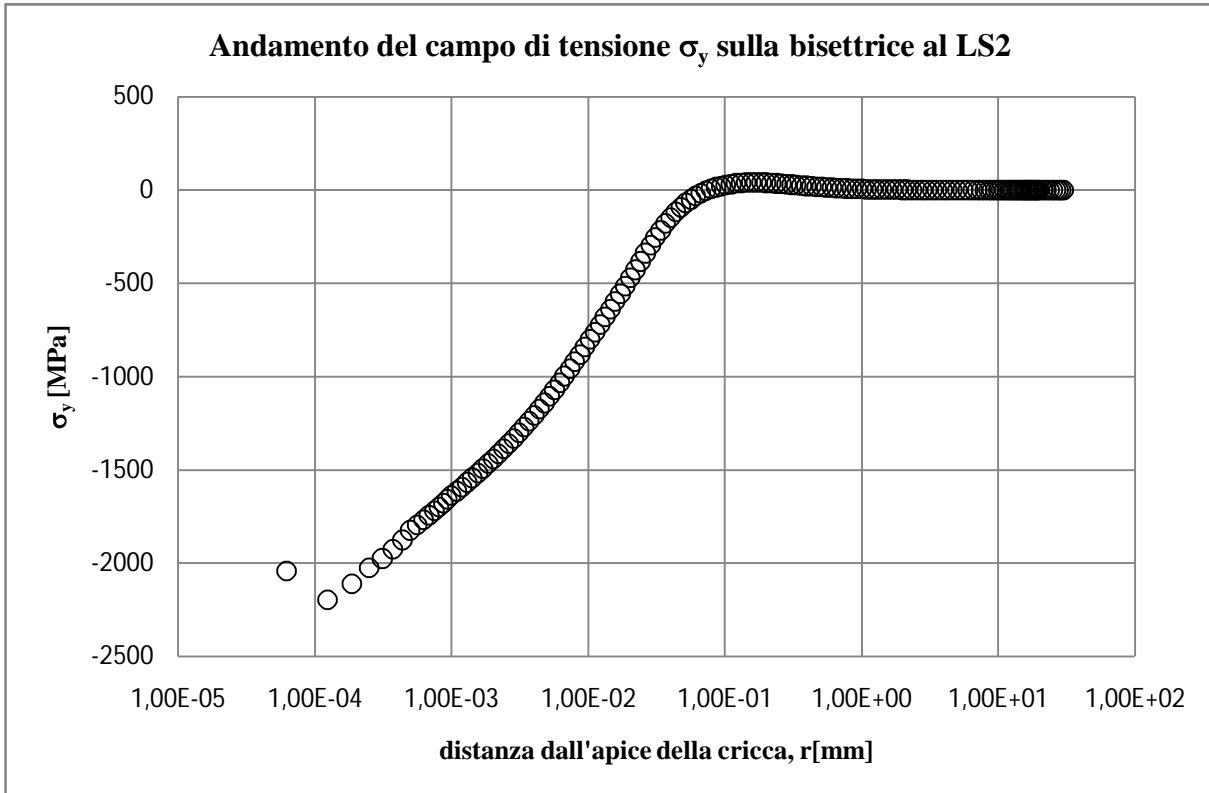


Figura 3.18 Distribuzione di tensione σ_y lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 2 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

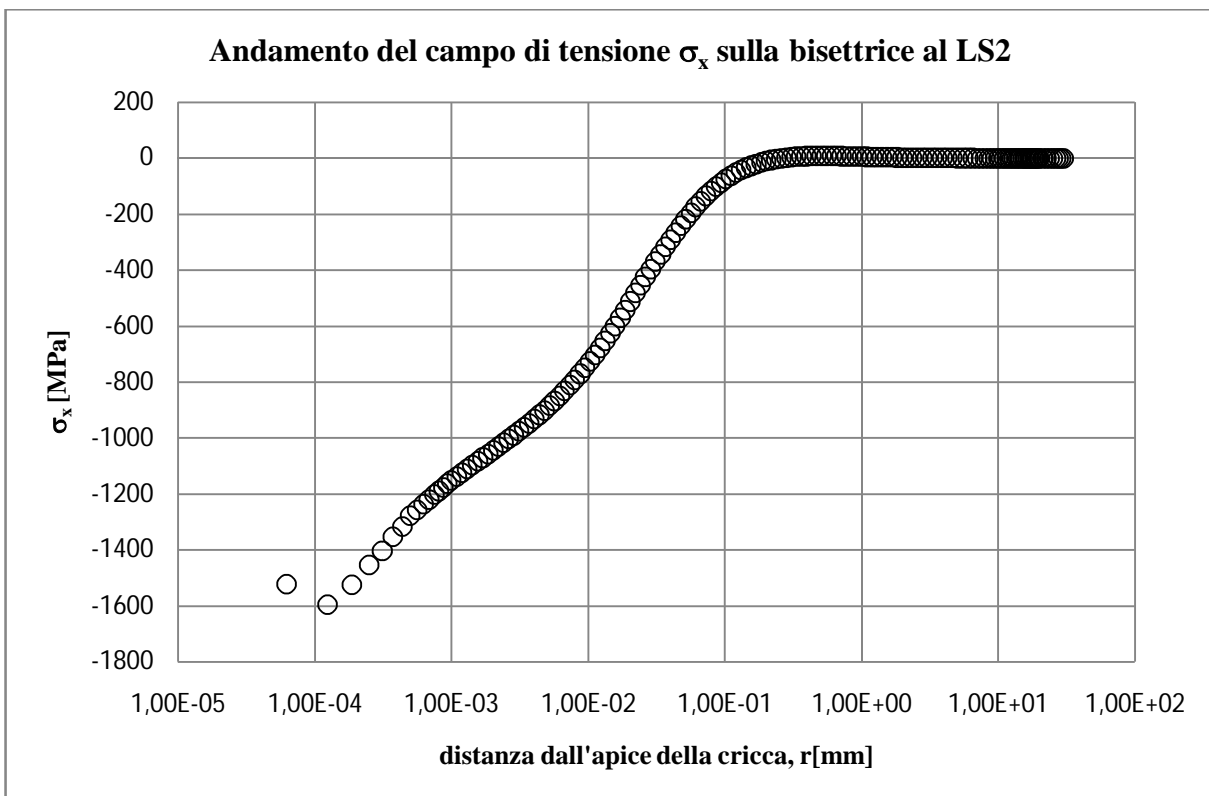


Figura 3.19 Distribuzione di tensione σ_x lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 2 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

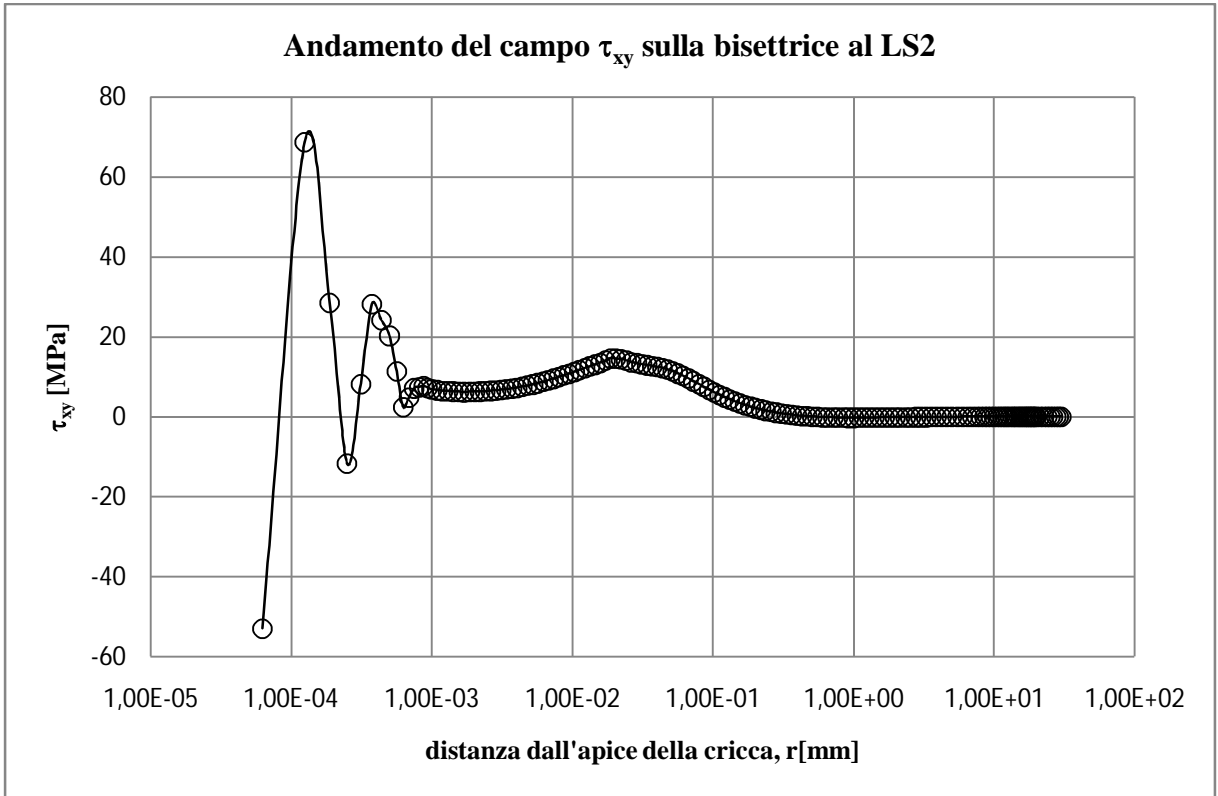


Figura 3.20 Distribuzione di tensione τ_{xy} lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 2 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

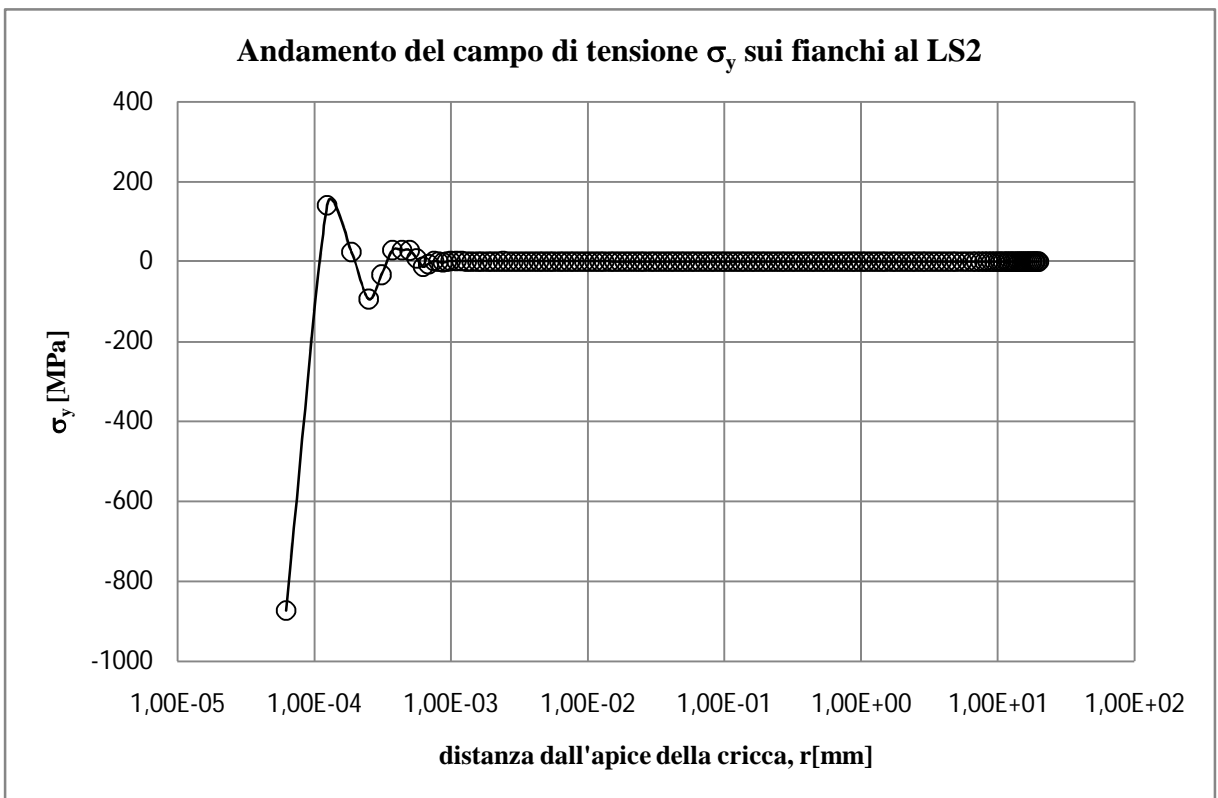


Figura 3.21 Distribuzione di tensione σ_y lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 2 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

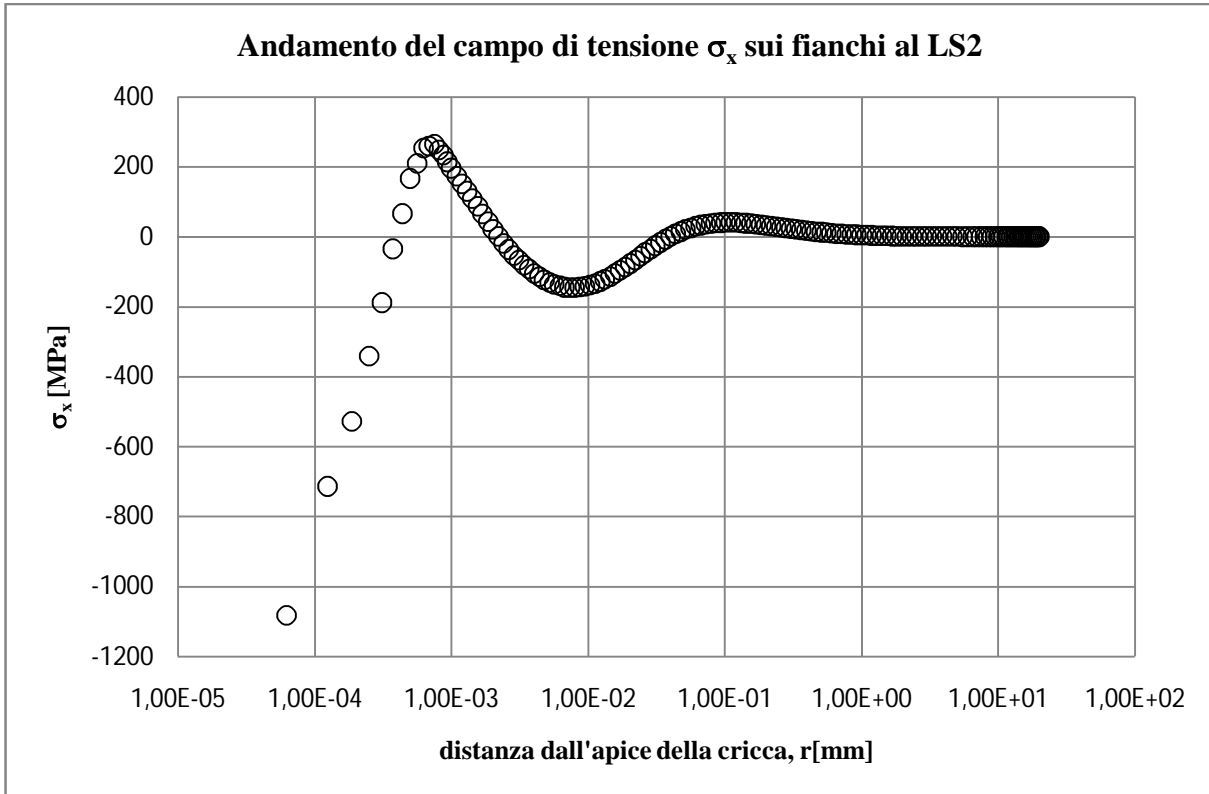


Figura 3.22 Distribuzione di tensione σ_x lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 2 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

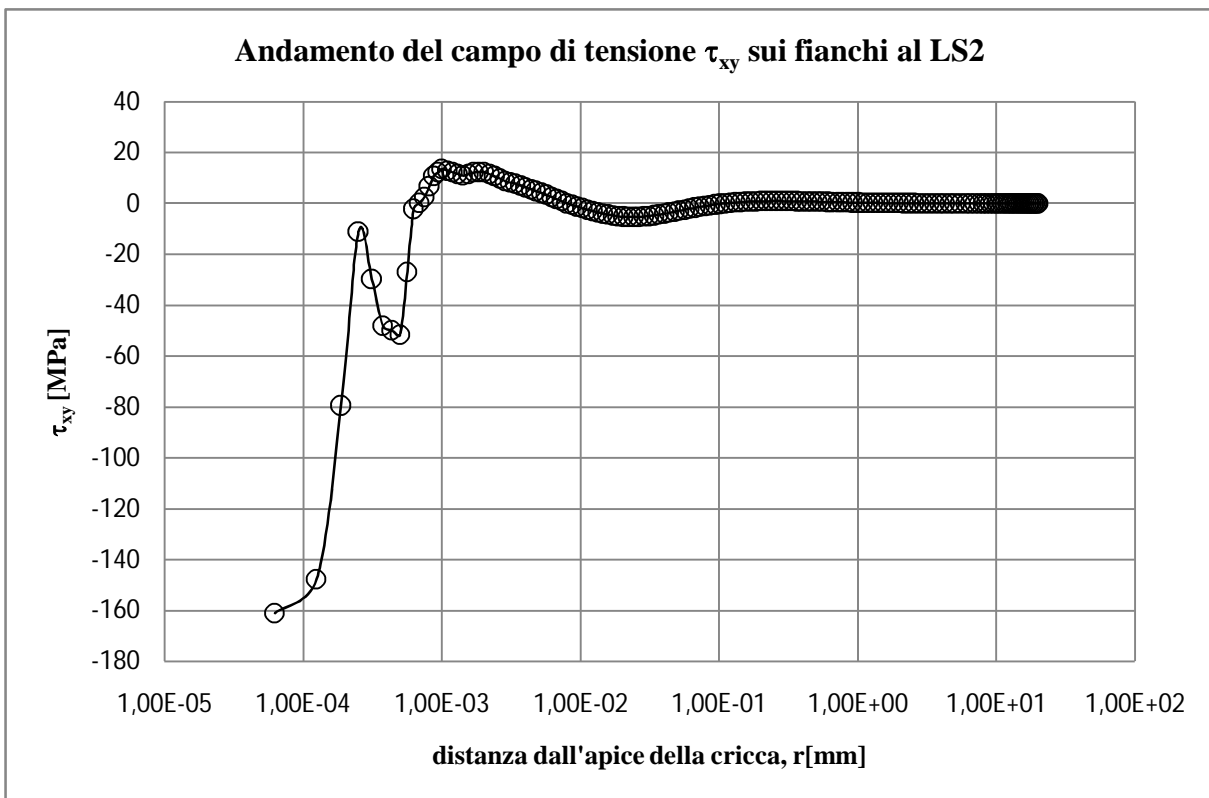


Figura 3.23 Distribuzione di tensione τ_{xy} lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 2 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

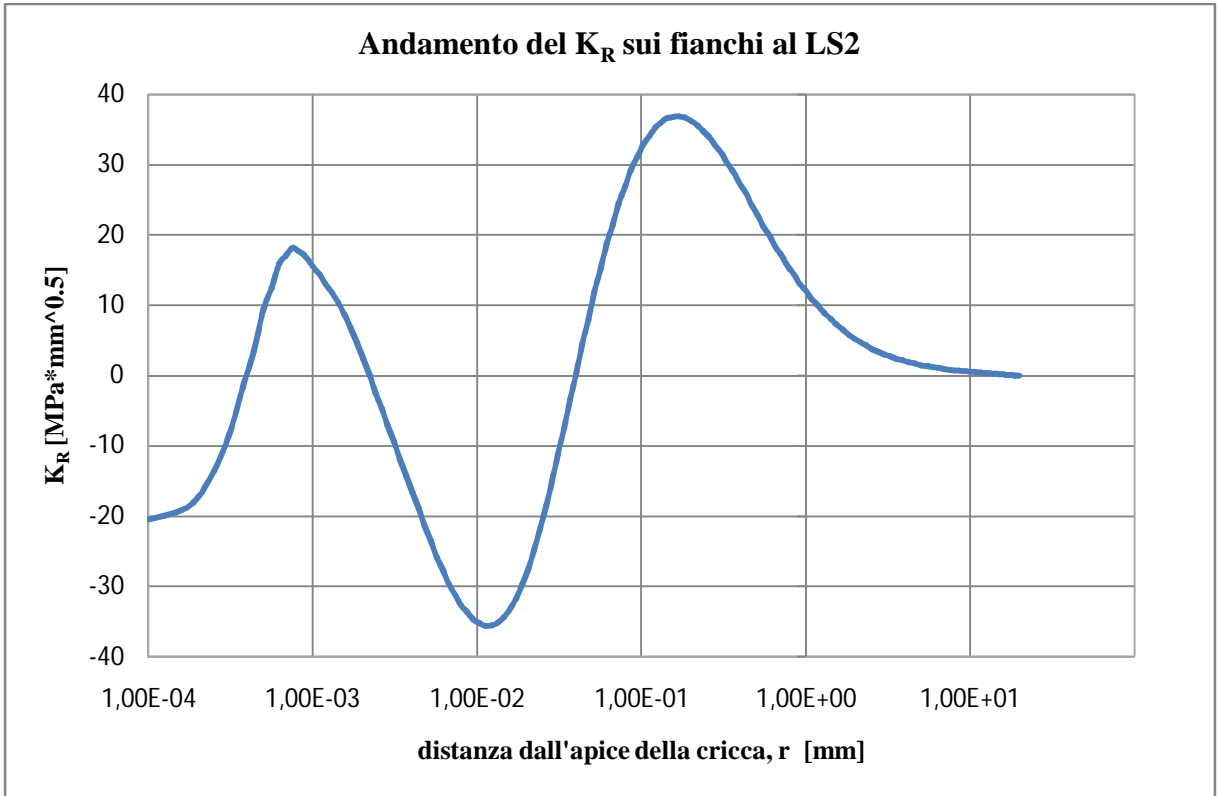


Figura 3.24 Andamento del fattore di intensificazione della tensioni K_R valutato al load step 2.

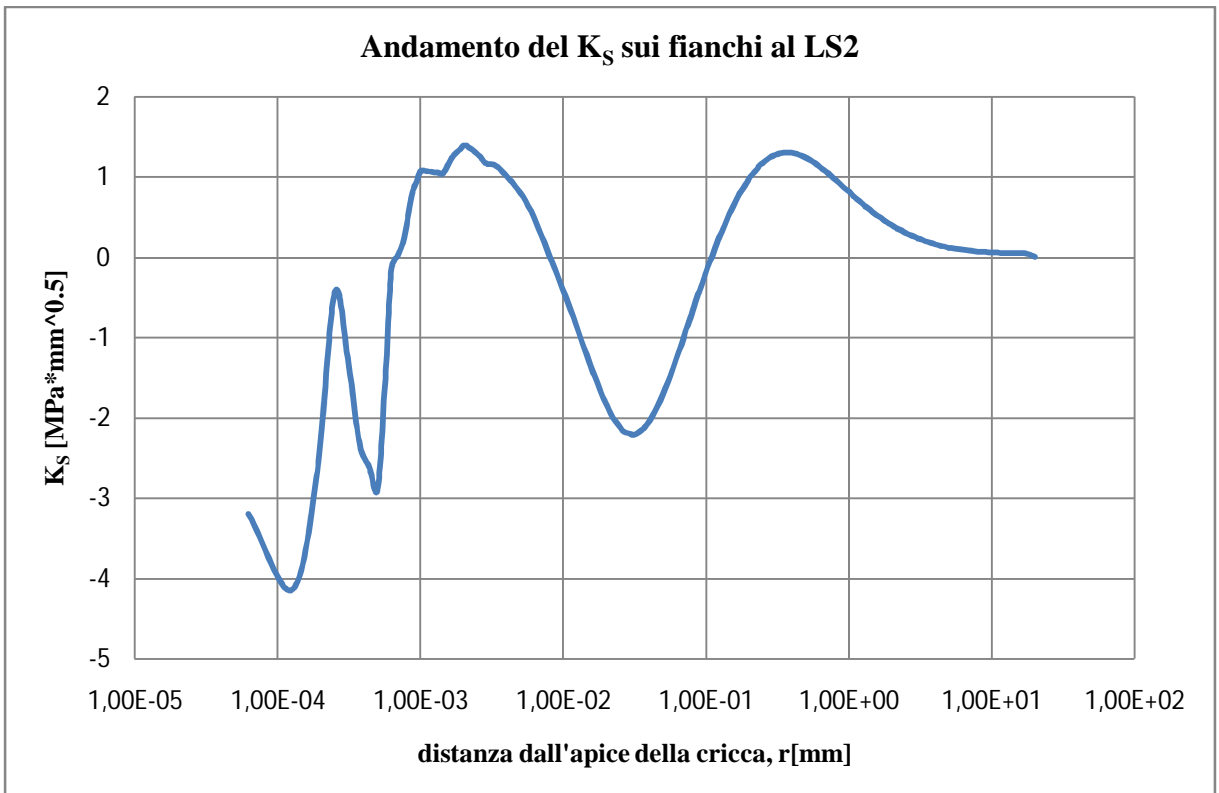


Figura 3.25 Andamento del fattore di intensificazione della tensioni K_S valutato al load step 2.

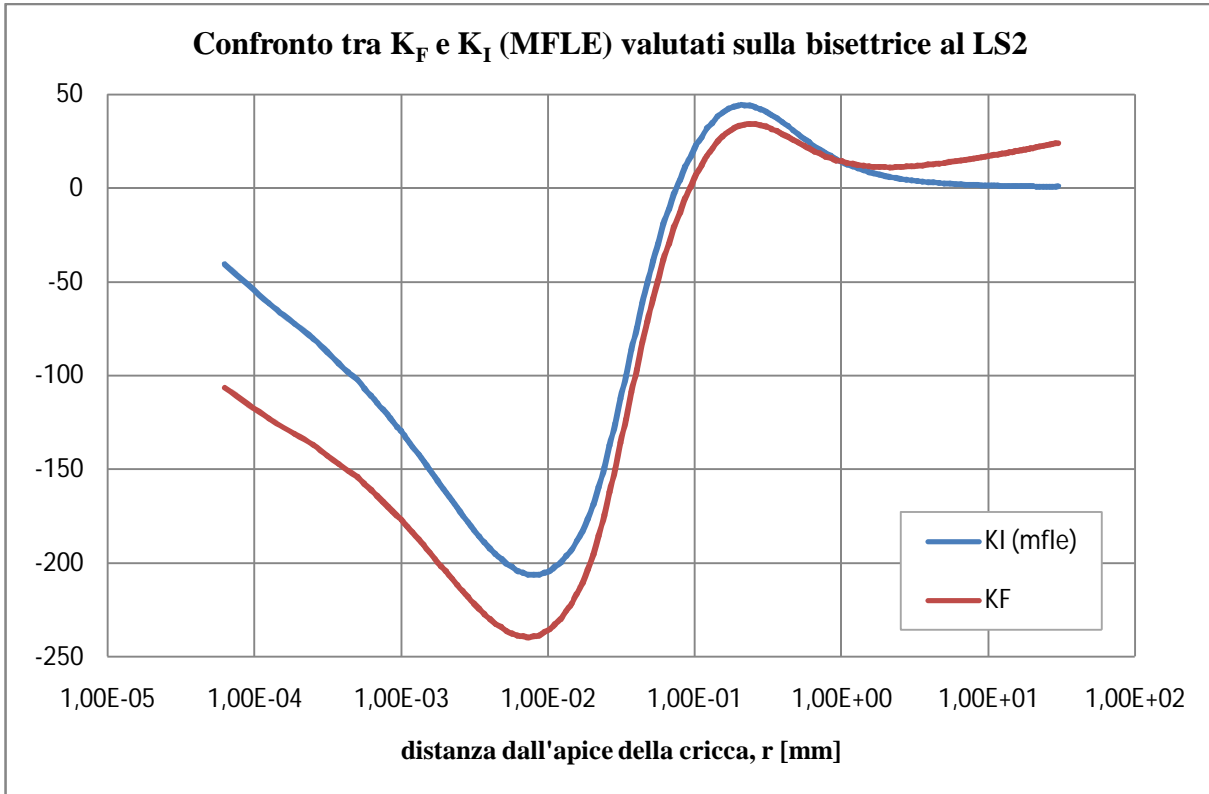


Figura 3.26 Confronto tra l'andamento del K_F (modello CJP) e il K_I della MFLE, utilizzando per il loro calcolo la distribuzione di tensione σ_y determinata con un modello elastoplastico del materiale. Il tutto valutato al load step 2.

3.4.3 Load Step 3

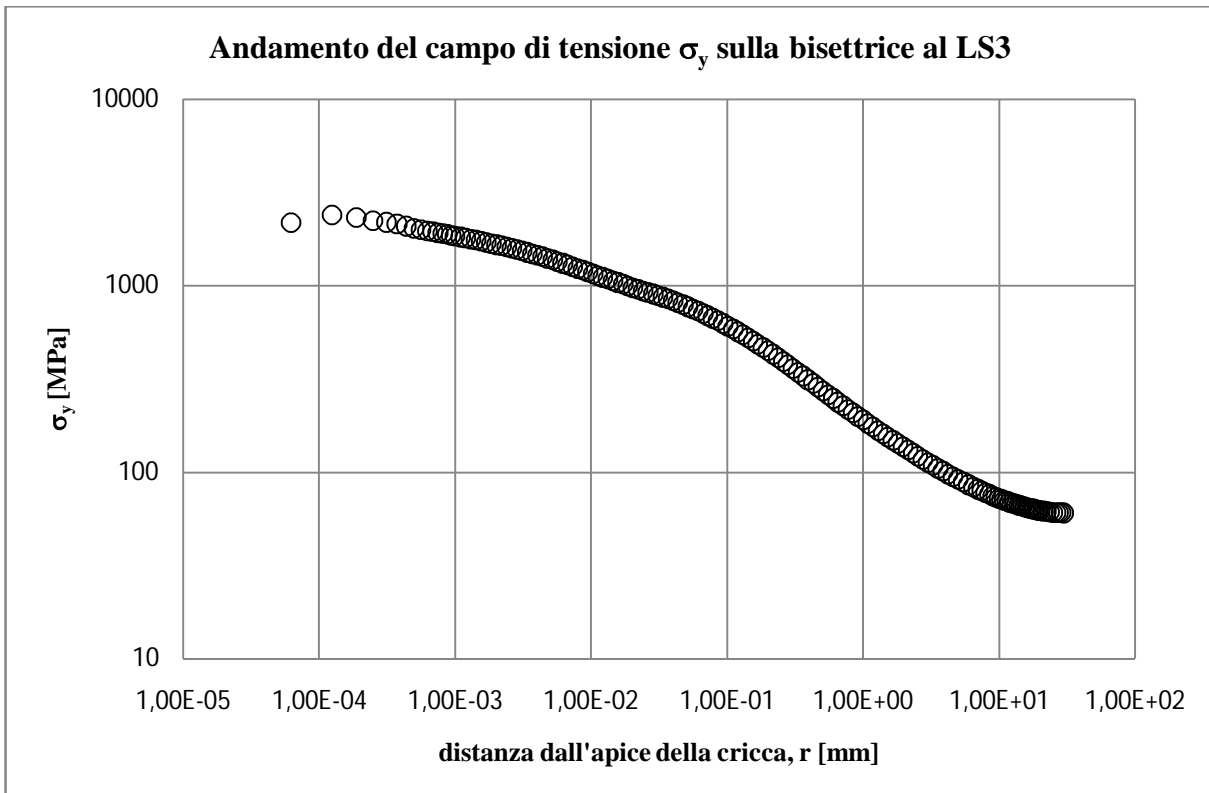


Figura 3.27 Distribuzione di tensione σ_y lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 3 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

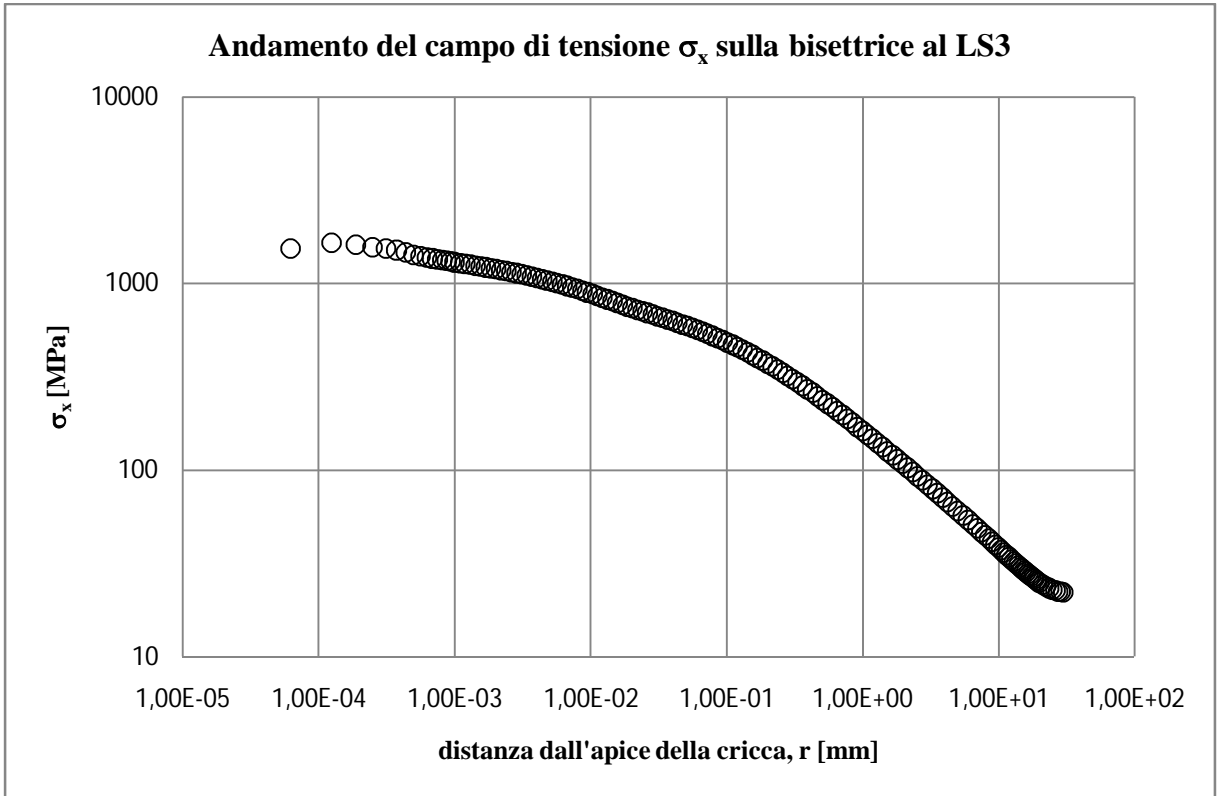


Figura 3.28 Distribuzione di tensione σ_x lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 3 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

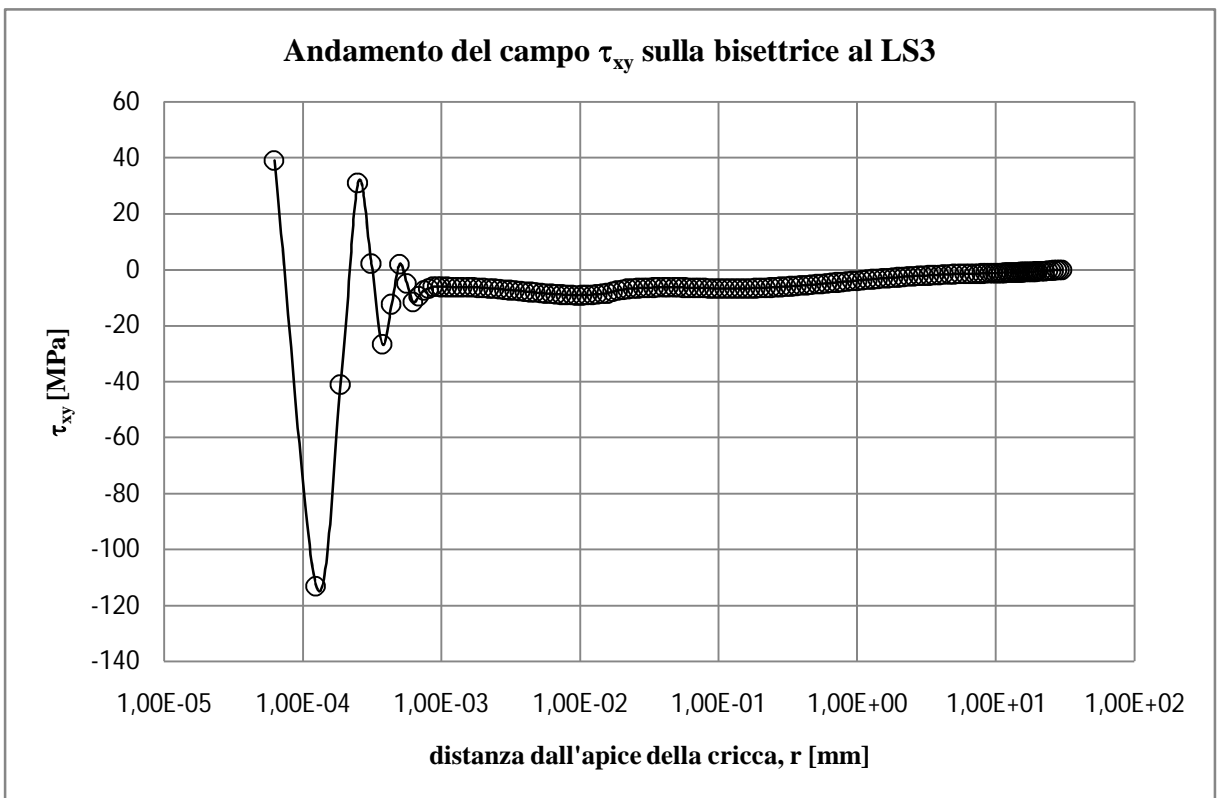


Figura 3.29 Distribuzione di tensione τ_{xy} lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 3 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

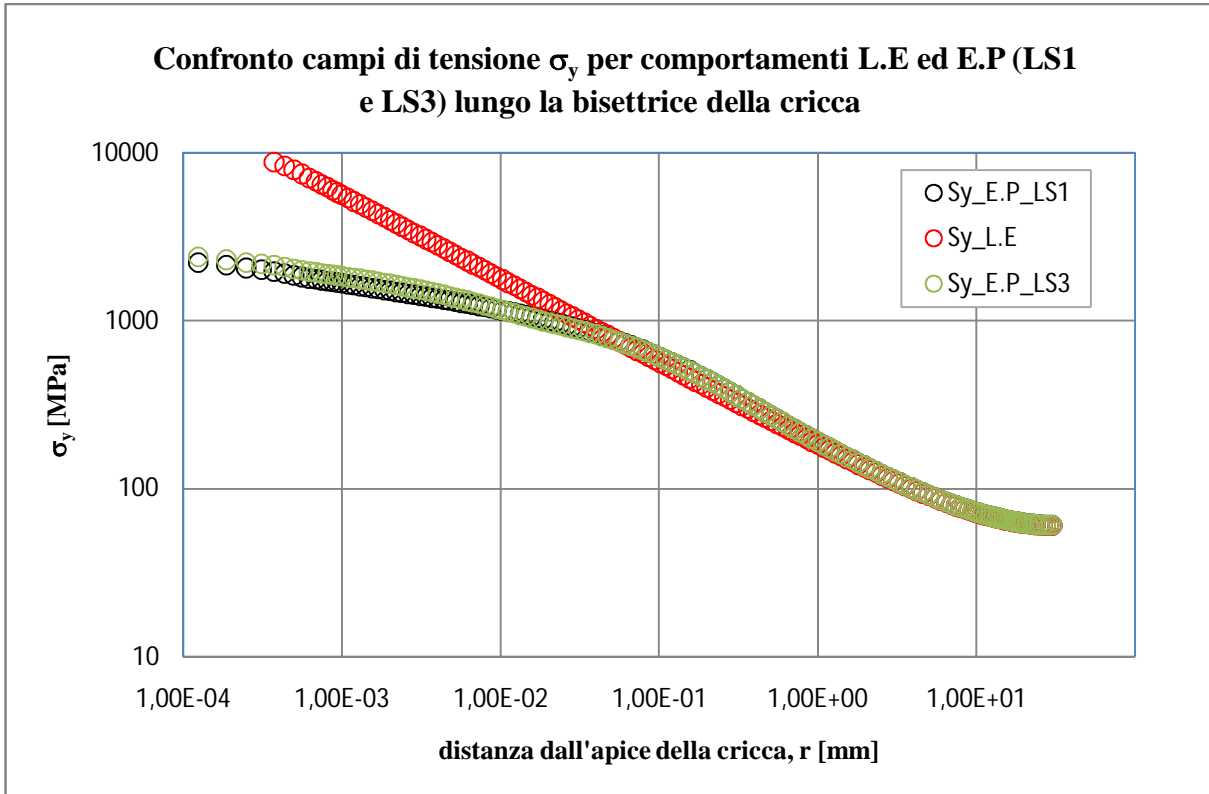


Figura 3.30 Confronto tra le distribuzioni di tensione σ_y lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 3 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale (in verde) e lineare elastico (in rosso) e distribuzione di tensione σ_y lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 1 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale (in nero).

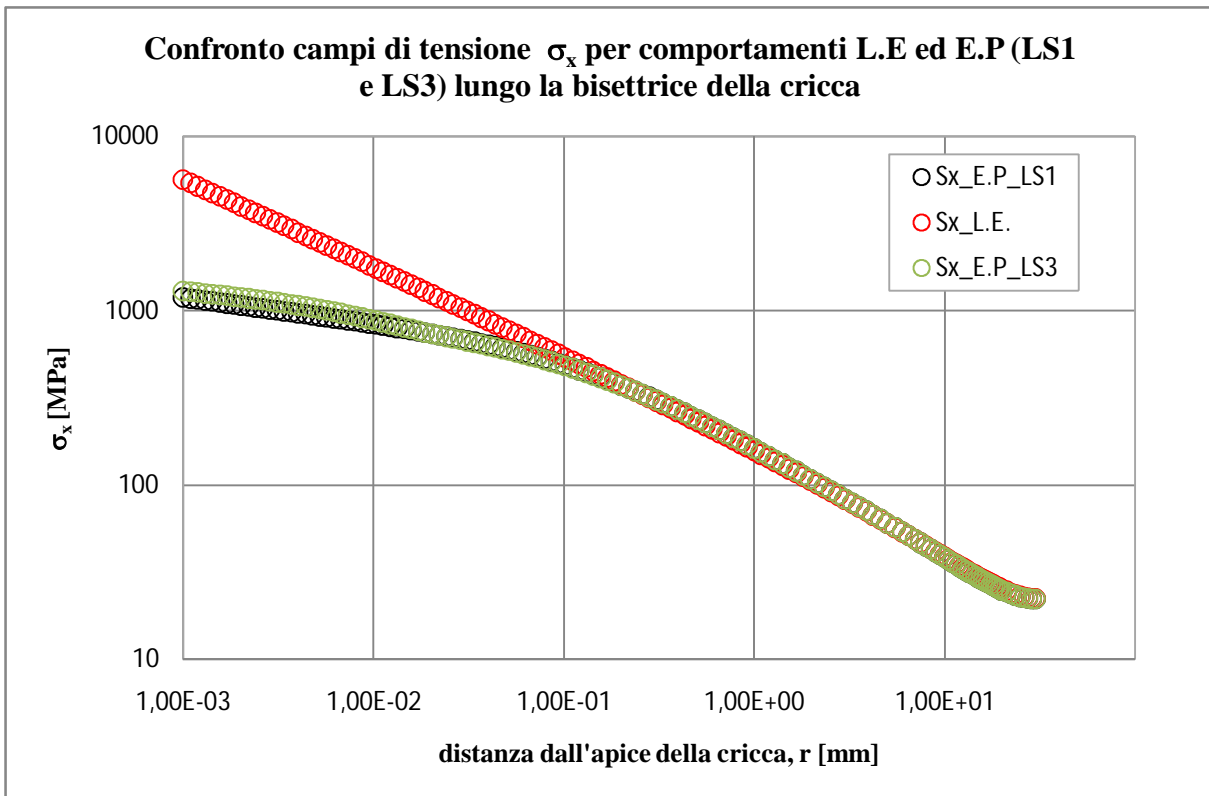


Figura 3.31 Confronto tra le distribuzioni di tensione σ_x lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 3 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale (in verde) e lineare elastico (in rosso) e distribuzione di tensione σ_x lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 1 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale (in nero).

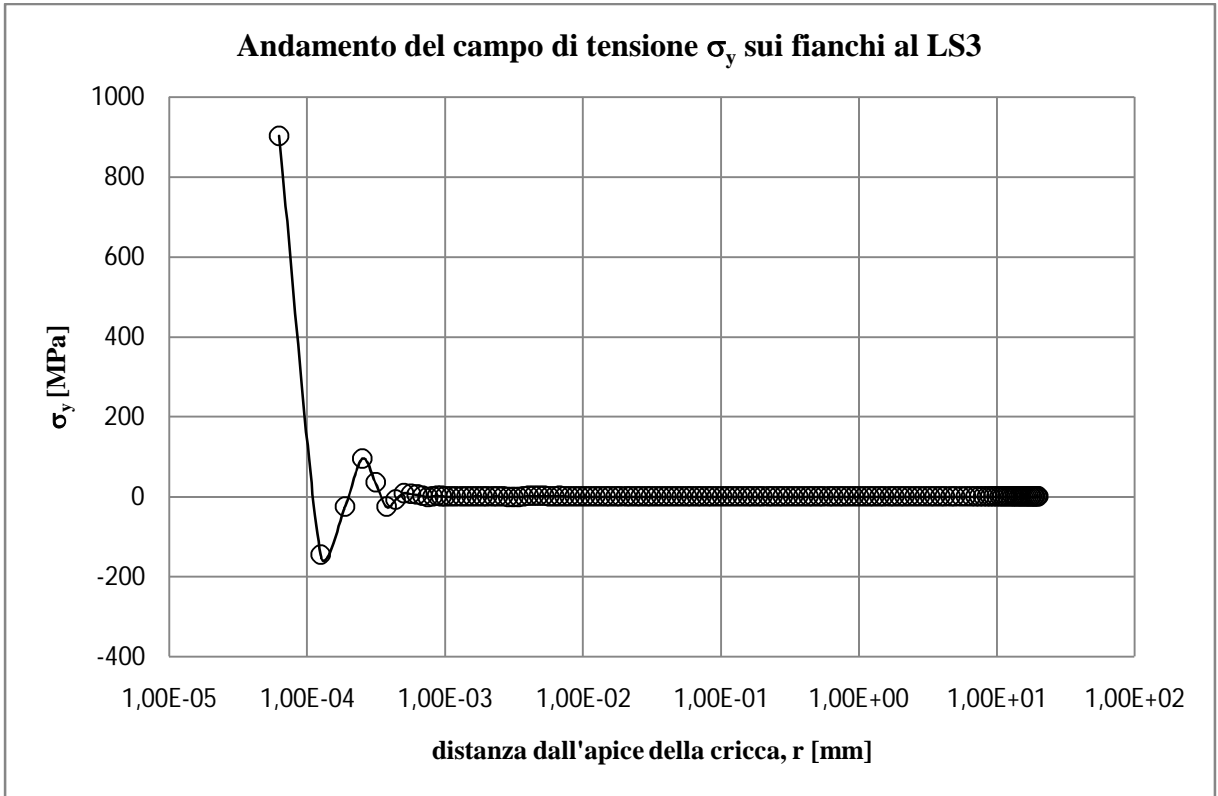


Figura 3.32 Distribuzione di tensione σ_y lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 3 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

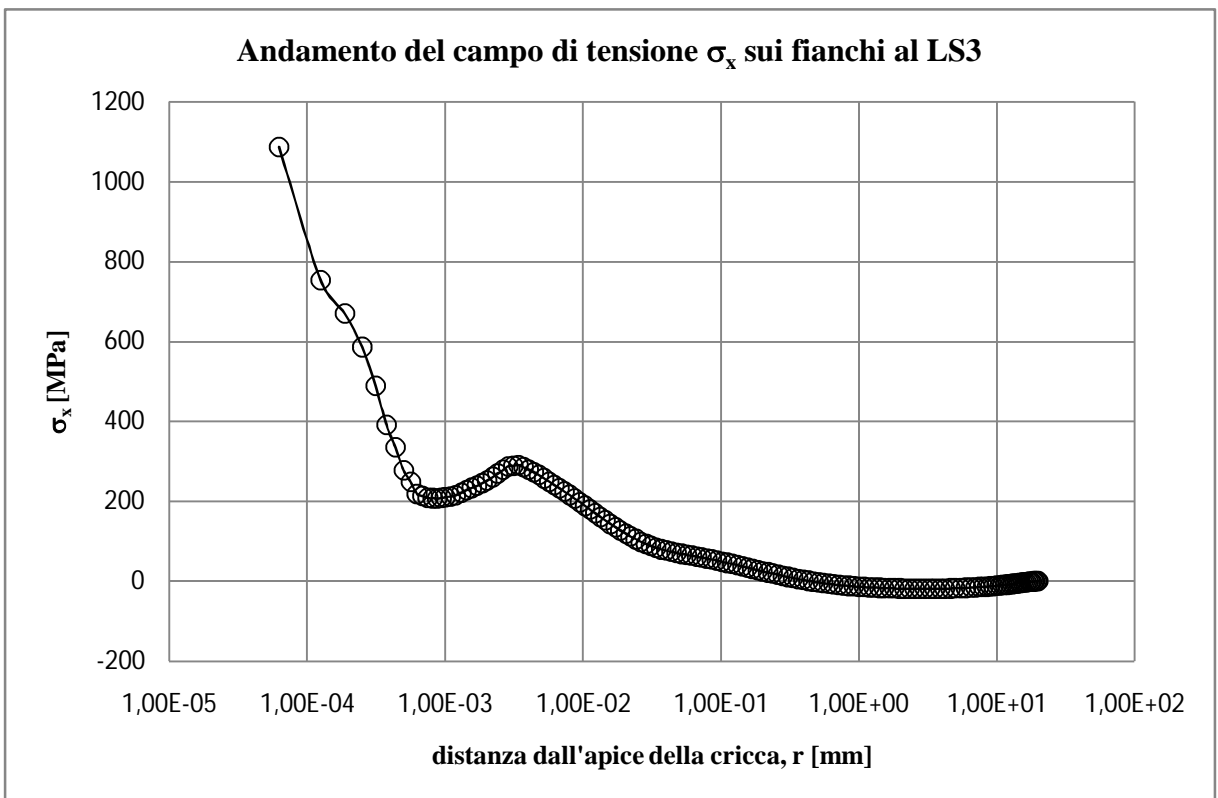


Figura 3.33 Distribuzione di tensione σ_x lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 3 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

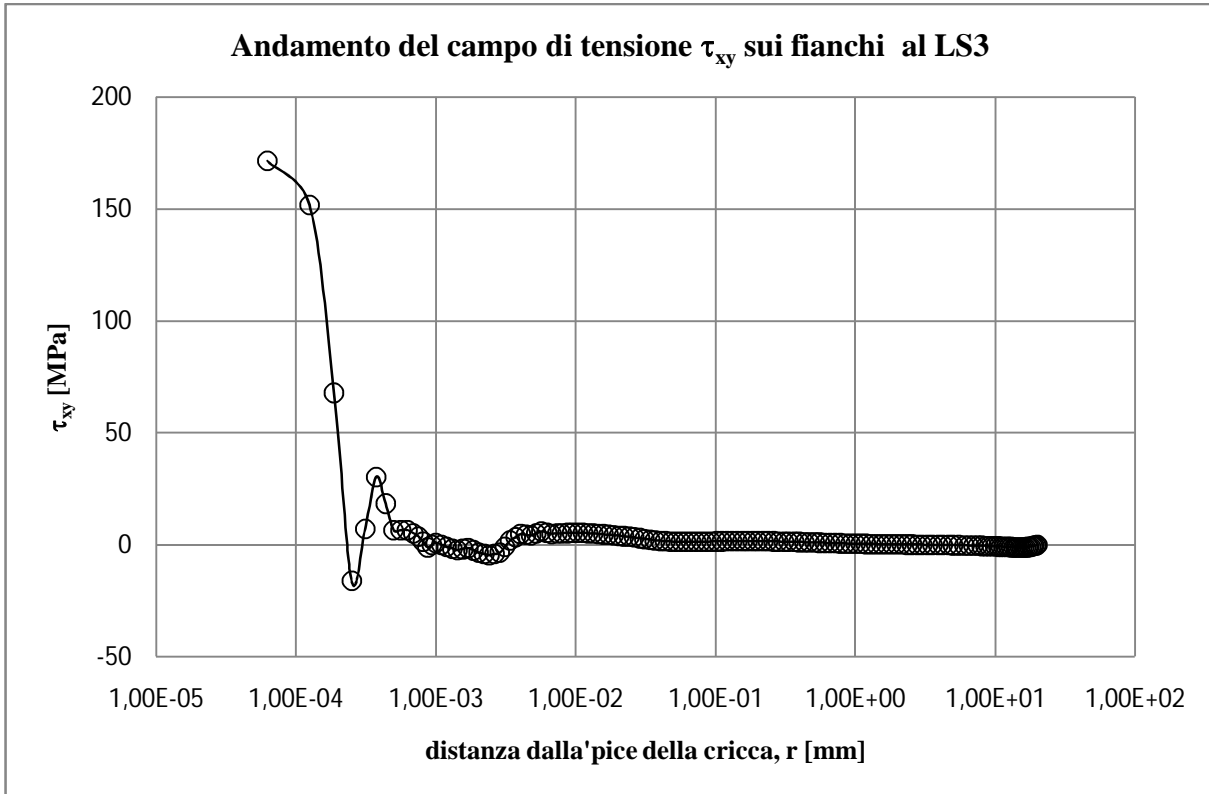


Figura 3.34 Distribuzione di tensione τ_{xy} lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 3 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale.

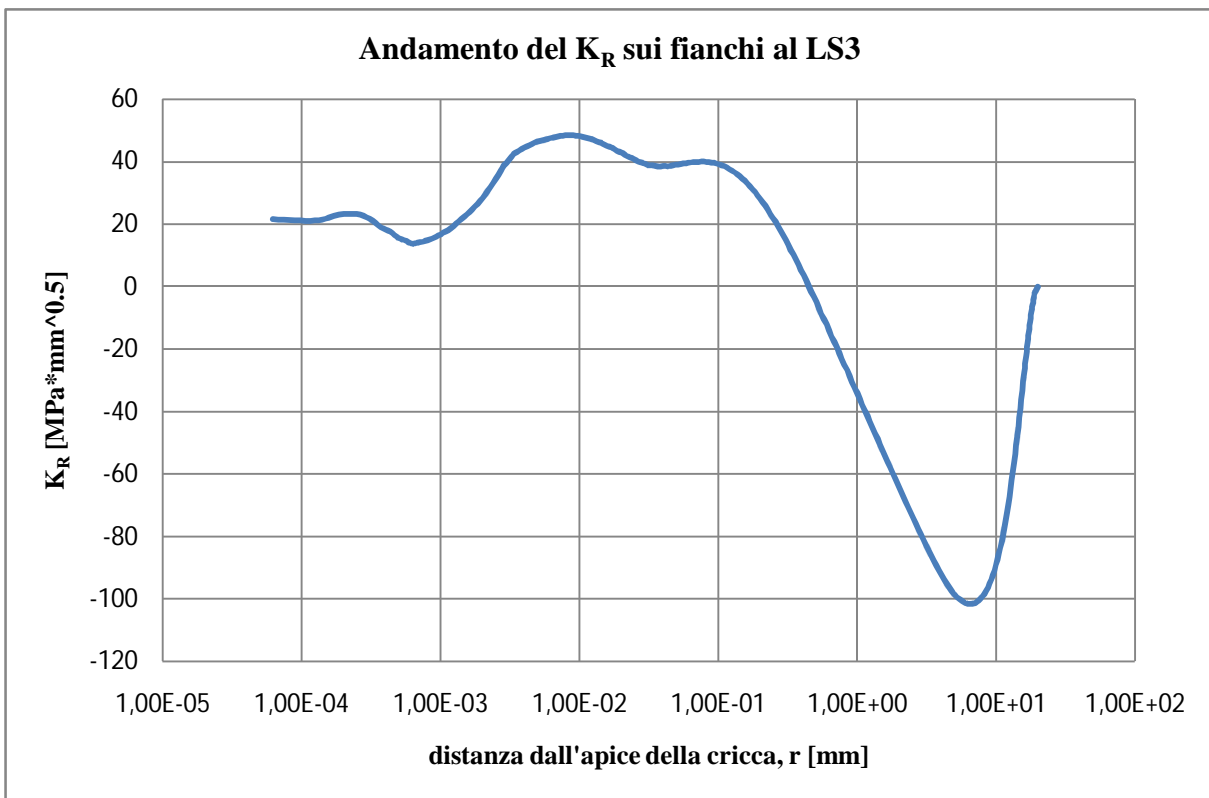


Figura 3.35 Andamento del fattore di intensificazione della tensioni K_R valutato al load step 3.

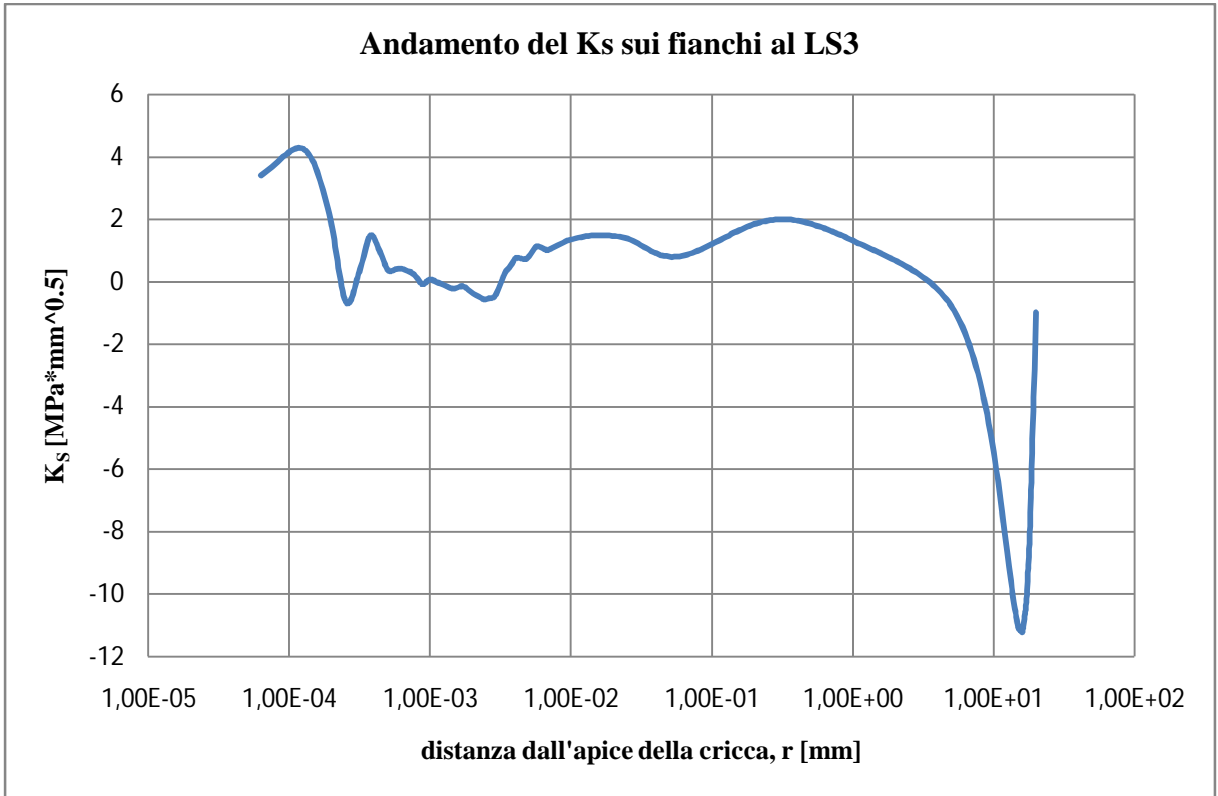


Figura 3.36 Andamento del fattore di intensificazione della tensioni K_S valutato al load step 3.

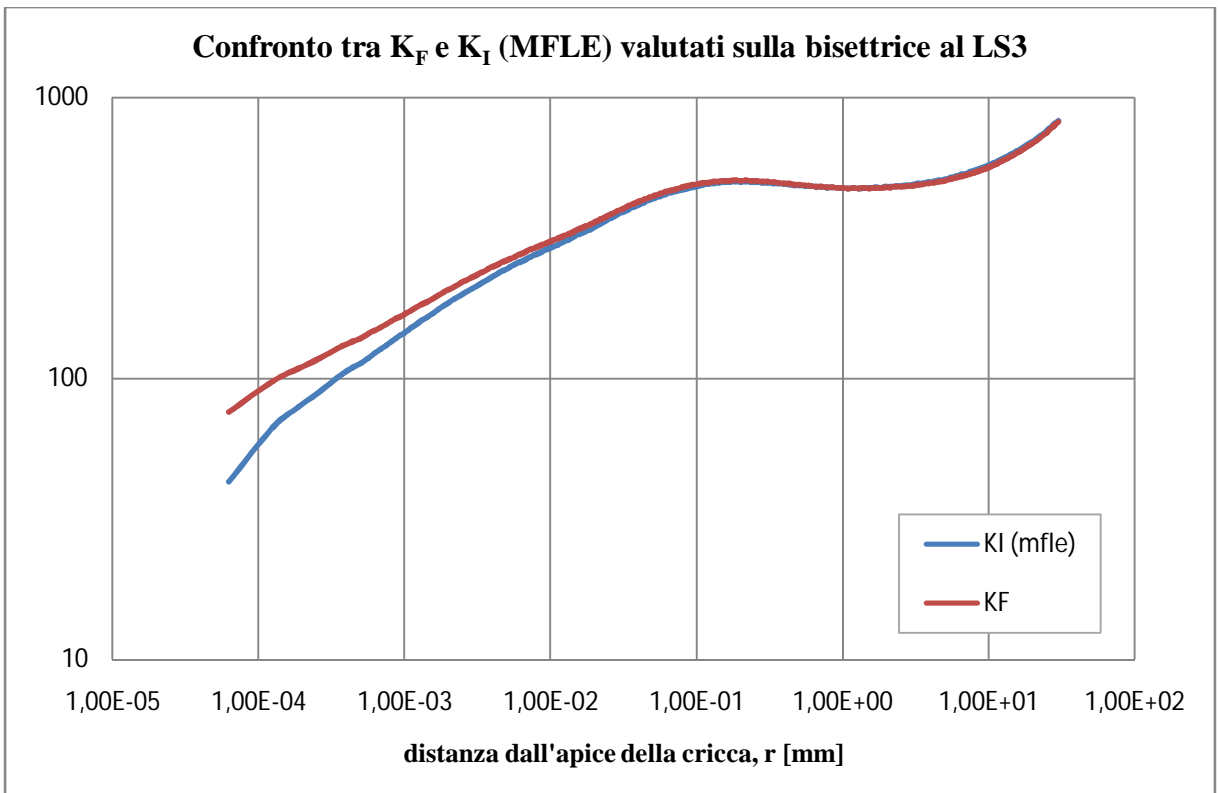


Figura 3.37 Confronto tra l'andamento del K_F (modello CJP) e il K_I della MFLE, utilizzando per il loro calcolo la distribuzione di tensione σ_y determinata con un modello elastoplastico del materiale. Il tutto valutato al load step 3.

Si riportano qui di seguito 3 immagini che mostrano la deformazione all'apice della cricca alla fine di ogni load step.

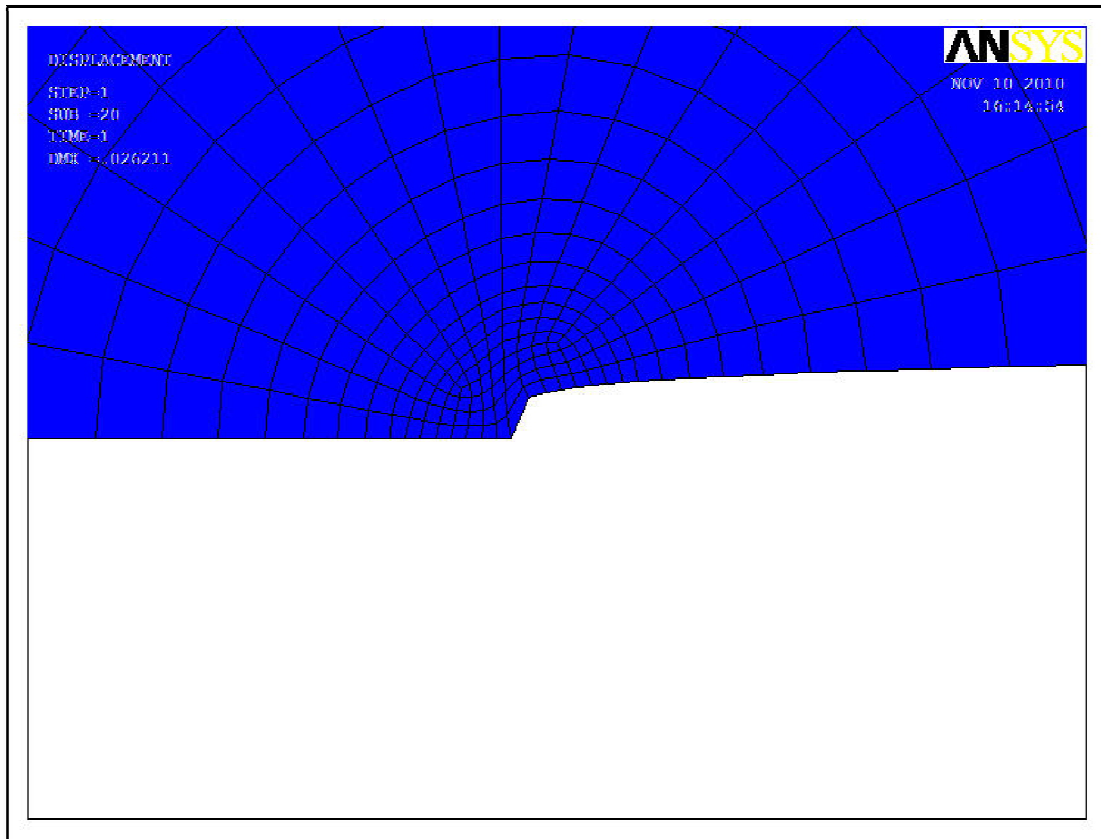


Figura 3.38 Deformazione all'apice della cricca alla fine del load step 1.

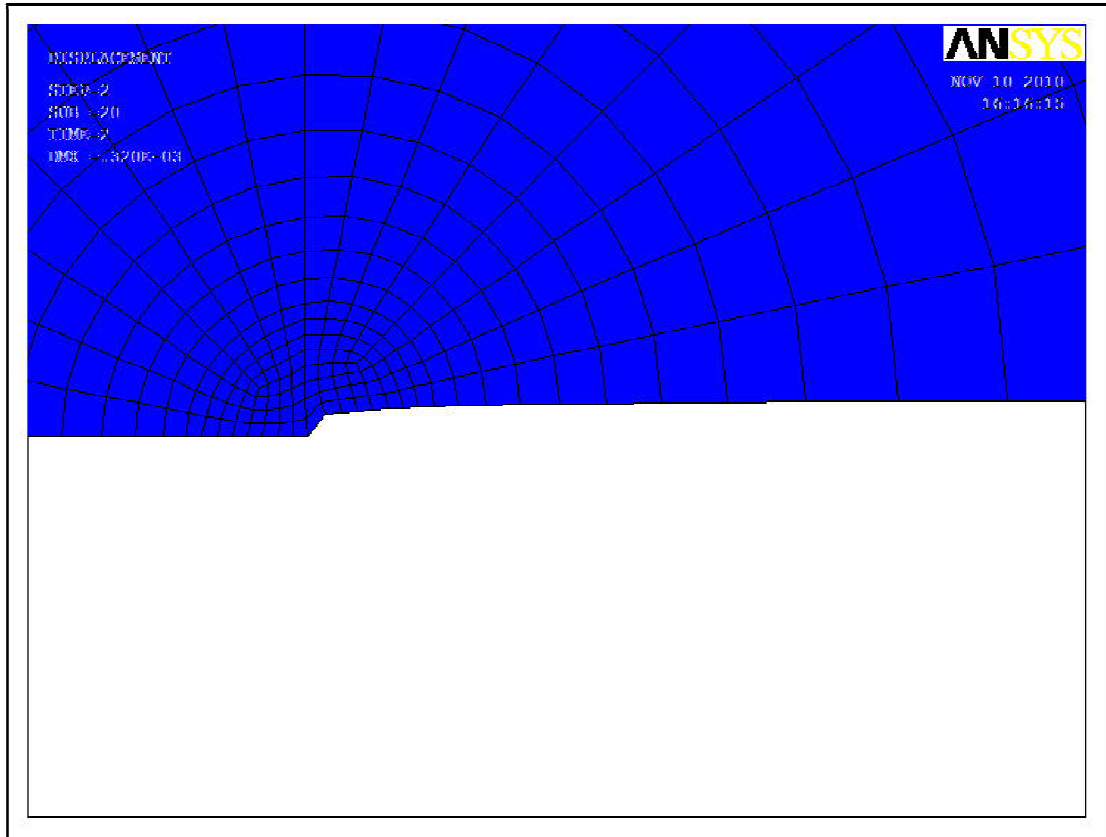


Figura 3.39 Deformazione all'apice della cricca alla fine del load step 2.

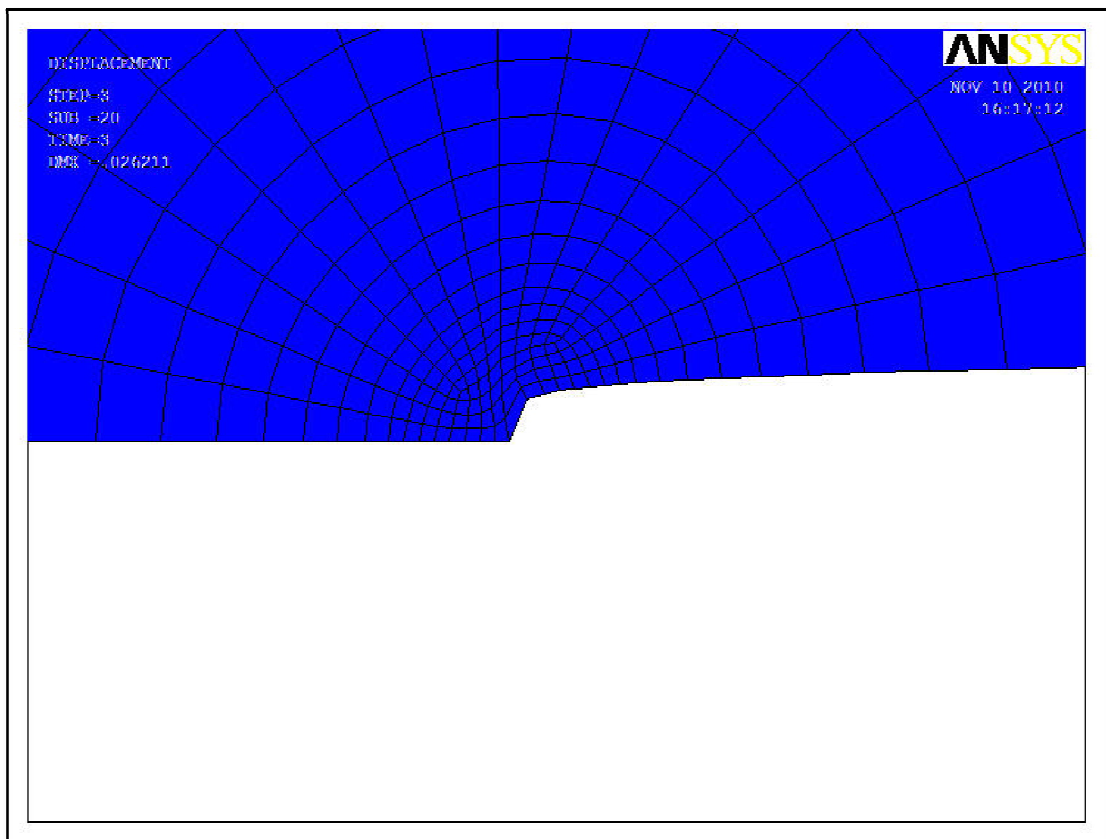


Figura 3.40 Deformazione all'apice della cricca alla fine del load step 3

3.4.4 Valutazione del parametro E e discussione dei risultati

Si consideri il load step 1. Per la valutazione del parametro E si sfrutta la definizione del fattore di intensificazione delle tensioni K_R e della condizione $D + E = 0$. La definizione di K_R è legata al limite per r che tende a zero del campo di tensione σ_x lungo i fianchi della cricca. Si nota però dalla figura 3.14 che l'andamento di K_R è costante sono nelle immediate prossimità dell'apice della cricca contrariamente all'andamento che dovrebbe avere un parametro di campo quale un SIF. Al fine di procedere nella valutazione del parametro E si considera allora questo ridotto numero di nodi nei quali si denota una tendenza di K_R ad un valore circa costante. In particolare K_R assume un valore al load step 1 pari a:

$$K_R = 20 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

Da cui procedendo come prima anticipato si determina:

$$E = -\frac{\sqrt{2}K_R}{4\pi^{3/2}} \Leftarrow \begin{cases} K_R = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_x) = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} (D - 3E) \\ D + E = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

$$E = -\frac{\sqrt{2}K_R}{4\pi^{3/2}} \Rightarrow E = -\frac{\sqrt{2} \cdot 20}{4 \cdot \pi^{3/2}} \cong -1.27$$

Il parametro E appena calcolato consente, sfruttando la prima delle 3.1, di determinare a sua volta il fattore di intensificazione delle tensioni K_F . Come si vede dalle figure 3.16 e 3.17, il SIF K_F non risulta però costante in nessun tratto della bisettrice. Si può muovere pertanto una critica al modello CJP in quanto l'andamento che assume il K_F , non essendo costante, impedisce di usare il K_F stesso in un qualsiasi progetto o verifica di un componente o struttura. La non costanza del K_F però non stupisce in quanto la definizione data a questo SIF (prima equazione delle 3.1) non può fornire in alcun caso un valore sempre costante, in quanto il campo stesso di tensione σ_y che sta alla base del SIF in esame è caratterizzato ora da 2 pendenze caratteristiche (quella del campo plastico e quella del campo elastico) e non da una sola pendenza (quella del campo elastico) come avveniva per il SIF K_I della MFLE. Si è voluto riportate anche un confronto tra un'analisi in linearità elastica e l'analisi elastoplastica finora descritta (figure 3.9, 3.10, 3.17, 3.30 e 3.31). Si vede in figura 3.17 come effettivamente il fattore di intensificazione delle tensioni K_I della MFLE risulta costante sulla base di una analisi lineare elastica (tranne nelle immediate prossimità del difetto dove le analisi FEM per ovvi motivi non riescono a descrivere in modo appropriato le distribuzioni di tensione). Altrettanto non si può dire se si plotta l'andamento del K_I della MFLE utilizzando però per la sua determinazione la distribuzione di tensione σ_y sulla bisettrice della cricca ottenuta per mezzo di un analisi elastoplastica. Il confronto tra l'andamento di questo K_I e

l'andamento del K_F calcolato seguendo il modello CJP è altrettanto insoddisfacente in quanto, come si poteva già capire analizzando la prima espressione delle 3.1, i valori assunti da K_F nella zona plastica sono maggiori di quelli assunti dal K_I sulla base di una analisi elastoplastica, mentre ben al di fuori della zona plasticizzata (a circa 1 mm di distanza dall'apice) i 2 andamenti sono praticamente confondibili (figure 3.16). Questo è ovvio perché il $\ln(r)$ valutato per $r=1$ fornisce valore nullo e pertanto il termine aggiunto dagli autori per tenere conto del fenomeno di shielding sul campo di tensione si annulla.

Si consideri ora il load step 2 (cioè la fase di scarico). Da un'analisi elastoplastica si ricava un andamento del K_R pari a quello in figura 3.24. A differenza del K_R determinato al load step 1, dove seppur per un numero ridottissimo di nodi vicino all'apice vi era un andamento costante, ora il K_R non risulta mai costante. Considerando il valore che K_R assume nel nodo più prossimo all'apice risulta circa $K_R = -20 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$. Essendo pertanto il SIF K_R negativo, per ragionamenti analoghi a quelli prima descritti, il parametro E risulta ora positivo. In particolare:

$$E = -\frac{\sqrt{2}K_R}{4\pi^{3/2}} \Rightarrow E = -\frac{\sqrt{2} \cdot -20}{4 \cdot \pi^{3/2}} = 1.27 \quad (3.46)$$

Si nota che il valore di E ottenuto dal K_R determinato con le distribuzioni di tensione σ_x calcolate allo scarico è uguale in modulo e di segno opposto al valore che assume E quando per la sua determinazione si utilizza il SIF K_R determinato sulla base della distribuzione di tensione σ_x ai fianchi durante la fase di carico.

Utilizzando un valore negativo per il parametro E , dal punto di vista matematico, la definizione del SIF K_F risulta sicuramente più sensata in quanto per valori di r inferiori ad 1 millimetro l'andamento del K_F , calcolato sempre considerando la distribuzione di tensione σ_y sulla bisettrice al load step 1, risulta inferiore all'andamento del SIF K_I calcolato secondo la definizione data da Irwin e considerando per il suo calcolo ovviamente ancora la distribuzione di tensione σ_y ottenuta con un'analisi elastoplastica al LS1. Si riporta qui di seguito (figura 3.41) il confronto tra gli andamenti del SIF K_F ottenuto sulla base di una analisi elastoplastica e considerando in un caso il parametro E positivo (legato al K_R del LS2) e nell'altro caso il parametro E negativo (legato al K_R del LS1). Nella figura si riporta anche l'andamento del K_I della MFLE calcolato sulla base di una analisi elastoplastica. Permangono ancora però le problematiche relative alla non costanza del SIF K_F .

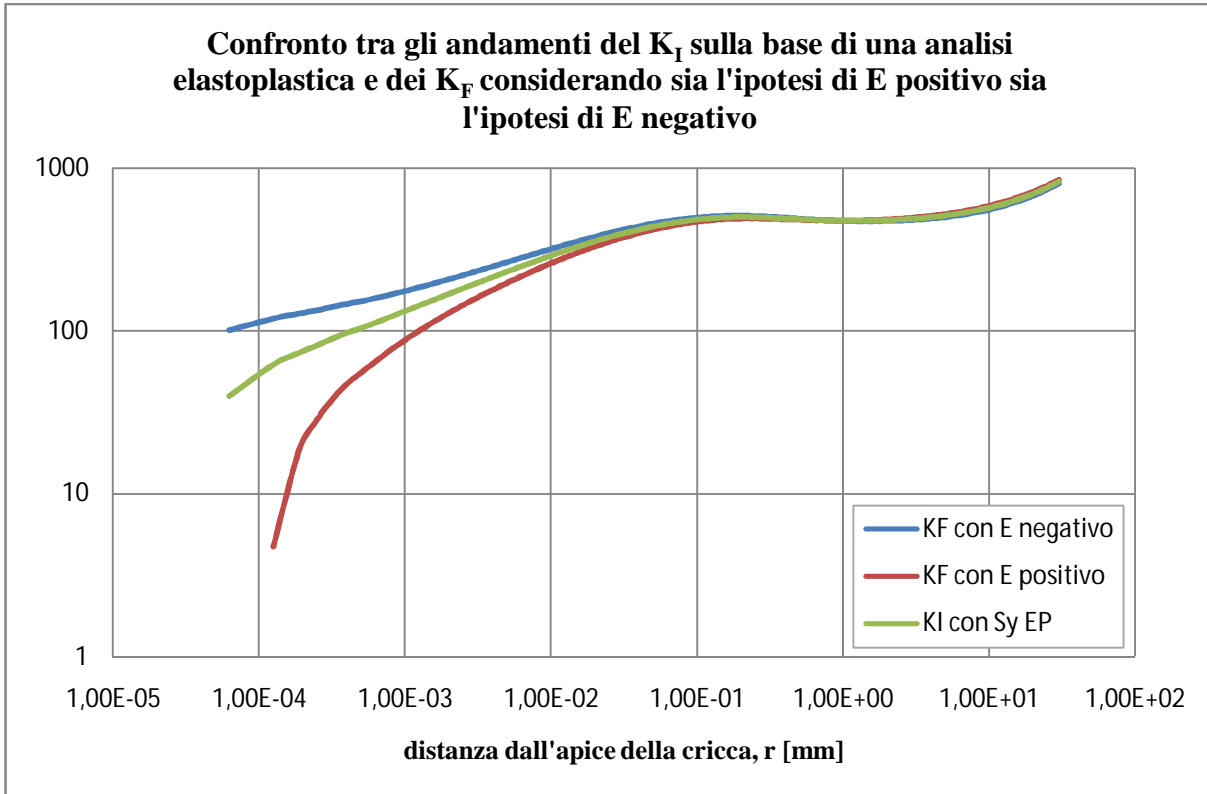


Figura 3.41 Confronto tra gli andamenti del K_I sulla base di una analisi elastoplastica e dei K_F considerando sia l'ipotesi di E positivo sia l'ipotesi di E negativo

Si abbandoni ora l'ipotesi di utilizzare un valore positivo per il parametro E.

Per poter formulare una critica più accorta sul modello CJP bisognerebbe conoscere anche l'entità della redistribuzione delle tensioni dovute alla plasticizzazione causata dalle elevate tensioni all'apice della cricca, così da poter confrontare il livello della redistribuzione delle tensioni stessa con gli effetti dello *shielding*. A tal scopo sono stati eseguiti confronti tra i campi di tensione calcolati in un ipotesi di comportamento lineare elastico e di comportamento elastoplastico del materiale (figure 3.9 e 3.10). Si vede che le distribuzioni di tensione σ_y così ottenute sono praticamente confondibili da circa 1 mm in poi. L'andamento del K_F è però superiore a quello del K_I calcolato sulla base di una analisi elastoplastica fino alla distanza di 1 mm dall'apice della cricca, diventando poi confondibile con esso (figura 3.16). Inoltre il K_F risulta addirittura maggiore del K_I ottenuto sulla base di una analisi lineare elastica su un tratto di bisettrice che va dalla distanza di 0.05mm a 2.7 mm dall'apice della cricca (figura 3.17). Nelle analisi finora presentate si è sempre considerato uno stato piano di deformazione, in relazione al quale Irwin fornisce la seguente relazione per calcolare l'estensione della zona plastica considerando anche la redistribuzione delle tensioni dovuta allo snervamento che si manifesta all'apice della cricca:

$$r_p = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{sn}} \right)^2 = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{448}{374} \right)^2 = 0.1522mm \quad (3.47)$$

dove il SIF K_I è quello della MFLE calcolato sulla base di una analisi lineare elastica e vale $K_I=448\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{mm}}$ e σ_{sn} è la tensione di snervamento che vale $\sigma_{sn}=374\text{MPa}$. Il raggio plastico, che definisce l'estensione della zona plastica, come si vede è contenuto all'interno della zona governata dalla singolarità. Al di fuori della zona plastica (quindi per $r>0.15\text{mm}$), e nelle immediate adiacenze di questa, il K_F è comunque superiore al K_I di Irwin valutato con una analisi L.E. mentre è praticamente confondibile con l'andamento del K_I utilizzando per la sua valutazione una analisi elastoplastica. Si ritiene pertanto difficile valutare il fenomeno dello *shielding* con il SIF K_F .

3.5 Verifica agli elementi finiti del modello CJP (ipotesi di comportamento "kinematic hardening" del materiale)

Si rieseguoano ora tutte le analisi fin qui esposte con l'unica variazione che si ipotizza in questo momento un comportamento *kinematic hardening* del materiale e non più *isotropic hardening*. La geometria della piastra, la mesh, il ciclo di carico-scarico-carico e le sue caratteristiche rimangono del tutto inalterati.

Viene qui di seguito riportata (figura 3.42) la curva monotona del materiale utilizzata nella simulazione. Dal punto di vista prettamente del software una differenza sostanziale tra le analisi *multilinear isotropic hardening* e *multilinear kinematic hardening* sta nel numero di "tratti" in cui viene spezzata la curva monotona. Infatti, mentre nelle analisi prima illustrate la curva fornita come dato di ingresso al programma di simulazione era costituita da 101 punti (100 tratti) ora di punti in ingresso se ne possono inserire solamente 21. Ciò si traduce nel poter rappresentare la curva monotona con minor precisione (solo 20 tratti) rispetto alle analisi prima condotte.

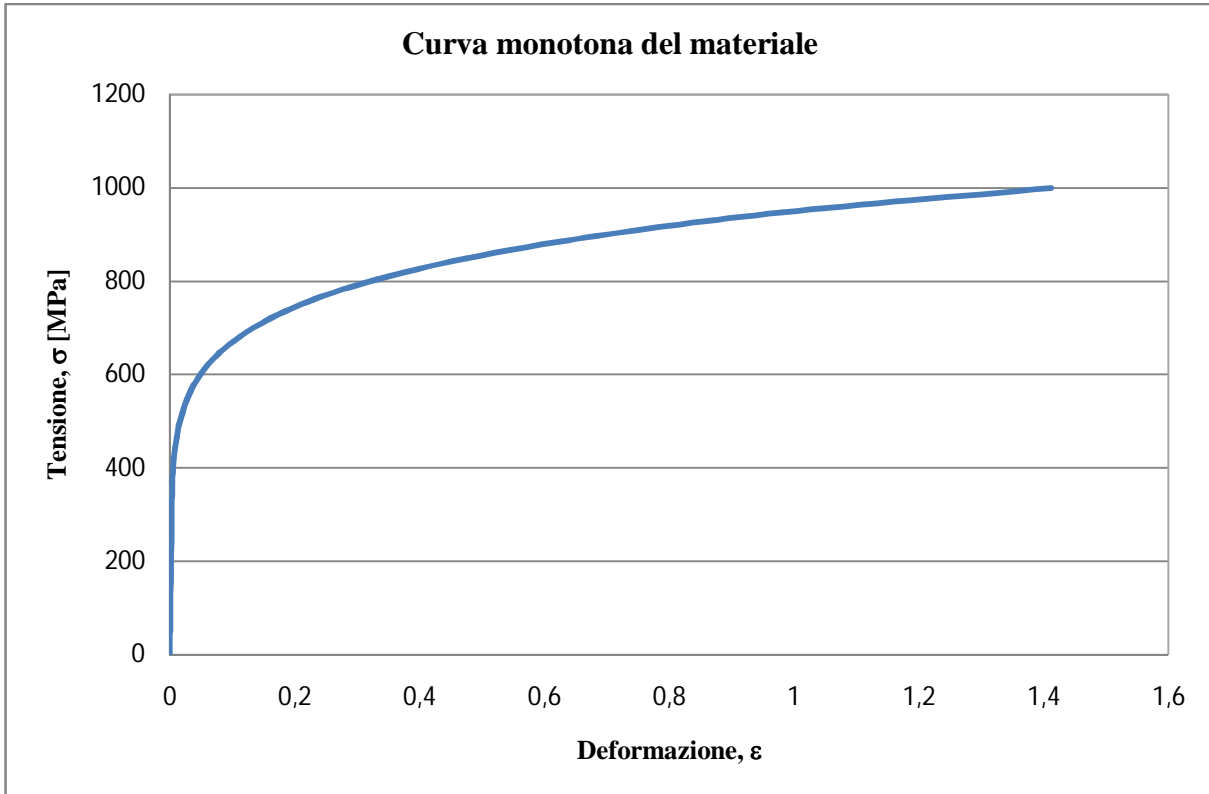


Figura 3.42 Curva monotona del materiale utilizzata nella simulazione del comportamento kinematic hardening del materiale.

3.5.1 Load Step 1

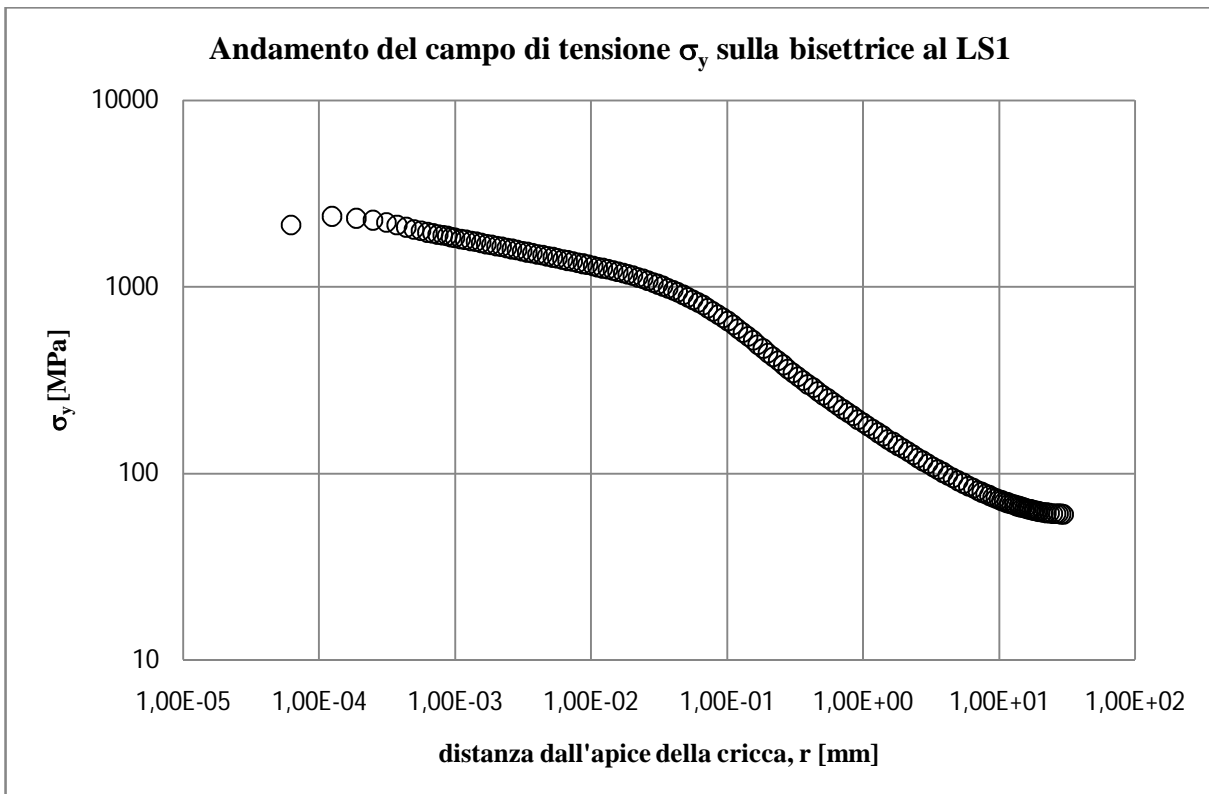


Figura 3.43 Distribuzione di tensione σ_y lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 1 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

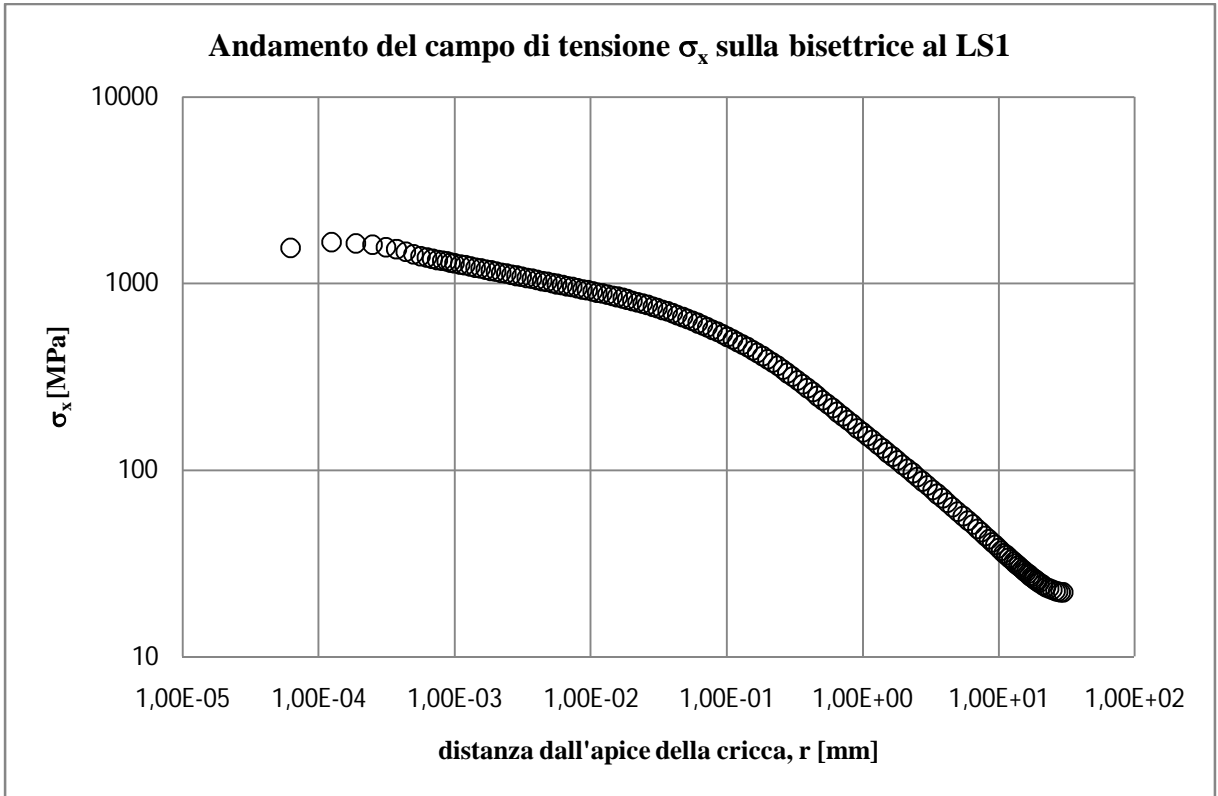


Figura 3.44 Distribuzione di tensione σ_x lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 1 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

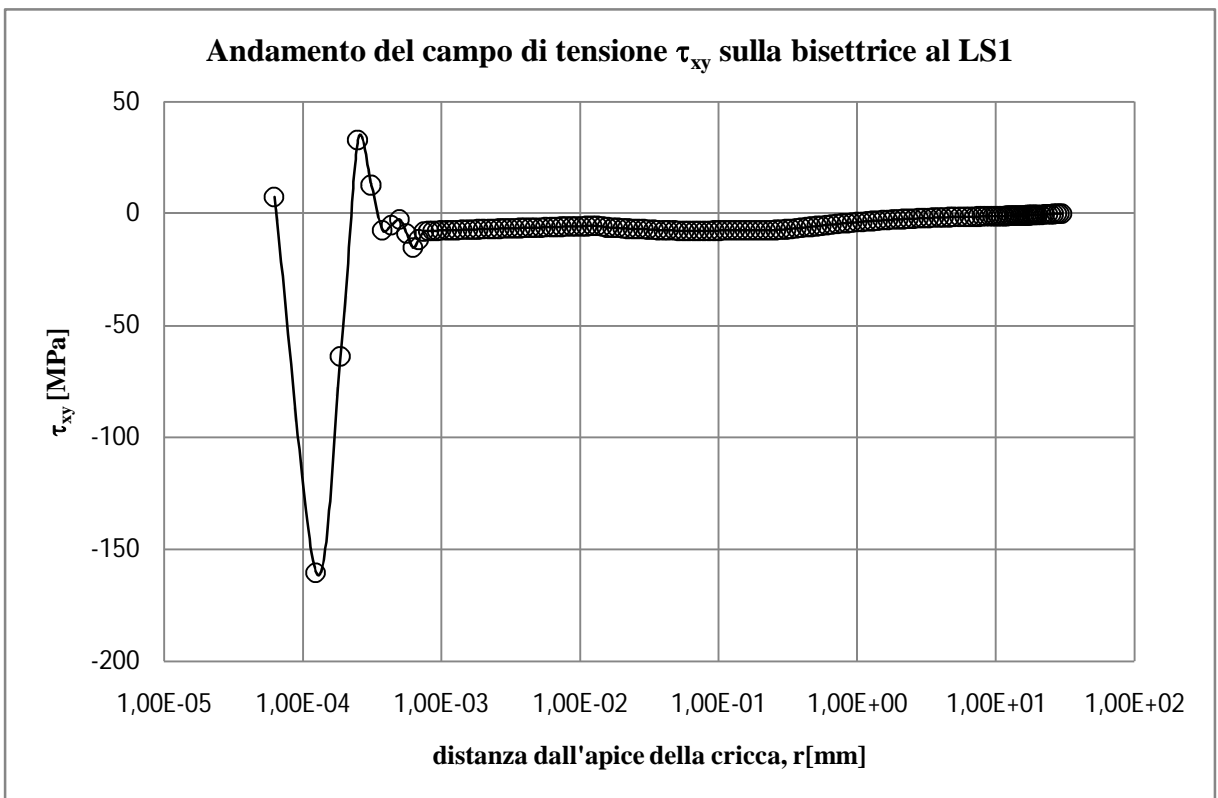


Figura 3.45 Distribuzione di tensione τ_{xy} lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 1 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

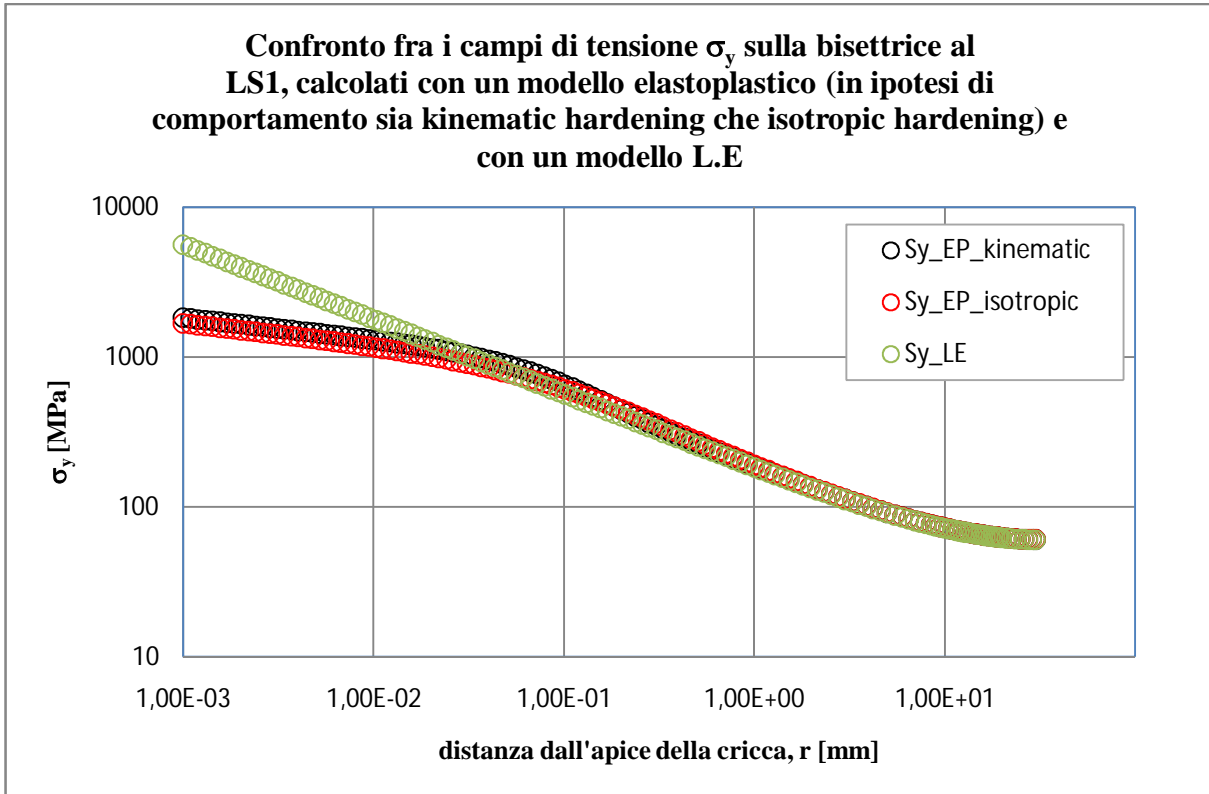


Figura 3.46 Confronto tra le distribuzioni di tensione σ_y lungo la bisettrice della cricca calcolate al load step 1 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale (in nero kinematic hardening, in rosso isotropic hardening) e L.E. (in verde).

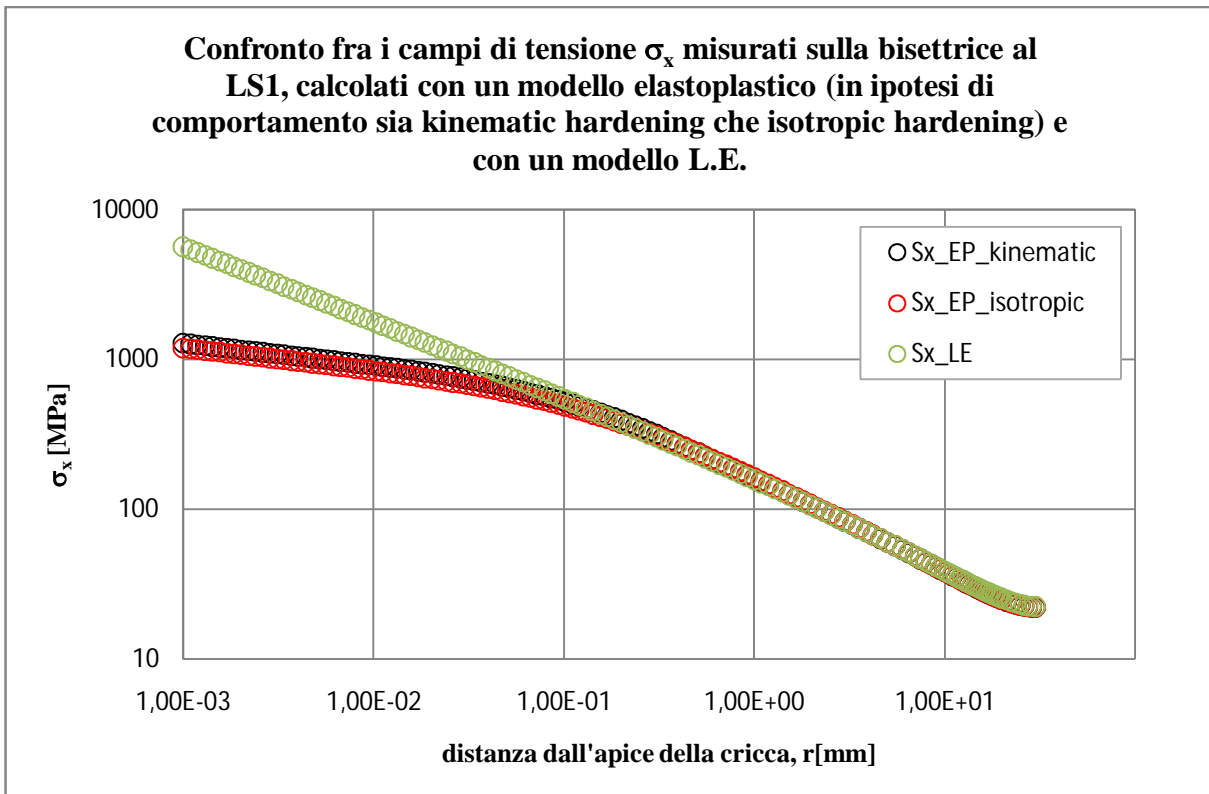


Figura 3.47 Confronto tra le distribuzioni di tensione σ_x lungo la bisettrice della cricca calcolate al load step 1 nell'ipotesi di comportamento elastoplastico del materiale (in nero kinematic hardening, in rosso isotropic hardening) e L.E. (in verde).

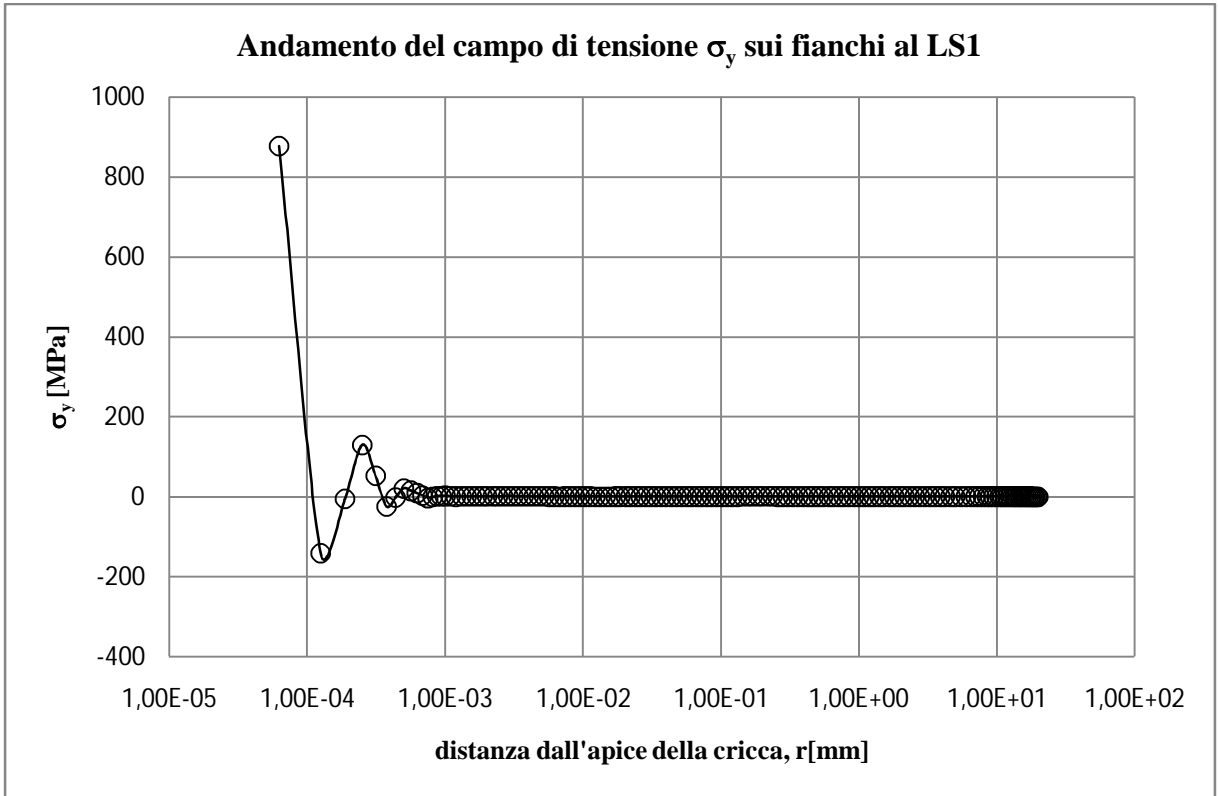


Figura 3.48 Distribuzione di tensione σ_y lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 1 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

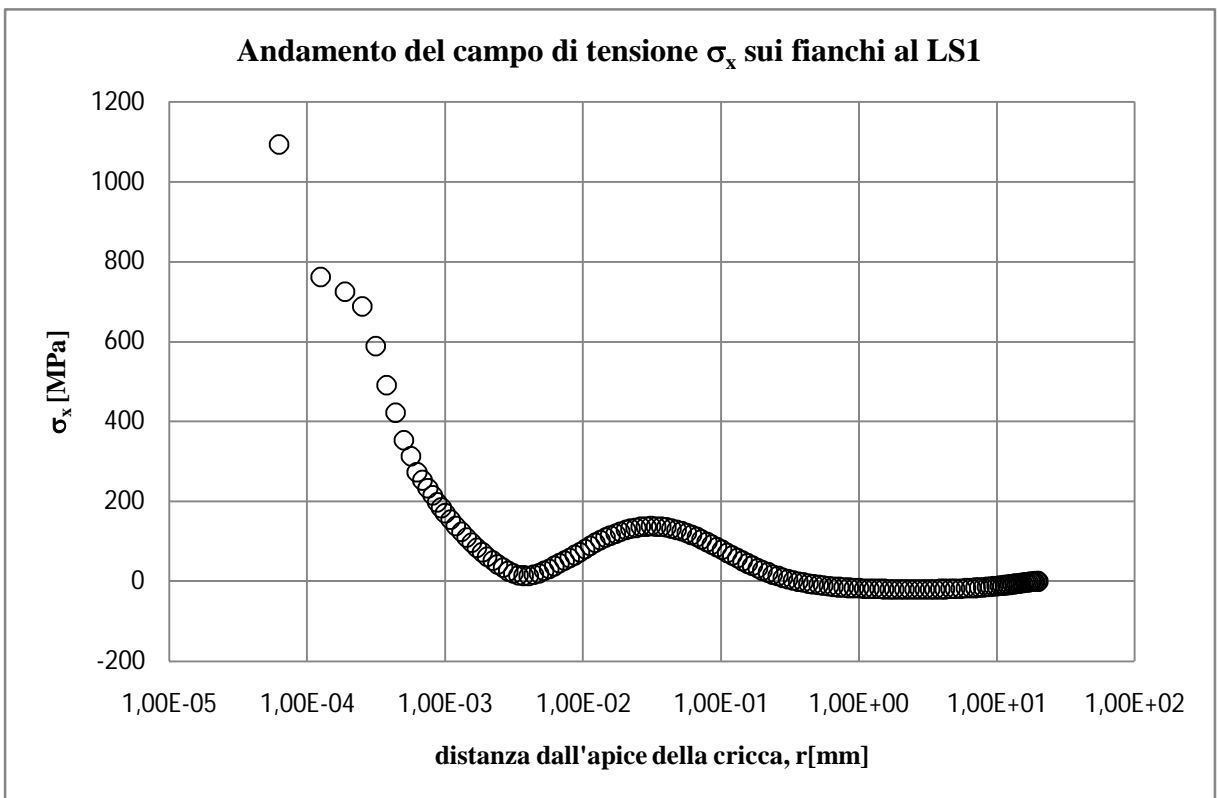


Figura 3.49 Distribuzione di tensione σ_x lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 1 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

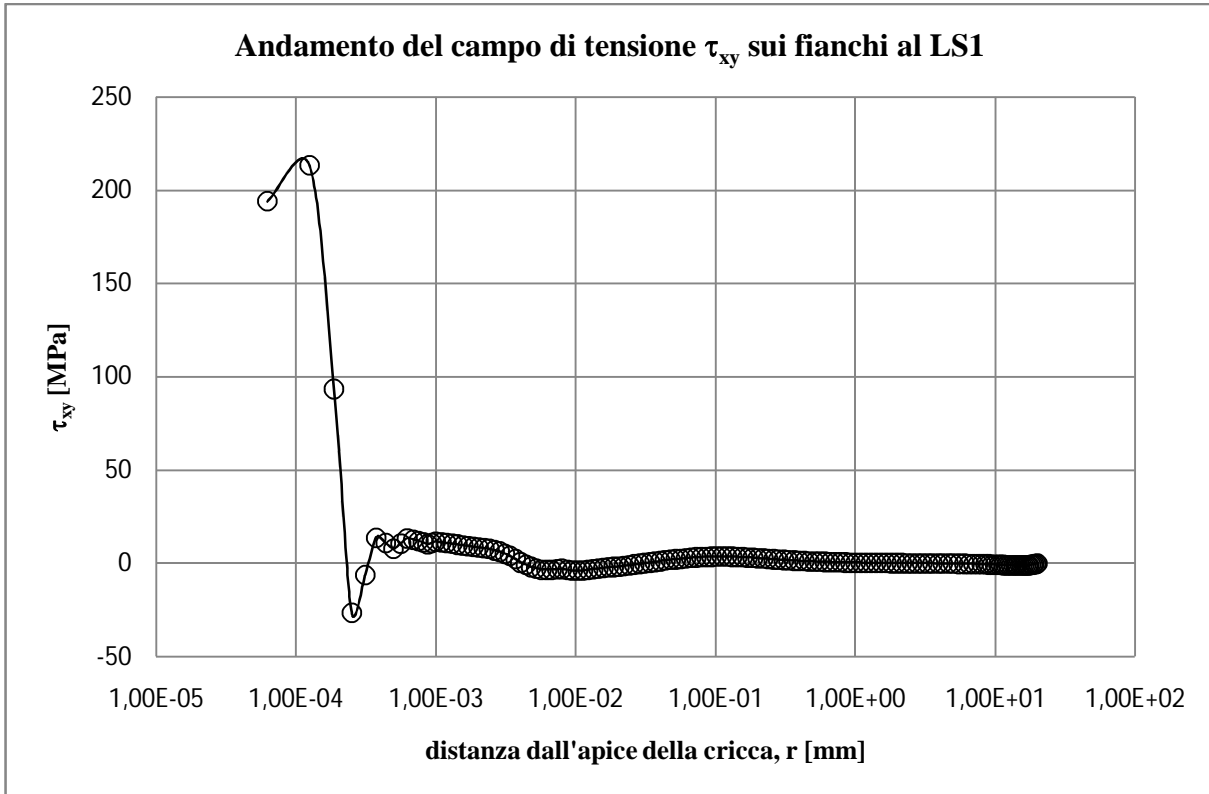


Figura 3.50 Distribuzione di tensione τ_{xy} lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 1 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

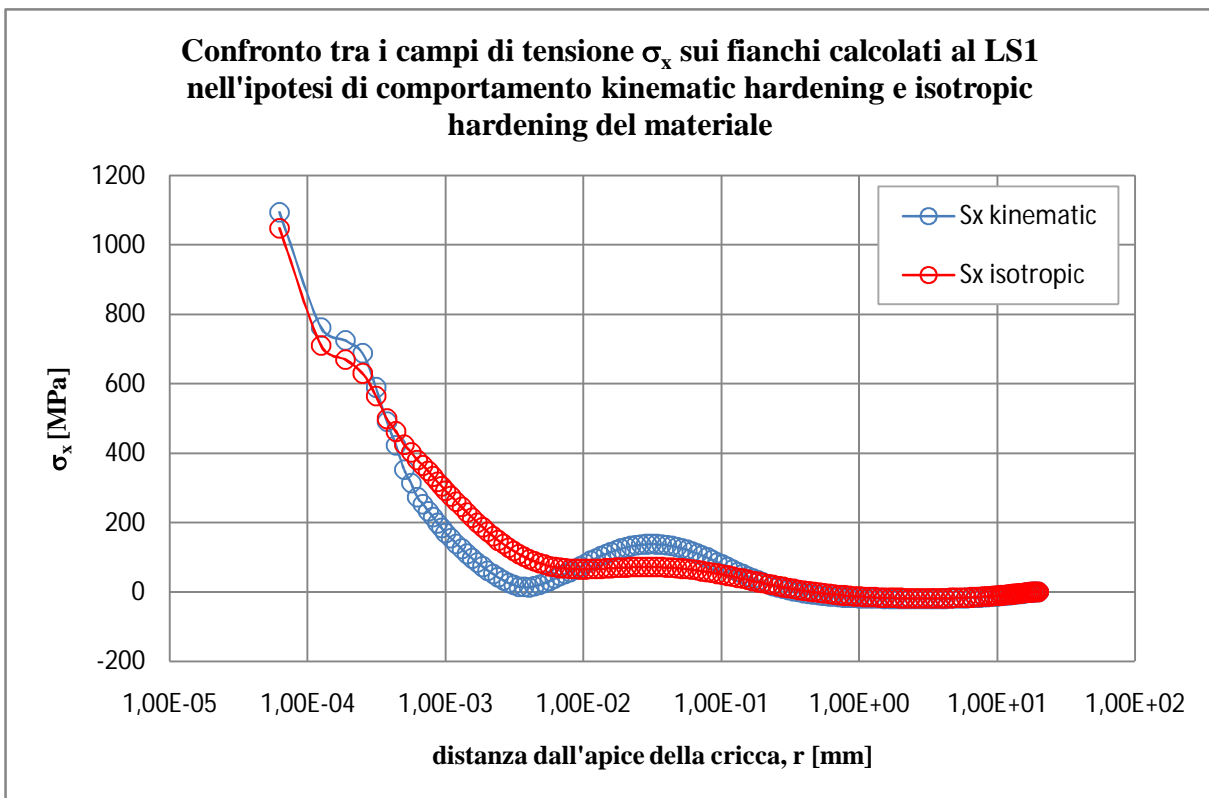


Figura 3.51 Confronto tra le distribuzioni di tensione σ_x lungo i fianchi della cricca calcolate al load step 1 nell'ipotesi di un'analisi elastoplastica adottando un comportamento kinematic hardening (in blu) ed isotropic hardening (in rosso) per descrivere il materiale.

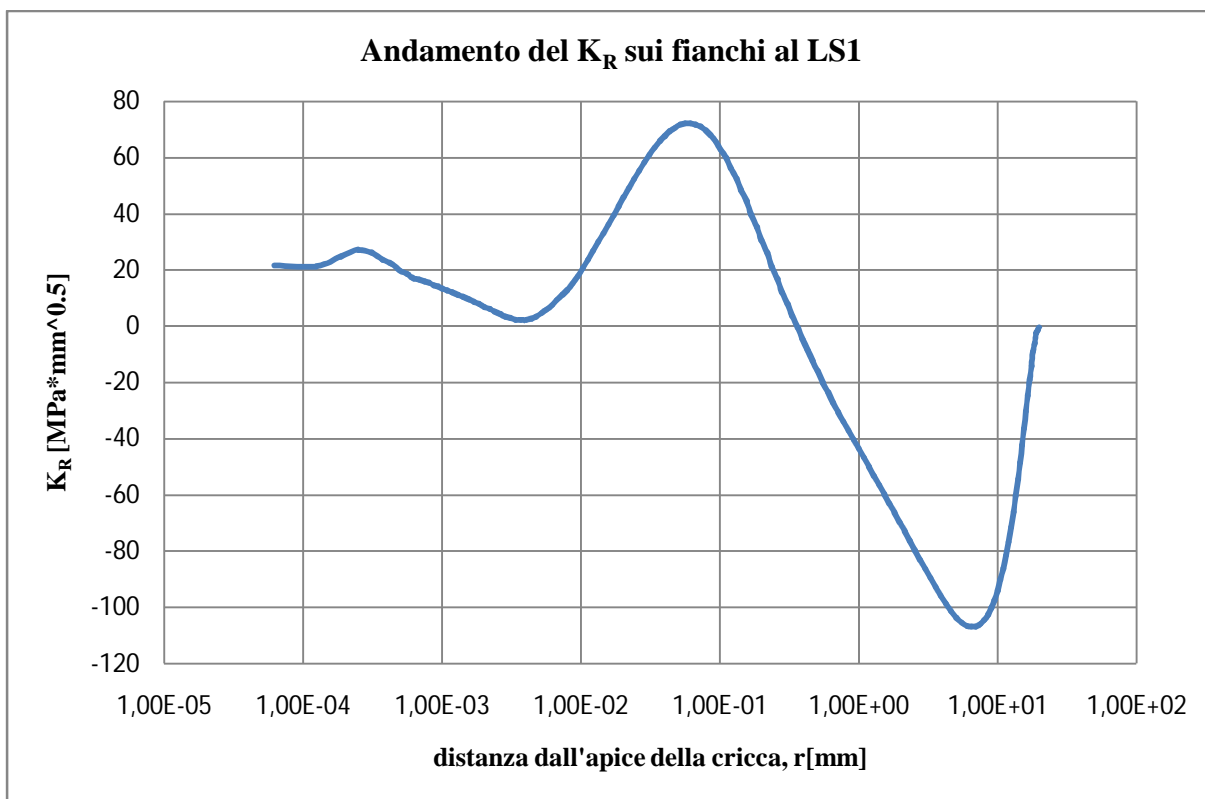


Figura 3.52 Andamento del fattore di intensificazione della tensioni K_R valutato al load step 1.

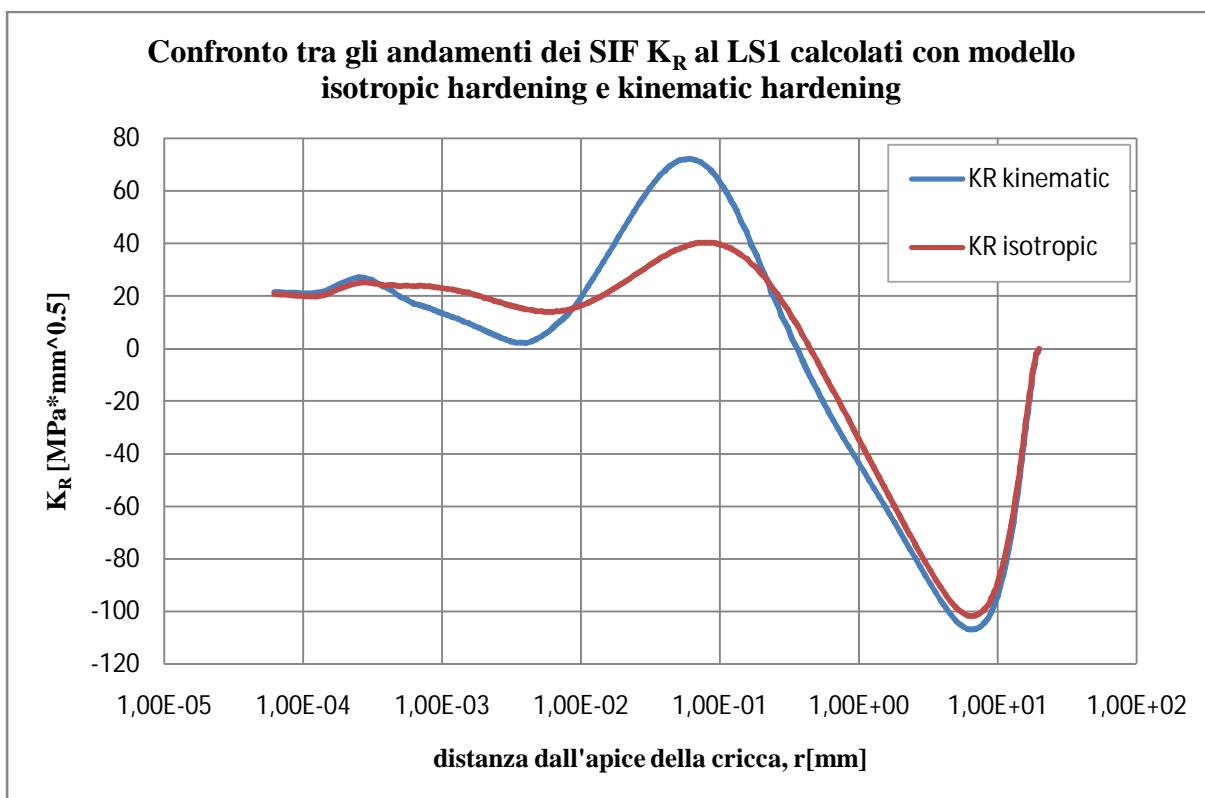


Figura 3.53 Confronto tra gli andamenti dei SIF K_R relativi entrambi al LS1 calcolati sulla base di analisi elastoplastiche per le quali si adotta un modello del materiale kinematic hardening in blu e isotropic hardening in rosso.

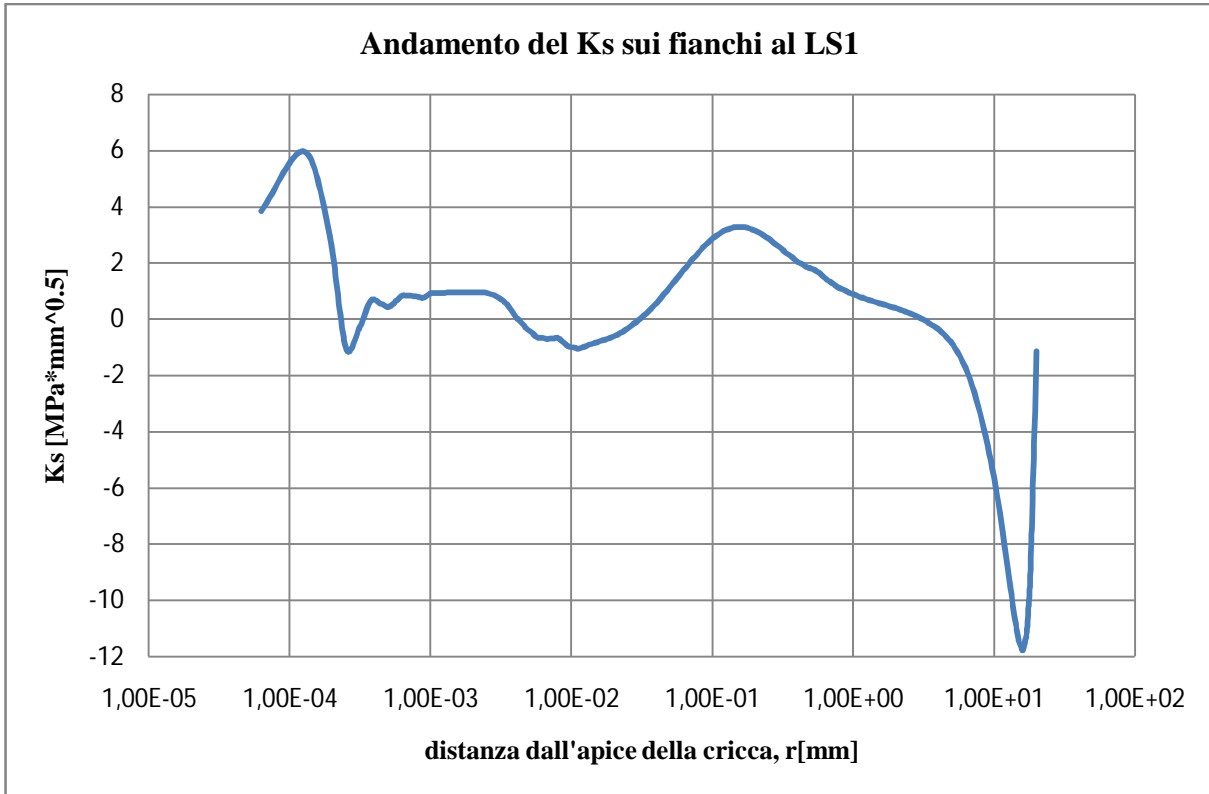


Figura 3.54 Andamento del fattore di intensificazione della tensioni K_S valutato al load step 1.

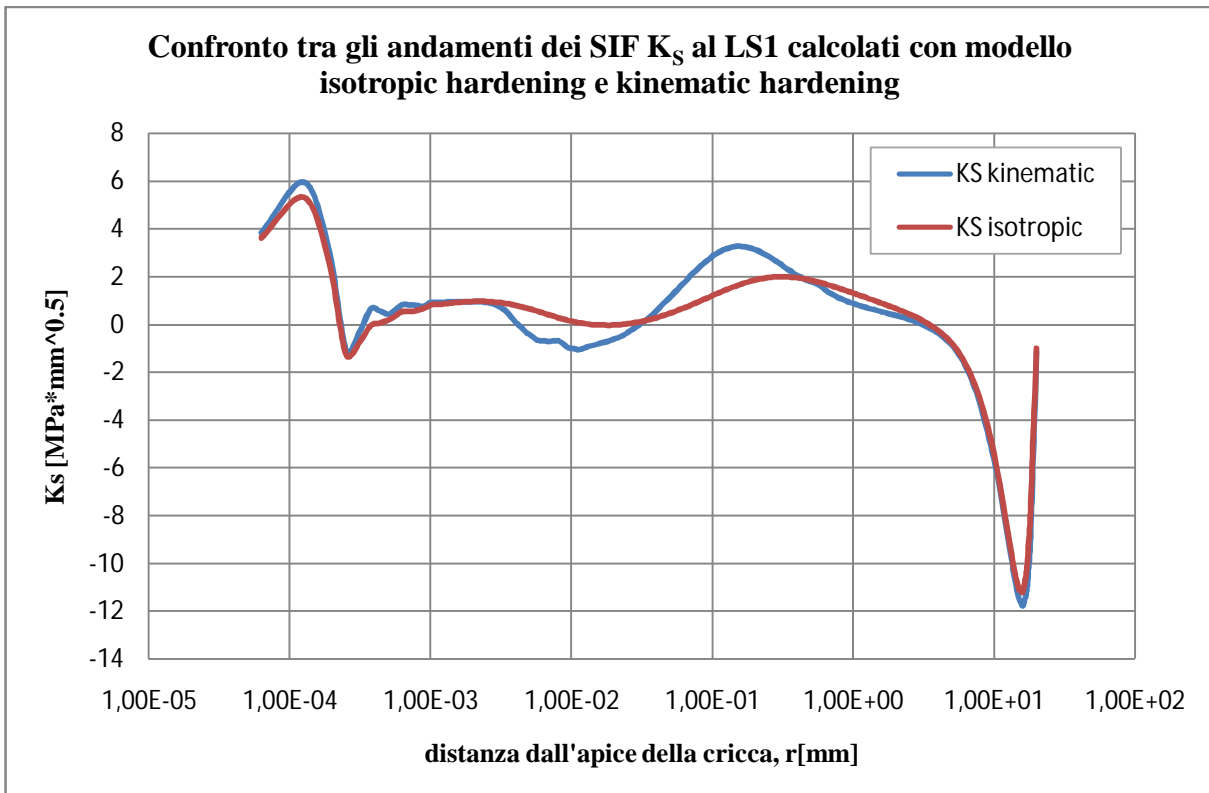


Figura 3.55 Confronto tra gli andamenti dei SIF K_S relativi entrambi al LS1 calcolati sulla base di analisi elastoplastiche per le quali si adotta un modello del materiale kinematic hardening in blu e isotropic hardening in rosso.

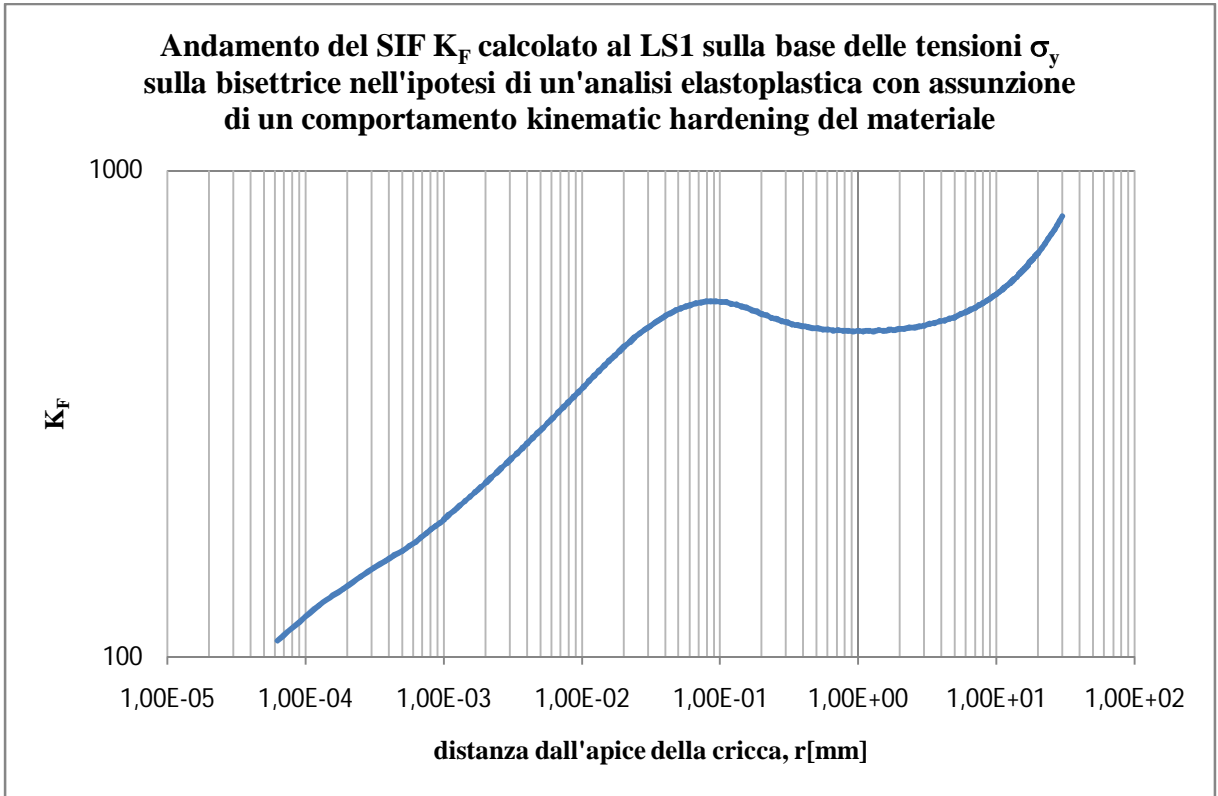


Figura 3.56 Andamento del fattore di intensificazione della tensioni K_F valutato al load step 1.

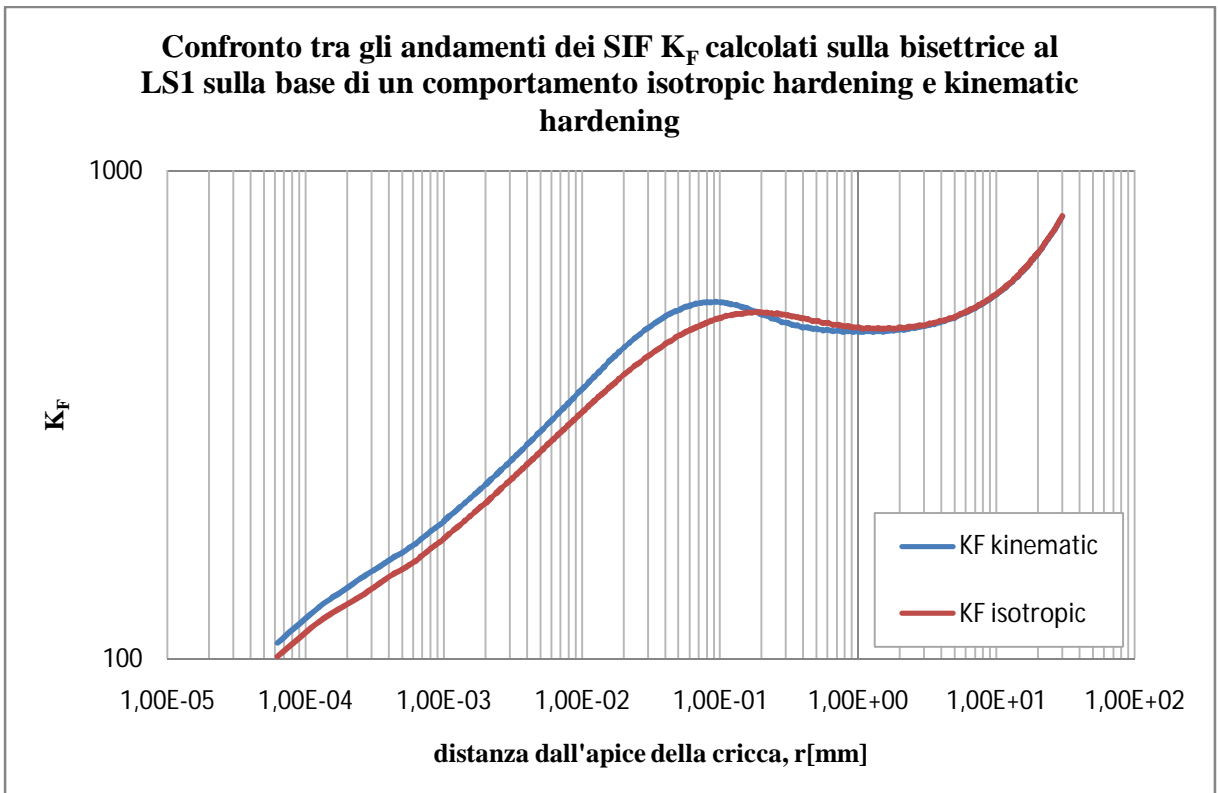


Figura 3.57 Confronto tra gli andamenti del K_F ottenuti utilizzando per la loro determinazione la distribuzione di tensione σ_y valutata al LS1 nell'ipotesi di adottare un modello elastoplastico del materiale. In particolare si riporta in blu il risultato ottenuto qualora si ipotizzi un comportamento kinematic hardening e in rosso un comportamento isotropic hardening.

3.5.2 Load Step 2

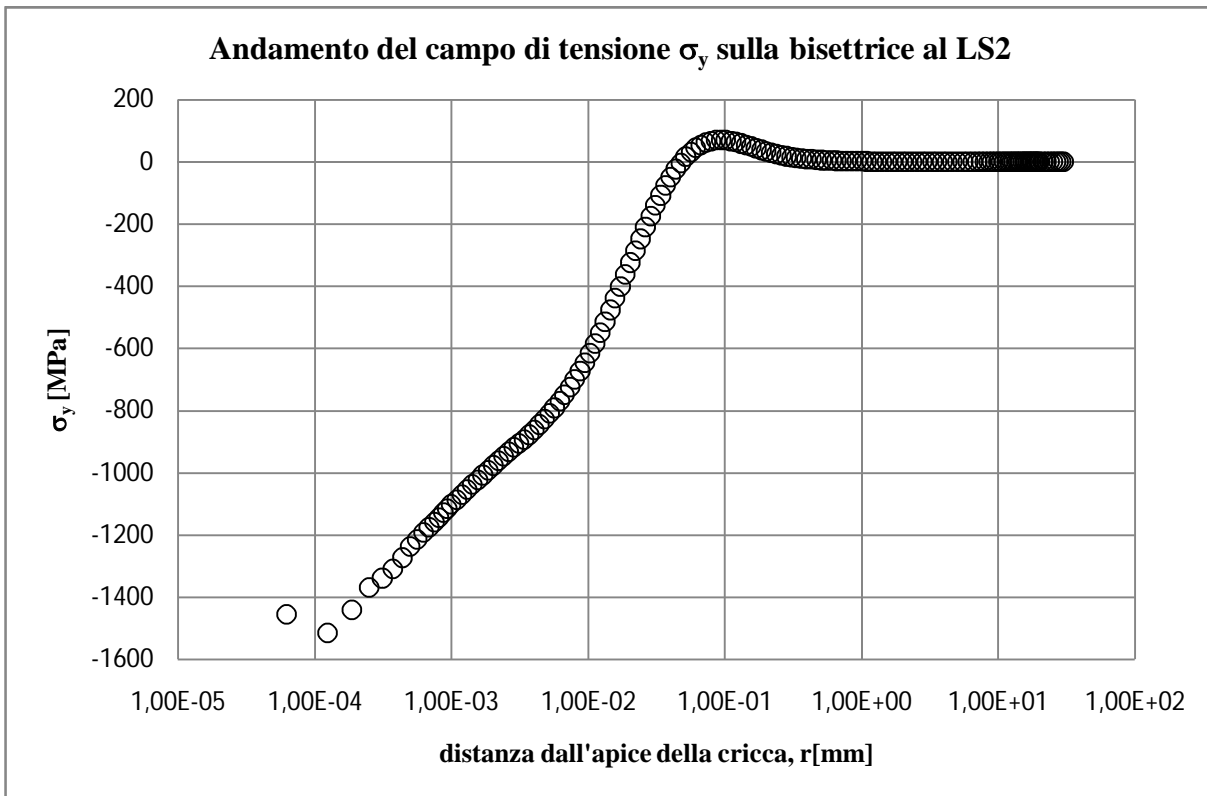


Figura 3.58 Distribuzione di tensione σ_y lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 2 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

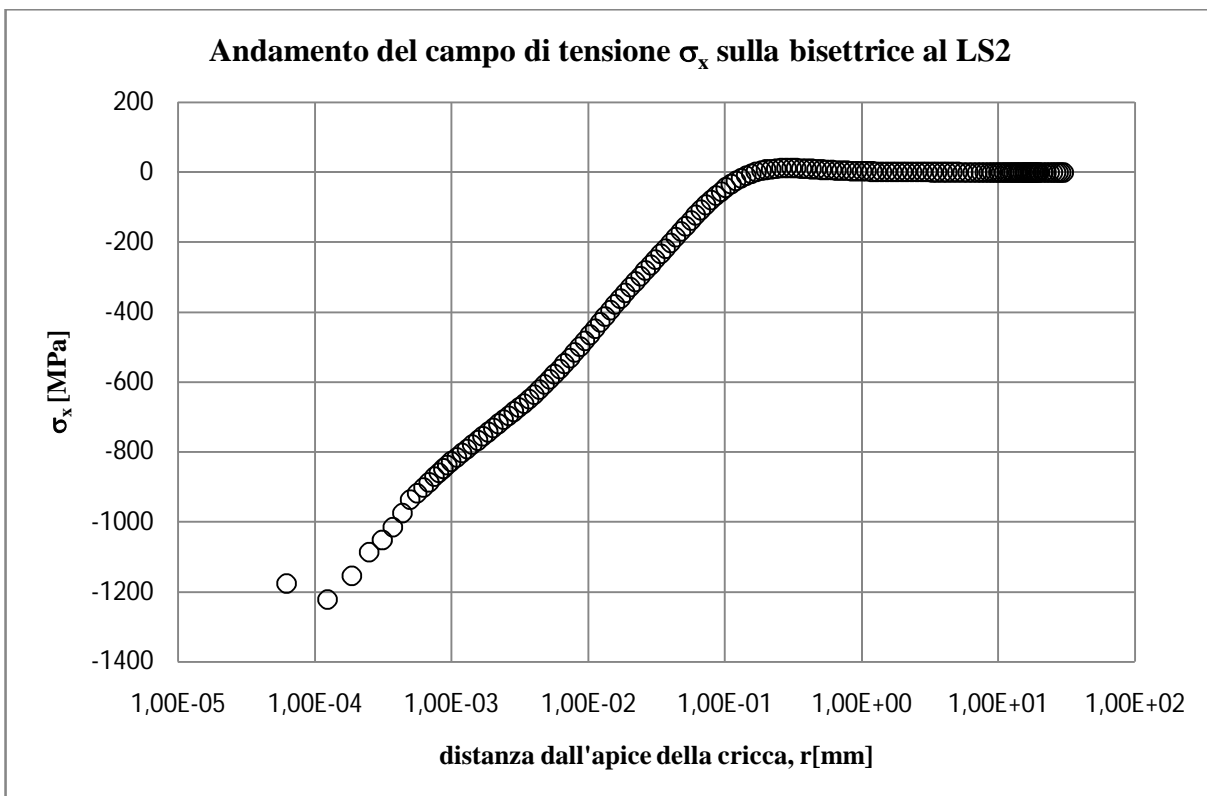


Figura 3.59 Distribuzione di tensione σ_x lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 2 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

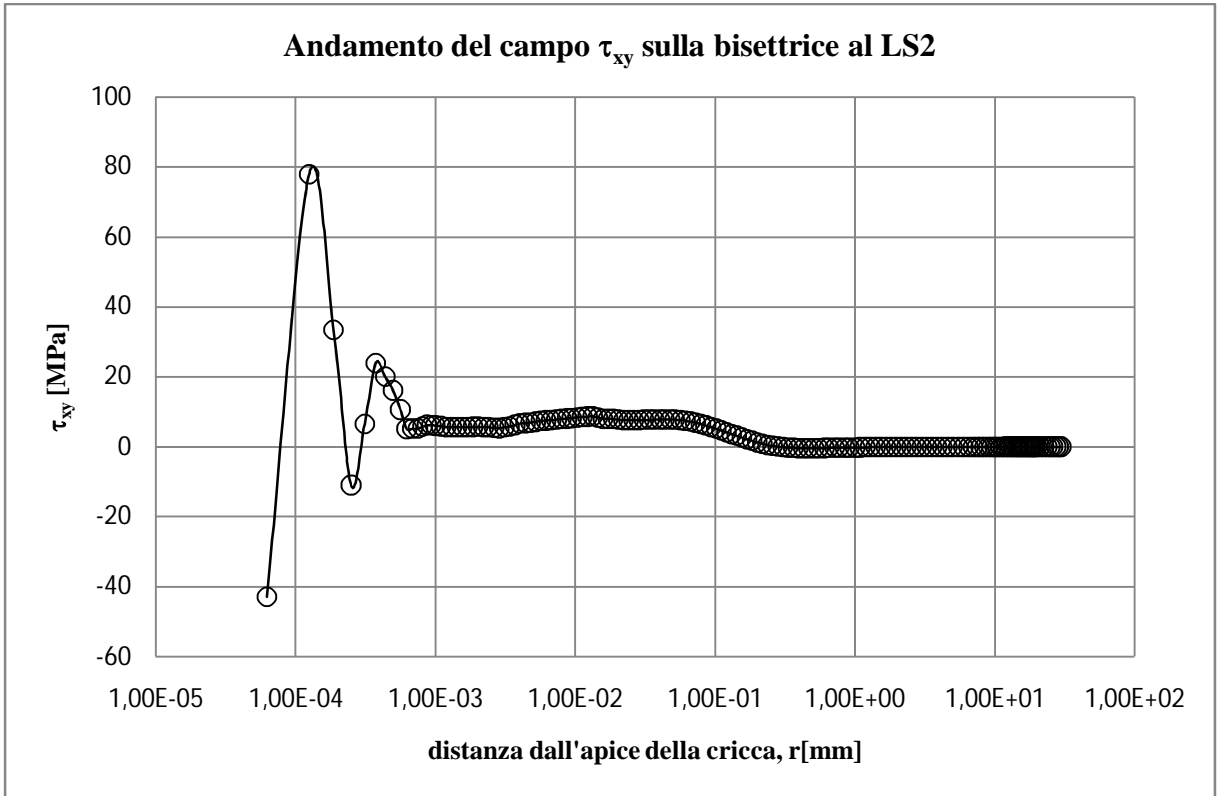


Figura 3.60 Distribuzione di tensione τ_{xy} lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 2 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

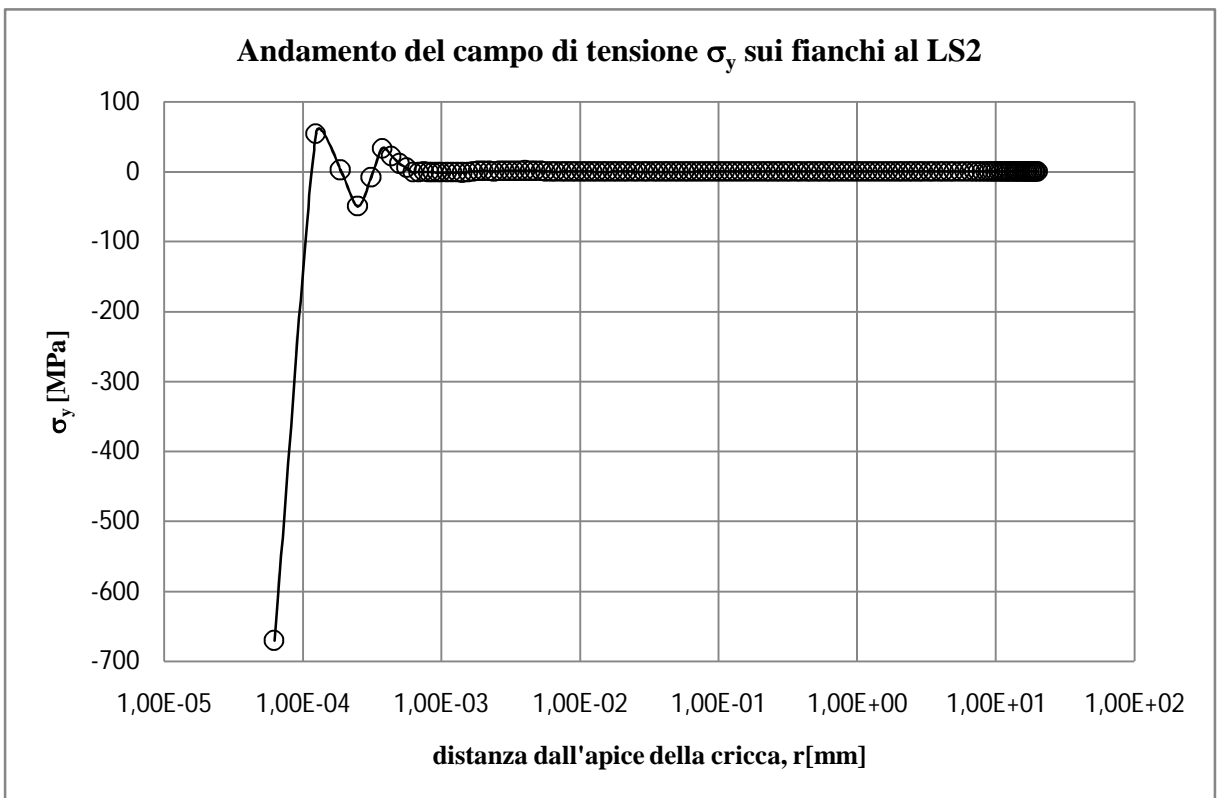


Figura 3.61 Distribuzione di tensione σ_y lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 2 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

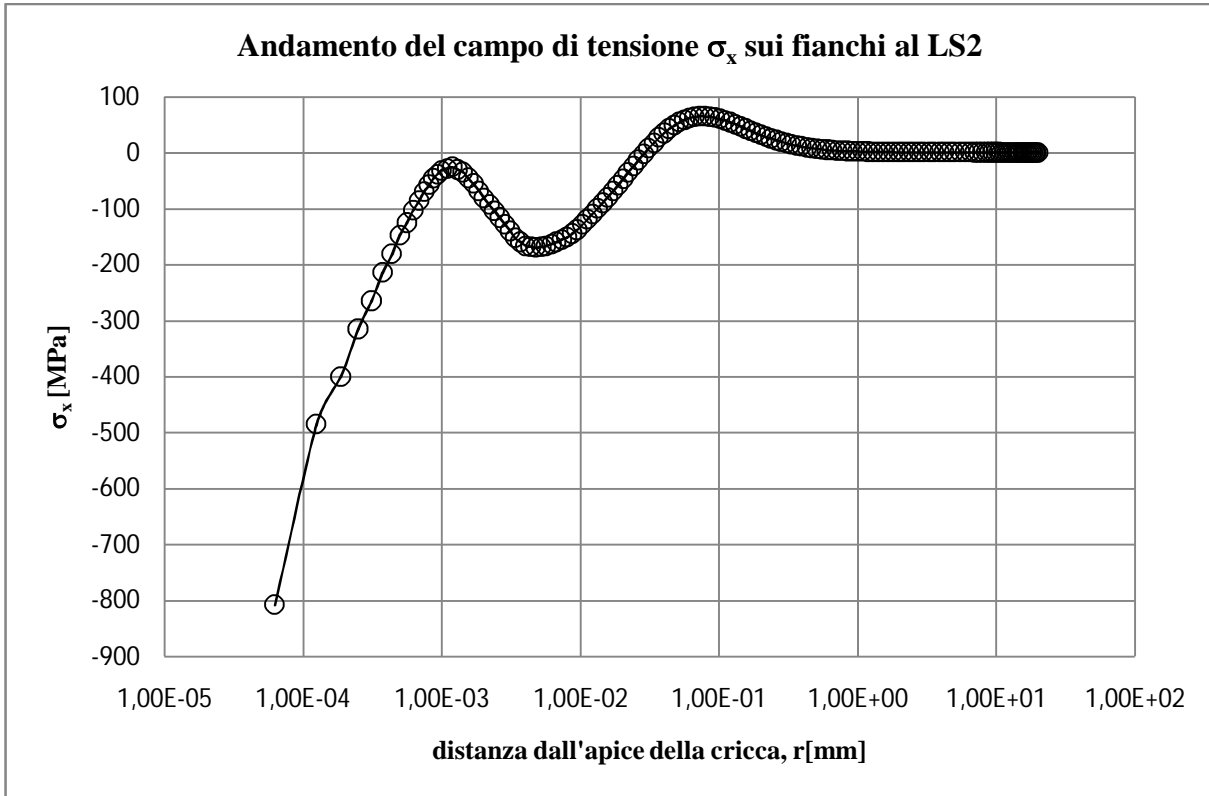


Figura 3.62 Distribuzione di tensione σ_x lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 2 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

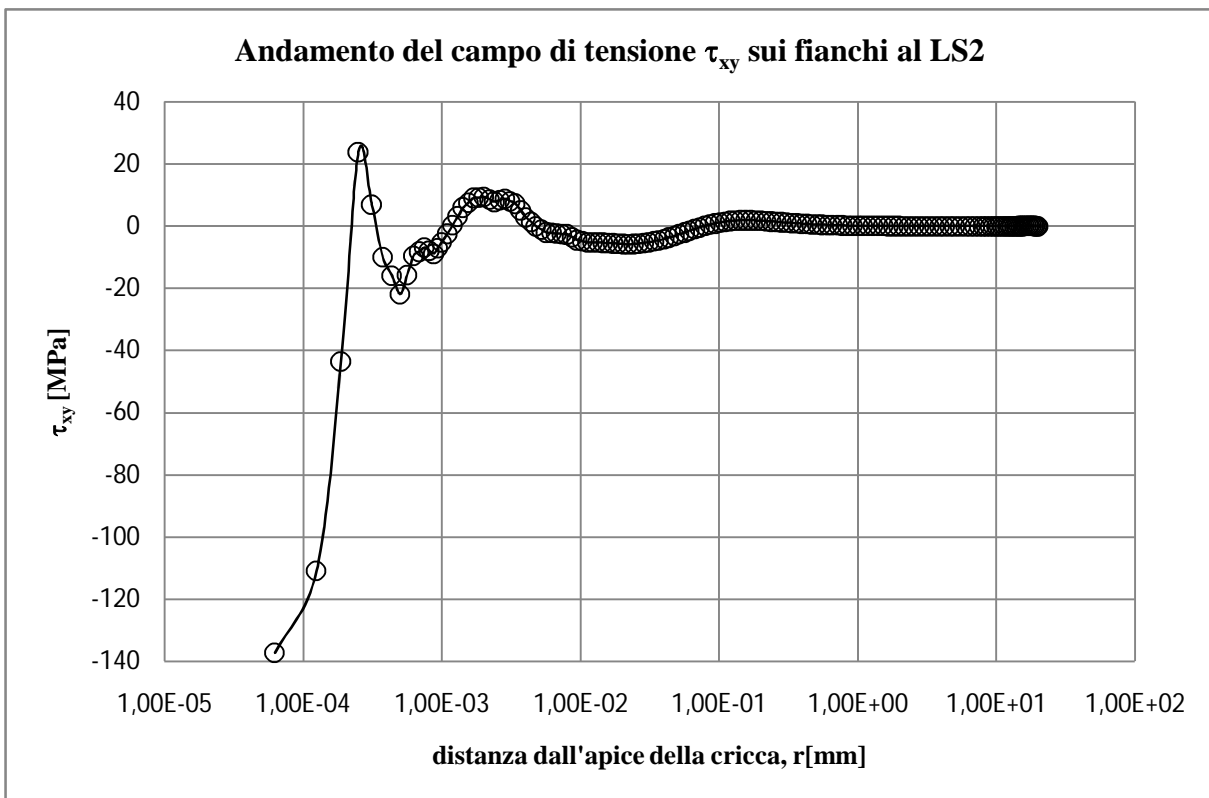


Figura 3.63 Distribuzione di tensione τ_{xy} lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 2 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

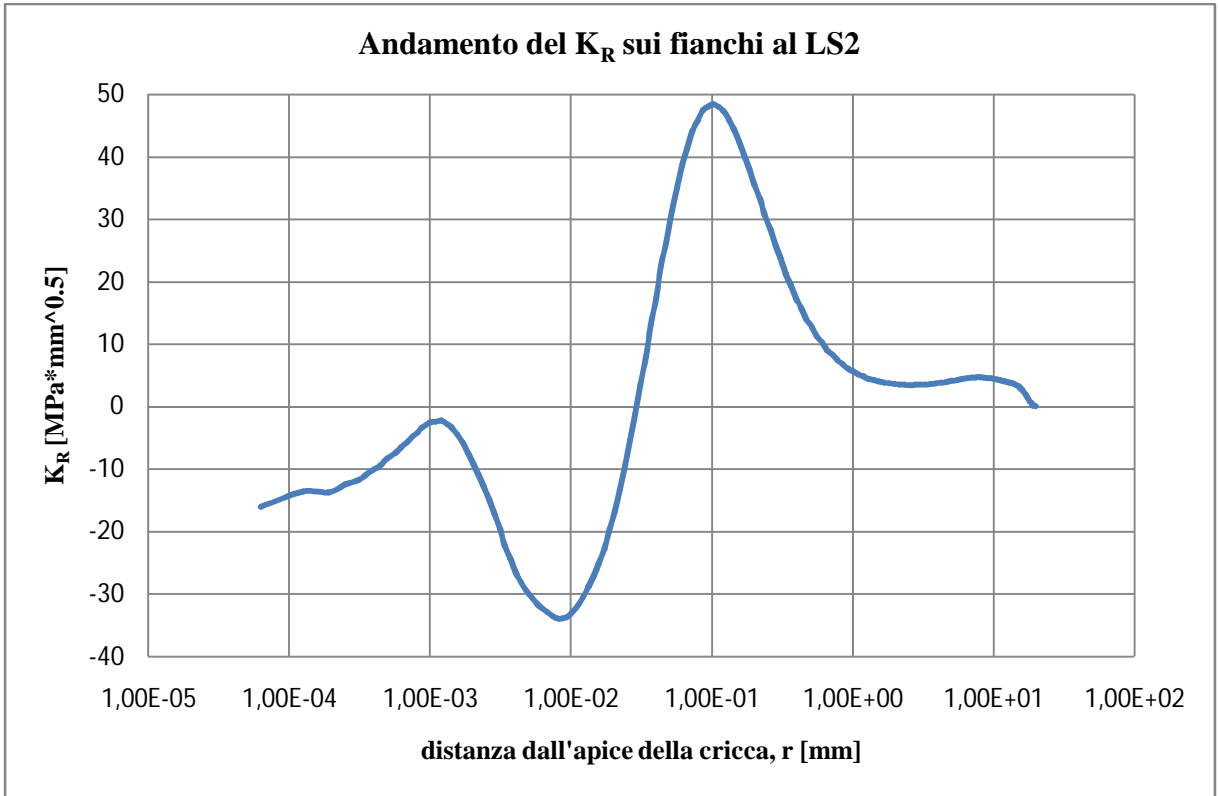


Figura 3.64 Andamento del fattore di intensificazione della tensioni K_R valutato al load step 2

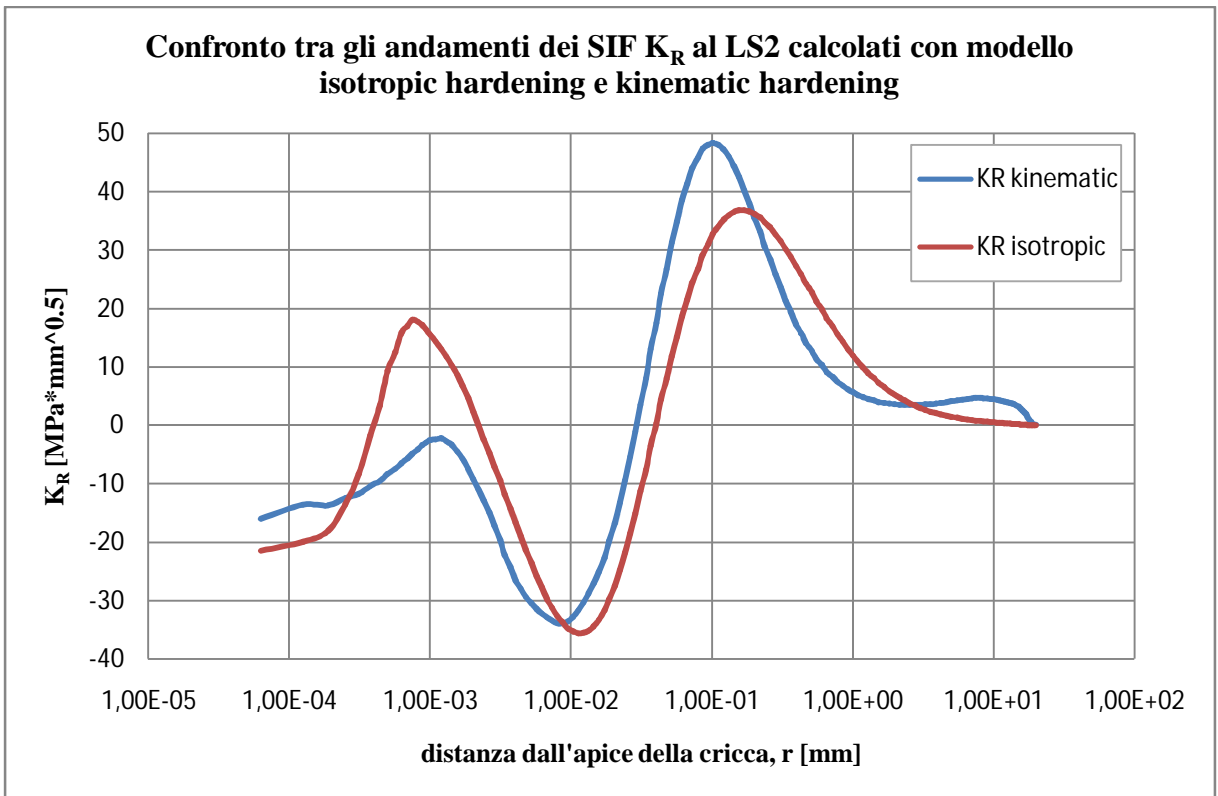


Figura 3.65 Confronto tra gli andamenti dei SIF K_R relativi entrambi al LS2 calcolati sulla base di analisi elastoplastiche per le quali si adotta un modello del materiale kinematic hardening in blu e isotropic hardening in rosso.

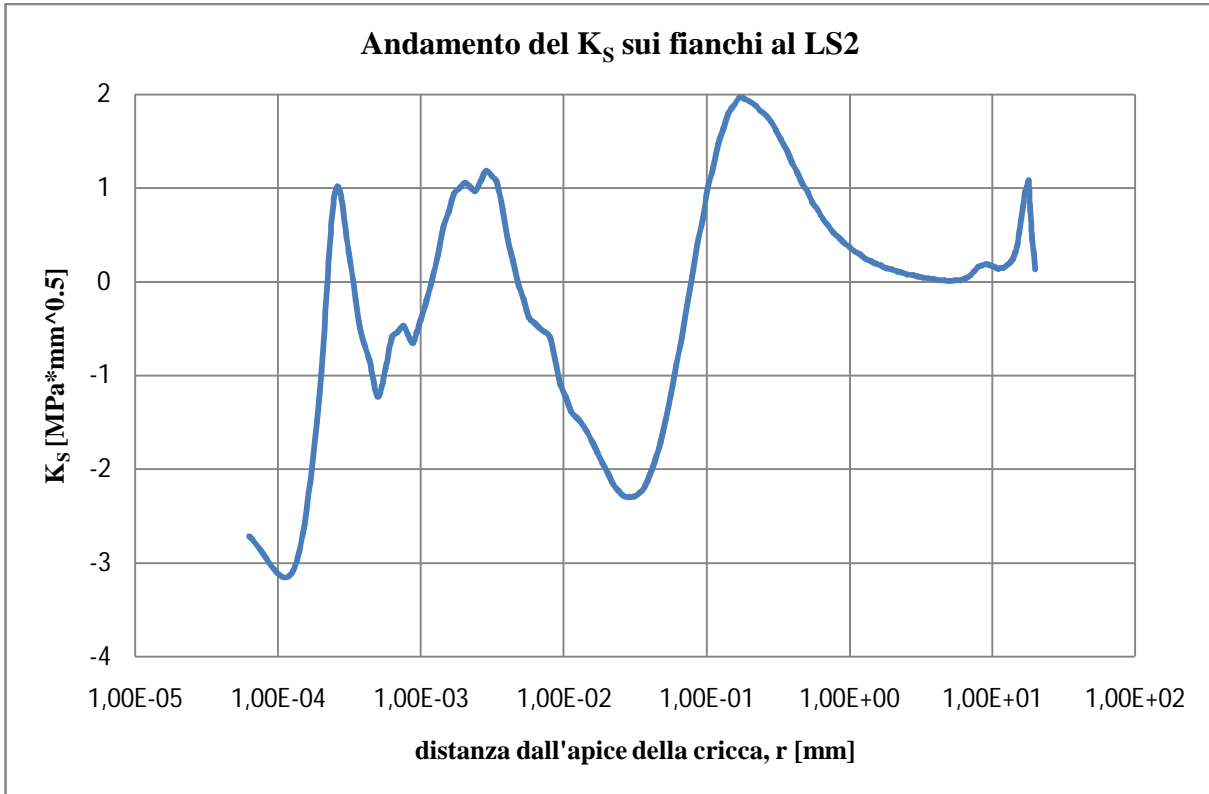


Figura 3.66 Andamento del fattore di intensificazione della tensioni K_S valutato al load step 2.

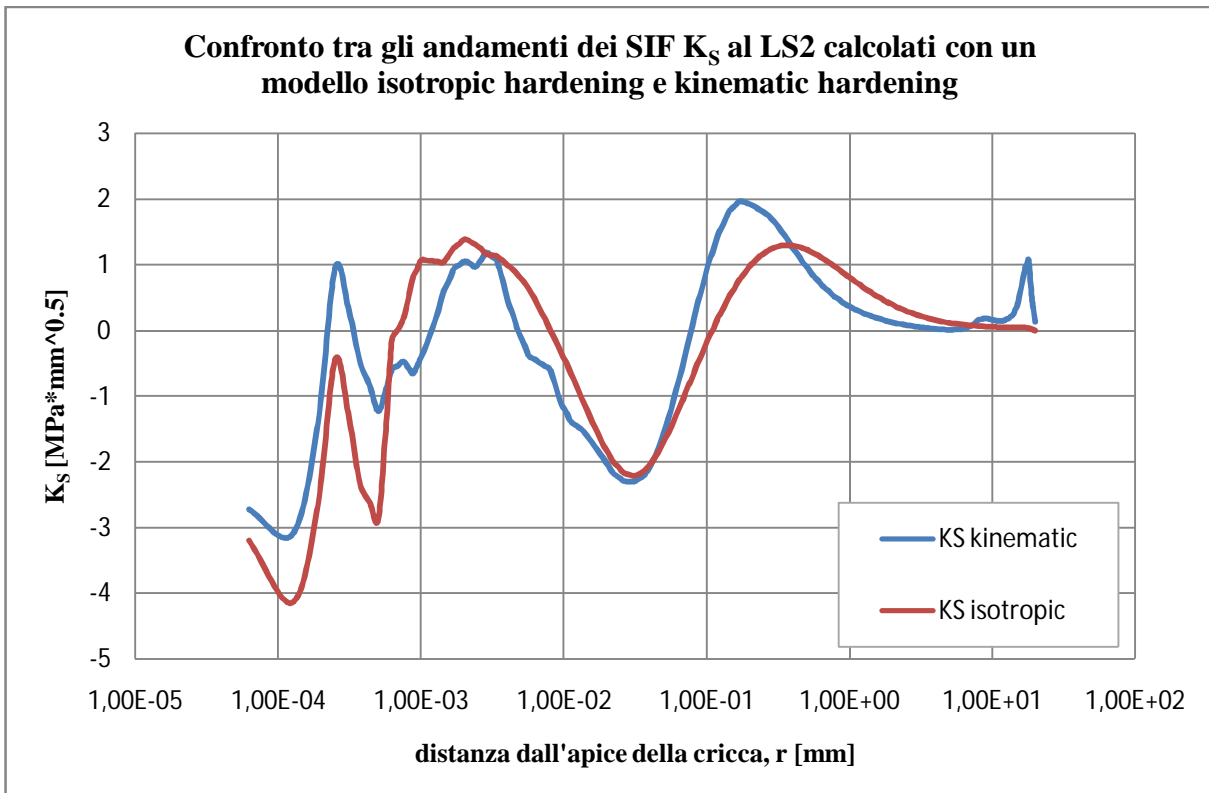


Figura 3.67 Confronto tra gli andamenti dei SIF K_R relativi entrambi al LS2 calcolati sulla base di analisi elastoplastiche per le quali si adotta un modello del materiale kinematic hardening in blu e isotropic hardening in rosso.

3.5.3 Load Step 3

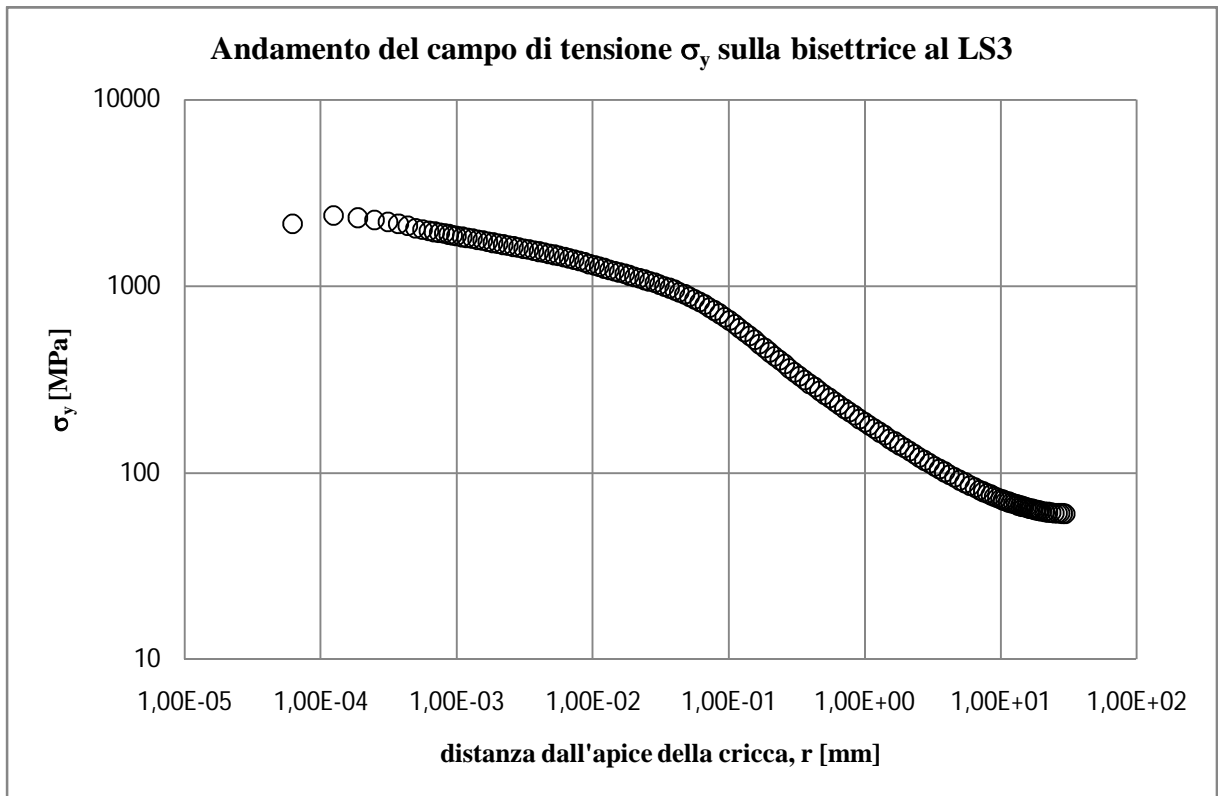


Figura 3.68 Distribuzione di tensione σ_y lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 3 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

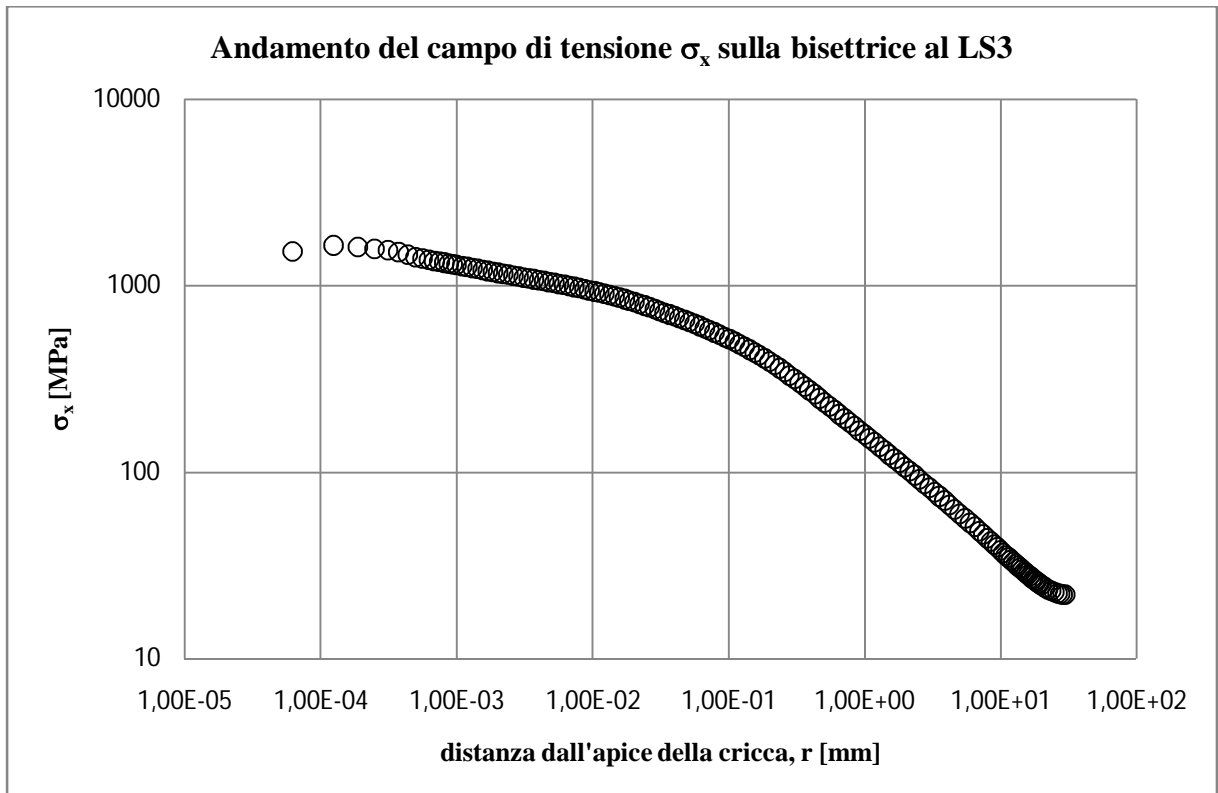


Figura 3.69 Distribuzione di tensione σ_x lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 3 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

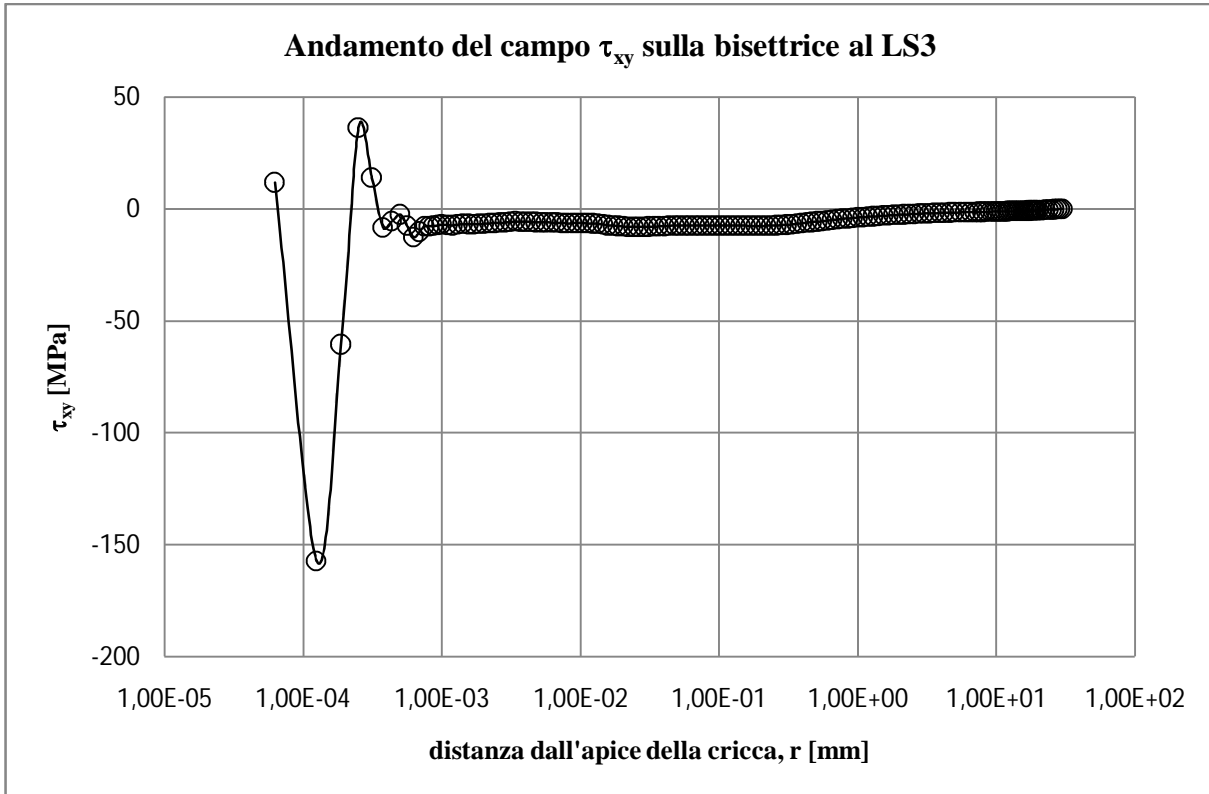


Figura 3.70 Distribuzione di tensione τ_{xy} lungo la bisettrice della cricca calcolata al load step 3 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

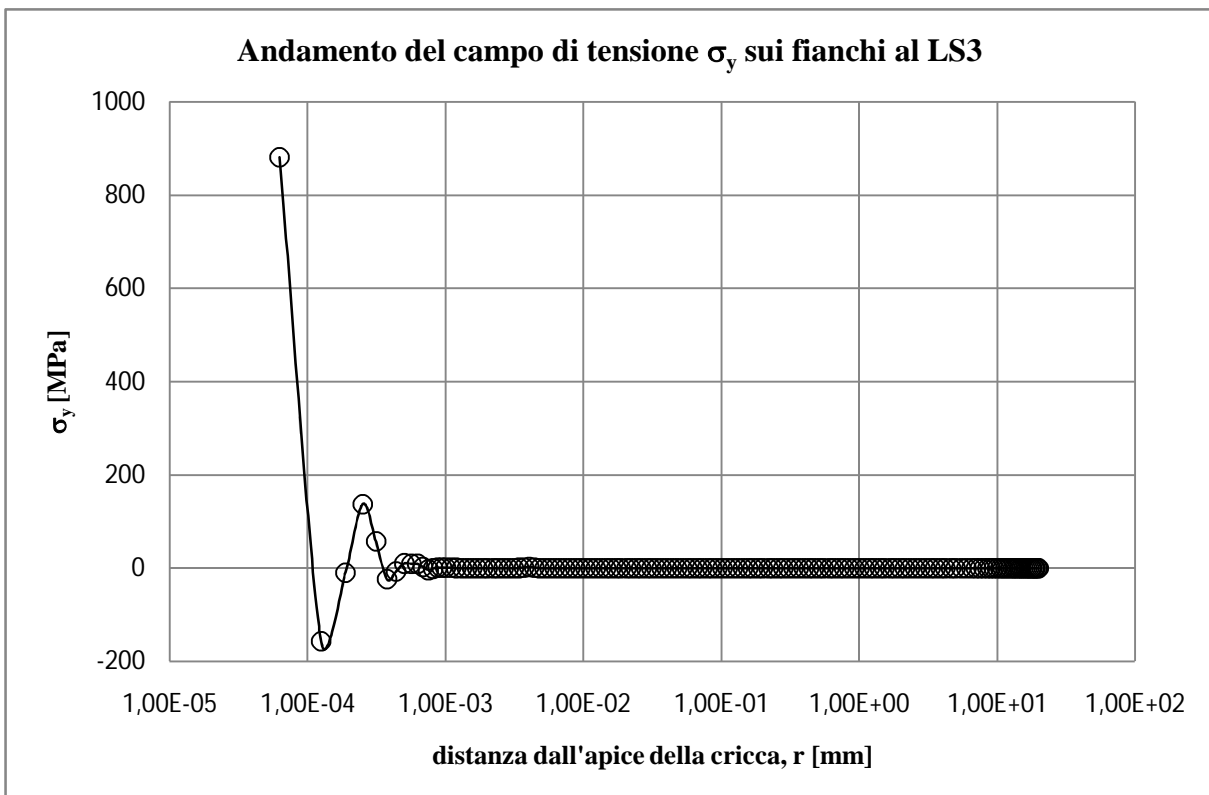


Figura 3.71 Distribuzione di tensione σ_y lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 3 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

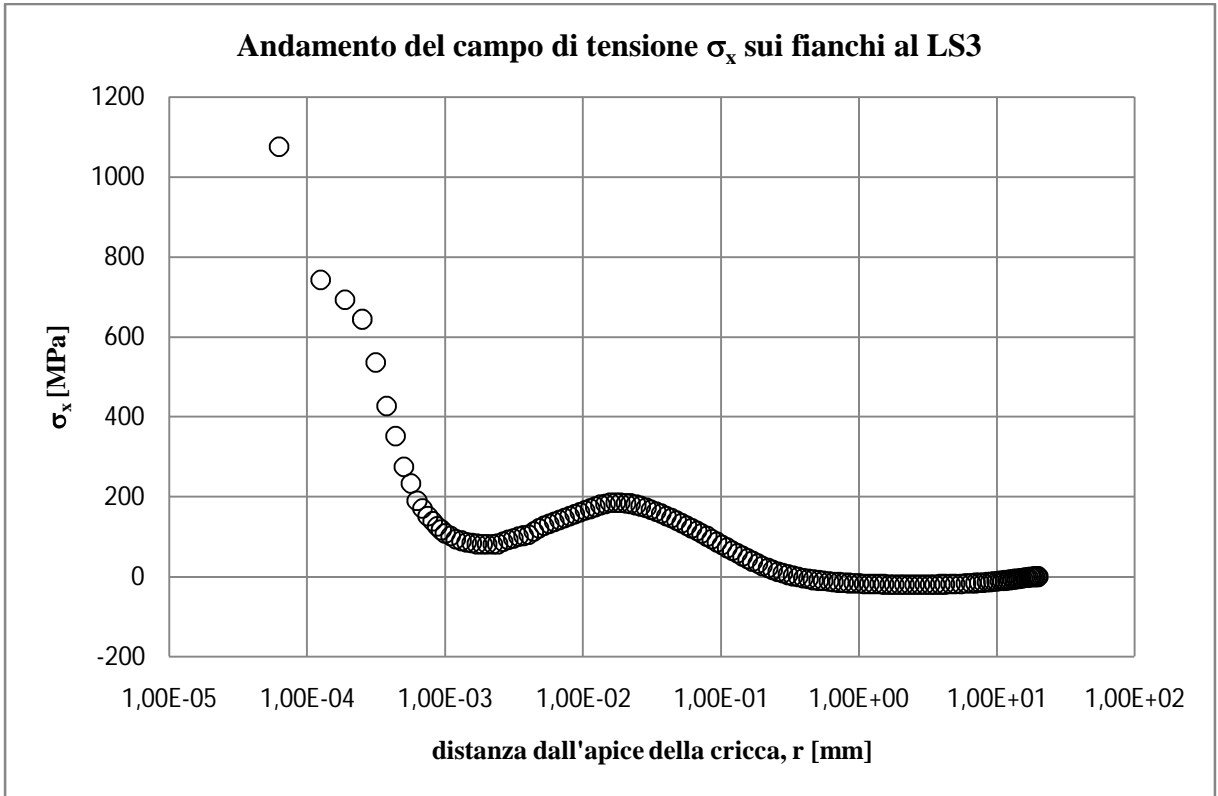


Figura 3.72 Distribuzione di tensione σ_x lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 3 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

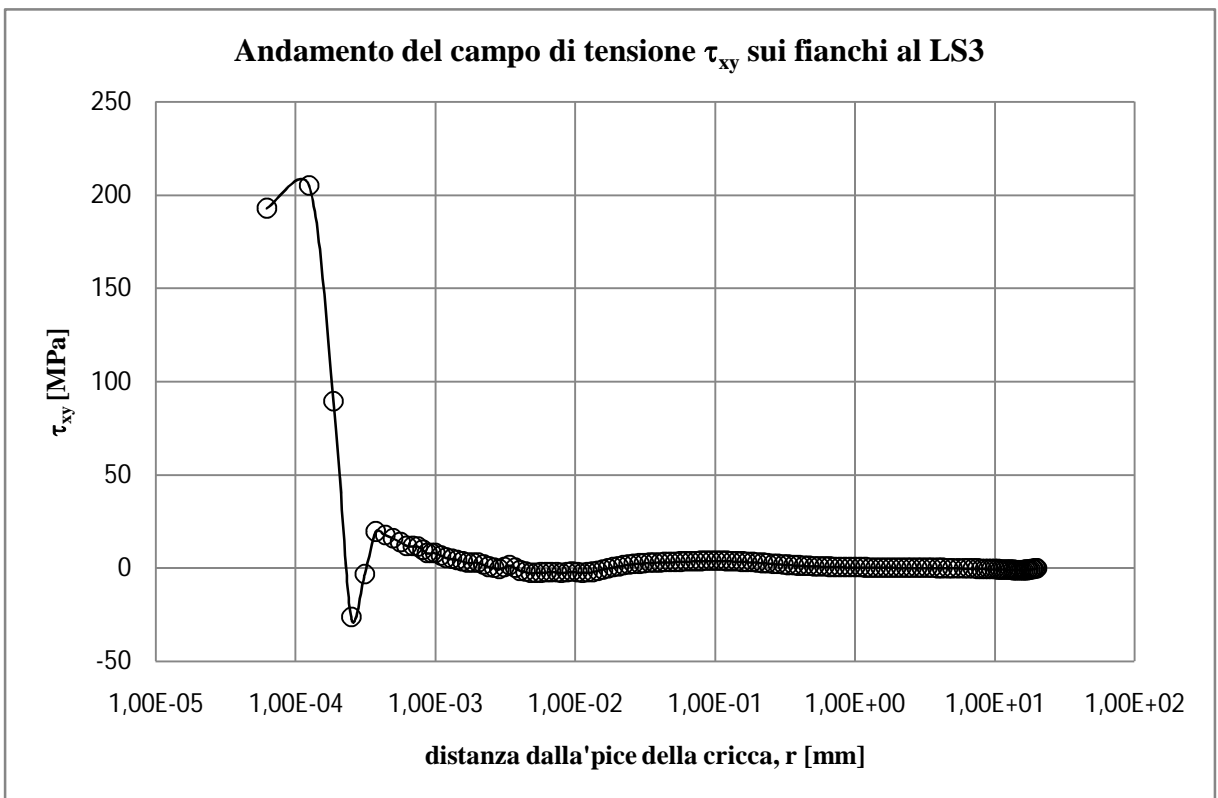


Figura 3.73 Distribuzione di tensione τ_{xy} lungo i fianchi della cricca calcolata al load step 3 con un'analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

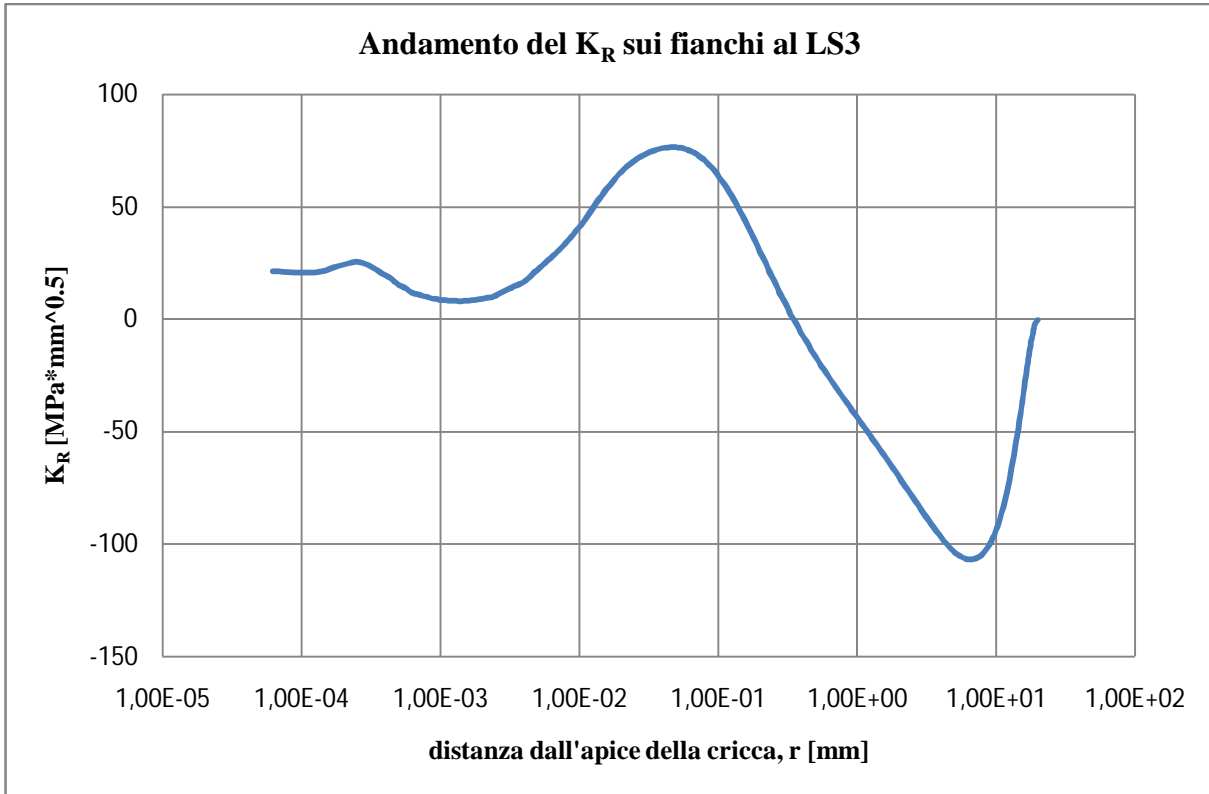


Figura 3.74 Andamento del fattore di intensificazione della tensioni K_R valutato al load step 3.

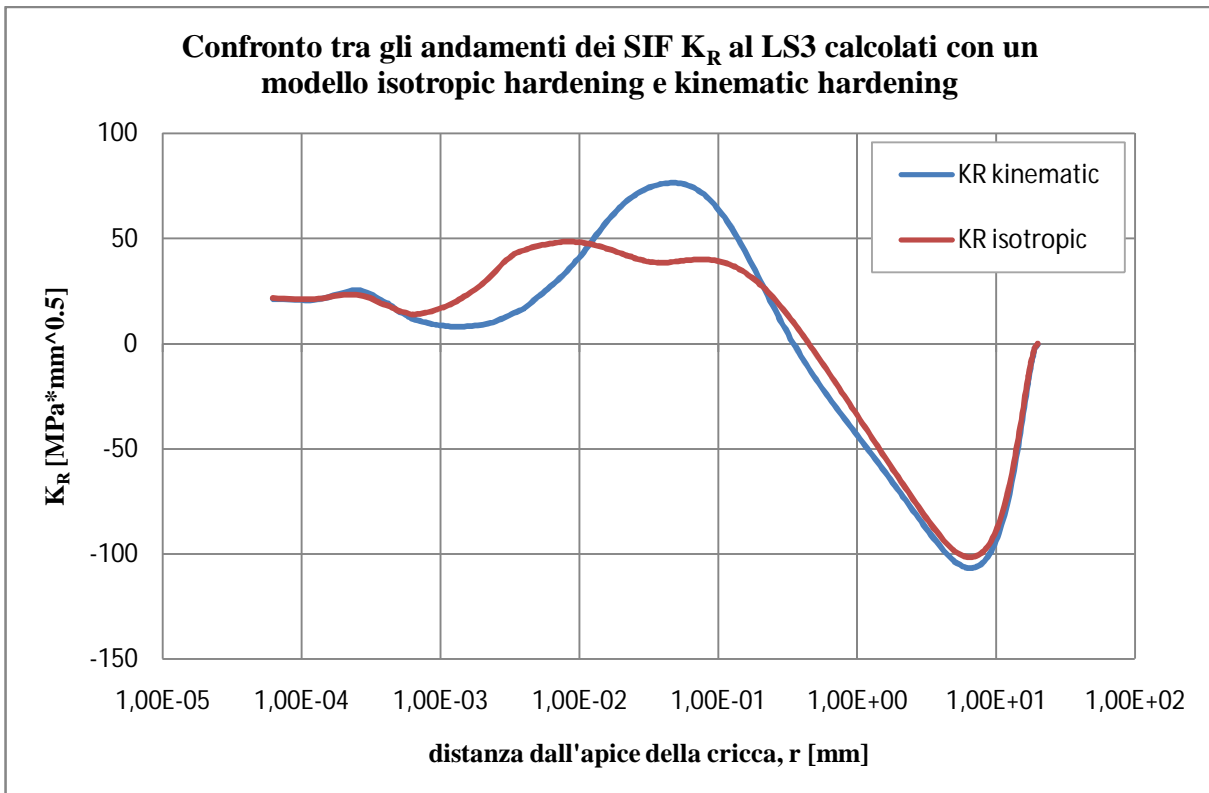


Figura 3.75 Confronto tra gli andamenti dei SIF K_R relativi entrambi al LS3 calcolati sulla base di analisi elastoplastiche per le quali si adotta un modello del materiale kinematic hardening in blu e isotropic hardening in rosso.

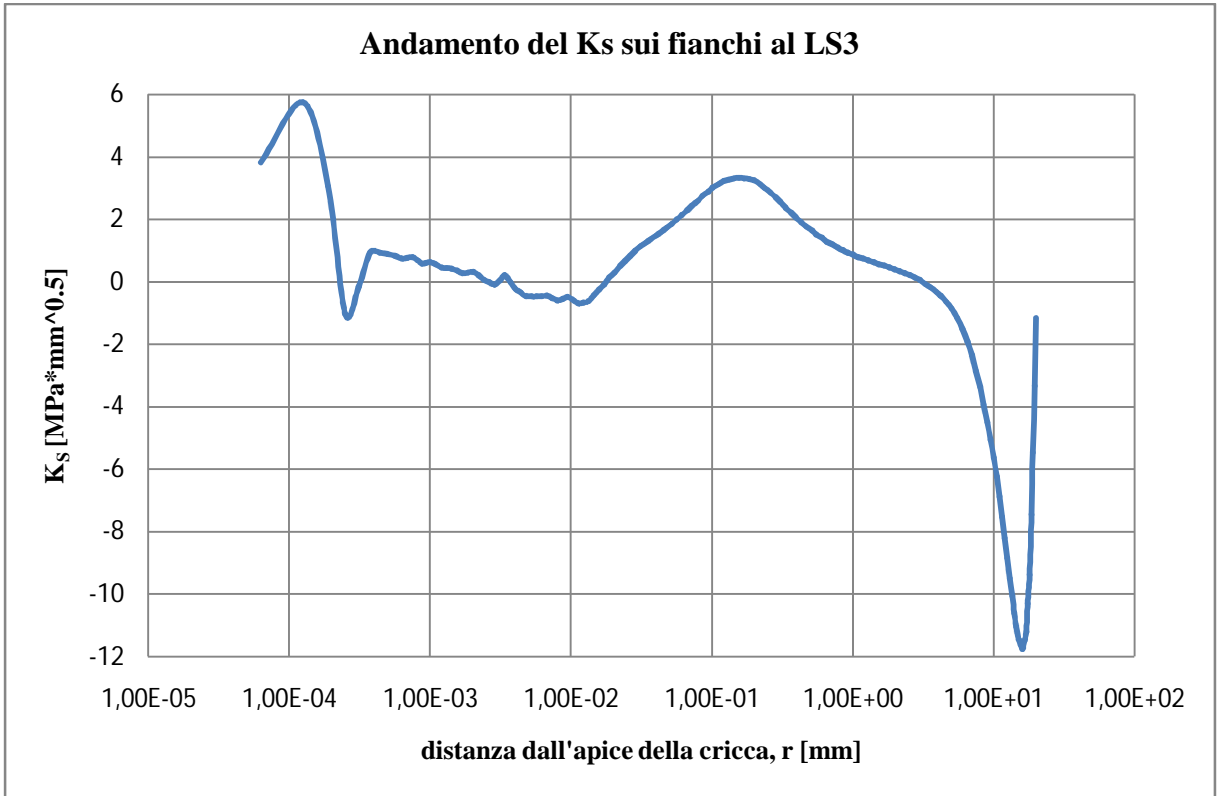


Figura 3.76 Andamento del fattore di intensificazione della tensioni K_S valutato al load step 3.

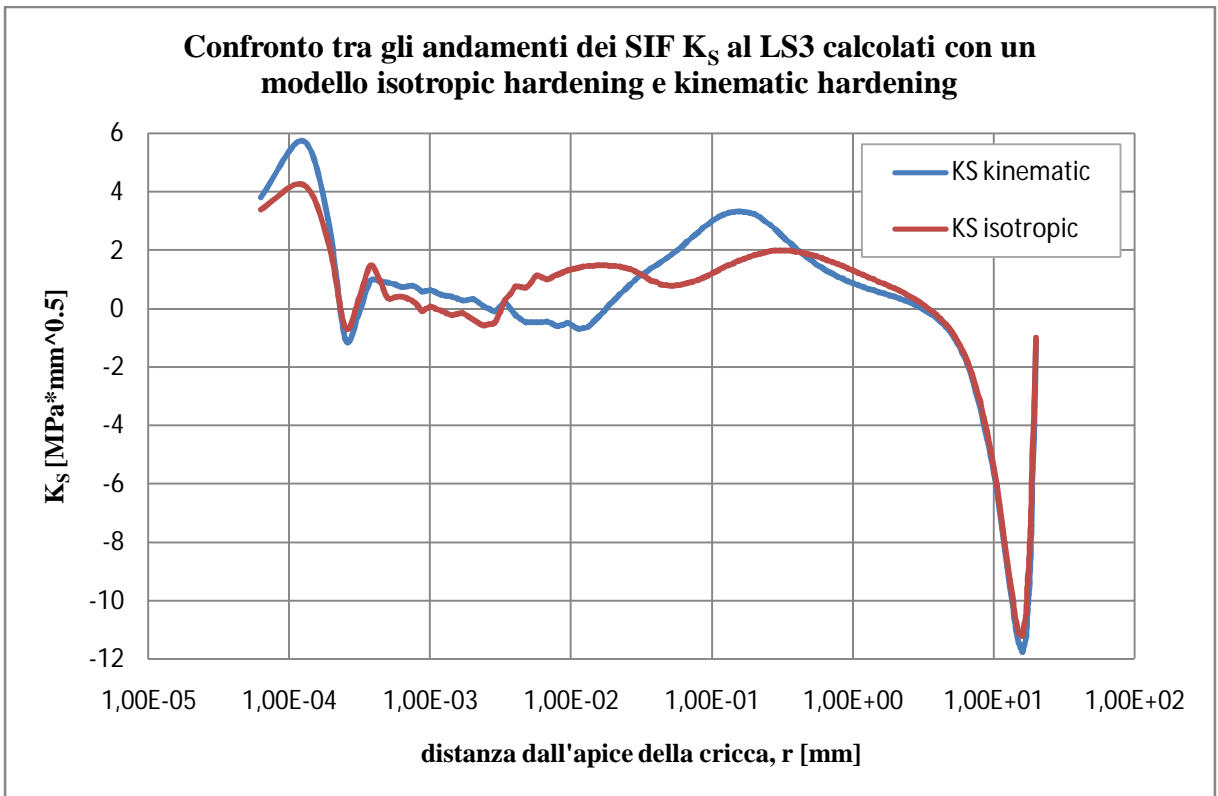


Figura 3.77 Confronto tra gli andamenti dei SIF K_R relativi entrambi al LS3 calcolati sulla base di analisi elastoplastiche per le quali si adotta un modello del materiale kinematic hardening in blu e isotropic hardening in rosso.

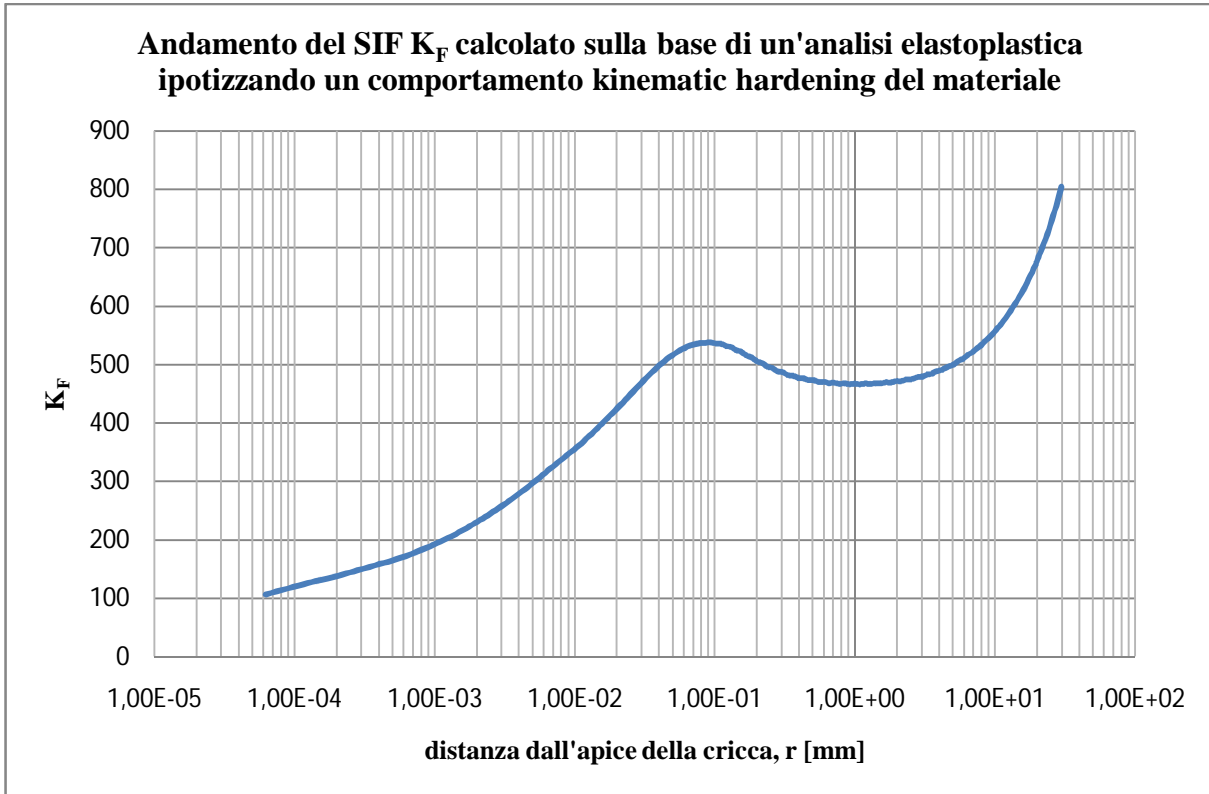


Figura 3.78 Andamento del fattore di intensificazione della tensioni K_F valutato al load step 3.

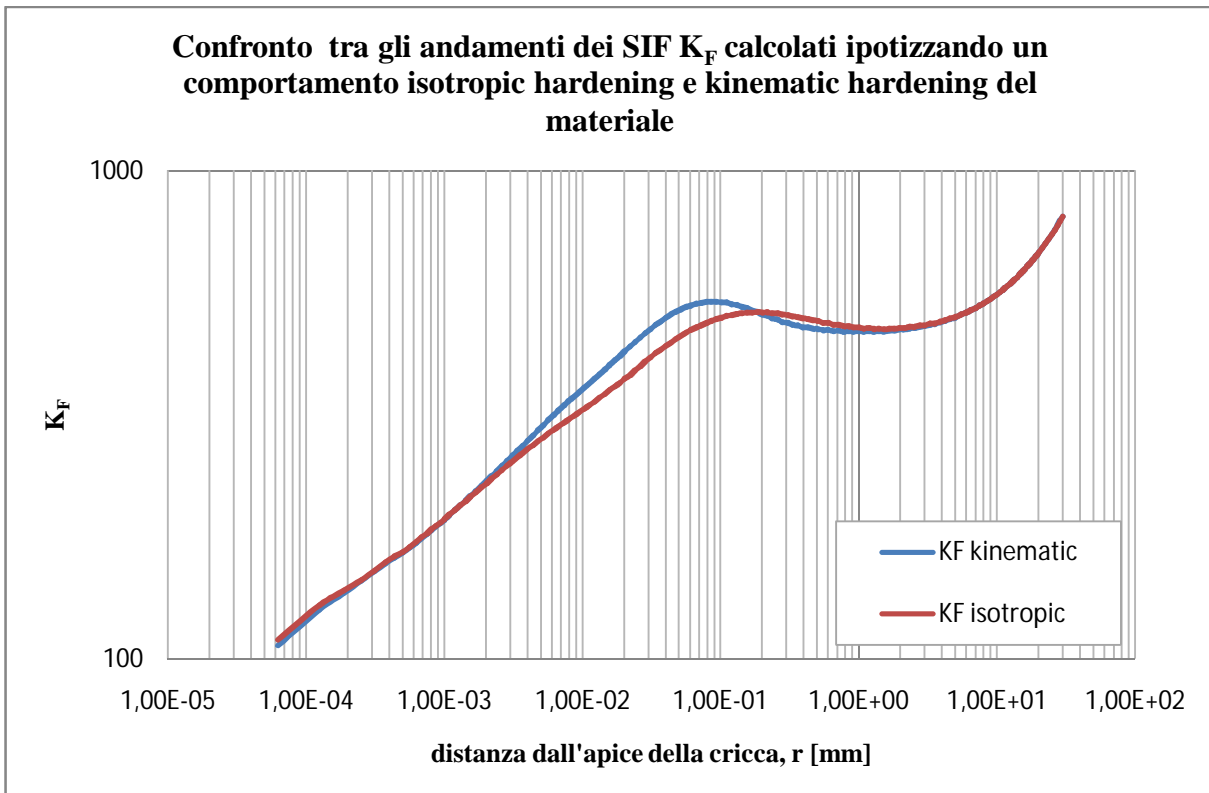


Figura 3.79 Confronto tra gli andamenti del K_F ottenuti utilizzando per la loro determinazione la distribuzione di tensione σ_y valutata al LS3 nell'ipotesi di adottare un modello elastoplastico del materiale. In particolare si riporta in blu il risultato ottenuto qualora si ipotizzi un comportamento kinematic hardening e in rosso un comportamento isotropic hardening.

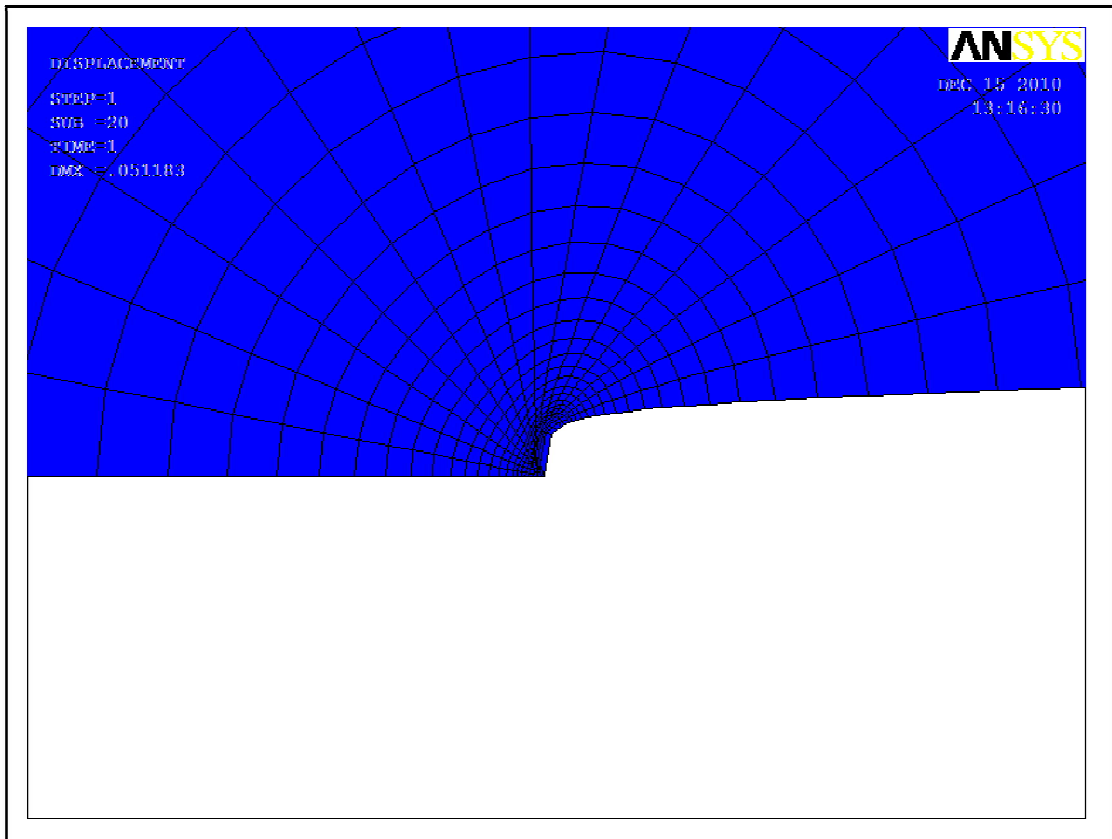


Figura 3.80 Deformata al LS1 nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

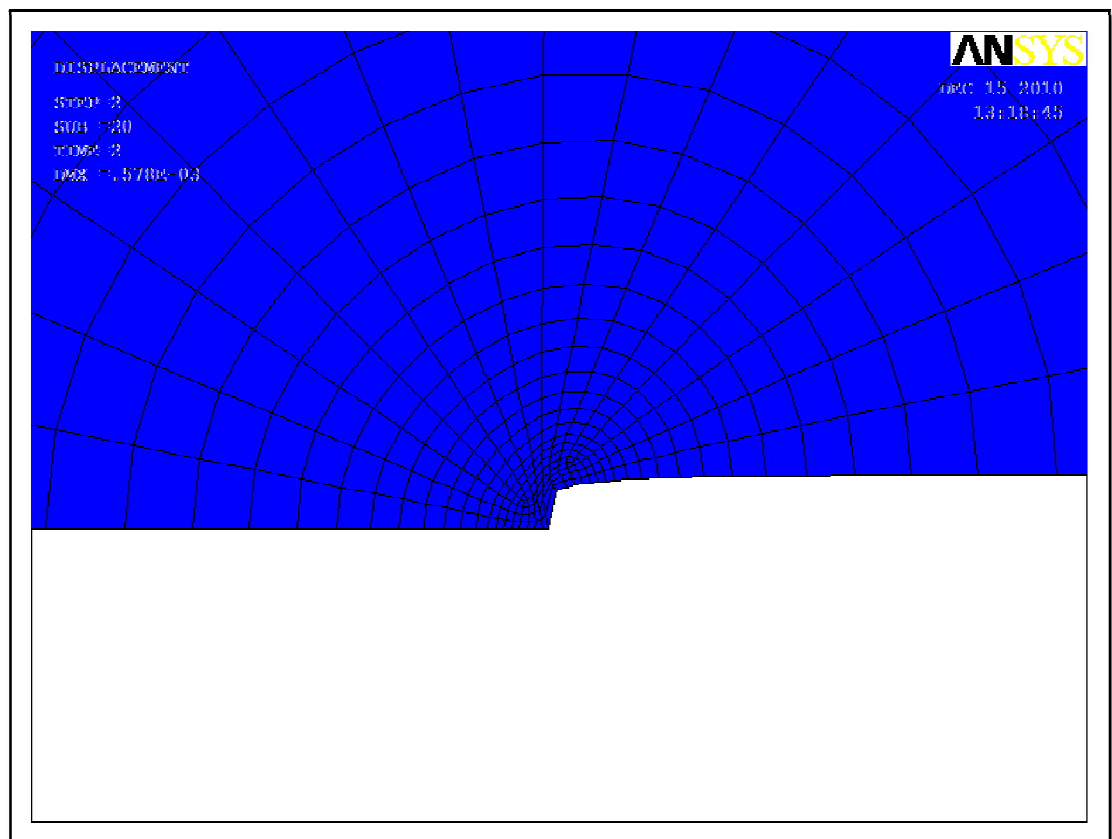


Figura 3.81 Deformata al LS2 nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale

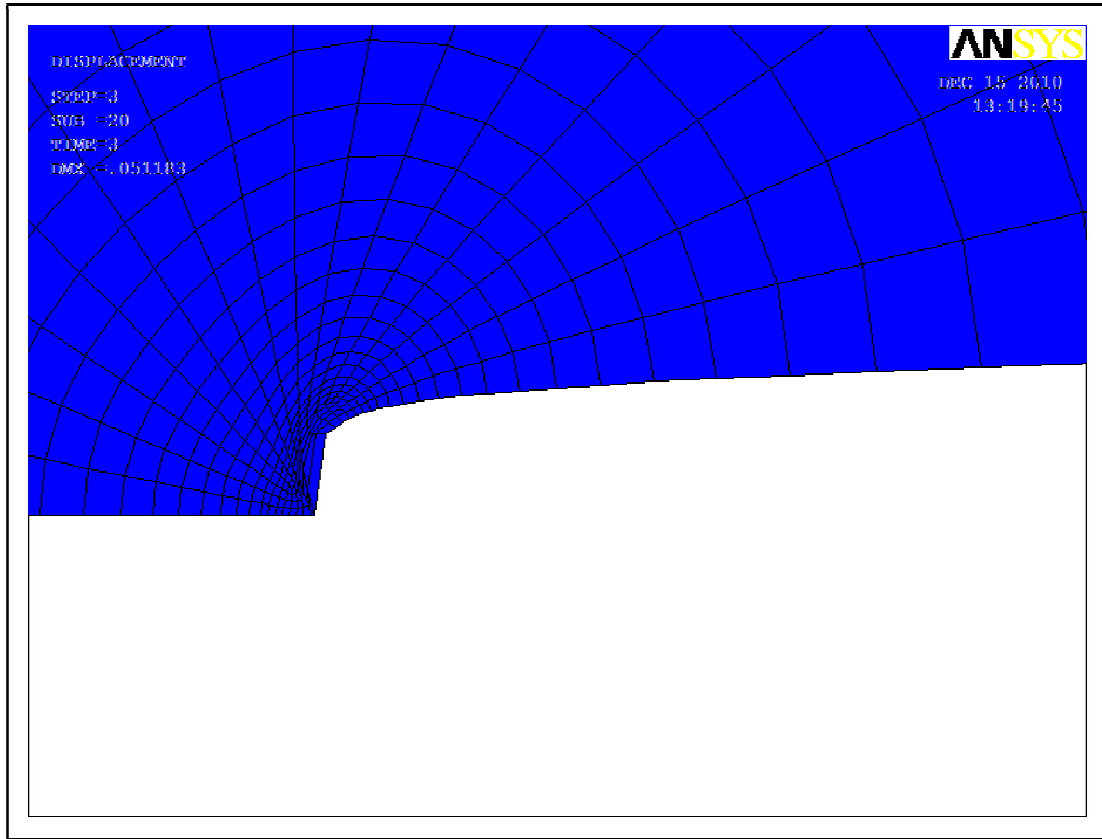


Figura 3.82 Deformata al LS3 nell'ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale.

3.5.4 Valutazione del parametro E e discussione dei risultati

Si consideri anzitutto, come tra l'altro fatto precedentemente, il load step 1. Come oramai noto, per la valutazione del parametro E si sfrutta la definizione del fattore di intensificazione delle tensioni K_R e della condizione $D + E = 0$. La definizione di K_R è legata al limite per r che tende a zero del campo di tensione σ_x lungo i fianchi della cricca. Si nota però dalla figura 3.52 che l'andamento di K_R ancora una volta è costante solo nelle immediate prossimità dell'apice della cricca contrariamente, come già detto, all'andamento che dovrebbe avere un parametro di campo quale un SIF. Al fine di valutare il parametro E si procede come precedentemente fatto relativamente alle analisi eseguite sulla base di un comportamento *isotropic hardening* del materiale. Si considera cioè solo quel ridotto numero di nodi nei quali si denota una tendenza di K_R ad un valore circa costante. In questo caso specifico K_R assume un valore al load step 1 pari a circa:

$$K_R \cong 21.5 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

Nelle analisi precedenti si era ottenuto un valore di K_R molto prossimo a quello ottenuto ora (precisamente $K_R \cong 20 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$), sufficientemente prossimo da ritenerli praticamente coincidenti e pertanto confondibili.

Procedendo come prima anticipato si determina:

$$E = -\frac{\sqrt{2}K_R}{4\pi^{3/2}} \Leftarrow \begin{cases} K_R = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_x) = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} (D - 3E) \\ D + E = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

$$E = -\frac{\sqrt{2}K_R}{4\pi^{3/2}} \Rightarrow E \cong -\frac{\sqrt{2} \cdot 21.5}{4 \cdot \pi^{3/2}} \cong -1.35$$

Sfruttando la prima delle 3.1 con il parametro E appena calcolato si determina il fattore di intensificazione delle tensioni K_F . Come si vede dalle figure 3.56, ancora una volta il SIF K_F non risulta costante in nessun tratto della bisettrice. E' riportato anche un confronto in figura 3.57 tra gli andamenti del SIF K_F ottenuti da analisi elastoplastiche sulla base di un modello *isotropic hardening* (in rosso) e *kinematic hardening* (in blu). Si sottolinea volutamente ancora una volta la caratteristica di “non costanza” dell’andamento del SIF K_F in quanto è proprio questo l’aspetto più importante e significativo dal punto di vista pratico. Di fatto tale caratteristica di “non costanza” del valore del SIF impedisce di usare il K_F in un qualsiasi progetto o verifica di un componente o struttura.

Si consideri ora il load step 2 (cioè la fase di scarico). Da un’analisi elastoplastica con un modello *kinematic hardening* a rappresentare il materiale si ricava un andamento del K_R pari a quello in figura 3.64. A differenza del K_R determinato al load step 1, dove seppur per un numero ridottissimo di nodi vicino all’apice vi era un andamento costante, ora il K_R non risulta mai costante (al pari di quanto già riscontrato con una analisi basata su un modello *isotropic hardening* del materiale). I 2 valori che il SIF assume nei nodi più prossimi all’apice risultano circa $K_R \cong -16 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ e $K_R \cong -13 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ rispettivamente ai nodi di coordinata $r = 6.25 \times 10^{-5} \text{ mm}$ e $r = 1.25 \times 10^{-4} \text{ mm}$. Diversamente da quanto avveniva per un analisi basata su un modello *isotropic hardening* ora i valori che assume K_R ai LS1 e LS2 in prossimità dell’apice della cricca non risultano più pari in modulo e di segno opposto; ciò è logica conseguenza del comportamento *kinematic hardening*. Con riferimento a questo evento non sono più valide le considerazioni esposte in relazione alle analisi basate su un modello *isotropic hardening* nelle quali si ricavava un andamento del SIF K_F considerando un valore positivo del parametro E. Si evita pertanto ora di tracciare l’andamento dei SIF K_F al LS2 delle analisi correnti in quanto qualsiasi scelta del valore di E da adottare non sarebbe effettuata sulla base di un opportuno criterio, bensì in modo del tutto casuale.

Analizzando i risultati ottenuti invece al LS3 non si notano particolari miglioramenti sulla costanza del valore del SIF K_R , ne tantomeno degli altri due SIF K_S e K_F . Quest'ultimo è stato ovviamente determinato sfruttando il solito sistema di equazioni già illustrato più volte (formule 3.45 e 3.48) per calcolare il valore del parametro E .

Si riportano inoltre una serie di immagini dove sono sovrapposti gli andamenti del SIF K_R ottenuti al LS1, LS2 e LS3 per analisi elastoplastiche basate su modelli *isotropic hardening* e *kinematic hardening*. Si nota in particolare che sia al LS1 sia al LS3 il valore a cui tende il SIF K_R è il medesimo indipendentemente dal modello di materiale adottato nell'analisi. Si può pertanto concludere che i risultati che si ottengono col modello CJP agli step di carico sono per lo più insensibili al modello usato per simulare le caratteristiche del materiale.

Si riportano infine anche tre immagini (figure 3.80, 3.81 e 3.82) raffiguranti la deformata all'apice del difetto ai tre load step.

3.6 Conclusioni

In questo capitolo di tesi si è voluto analizzare in modo schematico il modello CJP degli autori Christopher, James e Patterson, servendosi anche dell'uso di un codice agli elementi finiti (in particolare ANSYS® 11.0) allo scopo di “testarne in modo pratico” la validità.

Dopo una prima introduzione del modello ed una analisi degli obiettivi dello stesso si è passati a descrivere il sistema di forze che agisce sulla cricca durante un ciclo di fatica. Tale sistema di forze costituisce la base fisica sulla quale si fonda il modello. Successivamente si prosegue con l'esposizione del frame analitico e una descrizione dei tre fattori di intensificazione delle tensioni, principali risultati del modello. Dopodiché a partire dall'equazione 3.3, ripresa da un articolo degli autori stessi, si sono potuti ricavare i potenziali complessi e le espressioni delle componenti di tensione. La trattazione precede poi con una serie di analisi numeriche alternate con osservazioni personali relative ai risultati ottenuti. In particolare nelle analisi FEM si sono considerate 2 ipotesi diverse di comportamento del materiale, *isotropic hardening* e *kinematic hardening*.

In conclusione quanto riportato in questo capitolo di tesi consente di affermare che il modello CJP non costituisce uno strumento utile ed idoneo per svolgere quei compiti per i quali è stato creato (principalmente descrivere il fenomeno del *crack closure* e l'effetto di *shielding* dell'enclave plastico sulla propagazione della cricca).

In modo sintetico si riportano qui di seguito le principali critiche che si possono muovere al modello:

- Incoerenza tra la definizione del fattore di intensificazione delle tensioni K_F con la fisica del problema.
- Definizione improbabile del SIF K_F che si ripercuote sull'unità di misura del SIF stesso rendendola incomprensibile.
- Andamento non costante dei SIF K_R e K_S tale da rendere di difficile applicazione e utilizzo il modello stesso che li propone.
- Andamento non costante del SIF K_F tale da impedirne ogni utilizzo in qualsiasi ambito pratico di progetto o verifica.

Studio del valore dei coefficienti del modello CJP e dei termini di ordine superiore nell'espressione di Irwin

Capitolo 4

4.1 Introduzione e inquadramento analitico

Westergaard, Irwin e Williams per primi dimostrarono che se si assume un sistema di coordinate polari con l'origine posta in corrispondenza dell'apice della cricca, lo stato di tensione in un qualunque componente criccato, purché abbia un comportamento lineare elastico, ha la seguente espressione:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) + \text{altri termini di ordine superiore} \quad 4.1$$

dove: σ_{ij} = tensore degli sforzi (o tensore delle tensioni)

r e θ = sistema di coordinate definito in figura 4.1

K = fattore di intensificazione delle tensioni

f_{ij} = funzione adimensionale dipendente dalla variabile θ

Esplicitando i termini di ordine superiore nell'espressione 4.1 e caratterizzandola per il valore $\theta=0$, questa risulta [17]:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 + A \left(\frac{r_p}{r} \right)^1 + B \left(\frac{r_p}{r} \right)^{1.5} + C \left(\frac{r_p}{r} \right)^2 + D \left(\frac{r_p}{r} \right)^{2.5} + F \left(\frac{r_p}{r} \right)^3 + G \left(\frac{r_p}{r} \right)^{3.5} + H \left(\frac{r_p}{r} \right)^4 + \dots \right] \quad 4.2$$

dove K_I è il fattore di intensificazione delle tensioni di modo I definito dalla MFLE ed r_p è il raggio plastico calcolato con la formula di Irwin [18]:

$$r_p = \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi\sigma_{sn}}} \right)^2 \quad 4.3$$

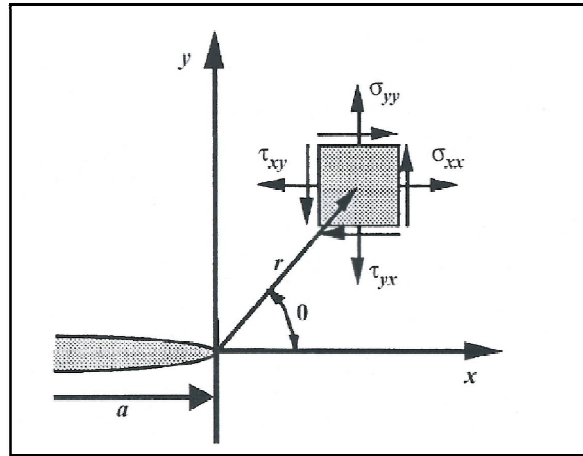


Figura 4.1 Definizione del sistema di coordinate assunto all'apice della cricca.

Nel capitolo precedente, sfruttando i potenziali complessi proposti da Christopher, James e Patterson [13-14], è stato possibile determinare una diversa espressione della componente di tensione σ_y . Tale espressione risultava essere:

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [G - 4H - 8E] + H \cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) + E \left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \left[\cos\left(\frac{5}{2}\theta\right) - 5 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + (\theta - \theta_0) \left[\sin\left(\frac{5}{2}\theta\right) - 5 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right] \right\} \quad 4.4$$

Considerando la condizione $\theta=0$ è possibile caratterizzare tale espressione sulla bisettrice della cricca. La 4.4 diventa quindi:

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \left\{ G - 3H - E \left[8 + 4 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \right] \right\} \quad 4.5$$

Obiettivo del seguente capitolo è anzitutto individuare il numero di coefficienti che è necessario considerare per avere la migliore approssimazione possibile che l'equazione 4.2 può fornire del reale campo di tensione sulla bisettrice della cricca. Tale campo di tensione usato per il confronto è stato determinato con una analisi FEM ipotizzando per il materiale un comportamento con incrudimento cinematico. La geometria del campione presa in esame e le proprietà del materiale sono le medesime considerate nel capitolo 3. Il passo successivo sarà quello di determinare il campo di tensione rappresentato dall'equazione 4.2 e confrontare quest'ultimo sia con il campo reale, sia con il campo derivante dalla formulazione del modello CJP.

4.2 Determinazione del numero di termini di ordine superiore utili a descrivere il campo di tensione sulla bisettrice

4.2.1 Caso in cui si considerano 5 termini di ordine superiore

Si consideri l'equazione 4.2, la quale, come già detto, descrive il campo di tensione σ_y sulla bisettrice della cricca. Se si trascurano i termini di ordine superiore oltre al quinto, l'espressione completa della componente suddetta risulta:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 + A \left(\frac{r_p}{r} \right)^1 + B \left(\frac{r_p}{r} \right)^{1.5} + C \left(\frac{r_p}{r} \right)^2 + D \left(\frac{r_p}{r} \right)^{2.5} + F \left(\frac{r_p}{r} \right)^3 \right] \quad 4.6$$

Per determinare i coefficienti incogniti A, B, C, D ed F si può procedere impostando un sistema che dovrà essere costituito ovviamente da 5 equazioni dovendo calcolare il valore di 5 incognite. La forma di queste 5 equazioni è qui di seguito riportata e deriva direttamente dalla 4.6.

$$\frac{\sigma_{yi} \sqrt{2\pi r_i}}{K_I} - 1 = A \left(\frac{r_p}{r_i} \right)^1 + B \left(\frac{r_p}{r_i} \right)^{1.5} + C \left(\frac{r_p}{r_i} \right)^2 + D \left(\frac{r_p}{r_i} \right)^{2.5} + F \left(\frac{r_p}{r_i} \right)^3 \quad 4.7$$

Come detto, i valori di K_I ed σ_{sn} utilizzati sono:

$$K_I = 448 \text{MPa} \sqrt{\text{mm}}$$

$$\sigma_{sn} = 374 \text{MPa}$$

Il valore di K_I è stato determinato ovviamente con una analisi lineare elastica.

Dalla 4.3, noti K_I e σ_{sn} , è possibile determinare il valore del raggio plastico r_p , il quale risulta:

$$r_p = 0.2284 \text{ mm}$$

Per risolvere il sistema si ha bisogno ora di 5 condizioni al contorno, le quali sono costituite da 5 coppie di valori (r_i, σ_{yi}) qui di seguito riportate:

<i>coppie valori</i>	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]
1	0.21901	420.15
2	0.0565	849.02
3	0.010352	1288.1
4	0.0056794	1414.4
5	0.0020217	1648.2

Tabella 4.1 Condizioni al contorno utilizzate nella risoluzione del sistema.

Si riporta qui di seguito, in modo molto schematico, un grafico (figura 4.2) rappresentante la distribuzione di tensione σ_y sulla bisettrice della cricca ottenuta con una analisi FEM elastoplastica nella quale si ipotizza un comportamento kinematic hardening del materiale. Sullo stesso grafico sono evidenziati dei punti le cui coordinate rappresentano le condizioni al

contorno (r_i, σ_{yi}) sopra elencate (tabella 4.1). Tale grafico è stato riportato per mostrare come le 5 condizioni al contorno non siano state scelte in modo casuale bensì secondo un preciso ragionamento. Tutte le condizioni al contorno sono relative infatti a punti appartenenti alla zona plastica di fronte alla cricca ($r_i < 0.2284\text{mm}$).

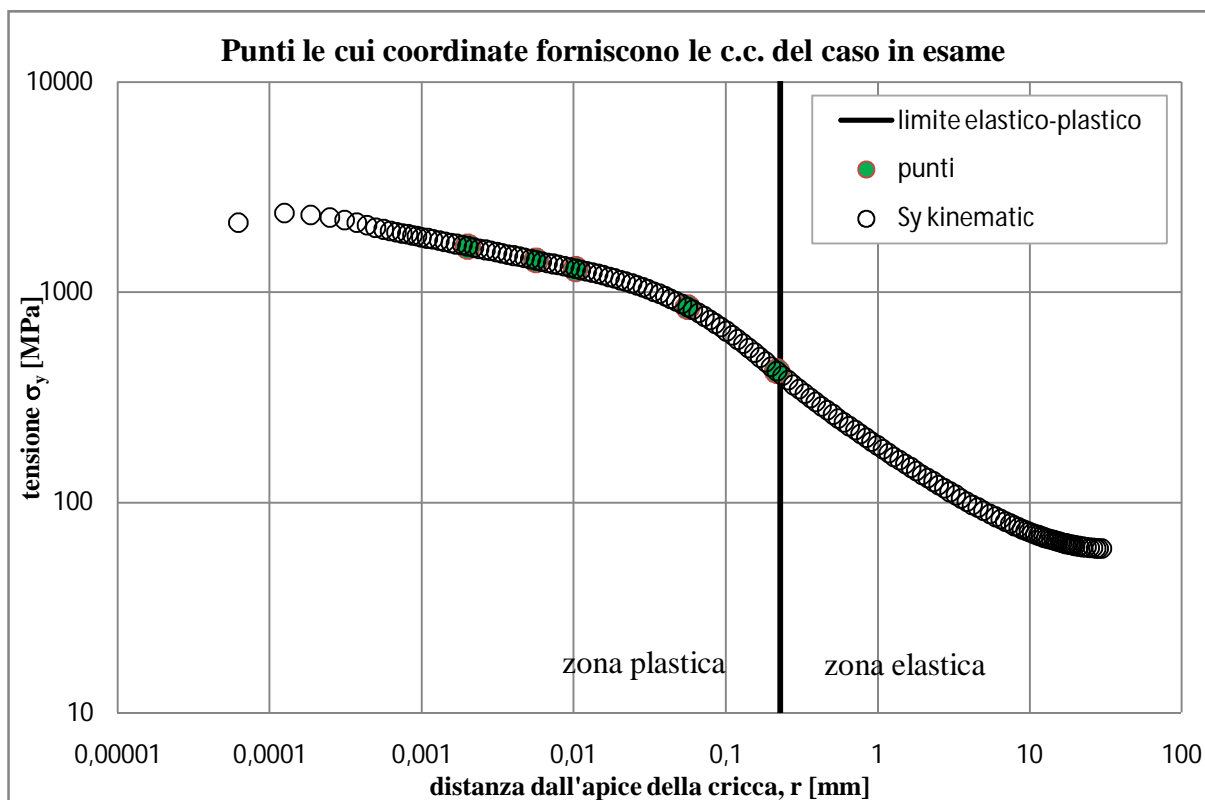


Figura 4.2 Distribuzione di tensione σ_y determinata con analisi FEM e modello kinematic hardening. Sono evidenziati i punti identificativi delle condizioni al contorno usate per risolvere il sistema del caso in esame.

Noti i valori del raggio plastico r_p e del SIF K_I e dopo aver scelto le 5 coppie di valori (r_i, σ_{yi}) come precedentemente descritto, si hanno tutti i dati utili per risolvere il sistema, il quale fornisce i seguenti risultati:

<i>coefficiente</i>	<i>valore coefficiente</i>
<i>A</i>	0.213525116
<i>B</i>	-0.14700896
<i>C</i>	0.034747007
<i>D</i>	-0.0035144
<i>F</i>	0.00012837

Tabella 4.2 Valori dei coefficienti A, B, C, D ed F ottenuti dalla risoluzione del sistema per il caso in esame.

Conoscendo ora i valori dei coefficienti A, B, C, D ed F dovrebbe essere possibile, con l'equazione 4.6, riprodurre il campo di tensione σ_y sulla bisettrice della cricca. Si riportano qui di seguito 2 grafici che mostrano il risultato ottenuto:

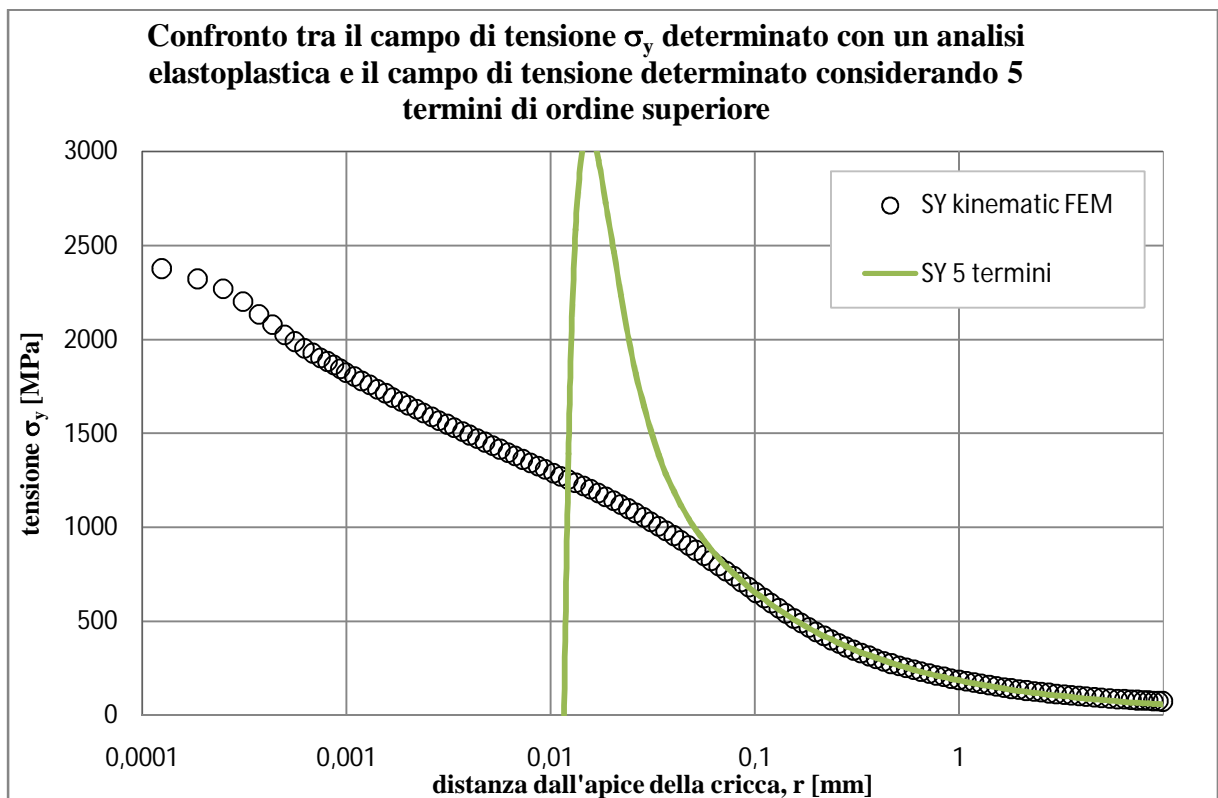


Figura 4.3 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinato con un'analisi elastoplastica e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e la distribuzione di tensione che si ottiene sostituendo i coefficienti A, B, C, D ed F della tabella 4.2 nella equazione 4.6.

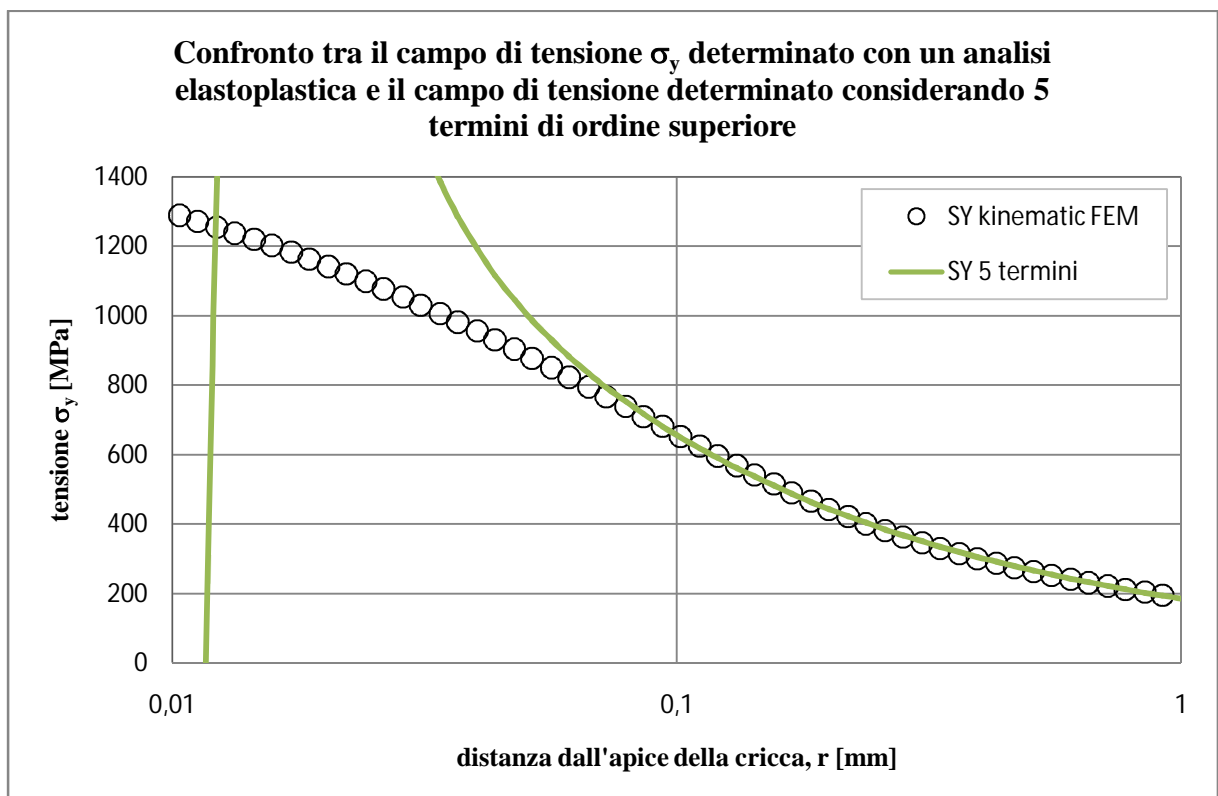


Figura 4.4 Zoom delle distribuzioni di tensione riportate in figura 4.3

Come si vede, sostituendo nella equazione 4.6 i valori dei coefficienti A, B, C, D ed F determinati come precedentemente descritto e riportati in tabella 4.2 si ottiene una distribuzione di tensione che solo per distanze dall'apice della cricca superiori a 0,1mm si sovrappone ai valori delle tensioni ottenuti mediante analisi FEM. Per distanze inferiori a 0,1mm invece la distribuzione che si ottiene diverge sensibilmente dai valori ottenuti tramite analisi numeriche.

Si procede ora con altri tentativi finalizzati a determinare il grado di influenza dei coefficienti A, B, C, D ed F sulla capacità di riprodurre, considerando i termini di ordine superiore, il "reale" andamento del campo di tensione σ_y sulla bisettrice della cricca.

Si considerino ora le seguenti condizioni al contorno:

<i>coppie valori</i>	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]
1	0.21901	420.15
2	0.0565	849.02
3	0.040258	954.66
4	0.031107	1029
5	0.010352	1288.1

Tabella 4.3 Condizioni al contorno utilizzate nella risoluzione del sistema del caso in esame.

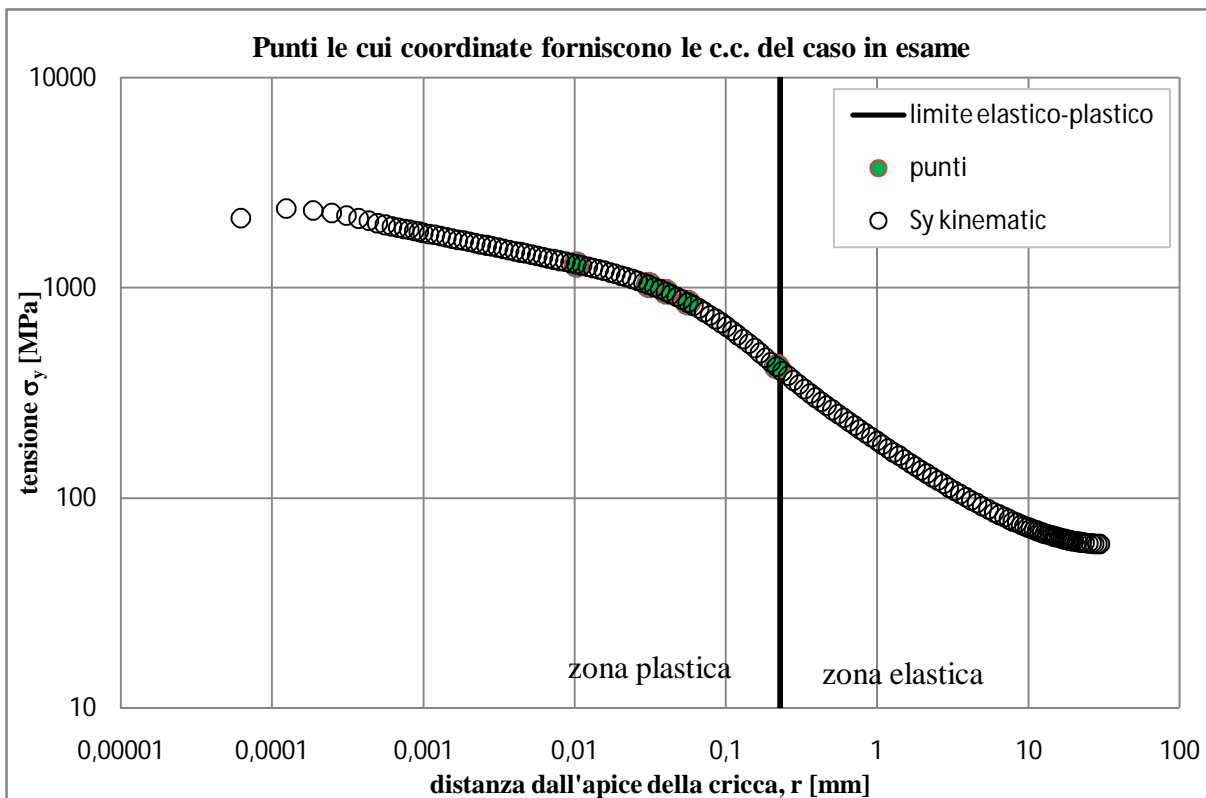


Figura 4.5 Distribuzione di tensione σ_y determinata con analisi FEM e modello kinematic hardening. Sono evidenziati i punti identificativi delle condizioni al contorno usate per risolvere il sistema del caso in esame.

Si riporta qui di seguito una tabella con i 5 coefficienti determinati con le condizioni al contorno di tabella 4.3.

<i>coefficiente</i>	<i>valore coefficiente</i>
<i>A</i>	0.062256206
<i>B</i>	0.156510022
<i>C</i>	-0.16748518
<i>D</i>	0.050592654
<i>F</i>	-0.00484277

Tabella 4.4 Valori dei coefficienti A, B, C, D ed F ottenuti dalla risoluzione del sistema utilizzando come condizioni al contorno i valori di tab. 4.3

Questo tentativo è stato condotto col fine di testare se si riesce a riprodurre anche l'andamento delle tensioni sulla zona plastica considerando delle condizioni al contorno più "vicine" alla zona in cui nel caso precedente l'equazione 4.5 smetteva di seguire i dati FEM. I risultati, riportati peraltro qui di seguito, non sono soddisfacenti in quanto non si denotano non solo sensibili miglioramenti rispetto al caso precedente ma addirittura un peggioramento. Non si riscontra inoltre alcuna apprezzabile influenza dei coefficienti A, B, C, D ed F sulla capacità della 4.5 di descrivere il campo di tensione σ_y sulla bisettrice, ne tantomeno si riesce a ricondurre chiaramente la variazione del valore dei coefficienti suddetti alle nuove condizioni iniziali.

L'unica osservazione che si ritiene opportuno fare è che nonostante queste semplici analisi preliminari (non si determinano infatti i coefficienti ricorrendo a tecniche quali ad esempio la minimizzazione ai minimi quadrati) il coefficiente F risulta sempre di un ordine di grandezza inferiore rispetto al più piccolo valore assunto dagli altri quattro coefficienti. Ciò fa presumere che sia possibile eliminare un coefficiente dalla trattazione rimanendo inalterata la precisione con la quale si descrive il campo di tensione σ_y sulla bisettrice della cricca considerando i termini di ordine superiore.

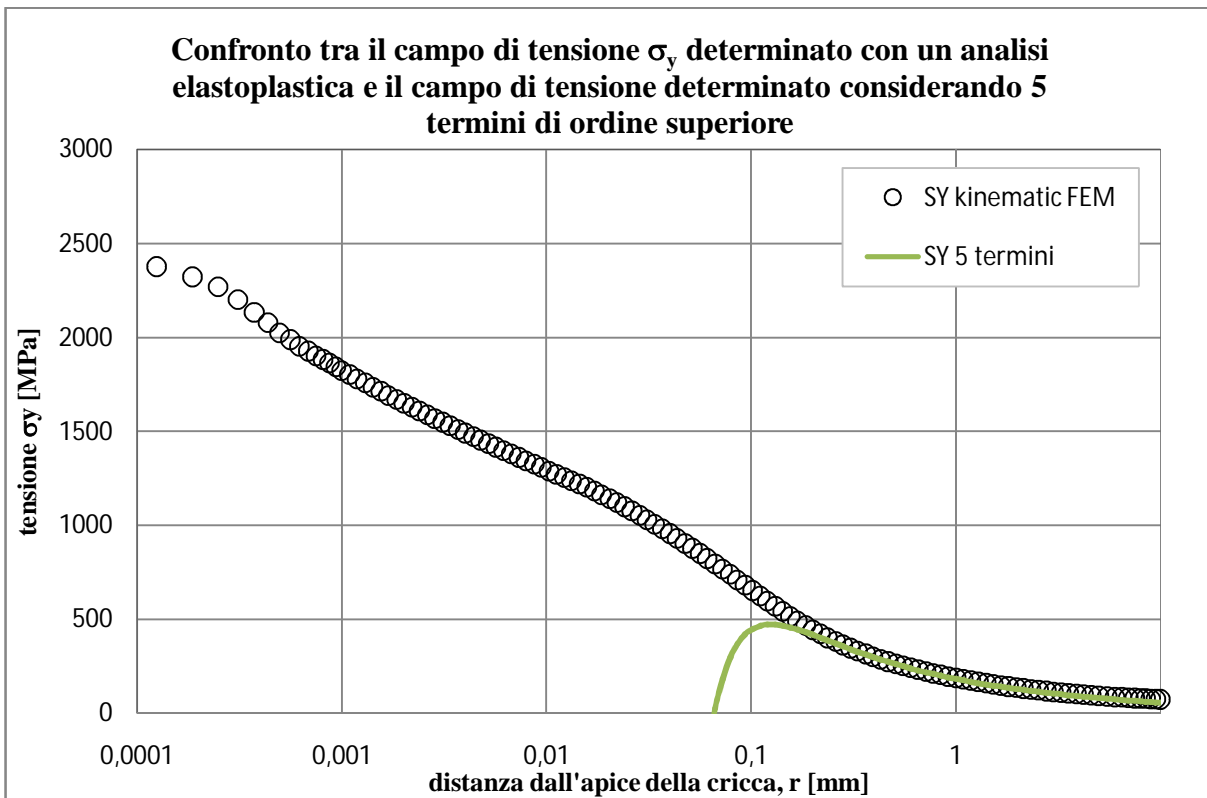


Figura 4.6 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinato con un'analisi elastoplastica e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e la distribuzione di tensione che si ottiene sostituendo i coefficienti A, B, C, D ed F della tabella 4.4 nella equazione 4.6.

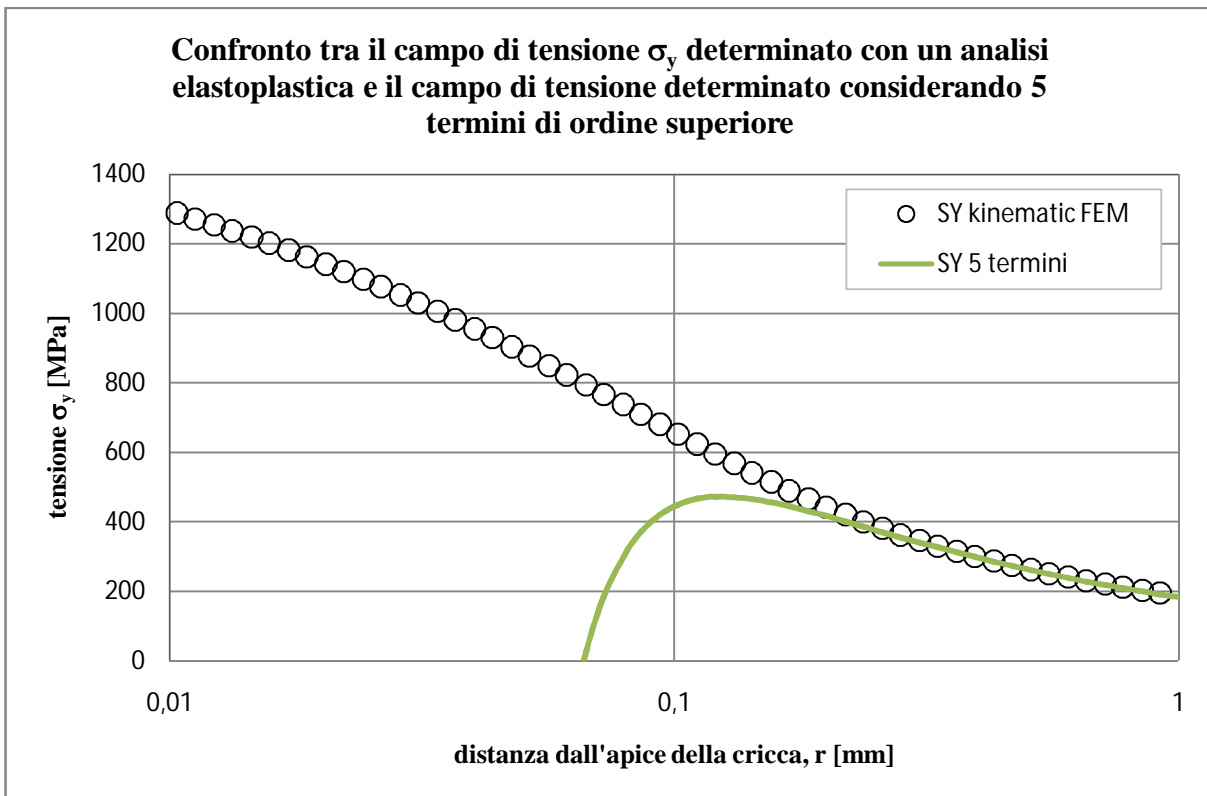


Figura 4.7 Zoom delle distribuzioni di tensione riportate in figura 4.6

4.2.2 Caso in cui si considerano 4 termini di ordine superiore

Si consideri, come anticipato, la possibilità di trascurare un termine di ordine superiore, cioè l'opportunità di riscrivere le equazioni 4.1 e 4.2 come segue:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 + A \left(\frac{r_p}{r}\right)^1 + B \left(\frac{r_p}{r}\right)^{1.5} + C \left(\frac{r_p}{r}\right)^2 + D \left(\frac{r_p}{r}\right)^{2.5} \right] \quad 4.8$$

Il numero di coefficienti incogniti si riduce quindi di una unità. A questo ne consegue che anche il sistema si riduce di una equazione e bastano ora 4 condizioni al contorno e non 5 per determinarne la soluzione.

Procedendo come fatto precedentemente si riportano qui di seguito le condizioni al contorno utilizzate nella soluzione e i risultati ottenuti:

<i>coppie valori</i>	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]
1	0.21901	420.15
2	0.0565	849.02
3	0.010352	1288.1
4	0.0056794	1414.4

Figura 4.5 Condizioni al contorno utilizzate nella risoluzione del sistema del caso in esame.

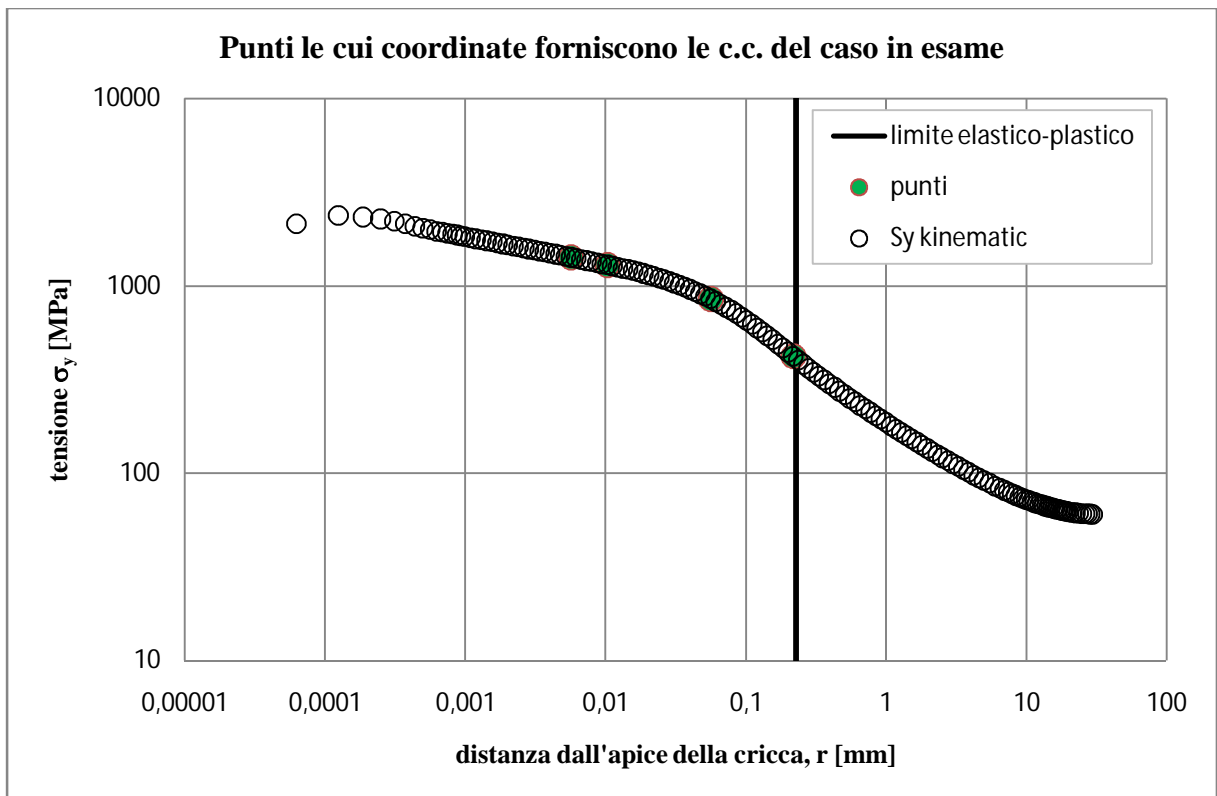


Figura 4.8 Distribuzione di tensione σ_y determinata con analisi FEM e modello kinematic hardening. Sono evidenziati i punti identificativi delle condizioni al contorno usate per risolvere il sistema del caso in esame.

<i>coefficiente</i>	<i>valore coefficiente</i>
<i>A</i>	0.205676196
<i>B</i>	-0.13250955
<i>C</i>	0.026364647
<i>D</i>	-0.00170829

Tabella 4.6 Valori dei coefficienti A, B, C e D ottenuti dalla risoluzione del sistema per il caso in esame.

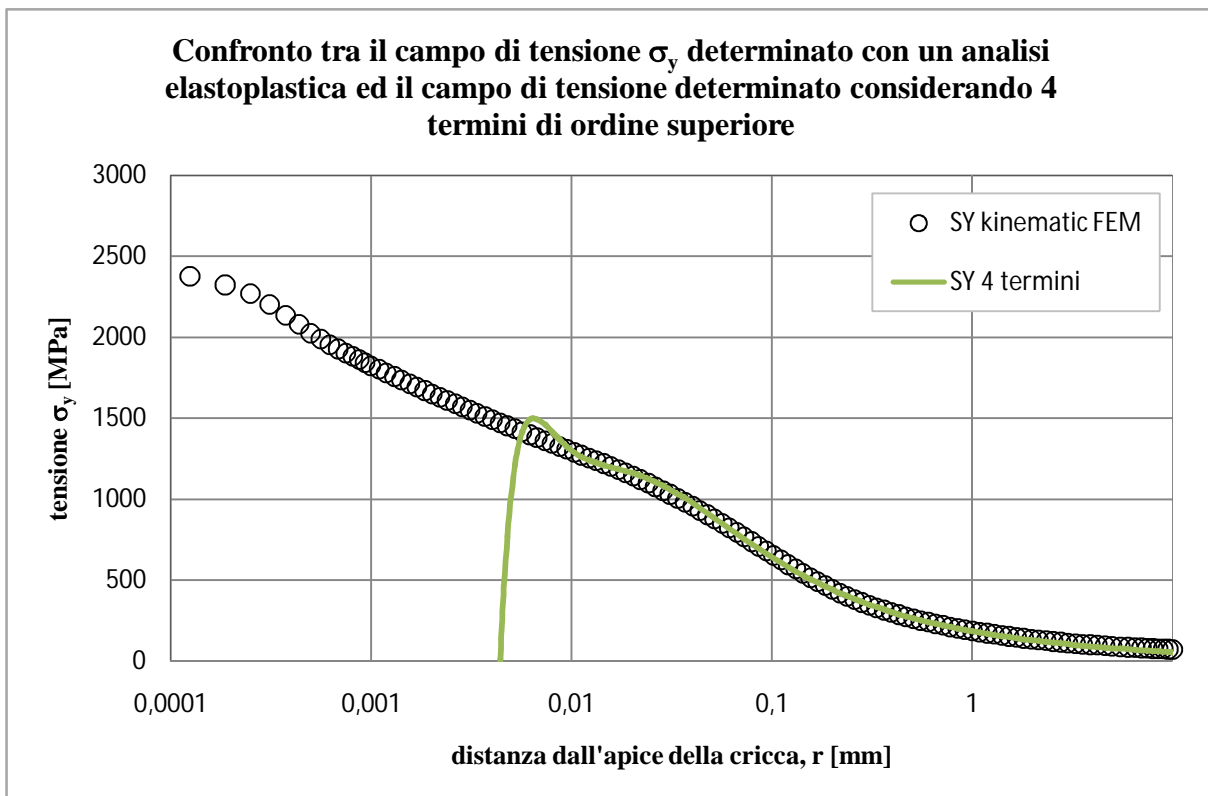


Figura 4.9 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinato con un'analisi elastoplastica e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e la distribuzione di tensione che si ottiene sostituendo i coefficienti A, B, C e D della tabella 4.6 nella equazione 4.8.

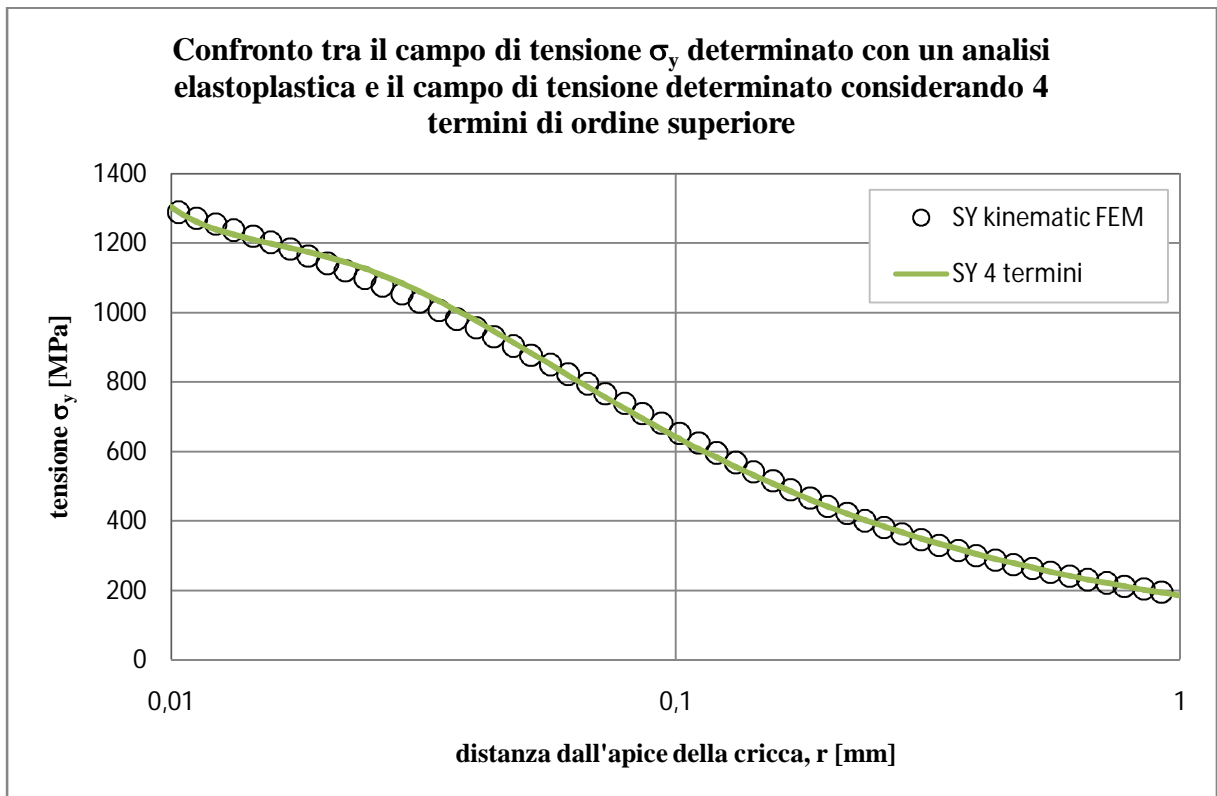


Figura 4.10 Zoom delle distribuzioni di tensione riportate in figura 4.9

4.2.3 Caso in cui si considerano 3 termini di ordine superiore

Si consideri ora la possibilità di trascurare un ulteriore termine di ordine superiore, cioè l'opportunità di riscrivere le equazioni 4.1 e 4.2 come segue:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 + A \left(\frac{r_p}{r} \right)^1 + B \left(\frac{r_p}{r} \right)^{1.5} + C \left(\frac{r_p}{r} \right)^2 \right] \quad 4.9$$

Il numero di coefficienti incogniti si riduce di una ulteriore unità. A ciò ancora una volta consegue che anche il sistema si riduce di una equazione e bastano ora solamente 3 condizioni al contorno per determinarne la soluzione.

Procedendo come fatto precedentemente si riportano qui di seguito le condizioni al contorno utilizzate nella soluzione del caso in esame e i risultati ottenuti:

<i>coppie valori</i>	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]
1	0.21901	420.15
2	0.0565	849.02
3	0.010352	1288.1

Tabella 4.7 Condizioni al contorno utilizzate nella risoluzione del sistema del caso in esame.

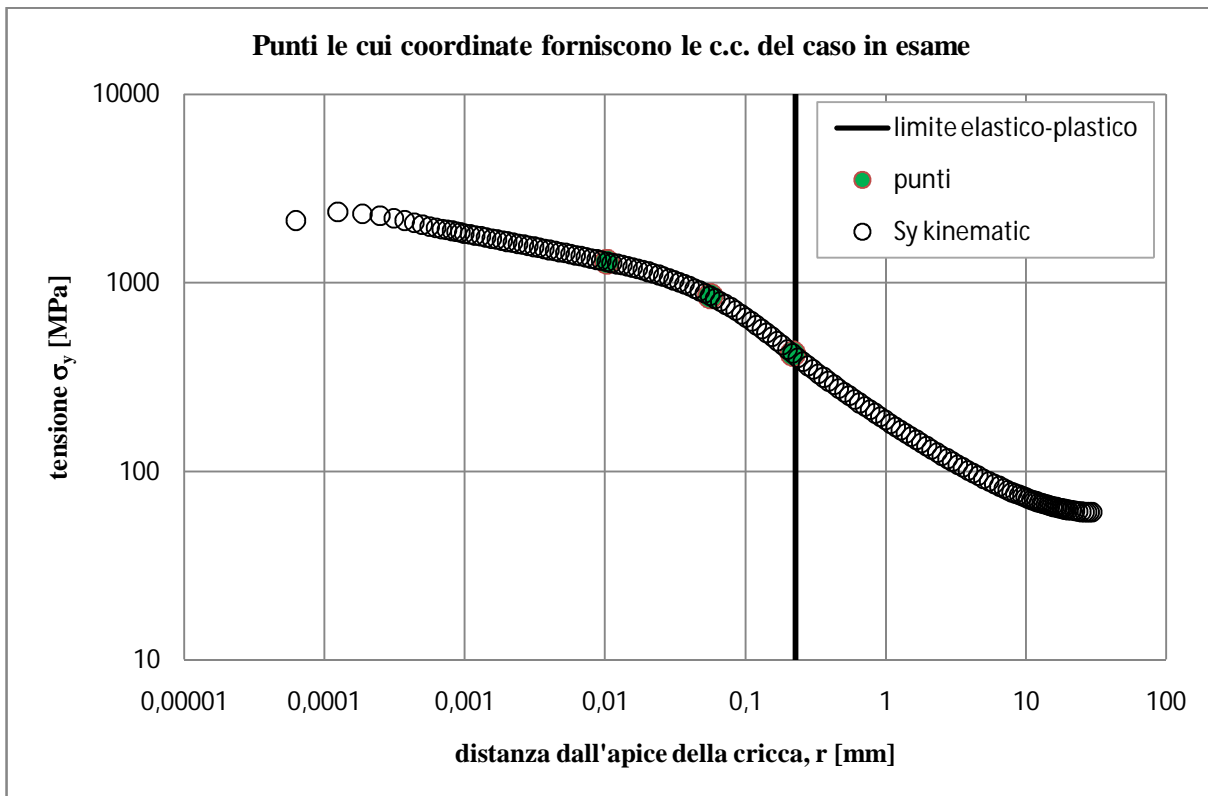


Figura 4.11 Distribuzione di tensione σ_y determinata con analisi FEM e modello kinematic hardening. Sono evidenziati i punti identificativi delle condizioni al contorno usate per risolvere il sistema del caso in esame.

<i>coefficiente</i>	<i>valore coefficiente</i>
<i>A</i>	0.189204316
<i>B</i>	-0.10467847
<i>C</i>	0.013162271

Tabella 4.8 Valori dei coefficienti A, B, e C ottenuti dalla risoluzione del sistema per il caso in esame.

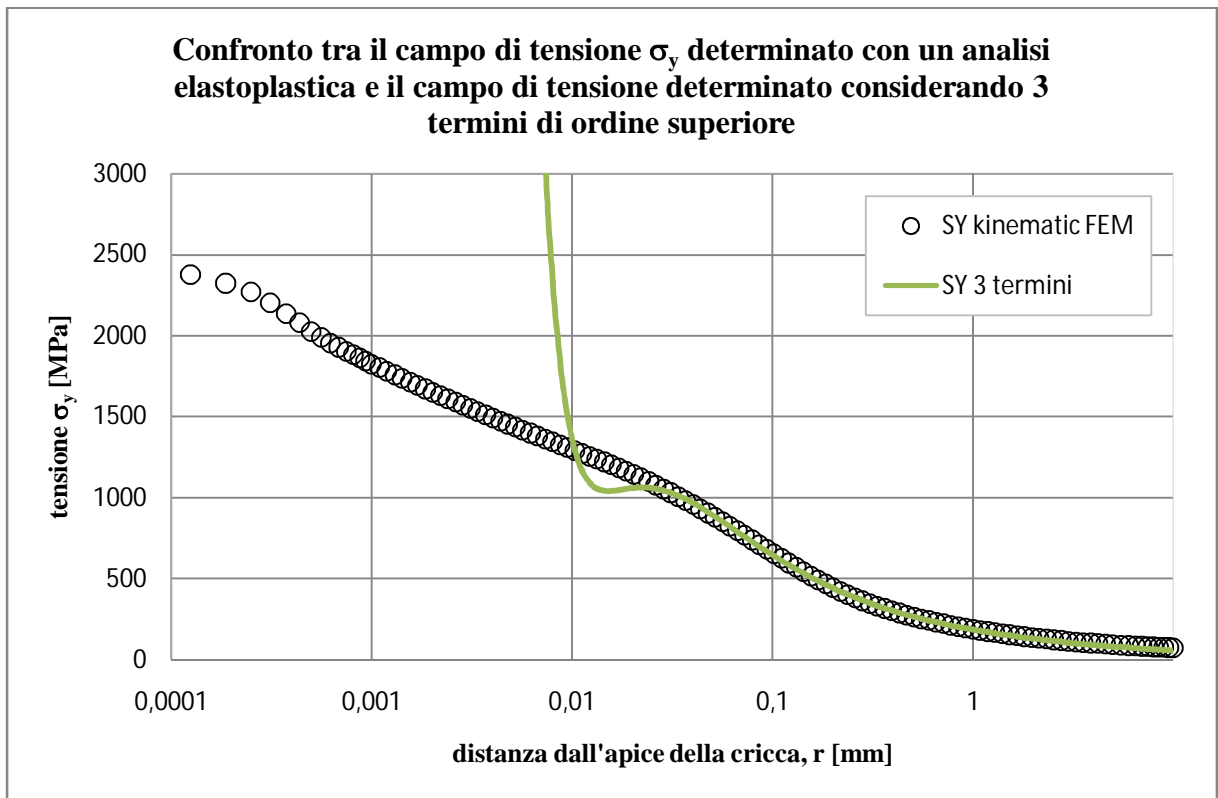


Figura 4.12 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinato con un'analisi elastoplastica e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e la distribuzione di tensione che si ottiene sostituendo i coefficienti A, B e C della tabella 4.8 nella equazione 4.9.

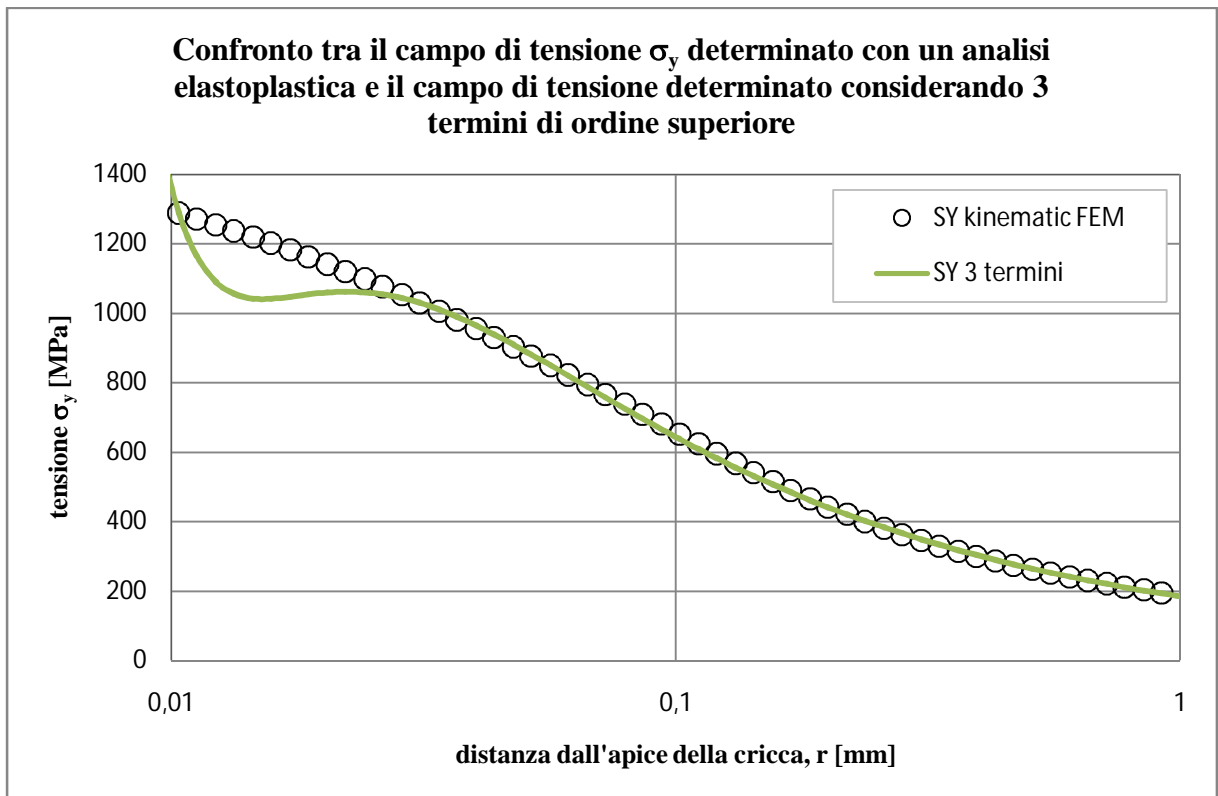


Figura 4.13 Zoom delle distribuzioni di tensione riportate in figura 4.12

Analizzando i risultati finora conseguiti si vede come i migliori in termini di approssimazione del campo di tensione ottenuto con analisi FEM siano quelli relativi al caso in cui si considerano 4 termini di ordine superiore. Si ricordi però che quelle fin ora eseguite sono analisi puramente preliminari in quanto i coefficienti dei termini di ordine superiore sono stati tarati utilizzando solamente pochi punti. Sarebbe stato sicuramente più preciso dal punto di vista matematico aver determinato il valore dei coefficienti mediante ad esempio una interpolazione con il metodo dei minimi quadrati.

4.3 Studio del valore dei coefficienti del modello CJP e opportuni confronti (6 casi)

Di seguito, sempre in modo preliminare, si eseguiranno dei confronti tra i risultati ottenuti tracciando il campo di tensione σ_y sulla bisettrice utilizzando l'espressione 4.9 (nella quale si considerano 3 termini di ordine superiore) e il campo di tensione che si ottiene utilizzando l'espressione della componente di tensione σ_y ottenuta a partire dai potenziali complessi proposti da Christopher, James e Patterson (equazione 4.5) [13-14].

Come si nota dall'espressione 4.5 i coefficienti da determinare per poter tracciare il campo di tensione secondo il modello CJP sono 3. Pertanto in linea di principio servirebbe un sistema di 3 equazioni per determinare i valori dei tre coefficienti. Gli autori però suggeriscono la condizione $G = -H$ [13], il che permette, a partire dalla equazione 4.5, di ricondursi in modo molto semplice ad un sistema di 2 equazione dalla forma seguente:

$$2\sigma_{yi}\sqrt{r_i} = -4H - \left[8 + 4 \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)\right] E \quad 4.10$$

Il parametro r_0 , utile ad eliminare la presenza del logaritmo nell'unità di misura della σ_y , che deve essere ovviamente MPa, è fissato ad un valore unitario dagli autori. Per la precisione qui di seguito verrà ipotizzato anche la possibilità di utilizzare come valore di r_0 non solo il valore unitario ma anche r_p . Verranno eseguiti ulteriormente dei confronti tra la possibilità di settare i coefficienti incogniti in campo lineare elastico anziché in campo plastico. Se questo fosse possibile costituirebbe un grande vantaggio per l'ingegnere, il quale potrebbe affidarsi, al fine di determinare il valore dei coefficienti incogniti, ad una analisi L.E, notoriamente più veloce e meno dispendiosa in termini di tempo e risorse hardware rispetto ad una analisi elastoplastica.

Si consideri anzitutto il caso seguente dove si settano i parametri in campo plastico e si utilizza la condizione $r_0 = Imm$.

Studio del valore dei coefficienti del modello CJP e dei termini di ordine superiore nell'espressione di Irwin

condizioni al contorno termini ordine superiore			condizioni al contorno modello CJP		
coppie valori	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]	coppie valori	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]
1	0.21901	420.15	1	0.21901	420.14
2	0.0565	849.02	2	0.0565	849.02
3	0.010352	1288.1	r_0	1 mm	

Tabella 4.9 Condizioni al contorno utilizzate nella risoluzione del sistema del caso in esame.

Valori risultanti dei coefficienti			
Risultati termini ordine superiore		Risultati modello CJP	
A	0.18913911	G	99.2316637
B	-0.1046322	H	-99.231664
C	0.01315537	E	1.9154932

Tabella 4.10 Valori dei coefficienti A, B, C ed G, H, E ottenuti dalla risoluzione del sistema per il caso in esame.

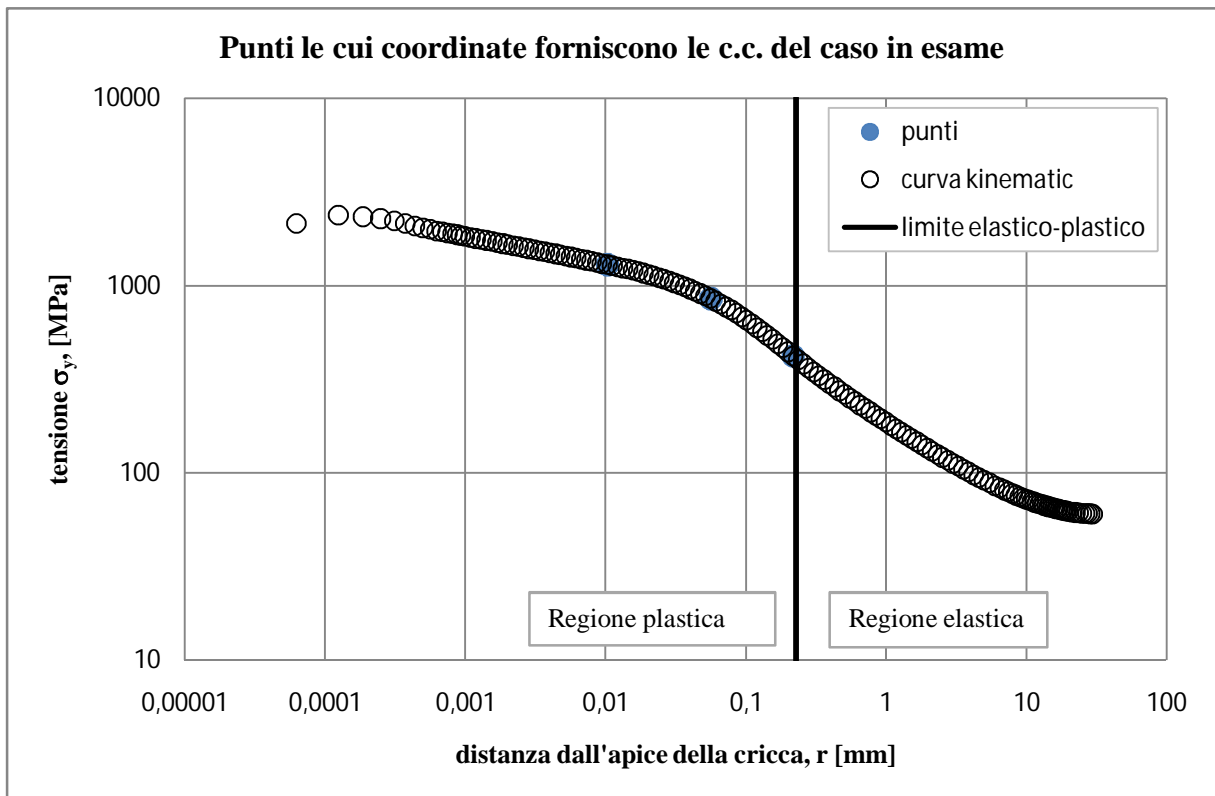


Figura 4.14 Distribuzione di tensione σ_y determinata con analisi FEM e modello kinematic hardening. Sono evidenziati i punti identificativi delle condizioni al contorno usate per risolvere il sistema del caso in esame.

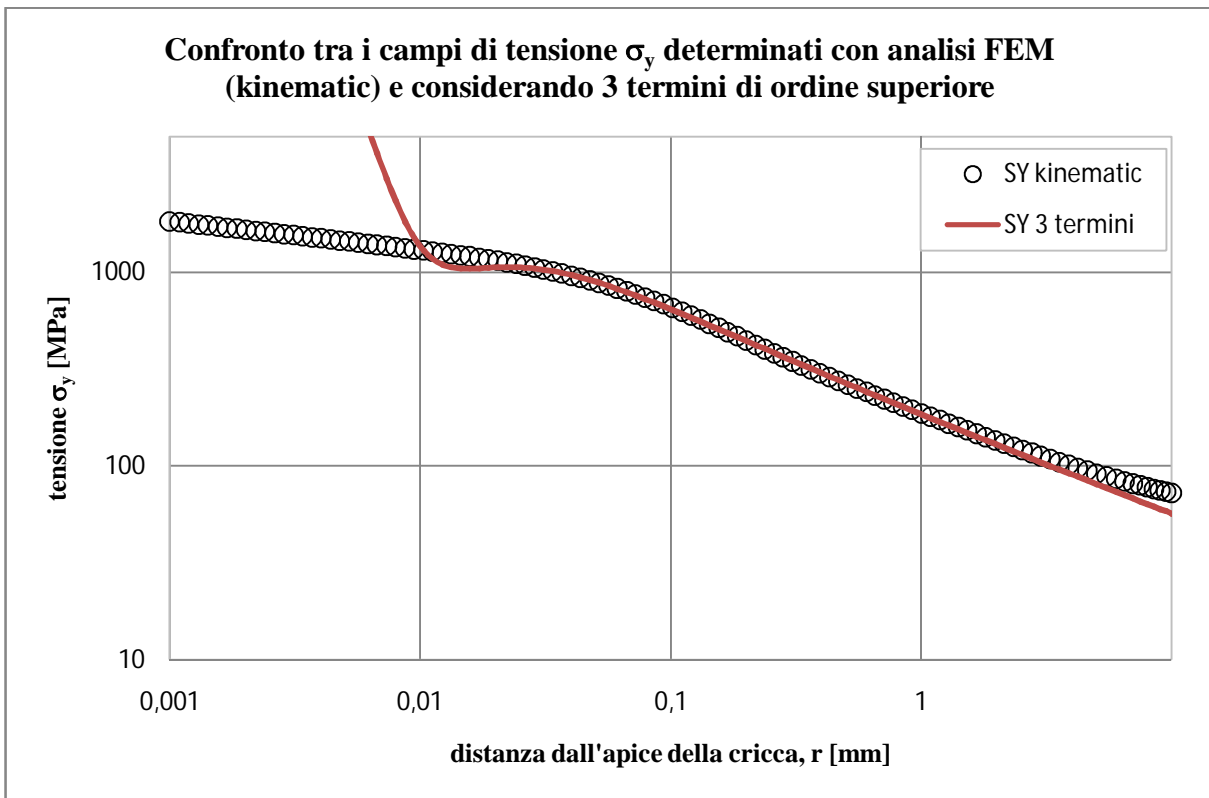


Figura 4.15 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinato con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e il campo ottenuto considerando 3 termini di ordine superiore.

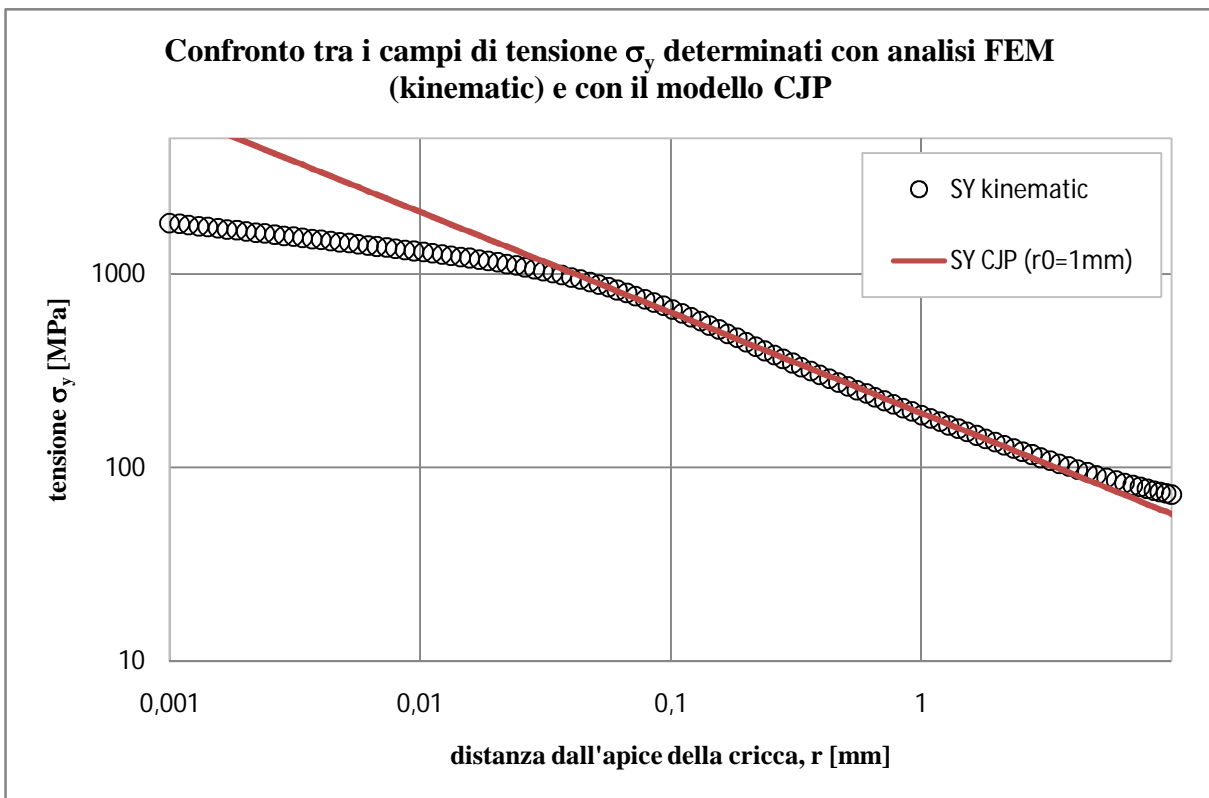


Figura 4.16 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinati con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e il campo ottenuto considerando le equazioni del modello CJP (con $r_0=1\text{mm}$).

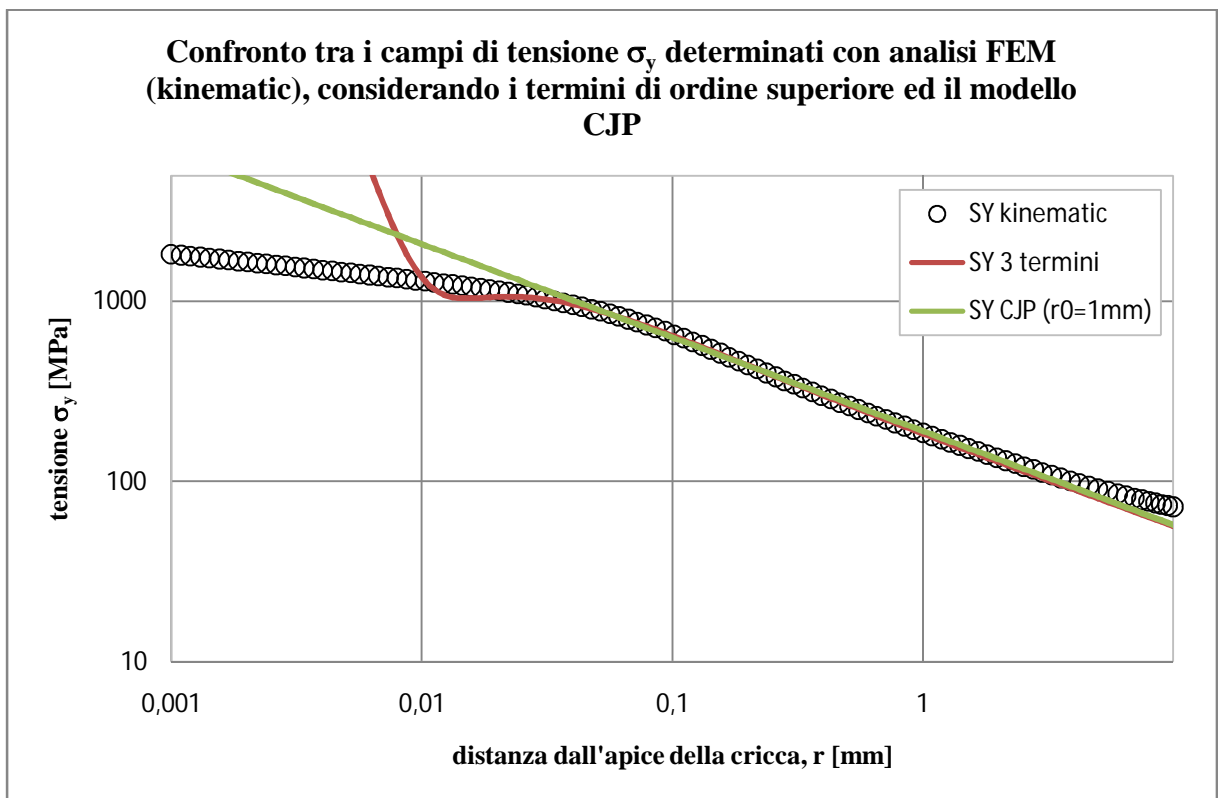


Figura 4.17 Confronto tra il campi di tensione σ_y determinato con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale, il campo ottenuto considerando 3 termini di ordine superiore ed il campo ottenuto considerando il modello CJP.

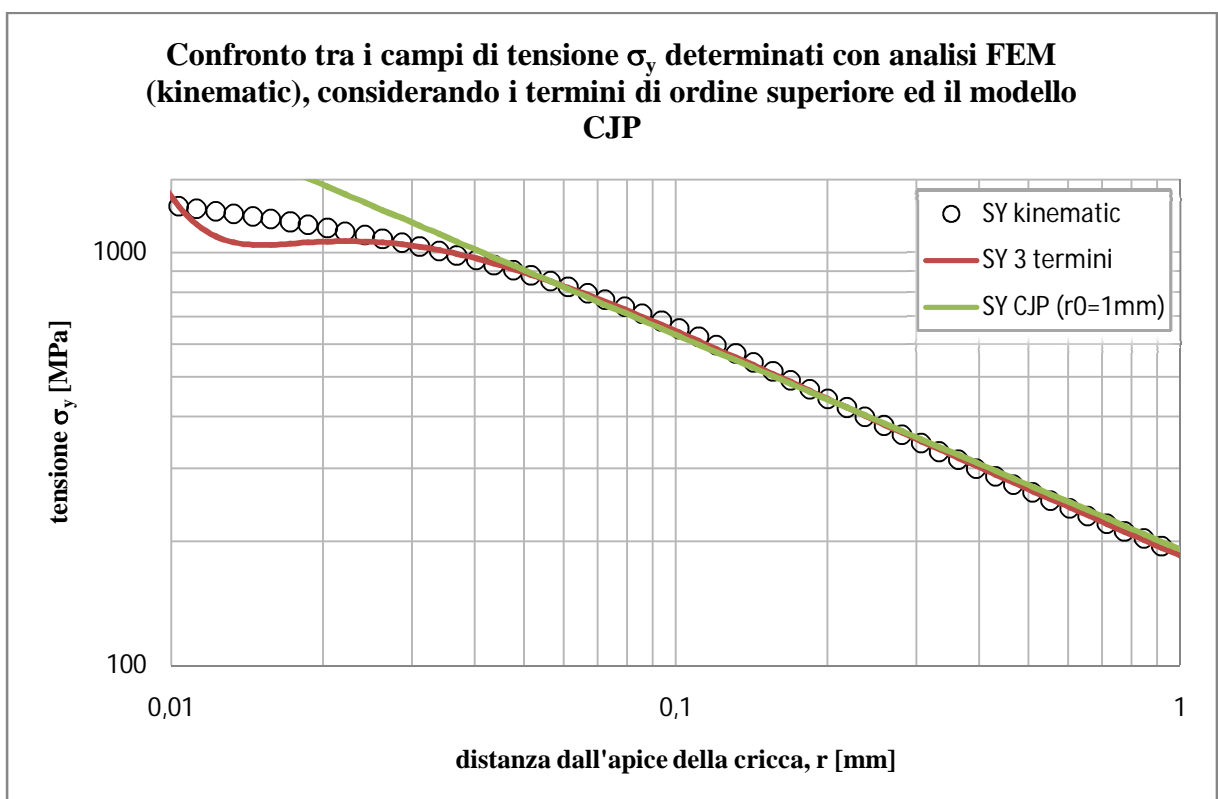


Figura 4.18 Zoom delle distribuzioni di tensione riportate in figura 4.17

Consideriamo ora il caso seguente dove si settano i parametri in campo plastico, nei medesimi punti utilizzati nel caso precedente, con l'unica differenza che ora si utilizza la condizione $r_0=r_p$.

condizioni al contorno termini ordine superiore			condizioni al contorno modello CJP		
coppie valori	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]	coppie valori	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]
1	0.21901	420.14	1	0.21901	420.14
2	0.0565	849.02	2	0.0565	849.02
3	0.010352	1288.1	r_0	r_p	

Tabella 4.11 Condizioni al contorno utilizzate nella risoluzione del sistema del caso in esame.

Valori risultanti dei coefficienti					
Risultati termini ordine superiore			Risultati modello CJP		
A	0.18913911		G	102.060468	
B	-0.1046322		H	-102.06047	
C	0.01315537		E	1.9154932	

Tabella 4.12 Valori dei coefficienti A, B, C e G, H, E ottenuti dalla risoluzione del sistema per il caso in esame.

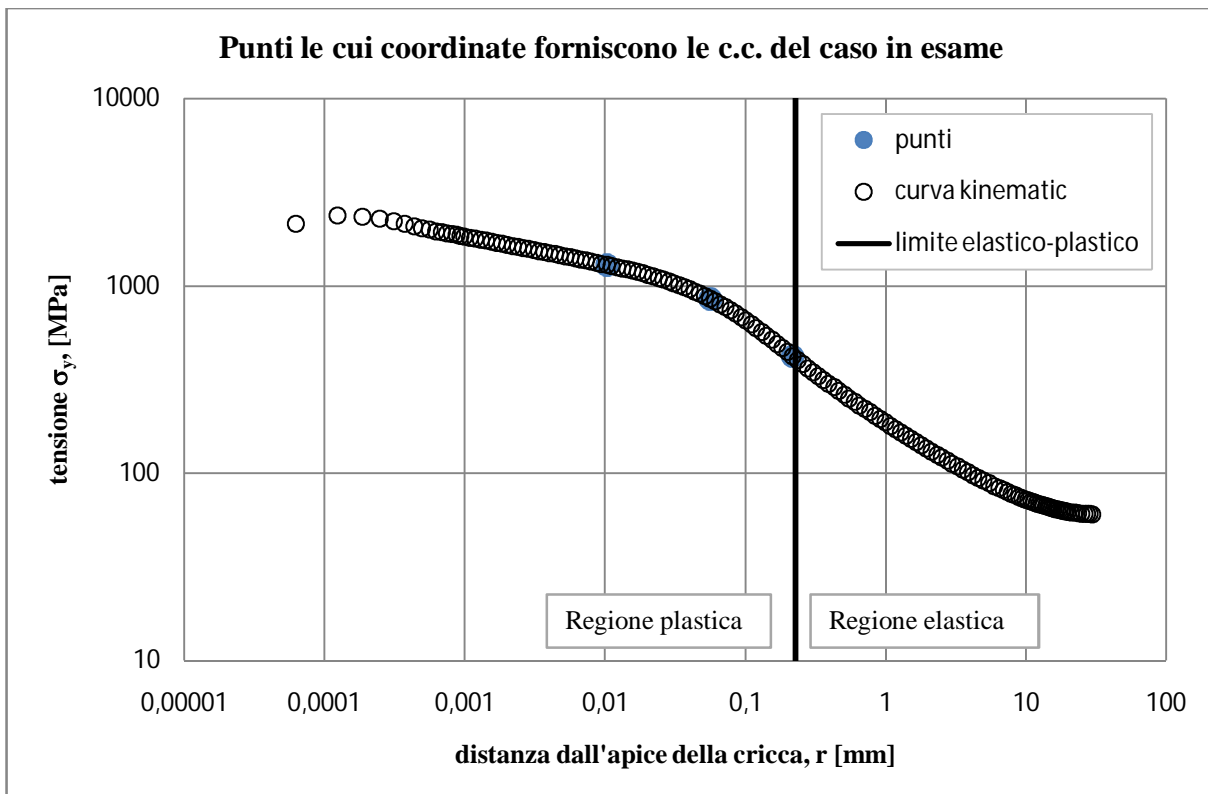


Figura 4.19 Distribuzione di tensione σ_y determinata con analisi FEM e modello kinematic hardening. Sono evidenziati i punti identificativi delle condizioni al contorno usate per risolvere i sistemi del caso in esame.

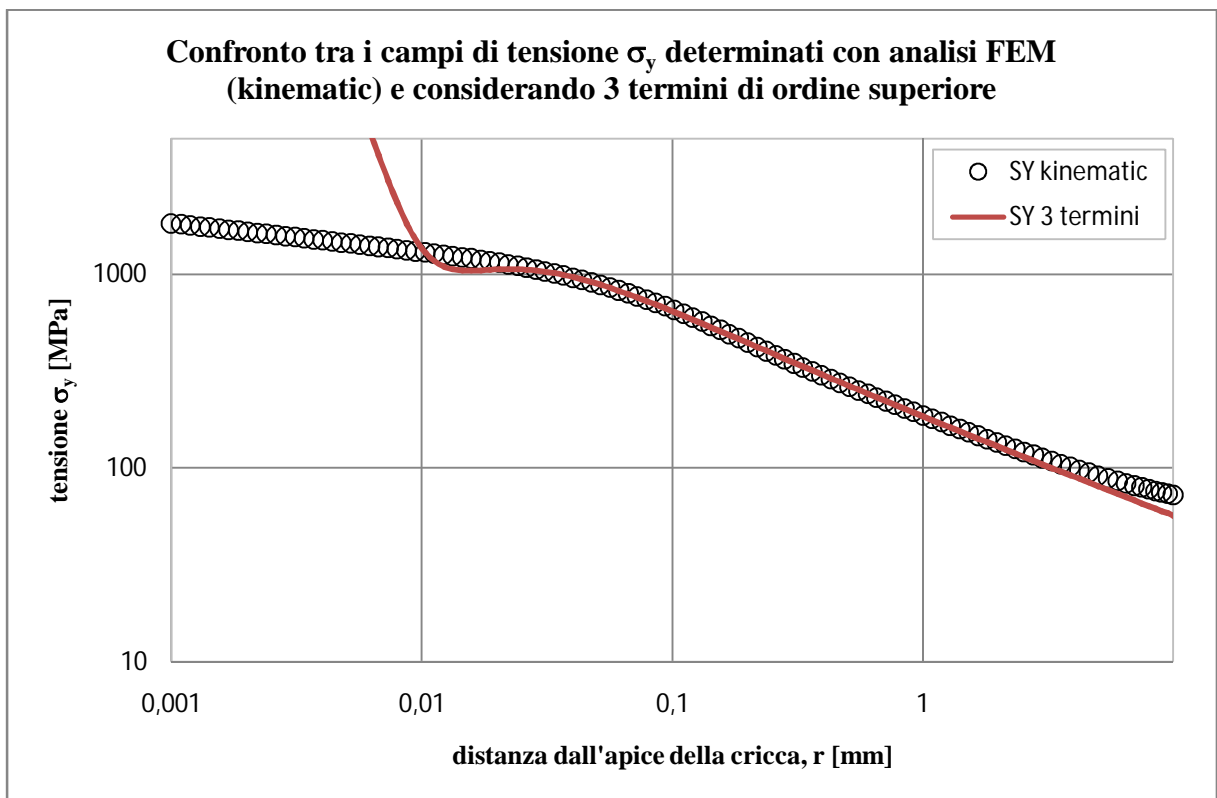


Figura 4.20 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinato con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e il campo ottenuto considerando 3 termini di ordine superiore.

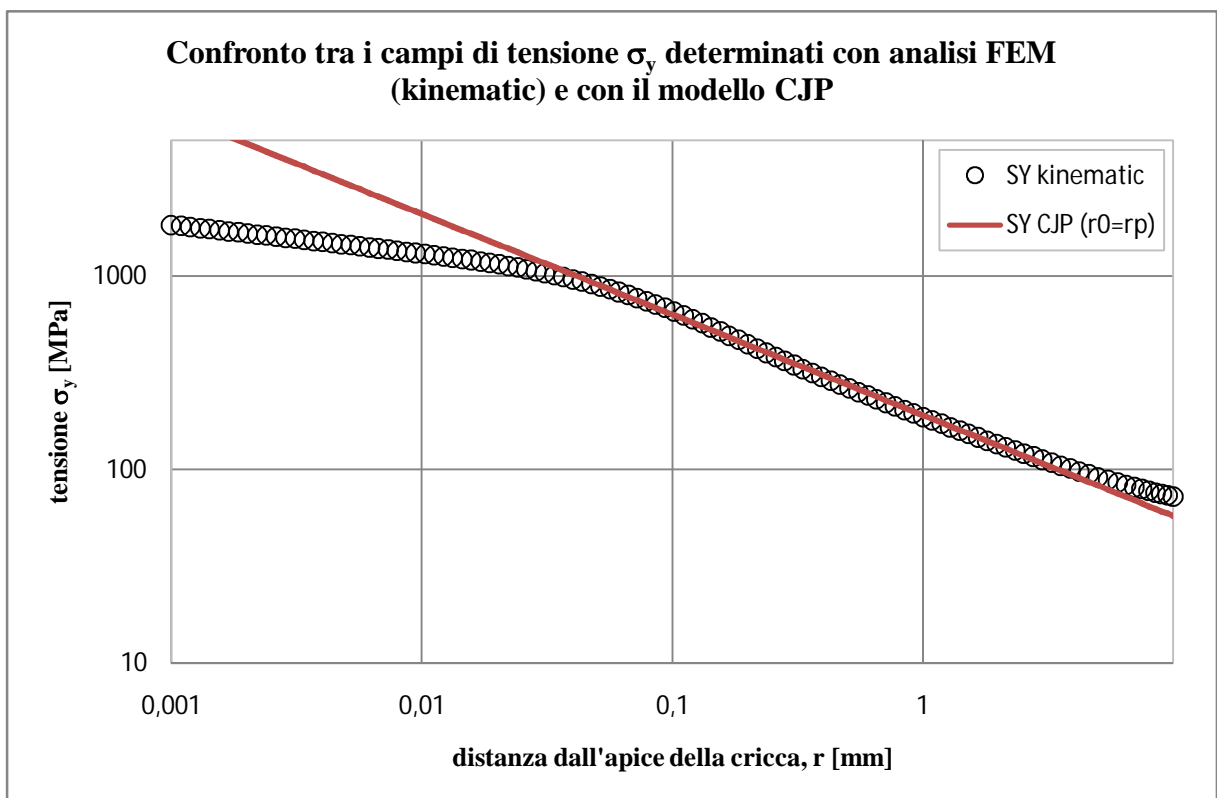


Figura 4.21 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinati con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e il campo ottenuto considerando le equazioni del modello CJP (con $r_0=r_p$).

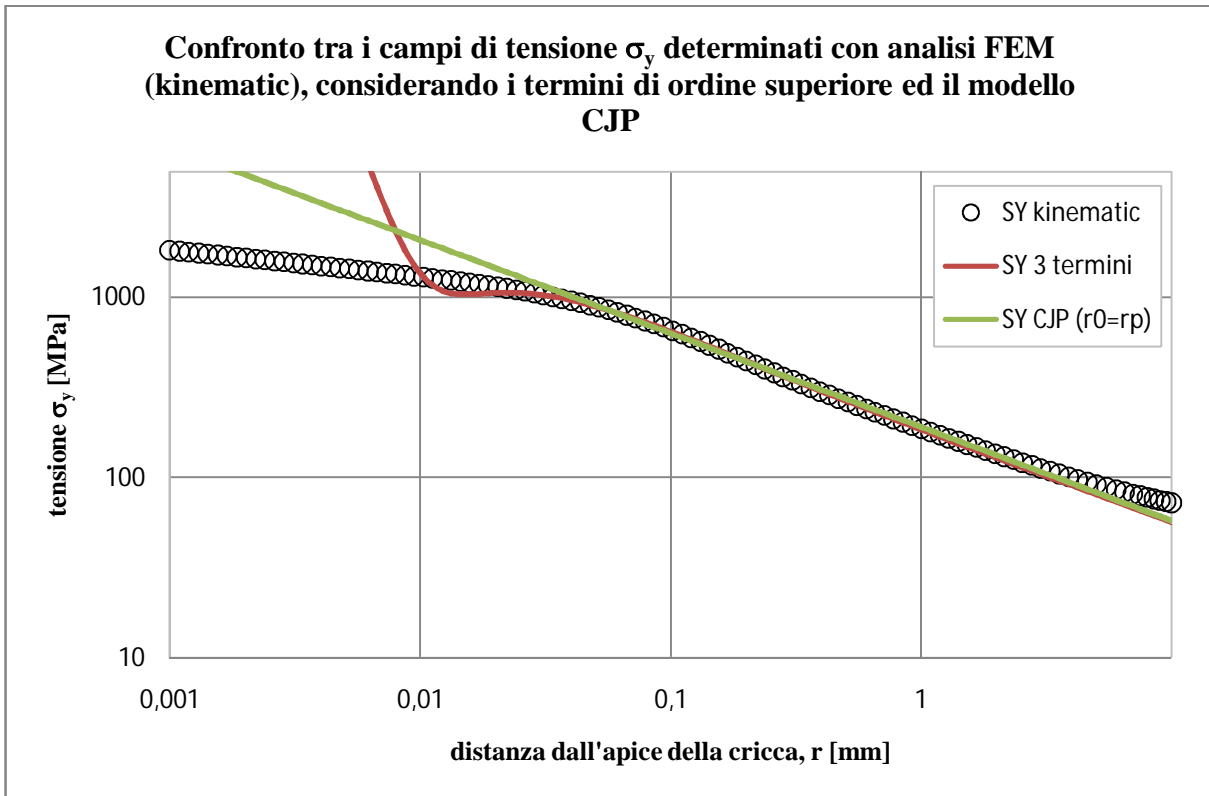


Figura 4.22 Confronto tra il campi di tensione σ_y determinato con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale, il campo ottenuto considerando 3 termini di ordine superiore ed il campo ottenuto considerando il modello CJP.

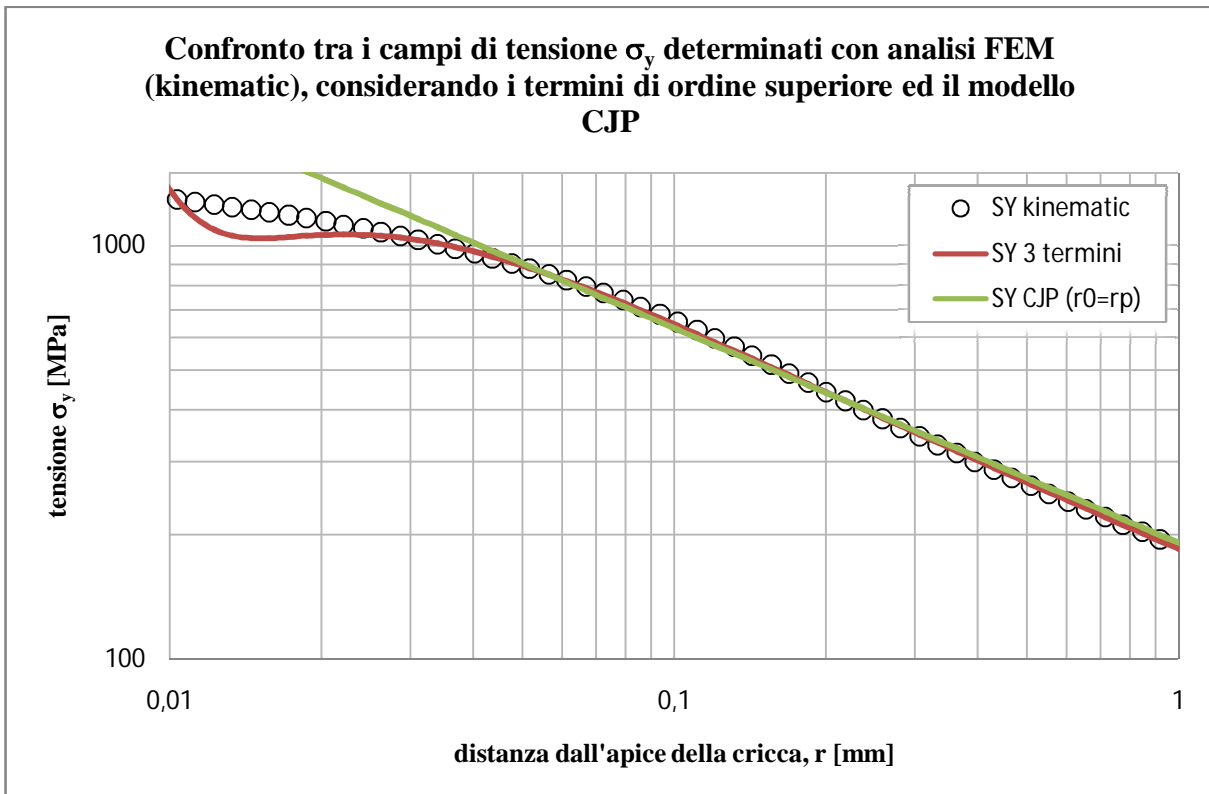


Figura 4.23 Confronto tra il campi di tensione σ_y determinato con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale, il campo ottenuto considerando 3 termini di ordine superiore ed il campo ottenuto considerando il modello CJP.

Dopo aver analizzato i risultati ottenuti nei due casi appena esaminati si può concludere che essendo di circa il 2% la differenza tra il valori dei coefficienti determinati utilizzando $r_0=r_p$ anziché $r_0=1mm$ le due condizioni si possono considerare praticamente equivalenti. E' inoltre interessante notare che il coefficiente E, cioè il termine incognito che moltiplica il termine logaritmico nella equazione della σ_y del modello CJP, è di 2 ordini di grandezza inferiore ai coefficienti G ed H. Questo evento fa sì che l'influenza del logaritmo sulla capacità da parte del modello di descrivere il campo di tensione σ_y sulla bisettrice della cricca risulta notevolmente ridotta.

Si ritiene opportuno fare qui una breve considerazione relativa alla dimensione del raggio plastico r_p . Anzitutto si osservi che l'equazione 4.3 utilizzata per determinare il suddetto parametro è valida nel caso in cui al provino sia applicato un semplice carico (in alcuni libri viene fatto riferimento ad r_p come dimensione della zona plastica monotona). Qualora invece il provino venga sollecitato a fatica, cioè sia sottoposto a carichi ciclici anziché ad un carico monotono, la formula che restituisce il valore del raggio plastico r_p deve essere riaggiornata considerando il doppio del valore della tensione di snervamento σ_{sn} (in tal caso si fa riferimento ad r_p come dimensione della zona ciclica plasticizzata). La 4.3 diverrebbe allora:

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Delta K_I}{2\sigma_{sn}} \right)^2$$

La suddetta fornisce precisamente, per i medesimi valori di K_I e σ_{sn} di capitolo 3 ($\Delta K_I=K_I$ qualora il rapporto di ciclo si $R=0$), un valore pari a $r_p=0.057mm$, contro la 4.3 che invece restituisce $r_p=0.2284mm$. La zona plastica pertanto risulta ben più ristretta nel caso di sollecitazione a fatica rispetto al caso di sollecitazione monotona.

Ai fini della riproduzione del campo lineare elastico della componente σ_y sulla bisettrice della cricca, qualora si ipotizzi di dover sollecitare il provino a carichi di fatica (con $R=0$), si può notare dalle figure 4.18 e 4.23, che sia il modello CJP che il modello ai termini di ordine superiore sono in grado di riprodurre il campo suddetto fino al confine della zona ciclica plasticizzata qualora si tarino i coefficienti dei modelli sopracitati in campo plastico. Si anticipa che altrettanto non si verificherà qualora i medesimi coefficienti vengano settati in campo elastico, come si potrà vedere in seguito quando verranno condotte analisi per l'appunto settando i coefficienti su dati FEM (r_i, σ_{yi}) tali da rispettare la condizione $r_i > r_p = 0.2284mm$. In particolare sarà possibile notare che il modello CJP conserva la sua capacità di riprodurre il campo di tensione sino al bordo della zona ciclica plasticizzata,

mentre il modello ai termini di ordine superiore smette di seguire i dati FEM prima della distanza $r=0.057\text{mm}$ dall'apice della cricca.

Si consideri ora l'opportunità di settare i coefficienti in campo elastico, cioè scegliere delle condizioni al contorno tali che $r_i \geq r_p$. Come detto, se questo fosse possibile costituirebbe un vantaggio in termini di risparmio di tempo e potenza di calcolo nelle analisi FEM le quali potrebbero essere per l'appunto condotte in campo lineare elastico anziché in campo elastoplastico.

Si riporta qui di seguito una figura dove si mostra come si sovrappongono con ottima approssimazione i risultati (relativi al campo L.E.) di due analisi FEM condotte in ipotesi di linearità elastica e di comportamento elastoplastico del materiale (in particolare *kinematic hardening*).

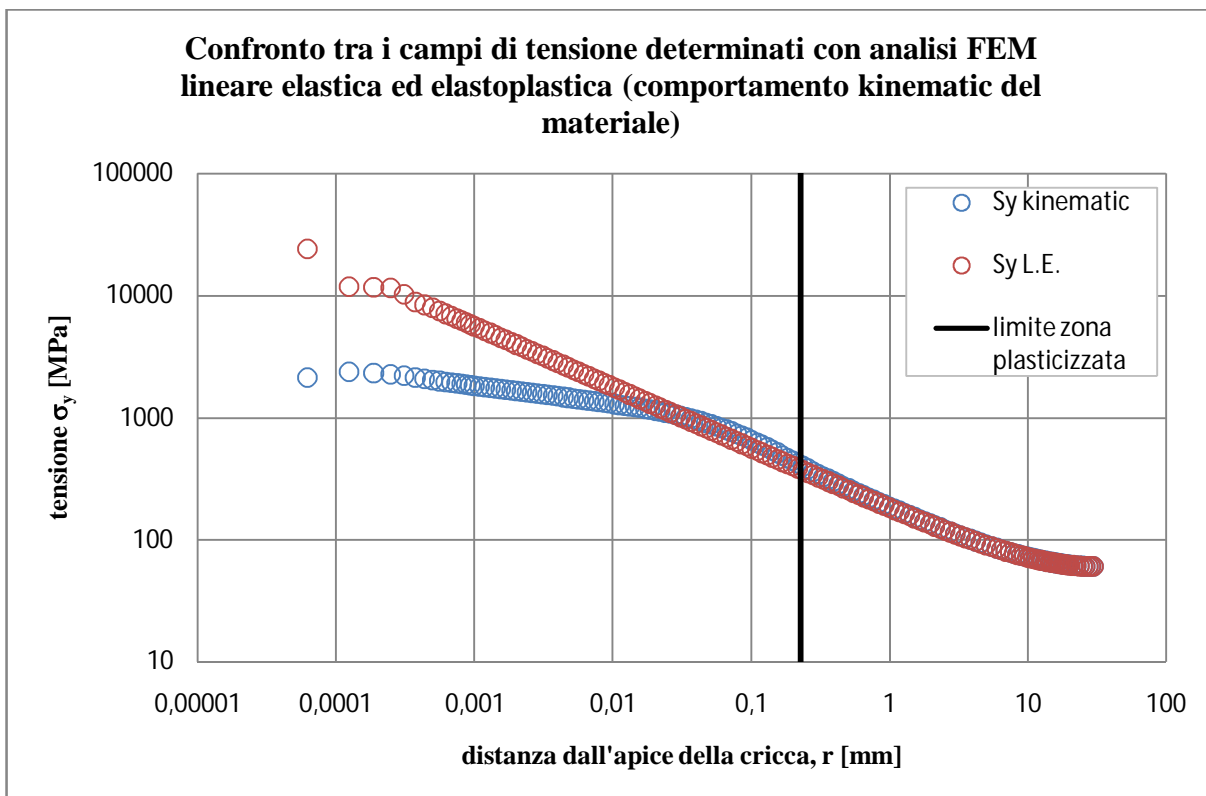


Figura 4.24 Confronto tra i campi di tensione σ_y sulla bisettrice della cricca determinati con analisi FEM in ipotesi di comportamento lineare elastico ed elastoplastico (kinematic) del materiale.

Nel caso seguente si settano i parametri in campo elastico e si utilizza la condizione $r_0=1mm$.

condizioni al contorno termini ordine superiore			condizioni al contorno modello CJP		
coppie valori	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]	coppie valori	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]
1	0.21901	420.14	1	0.21901	420.14
2	0.46748	273.38	2	0.46748	273.38
3	0.60478	239.91	r_0	1mm	

Tabella 4.13 Condizioni al contorno utilizzate nella risoluzione del sistema del caso in esame.

Valori risultanti dei coefficienti			
Risultati termini ordine superiore		Risultati modello CJP	
A	0.56762707	G	101.389386
B	-1.146594	H	-101.38939
C	0.67056766	E	6.39802762

Tabella 4.14 Valori dei coefficienti A, B, C ed G, H, E ottenuti dalla risoluzione del sistema per il caso in esame.

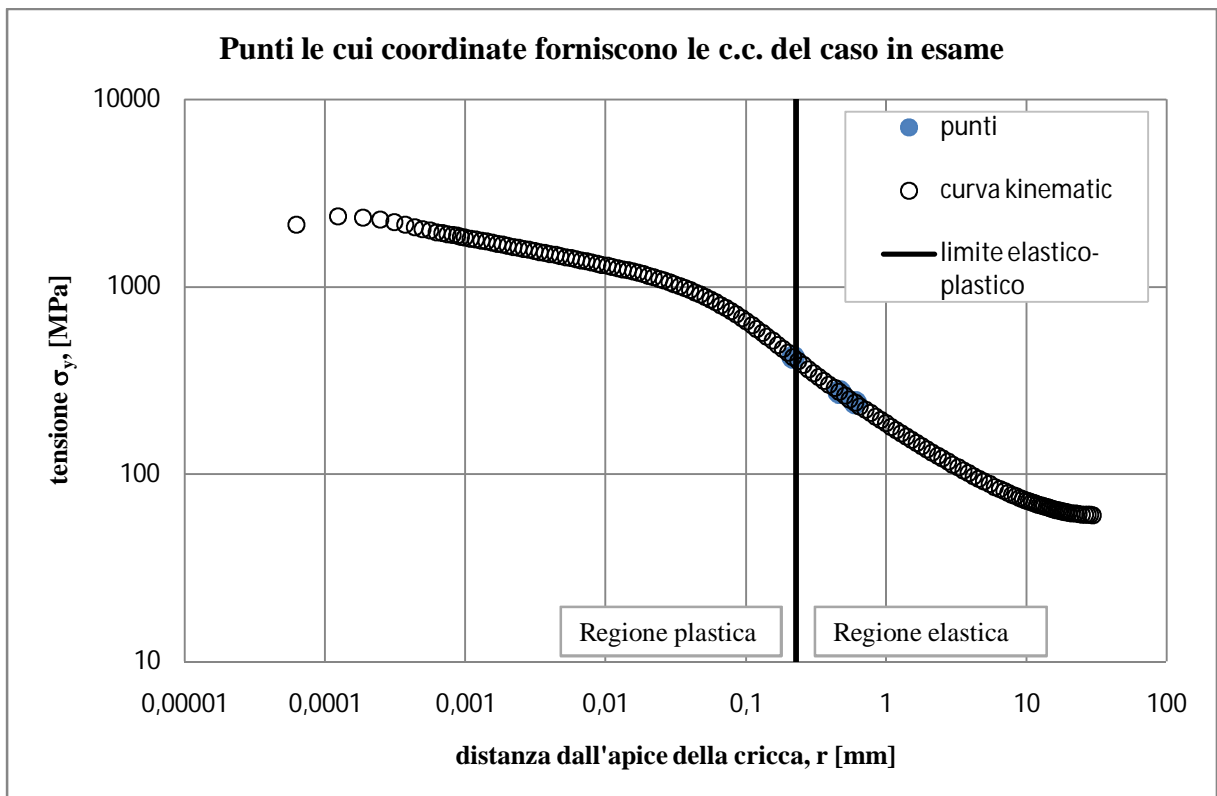


Figura 4.25 Distribuzione di tensione σ_y determinata con analisi FEM e modello kinematic hardening. Sono evidenziati i punti identificativi delle condizioni al contorno usate per risolvere i sistemi del caso in esame.

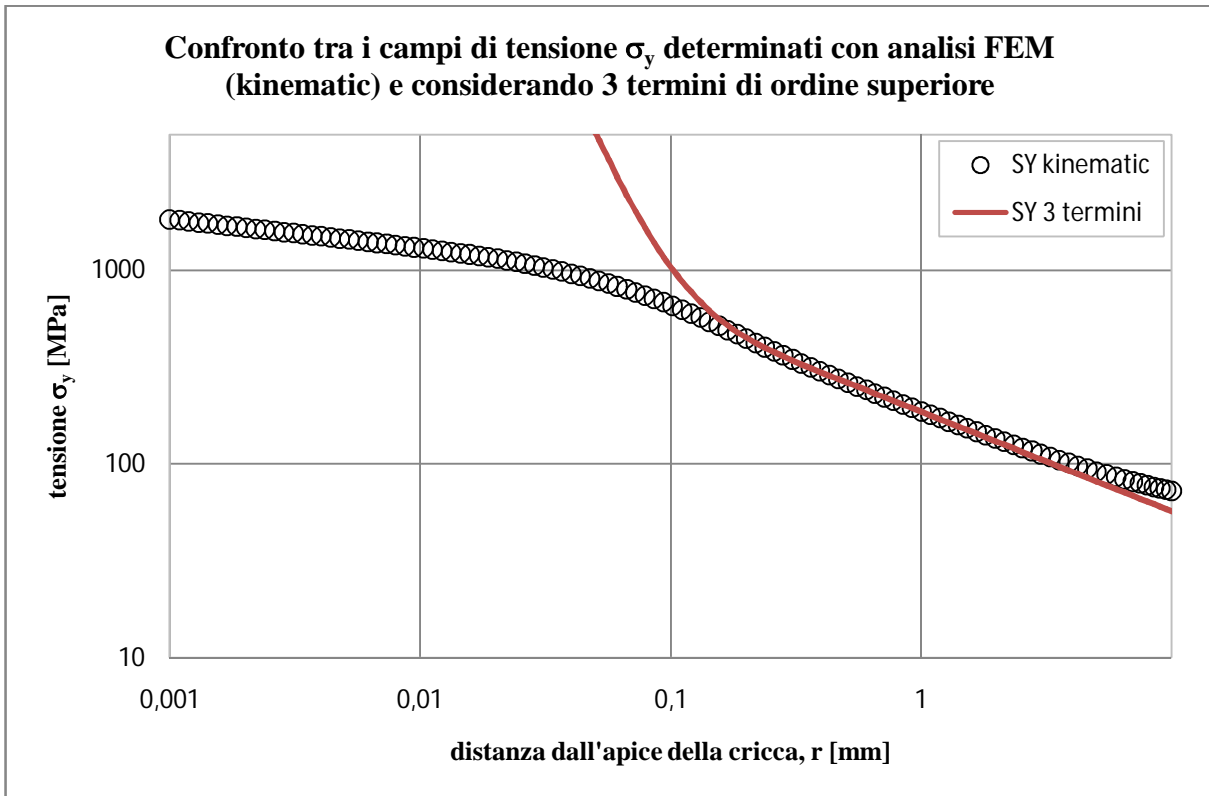


Figura 4.26 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinato con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e il campo ottenuto considerando 3 termini di ordine superiore.

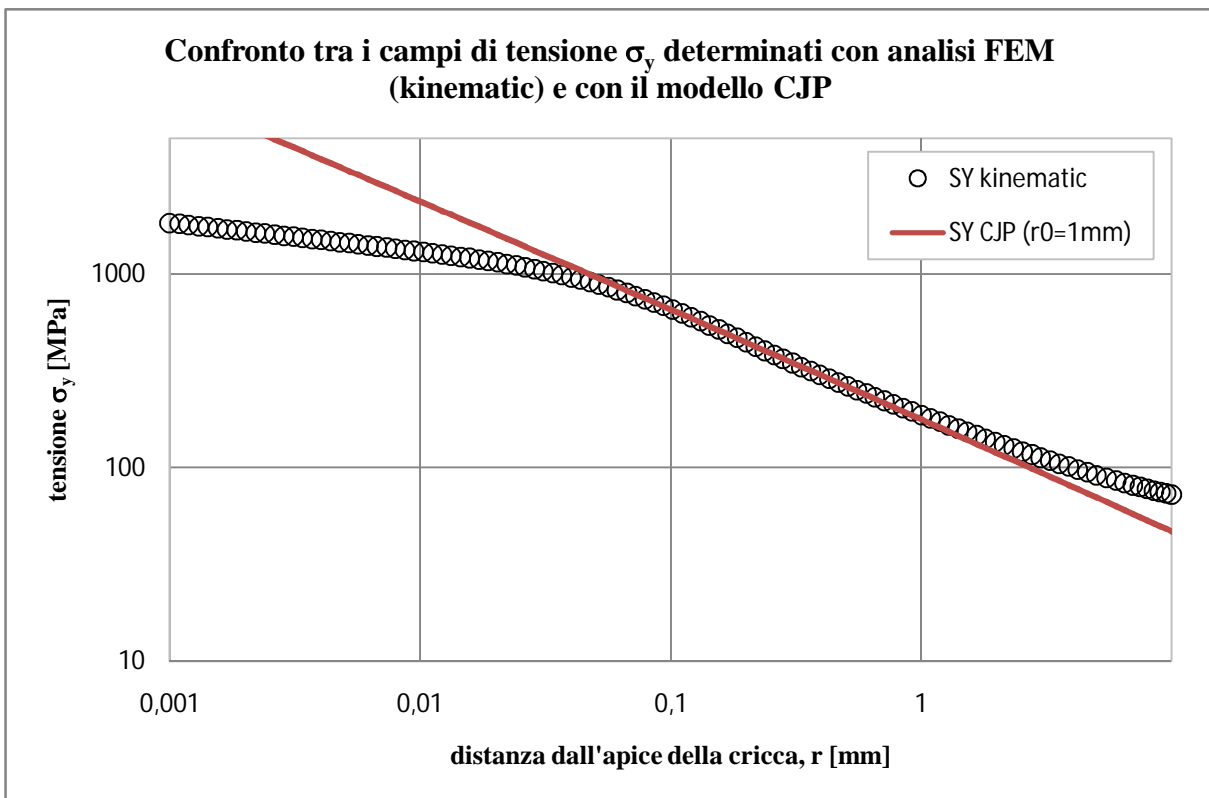


Figura 4.27 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinati con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e il campo ottenuto considerando le equazioni del modello CJP (con $r_0=1\text{mm}$).

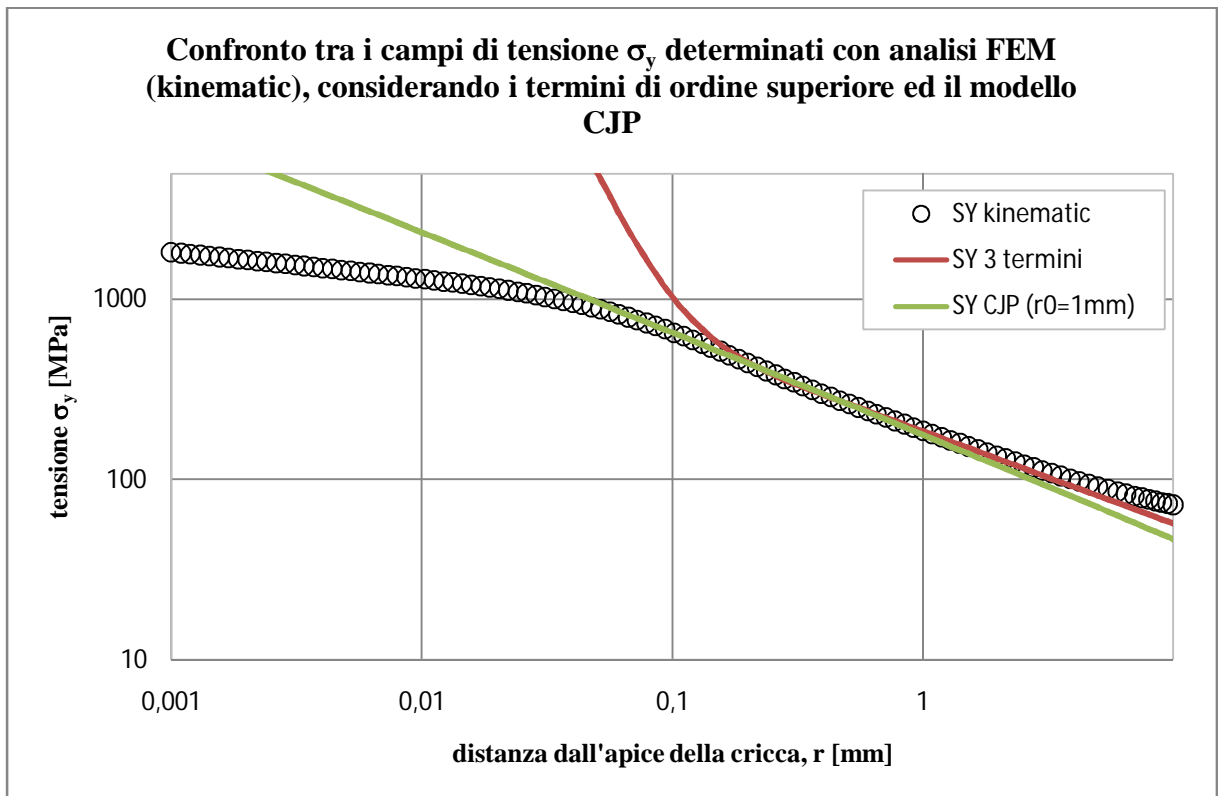


Figura 4.28 Confronto tra il campi di tensione σ_y determinato con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale, il campo ottenuto considerando 3 termini di ordine superiore ed il campo ottenuto considerando il modello CJP.

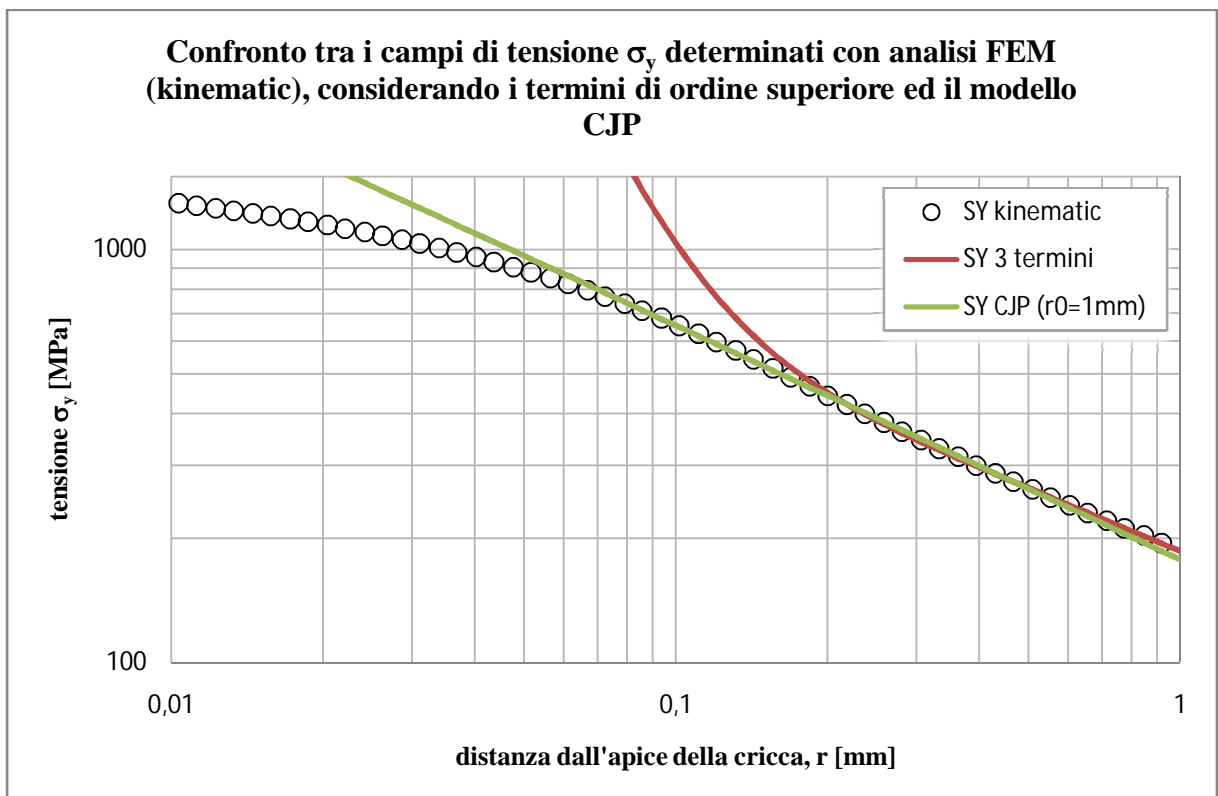


Figura 4.29 Zoom delle distribuzioni di tensione riportate in figura 4.28

Studio del valore dei coefficienti del modello CJP e dei termini di ordine superiore
nell'espressione di Irwin

Si esamina ora un caso che differisce dal precedente solo per la diversa scelta delle condizioni iniziali. Tale scelta permane comunque in campo lineare elastico e si utilizza ancora la condizione $r_0=1mm$. Si analizza tale caso col fine di verificare se cambiando le condizioni iniziali si ottiene una sensibile variazione del campo di tensione σ_y descritto considerando il modello CJP o considerando i termini di ordine superiore. Si vuole cioè valutare qualitativamente quanto le condizioni iniziali influenzano la capacità del modello CJP e della rappresentazione con termini di ordine superiore di descrivere il reale campo di tensione σ_y sulla bisettrice della cricca.

<i>condizioni al contorno termini ordine superiore</i>			<i>condizioni al contorno modello CJP</i>		
<i>coppie valori</i>	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]	<i>coppie valori</i>	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]
1	0.25941	380.21	1	0.25941	380.21
2	0.5106	261.83	2	0.5106	261.83
3	0.77682	210.82	r_0	1mm	

Tabella 4.15 Condizioni al contorno utilizzate nella risoluzione del sistema del caso in esame.

<i>Valori risultanti dei coefficienti</i>			
<i>Risultati termini ordine superiore</i>		<i>Risultati modello CJP</i>	
A	0.44886538	G	99.9743584
B	-0.8554788	H	-99.974358
C	0.50963346	E	4.8405015

Tabella 4.16 Valori dei coefficienti A, B, C e G, H, E ottenuti dalla risoluzione del sistema per il caso in esame.

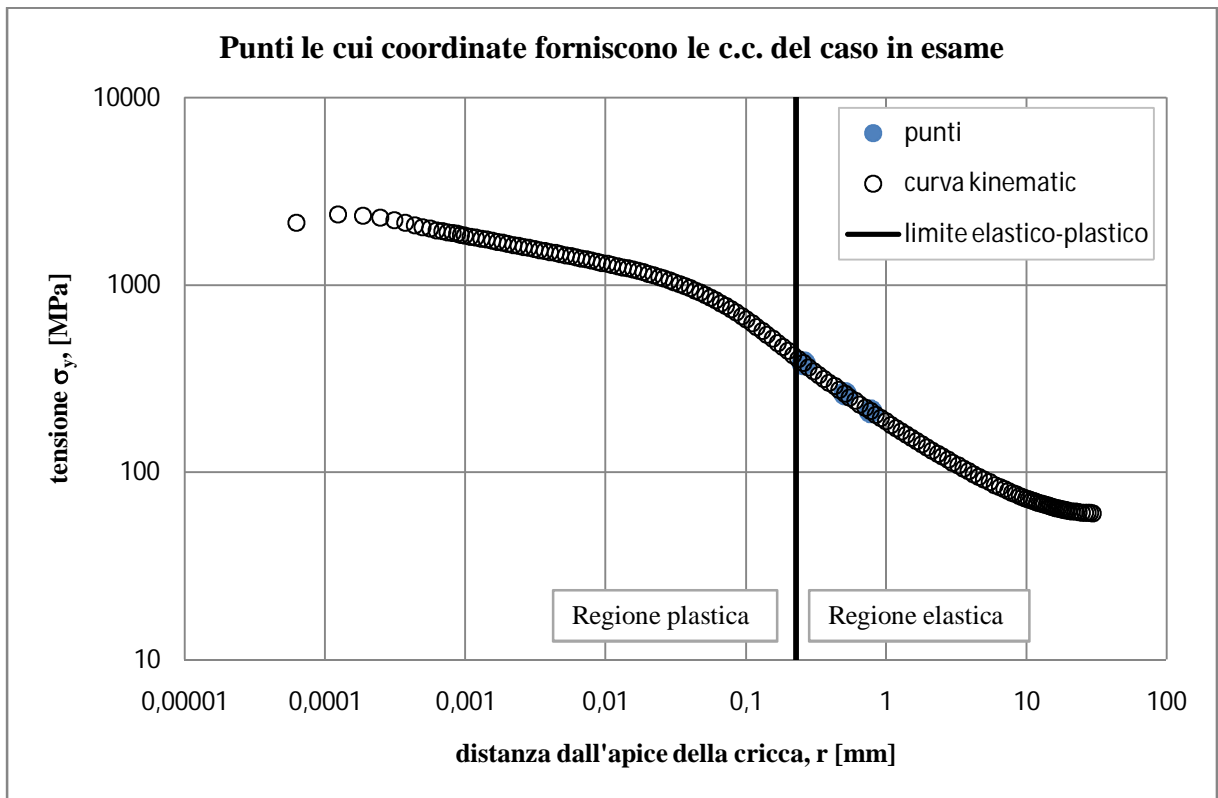


Figura 4.30 Distribuzione di tensione σ_y determinata con analisi FEM e modello kinematic hardening. Sono evidenziati i punti identificativi delle condizioni al contorno usate per risolvere i sistemi del caso in esame.

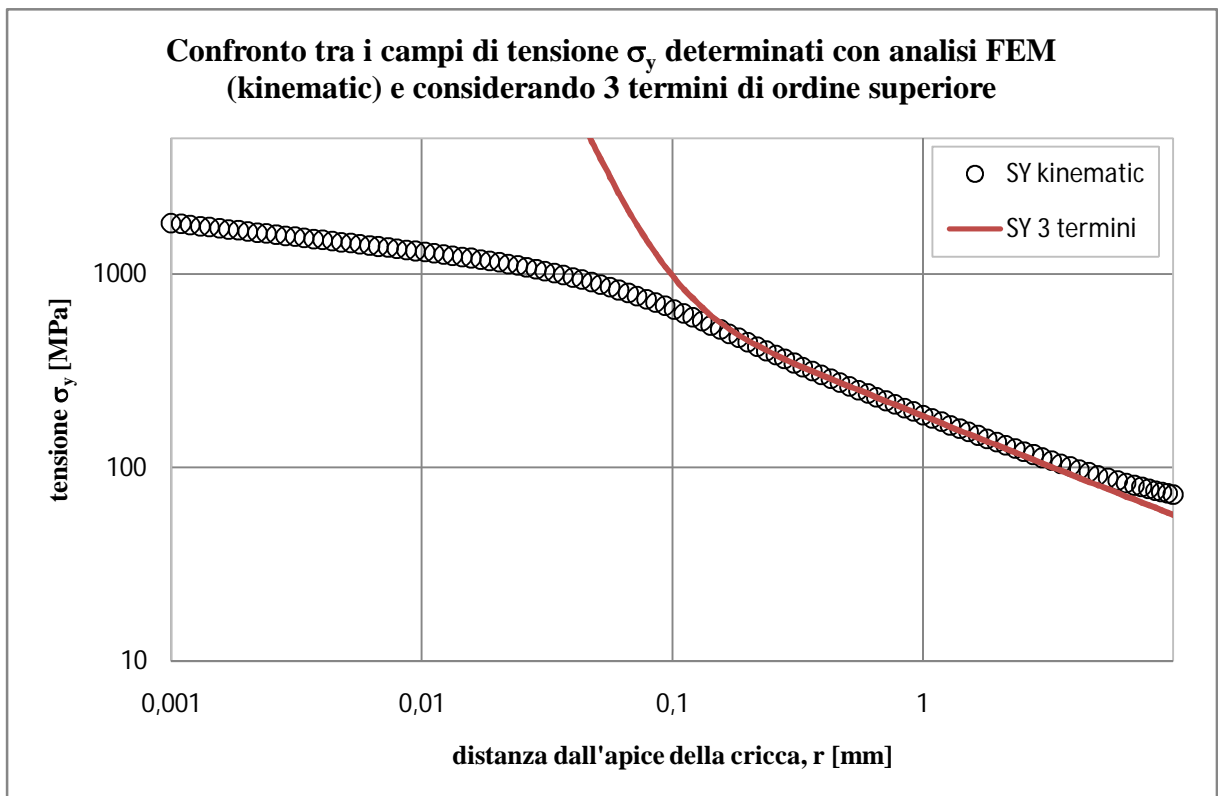


Figura 4.31 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinato con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e il campo ottenuto considerando 3 termini di ordine superiore.

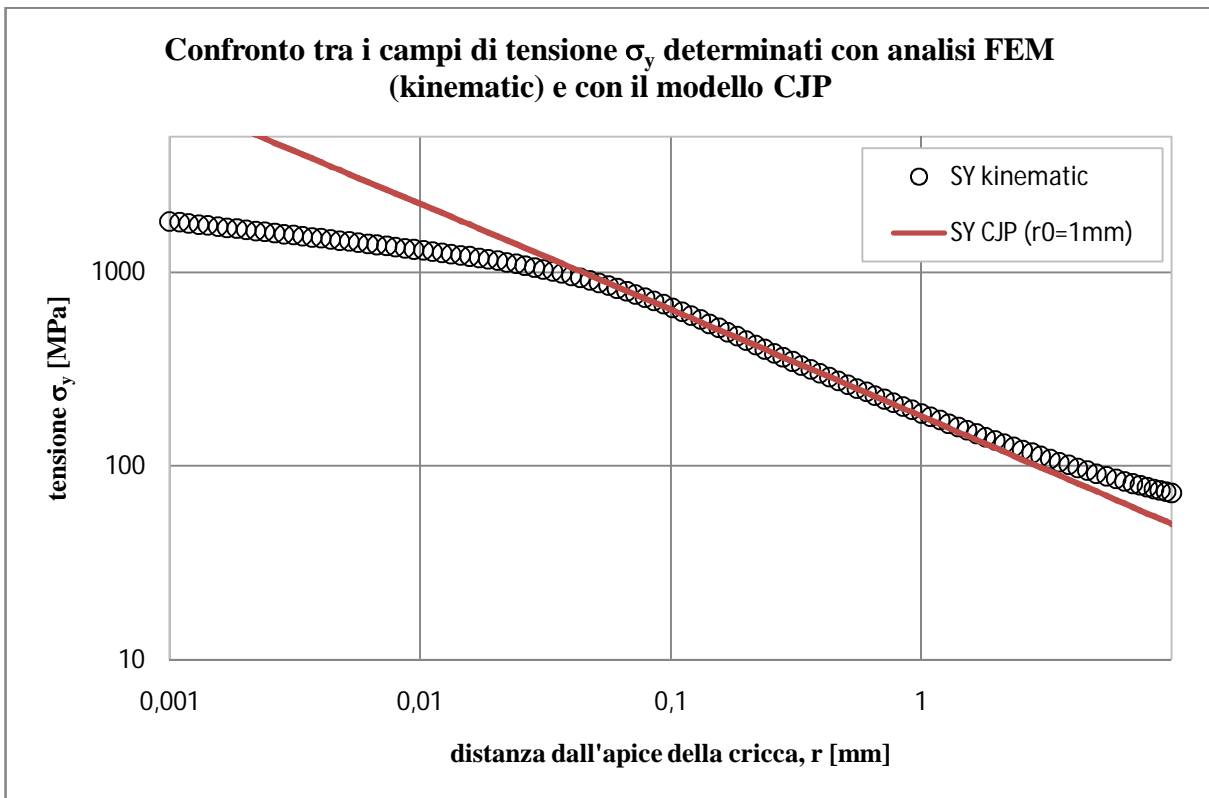


Figura 4.32 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinati con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e il campo ottenuto considerando le equazioni del modello CJP (con $r_0=1\text{mm}$).

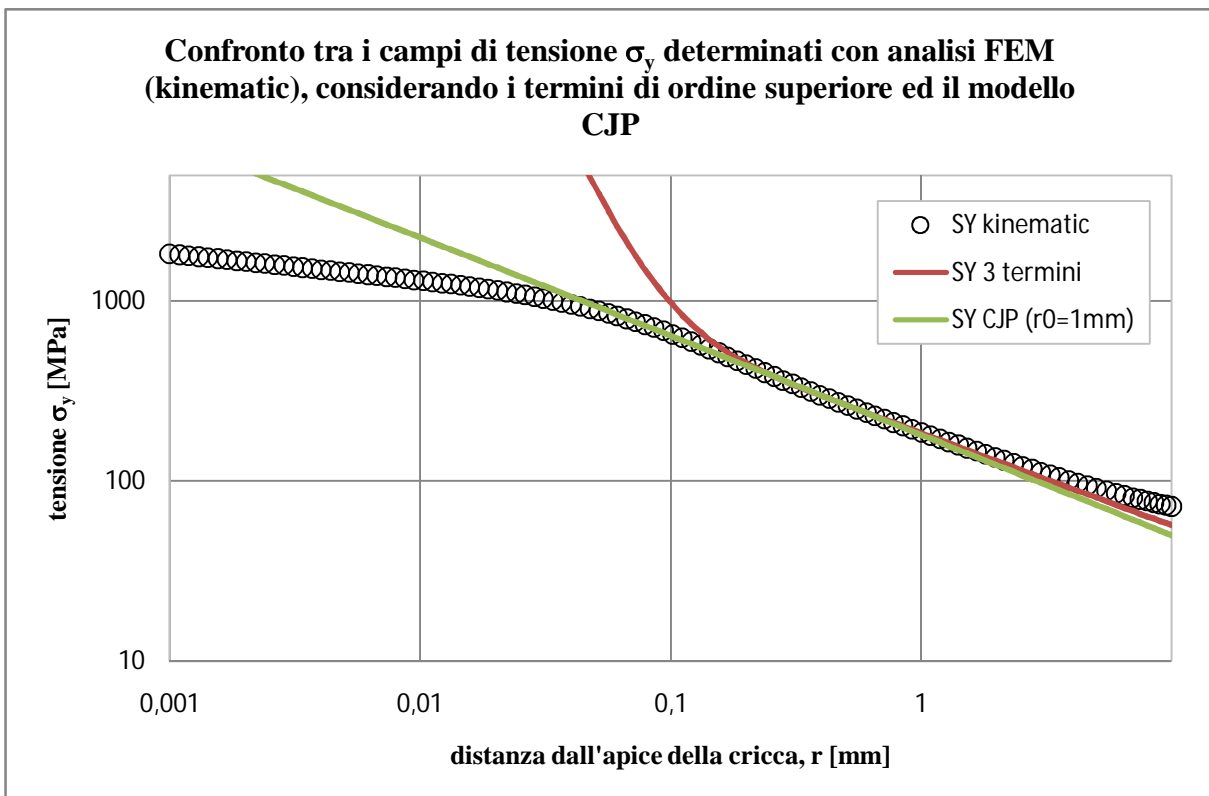


Figura 4.33 Confronto tra il campi di tensione σ_y determinato con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale, il campo ottenuto considerando 3 termini di ordine superiore ed il campo ottenuto considerando il modello CJP.

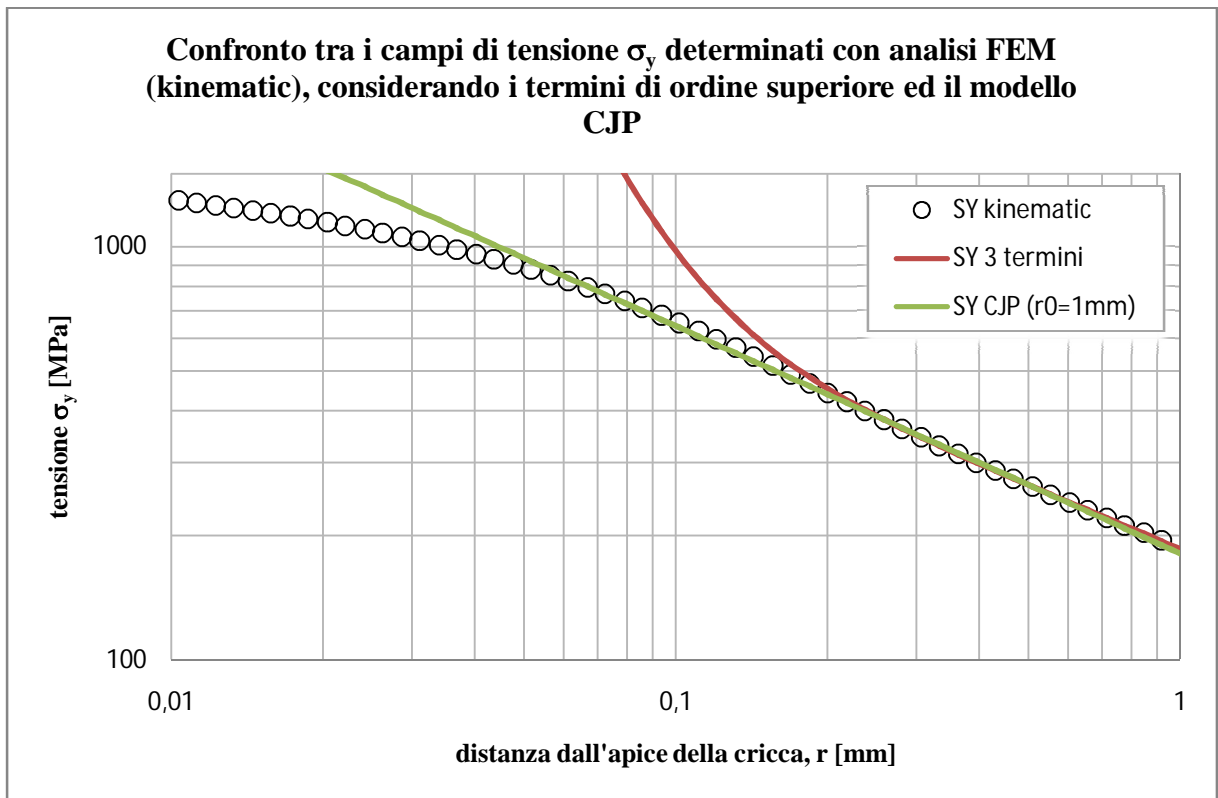


Figura 4.34 Zoom delle distribuzioni di tensione riportate in figura 4.33

Si settano ora i parametri sempre in campo elastico e si utilizza la condizione $r_0=r_p$.

<i>condizioni al contorno termini ordine superiore</i>			<i>condizioni al contorno modello CJP</i>		
<i>coppie valori</i>	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]	<i>coppie valori</i>	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]
1	0.21901	420.14	1	0.21901	420.14
2	0.46748	273.38	2	0.46748	273.38
3	0.60478	239.91	r_0	r_p	

Tabella 4.17 Condizioni al contorno utilizzate nella risoluzione del sistema del caso in esame.

<i>Valori risultanti dei coefficienti</i>			
<i>Risultati termini ordine superiore</i>		<i>Risultati modello CJP</i>	
A	0.56762707	G	110.838007
B	-1.146594	H	-110.83801
C	0.67056766	E	6.39802762

Tabella 4.18 Valori dei coefficienti A, B, C ed G, H, E ottenuti dalla risoluzione del sistema per il caso in esame.

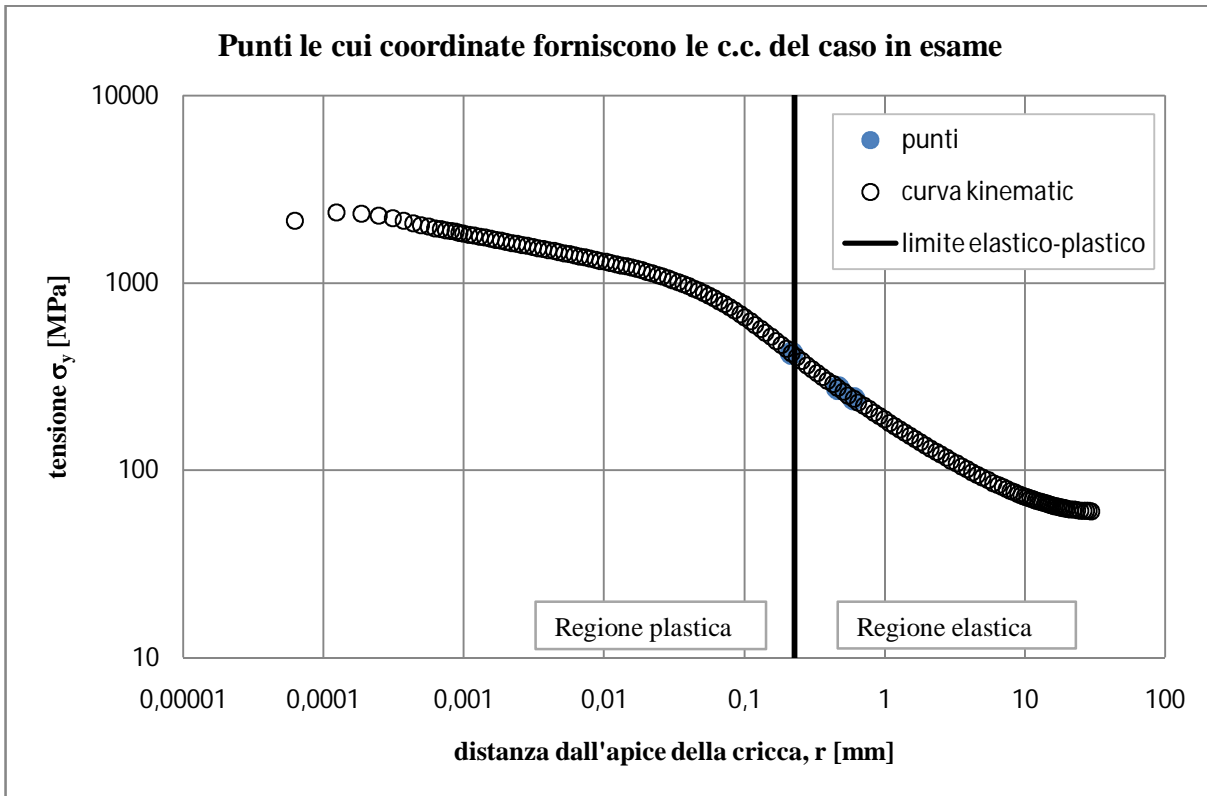


Figura 4.35 Distribuzione di tensione σ_y determinata con analisi FEM e modello kinematic hardening. Sono evidenziati i punti identificativi delle condizioni al contorno usate per risolvere i sistemi del caso in esame.

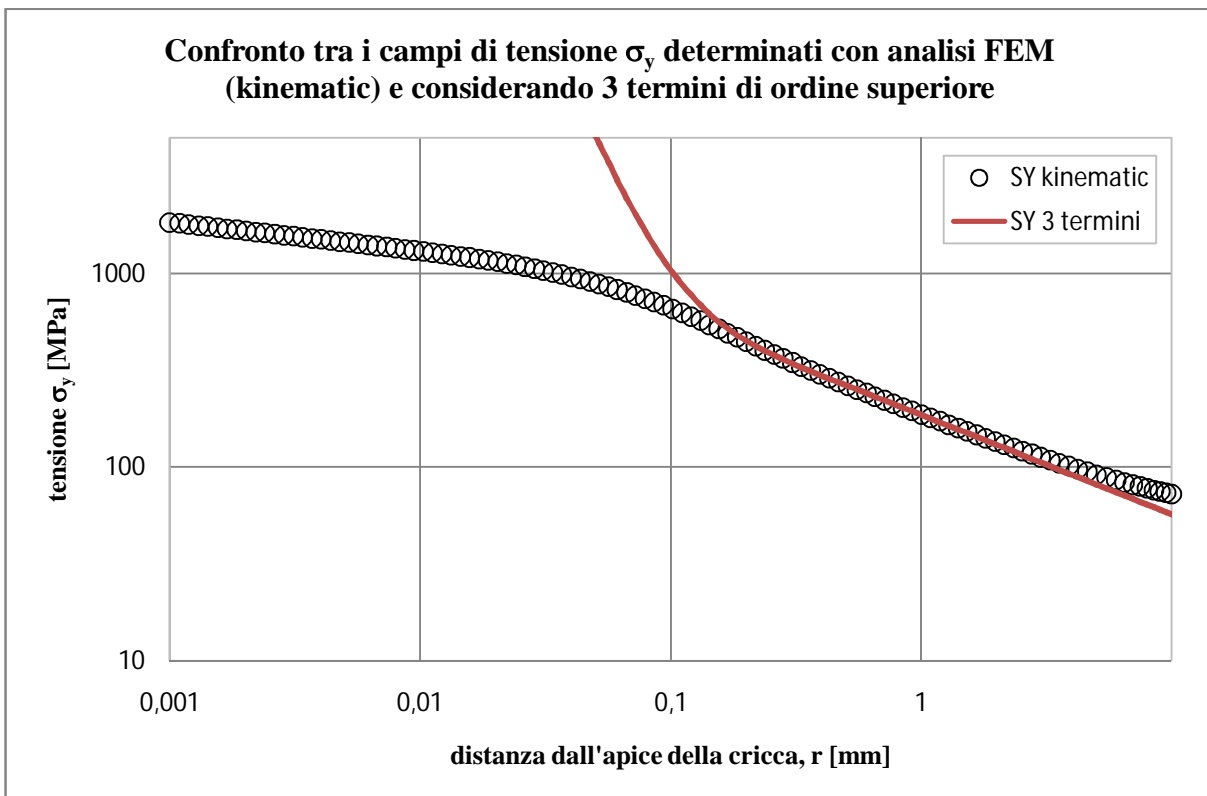


Figura 4.36 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinato con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e il campo ottenuto considerando 3 termini di ordine superiore.

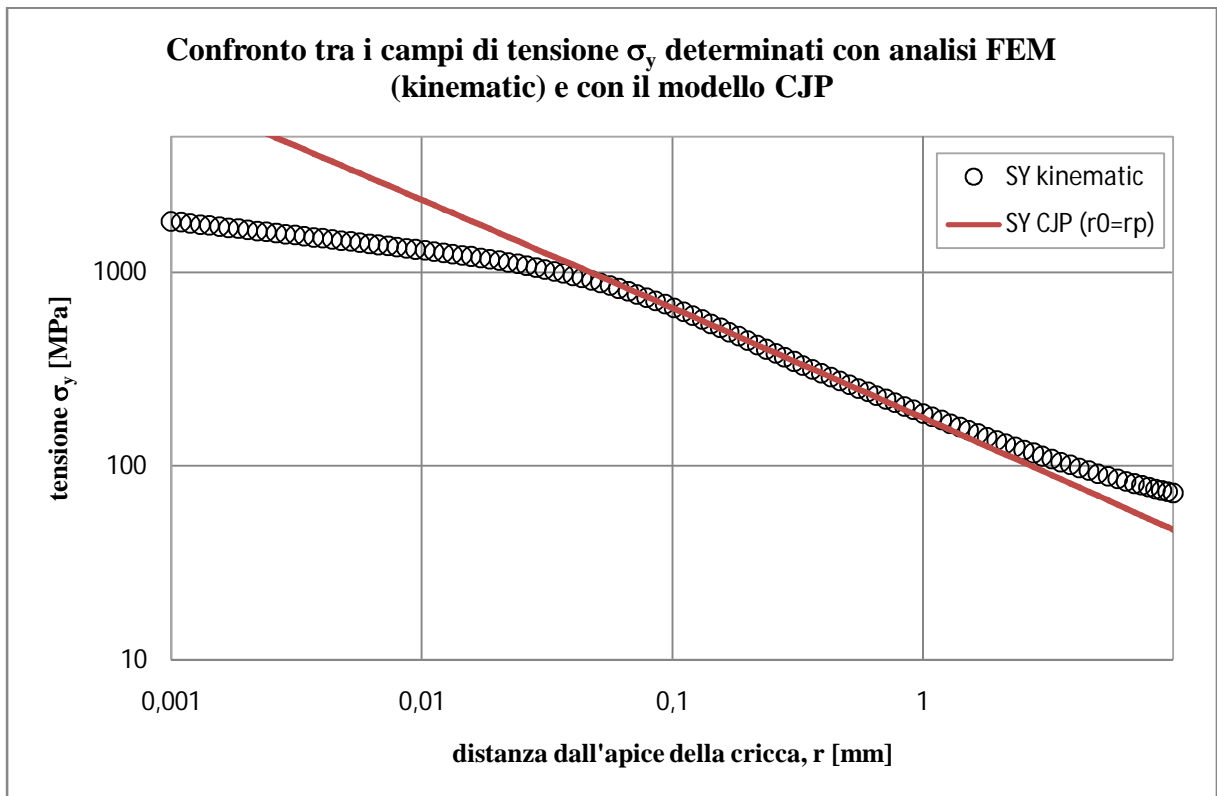


Figura 4.37 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinati con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e il campo ottenuto considerando le equazioni del modello CJP (con $r_0=r_p$).

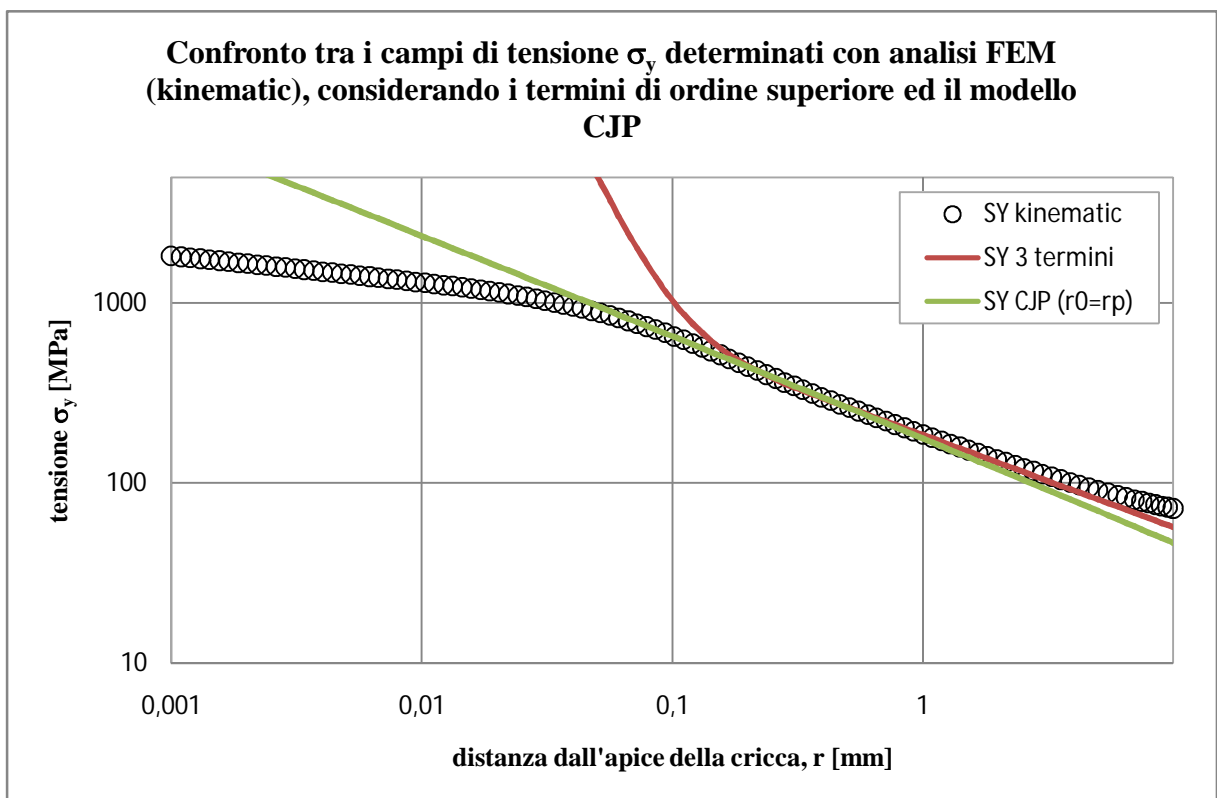


Figura 4.38 Confronto tra il campi di tensione σ_y determinato con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale, il campo ottenuto considerando 3 termini di ordine superiore ed il campo ottenuto considerando il modello CJP.

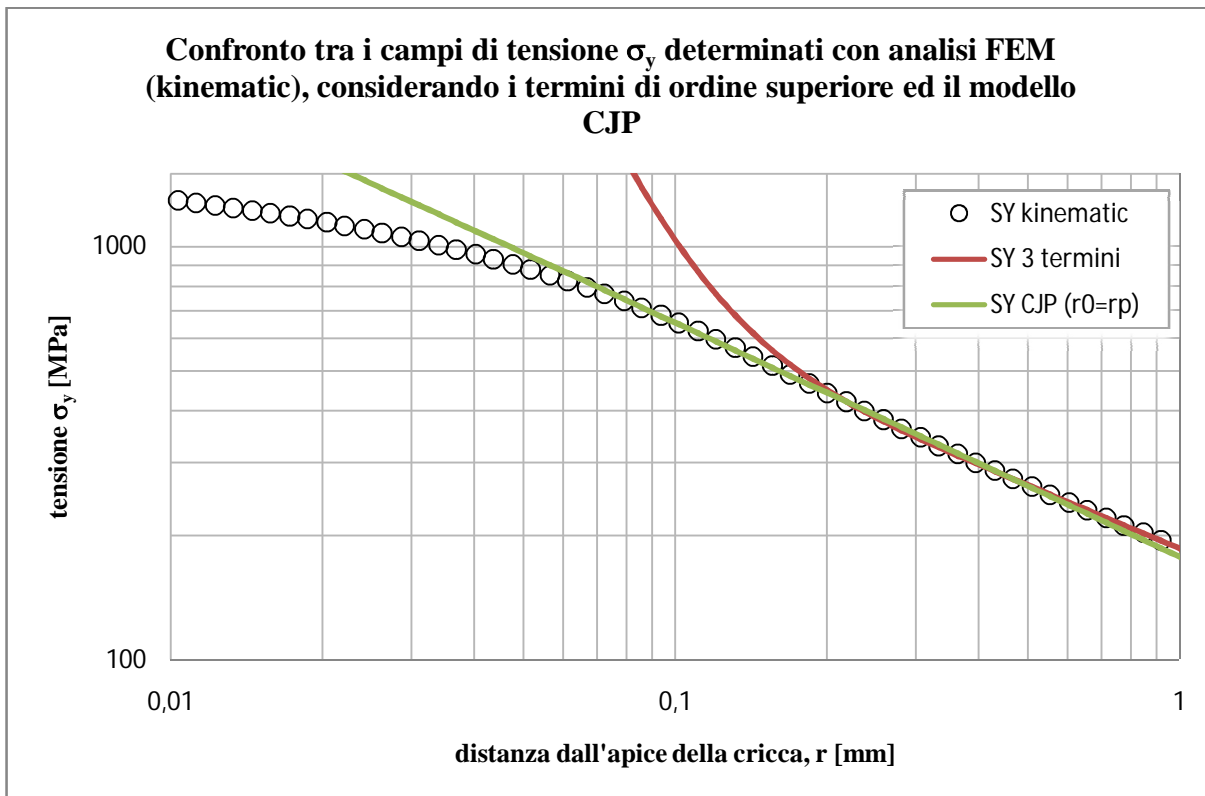


Figura 4.39 Zoom delle distribuzioni di tensione riportate in figura 4.38

Si settano ora i parametri sempre in campo elastico e si utilizza ancora la condizione $r_0=r_p$.

<i>condizioni al contorno termini ordine superiore</i>			<i>condizioni al contorno modello CJP</i>		
<i>coppie valori</i>	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]	<i>coppie valori</i>	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]
1	0.25941	380.21	1	0.25941	380.21
2	0.5106	261.83	2	0.5106	261.83
3	0.77682	210.82	r_0	r_p	

Tabella 4.19 Condizioni al contorno utilizzate nella risoluzione del sistema del caso in esame.

<i>Valori risultanti dei coefficienti</i>					
<i>Risultati termini ordine superiore</i>			<i>Risultati modello CJP</i>		
A	0.44886538		G	107.122822	
B	-0.8554788		H	-107.12282	
C	0.50963346		E	4.8405015	

Tabella 4.20 Valori dei coefficienti A, B, C e G, H, E ottenuti dalla risoluzione del sistema per il caso in esame.

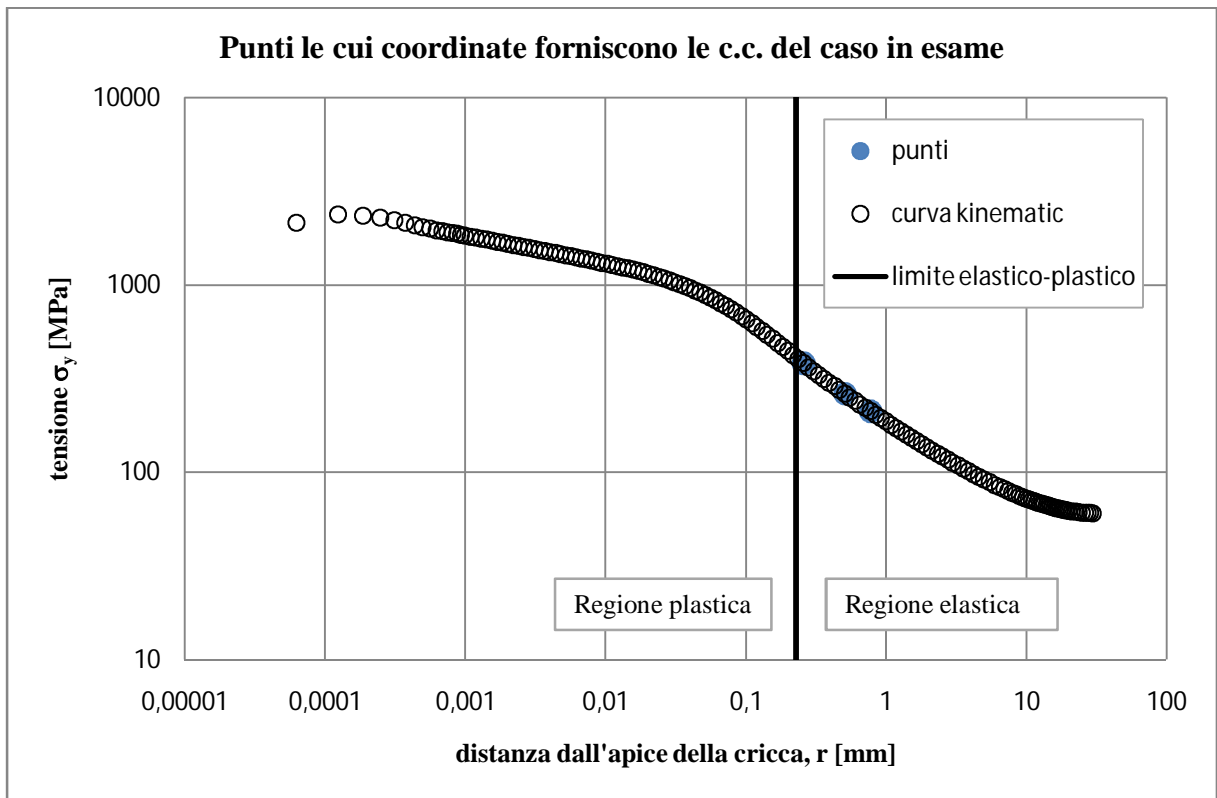


Figura 4.40 Distribuzione di tensione σ_y determinata con analisi FEM e modello kinematic hardening. Sono evidenziati i punti identificativi delle condizioni al contorno usate per risolvere i sistemi del caso in esame.

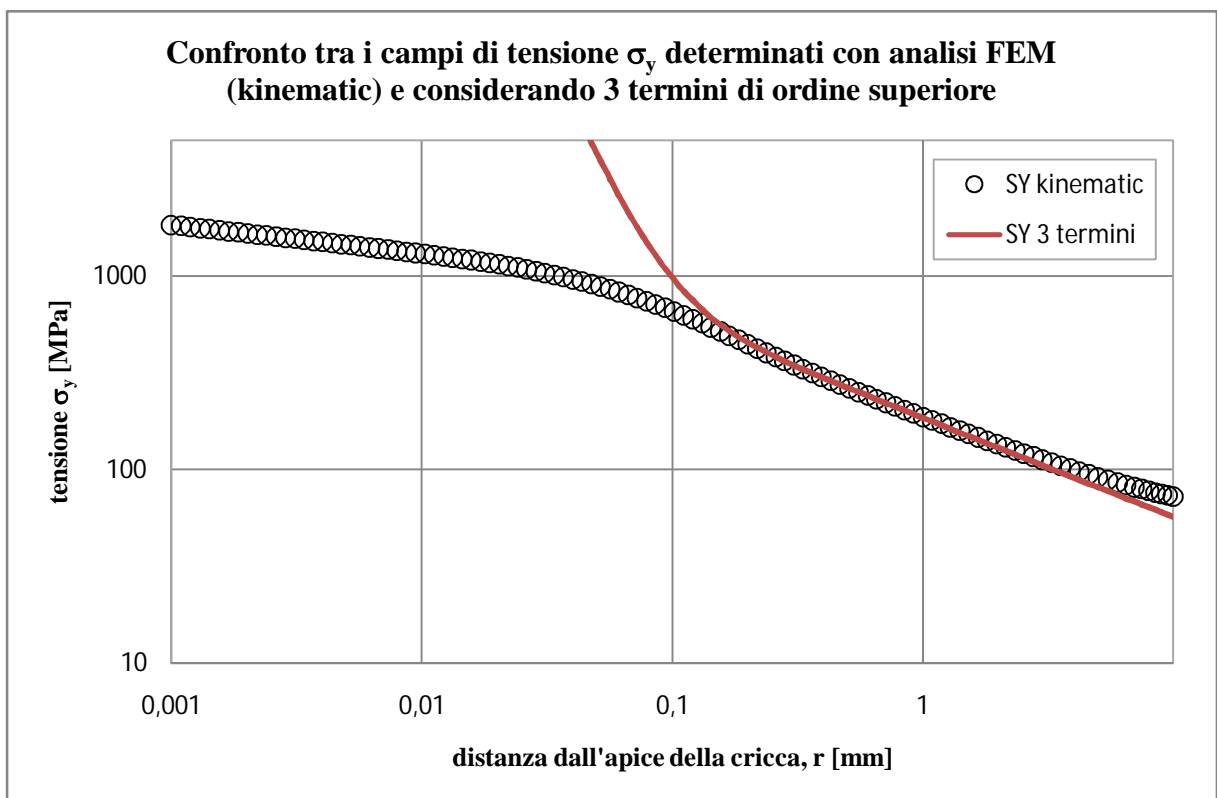


Figura 4.41 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinato con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e il campo ottenuto considerando 3 termini di ordine superiore.

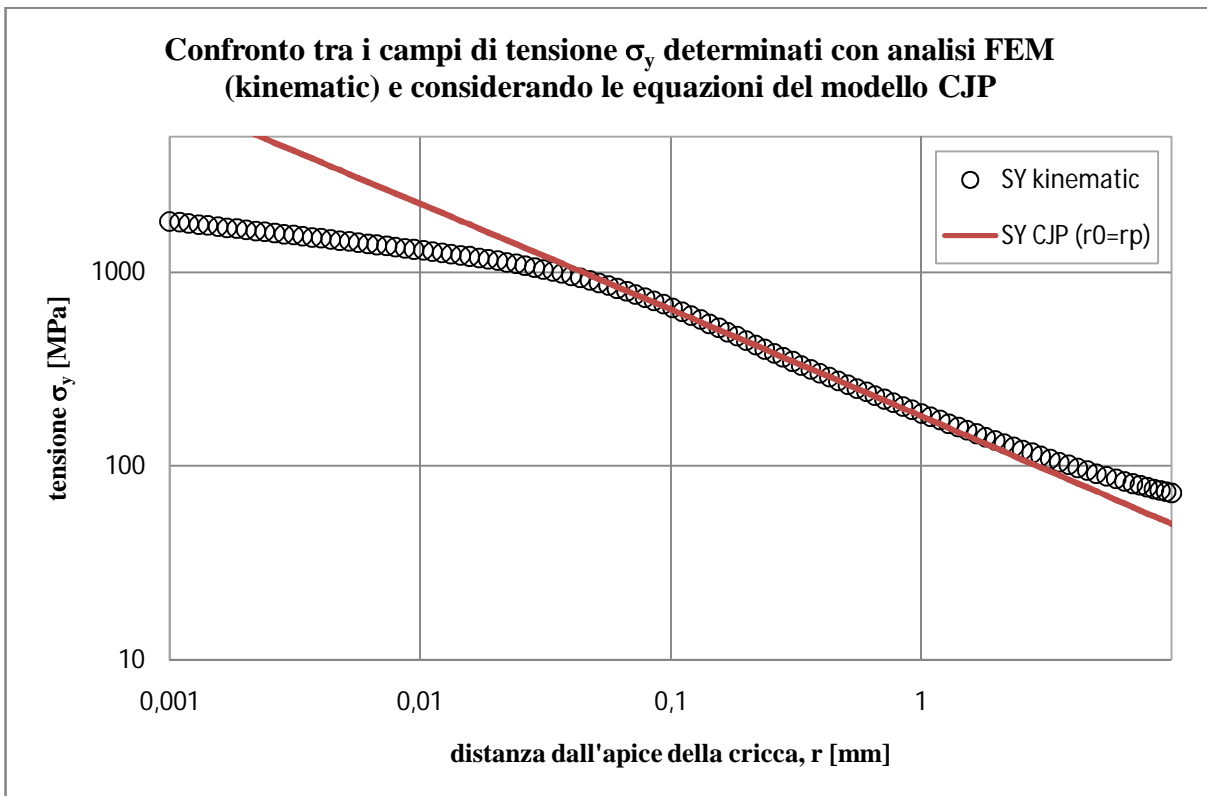


Figura 4.42 Confronto tra il campo di tensione σ_y determinati con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale e il campo ottenuto considerando le equazioni del modello CJP (con $r_0=r_p$).

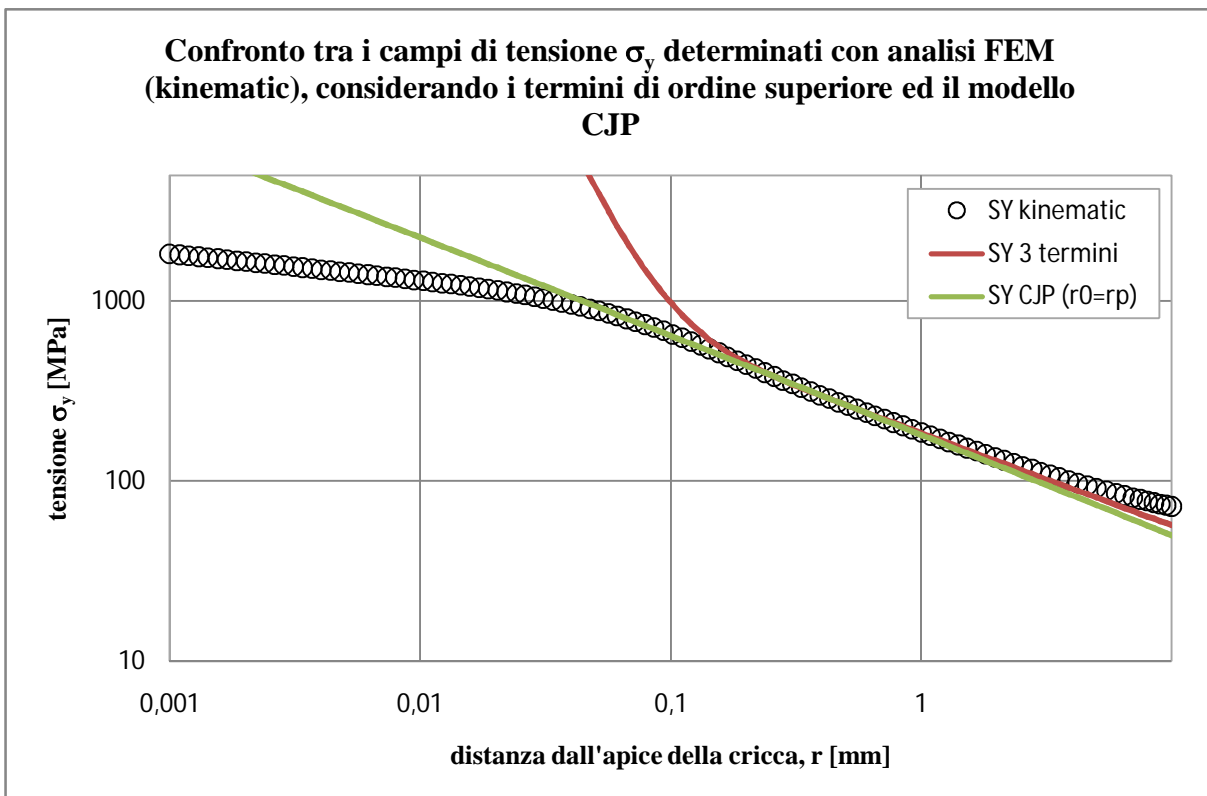


Figura 4.43 Confronto tra il campi di tensione σ_y determinato con analisi FEM e modello kinematic hardening a simulare le proprietà del materiale, il campo ottenuto considerando 3 termini di ordine superiore ed il campo ottenuto considerando il modello CJP.

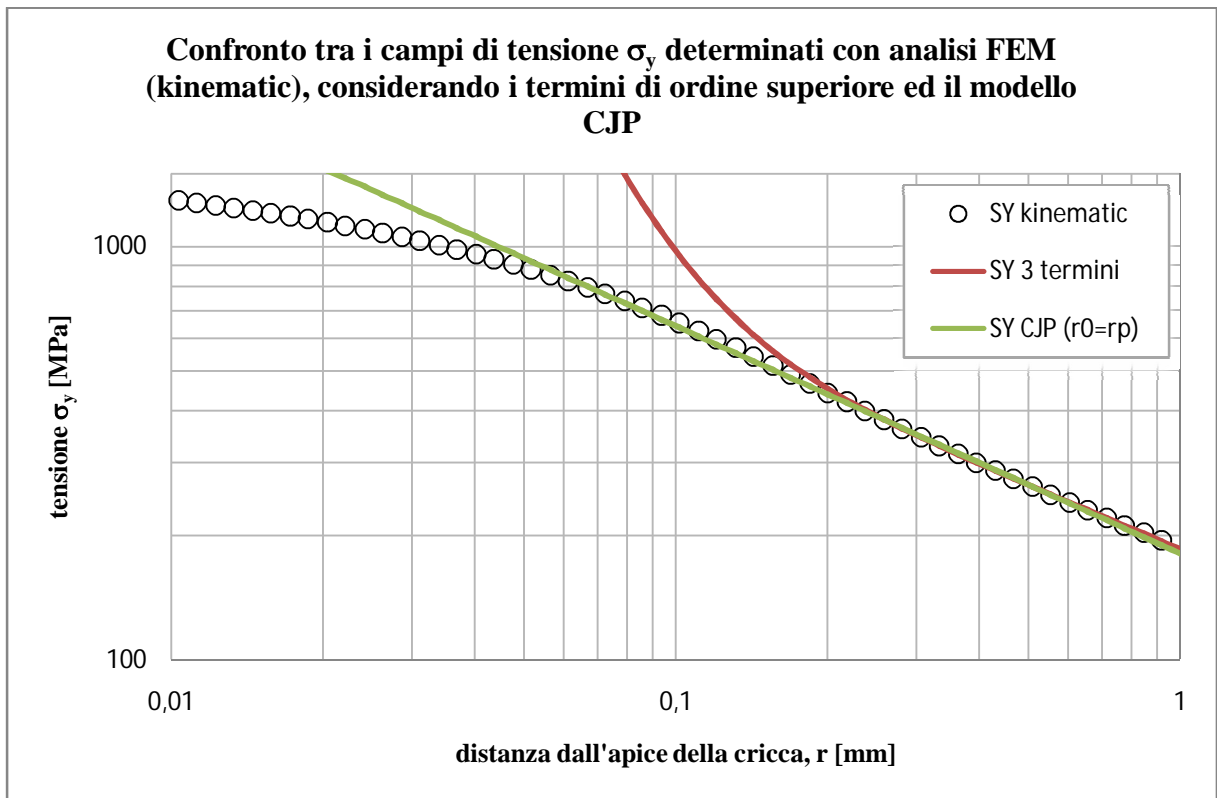


Figura 4.44 Zoom delle distribuzioni di tensione riportate in figura 4.43

4.4 Conclusioni

In modo molto schematico e riassuntivo si riportano qui di seguito una tabella contenente tutti i risultati ottenuti e delle figure riportanti i confronti tra le varie distribuzioni di tensione che si possono tracciare sfruttando i risultati suddetti.

Caso 1				
<i>C.C termini ordine superiore</i>			<i>C.C modello CJP</i>	
<i>r1</i>	<i>0.21901</i>		<i>r1</i>	<i>0.21901</i>
<i>r2</i>	<i>0.46748</i>		<i>r2</i>	<i>0.46748</i>
<i>r3</i>	<i>0.60478</i>		<i>r₀=1mm</i>	
<i>Risultati termini ordine superiore</i>			<i>Risultati modello CJP</i>	
<i>A</i>	<i>0.567627</i>		<i>G</i>	<i>101.389386</i>
<i>B</i>	<i>-1.14659</i>	<i>H</i>	<i>-101.389386</i>	
<i>C</i>	<i>0.670568</i>	<i>E</i>	<i>6.398027624</i>	
Caso 2				
<i>C.C termini ordine superiore</i>			<i>C.C modello CJP</i>	
<i>r1</i>	<i>0.21901</i>		<i>r1</i>	<i>0.21901</i>
<i>r2</i>	<i>0.46748</i>		<i>r2</i>	<i>0.46748</i>
<i>r3</i>	<i>0.60478</i>	<i>r₀=r_p</i>		

Studio del valore dei coefficienti del modello CJP e dei termini di ordine superiore nell'espressione di Irwin

<i>Risultati termini ordine superiore</i>			<i>Risultati modello CJP</i>	
<i>A</i>	0.567627		<i>G</i>	110.838
<i>B</i>	-1.14659		<i>H</i>	-110.838
<i>C</i>	0.670568		<i>E</i>	6.398028
Caso 3				
<i>C.C termini ordine superiore</i>			<i>C.C modello CJP</i>	
<i>r1</i>	0.25941		<i>r1</i>	0.25941
<i>r2</i>	0.5106		<i>r2</i>	0.5106
<i>r3</i>	0.77682		<i>r₀=1mm</i>	
<i>Risultati termini ordine superiore</i>			<i>Risultati modello CJP</i>	
<i>A</i>	0.448865		<i>G</i>	99.97436
<i>B</i>	-0.85548		<i>H</i>	-99.9744
<i>C</i>	0.509633		<i>E</i>	4.840501
Caso 4				
<i>C.C termini ordine superiore</i>			<i>C.C modello CJP</i>	
<i>r1</i>	0.25941		<i>r1</i>	0.25941
<i>r2</i>	0.5106		<i>r2</i>	0.5106
<i>r3</i>	0.77682		<i>r₀=r_p</i>	
<i>Risultati termini ordine superiore</i>			<i>Risultati modello CJP</i>	
<i>A</i>	0.448865		<i>G</i>	107.1228
<i>B</i>	-0.85548		<i>H</i>	-107.123
<i>C</i>	0.509633		<i>E</i>	4.840501
Caso 5				
<i>C.C termini ordine superiore</i>			<i>C.C modello CJP</i>	
<i>r1</i>	0.21901		<i>r1</i>	0.21901
<i>r2</i>	0.0565		<i>r2</i>	0.0565
<i>r3</i>	0.010352		<i>r₀=1mm</i>	
<i>Risultati termini ordine superiore</i>			<i>Risultati modello CJP</i>	
<i>A</i>	0.189139		<i>G</i>	99.23166
<i>B</i>	-0.10463		<i>H</i>	-99.2317
<i>C</i>	0.013155		<i>E</i>	1.915493
Caso 6				
<i>C.C termini ordine superiore</i>			<i>C.C modello CJP</i>	
<i>r1</i>	0.21901		<i>r1</i>	0.21901
<i>r2</i>	0.0565		<i>r2</i>	0.0565
<i>r3</i>	0.010352		<i>r₀=r_p</i>	
<i>Risultati termini ordine superiore</i>			<i>Risultati modello CJP</i>	
<i>A</i>	0.189139		<i>G</i>	102.0605
<i>B</i>	-0.10463		<i>H</i>	-102.06
<i>C</i>	0.013155		<i>E</i>	1.915493

Tabella 4.21 Riassunto delle condizioni al contorno utilizzate per risolvere i sistemi e relativi risultati.

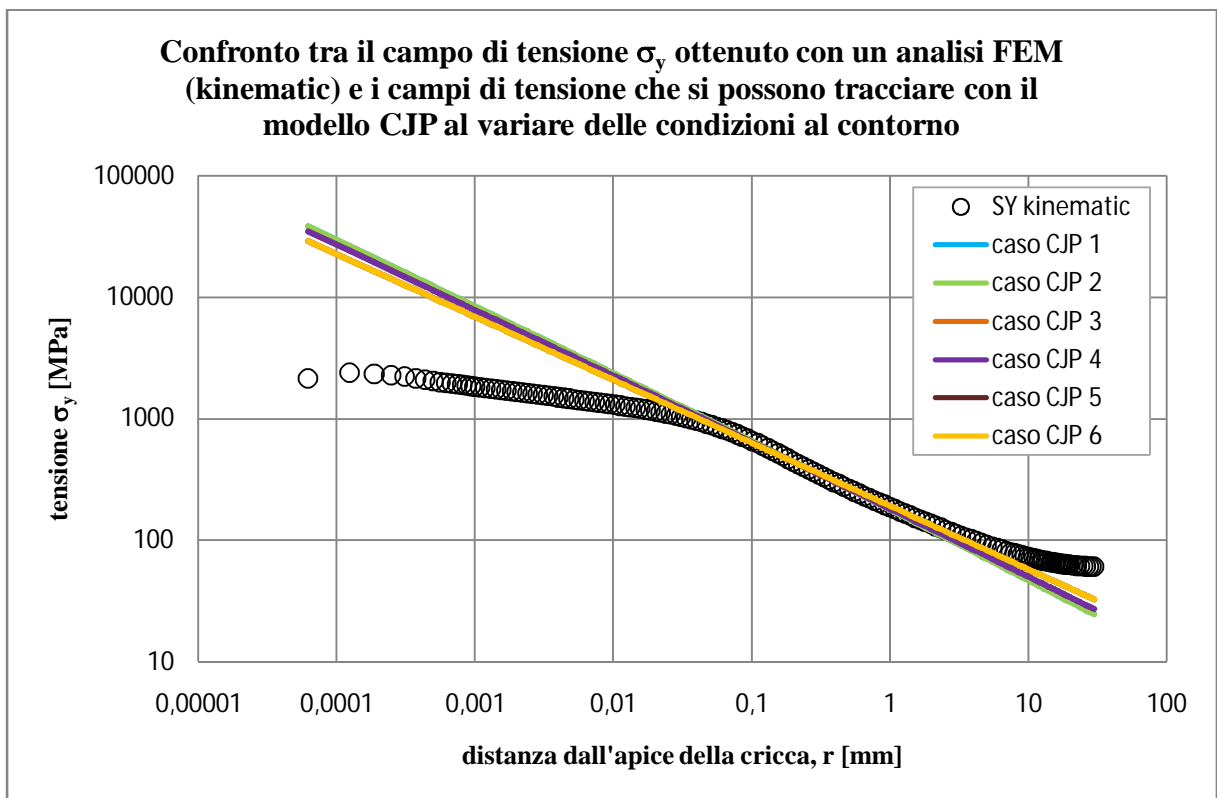


Figura 4.45 Confronto tra il campo di tensione σ_y ottenuto con un analisi elastoplastica e modello kinematic hardening del materiale e i campi di tensione che si possono tracciare con il modello CJP al variare delle condizioni al contorno.

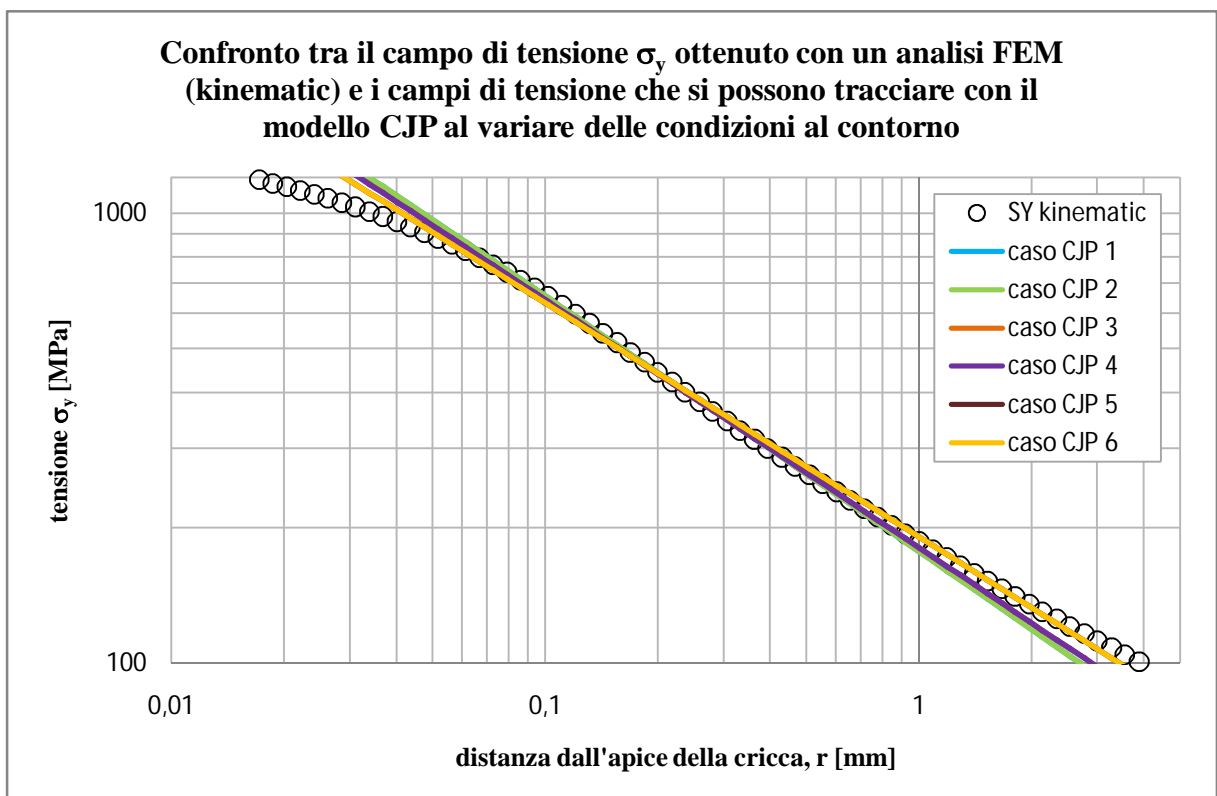


Figura 4.46 Zoom delle distribuzioni di tensione riportate in figura 4.47.

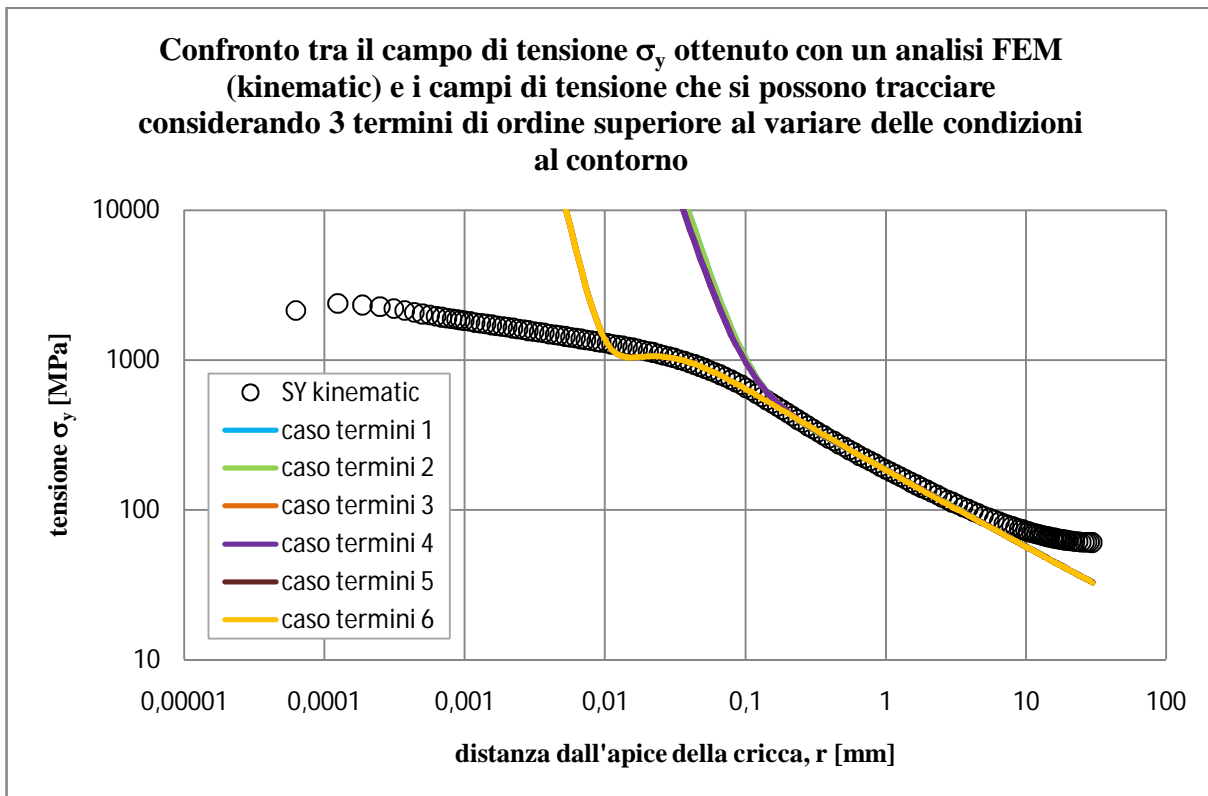


Figura 4.47 Confronto tra il campo di tensione σ_y ottenuto con un analisi elastoplastica e modello kinematic hardening del materiale e i campi di tensione che si possono tracciare considerando 3 termini di ordine superiore ed al variare delle condizioni al contorno.

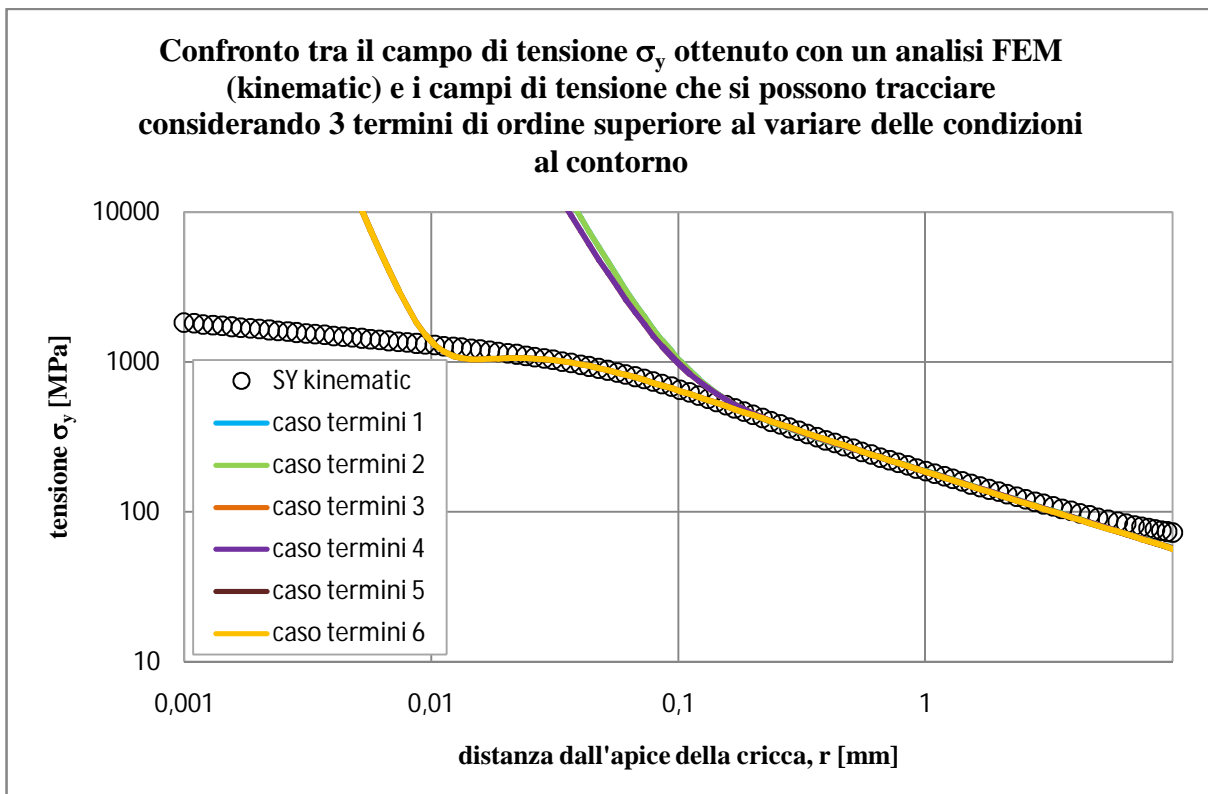


Figura 4.48 Zoom delle distribuzioni di tensione riportate in figura 4.47

In tabella 4.21 sono riportati tutti i risultati ottenuti e precedentemente elencati e descritti nel presente capitolo.

In particolare le coppie di casi 1 e 2, 3 e 4, 5 e 6 sono caratterizzate dall'aver le stesse condizioni al contorno, cioè per le coppie di casi suddette si sono utilizzati gli stessi valori r_i, σ_{yi} per risolvere i due sistemi che permettono a loro volta di determinare i coefficienti incogniti nelle equazione 4.5 e 4.9.

I casi 1, 2 e 3, 4 sono stati settati in campo lineare elastico mentre i casi 5, 6 in campo plastico, cioè per i primi le coppie di valori r_i, σ_{yi} sono state scelte per $r > r_p$, i secondi per $r < r_p$. Inoltre il caso 1 differisce dal 2, così come il 3 dal 4 ed il 5 dal 6 per la differente scelta del valore di r_0 . In particolare per i casi 1, 3 e 5 si è posto il parametro $r_0 = lmm$, mentre per i casi 2, 4 e 6 si è posto $r_0 = r_p$. Tale osservazione è valida ovviamente per quanto riguarda il modello CJP, essendo l'unico che contiene nel frame analitico il coefficiente r_0 .

Analizzando i risultati in tabella si nota come la scelta delle condizioni al contorno influenzi principalmente gli esiti del presente studio (cioè il valore dei coefficienti) soprattutto per quel che riguarda il modello ai termini di ordine superiore. Una diversa scelta delle condizioni al contorno, fatta comunque in campo lineare elastico, provoca differenze di diversi punti percentuali sui valori dei coefficienti A, B e C. Se si raffrontano i valori dei coefficienti suddetti ottenuti da condizioni al contorno scelte in campo lineare elastico con quelli ottenuti per condizioni al contorno scelte in campo plastico le differenze possono essere anche di un ordine di grandezza (ne è un esempio il confronto tra i casi 1 e 5). Si ripete però ancora una volta che queste analisi sono analisi preliminari. A rigore infatti sarebbe più corretto procedere con un metodo di interpolazione ai minimi quadrati per determinare il valore dei coefficienti incogniti.

Per quanto riguarda la scelta del valore di r_0 si nota che essa non influenza il risultato quando le condizioni al contorno sono scelte in campo plastico. Si veda a tal proposito i valori dei coefficienti G, H ed E per i casi 5 e 6. In essi infatti le differenze son di circa il 3% e pertanto si possono trascurare. Nel caso invece le condizioni al contorno siano scelte in campo lineare elastico le differenze sono maggiori, ma comunque contenute attorno al 10%.

Nelle figure 4.45, 4.46, 4.47 e 4.48 sono riportati i confronti tra i diversi campi di tensione σ_y che si possono riprodurre con le formule 4.5 e 4.9. Da tali figure si nota come per ciascun caso si riesca sempre a riprodurre in modo sufficientemente preciso il campo di tensione reale (cioè quello determinato al FEM) nella zona elastica, cioè per $r > r_p$.

Utilizzo delle equazioni delle tensioni del modello CJP per riprodurre i campi di tensioni fuori e sulla bisettrice

Capitolo 5

5.1 Introduzione e inquadramento analitico

Nel capitolo 3, a partire dai potenziali complessi $\phi(z)$ e $\psi(z)$ (vedi equazione 3.9), sono state determinate le espressioni delle componenti di tensione σ_x , σ_y e τ_{xy} valide per descrivere i campi di tensione elastici al di fuori della zona deformata plasticamente situata all'apice di una cricca. Tali espressioni sono qui di seguito riportate.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)[G + 4H + 8E] - \frac{1}{2}Hr^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}Er^{-\frac{1}{2}}\left\{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\left[\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \right. \\ &\quad \left. + (\theta - \theta_0)\left[\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\} - C \\ \sigma_y &= \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)[G - 4H - 8E] + H\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + E\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\left[\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) - 5\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\theta - \theta_0)\left[\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right) - 5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right]\right\} \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\left[G\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + H\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)\right] \\ &\quad - Er^{-\frac{1}{2}}\sin(\theta)\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + (\theta - \theta_0)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]\end{aligned}\tag{5.1}$$

Analizzando tali espressioni si può notare come esse sono funzione dei parametri r_0 e θ_0 , delle coordinate radiali (r, θ) oltre che di un'altra serie di parametri C , G , H ed E . Questi ultimi 3 parametri sono stati oggetto di discussione nel precedente capitolo 4, dove sono stati determinati risolvendo un sistema di equazioni le quali non erano altro che l'espressione della tensione σ_y caratterizzata per una serie di dati (σ_{yi}, r_i) misurati sulla bisettrice della cricca e ottenuti mediante analisi FEM. I valori calcolati per i parametri suddetti non sono però univoci, bensì, si è già visto, dipendono dai dati (σ_{yi}, r_i) presi in esame oltre che dal parametro

r_0 . Al parametro θ_0 , trascurato dagli autori del modello CJP (come si può notare confrontando le espressioni 5.1 con quelle riportate nell'articolo [14]), è stato, per coerenza alla proposta degli stessi autori, assegnato valore nullo.

Le espressioni 5.1 non valgono solo sulla bisettrice della cricca, bensì sono di validità generale. Risulta interessante quindi analizzare se e come queste sono in grado di riprodurre i campi di tensione σ_x , σ_y e τ_{xy} sulla bisettrice e fuori dalla bisettrice della cricca (cioè al variare dell'angolo θ). Al fine di eseguire tale analisi si adottano i valori dei parametri G , H ed E calcolati nel capitolo 4 (pertanto le analisi seguenti fanno riferimento alla medesima geometria, materiale e condizioni di carico già utilizzate nel capitolo 4 e descritte nel capitolo 3). Nel calcolare i suddetti parametri si erano considerati 2 casi nei quali si sceglievano le coppie (σ_{y_i}, r_i) in campo lineare elastico e un caso nel quale si sceglievano le coppie (σ_{y_i}, r_i) all'interno della regione plastica. Per questi casi era stata fissata la condizione $r_0=1\text{mm}$. Si erano considerati ulteriormente altri 3 casi, i quali differivano dai precedenti esclusivamente per la scelta del valore di r_0 , fissato a $r_0=r_p$ dove r_p corrisponde al valore del raggio plastico calcolato con la formula di Irwin (equazione 4.3). Complessivamente saranno quindi 6 i diversi casi presi in esame, pertanto saranno 6 le diverse serie di valori dei parametri r_0 , G , H ed E con i quali saranno plottati i campi di tensione σ_x , σ_y e τ_{xy} . I 6 gruppi di parametri suddetti sono già stati riassunti in tabella 4.21. La parte di questa tabella utile alle analisi che si intendono ora sviluppare è per comodità del lettore riportata qui di seguito.

Caso 1		Caso 2	
<i>r1</i>	0.21901	<i>r1</i>	0.21901
<i>r2</i>	0.46748	<i>r2</i>	0.46748
<i>r₀=1mm</i>		<i>r₀=r_p</i>	
<i>Risultati modello CJP</i>		<i>Risultati modello CJP</i>	
<i>G</i>	101.389386	<i>G</i>	110.838
<i>H</i>	-101.389386	<i>H</i>	-110.838
<i>E</i>	6.398028	<i>E</i>	6.398028
Caso 3		Caso 4	
<i>r1</i>	0.25941	<i>r1</i>	0.25941
<i>r2</i>	0.5106	<i>r2</i>	0.5106
<i>r₀=1mm</i>		<i>r₀=r_p</i>	
<i>Risultati modello CJP</i>		<i>Risultati modello CJP</i>	
<i>G</i>	99.97436	<i>G</i>	107.1228
<i>H</i>	-99.9744	<i>H</i>	-107.123
<i>E</i>	4.840501	<i>E</i>	4.840501

<i>Caso 5</i>		<i>Caso 6</i>	
<i>r1</i>	0.21901	<i>r1</i>	0.21901
<i>r2</i>	0.0565	<i>r2</i>	0.0565
<i>r₀=1mm</i>		<i>r₀=r_p</i>	
<i>Risultati modello CJP</i>		<i>Risultati modello CJP</i>	
<i>G</i>	99.23166	<i>G</i>	102.0605
<i>H</i>	-99.2317	<i>H</i>	-102.06
<i>E</i>	1.915493	<i>E</i>	1.915493

Tabella 5.1 Valori dei coefficienti G, H ed E determinati nel capitolo 4.

5.2 Calcolo della T-stress

Prima di passare all'analisi dei campi di tensione è utile fare un'osservazione relativamente all'espressione della tensione σ_x . In quest'ultima compare la costante C, che invece risulta essere assente nelle espressioni della τ_{xy} e della σ_y , espressione quest'ultima che era stata utilizzata per la determinazione dei valori dei coefficienti G, H ed E nei 6 casi prima descritti. Al fine della riproduzione dei campi di tensione σ_x mediante il modello CJP si ha la necessità quindi di determinare il valore del parametro C ancora incognito. A tal proposito, gli autori del modello affermano che il valore di tale parametro C è pari all'opposto della tensione T-stress, cioè che $C = -T$ dove $T = T\text{-stress}$ [13-14]. Per proseguire nelle analisi è necessario pertanto determinare il valore della T-stress. Essendo quest'ultima grandezza una caratteristica del comportamento lineare elastico, per la sua determinazione si è utilizzata la medesima geometria e le medesime proprietà del materiale adottate per la determinazione dei coefficienti G, H ed E nel capitolo 4, conducendo però non un'analisi elastoplastica, bensì impostando l'analisi sulla base di un comportamento lineare elastico del materiale. La T-stress è stata calcolata come da definizione sulla bisettrice della cricca mediante la relazione:

$$T - stress = \sigma_x^{l.e.} - \sigma_y^{l.e.} \quad (5.2)$$

Sono stati quindi determinati i valori delle tensioni σ_x e σ_y su ogni nodo situato sulla bisettrice della cricca ed in riferimento ad ogni nodo sono stati sottratti i valori di σ_x e σ_y (come da definizione) misurati sul nodo in esame. Si è determinato successivamente il valore medio assunto dalla T-stress sui nodi della bisettrice dove essa assumeva un valore circa costante. Tutto ciò ha permesso quindi la determinazione della costante C. Essendo infatti $C = -T$ ed avendo determinato $T \cong -27 \text{ MPa}$ risulta $C \cong 27 \text{ MPa}$.

Si riporta qui di seguito per completezza un grafico raffigurante il valore assunto dalla T-stress sui nodi situati sulla bisettrice della cricca.

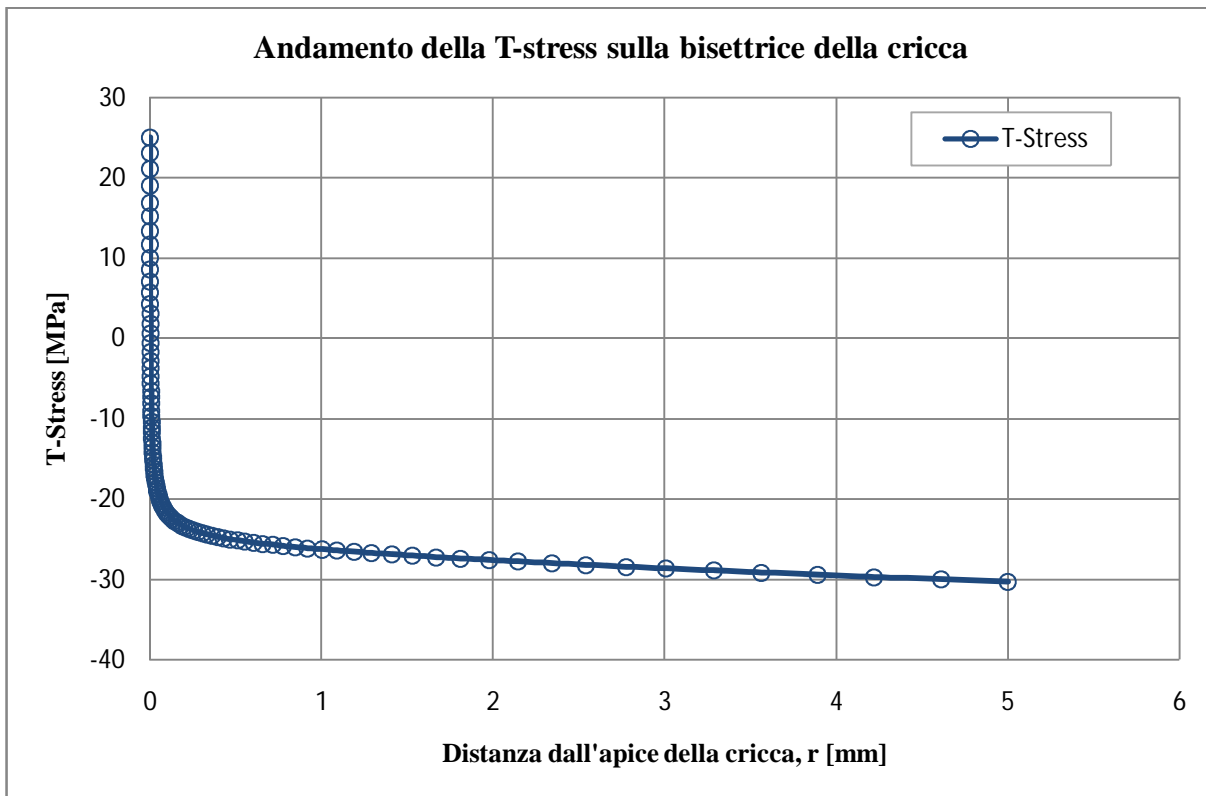


Figura 5.1 Andamento della T-stress. Tale andamento è stato calcolato utilizzando la definizione di T-Stress, mentre i dati necessari sono stati determinati eseguendo una analisi FEM lineare elastica e misurati sulla bisettrice.

5.3 Plotaggio dei campi di tensione

Si hanno ora a disposizione tutti i valori di tutti i coefficienti che compaiono nelle 5.1. E' pertanto possibile, al variare dell'angolo θ , plottare i campi di tensione che risultano dalle 5.1 sostituendovi al posto dei coefficienti i corrispettivi valori riassunti in tabella 5.1. Nello specifico di seguito si farà riferimento a 4 particolari angoli θ . Precisamente:

- $\theta = 0^\circ$
- $\theta = 22,5^\circ$
- $\theta = 45^\circ$
- $\theta = 67,5^\circ$

La particolare scelta di tali angoli lungo i quali eseguire le analisi è dovuta essenzialmente per motivi di comodità nella presentazione dei risultati e soprattutto nella verifica dell'affidabilità e capacità del modello CJP di riprodurre i campi di tensione sulla bisettrice e fuori dalla bisettrice. I risultati verranno mostrati infatti come confronto tra le distribuzioni di tensione ottenute appunto dalle 5.1 e quelle ottenute da analisi FEM elastoplastiche, misurate lungo delle rette inclinate esattamente di angoli θ prima elencati. I valori degli angoli $\theta=45^\circ$ e dei più inconsueti $\theta=22,5^\circ$ e $\theta=67,5^\circ$ sono dovuti proprio alla necessità di verificare l'affidabilità

del modello tramite confronto con analisi FEM. Lungo tali direzioni infatti la mesh adottata risulta avere una densità di nodi più elevata e pertanto prendere in considerazione queste direzioni consente di ottenere una mole di dati maggiore e più precisi sui quali realizzare confronti tra modello analitico CJP e modello numerico FEM.

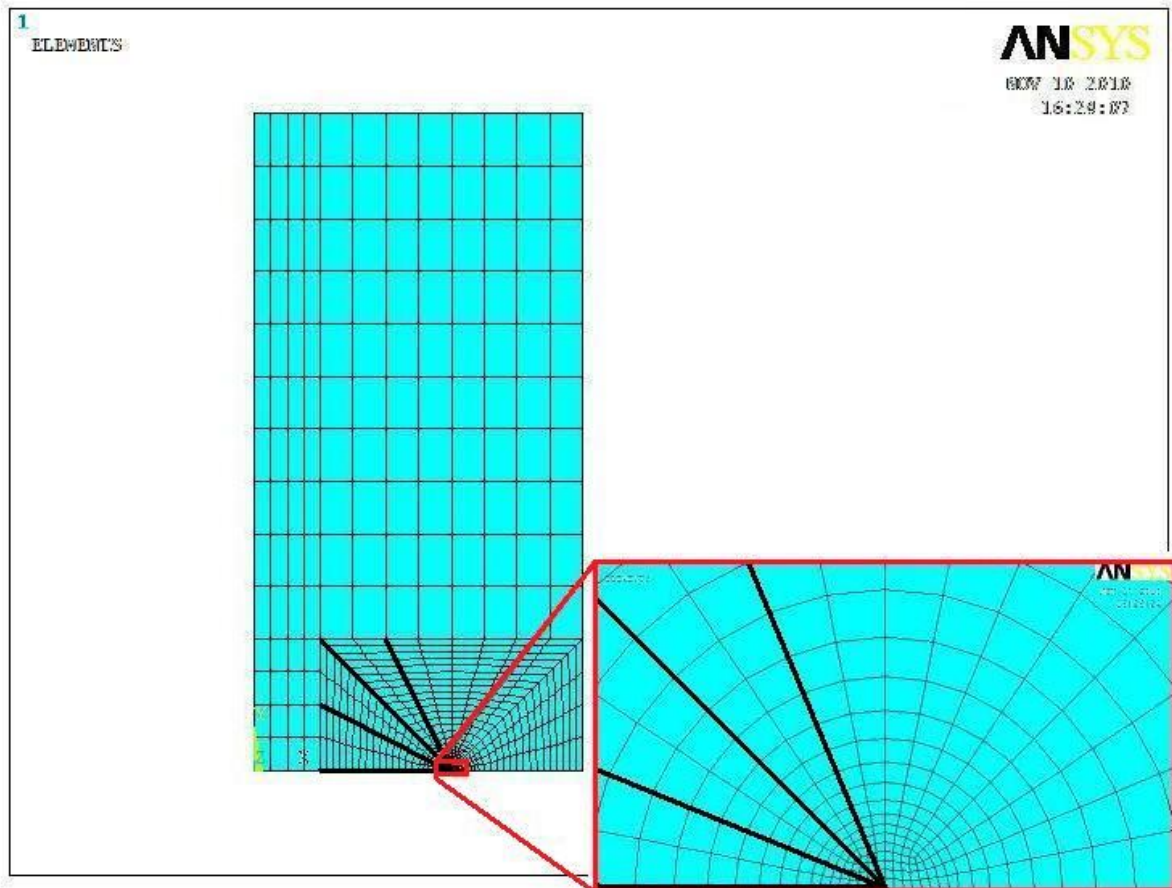


Figura 5.2 Immagine raffigurante la geometria meshata usata nelle analisi in esame e uno zoom dell'apice della cricca. Sono evidenziate in nero le linee lungo le quali sono state determinate, mediante analisi FEM (con comportamento kinematic hardening a simulare le caratteristiche del materiale), le tensioni σ_x , σ_y e τ_{xy} utilizzate per la verifica dell'affidabilità delle espressioni delle tensioni del modello CJP nel riprodurre i campi di tensione prima citati.

5.3.1 Plottaggio dei campi di tensione sulla bisettrice ($\theta=0^\circ$)

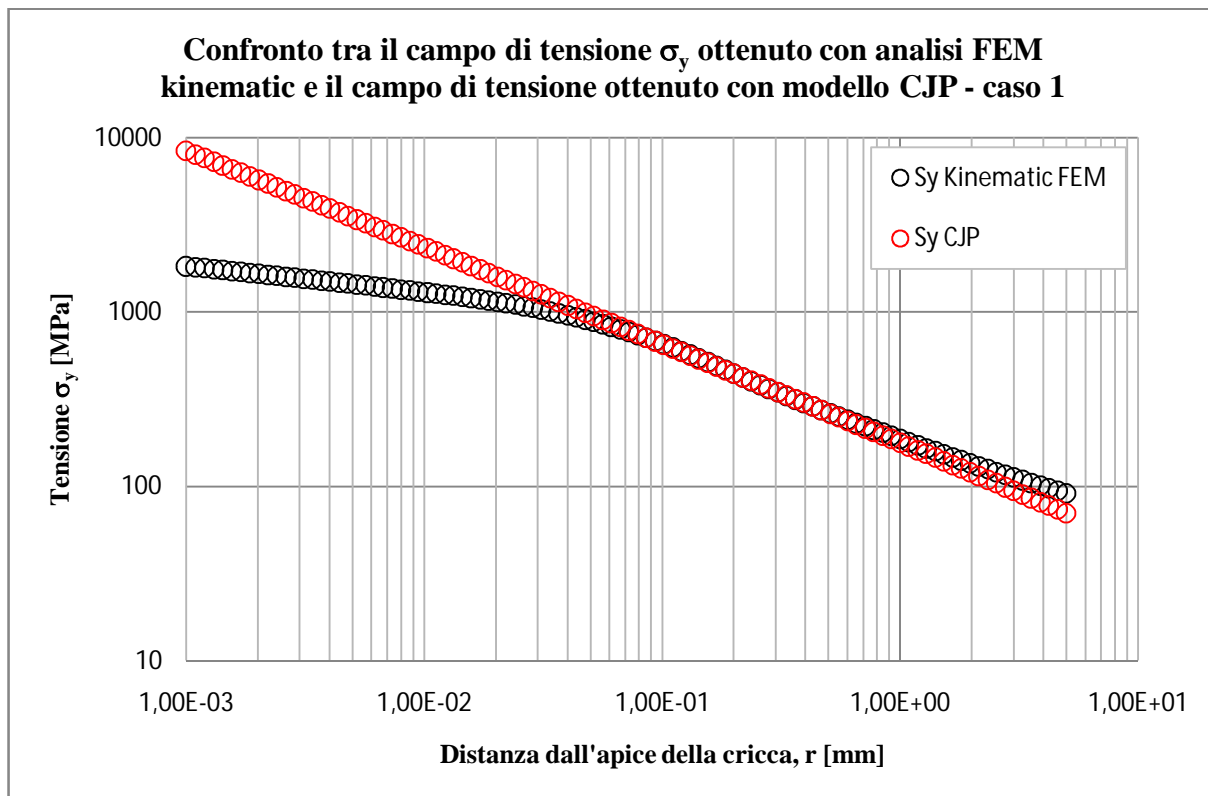


Figura 5.3 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato sulla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=0^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 1 di tabella 5.1.

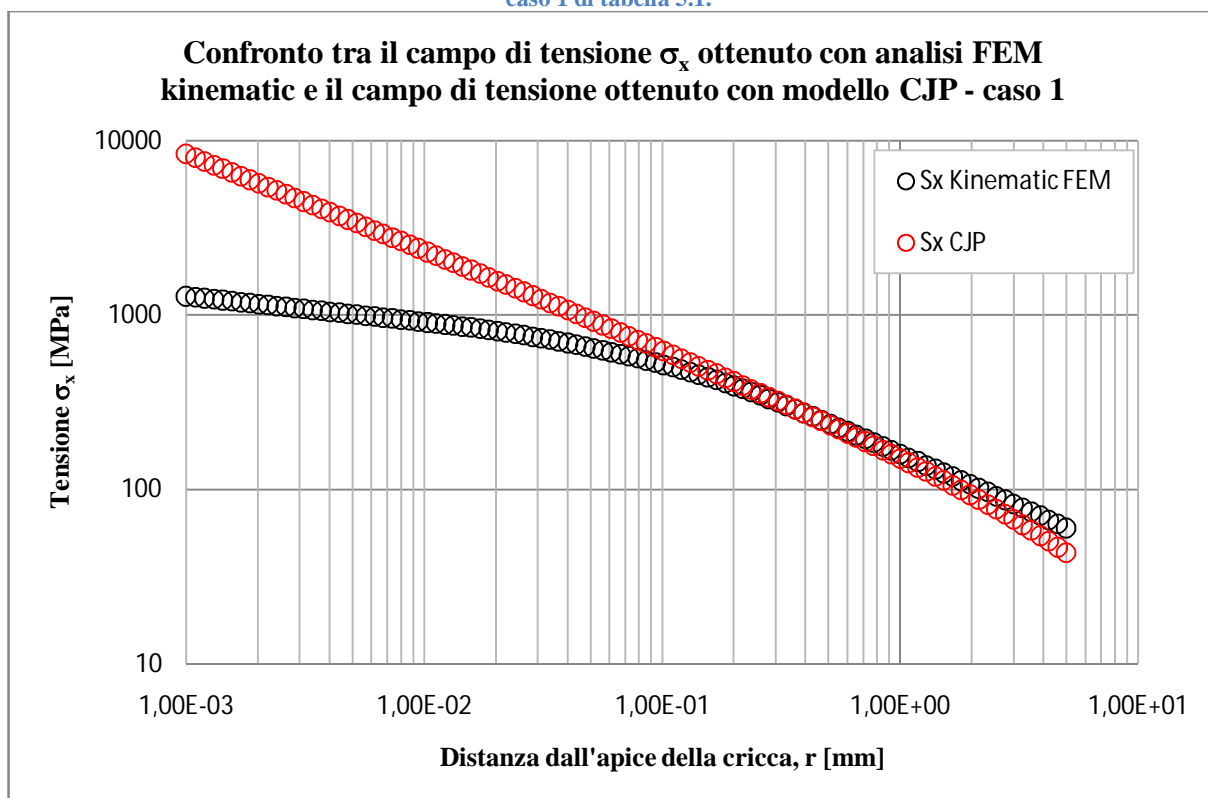


Figura 5.4 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato sulla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=0^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 1 di tabella 5.1.

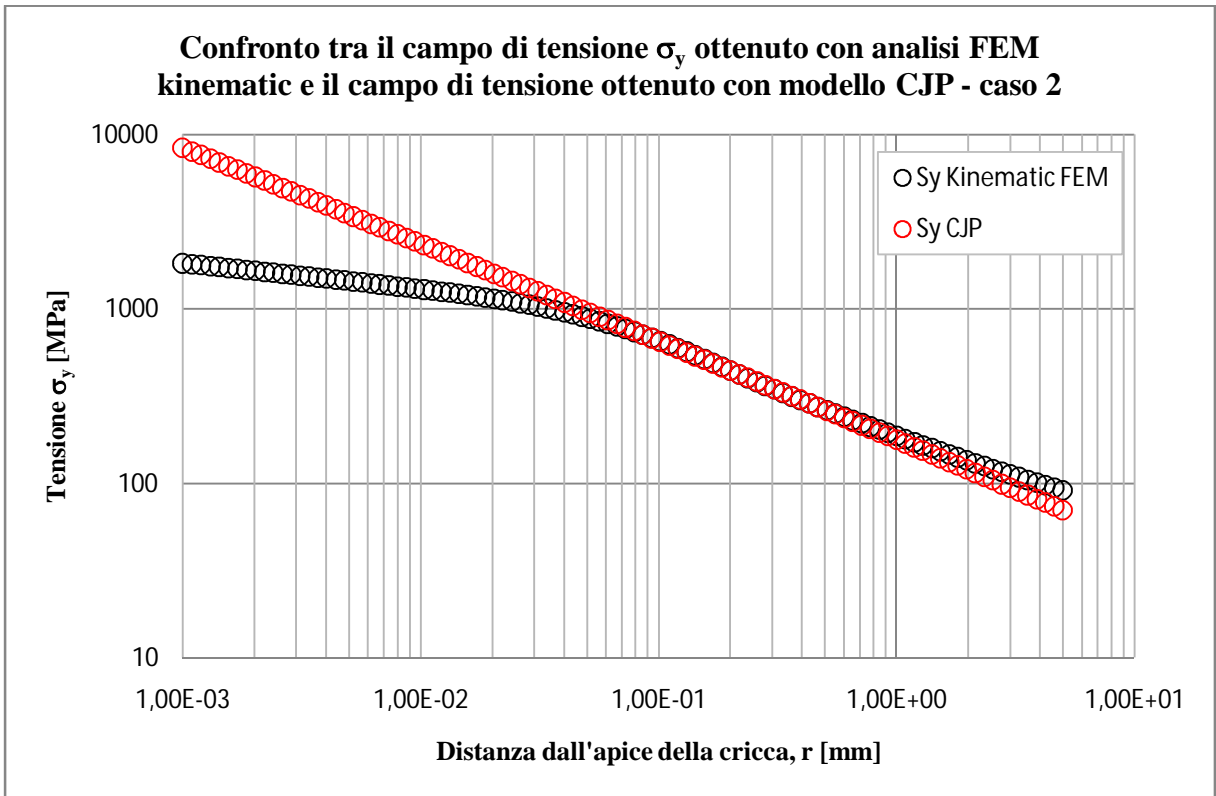


Figura 5.5 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato sulla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=0^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 2 di tabella 5.1.

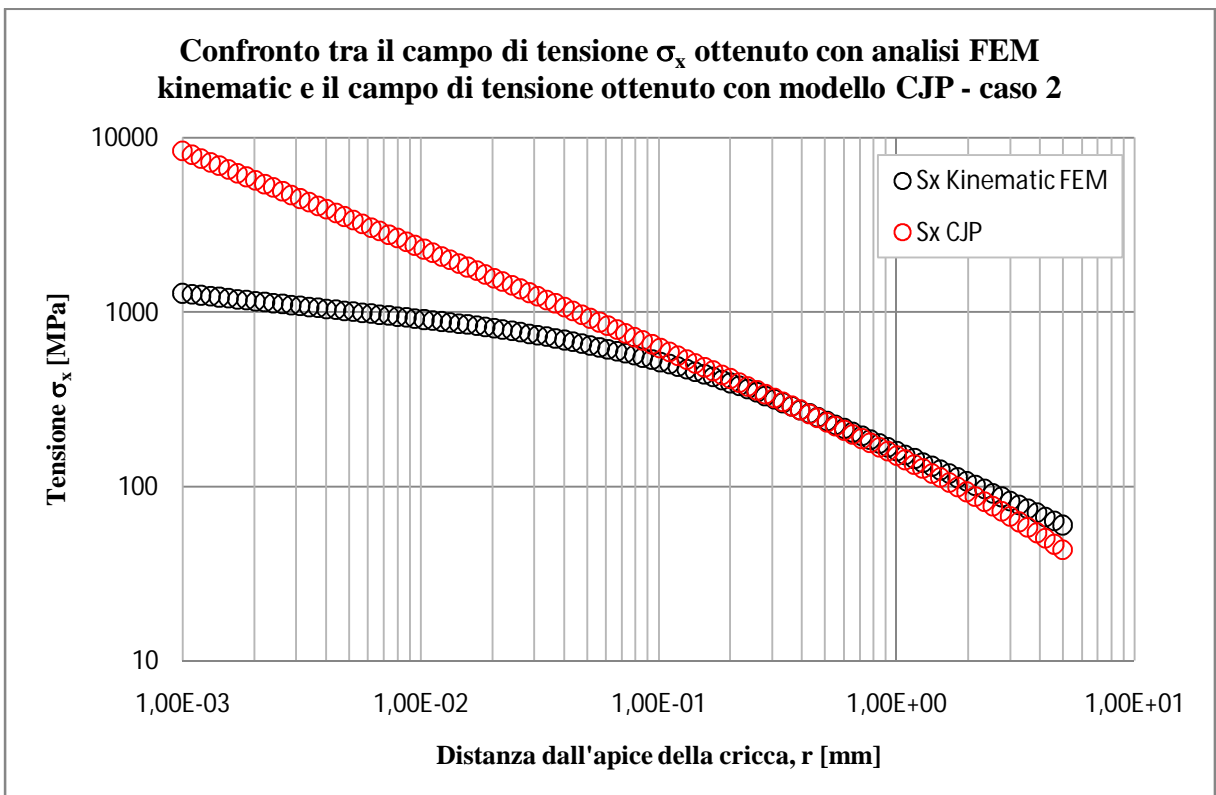


Figura 5.6 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato sulla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=0^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 2 di tabella 5.1.

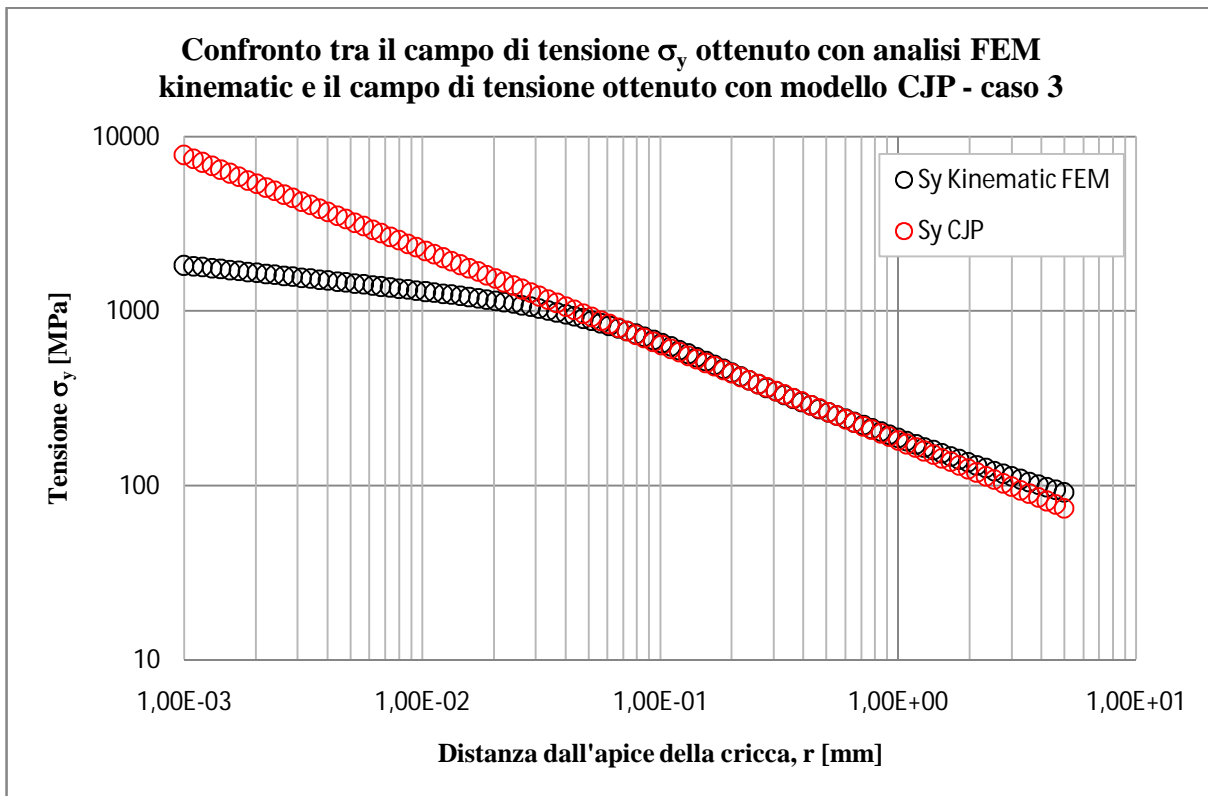


Figura 5.7 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato sulla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=0^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 3 di tabella 5.1.

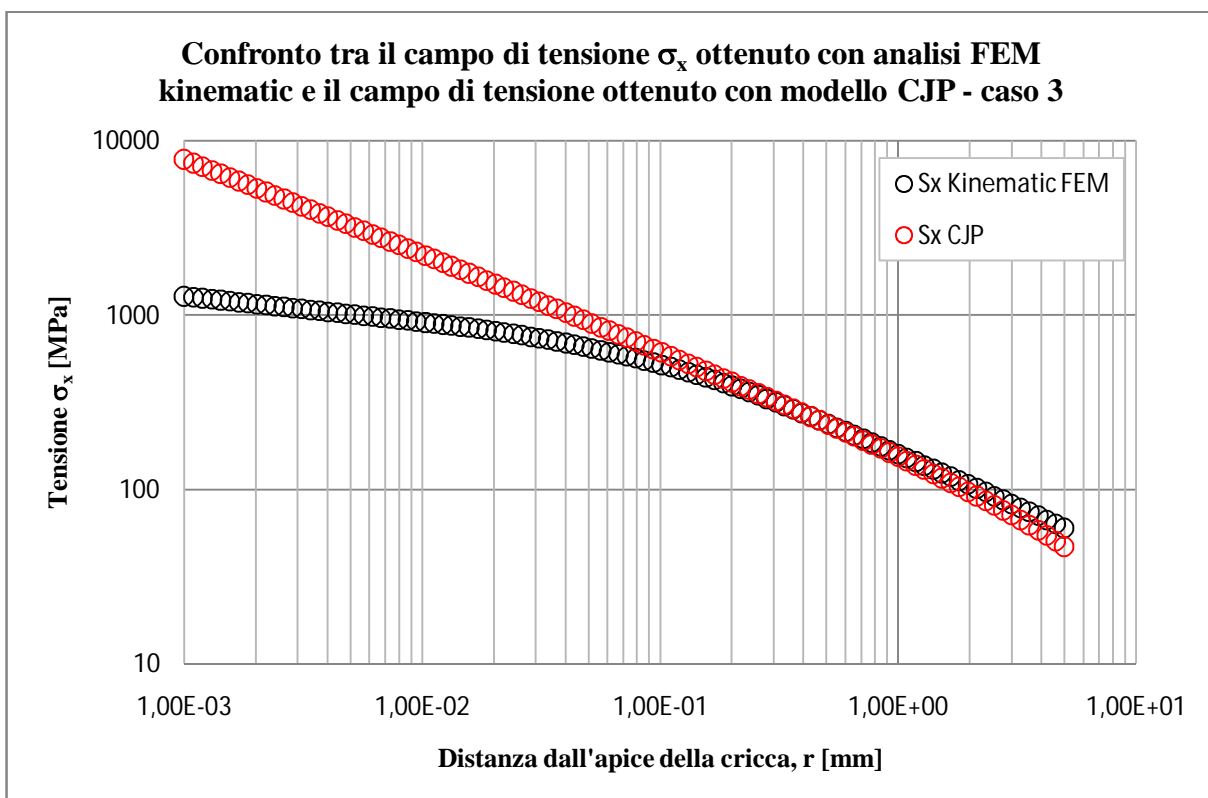


Figura 5.8 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato sulla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=0^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 3 di tabella 5.1.

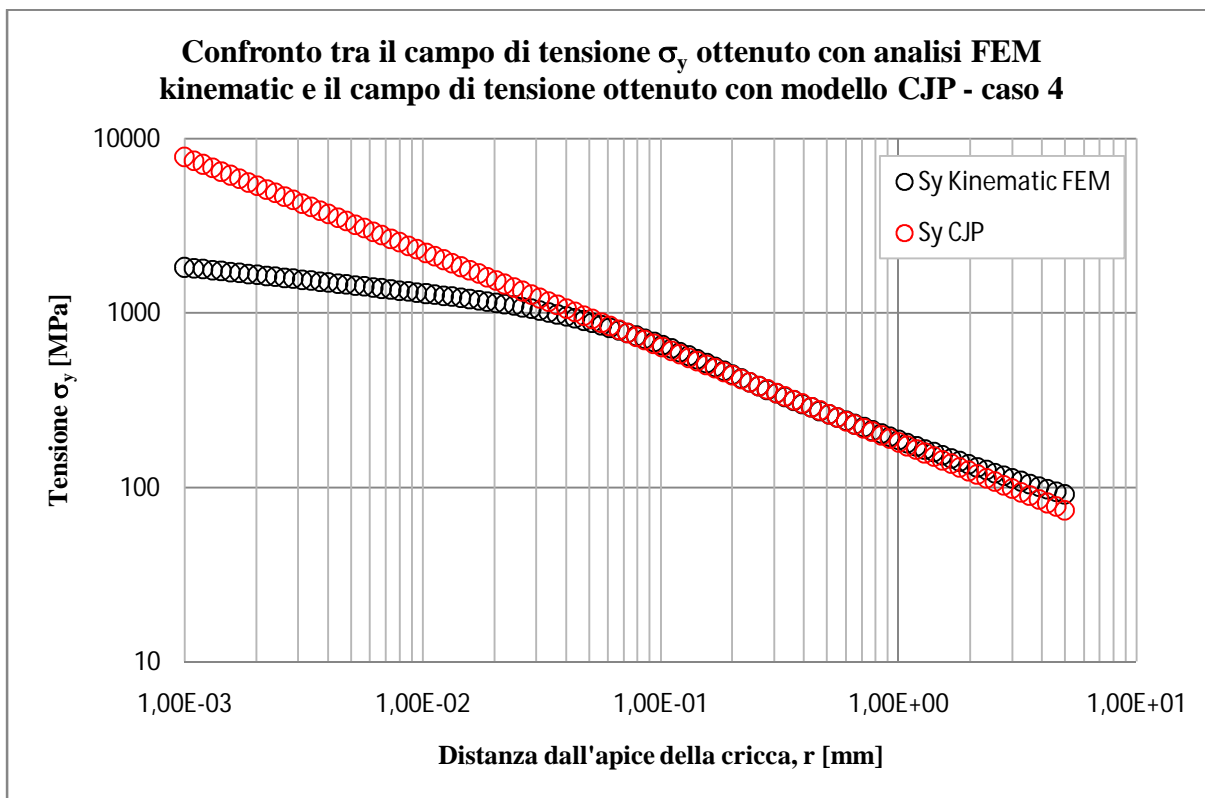


Figura 5.9 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato sulla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=0^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 4 di tabella 5.1.

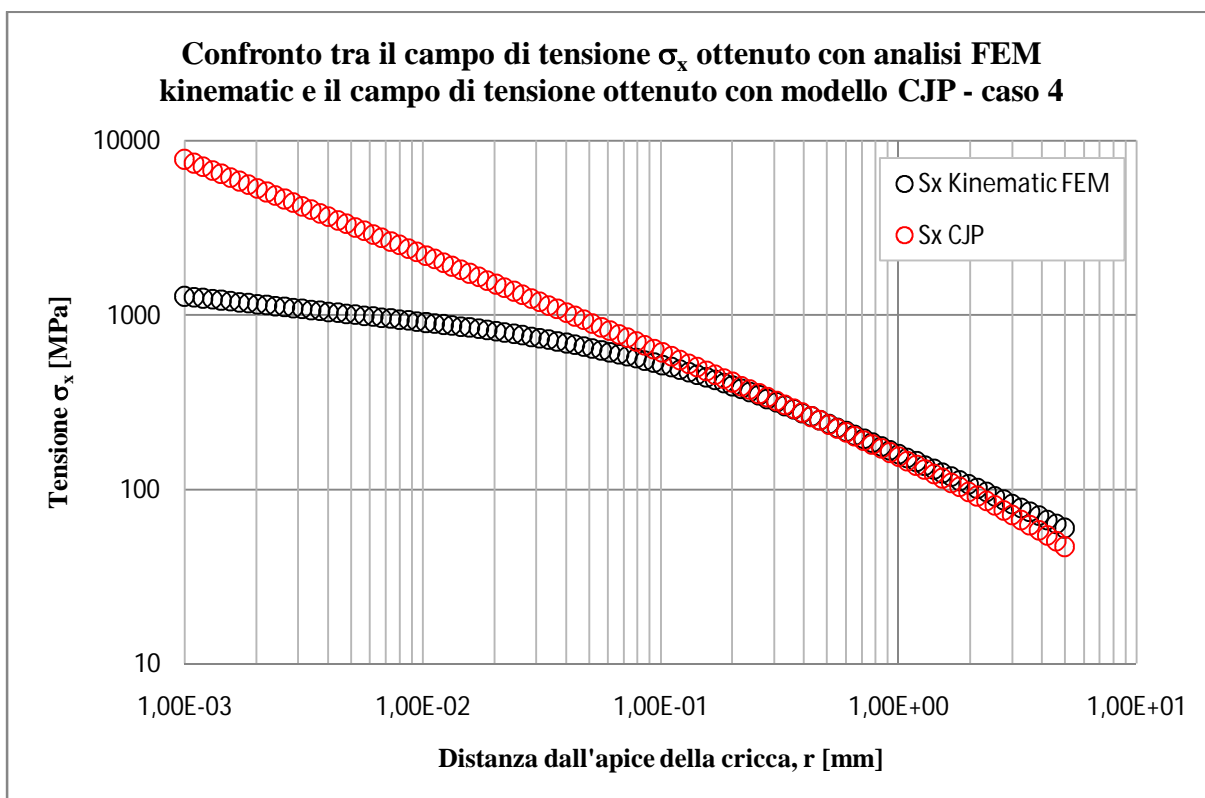


Figura 5.10 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato sulla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=0^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 4 di tabella 5.1.

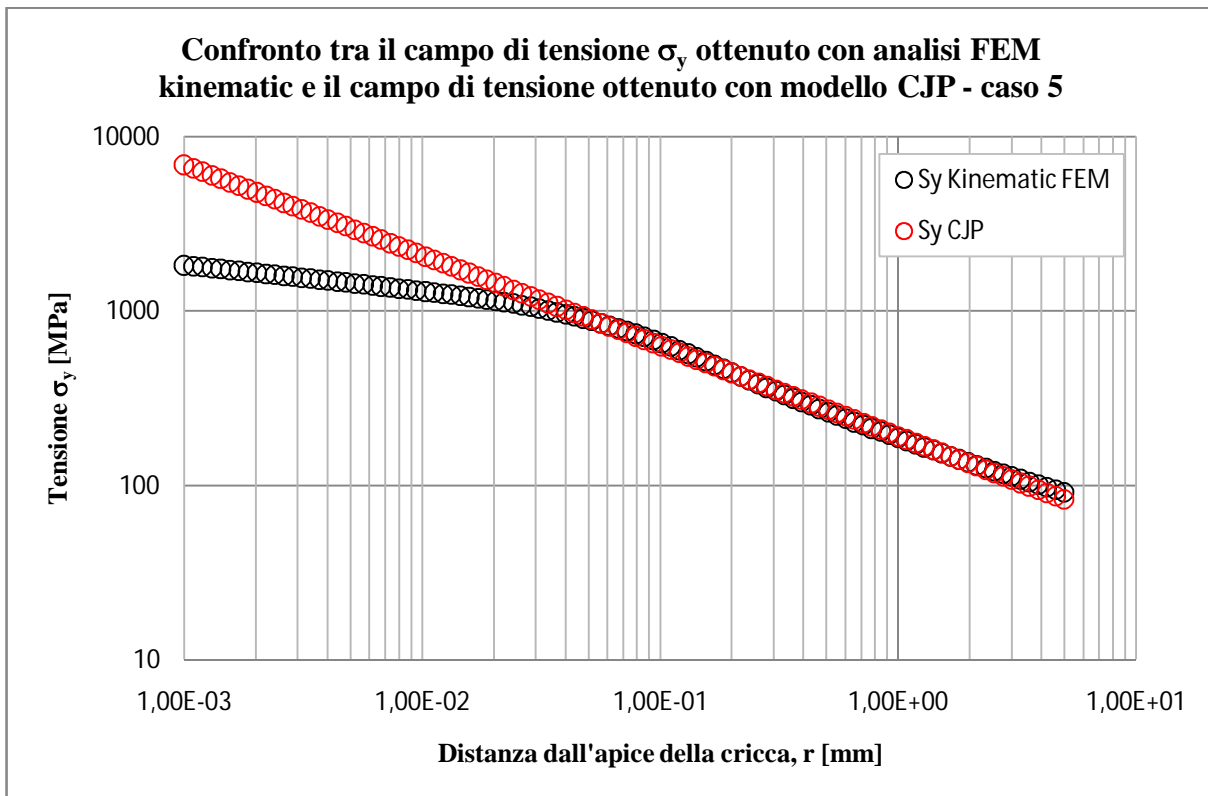


Figura 5.11 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato sulla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=0^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1.

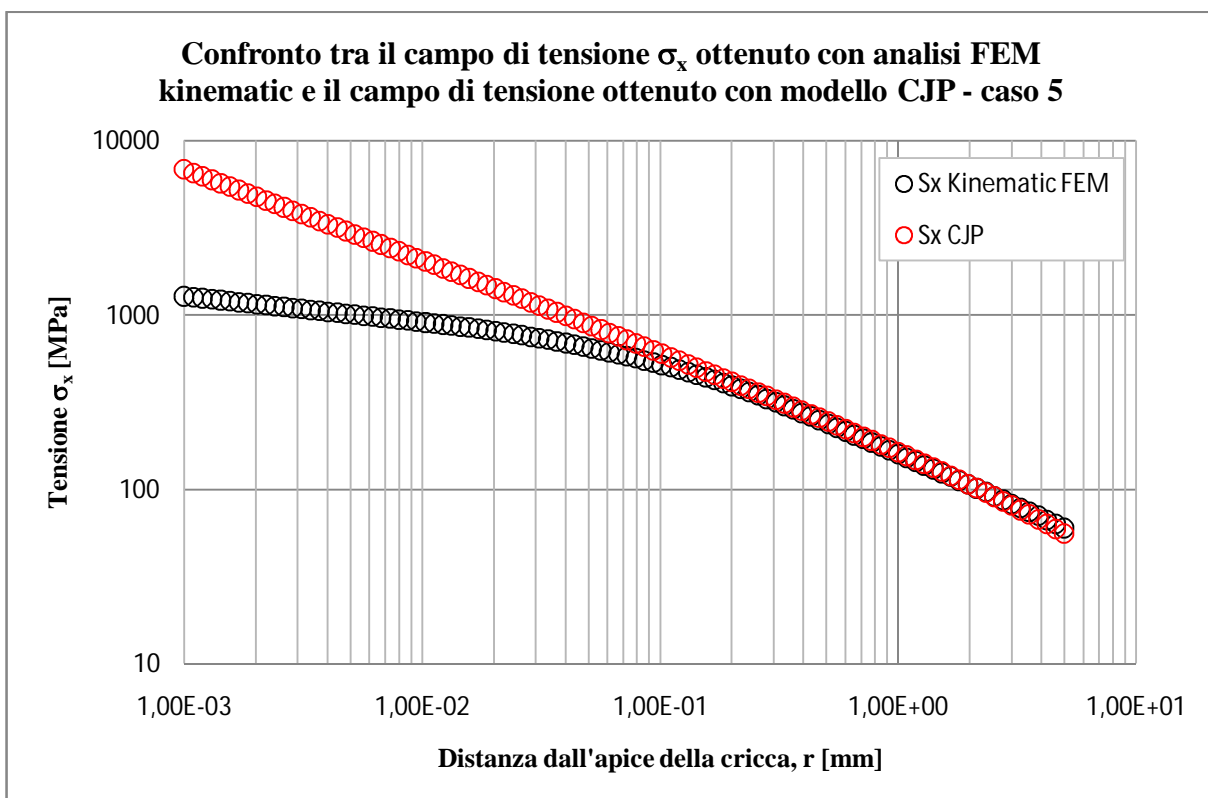


Figura 5.12 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato sulla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=0^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1.

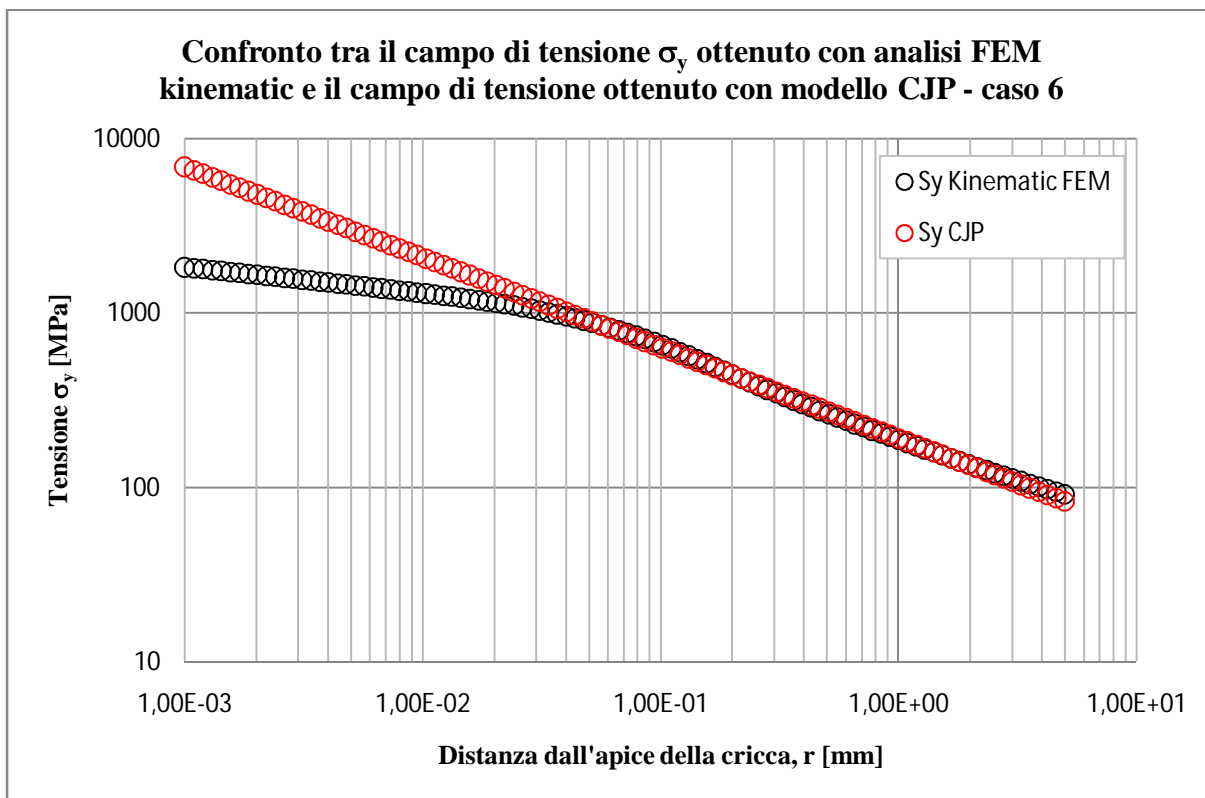


Figura 5.13 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato sulla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=0^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 6 di tabella 5.1.

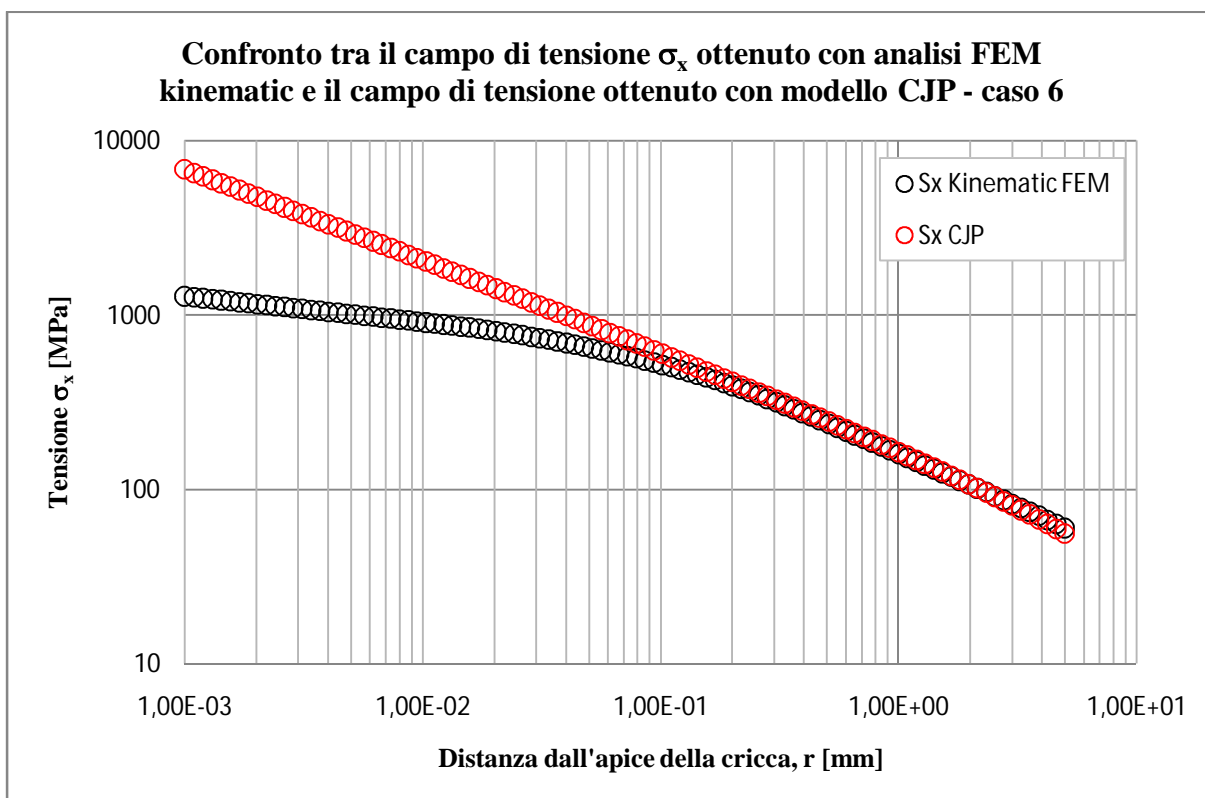


Figura 5.14 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato sulla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=0^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 6 di tabella 5.1.

5.3.2 Plottaggio dei campi di tensione sulla direzione inclinata di $\theta=22,5^\circ$

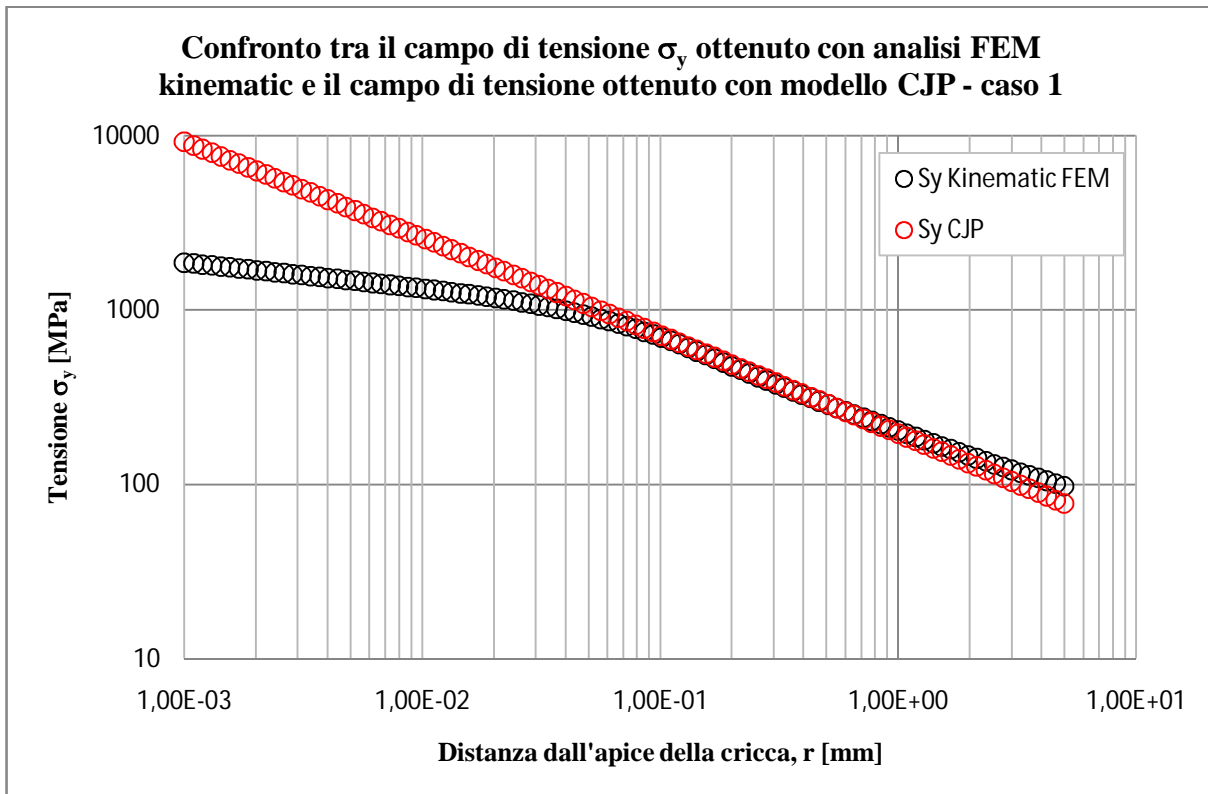


Figura 5.15 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 1 di tabella 5.1.

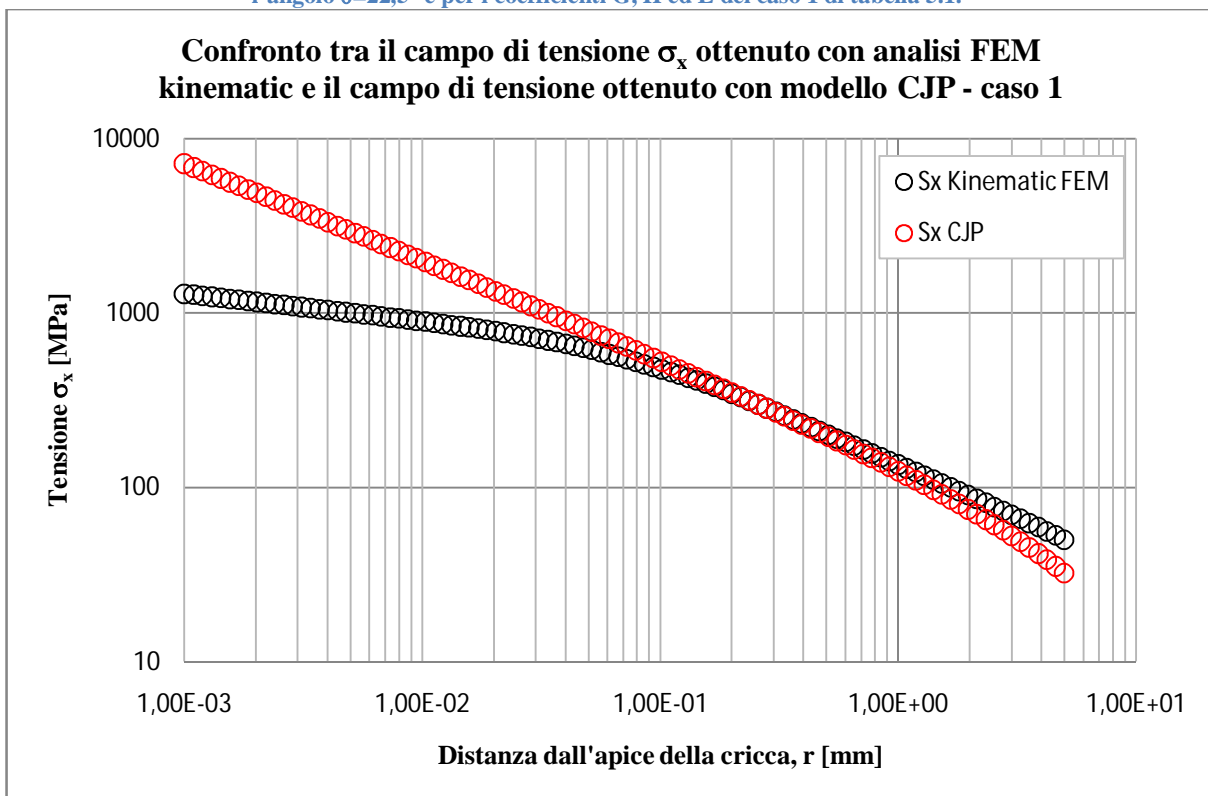


Figura 5.16 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 1 di tabella 5.1.

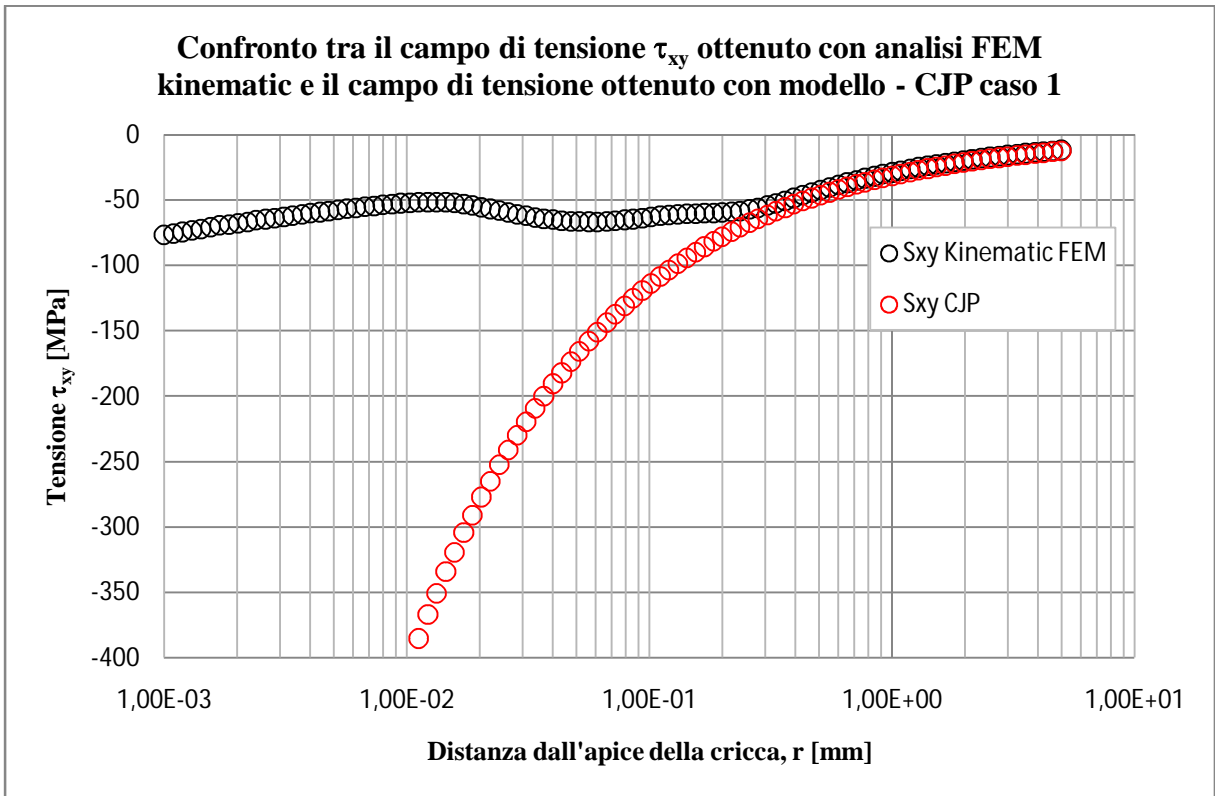


Figura 5.17 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 1 di tabella 5.1.

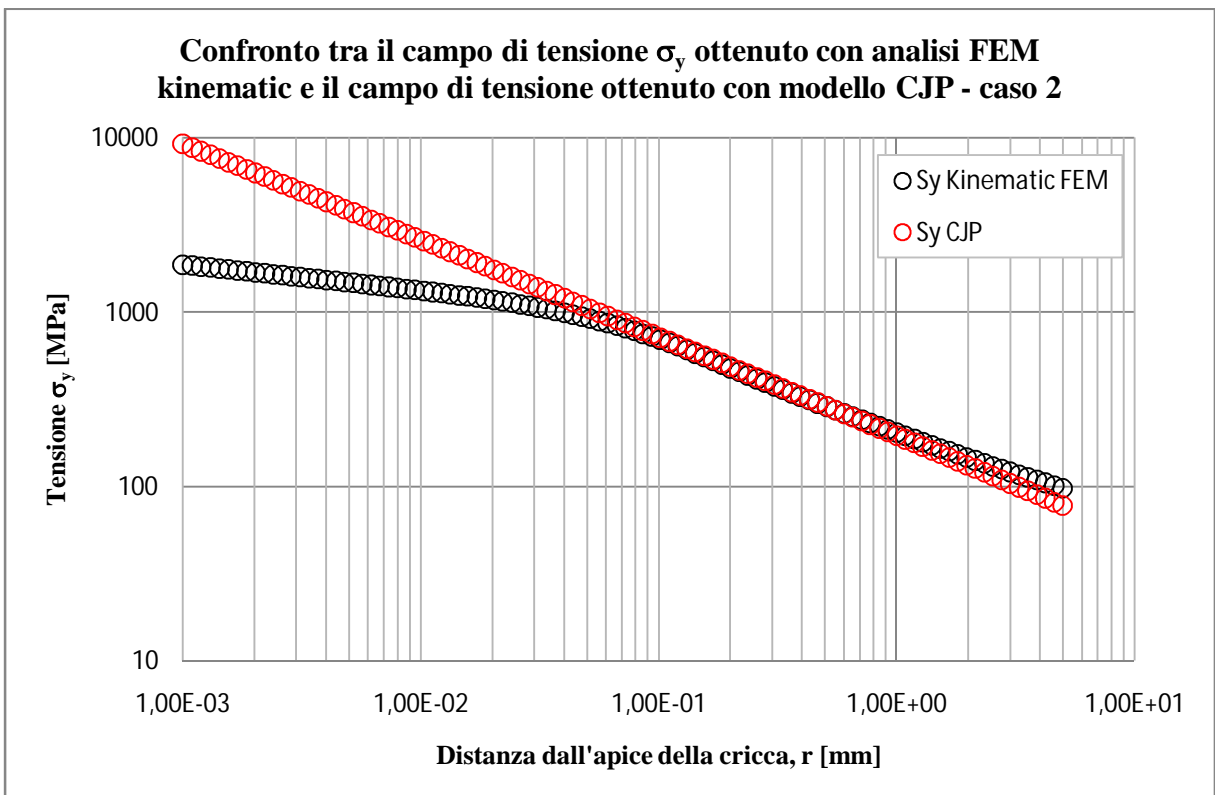


Figura 5.18 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 2 di tabella 5.1.

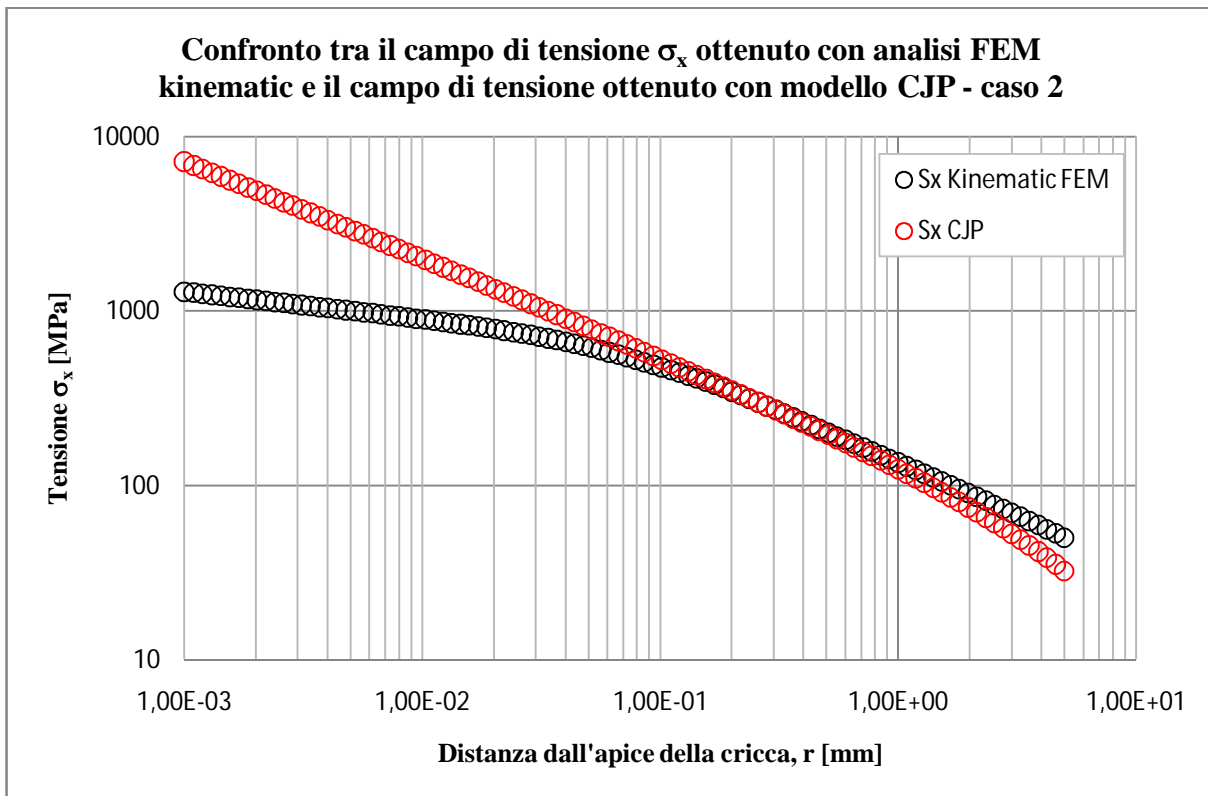


Figura 5.19 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 2 di tabella 5.1.

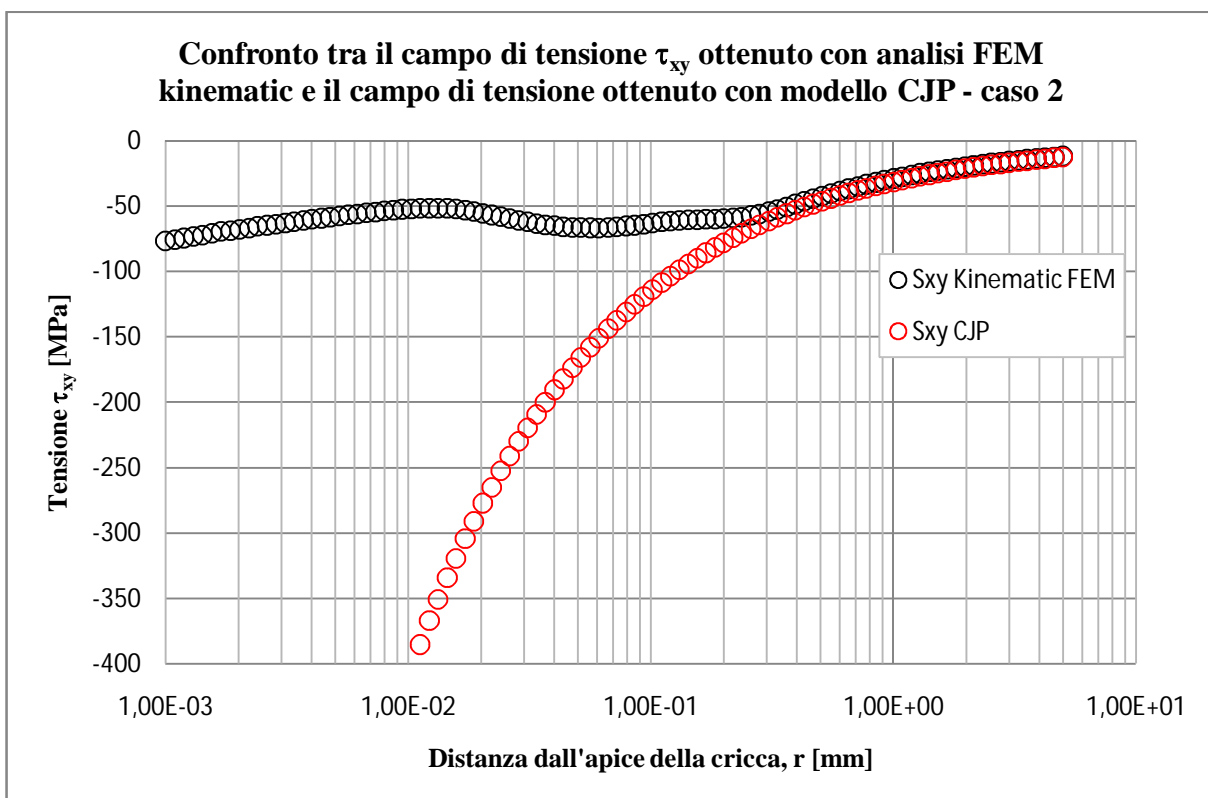


Figura 5.20 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 2 di tabella 5.1.

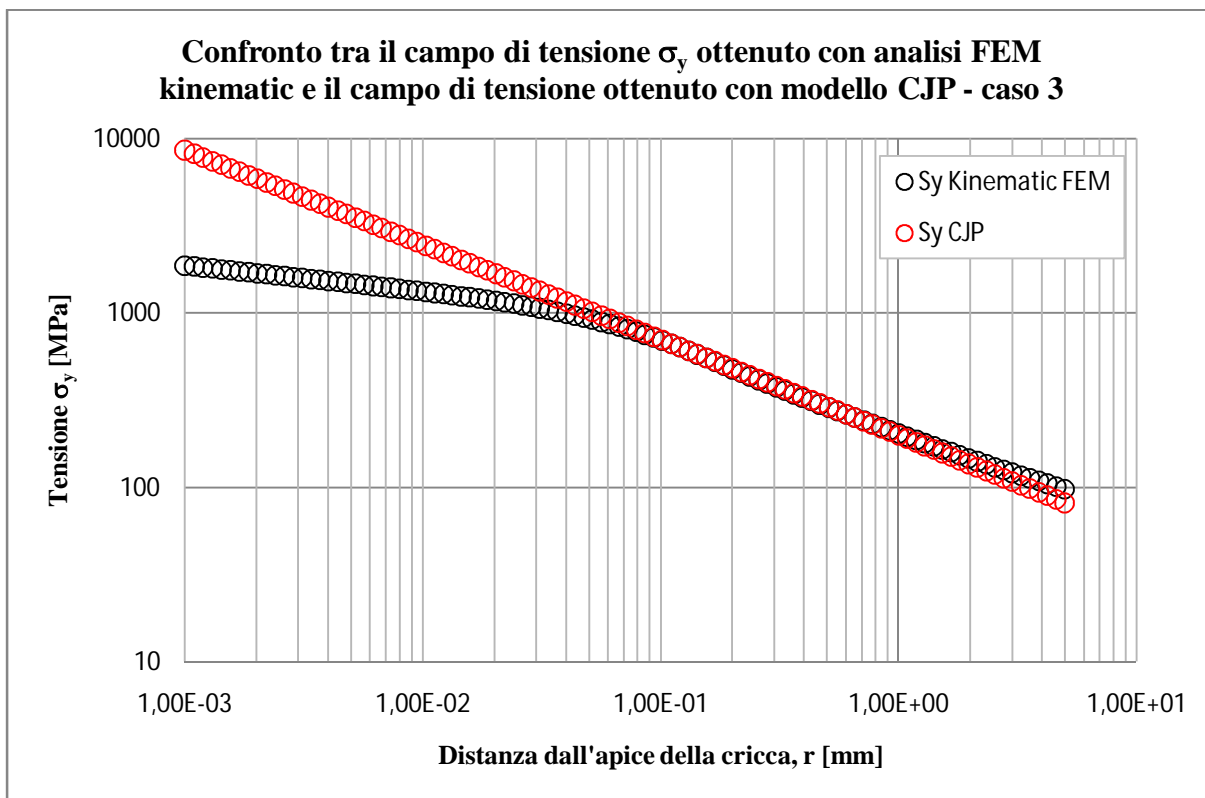


Figura 5.21 Confronto tra il campo di tensione σ_y , misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 3 di tabella 5.1.

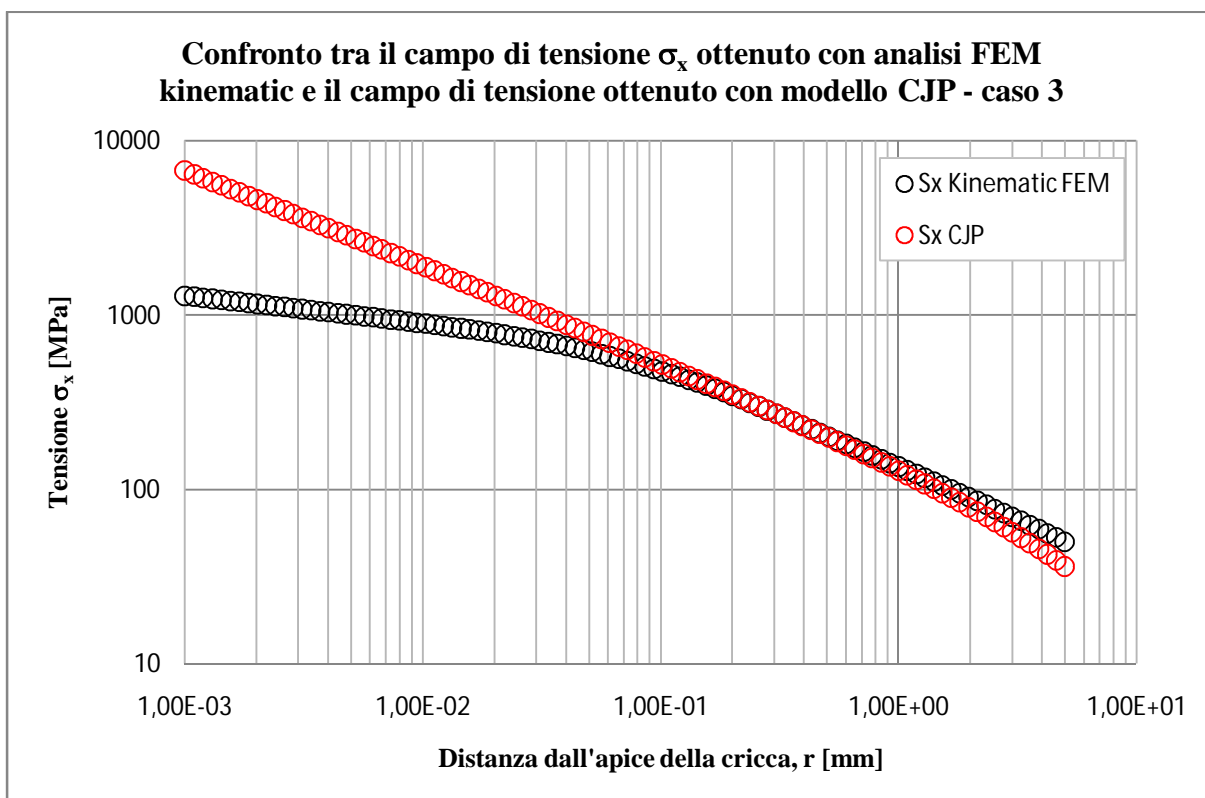


Figura 5.22 Confronto tra il campo di tensione σ_x , misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 3 di tabella 5.1.

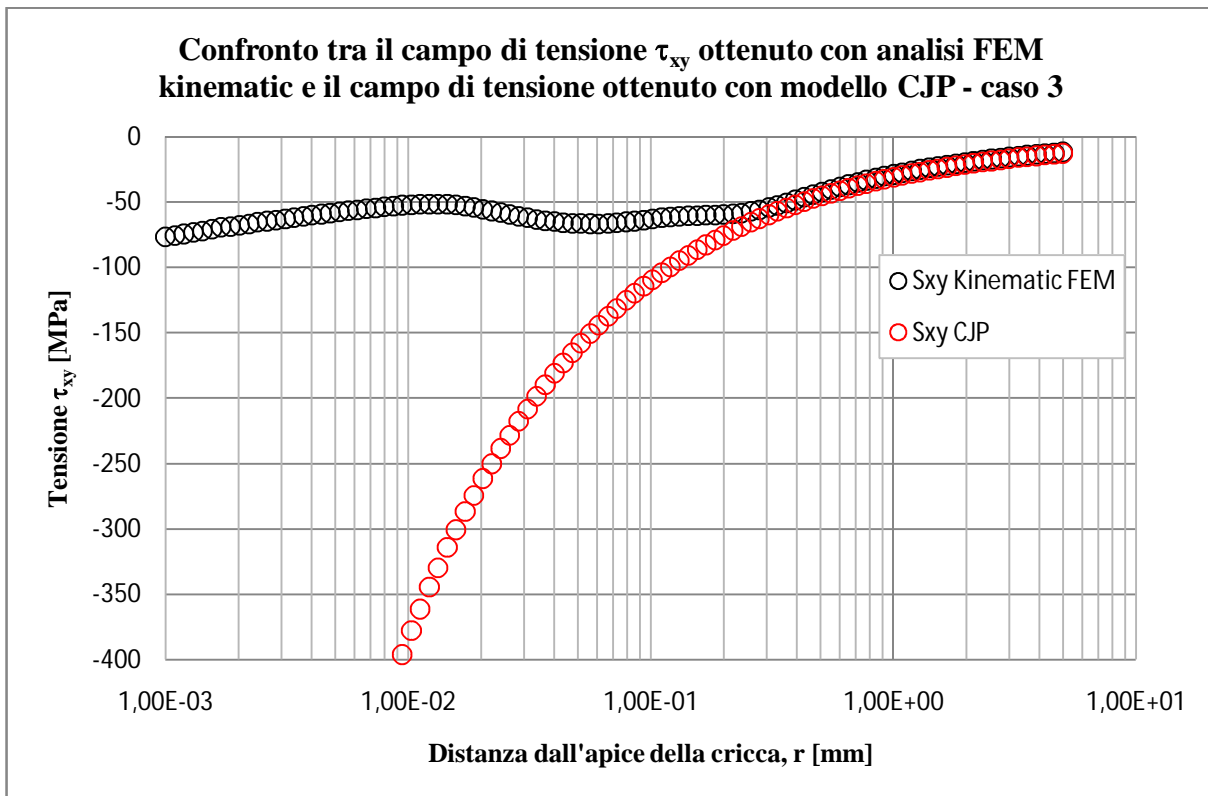


Figura 5.23 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 3 di tabella 5.1.

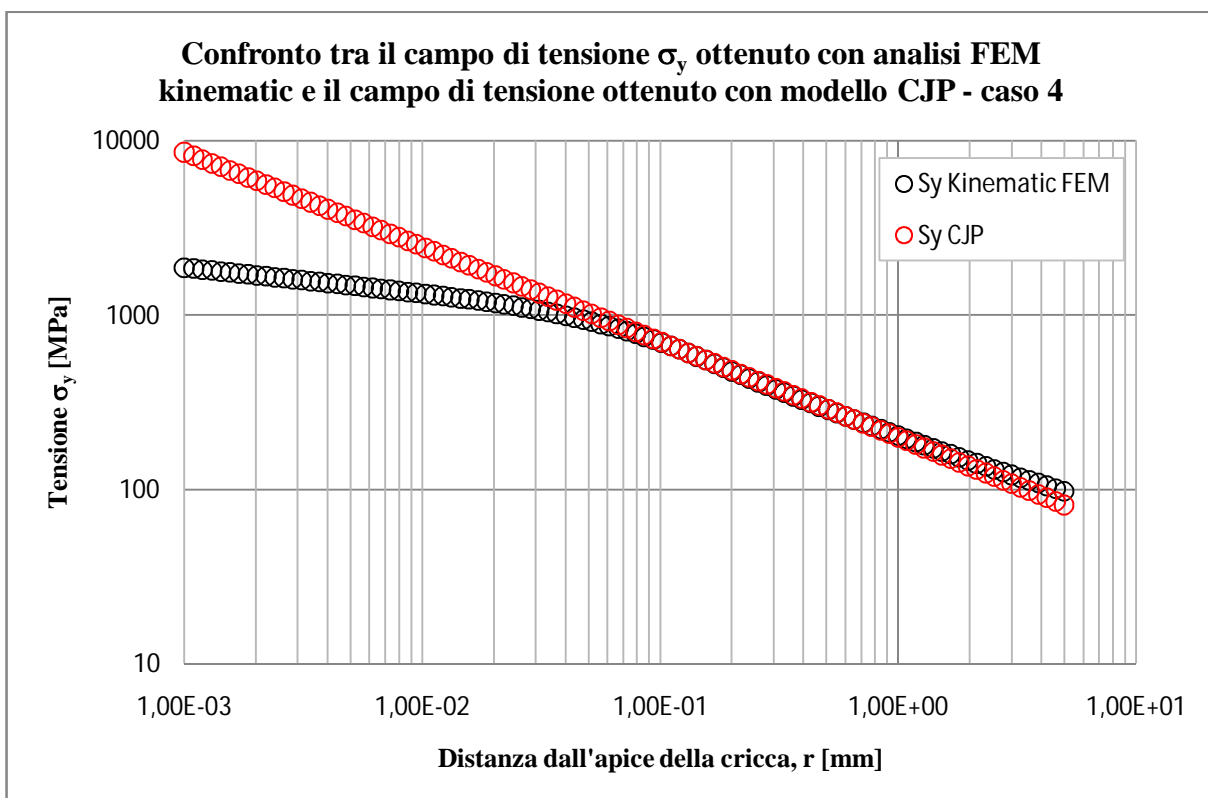


Figura 5.24 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 4 di tabella 5.1.

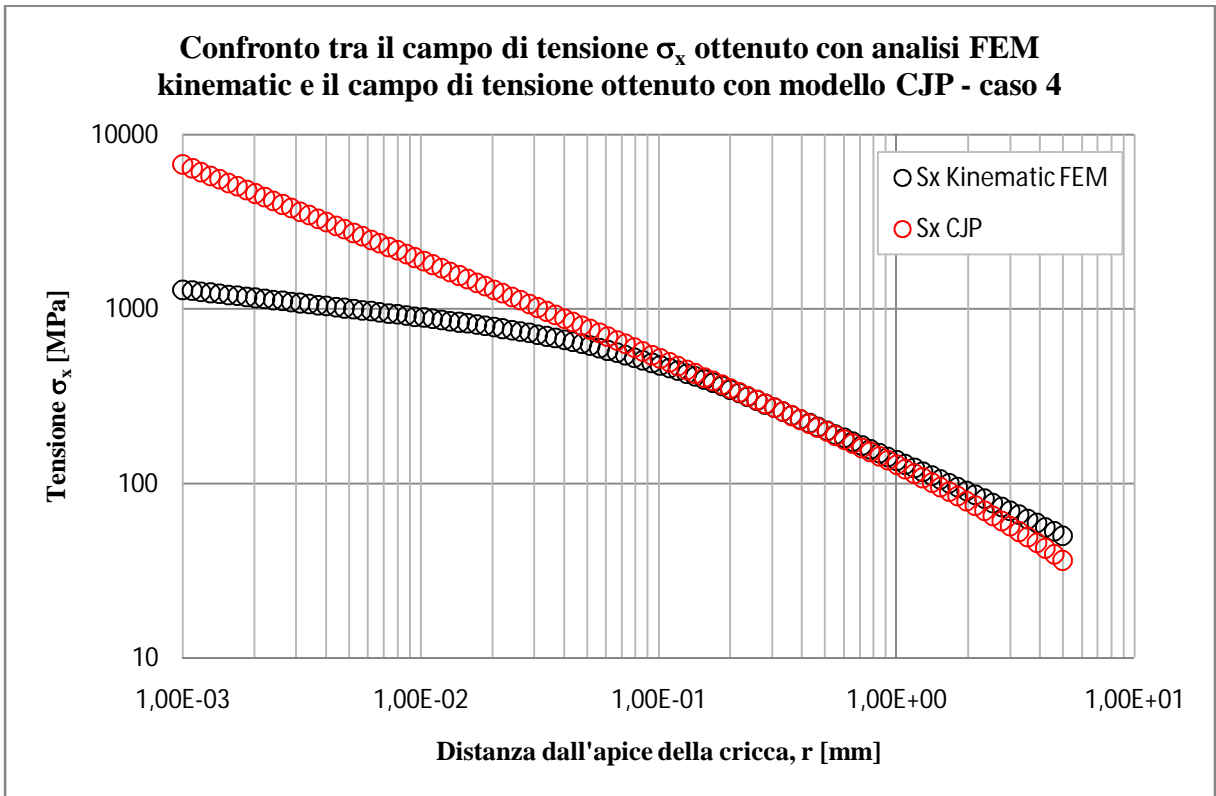


Figura 5.25 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 4 di tabella 5.1.

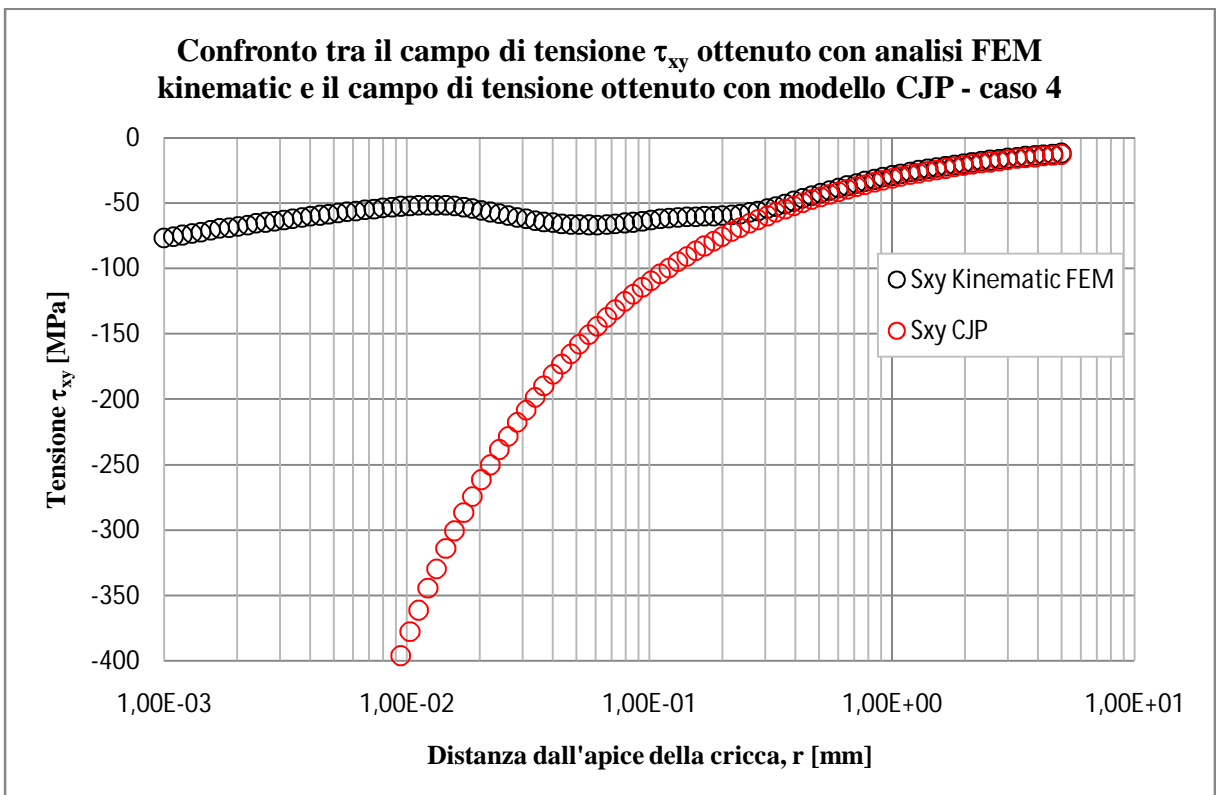


Figura 5.26 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 4 di tabella 5.1.

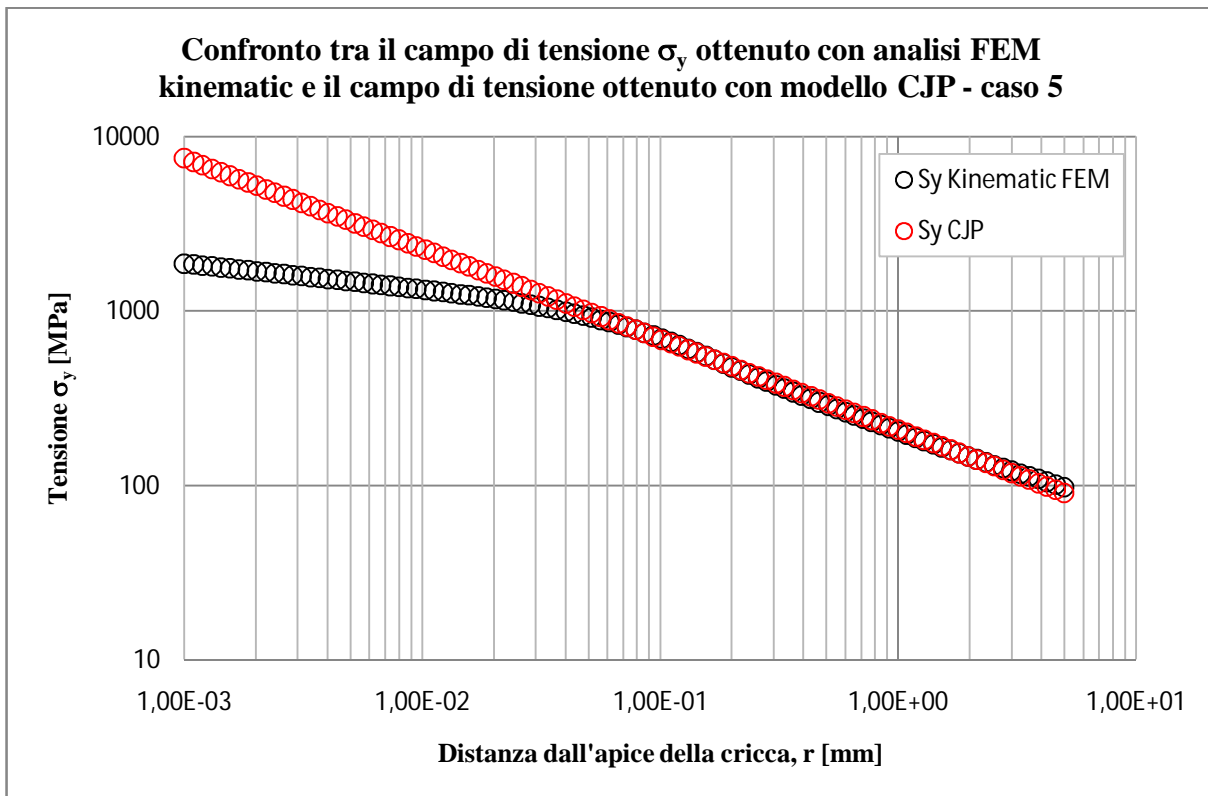


Figura 5.27 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1.

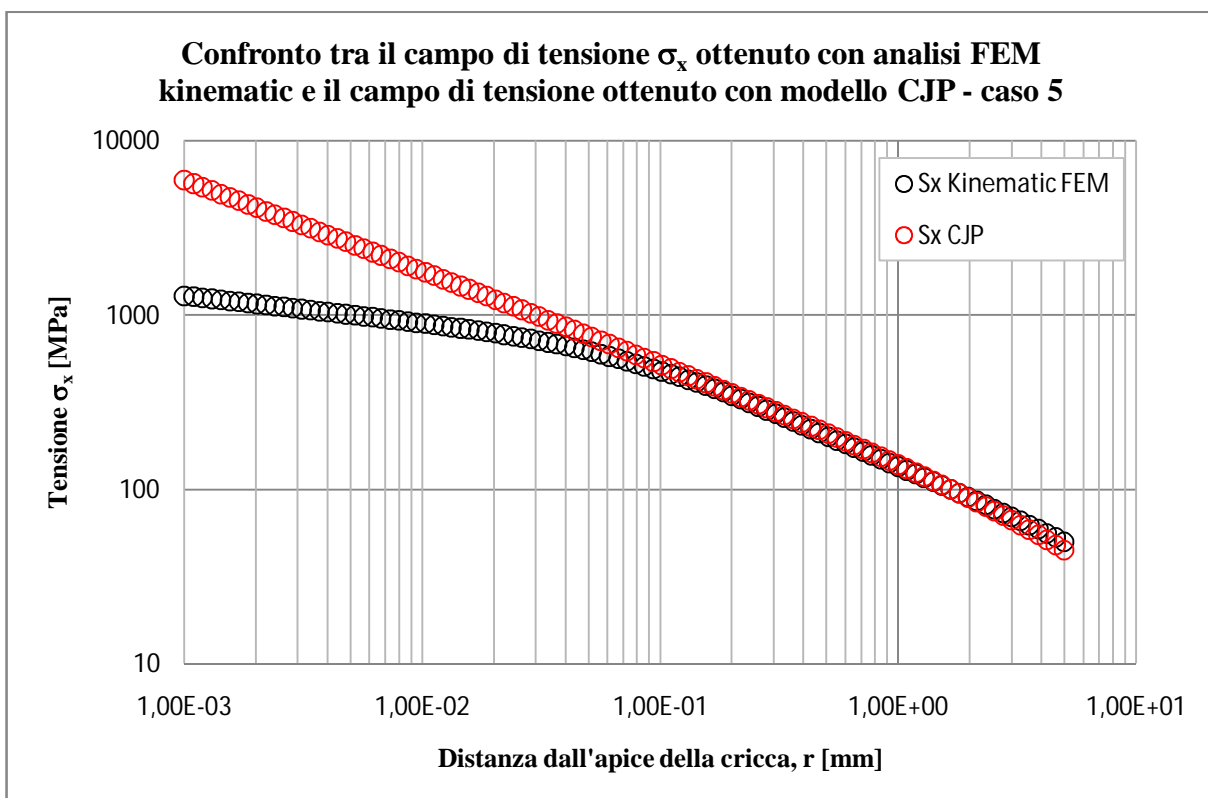


Figura 5.28 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1.

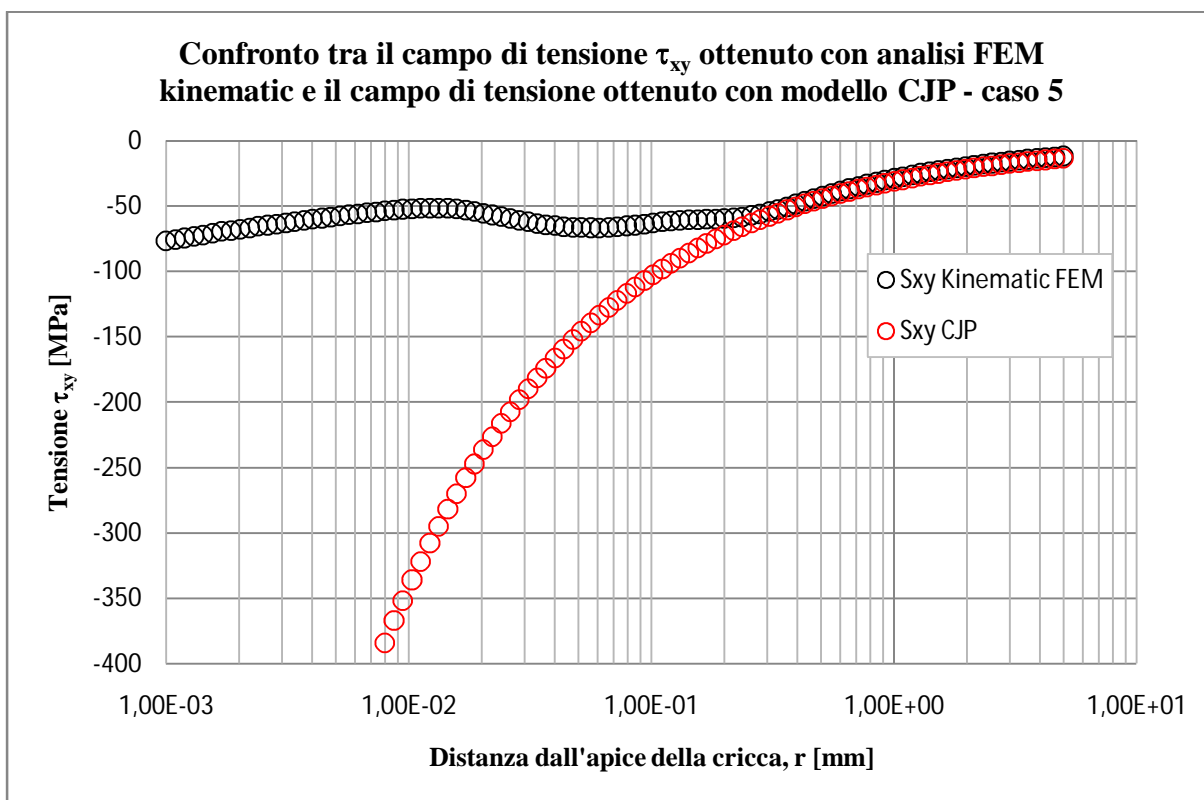


Figura 5.29 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1.

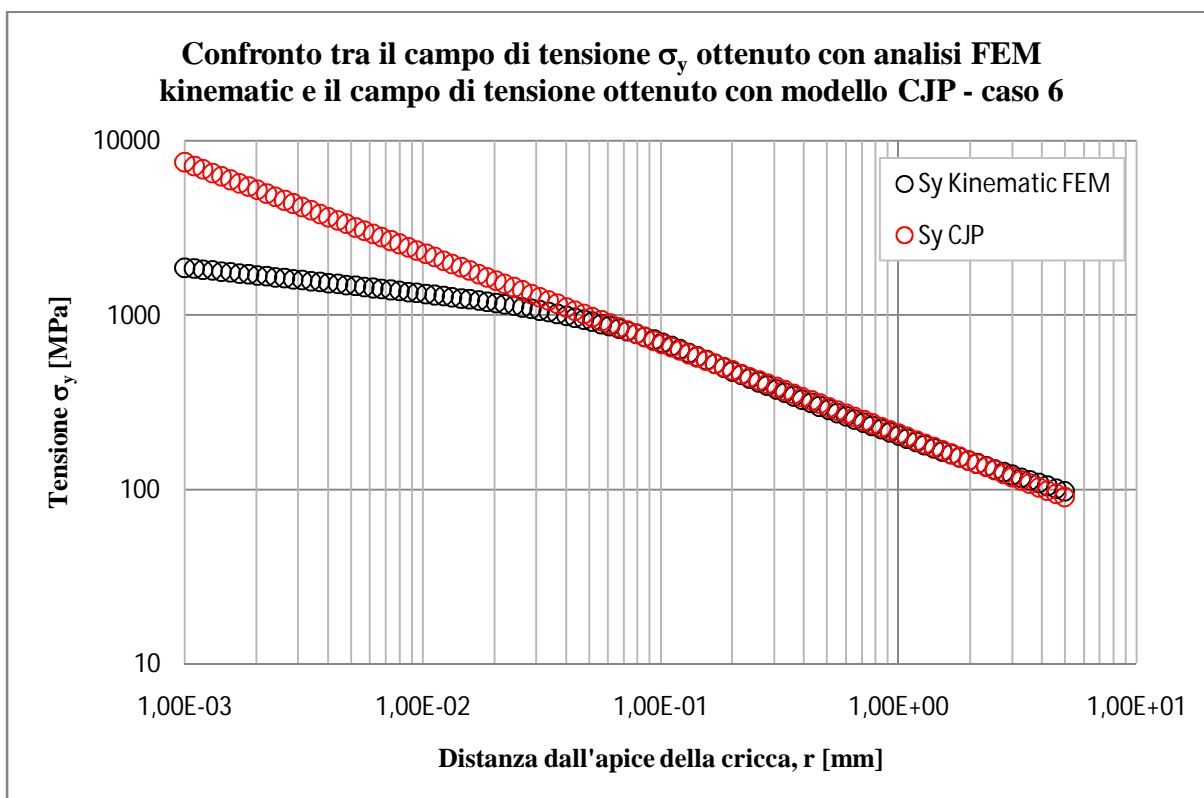


Figura 5.30 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 6 di tabella 5.1.

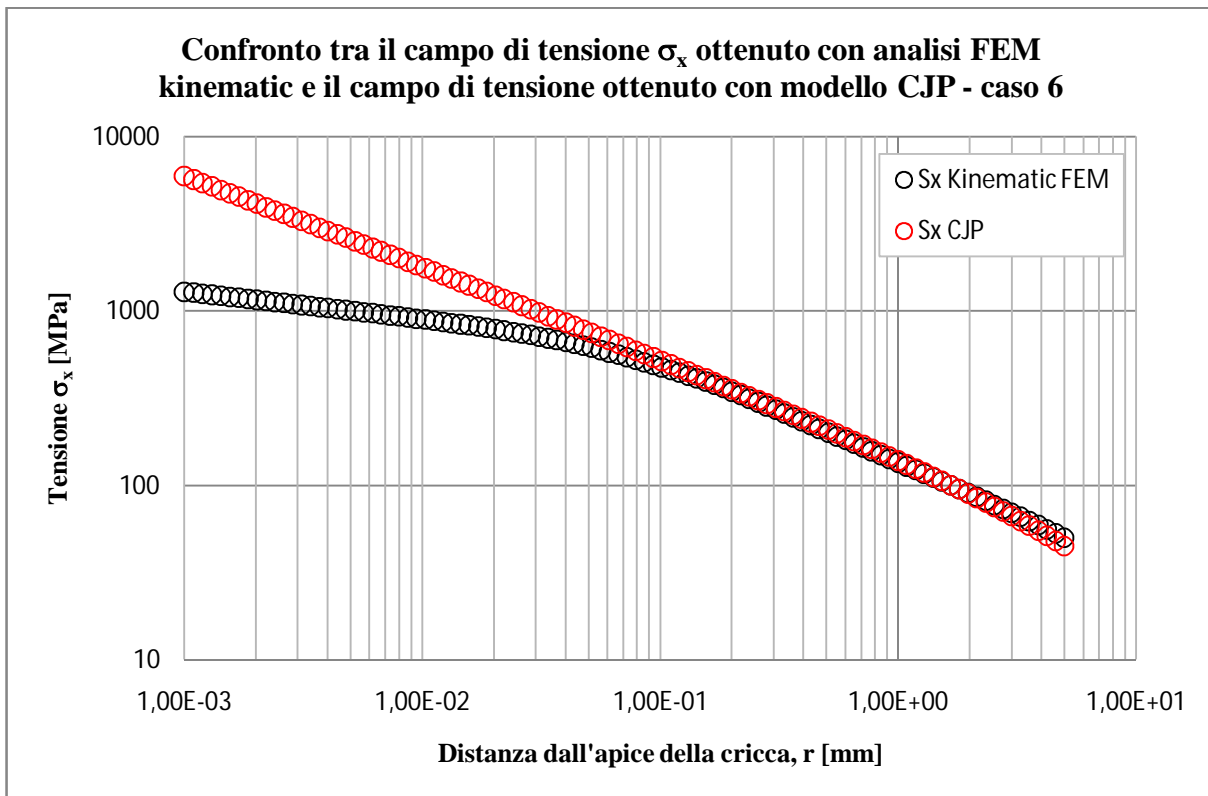


Figura 5.31 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 6 di tabella 5.1.

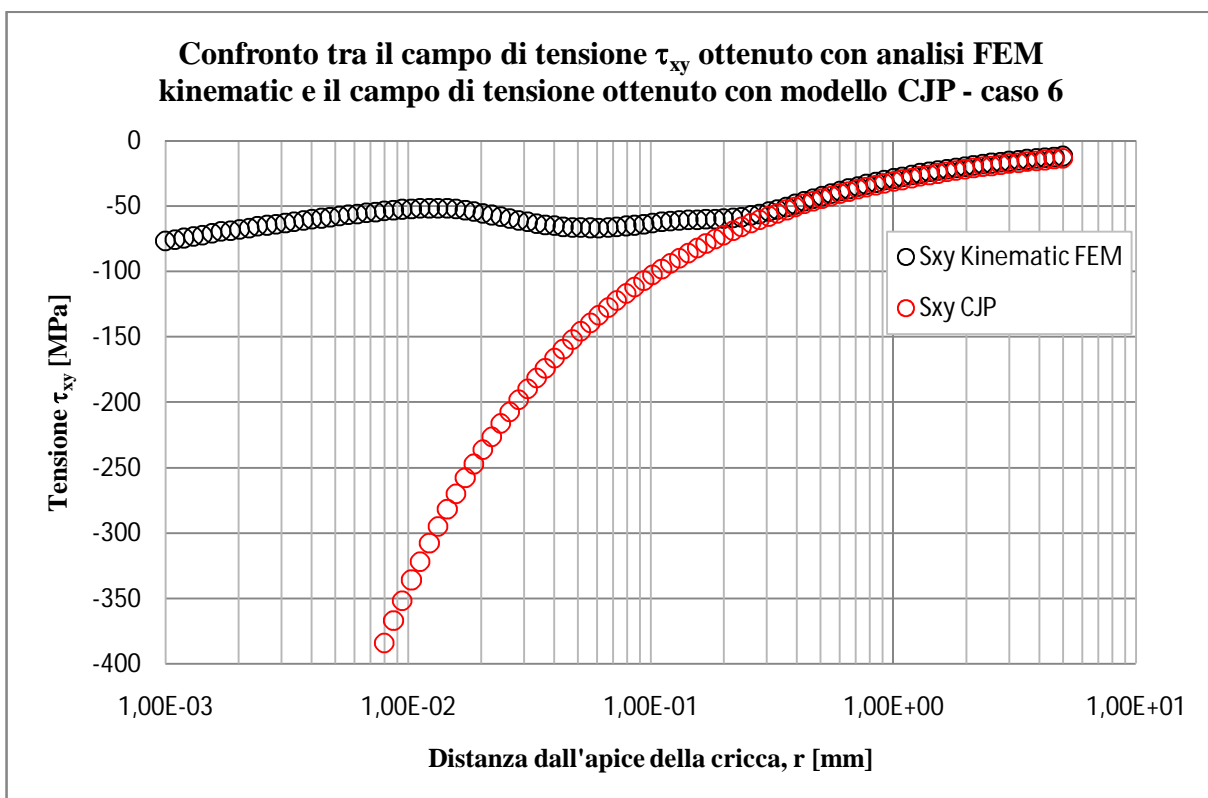


Figura 5.32 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 6 di tabella 5.1.

5.3.3 Plottaggio dei campi di tensione sulla direzione inclinata di $\theta=45^\circ$

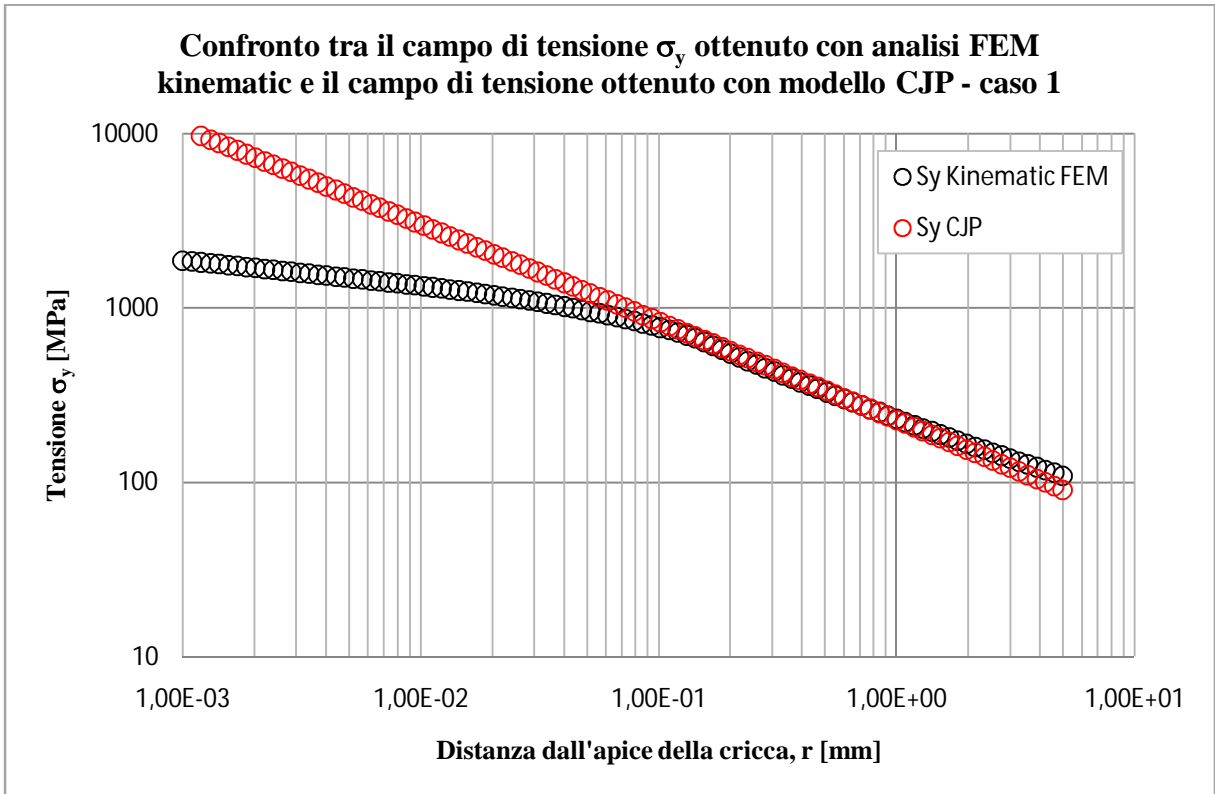


Figura 5.33 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 1 di tabella 5.1.

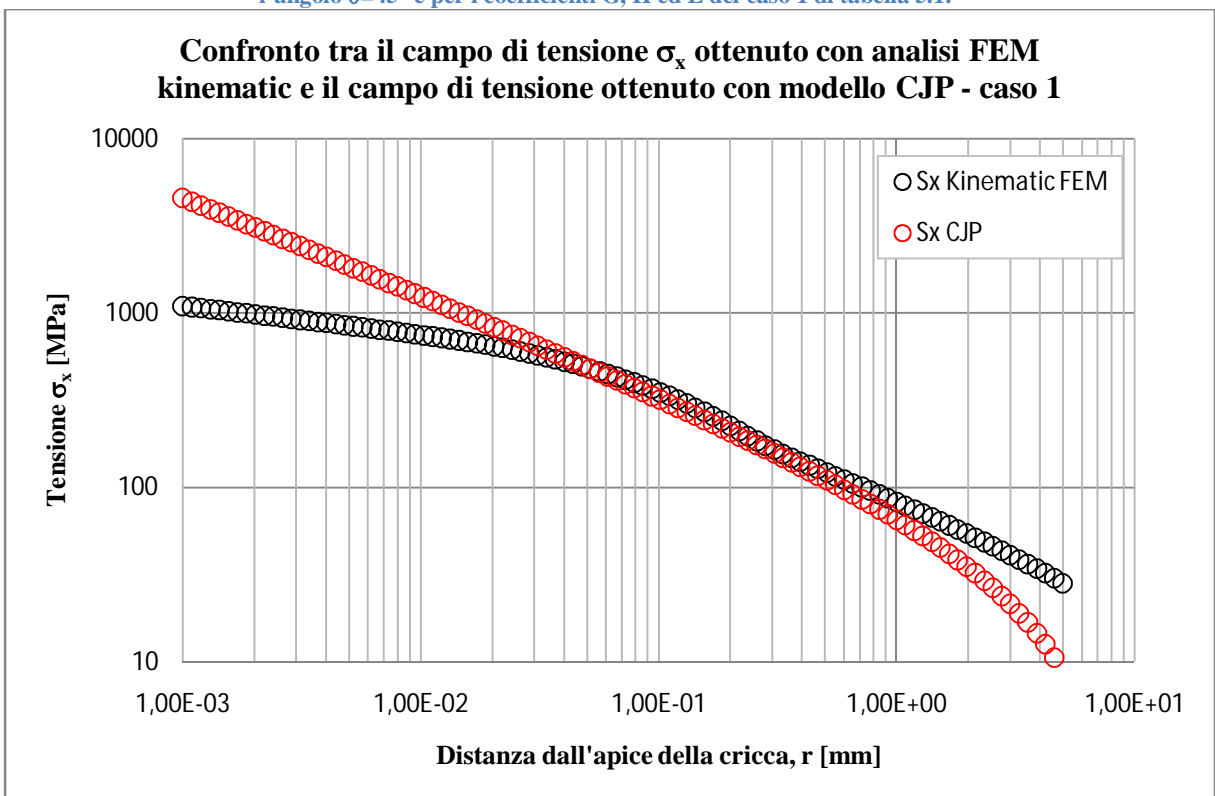


Figura 5.34 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 1 di tabella 5.1.

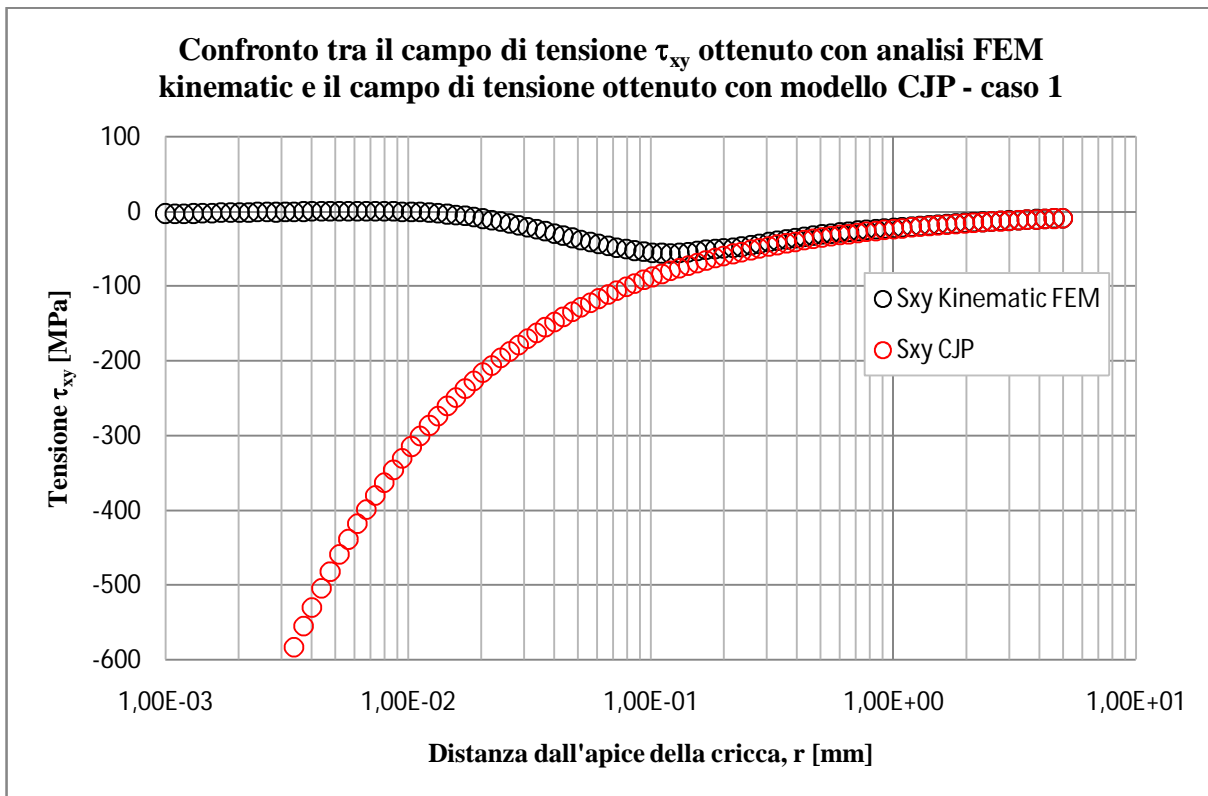


Figura 5.35 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 1 di tabella 5.1.

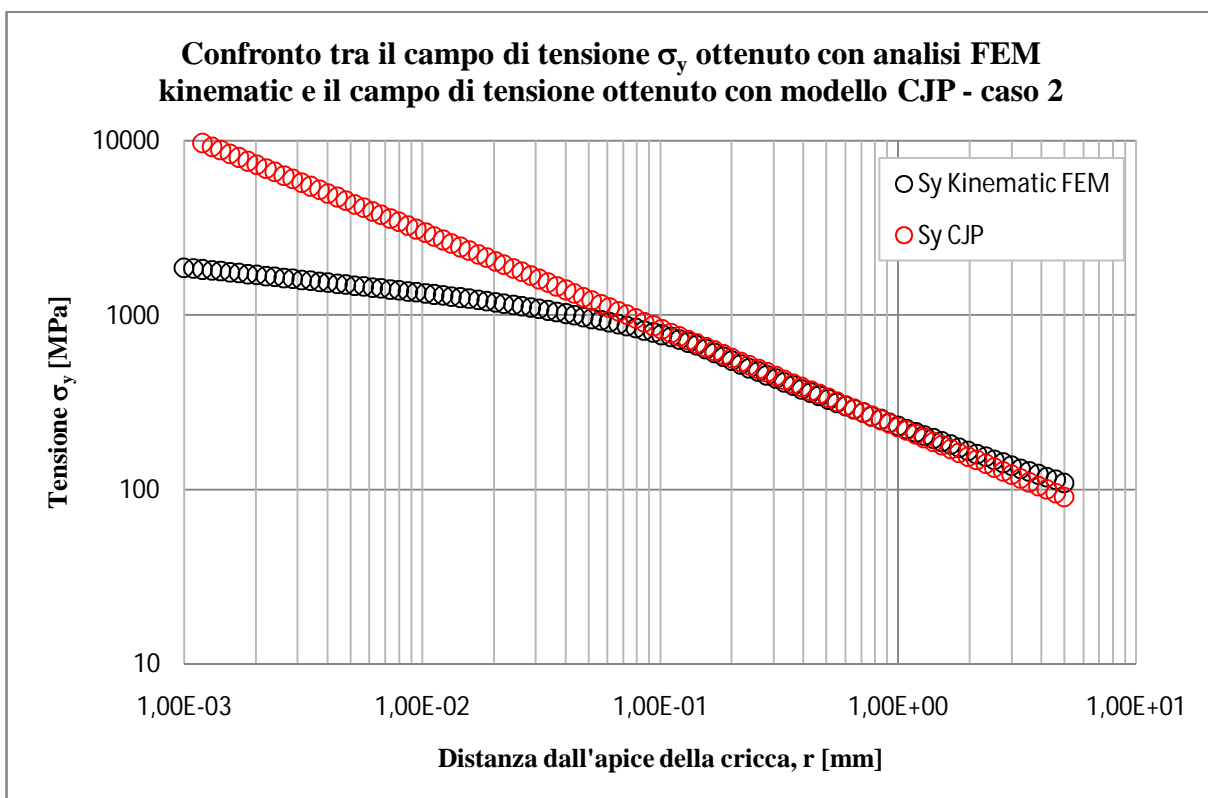


Figura 5.36 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 2 di tabella 5.1.

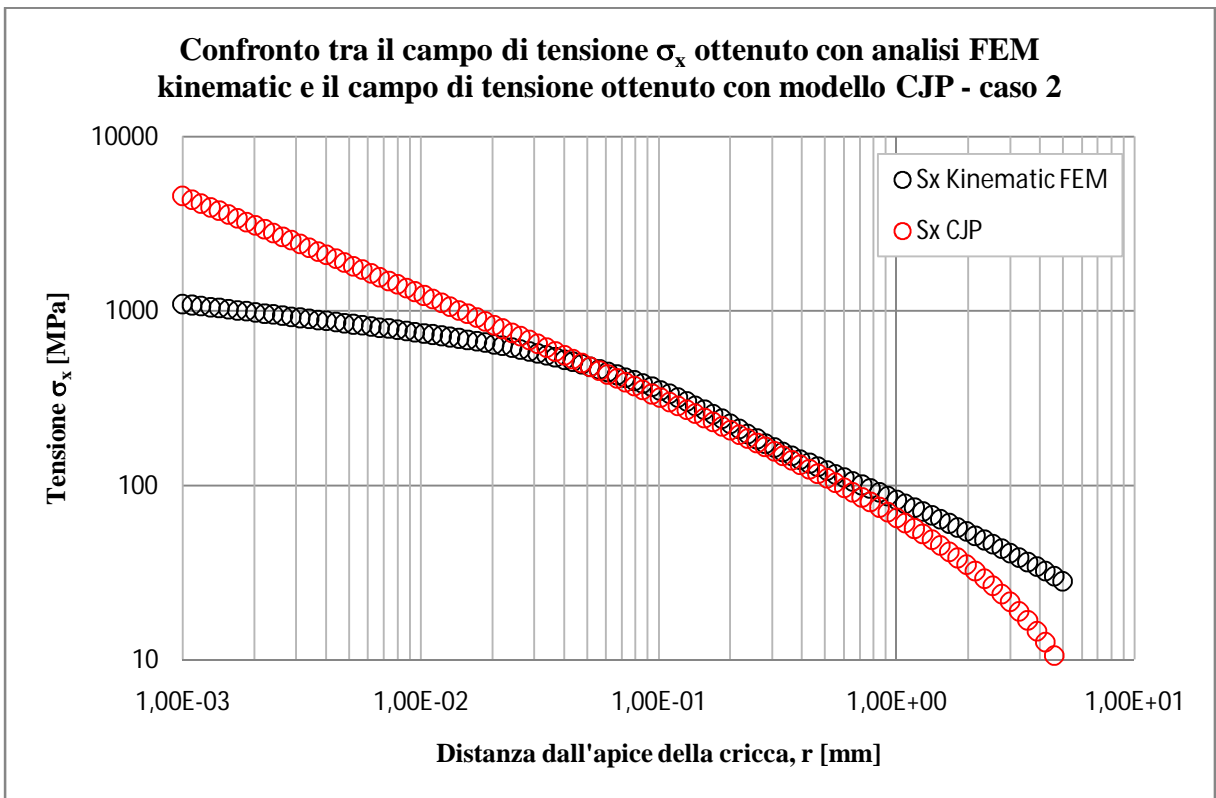


Figura 5.37 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 2 di tabella 5.1.

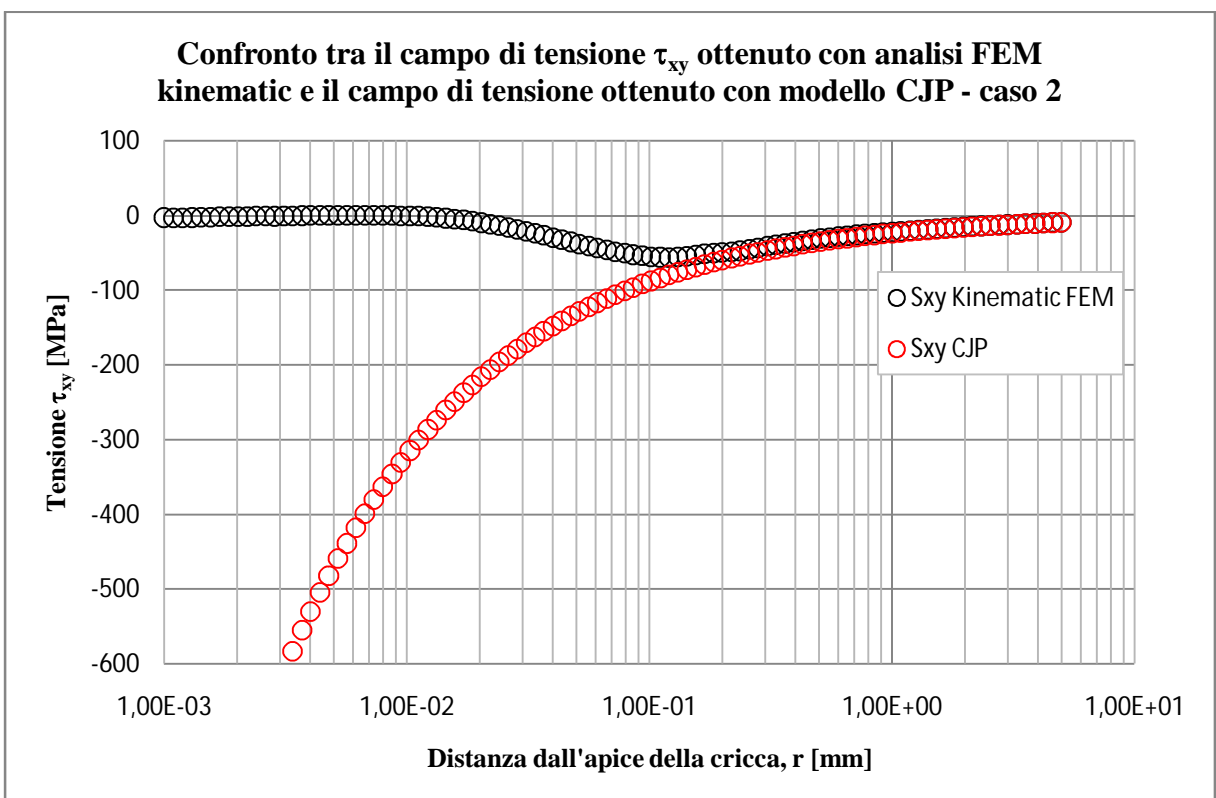


Figura 5.38 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 2 di tabella 5.1.

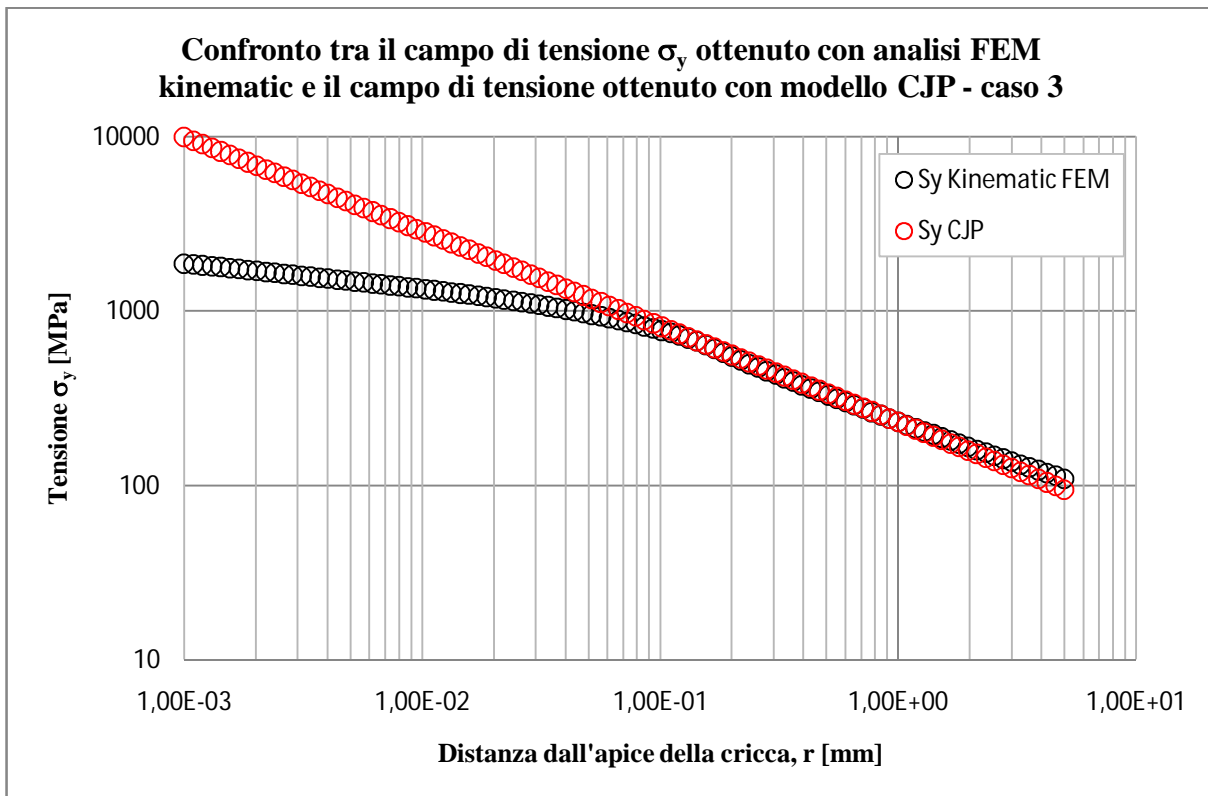


Figura 5.39 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 3 di tabella 5.1.

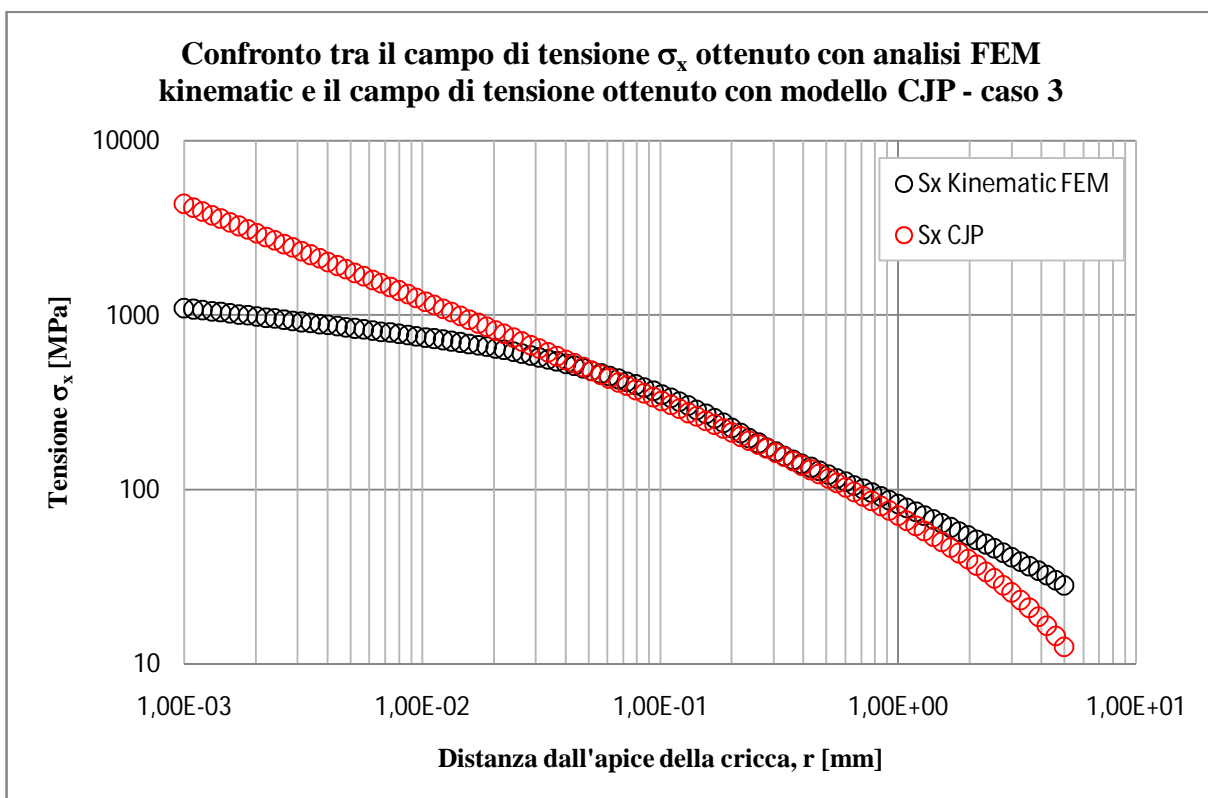


Figura 5.40 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 3 di tabella 5.1.

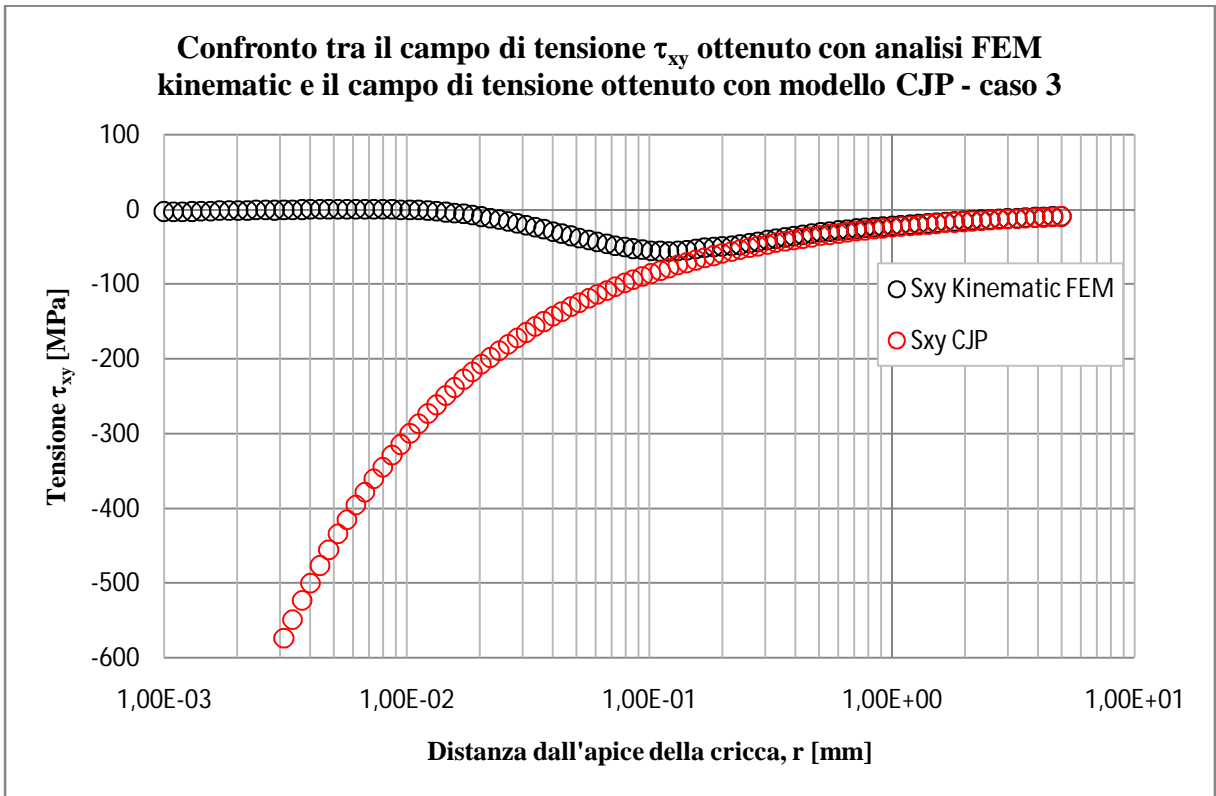


Figura 5.41 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 3 di tabella 5.1.

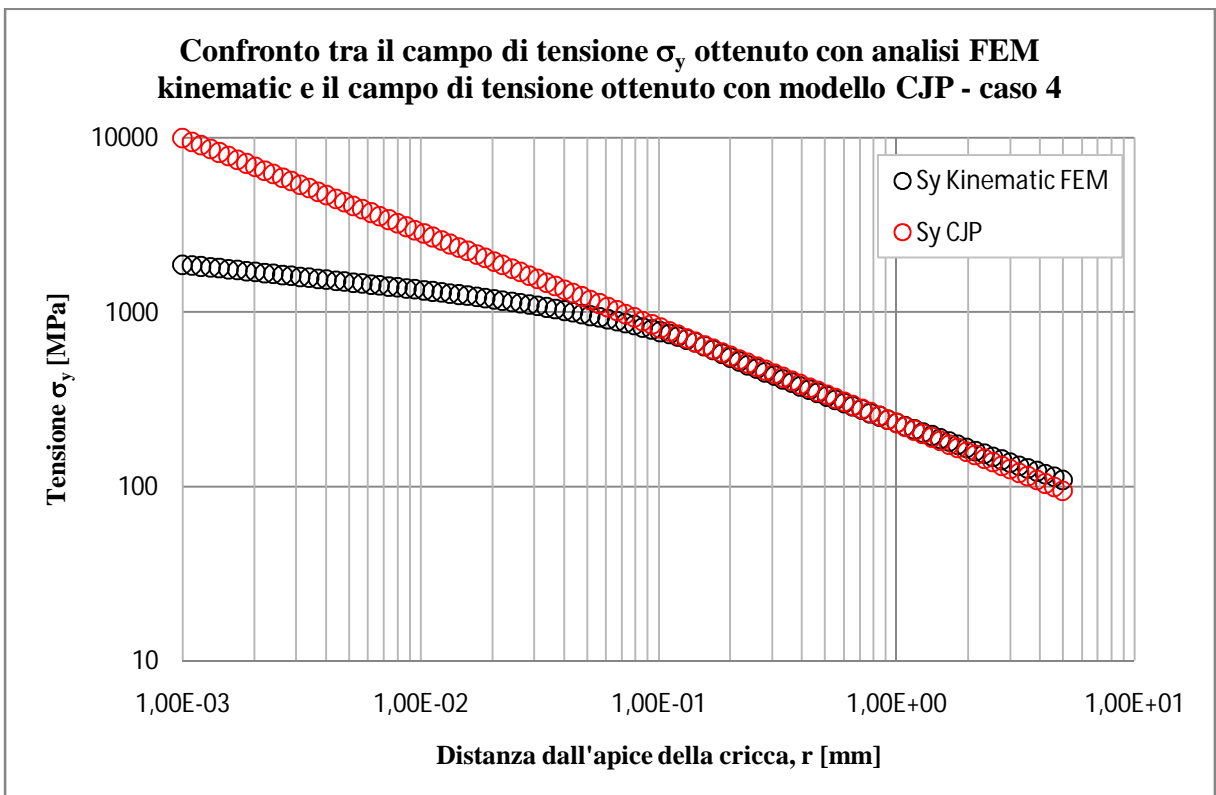


Figura 5.42 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 4 di tabella 5.1.

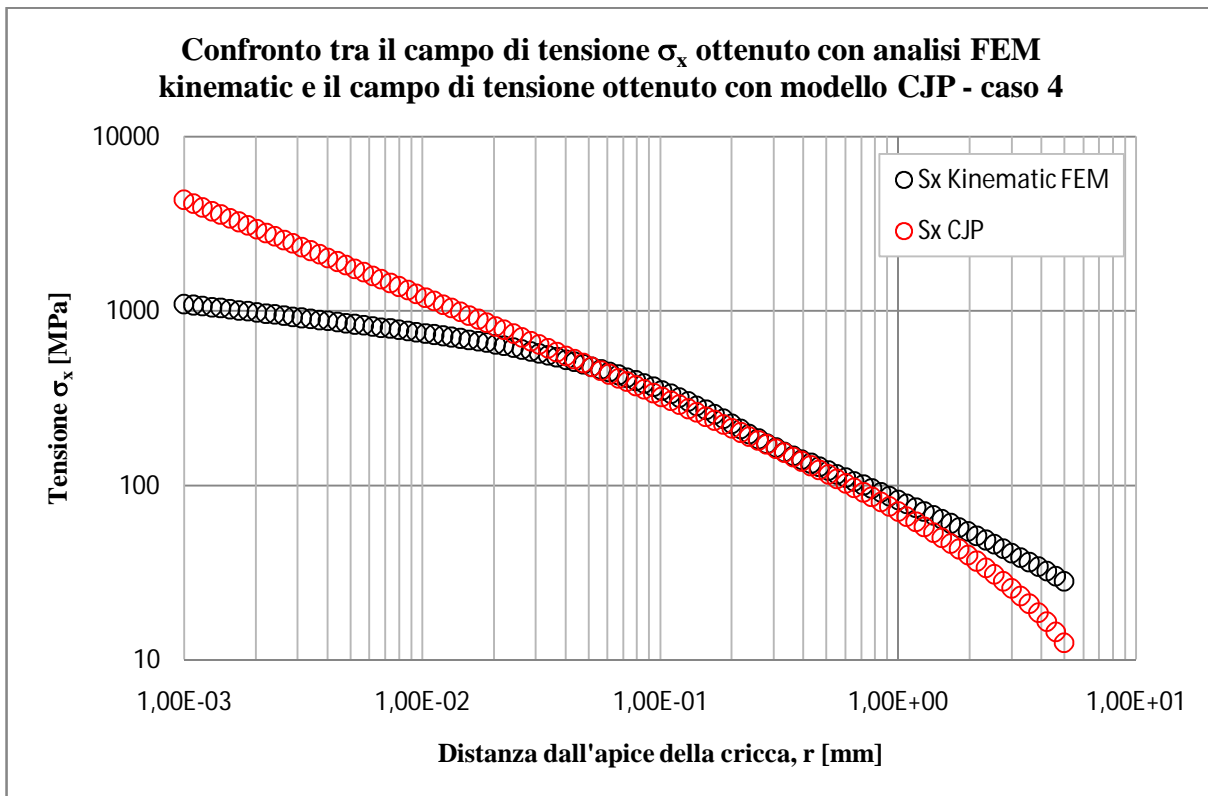


Figura 5.43 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 4 di tabella 5.1.

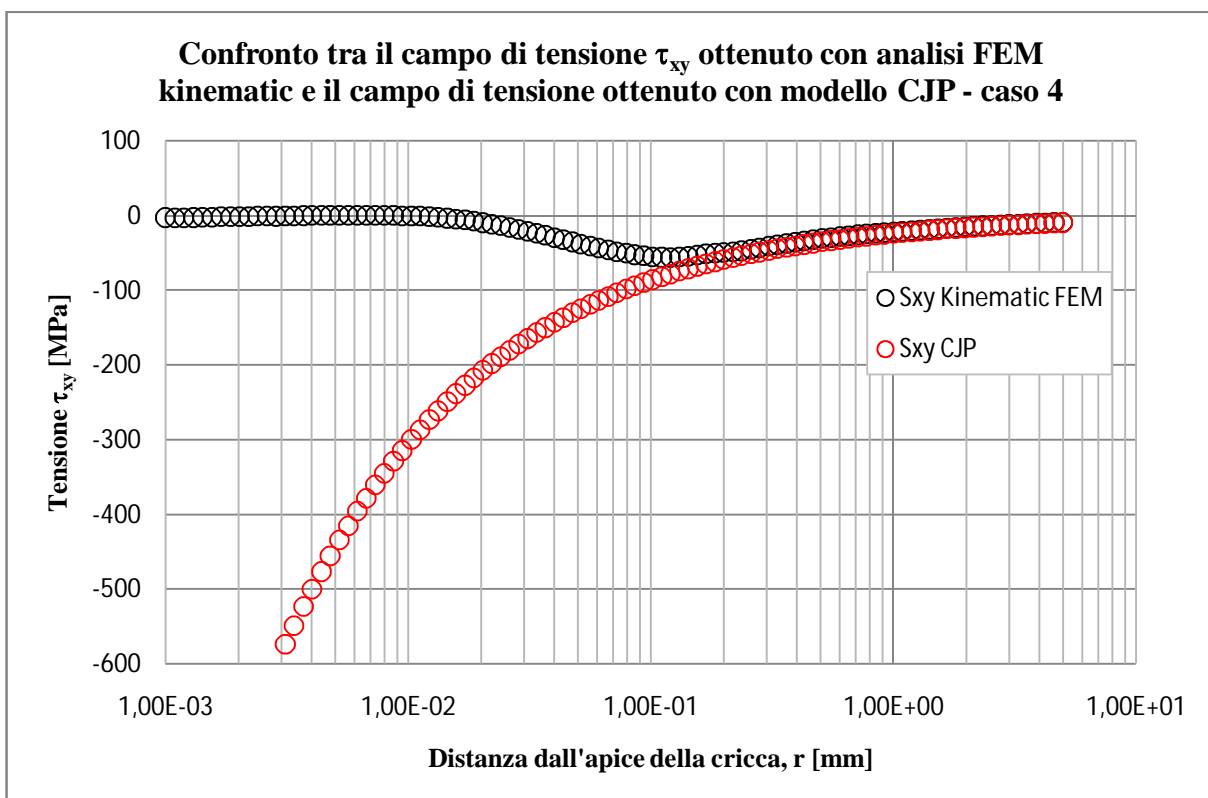


Figura 5.44 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 4 di tabella 5.1.

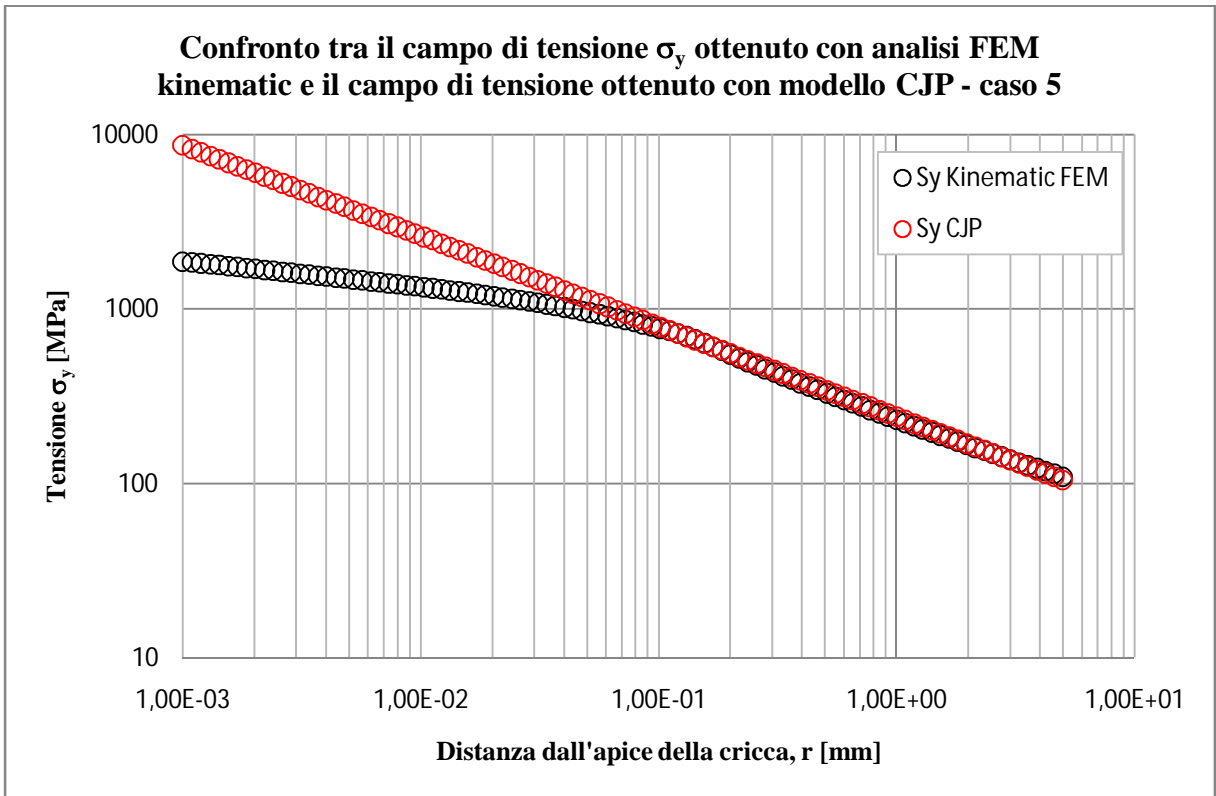


Figura 5.45 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1.

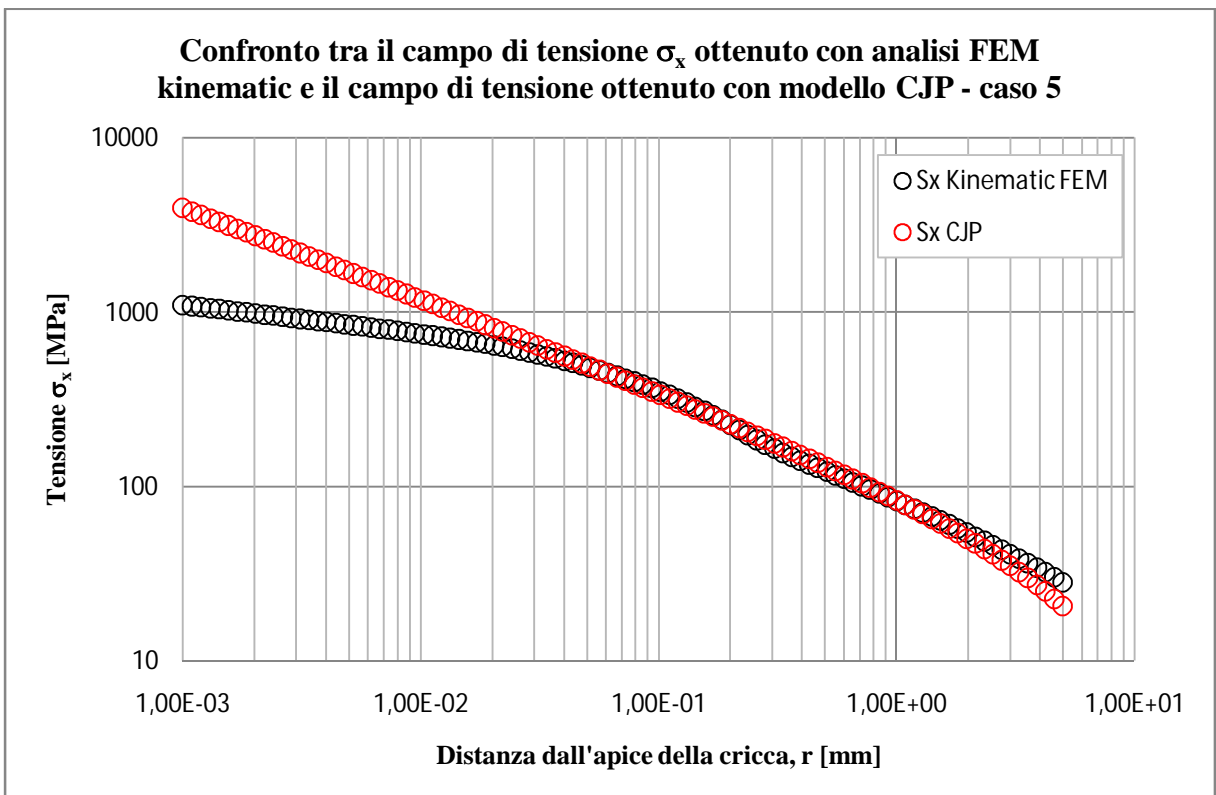


Figura 5.46 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1.

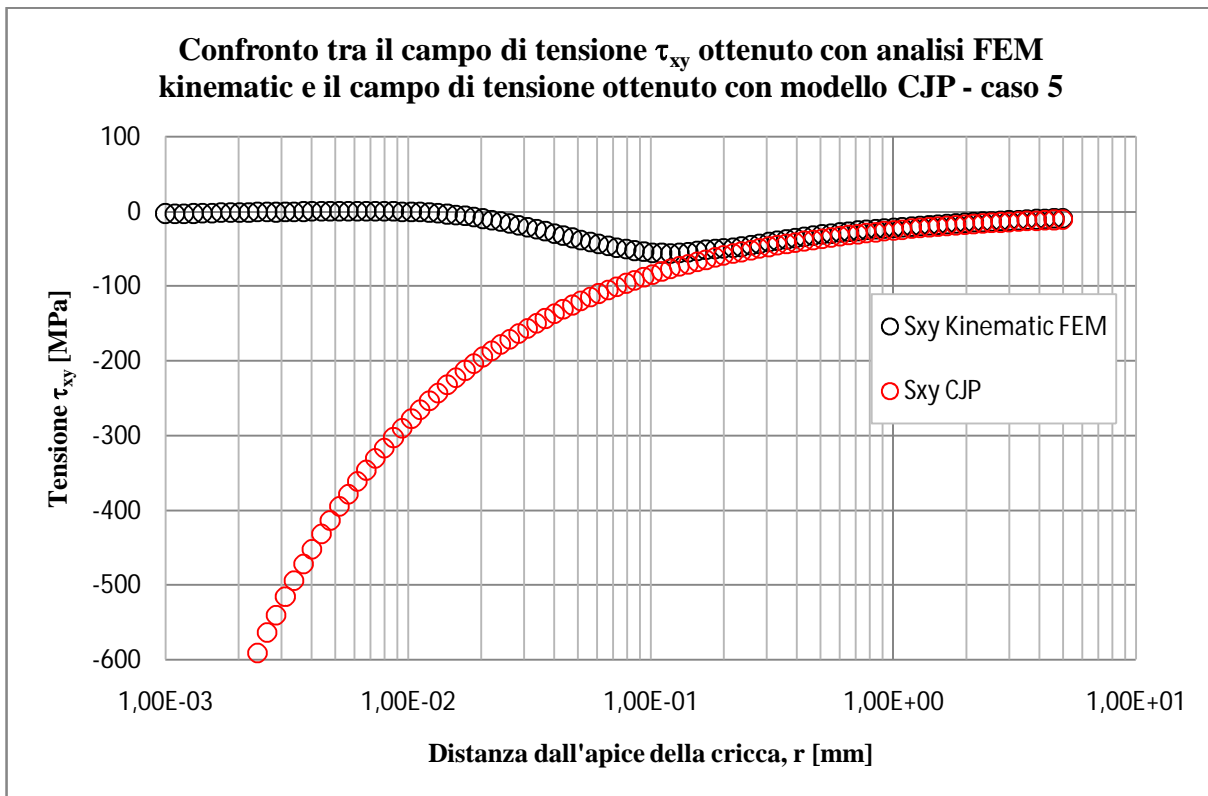


Figura 5.47 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1.

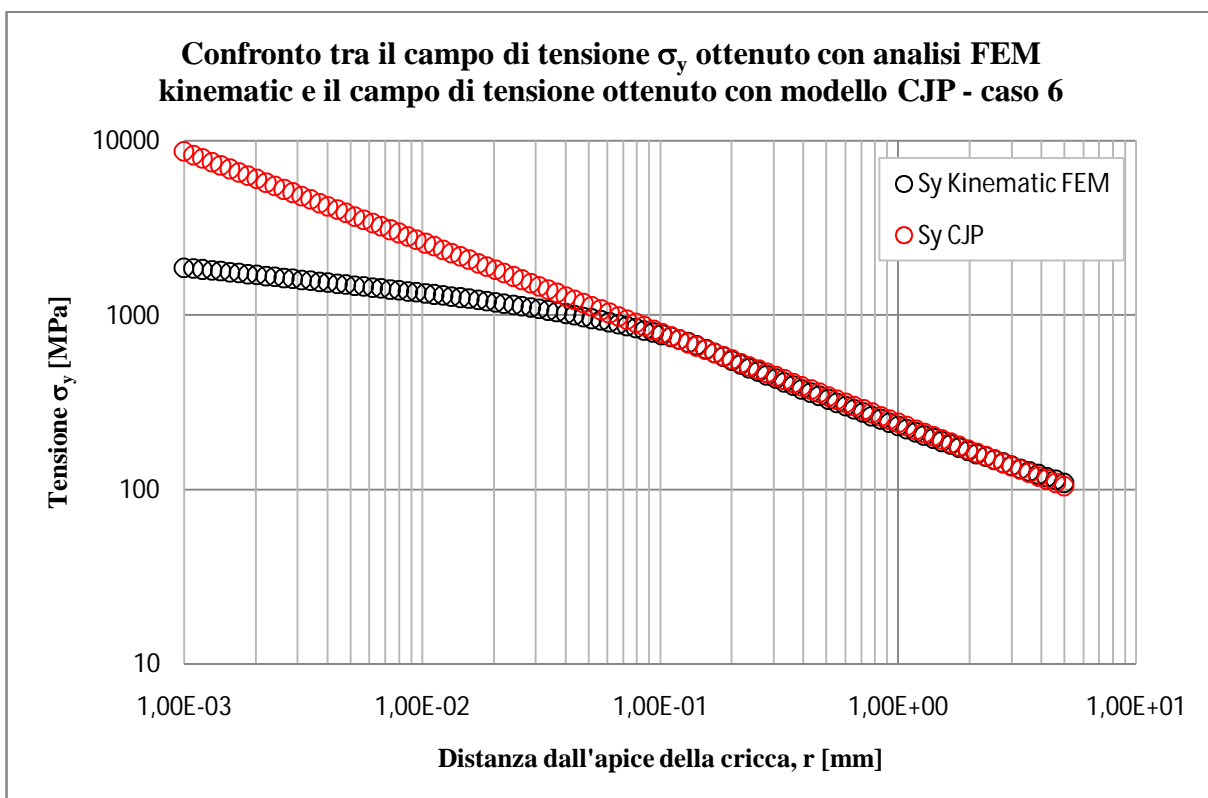


Figura 5.48 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 6 di tabella 5.1.

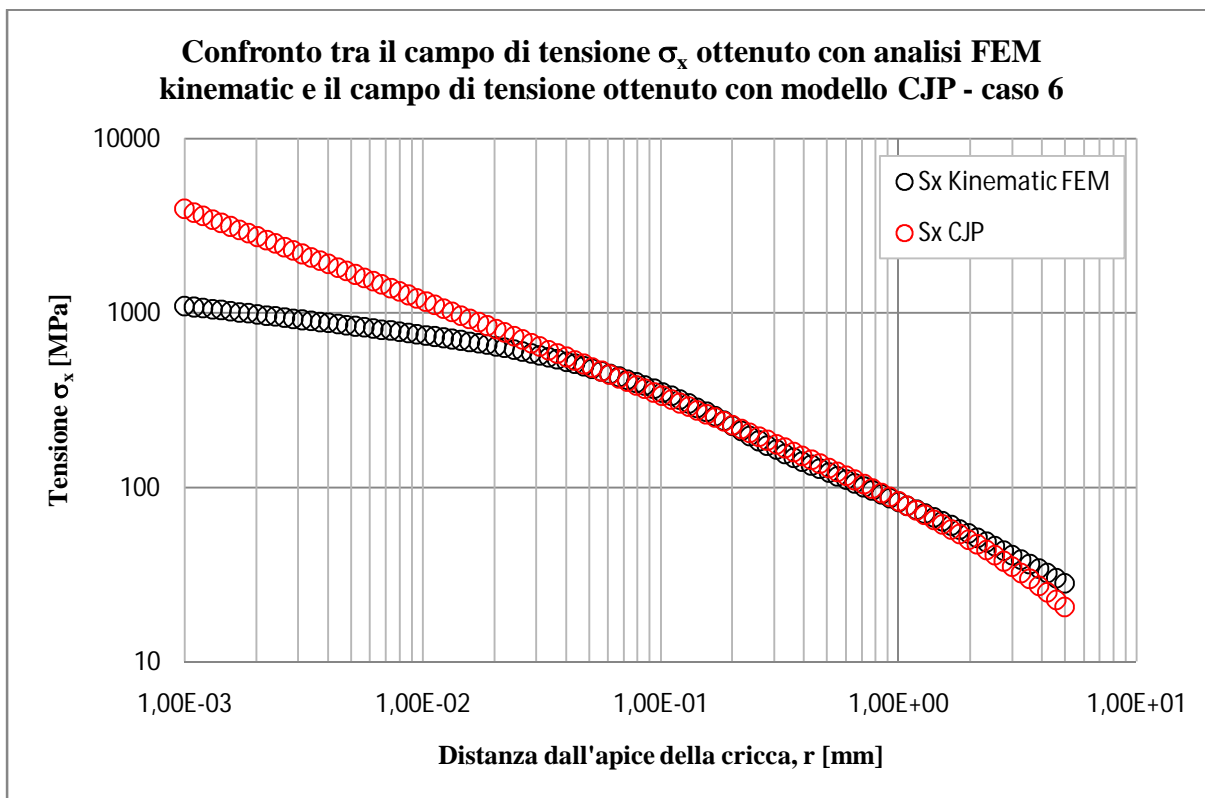


Figura 5.49 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 6 di tabella 5.1.

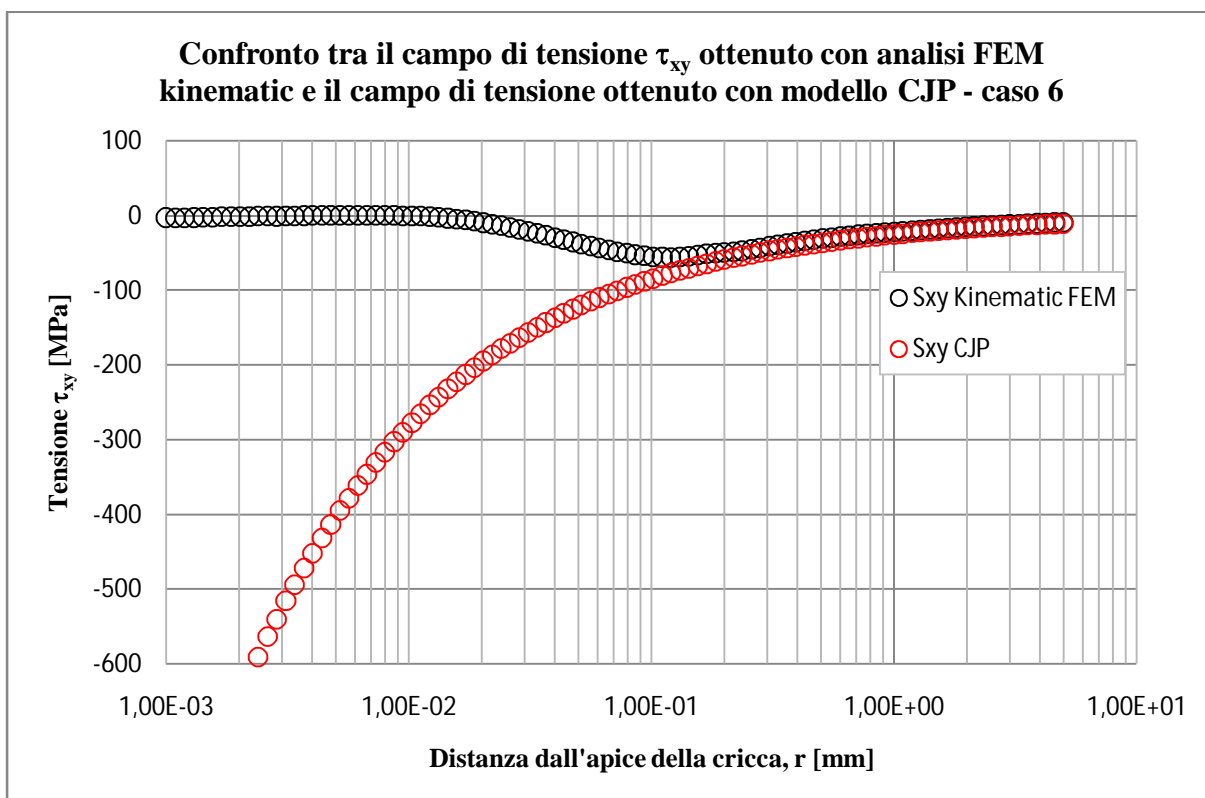


Figura 5.50 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 6 di tabella 5.1.

5.3.4 Plottaggio dei campi di tensione sulla direzione inclinata di $\theta=67.5^\circ$

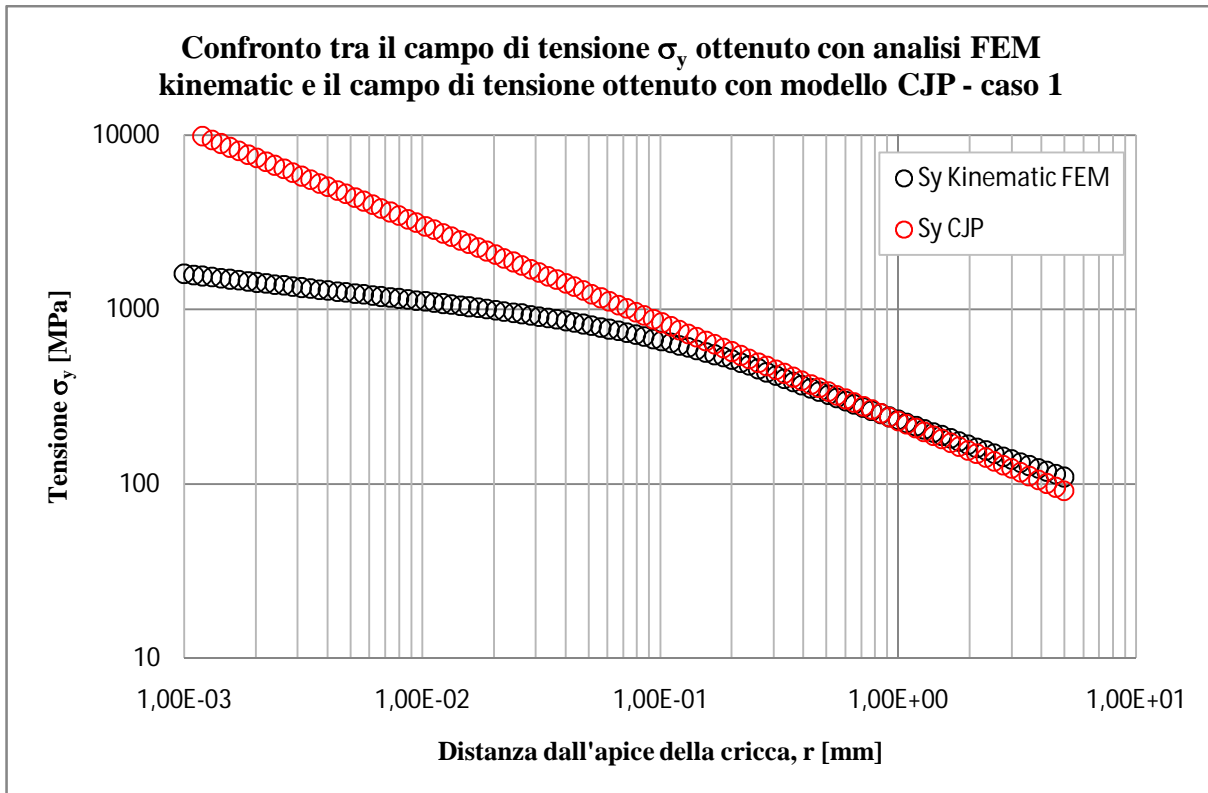


Figura 5.51 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67.5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 1 di tabella 5.1.

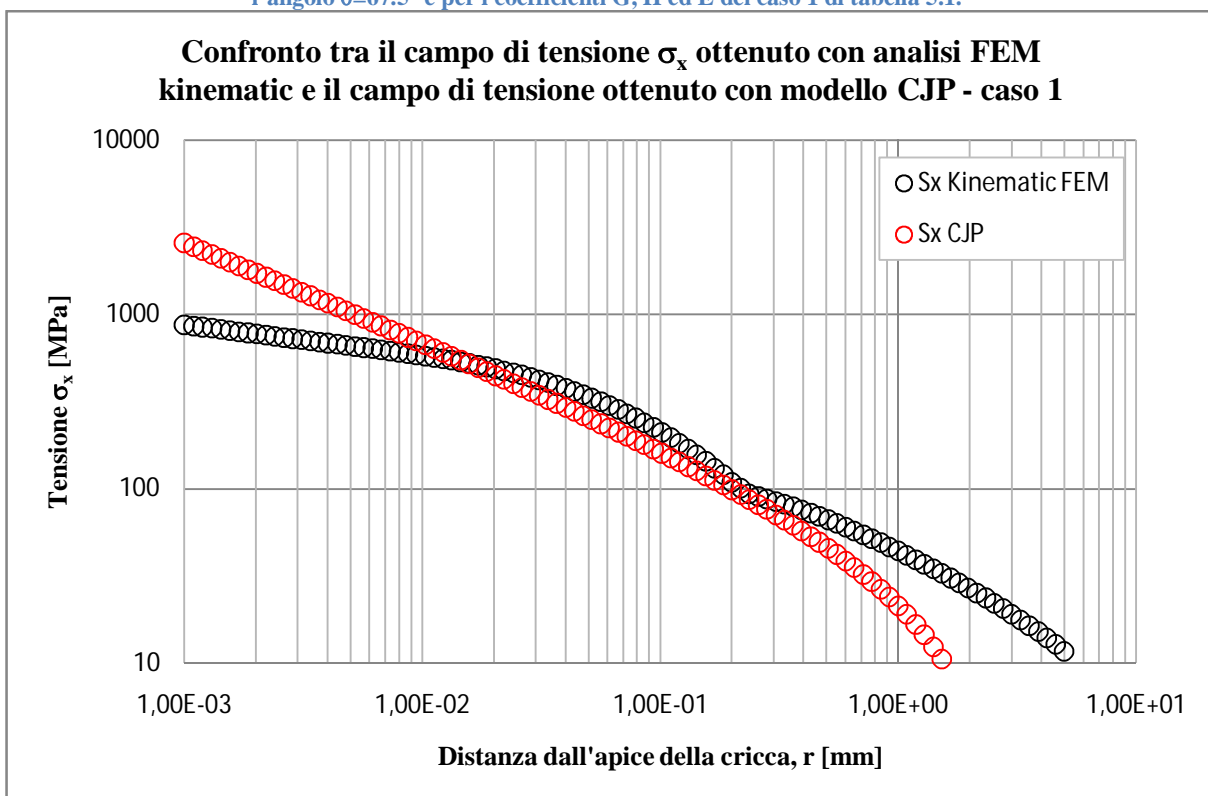


Figura 5.52 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67.5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 1 di tabella 5.1.

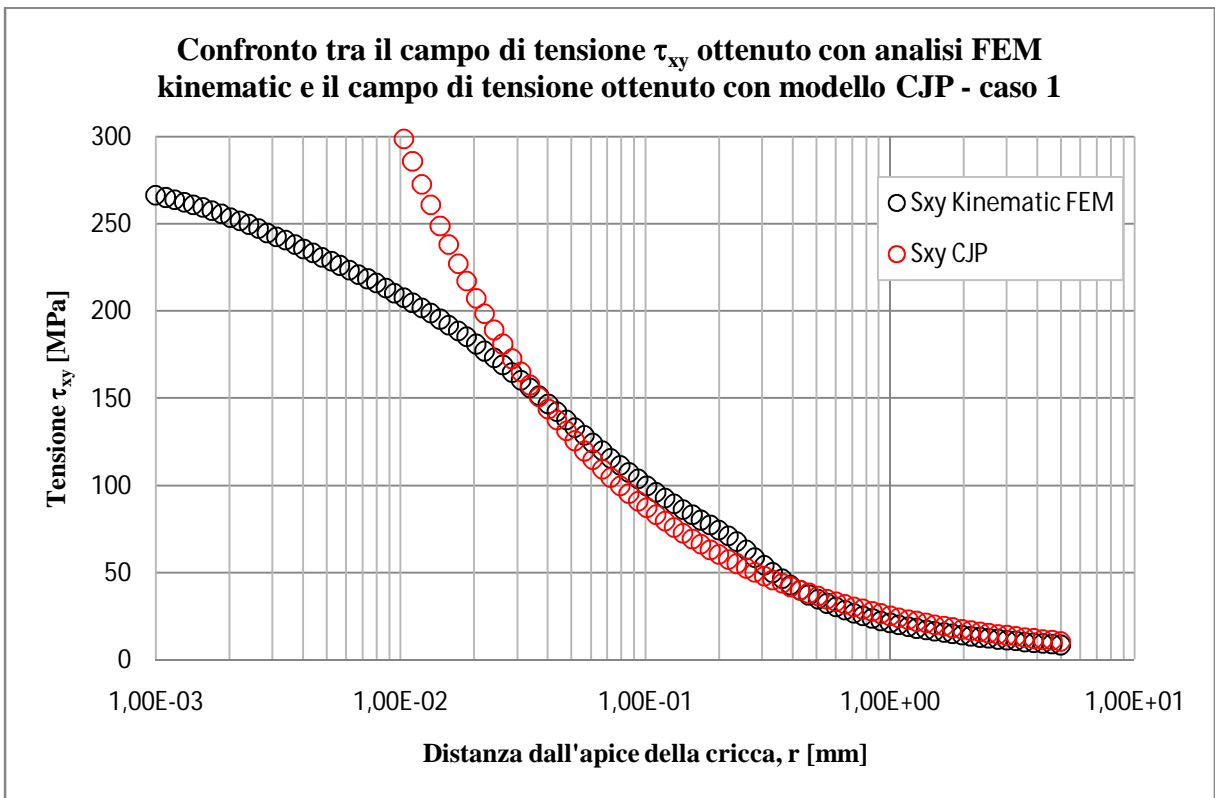


Figura 5.53 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67.5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 1 di tabella 5.1.

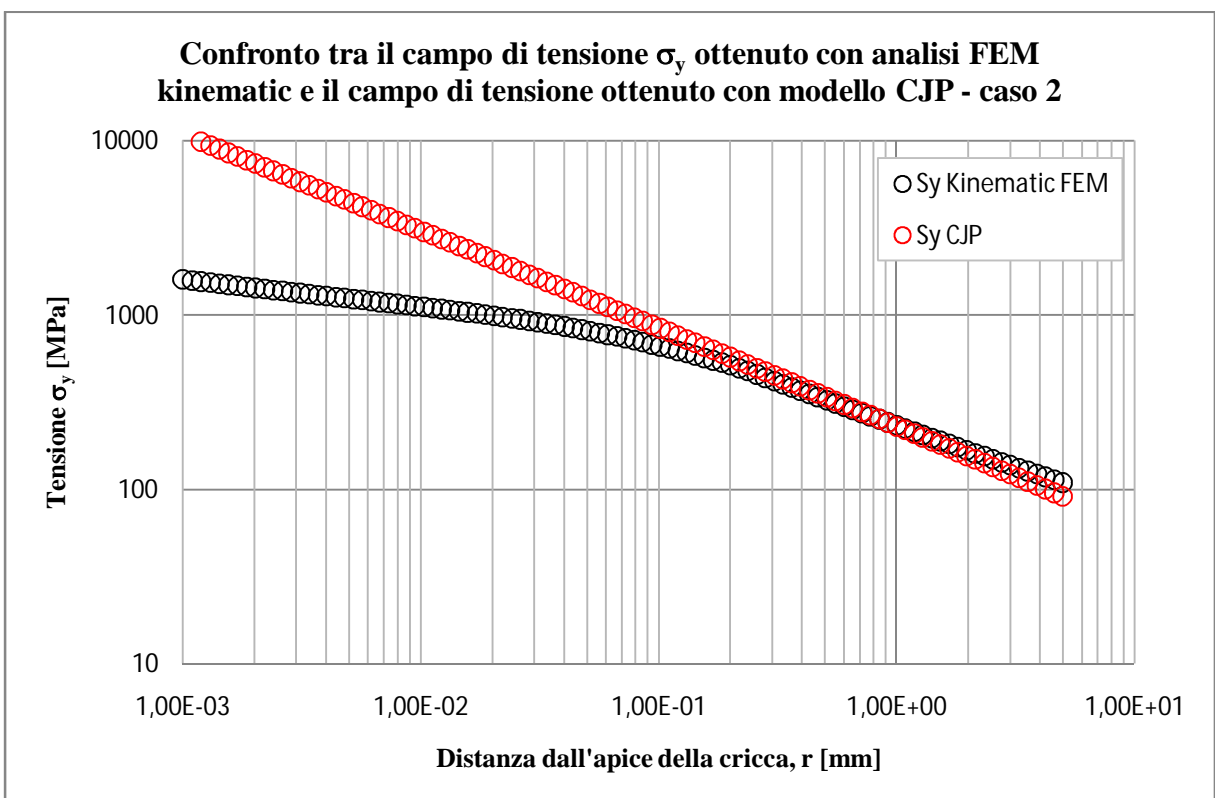


Figura 5.54 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67.5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 2 di tabella 5.1.

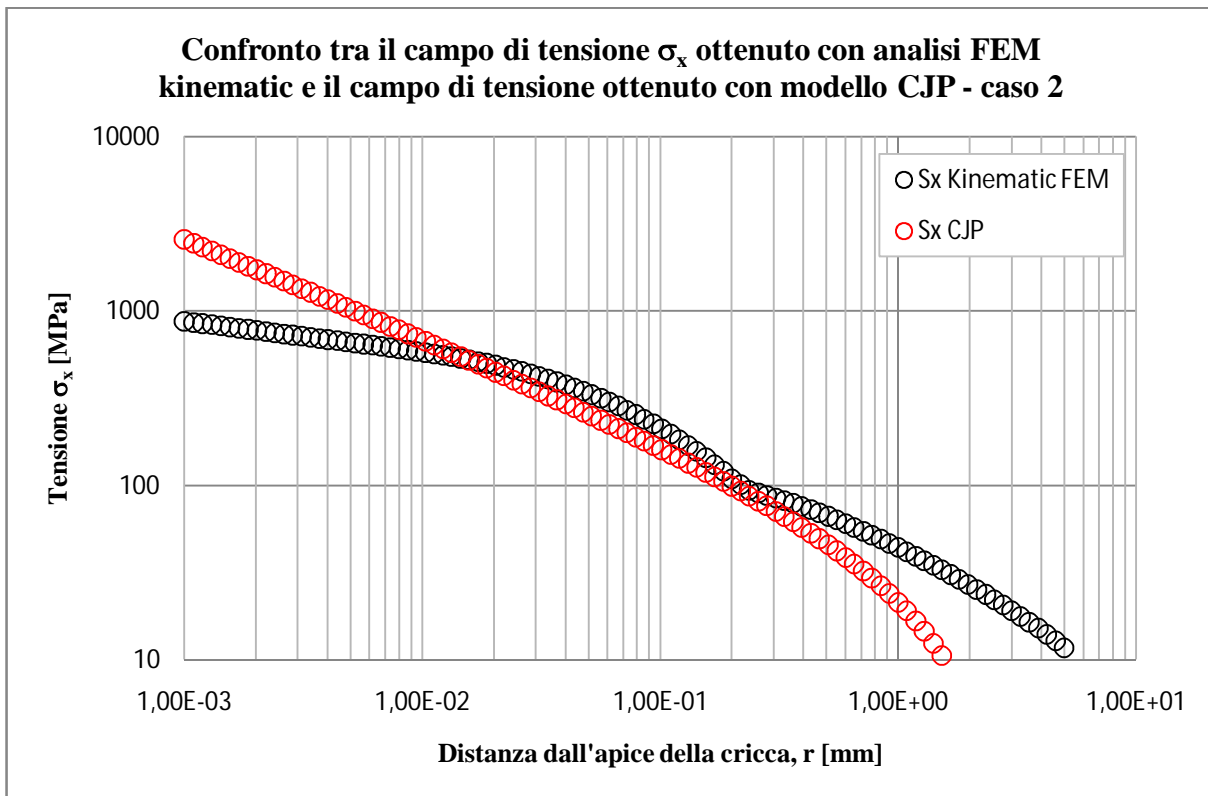


Figura 5.55 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 2 di tabella 5.1.

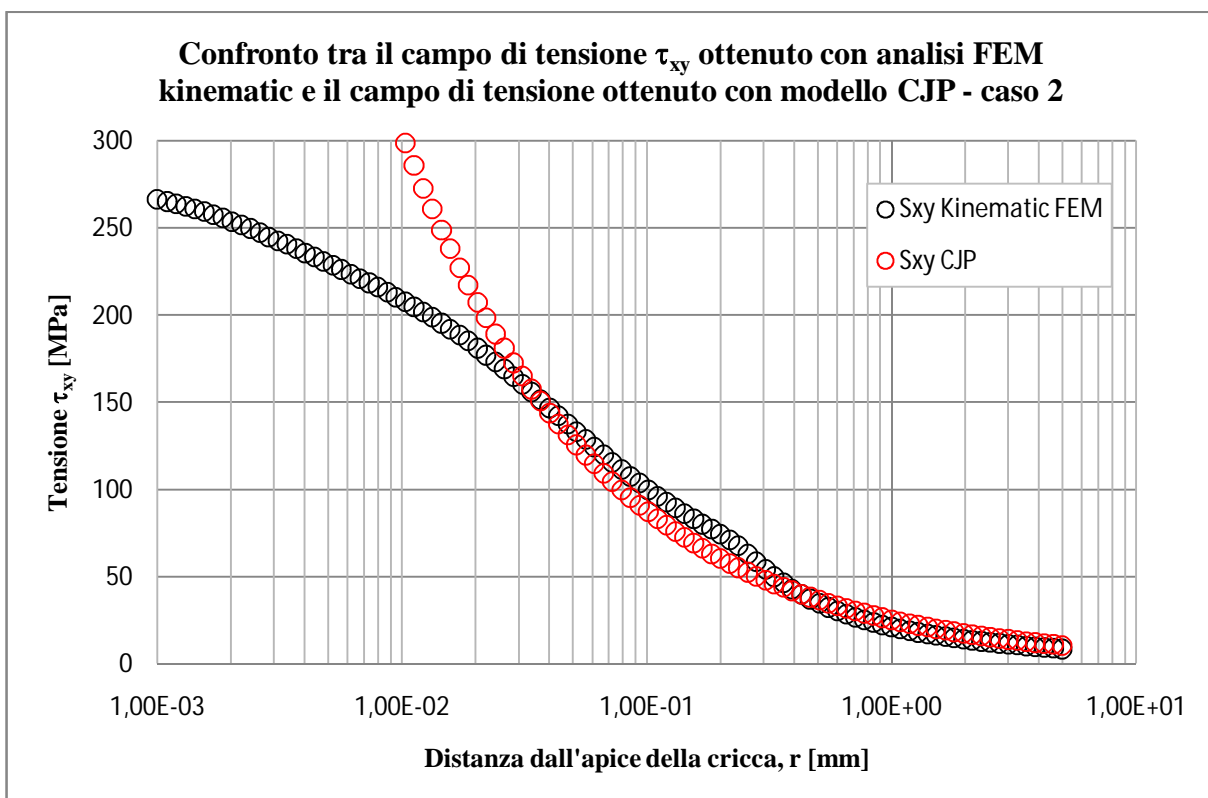


Figura 5.56 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 2 di tabella 5.1.

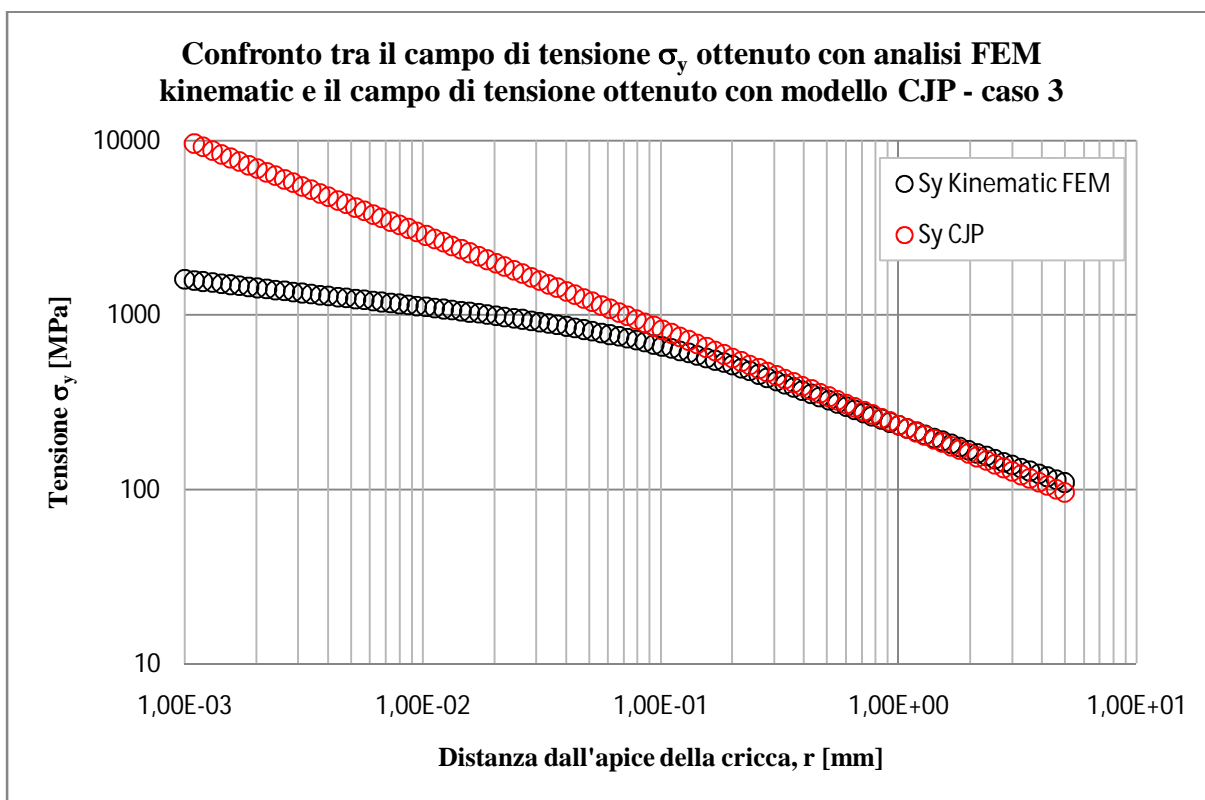


Figura 5.57 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 3 di tabella 5.1.

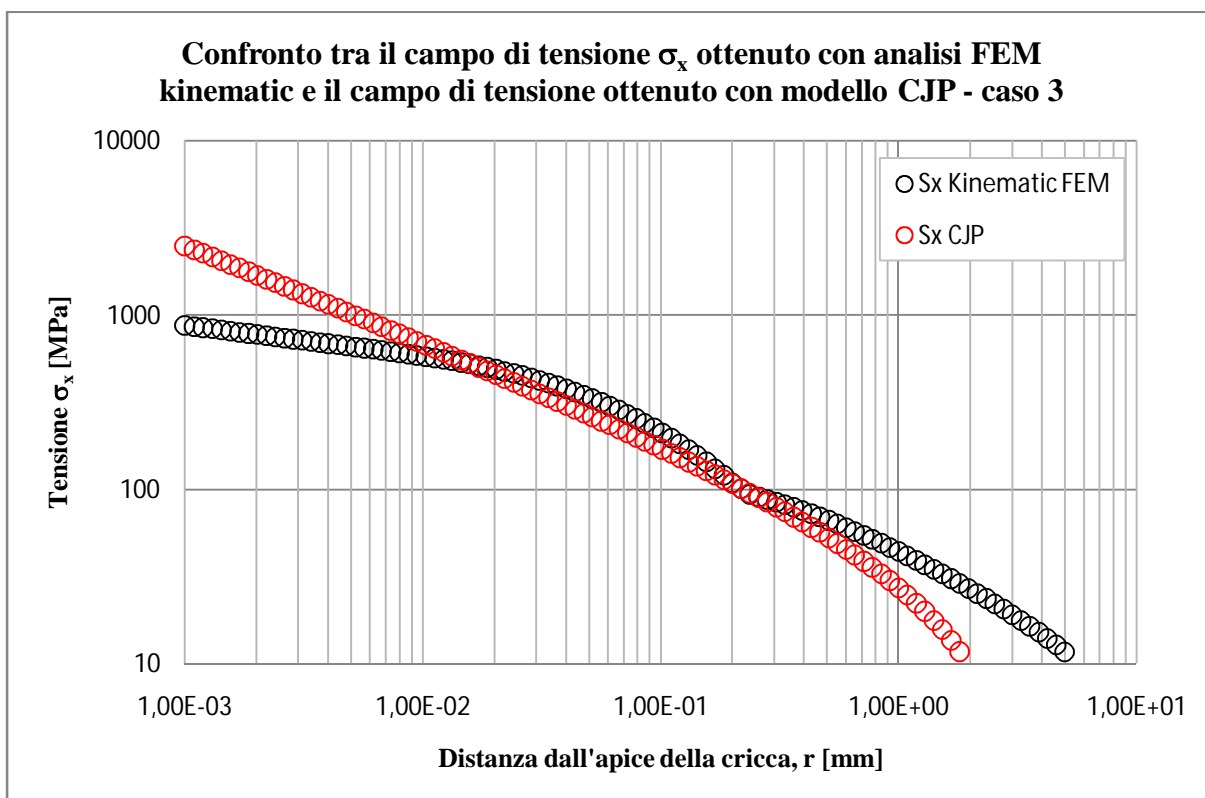


Figura 5.58 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 3 di tabella 5.1.

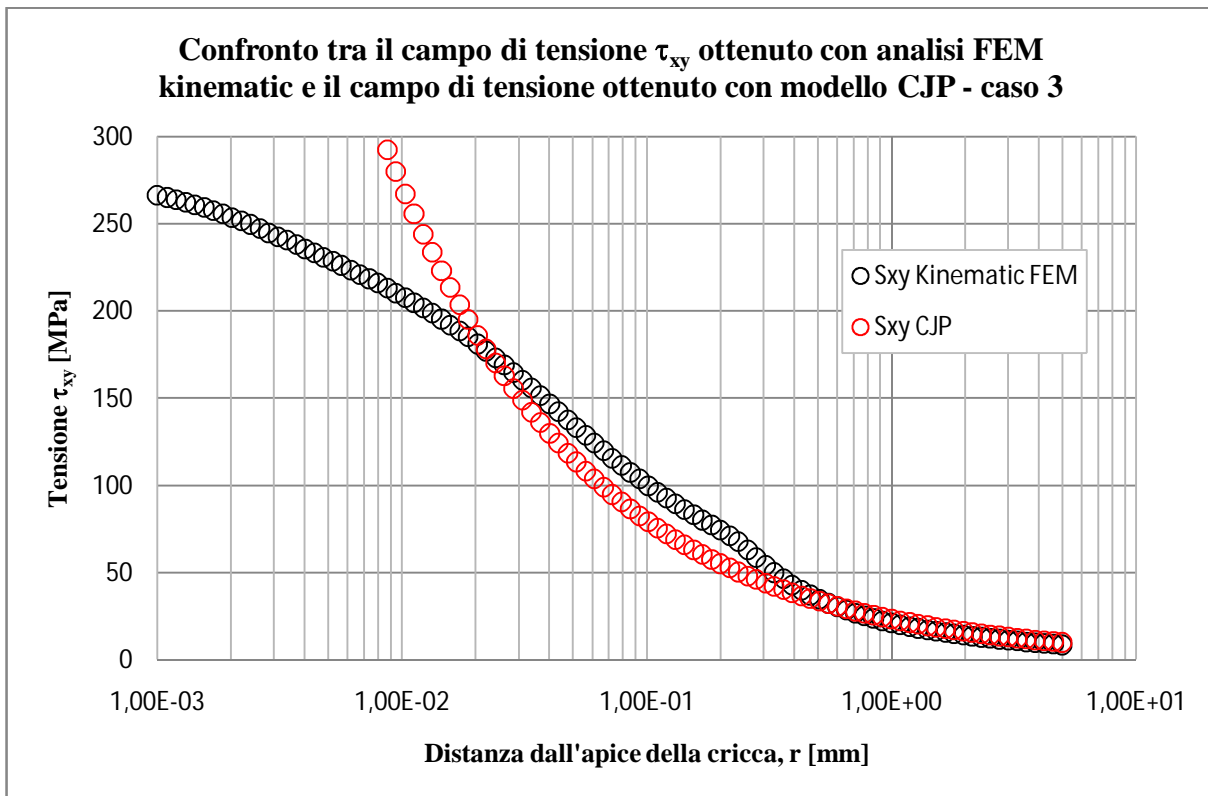


Figura 5.59 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 3 di tabella 5.1.

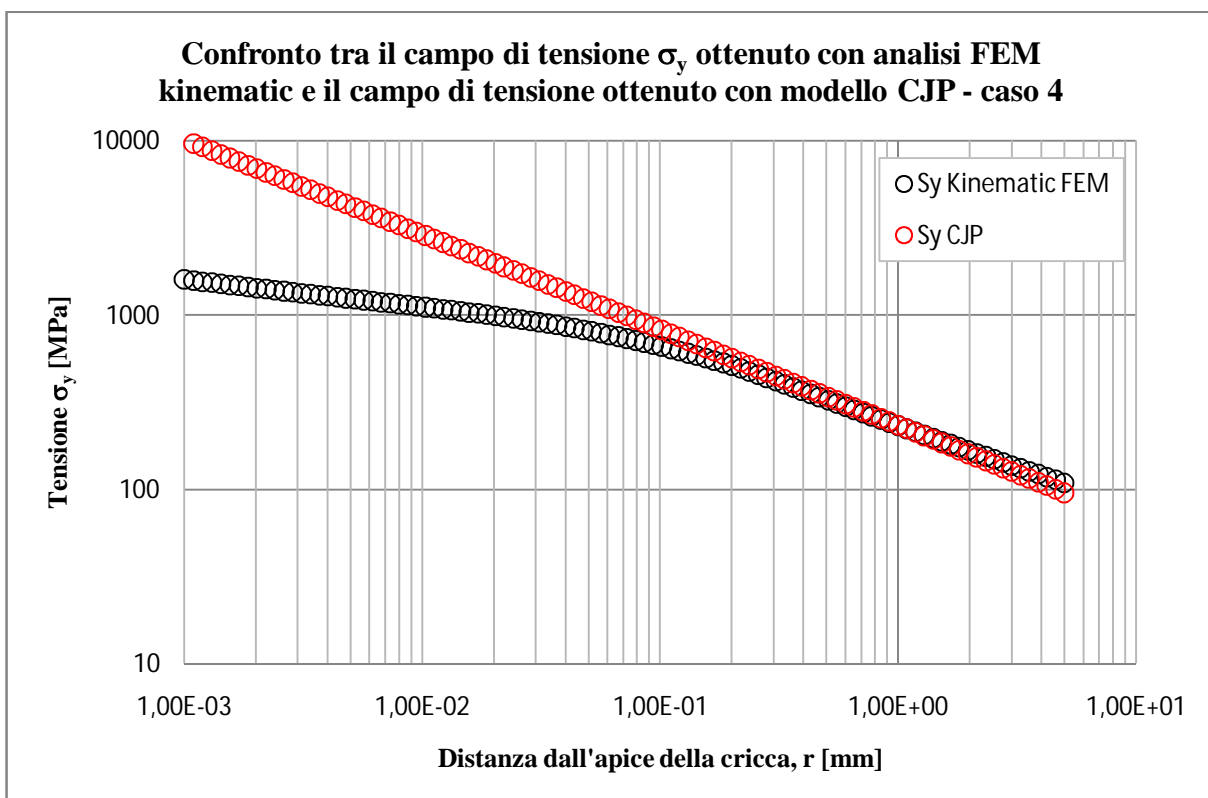


Figura 5.60 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 4 di tabella 5.1.

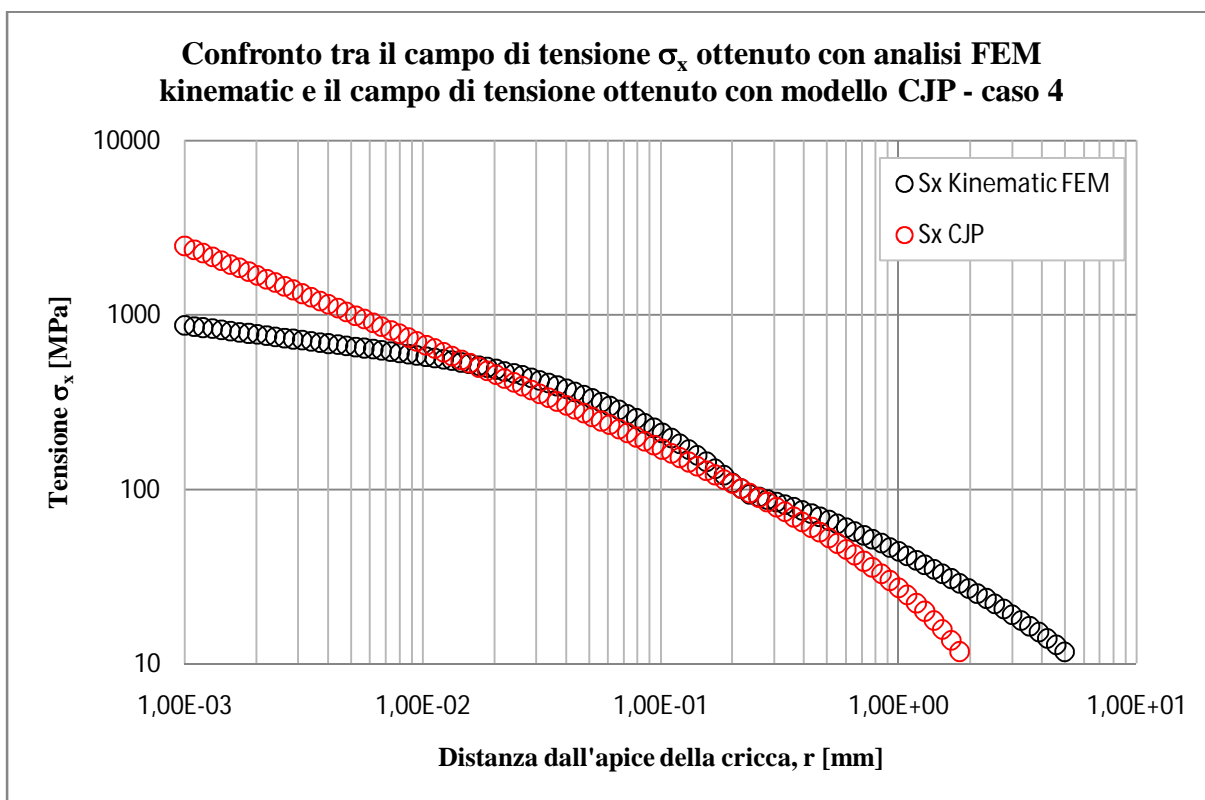


Figura 5.61 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 4 di tabella 5.1.

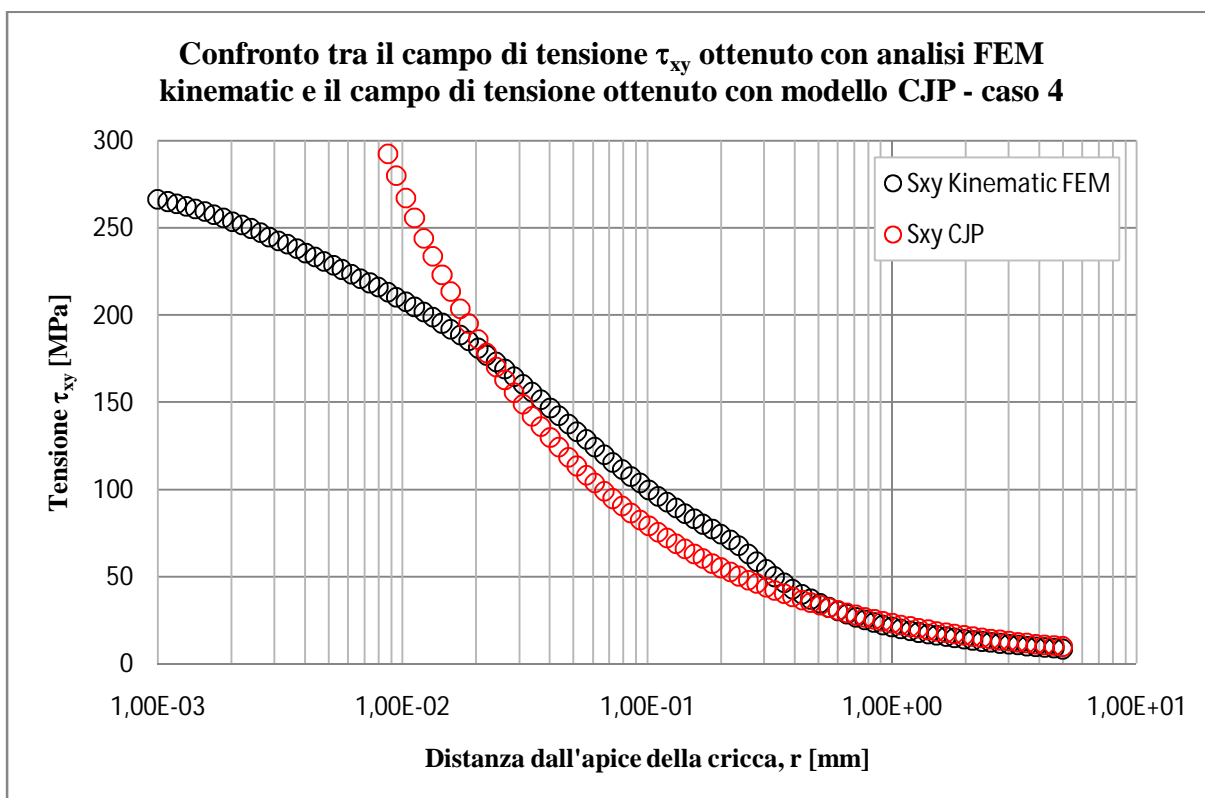


Figura 5.62 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 4 di tabella 5.1.

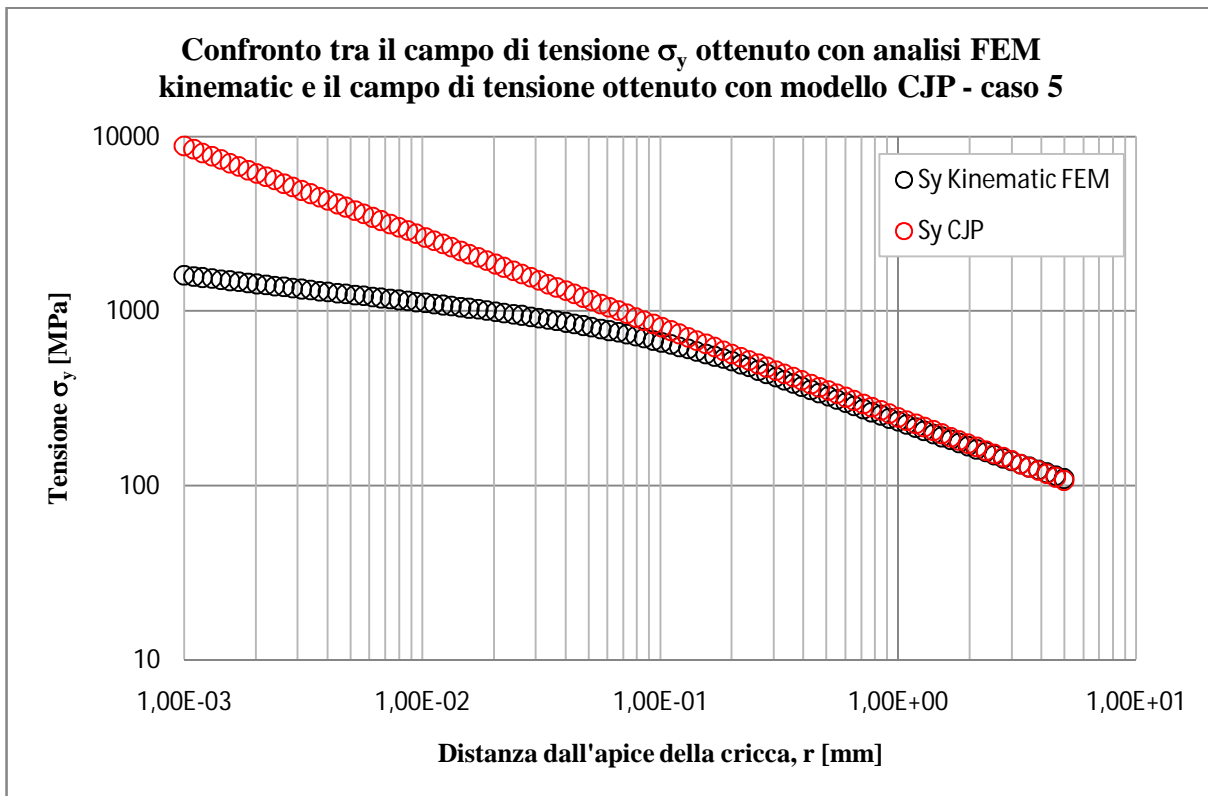


Figura 5.63 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1.

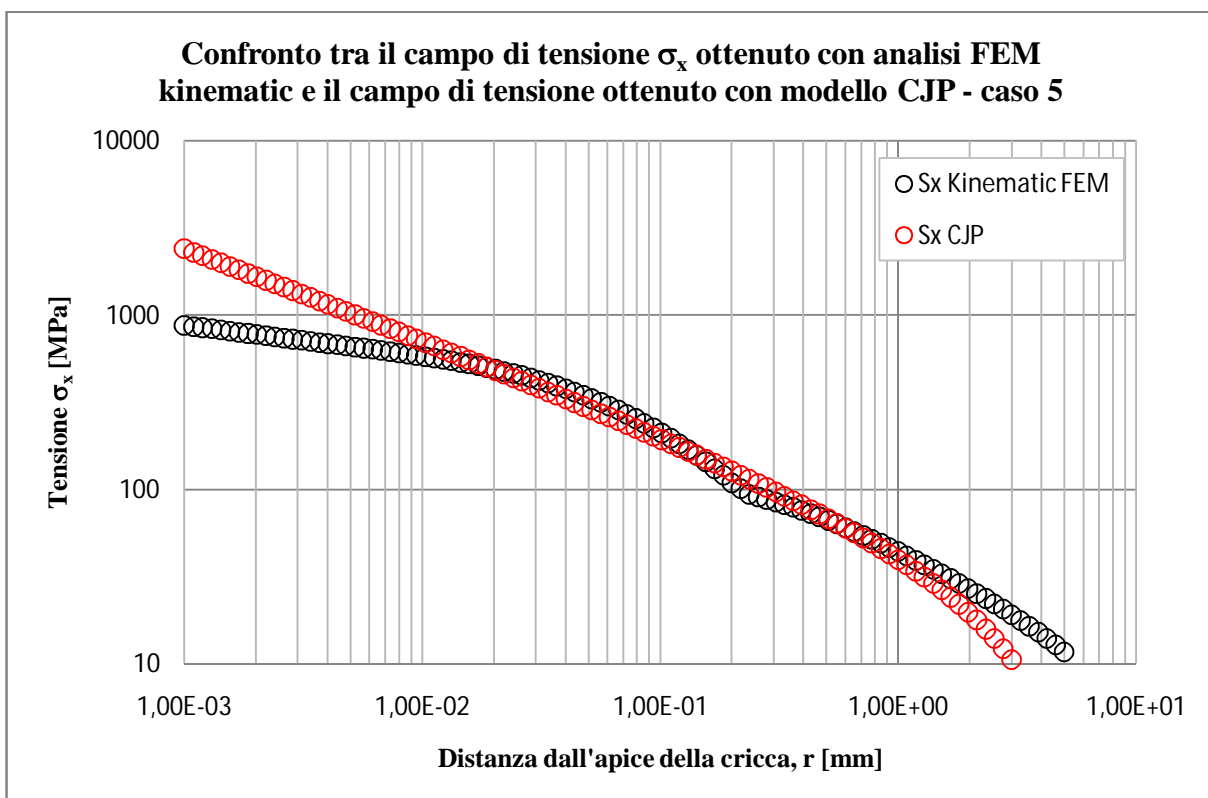


Figura 5.64 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1.

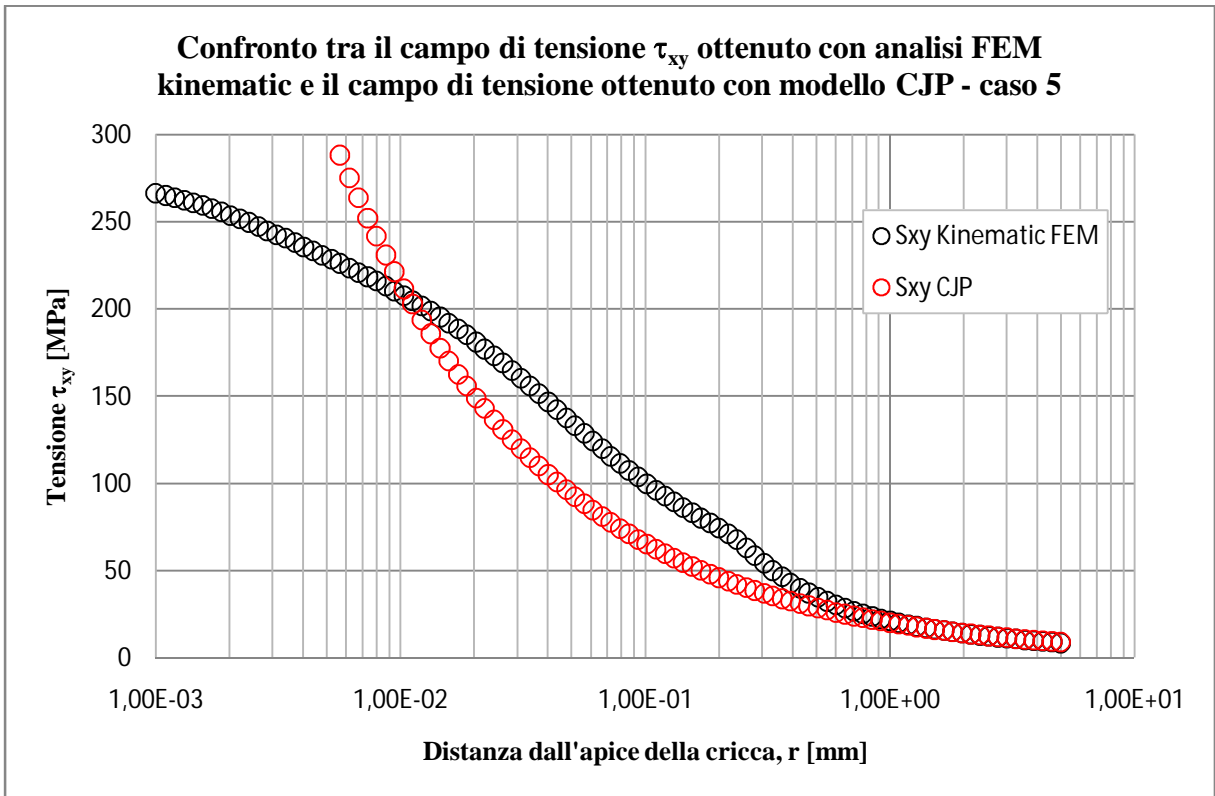


Figura 5.65 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1.

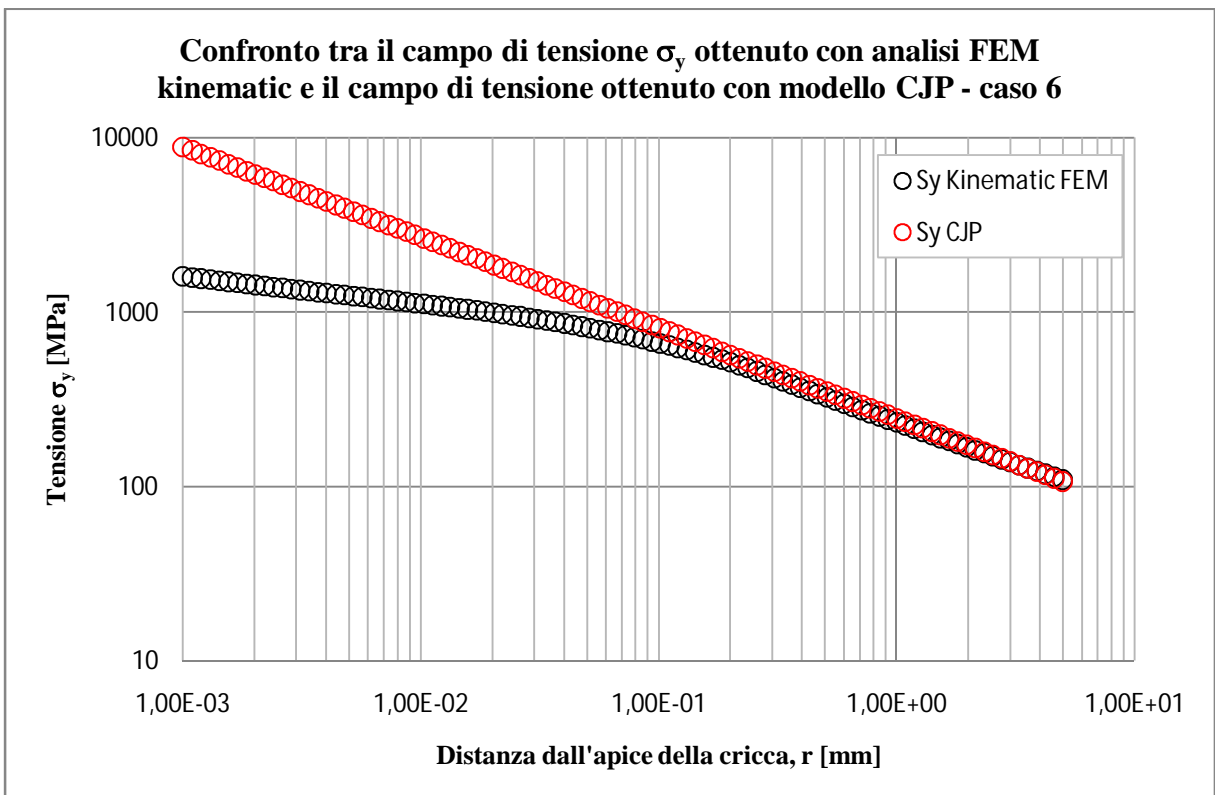


Figura 5.66 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la prima delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 6 di tabella 5.1.

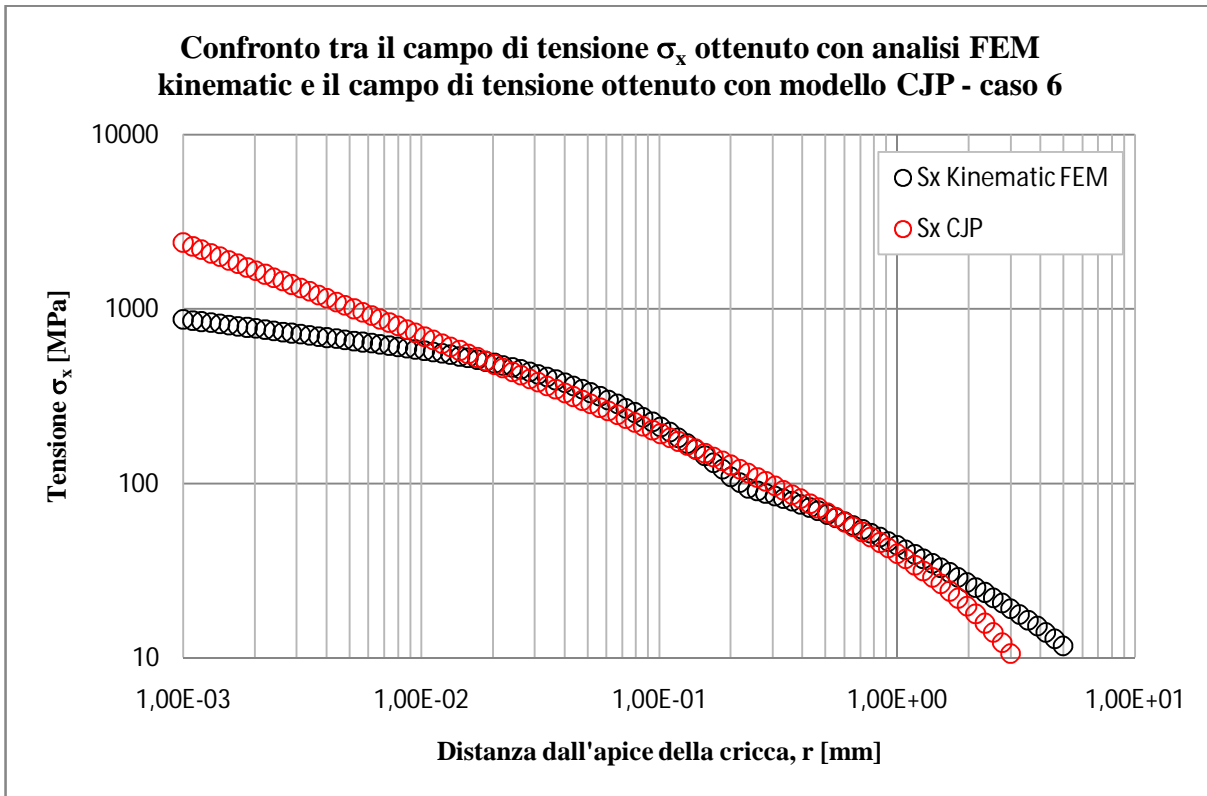


Figura 5.67 Confronto tra il campo di tensione σ_x misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 6 di tabella 5.1.

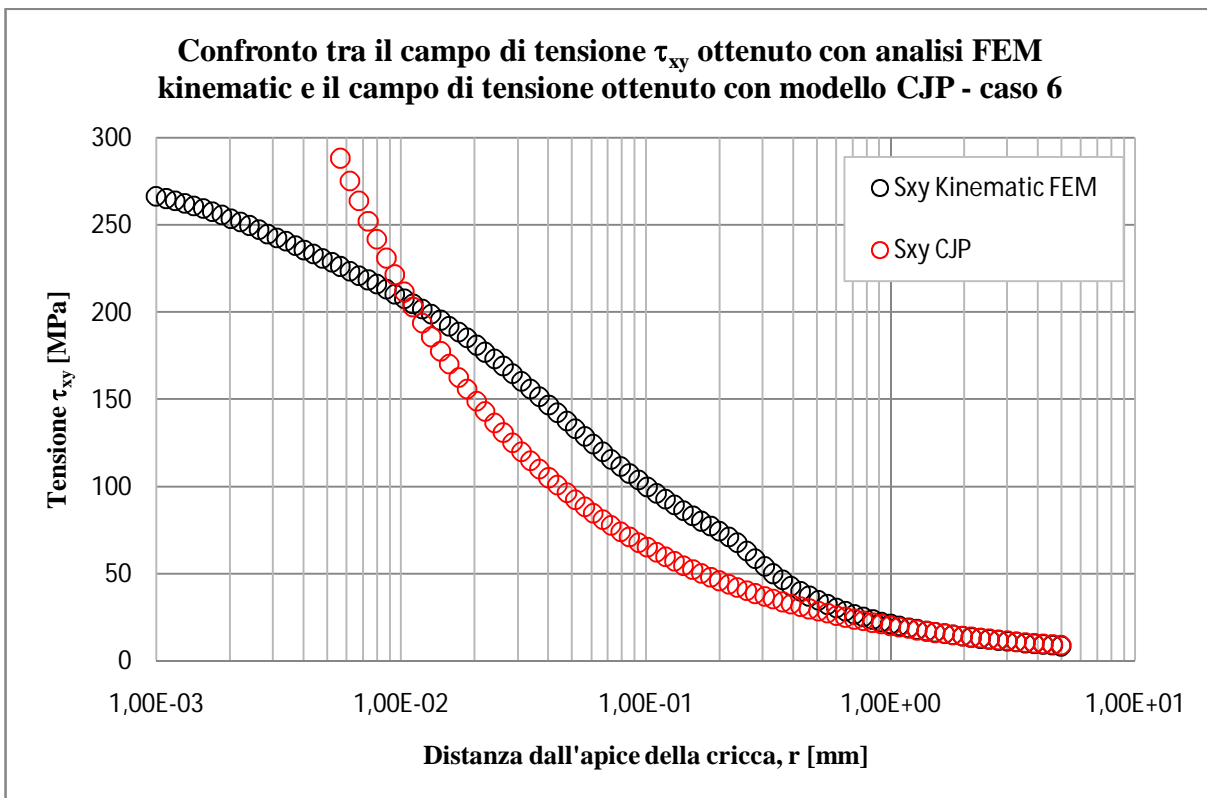


Figura 5.68 Confronto tra il campo di tensione τ_{xy} misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la terza delle 5.1 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 6 di tabella 5.1.

5.3.5 Conclusioni e discussione dei risultati ottenuti

Dopo aver attentamente analizzato i risultati dei confronti sopra riportati si può concludere che le differenze di rappresentazione dei campi di tensione ottenute utilizzando $r_0=r_p$ anziché $r_0=1\text{mm}$ sono minime, le diverse rappresentazioni si possono infatti considerare equivalenti. La particolare scelta del valore da assegnare al parametro r_0 , che in primo luogo si riteneva fosse di fondamentale importanza, si rivela invece totalmente ininfluente ai fini della capacità del modello di riprodurre i reali campi di tensione. Non sono di conseguenza giustificati altri sforzi al fine di determinare qual è il miglior valore da assegnare ad r_0 . Si conclude che $r_0=1\text{mm}$ potrebbe essere il valore da utilizzare in modo universale, utile essenzialmente ad uniformare le unità di misura delle tensioni e dei diversi SIF.

Si osserva poi che il modello riesce a riprodurre le tensioni su una regione “più estesa” per angoli θ minori. Man mano infatti che si considerano angoli θ maggiori il modello perde di precisione. Per fare un esempio di quanto detto si può considerare la tensione σ_y . La seconda delle 5.1 riproduce in modo molto preciso i dati FEM sulla bisettrice da una distanza che va da 0.04 mm fino a 5 mm dall’apice della cricca. Per l’angolo $\theta=22,5^\circ$ invece il campo di tensione viene ben riprodotto da una distanza che parte da 0,05mm dall’apice. Per gli angoli $\theta=45^\circ$ e $\theta=67,5^\circ$ il campo di tensione σ_y viene invece accuratamente riprodotto rispettivamente da 0.08 e 0.2 mm dall’apice della cricca. Si conclude pertanto che all’aumentare dell’angolo θ caratteristico della direzione lungo la quale si vogliono plottare le componenti di tensione diminuisce l’accuratezza del modello.

Una terza osservazione è legata ai coefficienti G, H ed E. Quando questi sono settati all’interno della zona plastica (caso 5 e 6), i campi di tensione che si ottengono applicando il modello CJP sono molto più prossimi ai dati FEM (relativi alla zona lineare elastica) rispetto a quando i medesimi coefficienti sono tarati in campo lineare elastico (casi 1, 2, 3 e 4). Ciò accade indistintamente sia per quanto riguarda il campo σ_y sia per quanto riguarda i campi σ_x e τ_{xy} indipendentemente dall’angolo θ . Come già ampiamente discusso nel capitolo precedente, essendo le analisi condotte in ipotesi di comportamento lineare elastico del materiale meno dispendiose di quelle condotte ipotizzando un comportamento elastoplastico, se fosse possibile tarare i coefficienti in campo lineare elastico si otterrebbe un grande risparmio in termini di tempo e di potenza di calcolo. Purtroppo per avere la migliore approssimazione dei dati FEM appartenenti alla regione prossima all’apice e deformata elasticamente (escludendo quindi la zona plastica) sono necessari dati FEM relativi alla zona deformata plasticamente.

5.4 Confronto tra campi di tensione calcolati nell'ipotesi di comportamento lineare elastico e comportamento elastoplastico

Si riporta qui di seguito, per i quattro angoli θ già presi precedentemente in esame, un confronto tra i risultati ottenuti da analisi FEM condotte nelle ipotesi di comportamento puramente lineare elastico ed elastoplastico (*kinematic hardening*) del materiale.

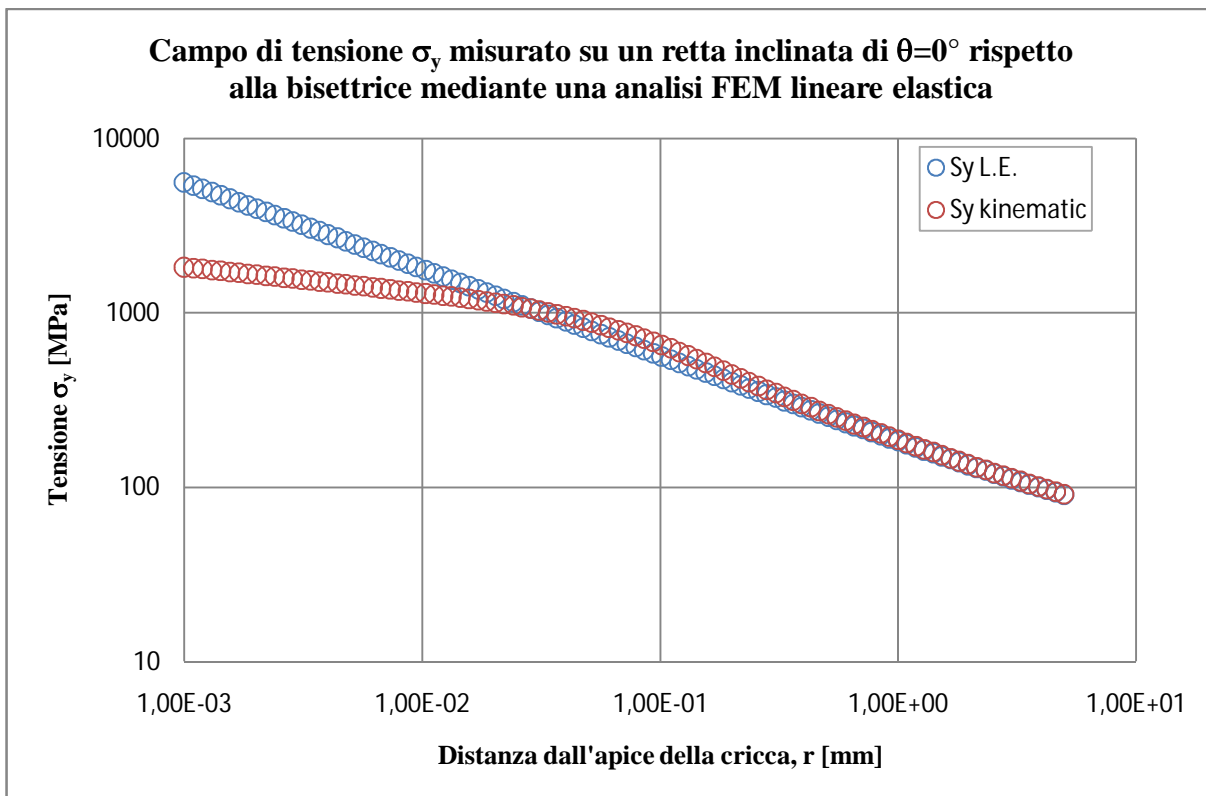


Figura 5.69 Confronto tra i campi di tensione σ_y misurati sulla bisettrice mediante analisi FEM eseguite nelle ipotesi di comportamento lineare elastico ed elastoplastico del materiale.

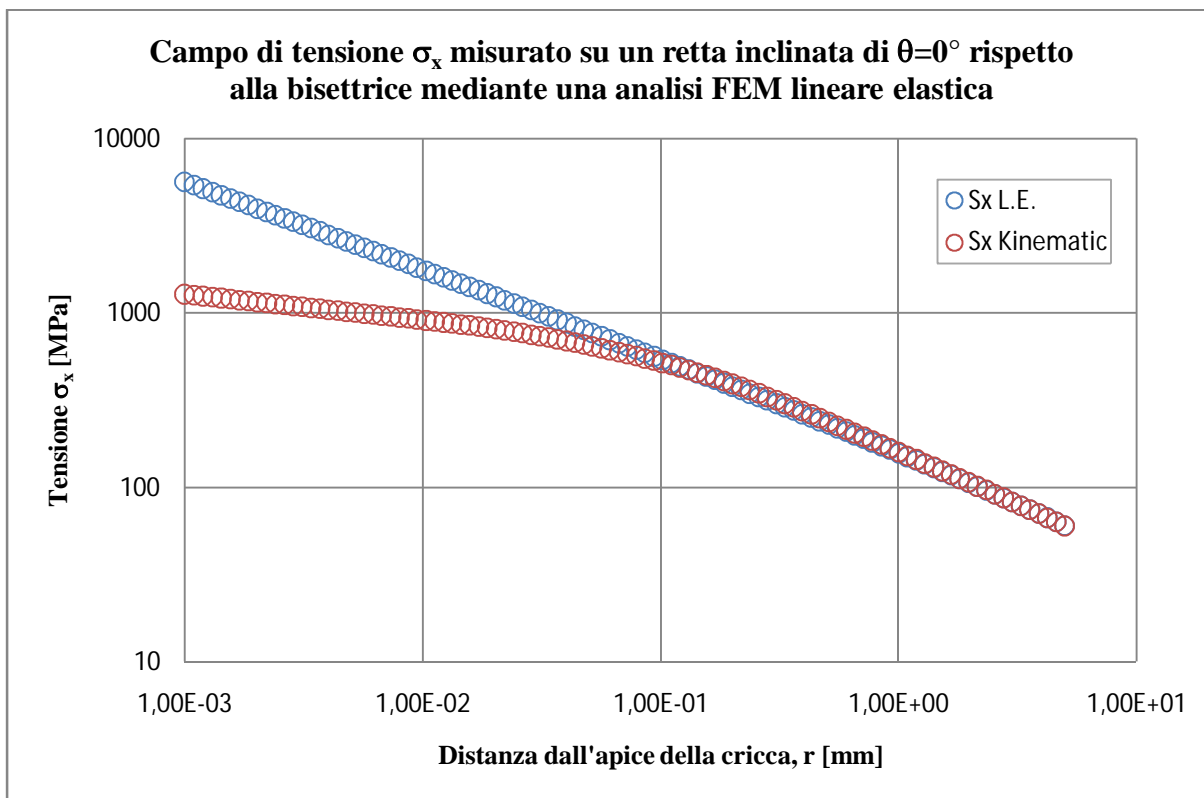


Figura 5.70 Confronto tra i campi di tensione σ_x misurati sulla bisettrice mediante analisi FEM eseguite nelle ipotesi di comportamento lineare elastico ed elastoplastico del materiale.

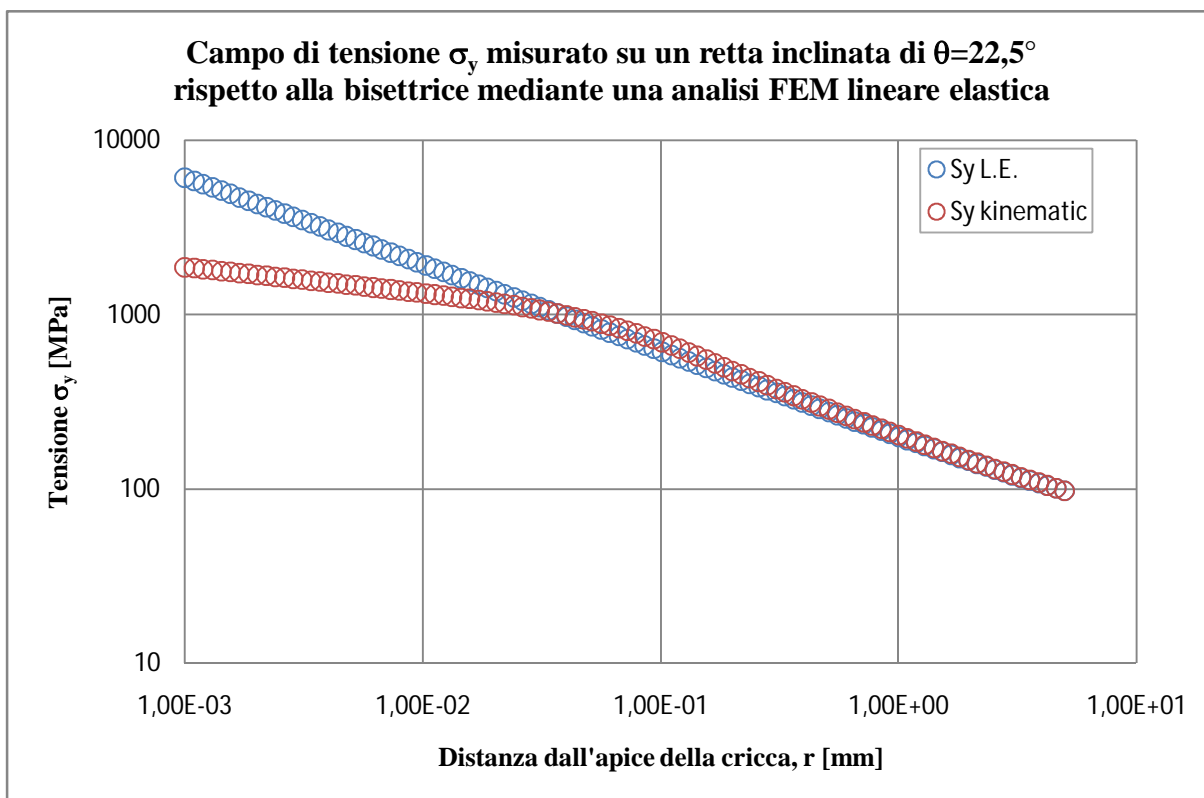


Figura 5.71 Confronto tra i campi di tensione σ_y misurati su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ mediante analisi FEM eseguite nelle ipotesi di comportamento lineare elastico ed elastoplastico del materiale.

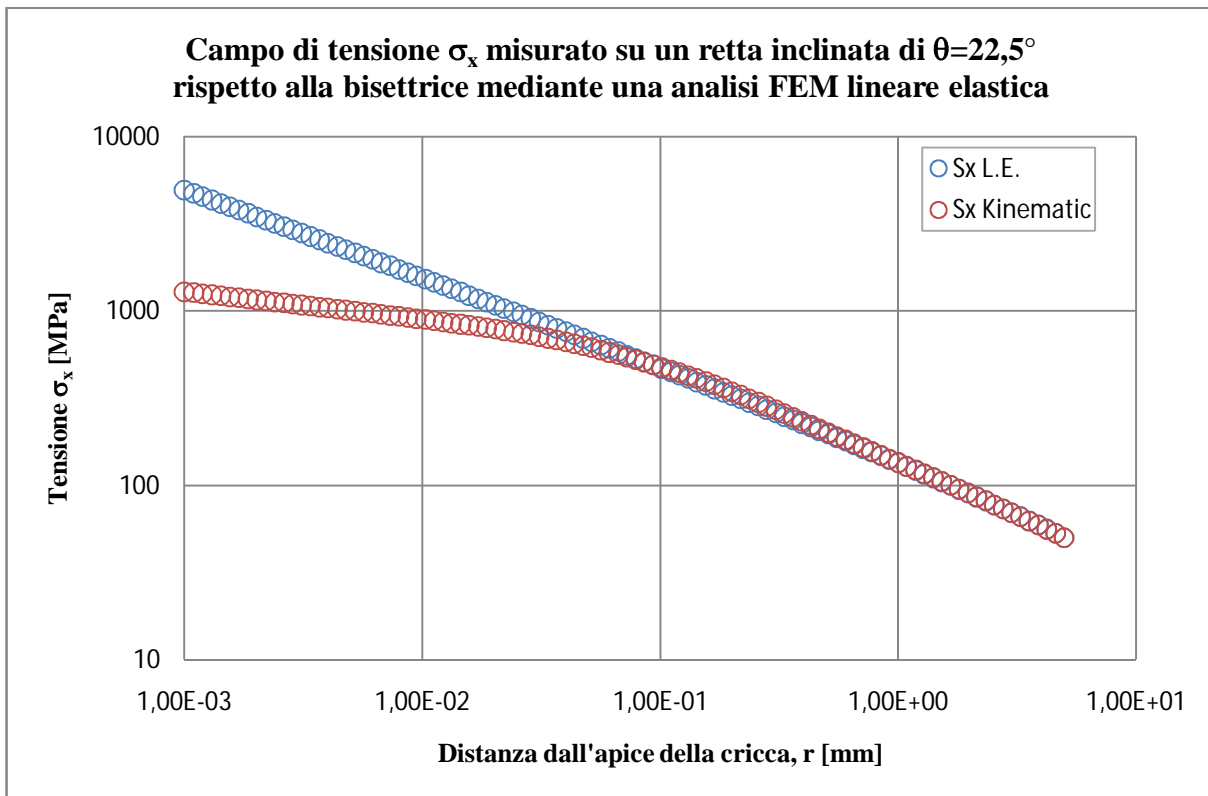


Figura 5.72 Confronto tra i campi di tensione σ_x misurati su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ mediante analisi FEM eseguite nelle ipotesi di comportamento lineare elastico ed elastoplastico del materiale.

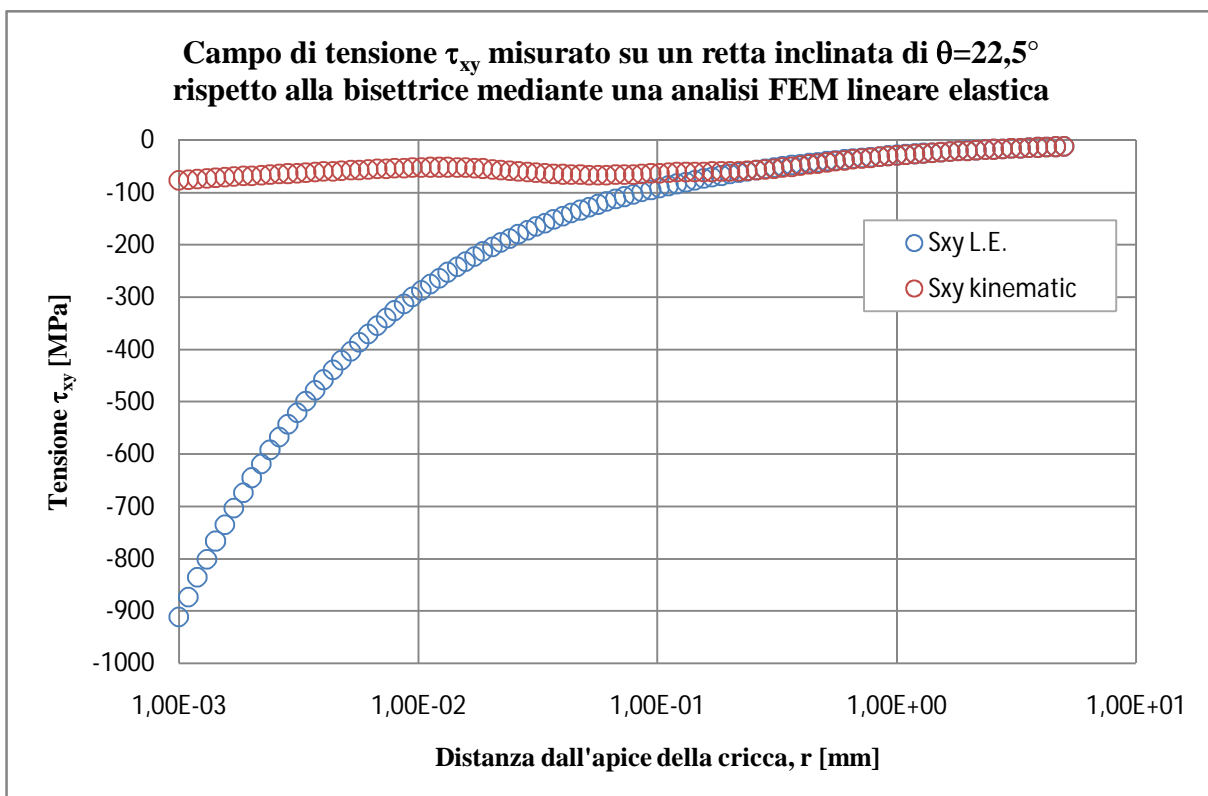


Figura 5.73 Confronto tra i campi di tensione τ_{xy} misurati su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ mediante analisi FEM eseguite nelle ipotesi di comportamento lineare elastico ed elastoplastico del materiale.

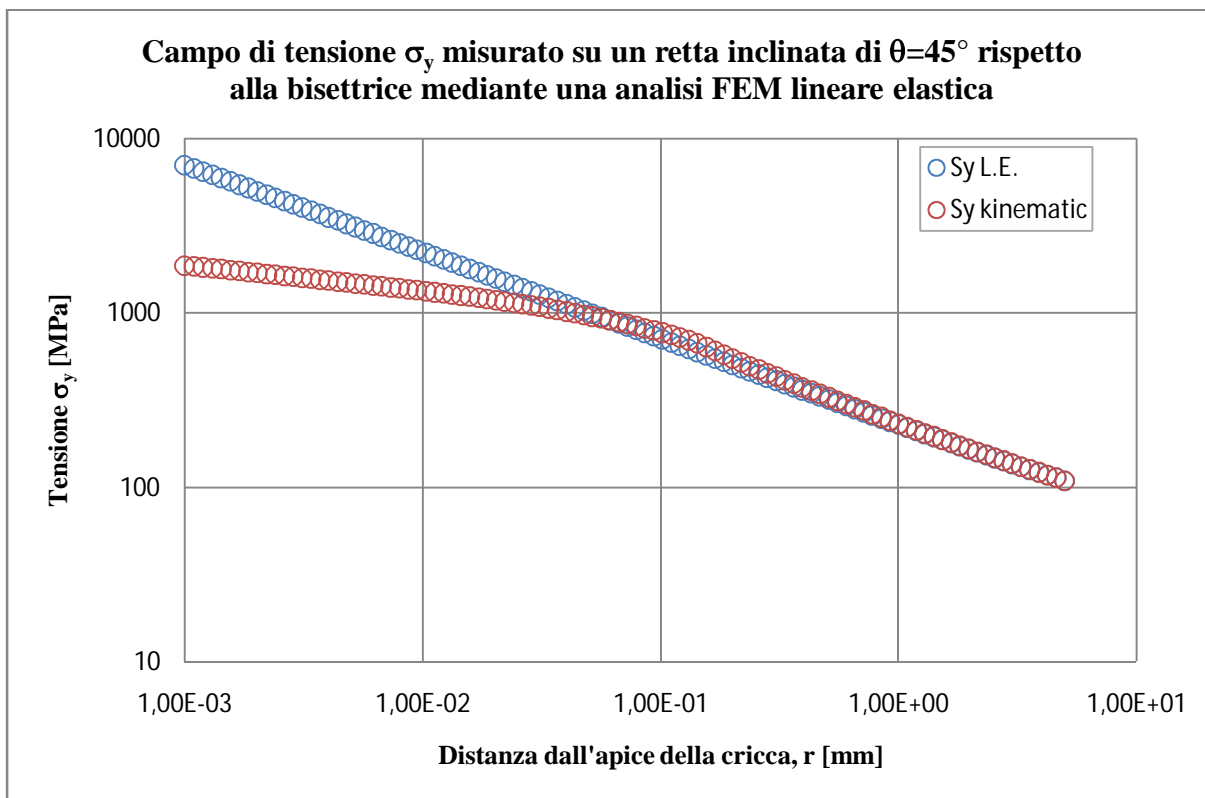


Figura 5.74 Confronto tra i campi di tensione σ_y misurati su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ mediante analisi FEM eseguite nelle ipotesi di comportamento lineare elastico ed elastoplastico del materiale.

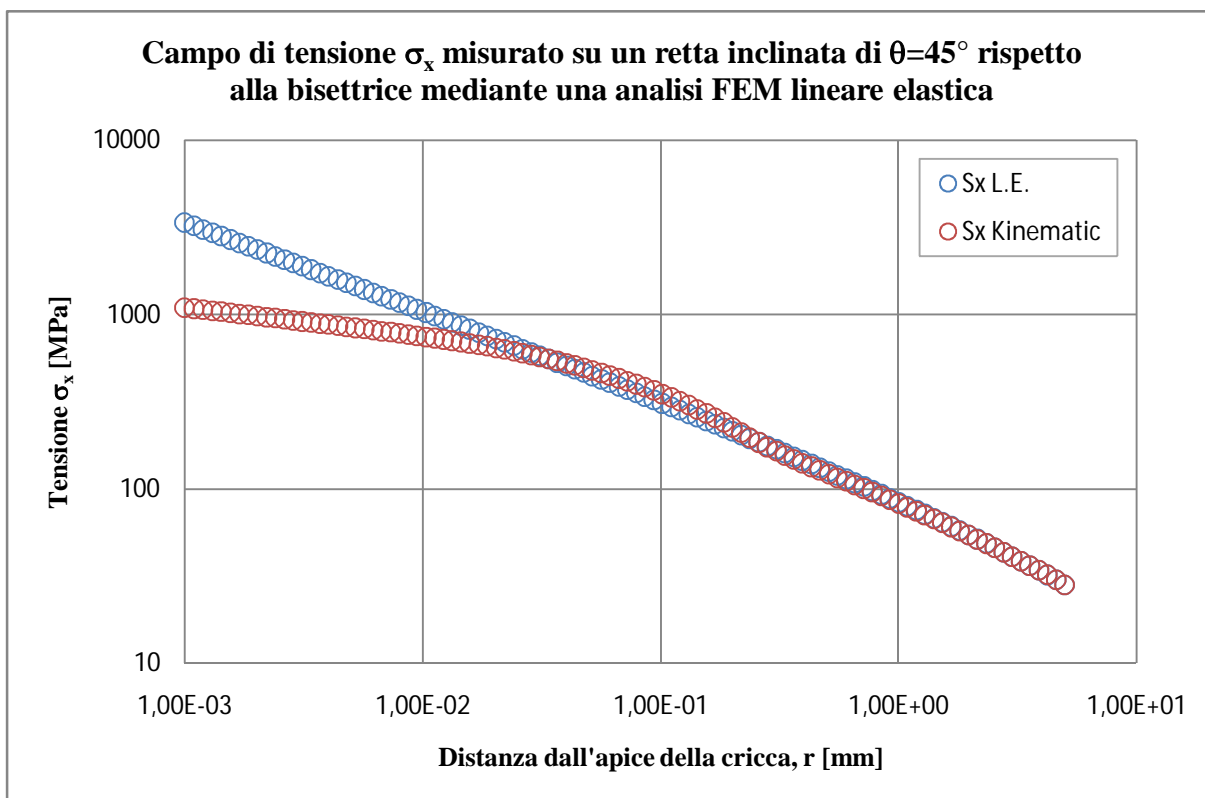


Figura 5.75 Confronto tra i campi di tensione σ_x misurati su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ mediante analisi FEM eseguite nelle ipotesi di comportamento lineare elastico ed elastoplastico del materiale.

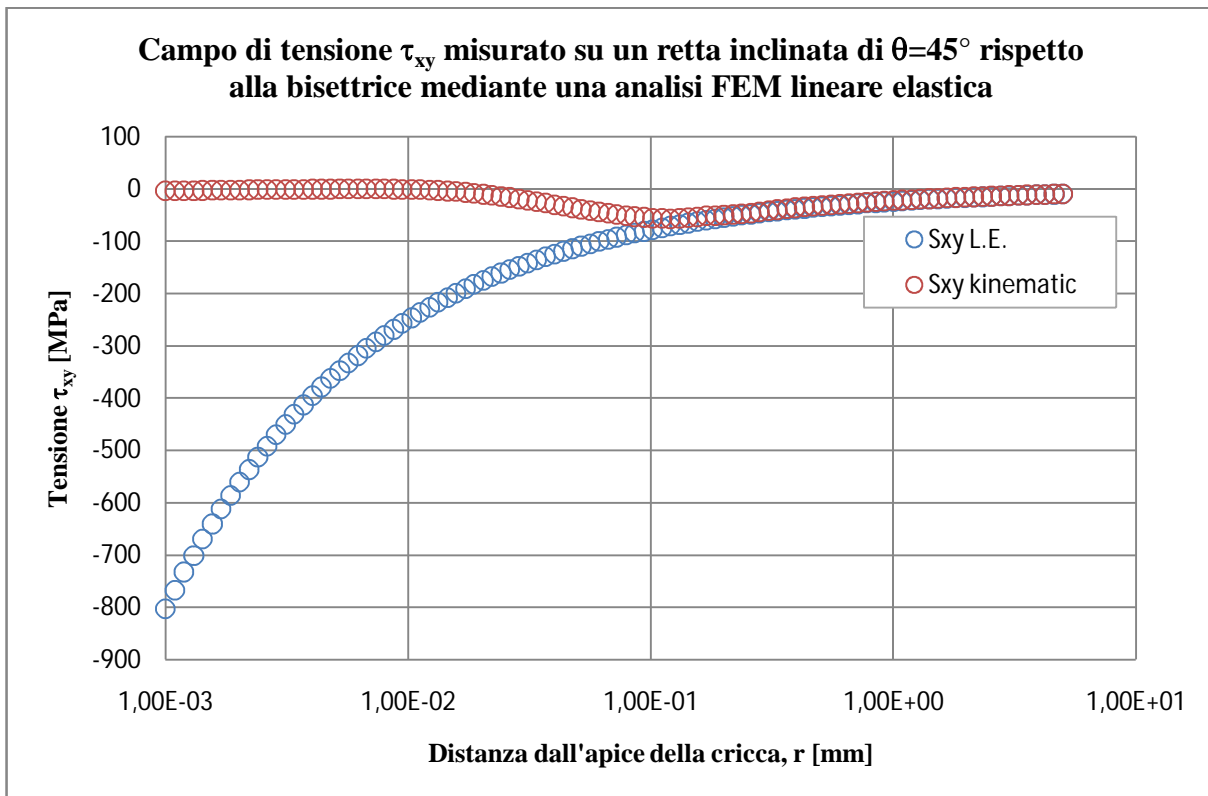


Figura 5.76 Confronto tra i campi di tensione τ_{xy} misurati su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ mediante analisi FEM eseguite nelle ipotesi di comportamento lineare elastico ed elastoplastico del materiale.

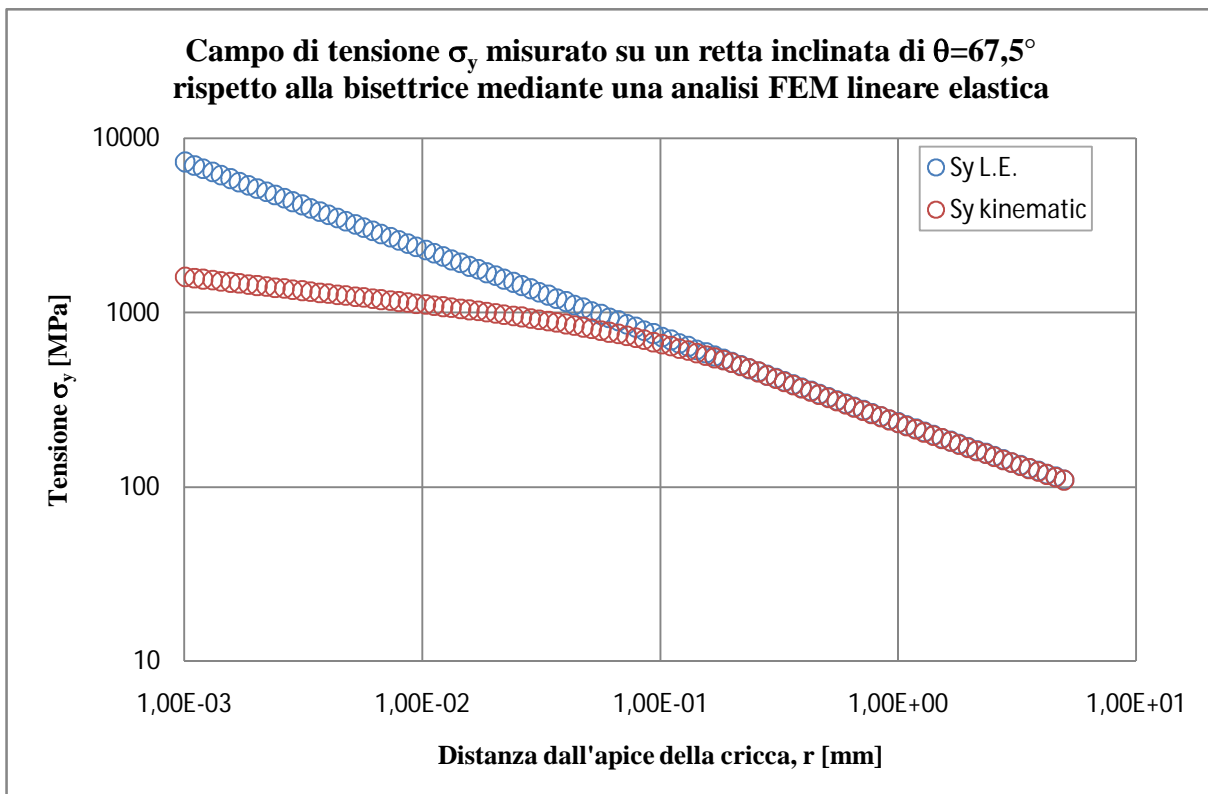


Figura 5.77 Confronto tra i campi di tensione σ_y misurati su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ mediante analisi FEM eseguite nelle ipotesi di comportamento lineare elastico ed elastoplastico del materiale.

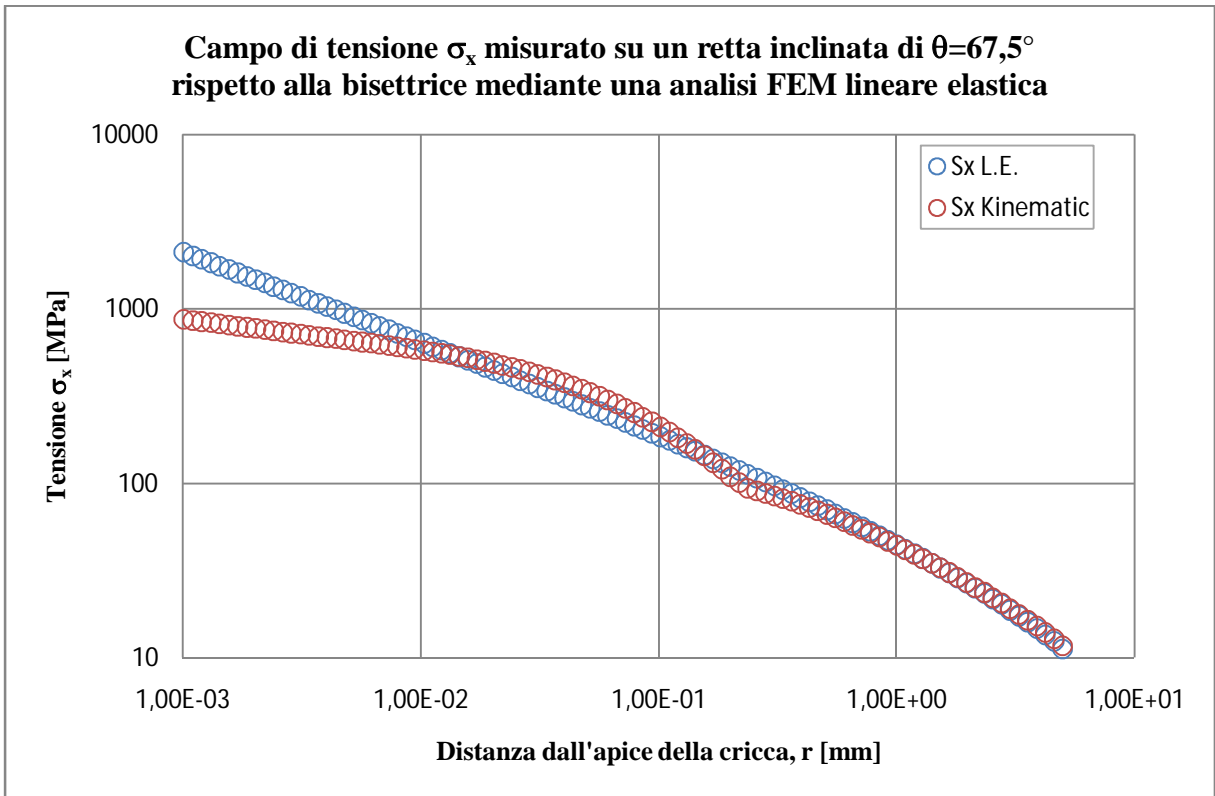


Figura 5.78 Confronto tra i campi di tensione σ_y misurati su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ mediante analisi FEM eseguite nelle ipotesi di comportamento lineare elastico ed elastoplastico del materiale.

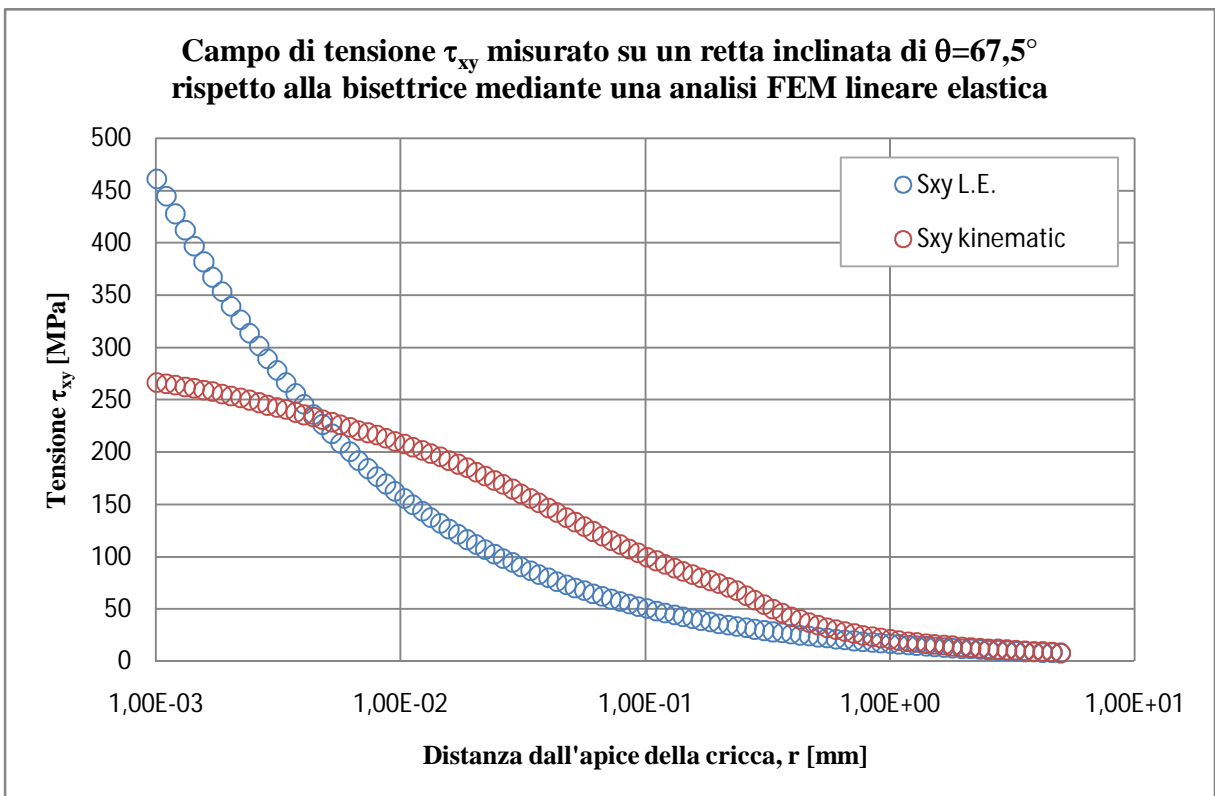


Figura 5.79 Confronto tra i campi di tensione τ_{xy} misurati su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ mediante analisi FEM eseguite nelle ipotesi di comportamento lineare elastico ed elastoplastico del materiale.

5.4.1 Conclusioni e alcune considerazioni

Paragonando i raffronti tra i campi di tensione appena riportati con quelli presentati ad inizio capitolo si deduce che, in termini di rappresentazione dei campi tensionali nella zona deformata elasticamente attorno alla zona plastica, una analisi lineare elastica dà le stesse informazioni del modello CJP. In altre parole, un'analisi lineare elastica permette di ottenere con ottima approssimazione il campi di tensione relativi alla zona adiacente a quella deformata permanentemente e situata all'apice della cricca. Ad utilizzare direttamente i dati ottenuti da una analisi lineare elastica, tralasciando quindi il modello CJP, ne consegue un risparmio in termini di tempo in relazione alle analisi senza contare l'opportunità di poter evitare di dover calcolare il valore dei coefficienti G, H ed E. Bisogna però sottolineare che quanto appena detto non è universalmente valido. La geometria, il materiale considerato (e quindi le sue proprietà), la modalità di applicazione del carico e l'entità del carico stesso fanno sì che la redistribuzione delle tensioni che ne consegue alla deformazione permanente che subisce il materiale all'apice della cricca sia ridotta e tale da non "alterare" eccessivamente la "forma" del campo di tensione elastoplastico.

Altra considerazione che si ritiene doveroso fare è relativa alla impossibilità di modellare una serie di eventi e fenomeni fisici mediante le analisi FEM. Il modello CJP, come già ampiamente discusso, si pone l'ambizioso obiettivo di riuscire a descrivere il campo di tensione lineare elastico attorno alla zona plastica in presenza di fenomeni di *shielding* e di *crack closure*. Essendo il FEM una tecnica numerica fondata sulla risoluzione di un sistema di equazioni differenziali che descrivono i vari fenomeni che influenzano il comportamento del materiale, qualora non si conosca approfonditamente la fisica di tali fenomeni e quindi non si possano nemmeno descrivere o per lo meno approssimare mediante funzioni numeriche, il FEM diventa uno strumento inefficiente. I fenomeni di *shielding* e *crack closure* risultano pertanto difficilmente implementabili nel codice di calcolo in quanto non sono tuttora completamente noti. Ci sono però altre tecniche quale ad esempio le frange isocromatiche, utilizzate per l'appunto dagli autori del modello [13-14], che permettono la misurazione delle tensioni non per via numerico-virtuale bensì per via fisico-sperimentale (si osservano cioè con particolari strumentazioni dei provini fisici durante dei test di trazione o prove di fatica). Il vantaggio di operare su un provino fisico anziché virtuale sta nel poter considerare e prendere in esame la totalità e la mutua influenza dei fenomeni che intervengono e di poterne stimare e percepire gli effetti. A tal proposito si considerino, per esempio, fenomeni che influenzano il *crack closure* quali la presenza fluidi oppure ossidi all'interno della cricca, trasformazioni di

fase nel materiale vicino all'apice, sfregamento dei lembi della cricca ecc. Al FEM non riuscendo a tenere in considerazione tali fenomeni non è possibile determinare in modo sufficientemente preciso l'entità di *shielding* e appunto del *crack closure* e pertanto nemmeno le reali distribuzioni di tensione sia sulla zona plastica sia all'esterno della stessa. Potrebbe esser questa quindi la causa per la quale le analisi FEM elastoplastiche si sovrappongono a quelle lineari elastiche nella regione circostante la zona plastica.

Un'osservazione è doverosa anche per quanto riguarda i coefficienti G, H ed E. Si rammenta che la proposta degli autori del modello è quella di tararli calcolando 3 fattori di intensificazione delle tensioni, uno sulla bisettrice della cricca (K_F) e due sui fianchi (K_R e K_S) (vedi equazioni 3.1). Quando gli autori definiscono tali SIF sui fianchi della cricca spiegano come questi sono rappresentativi dei campi di tensione non sui fianchi stessi bensì dell'interfaccia della scia plastica tra la zona deformata plasticamente e quella elasticamente. Tralasciando la correttezza concettuale o meno del definire un SIF in tal modo (si ricorda che sui fianchi della cricca le tensioni τ_{xy} sono nulle per definizione a meno di particolari contatti che si vengono a verificare tra i lembi durante un ciclo di sollecitazione a fatica), gli autori sembrano poi calcolare i SIF suddetti e settare i coefficienti G, H ed E non sui fianchi bensì proprio all'interfaccia tra zona plastica ed elastica sfruttando la tecnica delle frange isocromatiche. Se non si hanno però a disposizione particolari tecniche e tecnologie di indagine sperimentale risulta estremamente difficile misurare o determinare le tensioni all'interfaccia e pertanto risulta impossibile calcolare i SIF K_S e K_R oltre che tarare i coefficienti in modo diverso da quanto fatto nel presente lavoro.

Proposta di modifica del modello CJP

Capitolo 6

Obiettivo del seguente capitolo è la presentazione, elaborazione e verifica di una proposta di modifica da apportare al modello CJP finora descritto nel presente lavoro di tesi. L'idea di tale modifica è scaturita in seguito ad uno scambio di mail con gli autori del modello Christopher e James e da una disamina col prof. Lazzarin.

6.1 Introduzione

L'obiettivo principale del modello sinora discusso è introdurre un nuovo “strumento” matematico in grado di rappresentare il campo tensionale elastico realmente presente davanti e attorno alla zona plastica situata all'apice di una cricca sollecitata da carichi di fatica. In particolare tale modello si propone di valutare gli effetti che la regione plastica ha sulle tensioni davanti alla cricca, principalmente gli effetti di *shielding* e di *crack closure* responsabili per l'appunto del fenomeno di “rallentamento” della propagazione della cricca stessa.

Sebbene nel capitolo precedente sia stato dimostrato che il modello riesce a riprodurre in modo soddisfacente i campi di tensione elastici attorno alla zona plastica, pur rimanendo ancora problematiche le definizioni dei SIF K_F , K_R e K_S e la determinazione dei coefficienti G , H ed E che compaiono nelle espressioni delle tensioni, risulta comunque interessante tentare di “estendere” la capacità del modello di descrivere i campi elastici anche ai campi elastoplastici circondanti l'apice e i fianchi della cricca. A tal fine, e non solo, viene qui di seguito proposta una versione rivisitata del frame analitico ampiamente descritto nel capitolo 3, versione scaturita da una proposta di ridefinizione (modifica) dei potenziali complessi $\phi(z)$ e $\psi(z)$.

6.2 Il nuovo frame analitico ed il parametro F

Come anticipato, in riferimento ad una mail, datata febbraio 2011, inviata dagli autori del modello, i quali suggeriscono una modifica dei potenziali complessi $\phi(z)$ e $\psi(z)$, si riporta qui di seguito una versione rivisitata della trattazione matematica del modello CJP esposta nel capitolo 3.

In seguito alla modifica apportata ai potenziali complessi, questi risultano:

$$\begin{aligned}\phi(z) &= -2z^{\frac{1}{2}} \left[H + E \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \right] - \frac{1}{4} Cz + \boxed{\frac{F}{4} z} \\ \psi(z) &= Gz^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{2} z + Dz^{\frac{1}{2}} \left[\ln \left(\frac{z}{z_0} \right) - 2 \right] + \boxed{\frac{F}{2} z}\end{aligned}\quad (6.1)$$

Le differenze tra la nuova versione proposta dei potenziali complessi e la precedente (equazioni 3.9) sono messe in evidenza nella 6.1 tramite un riquadro. In seguito a tale modifica le derivate dei potenziali complessi $\phi(z)$ e $\psi(z)$ risultano:

$$\begin{aligned}\phi'(z) &= \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} = -Hz^{-\frac{1}{2}} - Ez^{-\frac{1}{2}} \left[\ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + 2 \right] - \frac{1}{4} C + \frac{F}{4} \\ \phi''(z) &= \frac{\partial \phi'(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} Hz^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} Ez^{-\frac{3}{2}} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \\ \psi'(z) &= \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} Gz^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} Dz^{-\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + \frac{F}{2}\end{aligned}\quad (6.2)$$

Se si calcolano ora la parte reale di $\phi'(z)$ e le parti reale e immaginaria di $\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)$ risulta:

$$\begin{aligned}\Re\{\phi'(z)\} &= -Hr^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} - Er^{-\frac{1}{2}} \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \left[\ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + 2 \right] + \sin \frac{\theta}{2} (\theta - \theta_0) \right\} - \frac{1}{4} C + \frac{1}{4} F \\ \Re\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\} &= \left\{ \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \left[H \cos \left(\frac{5\theta}{2} \right) + E \left(\cos \left(\frac{5\theta}{2} \right) \ln \frac{r}{r_0} + (\theta - \theta_0) \sin \left(\frac{5\theta}{2} \right) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + D \left(\ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + (\theta - \theta_0) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right] \right\} + \frac{C}{2} + \frac{F}{2}\end{aligned}\quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}\Im\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\} &= -\frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \left\{ H \sin \left(\frac{5\theta}{2} \right) + E \left[\sin \left(\frac{5\theta}{2} \right) \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) - (\theta - \theta_0) \cos \left(\frac{5\theta}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + G \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) + D \left[\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) - (\theta - \theta_0) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \right\}\end{aligned}$$

Dalle 3.10, note le 6.3, è possibile determinare le espressioni delle componenti di tensione, le quali risultano precisamente:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\Re\{\phi'(z)\} - \Re\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\} \\ &= -\frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) [G + 4H + 8E] - \frac{1}{2} Hr^{-\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{5\theta}{2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} Er^{-\frac{1}{2}} \left\{ \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \left[\cos \left(\frac{5\theta}{2} \right) + 3\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] + (\theta - \theta_0) \left[\sin \left(\frac{5\theta}{2} \right) + 3\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} \\ &\quad - C\end{aligned}\quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} &= 2\Re\{\phi'(z)\} + \Re\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\} \\
 &= \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)[G - 4H - 8E] + H\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right)\right. \\
 &\quad \left.+ E\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\left[\cos\left(\frac{5}{2}\theta\right) - 5\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] + (\theta - \theta_0)\left[\sin\left(\frac{5}{2}\theta\right) - 5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right]\right\} \\
 &\quad + F \\
 \tau_{xy} &= \Im\{z\phi''(z) + \psi'(z)\} \\
 &= -\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\left[G\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + H\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)\right] \\
 &\quad - Er^{-\frac{1}{2}}\sin(\theta)\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + (\theta - \theta_0)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]
 \end{aligned}$$

È interessante notare che prendendo in considerazione la bisettrice della cricca ($\theta = 0$), qualora siano verificate le condizioni $G = -H$ e $D = -E$ la differenza di tensione $\sigma_y - \sigma_x$ risulta:

$$\sigma_y - \sigma_x = 2\Re\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\} = F + C \quad (6.5)$$

Alcune metodologie sperimentali consentono di misurare esattamente la differenza delle tensioni $\sigma_y - \sigma_x$ ed è proprio questo uno dei motivi che ha dato l'input all'idea di modificare nel modo prima descritto i potenziali complessi.

Come si può notare confrontando le espressioni delle tensioni che si ottengono in seguito alla modifica dei potenziali complessi (espressioni 6.4) con le precedenti ricavate nel capitolo 3 (espressioni 3.31) l'unica differenza è presente nella equazione che descrive il campo di tensione σ_y . In particolare nella 6.4 compare il termine F che nella 3.31 era assente.

La determinazione del valore del parametro F può essere eseguita in modo tutto sommato semplice. A partire da una analisi elastoplastica si possono ricavare i campi di tensione σ_x e σ_y sulla bisettrice della cricca. Dalla 6.5 (valida, si rammenta, quando sono verificate le condizioni $\theta = 0$, $G = -H$ e $D = -E$), noti i campi σ_y e σ_x , essendo $C = -T$ dove $T = T$ -stress, si determina con una semplice operazione di sottrazione il valore puntuale di $F - T$. In modo analogo viene ricavato anche il valore della T -stress. Anch'esso infatti si determina come sottrazione delle componenti di tensioni normali misurate sulla bisettrice, determinate ora mediante una analisi lineare elastica come descritto nel capitolo precedente. Noto il valore di $F - T$ e della T -stress è possibile determinare il valore del parametro F che, a differenza del valore assunto costante della T -stress, varierà da punto a punto incrementando man mano che ci si avvicina all'apice della cricca.

Si riportano qui di seguito dei plottaggi che rappresentano l'andamento del parametro F sia per ipotesi di comportamento kinematic hardening che di comportamento isotropic hardening al LS1 e al LS3. I dati presi in considerazione sono relativi ad una distanza che va da 0,057

mm a 5 mm dall'apice della cricca. Nei grafici sono riportati anche i plottaggi della T-stress (che assume valore costante $T - stress = -27MPa$) e del valore assunto dalla funzione $\sigma_y - \sigma_x = F + C$.

Il valore 0,057 mm non è casuale bensì corrisponde al valore del raggio plastico calcolato con la formula di Irwin aggiornata al caso di sollecitazione a fatica. Secondo Irwin si ha:

$$r_p = \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi\sigma_{sn}}} \right)^2 = 0.2284 \text{ mm}$$

Aggiornando la relazione di Irwin al caso di fatica, il raggio plastico risulta:

$$r_p = \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi} \cdot 2\sigma_{sn}} \right)^2 = 0.05709 \text{ mm}$$

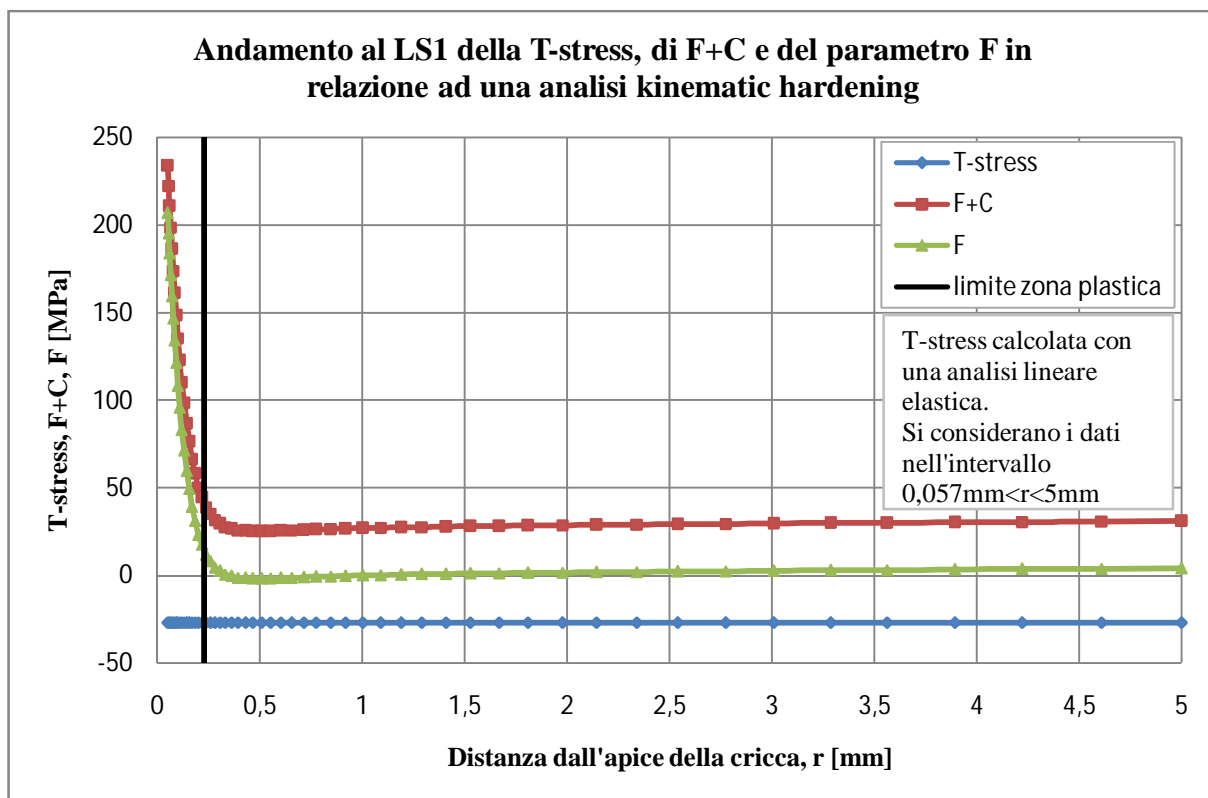


Figura 6.1 Andamento al LS1 della funzione $\sigma_y - \sigma_x = F + C$ e del parametro F su una regione che va da 0,057 mm (valore del raggio plastico nel caso di sollecitazione a fatica) a 5 mm dall'apice della cricca, utilizzando per la determinazione una analisi FEM nella quale si ipotizza un comportamento kinematic hardening del materiale. Nel caso presente si considera un valore costante della T-stress determinato mediante una analisi FEM lineare elastica.

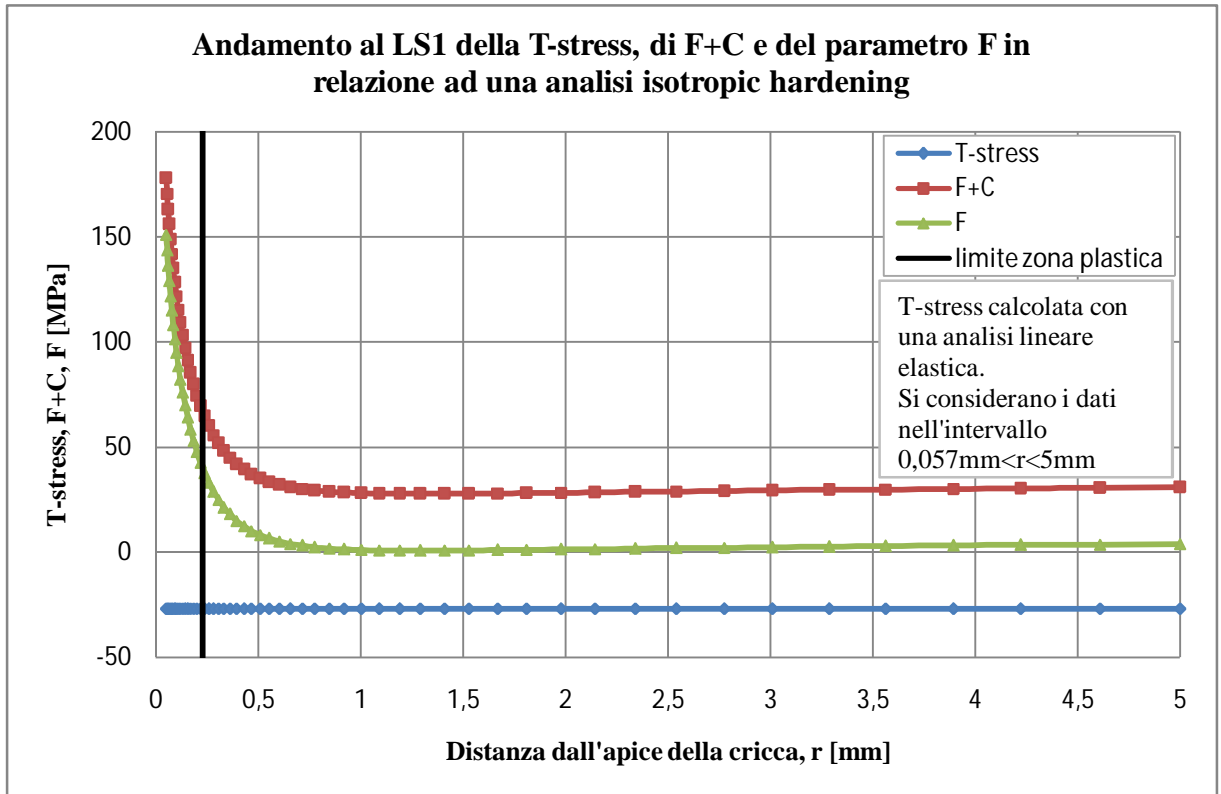


Figura 6.2 Andamento al LS1 della funzione $\sigma_y - \sigma_x = F+C$ e del parametro F su una regione che va da 0,057 mm (valore del raggio plastico nel caso di sollecitazione a fatica) a 5 mm dall'apice della cricca, utilizzando per la determinazione una analisi FEM nella quale si ipotizza un comportamento isotropic hardening del materiale. Nel caso presente si considera un valore costante della T-stress determinato mediante una analisi FEM lineare elastica.

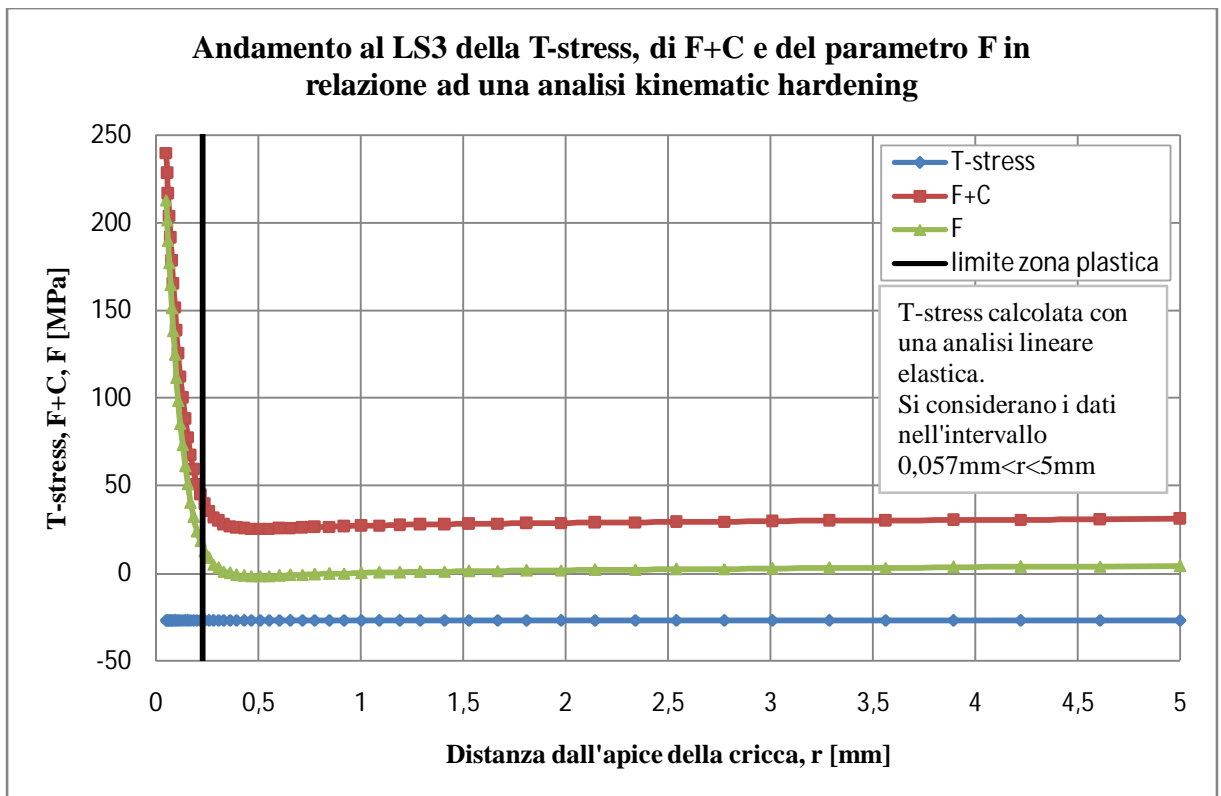


Figura 6.3 Andamento al LS3 della funzione $\sigma_y - \sigma_x = F+C$ e del parametro F su una regione che va da 0,057 mm (valore del raggio plastico nel caso di sollecitazione a fatica) a 5 mm dall'apice della cricca, utilizzando per la determinazione una analisi FEM nella quale si ipotizza un comportamento kinematic hardening del materiale. Nel caso presente si considera un valore costante della T-stress determinato mediante una analisi FEM lineare elastica.

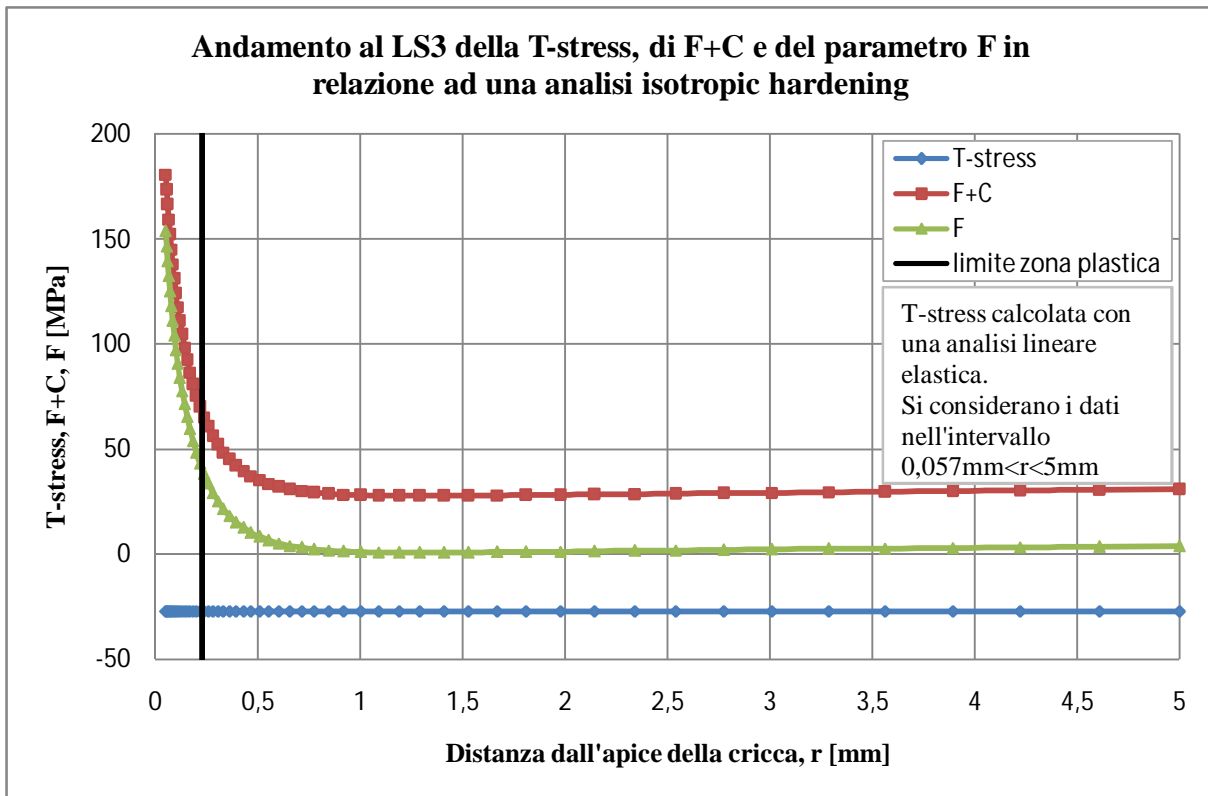


Figura 6.4 Andamento al LS3 della funzione $\sigma_y - \sigma_x = F+C$ e del parametro F su una regione che va da 0,057 mm (valore del raggio plastico nel caso di sollecitazione a fatica) a 5 mm dall'apice della cricca, utilizzando per la determinazione una analisi FEM nella quale si ipotizza un comportamento isotropic hardening del materiale. Nel caso presente si considera un valore costante della T-stress determinato mediante una analisi FEM lineare elastica.

Si può notare che le differenze tra quanto riscontrato ai LS1 e LS3, a parità di comportamento considerato del materiale, sono estremamente ridotte (tanto da poter considerare i risultati coincidenti) e riguardano esclusivamente i dati a sinistra della linea nera rappresentativa del confine tra zona plastica ed elastica (quindi si hanno differenze, per altro minime, solo tra i dati relativi alla zona deformata plasticamente).

Si osserva inoltre, relativamente ai soli grafici riferiti al LS1 (figure 6.1 e 6.2), che l'andamento della funzione $F + C$ è diversa a seconda che si ipotizzi un comportamento “*kinematic hardening*” anziché “*isotropic hardening*”. Mentre questo è perfettamente plausibile quando si prende in considerazione il LS3, altrettanto non si può dire quando ci si riferisce al LS1, in quanto le fasi di primo carico sono le medesime sia in termini di andamento della curva $\sigma - \varepsilon$ del materiale sia di “stato” del materiale (deformazioni indotte nel materiale durante i precedenti cicli di carico-scarico ecc). Dal punto di vista teorico quindi queste differenze di andamento della funzione $F+C$ riscontrate al LS1 per le ipotesi di comportamento “*isotropic hardening*” e “*kinematic hardening*” non sono giustificabili. Lo sono invece dal punto di vista computazionale. La curva $\sigma - \varepsilon$ del materiale, che deve essere fornita come dato di input al software prima dell'analisi elastoplastica in ipotesi di

comportamento *isotropic hardening*, è costituita da 100 punti (coppie di valori) σ_i - ε_i diversamente da quanto accade relativamente ad una analisi in ipotesi di comportamento *kinematic hardening* del materiale dove i punti suddetti sono anziché 100 solamente 20. Pertanto è con tale ragionamento che si giustifica la differenza tra gli andamenti delle funzioni $F + C$ determinate al LS1 sotto diversa ipotesi di comportamento del materiale.

Una ulteriore osservazione che si può fare, forse la più importante, è relativa all'andamento del valore del parametro F. Questo parametro assume un valore circa costante e prossimo allo zero al di fuori della zona plastica, valori ben superiori all'interno della zona plastica che aumentano al tendere all'apice della cricca e un andamento nella zona di transizione dal campo plastico a quello elastico che sembra raccordare i 2 trend precedenti (cioè quello all'avvicinarsi all'apice di cricca e quello della zona lineare elastica). Questo particolare andamento incrementa la convinzione che tale parametro possa essere adottato per estendere la rappresentazione dei campi di tensione σ_y anche alla zona plastica. Infatti, obiettivo del modello CJP, come più volte detto nel presente lavoro, è quello di descrivere e rappresentare solo i campi di tensione elastici, fuori quindi dalla zona plastica, che si possono considerare responsabili della propagazione della cricca durante una sollecitazione di fatica. La modifica apportata ai potenziali complessi ha permesso di ottenere un parametro che, come detto prima, assume valori non prossimi allo zero solo in prossimità della transizione dalla zona elastica a quella plastica e all'interno della zona plastica. Eseguendo una analisi dimensionale delle 6.4 si vede chiaramente che, al pari del coefficiente C, il parametro F ha l'unità di misura di una tensione [MPa]. Considerandolo allora come una tensione negativa, cioè introducendolo nella 6.4 con segno negativo, esso avrà l'effetto di "abbassare" il campo di tensione σ_y nella zona plastica rispetto a quanto avveniva nella precedente versione della espressione della medesima componente di tensione (equazione 3.31), lasciando circa inalterata la rappresentazione del campo elastico.

Un futuro tentativo, sicuramente più complesso e audace, potrebbe essere quello di utilizzare e gestire il parametro F per descrivere il fenomeno di *crack closure*. Sebbene esso non possa essere direttamente utilizzato per rappresentare gli effetti del *crack closure* sul campo elastico di fronte alla cricca, in quanto in tale zona esso assume valore nullo, può essere adottato per rappresentare le tensioni di compressione che nascono nella zona plastica e sui fianchi a causa del contatto di questi e che devono essere vinte al fine di ottenere l'apertura della cricca necessaria per causarne la propagazione. Il termine F può essere interpretato quindi come una tensione che si comporta in modo analogo alla tensione di chiusura del modello elastoplastico di Dugdale, cioè di una tensione provocata dalla zona plastica apicale che si oppone al

movimento di apertura della cricca e che quindi ne rallenta la propagazione. In altri termini, il parametro F può essere rappresentativo, qualora lo si assuma di valore positivo, dell'effetto di *crack closure* e pertanto si ritiene possa quantificare in modo indiretto l'entità di tale fenomeno.

Anziché valutare il parametro F adottando un valore medio e quindi costante dalla T-stress è possibile utilizzare il valore puntuale che tale tensione assume sui nodi collocati sulla bisettrice. Il procedimento da utilizzare poi per la determinazione dell'andamento e dei valori assunti dal parametro F è il medesimo prima descritto. I risultati che si ottengono sono i seguenti e le differenze che si notano confrontandoli con quelli prima riportati sono minimi.

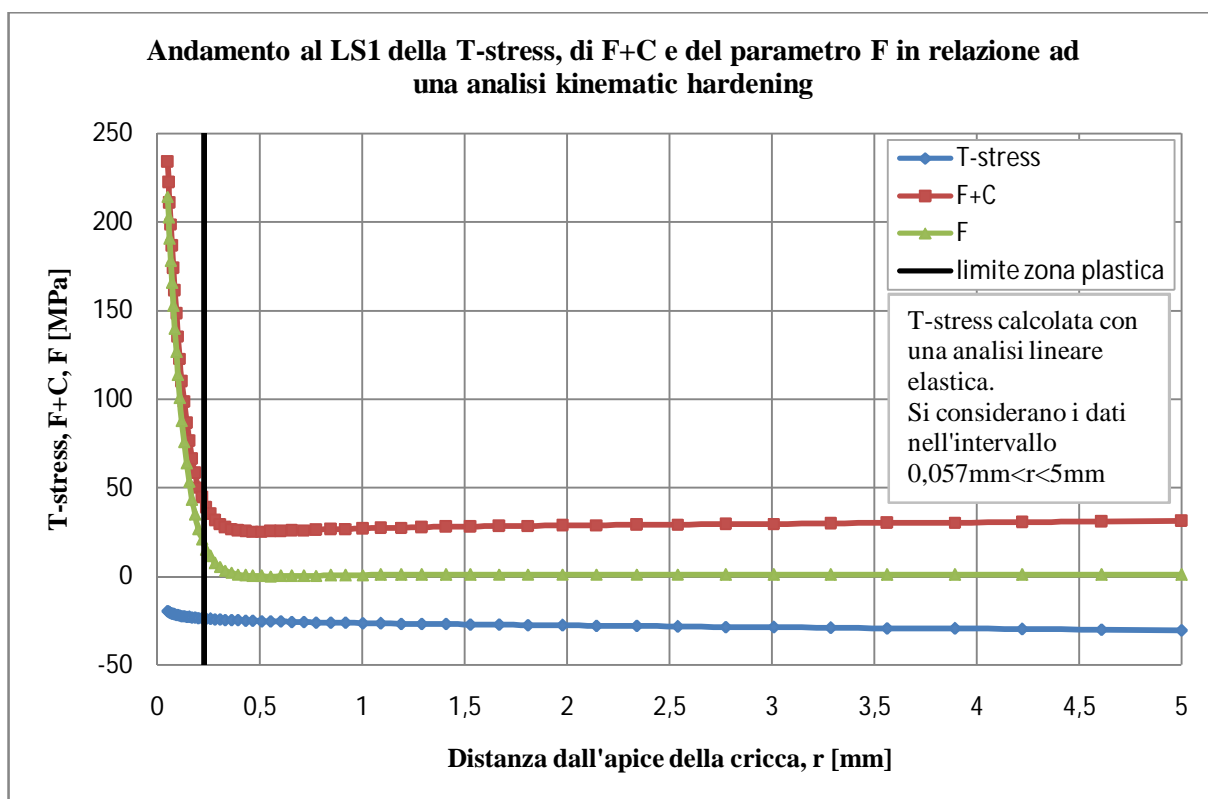


Figura 6.5 Andamento al LS1 della funzione $\sigma_y - \sigma_x = F+C$ e del parametro F su una regione che va da $0,057$ mm (valore del raggio plastico nel caso di sollecitazione a fatica) a 5 mm dall'apice della cricca, utilizzando per la determinazione una analisi FEM nella quale si ipotizza un comportamento kinematic hardening del materiale. Nel caso presente si considera punto per punto il valore della T-stress determinato mediante una analisi FEM lineare elastica.

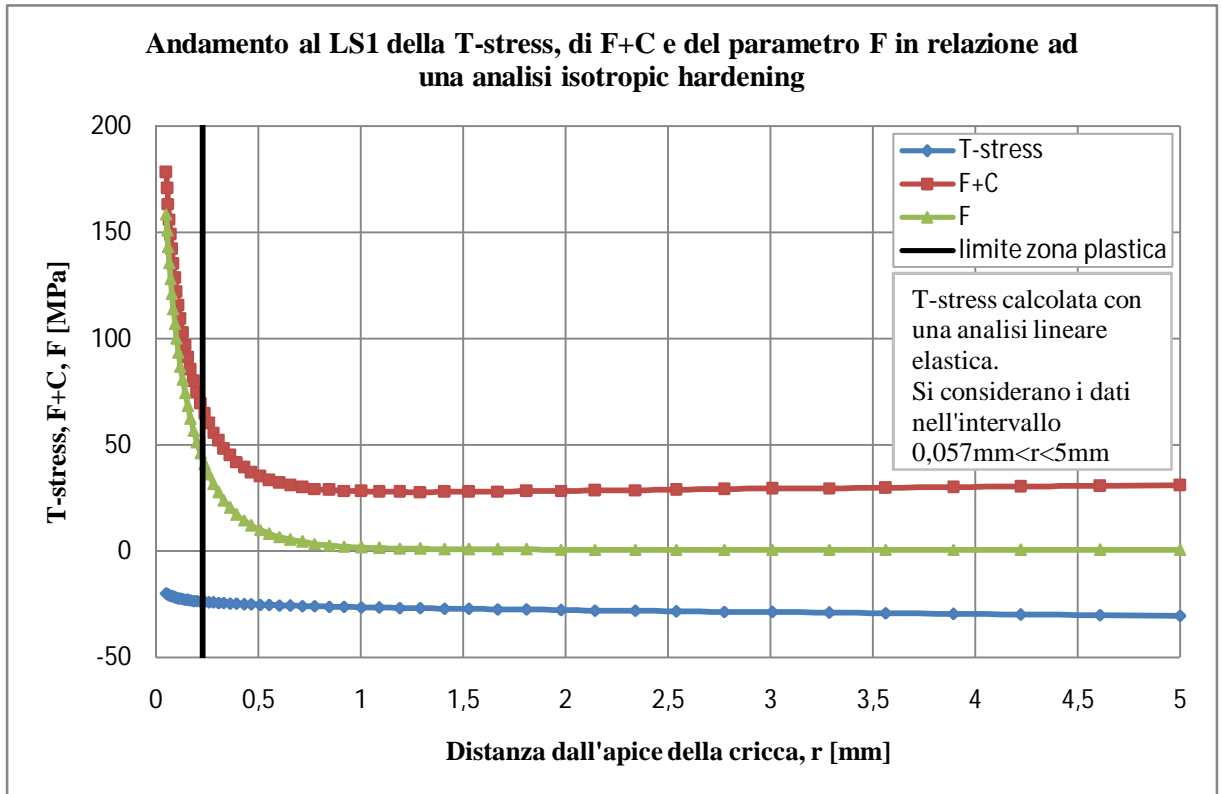


Figura 6.6 Andamento al LS1 della funzione $\sigma_y - \sigma_x = F+C$ e del parametro F su una regione che va da 0,057 mm (valore del raggio plastico nel caso di sollecitazione a fatica) a 5 mm dall'apice della cricca, utilizzando per la determinazione una analisi FEM nella quale si ipotizza un comportamento isotropic hardening del materiale. Nel caso presente si considera punto per punto il valore della T-stress determinato mediante una analisi FEM lineare elastica.

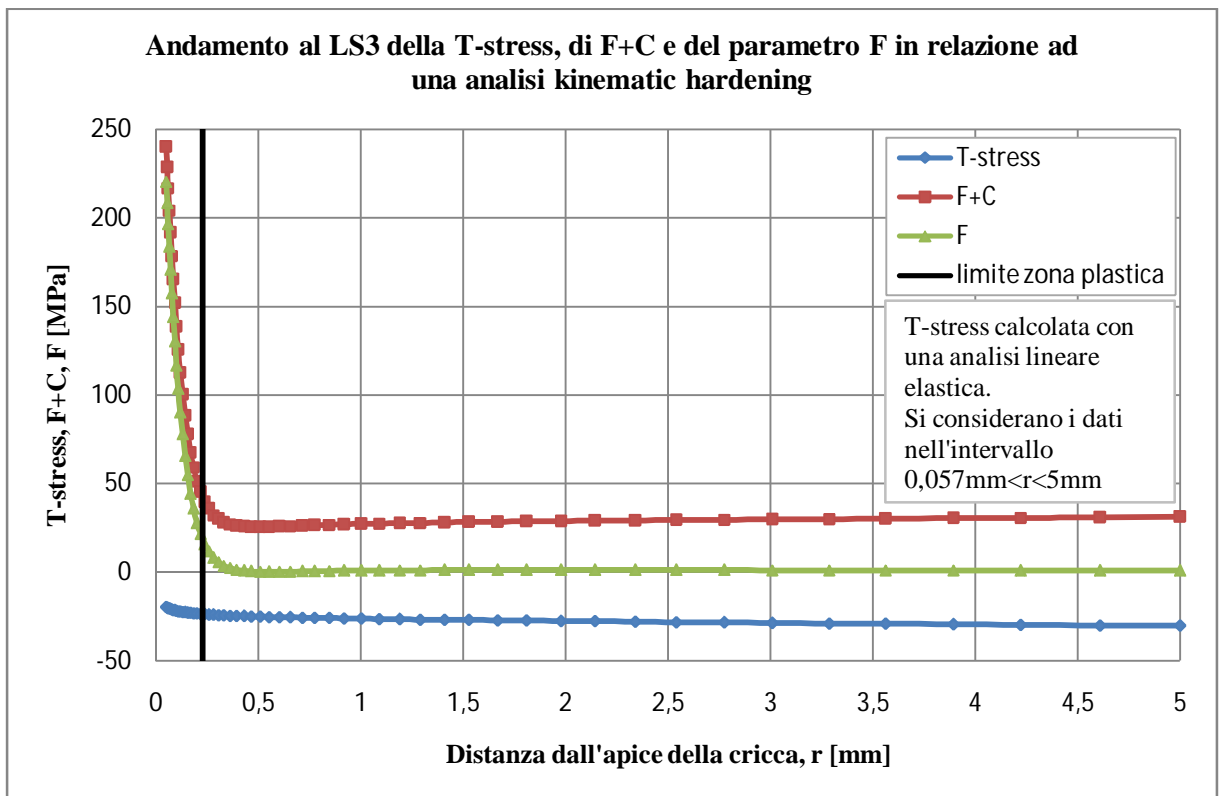


Figura 6.7 Andamento al LS3 della funzione $\sigma_y - \sigma_x = F+C$ e del parametro F su una regione che va da 0,057 mm (valore del raggio plastico nel caso di sollecitazione a fatica) a 5 mm dall'apice della cricca, utilizzando per la determinazione una analisi FEM nella quale si ipotizza un comportamento kinematic hardening del materiale. Nel caso presente si considera punto per punto il valore della T-stress determinato mediante una analisi FEM lineare elastica.

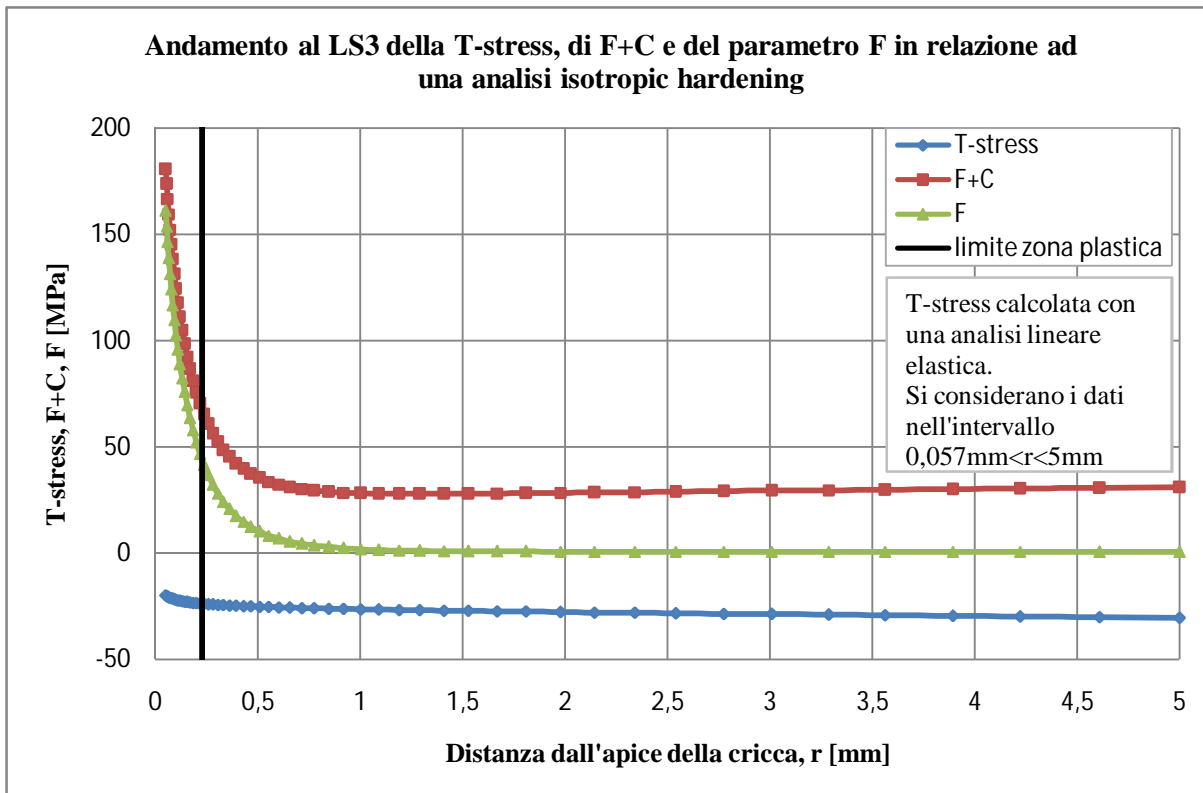


Figura 6.8 Andamento al LS3 della funzione $\sigma_y - \sigma_x = F+C$ e del parametro F su una regione che va da 0,057 mm (valore del raggio plastico nel caso di sollecitazione a fatica) a 5 mm dall'apice della cricca, utilizzando per la determinazione una analisi FEM nella quale si ipotizza un comportamento isotropic hardening del materiale. Nel caso presente si considera punto per punto il valore della T-stress determinato mediante una analisi FEM lineare elastica.

6.3 La nuova versione del fattore di intensificazione delle tensioni K_F

Il fattore di intensificazione delle tensioni K_F è stato recentemente definito dagli autori come [13]:

$$K_F = \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} (\sigma_y + 2Er^{-1/2} \ln(r))] \quad (6.6)$$

Si preferisce però considerare un versione precedente della definizione del SIF in esame in quanto la si ritiene “più corretta”, almeno per quanto riguarda le unità di misura. Tale definizione è la seguente [14]:

$$K_F = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sqrt{2\pi r} \left(\sigma_y + 2Er^{-1/2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \right) \right] \quad (6.7)$$

Questo SIF dovrebbe essere rappresentativo dell'intensità del campo di tensione σ_y sulla bisettrice della cricca al di fuori della zona plastica.

Alla luce della nuova espressione della componente di tensione σ_y (seconda equazione delle 6.4) si può ridefinire il SIF K_F nel modo seguente:

$$K_F = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sqrt{2\pi r} \left(\sigma_y - F + 2Er^{-1/2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \right) \right] \quad (6.8)$$

Essendo l'unità di misura del parametro F quella di una tensione ([MPa]), dal punto di vista dimensionale la 6.8 si può considerare corretta, in quanto fornisce come risultato un valore avente come unità di misura $\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$.

Analizzando ulteriormente la 6.8 ci si accorge che se F assume valori di segno positivo, il valore che restituisce la 6.8 stessa è inferiore rispetto a quello che fornirebbe la 6.7 a parità di coefficienti E ed r_0 . Questa osservazione permette quindi di ricollegarsi a quanto detto nel paragrafo precedentemente relativamente alla possibilità di sfruttare il parametro F nella descrizione e quantificazione degli effetti di *shielding* e di *crack closure*. Pur essendo infatti F diverso da zero solo all'interno della zona plastica e nella zona di transizione dal campo plastico e quello elastico e di conseguenza non influenzando direttamente il campo di tensione nella zona elastica, esso contribuisce a definire il fattore di intensificazione di tensione del campo suddetto. Infatti, essendo K_F definito come limite per r tendente a zero, cioè al tendere all'apice della cricca, esso viene calcolato proprio dove il parametro F assume i valori massimi e quindi dove può influenzare maggiormente il risultato dell'operazione di limite. Considerando che K_F è il SIF che descrive il campo di tensione lineare elastico fuori dalla zona plastica si è riusciti in questo modo a collegare il parametro F al campo di tensione anzidetto. Dal punto di vista fisico infatti, qualora il K_F definito dalla 6.8 assumesse un valore inferiore di quello definito dalla 6.7, ciò corrisponderebbe ad un campo di tensione di entità inferiore e la variazione potrebbe essere ricondotta proprio agli effetti dei fenomeni di *shielding* e *crack closure* conglobati nel parametro F .

Si riportano qui di seguito dei grafici raffiguranti gli andamenti del SIF K_I calcolato sulla base di una analisi lineare elastica e dei SIF K_F calcolati sulla base di una analisi elastoplastica (*kinematic hardening* e per completezza anche *isotropic hardening*) secondo sia la 6.7 sia la 6.8. Nelle analisi viene adottata la medesima geometria sempre utilizzata in questo lavoro di tesi. Si osservi che nelle espressioni sopra citate compare il coefficiente E . Questo è stato già ricavato nel capitolo 3 durante la prima analisi del modello CJP. In particolare esso risultava:

$$E = -1,27 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

Il valore di tale coefficiente è stato calcolato facendo riferimento ai dati relativi al LS1 ottenuti sulla base di una analisi elastoplastica nell'ipotesi di comportamento *isotropic hardening* del materiale, verrà però utilizzato per plottare i SIF ottenuti con entrambe le ipotesi di comportamento del materiale. Si è già discusso infatti che al LS1 devono essere identici, dal punto di vista fisico, i risultati delle analisi *isotropic hardening* e *kinematic hardening*. Le differenze che in realtà si riscontrano sono funzione esclusivamente di problematiche di tipo computazionale.

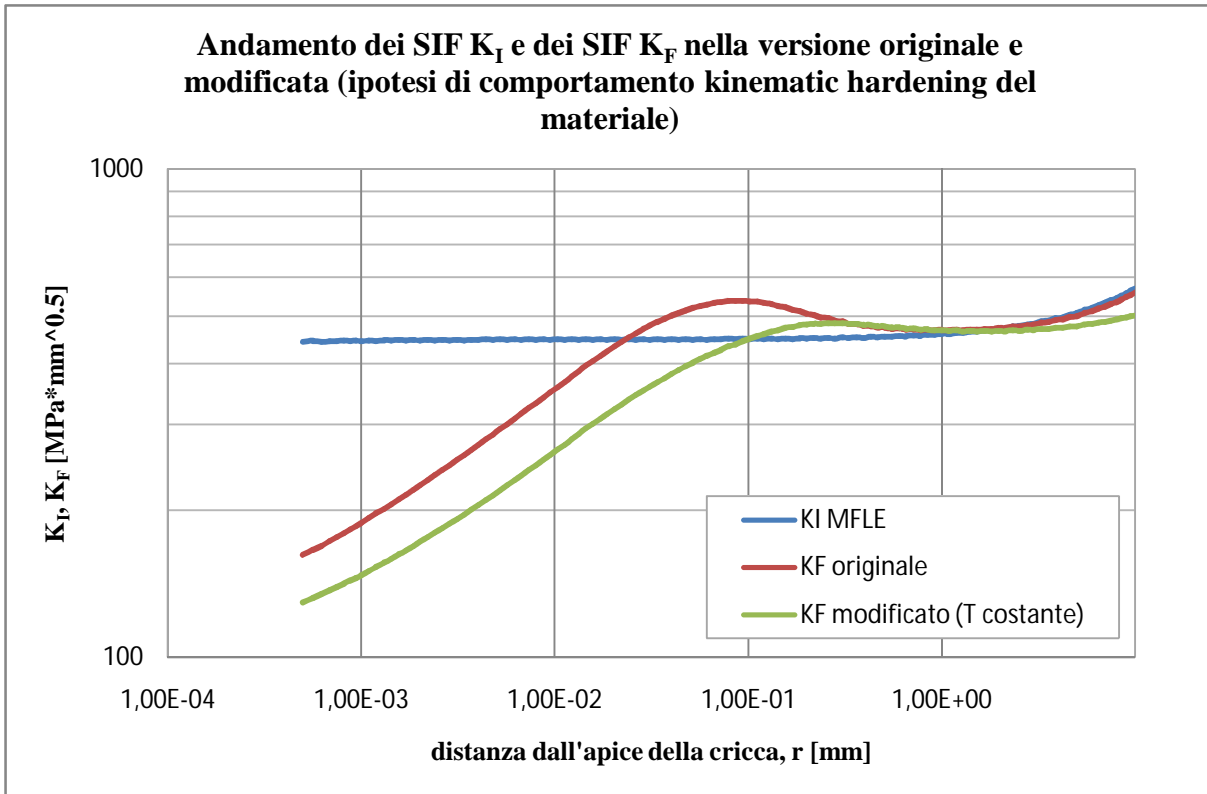


Figura 6.9 Andamento del SIF K_I al LS1 (calcolato usando i dati ottenuti mediante una analisi lineare elastica) e dei SIF K_F calcolati, utilizzando i dati ottenuti con una analisi elastoplastica (ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale), mediante la versione originale della definizione e quella modificata dall'introduzione del parametro F. Nel grafico presente si considera il parametro F calcolato utilizzando un valore costante della T-stress.

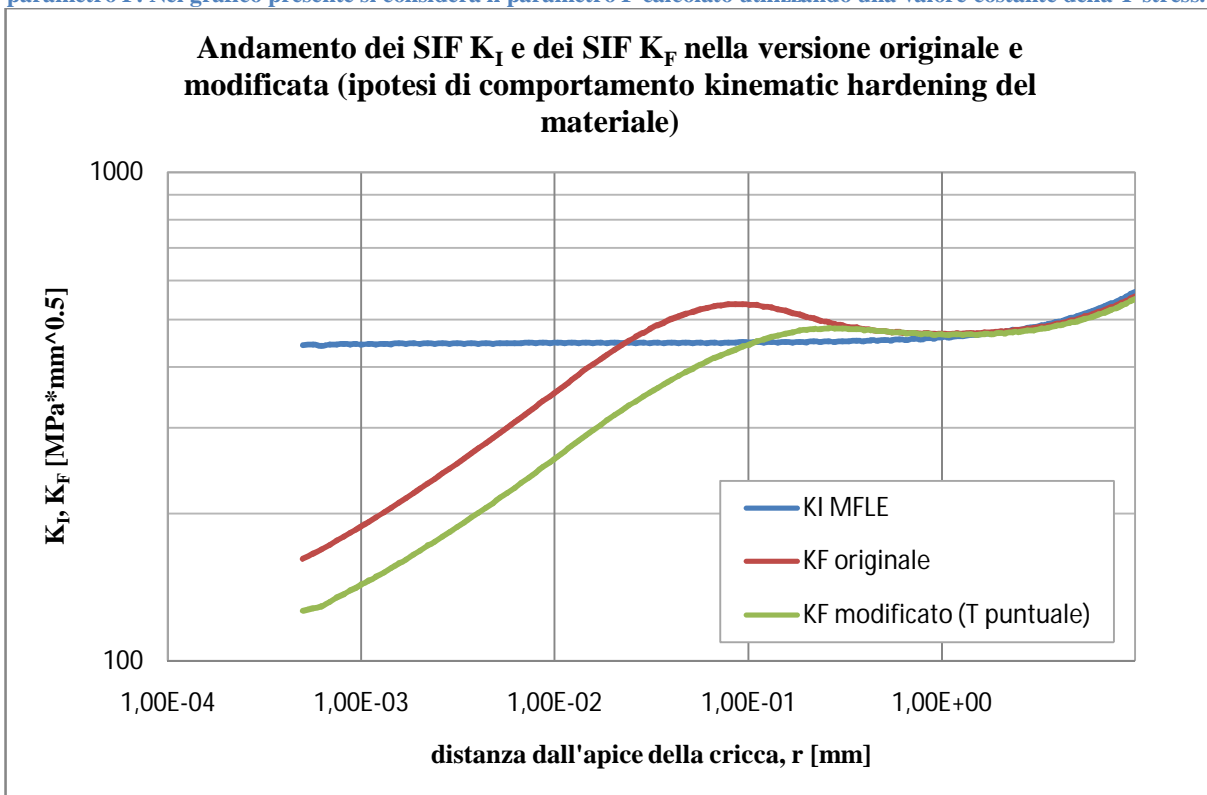


Figura 6.10 Andamento del SIF K_I al LS1 (calcolato usando i dati ottenuti mediante una analisi lineare elastica) e dei SIF K_F calcolati, utilizzando i dati ottenuti con una analisi elastoplastica (ipotesi di comportamento kinematic hardening del materiale), mediante la versione originale della definizione e quella modificata dall'introduzione del parametro F. Nel grafico presente si considera il parametro F calcolato utilizzando il valore puntuale che assume la T-stress.

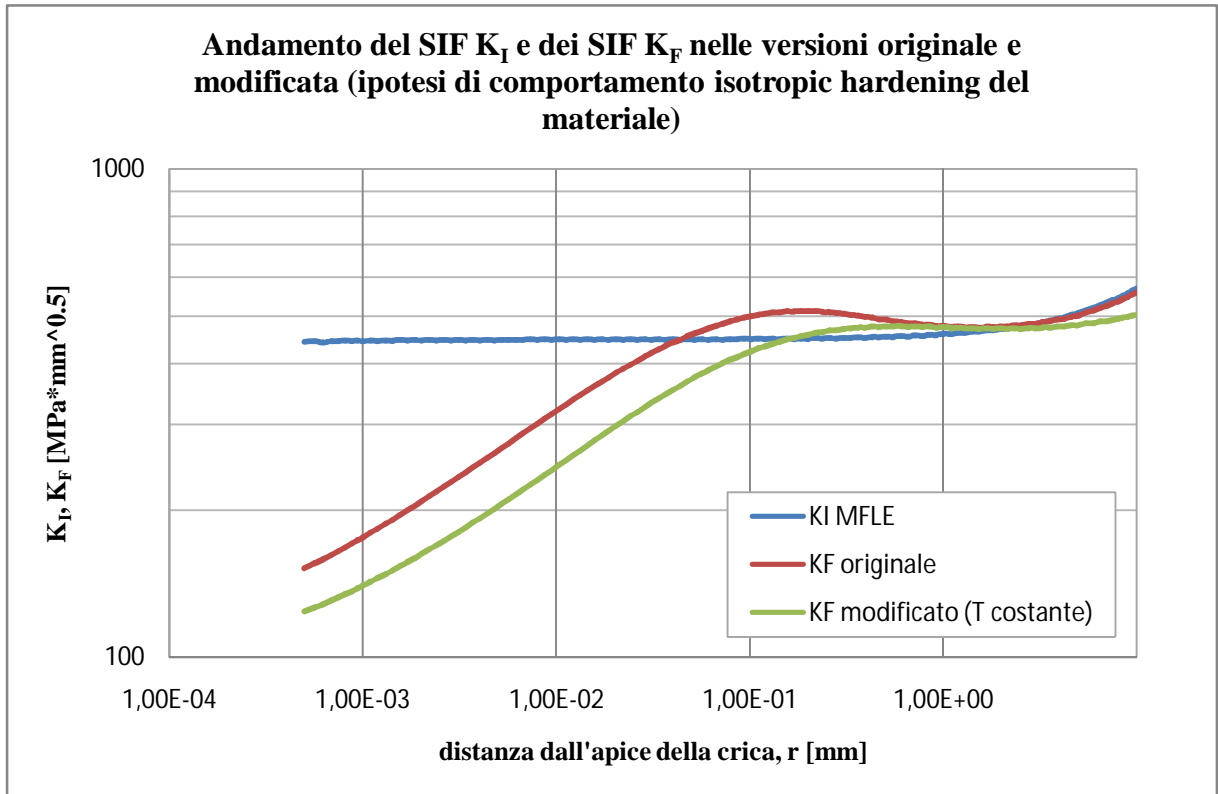


Figura 6.11 Andamento del SIF K_I al LS1 (calcolato usando i dati ottenuti mediante una analisi lineare elastica) e dei SIF K_F calcolati, utilizzando i dati ottenuti con una analisi elastoplastica (ipotesi di comportamento isotropic hardening del materiale), mediante la versione originale della definizione e quella modificata dall'introduzione del parametro F. Nel grafico presente si considera il parametro F calcolato utilizzando un valore costante della T-stress.

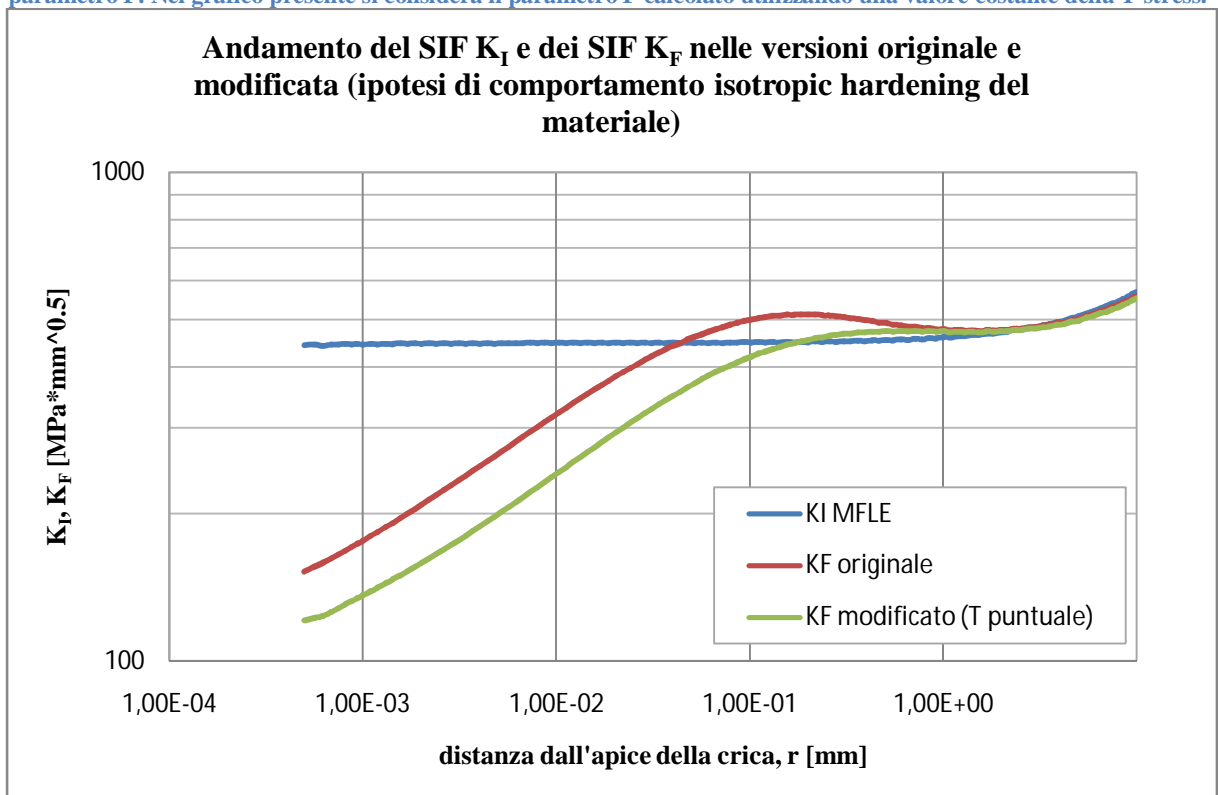


Figura 6.12 Andamento del SIF K_I al LS1 (calcolato usando i dati ottenuti mediante una analisi lineare elastica) e dei SIF K_F calcolati, utilizzando i dati ottenuti con una analisi elastoplastica (ipotesi di comportamento isotropic hardening del materiale), mediante la versione originale della definizione e quella modificata dall'introduzione del parametro F. Nel grafico presente si considera il parametro F calcolato utilizzando il valore puntuale che assume la T-stress.

Da uno studio dei grafici qui sopra riportati si possono fare alcune osservazioni, alcune delle quali analoghe a quelle già fatte nel capitolo 3 in relazione alla discussione dei risultati ottenuti dall'analisi iniziale del modello CJP. Si noti anzitutto che il SIF K_F modificato assume nella zona plastica valori inferiori rispetto a quelli assunti dal SIF K_F originale mentre i 2 si sovrappongono sulla regione elastica. Questo è logica conseguenza del particolare andamento del parametro F. Un valore inferiore di un SIF si traduce in termini pratici in un campo di tensione di entità minore ed è ciò che si deve riscontrare qualora insorgano fenomeni di *crack closure*. Il modello può pertanto essere considerato corretto sotto questo punto di vista ed in grado di descrivere gli effetti di *shielding* e di *crack closure*. Purtroppo però non è esente da altre problematiche. L'andamento di entrambe le versioni dei SIF K_F sono infatti non costanti, contrariamente all'andamento che dovrebbe avere un parametro di campo quale un fattore di intensificazione delle tensioni. Questa non costanza del SIF costituisce un problema critico dal punto di vista ingegneristico-operativo. Il valore non costante che assume il K_F impedisce di usare il K_F stesso in un qualsiasi progetto o verifica di un componente o struttura. Tale particolare andamento del SIF suddetto però non stupisce in quanto, come già messo in evidenza nel capitolo 3, le definizioni date di K_F (equazioni 6.7 e 6.8) non posso fornire in alcun caso un valore sempre costante, in quanto il campo stesso di tensione σ_y che sta alla base del SIF in esame è caratterizzato da 2 pendenze caratteristiche (quella del campo plastico e quella del campo elastico) e non da una sola pendenza (quella del campo elastico) come avviene per il SIF K_I della MFLE.

6.4 Rappresentazione dei campi di tensione σ_y ottenuti a partire dalla nuova versione dei potenziali complessi

Con la modifica apportata ai potenziali complessi cambia l'espressione della tensione normale σ_y , mentre restano del tutto inalterate le espressioni delle altre 2 componenti di tensione, σ_x e τ_{xy} . Come già anticipato, il termine F che compare nella nuova espressione della componente σ_y può essere utilizzato nel tentativo di estendere l'attitudine del modello CJP a descrivere il campo di tensione fuori dalla zona plastica anche alla zona plastica medesima. Nel capitolo precedente si è dimostrato in modo pratico che il modello CJP riesce a riprodurre in maniera abbastanza precisa i campi di tensione elastici fuori dalla zona plastica (quando i parametri H, G ed E sono tarati all'interno della zona plastica) mentre sovrastima i campi di tensione all'interno della zona plastica. Avendo l'andamento del parametro F la particolare caratteristica di tendere a valori molti diversi da zero al tendere all'apice della cricca mentre

valore circa costante e nullo fuori dalla zona plastica, si vuole ora valutare la possibilità di combinare questi due particolari trend nel tentativo di estendere per l'appunto il modello CJP alla descrizione dei campi di tensione σ_y all'interno della zona plastica e non esclusivamente al di fuori della medesima zona. Tutto il ragionamento appena esposto è valido esclusivamente per la componente di tensione σ_y , in quanto è l'unica componente che risente della modifica dei potenziali complessi e alla cui definizione si aggiunge il parametro F. Per quanto riguarda invece le componenti σ_x e τ_{xy} non si è ancora in grado di intervenire in un modo analogo a quanto fatto in riferimento alla σ_y e per farlo dovranno essere eseguiti altri studi e aggiunti altri termini ai potenziali complessi di partenza.

Sfruttando la seconda delle 6.4 si plottano ora i campi di tensione σ_y . In particolare si utilizzano i valori del parametro F calcolati al LS1 in relazione ad una analisi kinematic hardening e T-stress di valore costante ed i valori G, H ed E ottenuti settando i medesimi nella zona plastica. Nello specifico si scelgono i valori del caso 5 riassunti in tabella 5.1. Si scelgono tali valori in quanto si sono dimostrati i più precisi per quanto riguarda la riproduzione del campo lineare elastico. Per il solo caso di $\theta=0^\circ$ si riporta anche il plottaggio del campo σ_y che si otterrebbe se invece di utilizzare il valore medio della T-stress se ne usasse il valore che essa assume su ogni singolo nodo. Analizzando l'espressione 6.4 si nota che il parametro F compare con segno positivo e pertanto se sommato alla precedente versione dell'espressione di σ_y restituirebbe un campo di tensione ancora superiore e più distante dai dati FEM effettivamente misurati. Considerando però F come una tensione di compressione o comunque una tensione che provochi un effetto di chiusura tale da ostacolare la crescita del campo di tensione è possibile inserire nella 6.4 i valori di F con segno negativo (cioè valori pari in modulo e di segno opposto rispetto ai reali valori di F prima calcolati e graficati). Si riportano qui di seguito i risultati ottenuti come confronto con i campi di tensione che si misurano sulla bisettrice, e nelle direzioni inclinate di $\theta=22.5^\circ$, 45° e 67.5° .

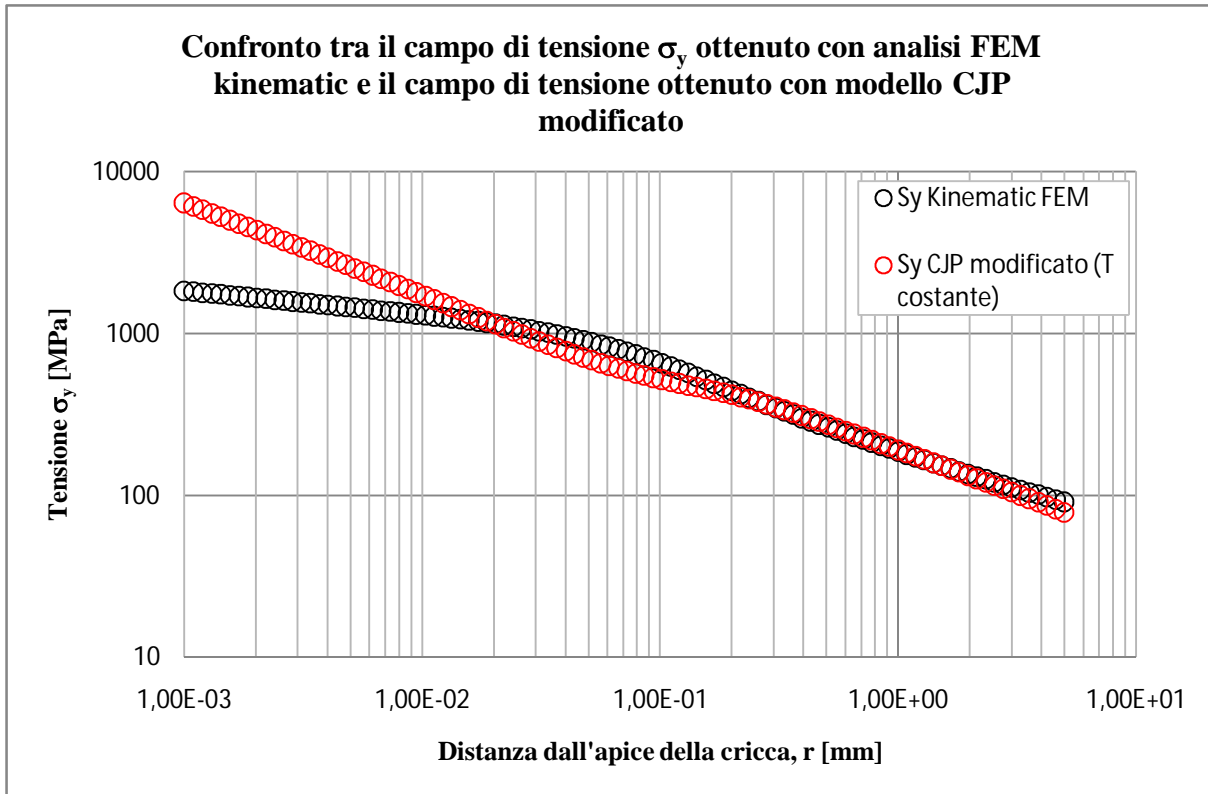


Figura 6.13 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato sulla bisettrice ($\theta=0^\circ$) mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 6.4 caratterizzata per l'angolo $\theta=0^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1. Nel caso in esame per il calcolo del parametro F si considera un valore costante della T-stress pari al suo valore medio.

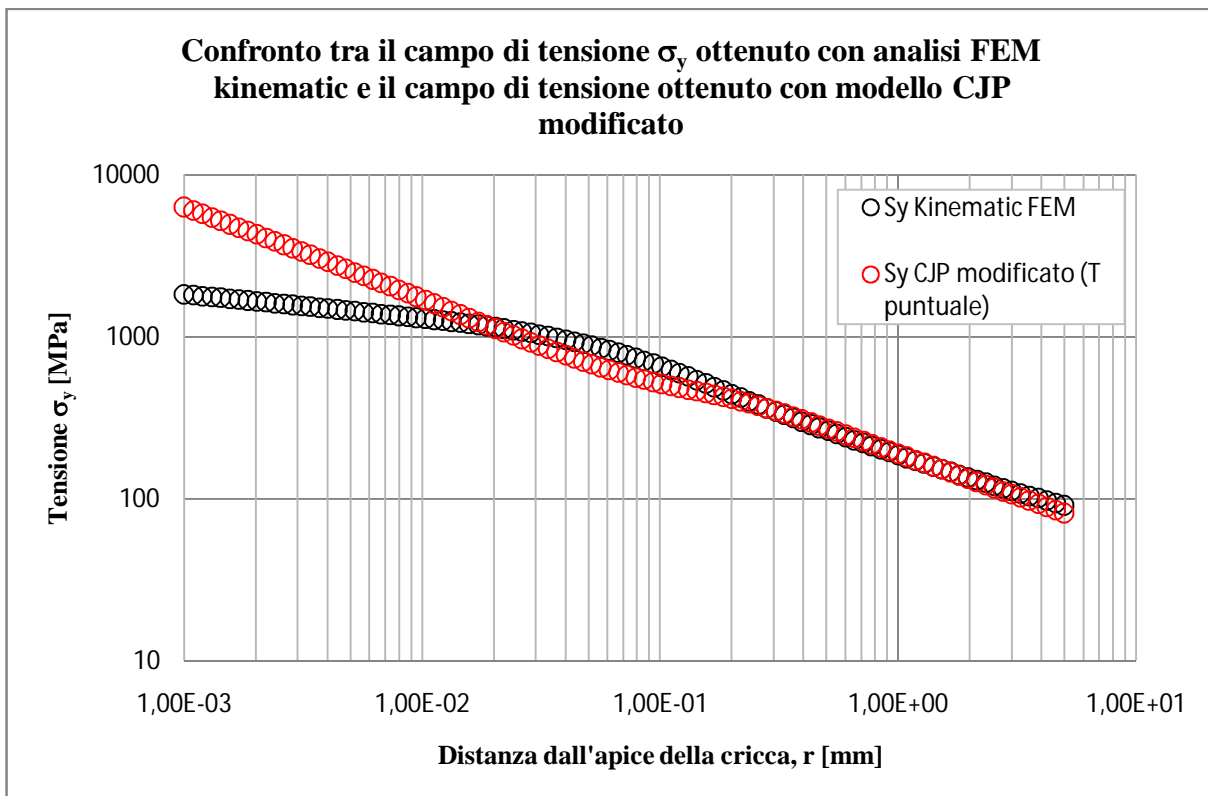


Figura 6.14 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato sulla bisettrice ($\theta=0^\circ$) mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 6.4 caratterizzata per l'angolo $\theta=0^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1. Nel caso in esame per il calcolo del parametro F si considera il valore che la T-stress assume nodo per nodo.

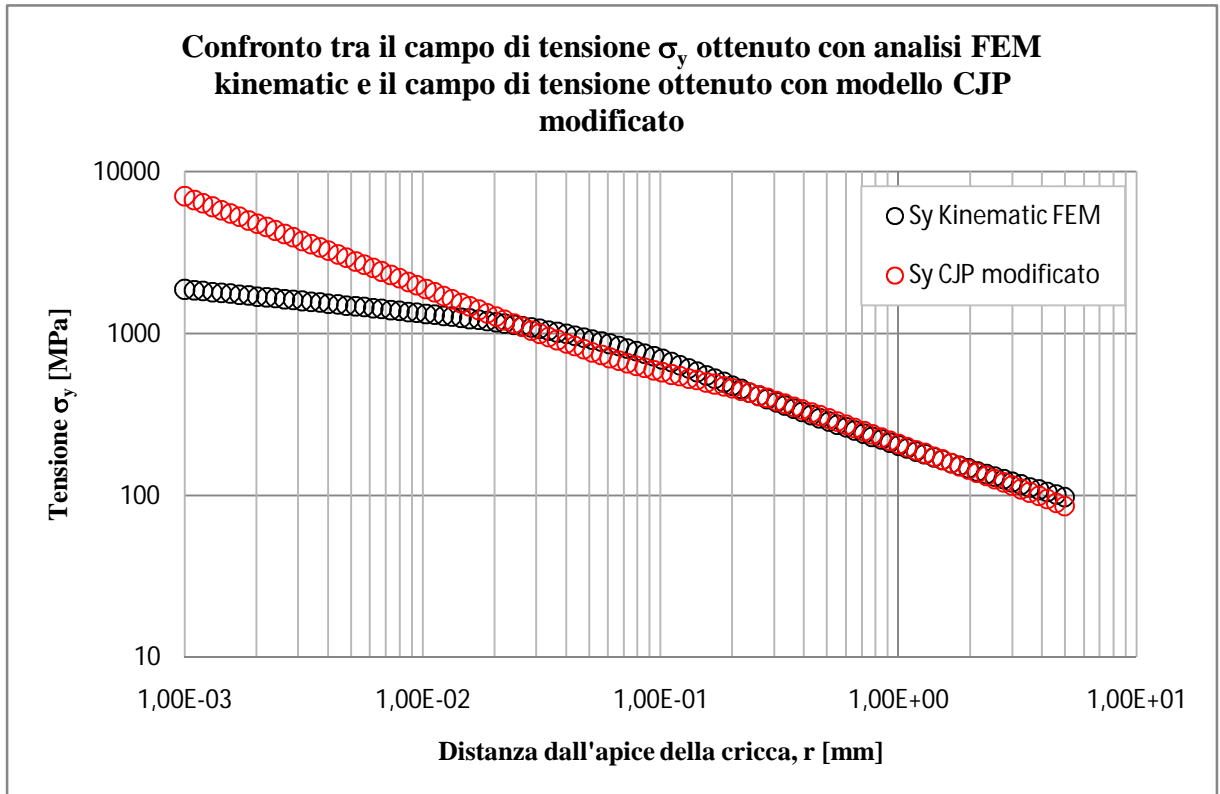


Figura 6.15 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=22,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 6.4 caratterizzata per l'angolo $\theta=22,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1.

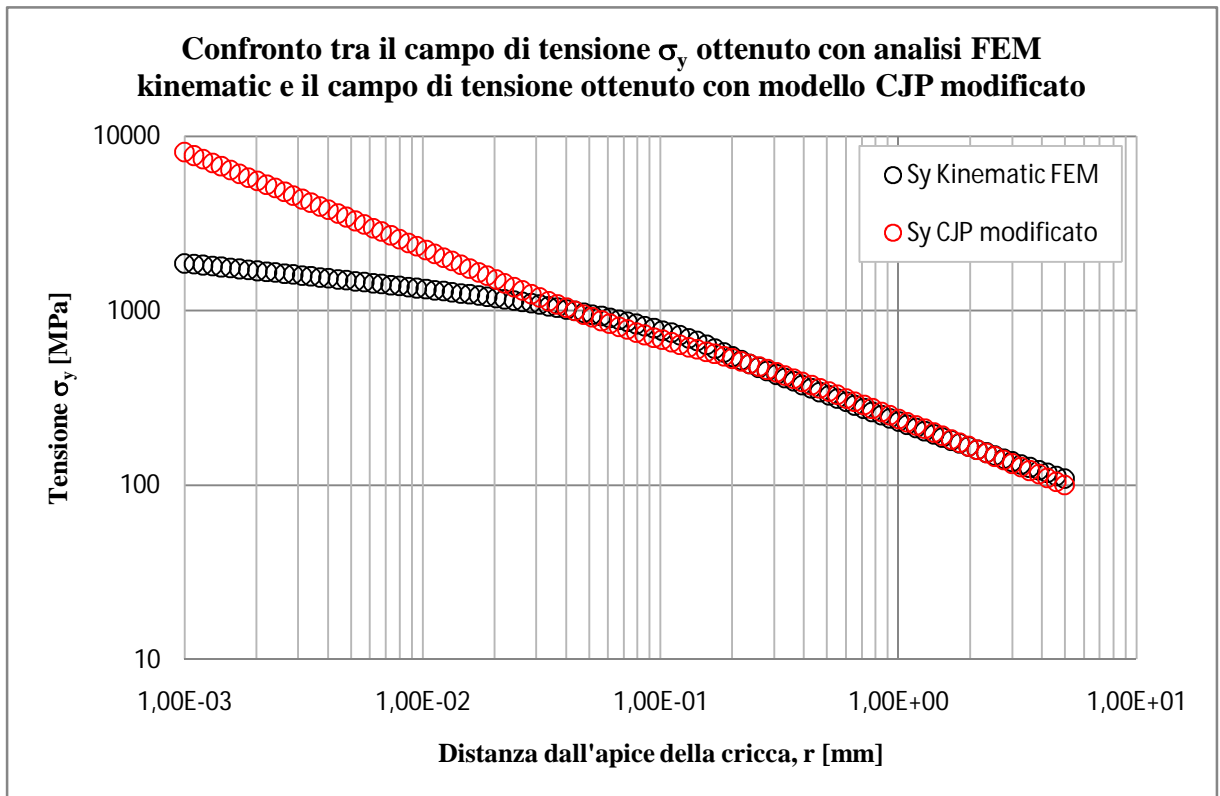


Figura 6.16 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=45^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 6.4 caratterizzata per l'angolo $\theta=45^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1.

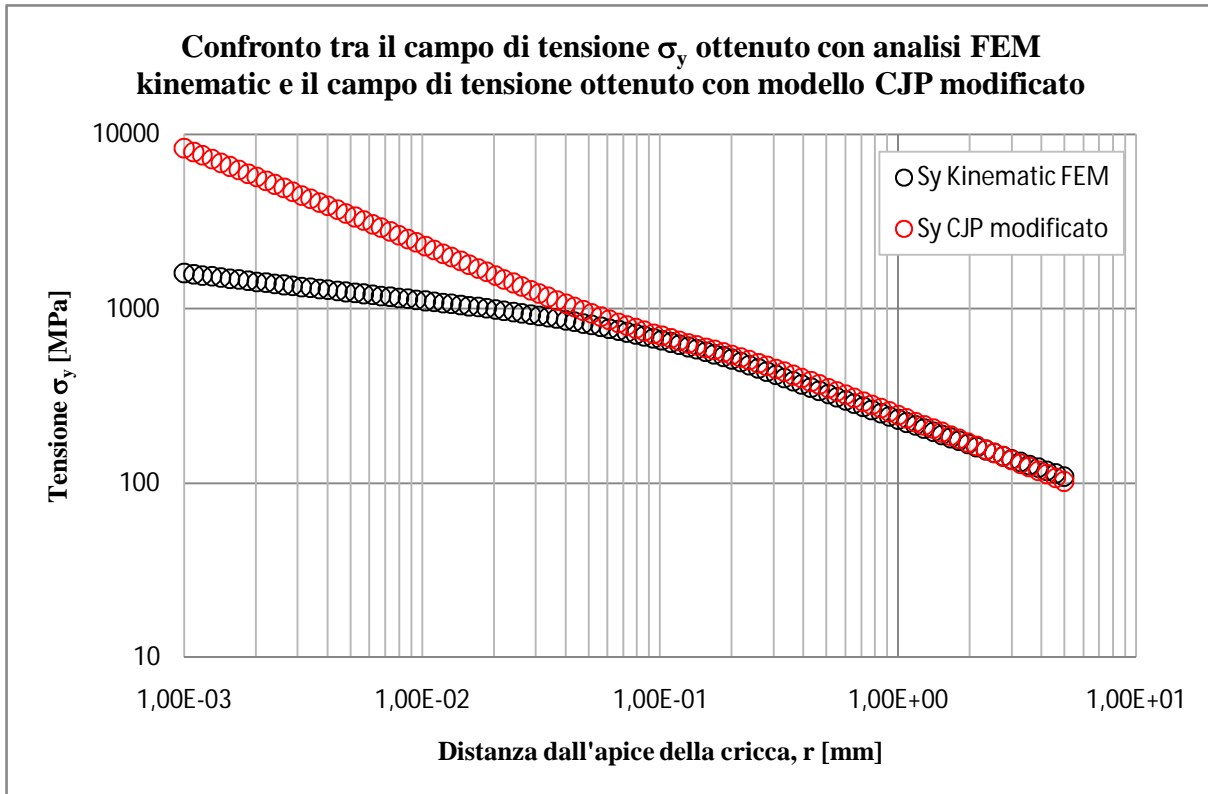


Figura 6.17 Confronto tra il campo di tensione σ_y misurato su una retta inclinata di un angolo $\theta=67,5^\circ$ rispetto alla bisettrice mediante analisi FEM ed il campo di tensione che si ottiene plottando la seconda delle 6.4 caratterizzata per l'angolo $\theta=67,5^\circ$ e per i coefficienti G, H ed E del caso 5 di tabella 5.1.

Dall'analisi dei grafici qui riportati si nota come tale metodo sia stato inefficiente allo scopo che ci si era preposti. Sebbene quanto esposto si ritiene corretto dal punto di vista concettuale, l'entità dei valori assunti dal parametro F non sono sufficienti a permettere di riprodurre i campi di tensione σ_y anche sulla zona plastica. Mentre per valori più grandi dell'angolo θ (principalmente per $\theta=67,5^\circ$, figura 6.17) l'introduzione del parametro F migliora il confronto tra modello CJP e dati FEM almeno relativamente alla regione di transizione dalla zona plastica alla zona deformata elasticamente, altrettanto non si può dire per angoli θ minori (figura 6.14 e 6.15).

Conclusioni, sviluppi e migliorie future

Il modello CJP vuole essere un strumento matematico in grado di riprodurre le componenti di tensione elastiche attorno alla zona plastica all'apice di una cricca soggetta a carichi di fatica conglobando nelle analisi l'influenza della plasticità (cioè l'effetto di “*shielding*”, ovvero di protezione, schermatura) sullo stesso campo elastico circostante il difetto. Questo comporta la definizione di tre fattori di intensificazione delle tensione K_R , K_S e K_F . Gli obiettivi del modello sono dunque determinare la distribuzione dei campi di tensione elastici fuori dalla zona plastica circondante l'apice e i fianchi di una cricca, oltre che individuare come le componenti di tensione protettive per la propagazione della cricca stessa influenzano i medesimi campi elastici di tensione sopracitati.

A seguito di una analisi preliminare del frame analitico del modello si è giunti ad una serie di conclusioni e considerazioni.

La definizione del SIF K_F è ottenuta dagli autori come “estensione” al caso elasto-plastico della classica definizione del K_I , valida in regime esclusivamente lineare elastico, tramite l'introduzione di un termine all'interno del quale compare anche un logaritmo naturale nella variabile r . Questo termine aggiunto, inserito nella trattazione dagli autori allo scopo di considerare gli effetti di *shielding* dovuti alla plasticizzazione che si verifica all'apice della cricca, cambia segno lungo la bisettrice della cricca stessa in funzione della distanza dall'apice del punto preso in considerazione. Nello specifico, esso è tale da assumere valori positivi per $0 < r < 1\text{mm}$ e valori negativi per $r > 1\text{mm}$. Tale comportamento fa sì che nella zona plastica il K_F fornisca un andamento delle tensioni ancor più alto di quello previsto dalla teoria della MFLE e da Irwin. Il termine aggiunto, assumendo invece valore negativo per $r > 1\text{mm}$, comporta in tale regione un abbassamento del fattore di intensificazione delle tensioni, evento che si traduce dal punto di vista fisico in un campo di tensione di minor intensità. Tutto ciò non è però perfettamente in linea con la fisica del problema in quanto nulla lega la dimensione della zona plastica (il raggio plastico) alla particolare lunghezza di 1mm. Qualora la zona plastica abbia una estensione inferiore ad 1mm il campo di tensione elastico situato tra il raggio plastico fino ad 1mm dall'apice viene riprodotto e caratterizzato dal modello con una intensità superiore a quella che si riscontrerebbe in assenza di *crack closure* e *shielding*.

Da un'analisi dimensionale anche l'unità di misura del SIF K_F risulta di dubbia comprensione, precisamente essa risulta $\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{mm}}+\text{MPa}\cdot\ln(\text{mm})\cdot\sqrt{\text{mm}}$. Si ritiene più sensata da un punto di vista dimensionale, per quanto concerne la presenza del logaritmo di una lunghezza

all'interno dell'unità di misura del K_F , l'espressione dello stesso SIF K_F proposta dagli stessi autori nell' articolo [14]. In questo lavoro l'argomento del logaritmo veniva diviso per una lunghezza r_0 (fissata ad un valore unitario) con la conseguenza di eliminare dall'unità di misura del K_F la presenza del logaritmo di una lunghezza. Trascurando la validità o meno di tale modo di procedere, la soluzione che si otterrebbe così operando non sarebbe comunque del tutto soddisfacente in quanto l'unità di misura del K_F risulterebbe $\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{mm}}$ al pari del K_I della MFLE. Ciò non sarebbe concettualmente corretto non essendo il grado di singolarità delle distribuzioni di tensione di modo I all'apice di una cricca (al quale si potrebbe dimostrare sono legate le unità di misura) invariante nel caso si consideri un comportamento elasto-plastico piuttosto di un comportamento lineare elastico del materiale.

Si ritiene inoltre poco chiaro se gli autori con K_F intendano descrivere esclusivamente il campo tensione fuori dalla zona plasticizzata (cioè in campo lineare elastico dato che $\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{mm}}$ è l'unità di misura di K_I definito per l'appunto in campo lineare elastico) o se vogliono descrivere anche il campo di tensione nella zona plasticizzata in considerazione del fatto che il SIF in esame viene calcolato al tendere all'apice della cricca, cioè all'interno della zona plastica.

Pur non chiarendo i dubbi relativi alle unità di misura, si ritiene che la normalizzazione dell'argomento del logaritmo sarebbe più sensata qualora fosse posto $r_0=r_p$ (almeno dal punto di vista fisico, fermo restando la necessità di valutare l'effettivo miglioramento in termini di capacità di riproduzione dei dati FEM in seguito a tale normalizzazione). Così facendo se il SIF K_F fosse effettivamente in grado di descrivere gli effetti di *shielding* e *crack closure* la normalizzazione dell'argomento del logaritmo con $r_0=r_p$ permetterebbe di collocare gli effetti suddetti sulla zona elastica e non semplicemente a partire da una distanza di 1 mm dall'apice come invece predispongono gli autori.

Nelle espressioni delle componenti di tensione $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}=f(r, \theta)$ fornite dal modello compaiono dei coefficienti, precisamente G, H, D ed E. Utili alla determinazione del valore di tali coefficienti sono i SIF K_R, K_S e K_F ai quali i coefficienti stessi sono legati. La valutazione di ciascuno dei SIF suddetti, eseguita avvalendosi della definizione data agli stessi e utilizzando dati FEM ricavati da analisi elastoplastiche, ha mostrato come questi assumano andamenti non costanti. Da ciò scaturisce l'impossibilità di usare il modello CJP in un qualsiasi progetto o verifica di un componente o struttura e tantomeno risulta possibile adoperare i SIF sopra citati al fine di determinare i valori dei coefficienti delle espressioni delle componenti di tensione. Nell'intento di proseguire lo studio del modello ed il presente lavoro di tesi, sono stati determinati i valori di G, H, D ed E ricorrendo alla risoluzione di un sistema di

equazioni. Il sistema scelto è costituito da espressioni della componente di tensione σ_y fornita dal modello CJP, caratterizzate per $\theta=0^\circ$ e all'interno delle quali sono sostituite condizioni al contorno (σ_{y_i, r_i}) misurate sulla bisettrice tramite analisi FEM elastoplastiche. Notevole spazio è stato concesso allo studio dell'influenza della scelta delle condizioni al contorno (c.c.) sui valori assunti dai coefficienti delle espressioni di tensione e su come quest'ultime riuscivano poi a riprodurre i dati FEM elastoplastici, soprattutto relativamente l'opportunità di selezionare tali c.c. in campo lineare elastico piuttosto che plastico. In relazione al campo di tensione σ_y sulla bisettrice della cricca si è voluto inoltre paragonare la capacità del modello CJP di riprodurre il campo di tensione medesimo con la rappresentazione che invece fornisce la relazione di Irwin/Westergaard qualora si considerino anche i termini di ordine superiore. Dall'analisi dei risultati ottenuti si può concludere che la scelta delle c.c. influenza principalmente il valore dei coefficienti del modello ai termini di ordine superiore. Infatti pur rimanendo tale scelta in campo lineare elastico si riscontrano variazioni di diversi punti percentuali nei valori assunti dai coefficienti del modello ai termini di ordine superiore al variare della particolare scelta delle c.c. Se si raffrontano invece i valori dei coefficienti suddetti ottenuti da condizioni al contorno selezionate in campo lineare elastico con quelli ottenuti per condizioni al contorno selezionate in campo plastico le differenze possono essere anche di un ordine di grandezza. Variazioni più contenute si denotano invece per quanto riguarda il valore dei coefficienti del modello CJP in relazione a differenti scelte delle condizioni al contorno. Questo è verificato sia per quanto riguarda un confronto tra i valori dei coefficienti ottenuti previa taratura in campo lineare elastico sia paragonando questi con i valori ottenuti per condizioni al contorno selezionate in campo plastico. Relativamente all'attribuzione del valore da assegnare ad r_0 si è notato che esso non influenza il valore dei coefficienti quando questi sono tarati in campo plastico (differenze dei valori dei coefficienti intorno al 3%), mentre ha maggiore influenza quando gli stessi vengono tarati in campo lineare elastico (le differenze sono maggiori, ma comunque contenute attorno al 10%). L'osservazione fondamentale è però la seguente: sia per il modello CJP che per il modello ai termini di ordine superiore la riproduzione dei campi di tensione determinati mediante analisi FEM risultano maggiormente precise qualora si utilizzino condizioni al contorno relative al campo plastico.

Il presente lavoro è proseguito poi con analisi relative al solo modello CJP nelle quali si è voluto utilizzare le equazioni che descrivono i campi di tensione delle componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} per verificare come queste fossero in grado o meno di riprodurre i campi di tensione suddetti sulla bisettrice ($\theta=0^\circ$) e fuori dalla bisettrice ($\theta\neq 0^\circ$). Da una minuziosa analisi dei risultati

ottenuti si può concludere che le differenze di rappresentazione dei campi di tensione ottenute utilizzando $r_0=r_p$ anziché $r_0=1\text{mm}$ sono minime, le diverse rappresentazioni ottenute si possono difatti considerare equivalenti. Il valore da assegnare al parametro r_0 , che in primo luogo si riteneva fosse di fondamentale importanza, si rivela invece totalmente ininfluenza ai fini della capacità del modello di riprodurre i reali campi di tensione. Non sono stati di conseguenza ritenuti giustificabili ulteriori sforzi finalizzati alla individuazione del miglior valore da assegnare ad r_0 . Si conclude che $r_0=1\text{mm}$ potrebbe essere il valore da utilizzare in modo universale, utile essenzialmente ad uniformare le unità di misura delle tensioni e dei diversi SIF, e tale da evitare di dover calcolare il valore del raggio plastico r_p , fermo restando però che una normalizzazione fatta per $r_0=r_p$ dell'argomento del logaritmo ha un significato fisico che invece la condizione $r_0=1\text{mm}$ non possiede.

Si è osservato inoltre che il modello riesce a riprodurre le tensioni su una regione "più estesa" per angoli θ minori. Per angoli θ maggiori esso perde di precisione. Si conclude pertanto che all'aumentare dell'angolo θ caratteristico della direzione lungo la quale si vogliono riprodurre le componenti di tensione diminuisce l'accuratezza del modello.

Una ulteriore osservazione è legata ai coefficienti G, H, D ed E ed alle condizioni al contorno utili alla loro determinazione. Così come era stato notato per il campo di tensione σ_y sulla bisettrice, anche i campi di tensione fuori dalla bisettrice ($\theta \neq 0^\circ$) che si ottengono applicando il modello CJP risultano molto più prossimi ai dati FEM (relativamente alla zona lineare elastica) quando i coefficienti sopracitati vengono tarati all'interno della zona plastica rispetto a quando i medesimi coefficienti sono tarati in campo lineare elastico.

Da una serie di confronti tra i risultati ottenuti da analisi FEM condotte nelle ipotesi di comportamento puramente lineare elastico ed elastoplastico (*kinematic hardening*) del materiale si è dedotto che una analisi lineare elastica permette di ottenere le stesse informazioni fornite dal modello CJP in termini di riproduzione dei campi lineari elastici collocati fuori dalla zona plastica all'apice di una cricca. Si ricordi che utilizzare direttamente i dati ottenuti da una analisi lineare elastica (tralasciando quindi il modello CJP) costituisce un risparmio in termini di tempo e risorse hardware senza contare l'opportunità di poter evitare di dover calcolare il valore dei coefficienti del modello CJP. Bisogna però sottolineare che quanto appena detto non è universalmente valido. La geometria, il materiale considerato, la modalità di applicazione del carico e l'entità del carico stesso giocano un ruolo fondamentale nell'entità della redistribuzione delle tensioni. Se questa è contenuta si può ritenere logico che il campo di tensione elastoplastico si sovrapponga nel tratto lineare elastico al campo di

tensione ottenuto da una analisi FEM condotta nell'ipotesi di comportamento lineare elastico del materiale.

Ritornando ancora una volta sui coefficienti G , H ed E , si rammenta che la proposta degli autori del modello è quella di tararli calcolando 3 fattori di intensificazione delle tensioni, uno sulla bisettrice della cricca (K_F) e due sui fianchi (K_R e K_S). Quando gli autori definiscono tali SIF sui fianchi della cricca spiegano come questi sono rappresentativi dei campi di tensione non collocati sui fianchi stessi bensì all'interfaccia della scia plastica tra la zona deformata plasticamente e quella deformata elasticamente. Tralasciando la correttezza concettuale o meno del definire un SIF in tal modo (si ricorda che sui fianchi della cricca le tensioni τ_{xy} sono nulle per definizione a meno di particolari contatti che si vengono a verificare tra i lembi durante un ciclo di sollecitazione a fatica), gli autori nei loro articoli sembrano poi calcolare i SIF suddetti e settare i coefficienti G , H , D ed E non sui fianchi bensì proprio all'interfaccia tra zona plastica ed elastica sfruttando la tecnica delle frange isocromatiche. Se non si hanno però a disposizione particolari tecniche e tecnologie di indagine sperimentale risulta estremamente difficile misurare o determinare le tensioni all'interfaccia e pertanto risulta impossibile calcolare i SIF K_S e K_R oltre che tarare i coefficienti in modo diverso da quanto fatto nel capitolo 4 del presente lavoro di tesi.

Infine è stata valutata una proposta di modifica dei potenziali complessi $\phi(z)$ e $\psi(z)$ sui quali si basa la trattazione matematica del modello CJP. Tale modifica è costituita dall'aggiunta di un termine a ciascun potenziale complesso, nello specifico i termini aggiuntivi hanno in comune la presenza di un parametro F . Conseguenza di tale modifica è la variazione dell'espressione della tensione σ_y , sulla quale compare ora, per l'appunto, il parametro F , il quale risulta avere un andamento molto particolare. Esso assume un valore circa costante e prossimo allo zero al di fuori della zona plastica, valori ben superiori all'interno della zona plastica che aumentano al tendere all'apice della cricca e un andamento nella zona di transizione dal campo plastico a quello elastico che sembra raccordare i 2 trend precedenti (cioè quello all'avvicinarsi all'apice di cricca e quello della zona lineare elastica). Questo particolare andamento dà la convinzione che il parametro in esame possa essere utilmente adottato per estendere la rappresentazione del campo di tensione σ_y del modello CJP anche alla zona plastica. Considerando allora il parametro F una tensione negativa esso avrà l'effetto di "abbassare" il campo di tensione σ_y nella zona plastica, rispetto a quanto avveniva nella precedente versione della espressione della medesima componente di tensione, lasciando circa inalterata la rappresentazione del campo elastico. Tale tentativo si è verificato purtroppo vano in quanto inefficiente allo scopo proposto. Sebbene quanto esposto si possa ritenere corretto dal

punto di vista concettuale, l'entità dei valori assunti dal parametro F non sono sufficienti a permettere all'espressione della componente di tensione σ_y modificata di riprodurre anche sulla zona plastica il campo di tensione appena citato. Mentre per valori grandi dell'angolo θ l'introduzione del parametro F migliora il confronto tra modello CJP e dati FEM, almeno relativamente alla regione di transizione dalla zona plastica alla zona deformata elasticamente, altrettanto non si può dire per angoli θ minori.

Un secondo tentativo condotto concerne l'utilizzare ed il gestire il parametro F allo scopo di descrivere il fenomeno di *crack closure*. Il parametro suddetto non può essere direttamente usato per rappresentare gli effetti del *crack closure* sul campo elastico di fronte alla cricca, in quanto in tale zona esso assume valore nullo. Può essere però adottato per rappresentare le tensioni di compressione che nascono nella zona plastica e sui fianchi, a causa del contatto di questi ultimi, e che devono essere vinte al fine di ottenere l'apertura della cricca necessaria per causarne la propagazione. Il termine F può essere interpretato come una tensione che si comporta in modo analogo alla tensione di chiusura del modello elastoplastico di Dugdale, cioè di una tensione provocata dalla zona plastica apicale che si oppone al movimento di apertura della cricca e che quindi ne rallenta la propagazione. In altri termini, il parametro F può essere rappresentativo, qualora lo si assuma di valore positivo, dell'effetto di *crack closure* e pertanto si ritiene possa quantificare in modo indiretto l'entità di tale fenomeno. Dalle analisi condotte si nota che il SIF K_F modificato assume nella zona plastica valori inferiori rispetto a quelli assunti dal SIF K_F originale mentre i 2 si sovrappongono sulla regione elastica. Questo è logica conseguenza del particolare andamento del parametro F . Un valore inferiore di un SIF si traduce in termini pratici in un campo di tensione di entità minore ed è ciò che si deve riscontrare qualora insorgano fenomeni di *crack closure*. Il modello può pertanto essere considerato corretto sotto questo punto di vista ed in grado di descrivere gli effetti di *shielding* e di *crack closure*. Purtroppo però non è esente da altre problematiche. L'andamento di entrambe le versioni dei SIF K_F sono infatti non costanti, contrariamente all'andamento che dovrebbe avere un parametro di campo quale un fattore di intensificazione delle tensioni. Questa non costanza dei SIF costituisce un problema critico dal punto di vista ingegneristico-operativo, in quanto ne impedisce l'uso ai fini progettuali.

Con quest'ultima osservazione appena riportata termina il presente lavoro di tesi. Il sottoscritto non ha la presunzione di considerarlo concluso ne tantomeno esente da miglioramenti. Sono invece cosciente che molte possono essere le sviste, le imprecisioni e le mancanze. Nonostante ciò, con la speranza di aver contribuito, seppure anche solo in modo

esiguo, allo sviluppo del modello CJP, si ritiene che tale “opera” possa essere un punto di partenza per ulteriori studi e sviluppi del modello stesso. Infatti, sono ancora molti, per motivi di tempo, gli aspetti del modello rimasti da verificare e le idee da testare. Si consideri a tal proposito la possibilità di utilizzare la tecnica di minimizzazione ai minimi quadrati al fine di determinare i valori dei coefficienti che compaiono nelle espressioni di tensione del modello CJP. Potrebbe essere interessante indagare su come variano i valori dei coefficienti qualora questi siano tarati appunto con la tecnica suddetta, utilizzando in un caso tutti e soli i dati FEM appartenenti al campo lineare elastico, in un secondo caso i soli dati FEM del campo plastico ed in un terzo caso sia i dati FEM appartenenti alla zona plastica sia quelli appartenenti alla zona elastica. Altrettanto interessante potrebbe essere un confronto tra i campi di tensione che fornisce il modello (in seguito alle diverse tarature dei coefficienti eseguite come sopra descritto) e i dati FEM ottenuti da analisi ovviamente elastoplastiche. Altre serie di analisi analoghe a quelle condotte nei capitoli 3 e 4 potrebbero essere eseguite variando la geometria, l’entità dei carichi ed il rapporto nominale di ciclo. Questo potrebbe essere un utile indagare svolta allo scopo di studiare il comportamento del modello in presenza di regioni plastiche di maggiore o minore entità, contatti tra i fianchi dei lembi di cricca ed altri eventuali aspetti. Dal punto di vista matematico, essendo il pregio assoluto della soluzione analitica basata sul metodo delle funzioni a potenziale complesso di Muskhelishvili-Kolosoff quello di poter aggiungere potenziali al fine di aumentare le “informazioni” che il modello può fornire, potrebbe essere interessante tentare di estendere la capacità del modello CJP di riprodurre i campi di tensione σ_x e τ_{xy} elastici anche ai campi collocati nella regione plastica, al pari di quanto fatto nel capitolo 6 per la componente di tensione σ_y . Senza dubbio, resta comunque il problema della non costanza dei SIF il principale ostacolo all’uso ingegneristico del modello ed è su tale aspetto che si ritiene debbano essere concentrati i futuri studi e sforzi finalizzati a migliorare il modello CJP.

Bibliografia

- [1] Griffith A.A., 1921, "The phenomena of rupture and flows in solids", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Vol A221, pp. 163-198, London. (Questo articolo è stato ripubblicato con commenti aggiuntivi su *Trans. ASM*, p.61, 871, 1968)
- [2] Vergani L., 2006, "*Meccanica dei materiali*", McGraw-Hill, Milano.
- [3] Orowan E., 1948, "Discussions in symposium on internal stresses in metals alloys", *Institute of metals*, London, p. 451-453.
- [4] Irwin G.R., 1957, "Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate", *Journal of applied mechanics*, Vol. 24, pp. 361-364.
- [5] Rice J.R., 1968, "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", *Journal of applied mechanics*, Vol. 35, pp. 379-386.
- [6] Paris P.C., Sih G.C., 1965, "Stress analysis of crack", *ASTM Special Technical Publication*, N. 381, pp. 30-83.
- [7] Atzori B., 2000, "*Appunti di Costruzioni di Macchine*", 2^a edizione, Libreria Cortina, Padova.
- [8] Dowling N.E., 1993, "*Mechanical Behavior of Materials*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, USA.
- [9] Milella P.P., 1999, "*Meccanica della Frattura Lineare Elastica ed Elastoplastica*", Ansaldo Nucleare, Genova.
- [10] Dugdale D.S., 1960, "Yielding of steel sheet containing slits", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.8, pp.100-104.
- [11] Borruto A., 2002, "*Meccanica della frattura: lineare elastica, elastoplastica, port-snervamento*", Editore Ulrico Hoepli Milano.

[12] Elber W., 1970, “Fatigue Crack Closure Under Cyclic Tension”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 2, pp 37-45.

[13] Christopher C.J., James M.N., Patterson E.A., Tee K.F., 2008, “A quantitative evaluation of fatigue crack shielding forces using photoelasticity”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, pp. 4190-4199.

[14] Christopher C.J., James M.N., Patterson E.A., Tee K.F., 2007, “Towards a new model of crack tip stress fields”, *International Journal of Fracture*, Vol. 148, pp. 361-371.

[15] Appunti del corso “*Meccanica dei Materiali*”, Prof. Lazzarin P., Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali, Università di Padova.

[16] Timoshenko S. P., Goodier J.N., 1970, “*Theory of Elasticity*”, 3rd edition, McGraw-Hill Higher Education.

[17] Zappalorto M., Lazzarin P., 2011, “On the intensity of linear elastic high order singularities ahead of cracks and re-entrant corners”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, pp. 953-961.

[18] Anderson T.L., 2005, “*Fracture Mechanics – Fundamentals and Applications*”, 3rd edition, Taylor & Francis.

Libri, tesi, appunti e dispense utilizzati per approfondimenti generali:

- Milella P.P., 1999, “*Meccanica della Frattura Lineare Elastica ed Elastoplastica*”, Ansaldo Nucleare, Genova.
- Gugliotta A., 1993, “*Introduzione della Meccanica della Frattura Lineare Elastica*”, Libreria Editrice Universitaria Levrotto & Bella, Torino.
- Carpinteri A., 1992, “*Meccanica dei Materiali e della Frattura*”, Pitagora Editrice, Bologna.
- Fuchs H.O. e Stephens R.I., 1980, “*Metal Fatigue in Engineering*”, John Wiley & Sons, USA.

- Scalzotto M, Tesi di Laurea: “*MFLE e l'influenza della zona plastica sui campi tensionali all'apice della cricca: un nuovo Modello Matematico*”, relatore Lazzarin P., AA 2009/2010.
- Dispense del Corso “*Meccanica dei Materiali*”, Prof. Lazzarin P., Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali, Università di Padova.
- Dispense del Corso “*Elementi di Meccanica dei Materiali*”, Prof. Pitarresi G., Dipartimento di Meccanica, Università di Palermo.
- James M. N., Christopher C. J., Yanwei Lu, Patterson E. A., “The plastic ‘inclusion’ as a bridge between local crack plasticity and the global elastic field”, *Characterization of crack tip stress fields*, Forni di Sopra (UD), Italy, March 7-9, 2011, pp. 178-184.
- Colombo C., Du Y., James M.N., Patterson E.A., Vergani L., 2010 “On crack tip shielding due to plasticity-induced closure during an overload”, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 33, pp 766-777.
- C. Colombo, L. Vergani, 2010, “A numerical and experimental study of crack tip shielding in presence of overloads”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 77, pp. 1644-1655.
- James M.N., Pacey M.N., Wei L.W., Patterson E.A., 2003, “Characterisation of plasticity-induced closure—crack flank contact force versus plastic enclave”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 70, pp. 2473–2487.

Appendice

Codice fornito al software FEM ANSYS® 11.0 per descrivere la curva monotona ed il comportamento *isotropic hardening* del materiale.

/COM,ANSYS RELEASE 5.5 UP19981001 .1 21:55:41 06/02/1999

/NOP

/COM,Internal UNITS set at file creation time = SI (MKS)

TBDEL,ALL,_MATL

MPDEL,ALL,_MATL

MPTEMP,R5.0,1,1,0.00000000 ,

MPDATA,R5.0,1,EX,_MATL,1,200000.000 ,

MPTEMP,R5.0,1,1,0.00000000 ,

MPDATA,R5.0,1,NUXY,_MATL,1,0.300000000 ,

TB,MISO,_MATL,1,100

TBTEMP,0,1

TBPT,,4.854369E-06,1.000000E+00

TBPT,,2.427215E-04,5.000000E+01

TBPT,,2.502563E-04,5.155204E+01

TBPT,,2.580252E-04,5.315225E+01

TBPT,,2.660354E-04,5.480213E+01

TBPT,,2.742944E-04,5.650323E+01

TBPT,,2.828100E-04,5.825713E+01

TBPT,,2.915903E-04,6.006547E+01

TBPT,,3.006435E-04,6.192995E+01

TBPT,,3.099781E-04,6.385230E+01

TBPT,,3.196031E-04,6.583432E+01

TBPT,,3.295275E-04,6.787786E+01

TBPT,,3.397608E-04,6.998484E+01

TBPT,,3.503128E-04,7.215722E+01

TBPT,,3.611936E-04,7.439703E+01

TBPT,,3.724137E-04,7.670637E+01

TBPT,,3.839839E-04,7.908739E+01

TBPT,,3.959156E-04,8.154232E+01

TBPT,,4.082205E-04,8.407345E+01

TBPT,,4.209109E-04,8.668315E+01

TBPT,,4.339994E-04,8.937386E+01

TBPT,,4.474994E-04,9.214809E+01

TBPT,,4.614249E-04,9.500843E+01

TBPT,,4.757905E-04,9.795756E+01

TBPT,,4.906116E-04,1.009982E+02

TBPT,,5.059046E-04,1.041333E+02

TBPT,,5.216868E-04,1.073657E+02

TBPT,,5.379765E-04,1.106984E+02

TBPT,,5.547937E-04,1.141345E+02

TBPT,,5.721595E-04,1.176773E+02

TBPT,,5.900970E-04,1.213301E+02

TBPT,,6.086314E-04,1.250963E+02

TBPT,,6.277901E-04,1.289794E+02

TBPT,,6.476037E-04,1.329830E+02

TBPT,,6.681060E-04,1.371109E+02

TBPT,,6.893351E-04,1.413669E+02

TBPT,,7.113340E-04,1.457550E+02

TBPT,,	7.341515E-04	,	1.502794E+02
TBPT,,	7.578437E-04	,	1.549442E+02
TBPT,,	7.824754E-04	,	1.597537E+02
TBPT,,	8.081217E-04	,	1.647126E+02
TBPT,,	8.348708E-04	,	1.698254E+02
TBPT,,	8.628259E-04	,	1.750969E+02
TBPT,,	8.921094E-04	,	1.805320E+02
TBPT,,	9.228666E-04	,	1.861359E+02
TBPT,,	9.552706E-04	,	1.919137E+02
TBPT,,	9.895289E-04	,	1.978708E+02
TBPT,,	1.025891E-03	,	2.040129E+02
TBPT,,	1.064656E-03	,	2.103456E+02
TBPT,,	1.106187E-03	,	2.168748E+02
TBPT,,	1.150923E-03	,	2.236068E+02
TBPT,,	1.199396E-03	,	2.305477E+02
TBPT,,	1.252251E-03	,	2.377041E+02
TBPT,,	1.310275E-03	,	2.450826E+02
TBPT,,	1.374425E-03	,	2.526901E+02
TBPT,,	1.445868E-03	,	2.605338E+02
TBPT,,	1.526026E-03	,	2.686210E+02
TBPT,,	1.616638E-03	,	2.769591E+02
TBPT,,	1.719826E-03	,	2.855562E+02
TBPT,,	1.838186E-03	,	2.944200E+02
TBPT,,	1.974891E-03	,	3.035590E+02
TBPT,,	2.133822E-03	,	3.129817E+02
TBPT,,	2.319731E-03	,	3.226969E+02
TBPT,,	2.538432E-03	,	3.327136E+02
TBPT,,	2.797045E-03	,	3.430413E+02
TBPT,,	3.104286E-03	,	3.536896E+02
TBPT,,	3.470834E-03	,	3.646683E+02
TBPT,,	3.909765E-03	,	3.759879E+02
TBPT,,	4.437103E-03	,	3.876588E+02
TBPT,,	5.072476E-03	,	3.996921E+02
TBPT,,	5.839935E-03	,	4.120988E+02
TBPT,,	6.768951E-03	,	4.248906E+02
TBPT,,	7.895639E-03	,	4.380795E+02
TBPT,,	9.264256E-03	,	4.516778E+02
TBPT,,	1.092904E-02	,	4.656982E+02
TBPT,,	1.295646E-02	,	4.801538E+02
TBPT,,	1.542800E-02	,	4.950582E+02
TBPT,,	1.844350E-02	,	5.104251E+02
TBPT,,	2.212535E-02	,	5.262691E+02
TBPT,,	2.662355E-02	,	5.426049E+02
TBPT,,	3.212197E-02	,	5.594477E+02
TBPT,,	3.884597E-02	,	5.768134E+02
TBPT,,	4.707178E-02	,	5.947181E+02
TBPT,,	5.713799E-02	,	6.131785E+02
TBPT,,	6.945961E-02	,	6.322120E+02
TBPT,,	8.454538E-02	,	6.518363E+02
TBPT,,	1.030188E-01	,	6.720698E+02
TBPT,,	1.256443E-01	,	6.929313E+02
TBPT,,	1.533588E-01	,	7.144404E+02
TBPT,,	1.873106E-01	,	7.366172E+02
TBPT,,	2.289075E-01	,	7.594823E+02
TBPT,,	2.798751E-01	,	7.830572E+02
TBPT,,	3.423285E-01	,	8.073638E+02
TBPT,,	4.188604E-01	,	8.324250E+02
TBPT,,	5.126489E-01	,	8.582640E+02

```

TBPT,, 6.275898E-01 , 8.849052E+02
TBPT,, 7.684582E-01 , 9.123733E+02
TBPT,, 9.411077E-01 , 9.406940E+02
TBPT,, 1.152713E+00 , 9.698938E+02
TBPT,, 1.412070E+00 , 1.000000E+03
/GO

```

Codice fornito al software FEM ANSYS® 11.0 per descrivere la curva monotona ed il comportamento *kinematic hardening* del materiale.

/COM,ANSYS RELEASE 5.5 UP19981001 .1 21:55:41 06/02/1999

```

/NOP
/COM,Internal UNITS set at file creation time = SI (MKS)
TBDEL,ALL,_MATL
MPDEL,ALL,_MATL
MPTEMP,R5.0,1,1,0.00000000 ,
MPDATA,R5.0,1,EX,_MATL,1,206000.000 ,
MPTEMP,R5.0,1,1,0.00000000 ,
MPDATA,R5.0,1,NUXY,_MATL,1,0.300000000 ,
TB,KINH,_MATL,1,20
TBTEM,0,1
TBPT,, 4.854369E-06 , 1.000000E+00
TBPT,, 3.787383E-03 , 3.730000E+02
TBPT,, 4.759794E-03 , 3.940060E+02
TBPT,, 6.121244E-03 , 4.161949E+02
TBPT,, 8.040841E-03 , 4.396334E+02
TBPT,, 1.076204E-02 , 4.643919E+02
TBPT,, 1.463535E-02 , 4.905447E+02
TBPT,, 2.016552E-02 , 5.181703E+02
TBPT,, 2.807940E-02 , 5.473517E+02
TBPT,, 3.942374E-02 , 5.781765E+02
TBPT,, 5.570609E-02 , 6.107373E+02
TBPT,, 7.909765E-02 , 6.451317E+02
TBPT,, 1.127255E-01 , 6.814631E+02
TBPT,, 1.610937E-01 , 7.198405E+02
TBPT,, 2.306892E-01 , 7.603792E+02
TBPT,, 3.308554E-01 , 8.032009E+02
TBPT,, 4.750500E-01 , 8.484341E+02
TBPT,, 6.826560E-01 , 8.962148E+02
TBPT,, 9.815922E-01 , 9.466862E+02
TBPT,, 1.412070E+00 , 1.000000E+03
/GO

```