



Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria
dell'Informazione

Tesina di laurea triennale

Modellizzazione e Controllo della Dinamica di un Convertiplano

Candidato:
Sofia Filippi
Matricola 1003987

Relatore:
Prof.ssa Maria Elena Valcher

Anno Accademico 2013–2014

Indice

1	Introduzione	1
2	Descrizione del sistema meccanico	5
2.1	Rappresentazione del modello I/O e in spazio di stato	6
2.2	Punti di equilibrio	7
2.3	Linearizzazione del Modello	7
2.4	Funzione di trasferimento	8
3	Stabilità dei punti di equilibrio del sistema	11
4	Progettazione del controllore	15
4.1	Controllo della posizione del velivolo	15
4.1.1	Controllo della quota z	15
4.1.2	Controllo sul parametro b	22
4.2	Controllo della rotazione del velivolo	25
4.2.1	Controllo sul parametro β	25
4.2.2	Controllo dell'angolo di rotazione θ	28
5	Conclusioni	31
	Bibliografia	35

Elenco delle figure

1.1	Bell XV-15 in fase di decollo	1
1.2	Bell Boeing V-22 in fase di rotazione dei motori	2
1.3	Bell Agusta BA609 in fase di volo in quota	2
1.4	Schema di un sistema controllato	3
2.1	Schema del sistema meccanico	5
3.1	Risposta al gradino unitario di G_1	13
3.2	Risposta al gradino unitario di G_2	13
4.1	Diagramma di Bode di G_1	19
4.2	Diagramma di Bode di C_{A1}	20
4.3	Diagramma di Bode di \tilde{G}_1'	21
4.4	Diagramma di Bode di S_b	23
4.5	Diagramma di Bode di \tilde{G}_1	24
4.6	Diagramma di Bode di S_β	26
4.7	Diagramma di Bode di G_2	27
4.8	Diagramma di Bode di \tilde{G}_2'	28
4.9	Diagramma di Bode di \tilde{G}_2	30
5.1	Schema a blocchi del sistema in catena chiusa W_1	31
5.2	Risposta al gradino unitario di W_1	32
5.3	Schema a blocchi del sistema in catena chiusa W_2	33
5.4	Risposta al gradino unitario di W_2	33

Capitolo 1

Introduzione

Il convertiplano sintetizza in un unico velivolo le caratteristiche di elicottero e quelle di aereo in quanto eredita la capacità di volo a punto fisso dal primo e l'alta velocità dal secondo.

La possibilità di integrare in un solo velivolo sia le qualità dell'aereo che quelle dell'elicottero permette da un lato di ovviare ai limiti dell'ala fissa, che richiede ampi spazi liberi per decollo e atterraggio e, dall'altro, quelli dell'ala rotante, che permette di volare solo a velocità, autonomia e carico ridotti.



Figura 1.1: Bell XV-15 in fase di decollo

Questa duttilità è resa possibile grazie alla rotazione dei due motori attorno all'asse parallelo alle ali su cui sono montati.

Quando i motori hanno l'asse rivolto frontalmente, come un aeroplano, l'energia viene usata per generare la spinta che serve a vincere la resistenza aerodinamica che si oppone all'avanzamento. La spinta necessaria a sostenere il peso viene generata dal flusso aerodinamico sulle ali, prodotto dall'avanzamento.



Figura 1.2: Bell Boeing V-22 in fase di rotazione dei motori

Quando, invece, i motori hanno l'asse rivolto verso l'alto, come per un elicottero, l'energia usata dai motori viene impiegata per vincere la resistenza aerodinamica, per sostenere il peso e garantire la controllabilità della macchina.

Precedentemente al convertiplano, le due differenti anime erano rimaste ben distinte facendo sì che si producessero velivoli ciascuno con il proprio campo di applicazione.

Negli ultimi anni, invece, ha destato grande interesse lo studio e lo sviluppo di questa tecnologia perché è in grado di riempire il vuoto lasciato tra le due consuete architetture già impiegate. La modalità di volo che adotta il convertiplano è in grado di sintetizzare entrambe le tipologie quindi la sua diffusione potrà abbattere i limiti di offerta dell'attuale trasporto aereo.



Figura 1.3: Bell Agusta BA609 in fase di volo in quota

L'oggetto di studio di questa tesi è il sistema meccanico che rappresenta la dinamica trasversale di un convertiplano e la progettazione di controllori per il rispetto dei vincoli sull'uscita imposti dalle specifiche, applicando le nozioni di automatica acquisite durante il corso di Controlli Automatici.

Inizialmente analizzeremo il modello matematico che ne descrive il moto attraverso un sistema di due equazioni differenziali. Successivamente porteremo il sistema nella forma di spazio di stato e, trattandosi di un sistema non lineare, ricaveremo il punto di equilibrio attorno al quale costruiremo il sistema linearizzato. Una volta ottenuto il sistema lineare, ricaveremo la matrice di trasferimento e, prima di procedere con il progetto del controllore, studieremo la stabilità del sistema ad anello aperto.

Il sistema linearizzato ha gli ingressi e le uscite a due a due indipendenti, nel senso che il primo ingresso agisce solo sulla prima uscita (posizione verticale del velivolo) e il secondo ingresso solo sulla seconda uscita (angolo di rotazione rispetto all'asse orizzontale). Per questo motivo le funzioni di trasferimento saranno due, e ben distinte, quindi saranno distinti anche i progetti dei controllori. Procederemo secondo le richieste imposte dalle specifiche che riguarderanno: sovraelongazione, tempo di assestamento e range di variazione dei parametri che simulano gli agenti esterni che possono influenzare il moto del velivolo. Avanzeremo per fasi, cercando di rispettare in sequenza ciascuna delle specifiche di progetto.

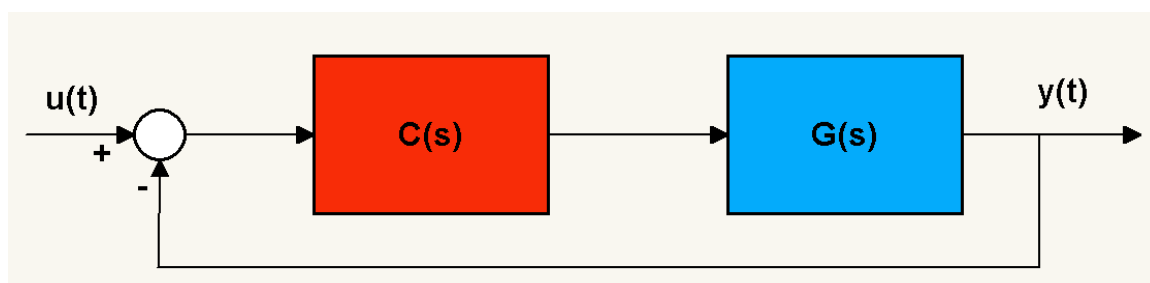


Figura 1.4: Schema di un sistema controllato

Lo strumento fondamentale che utilizzeremo per riuscire a progettare una legge di controllo efficace sarà l'ambiente Matlab che, grazie ai diagrammi di Bode, ci permetterà di valutare passo passo i progressi apportati dall'aggiunta dei controllori.

Una volta ultimata la legge di controllo, simuleremo con Simulink l'andamento dell'uscita del sistema con ingresso pari al gradino unitario per verificare se le specifiche saranno effettivamente rispettate.

Capitolo 2

Descrizione del sistema meccanico

Il sistema meccanico mostrato in Figura 2.1 rappresenta la dinamica trasversale del convertiplano.

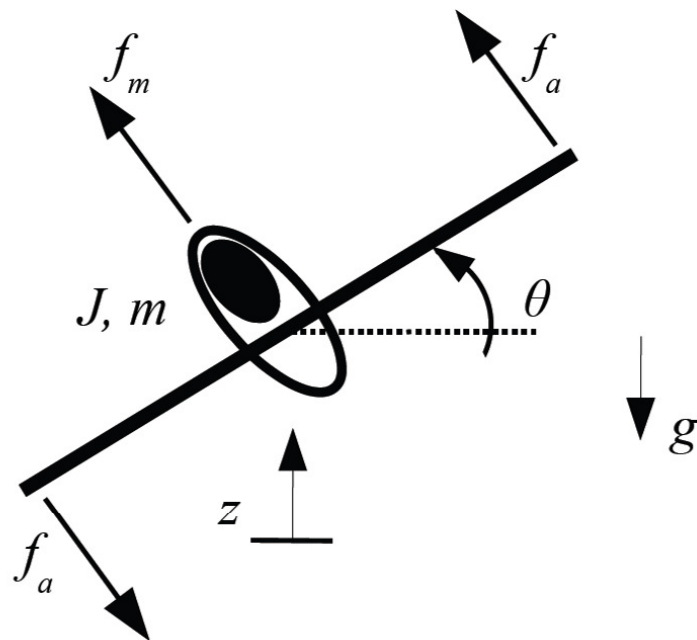


Figura 2.1: Schema del sistema meccanico

Per definire in maniera completa il sistema, elenchiamo qui di seguito le grandezze fisiche che entrano in gioco nella dinamica andremo ad analizzare:

J	inerzia del velivolo
m	massa del velivolo
z	posizione verticale del velivolo
θ	posizione angolare del velivolo
b	coefficiente di attrito viscoso che modella la resistenza dell'aria alla traslazione del velivolo
β	coefficiente di attrito viscoso che modella la resistenza dell'aria alla rotazione del velivolo
l	apertura alare del velivolo
f_m, f_a	forze motrici
g	accelerazione gravitazionale

2.1 Rappresentazione del modello I/O e in spazio di stato

Le equazioni differenziali che descrivono il modello sono le seguenti:

$$\begin{cases} m\ddot{z} + b\dot{z} = f_m \cos \theta - mg \\ J\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} = 2lf_a \end{cases} \quad \text{modello I/O non lineare} \quad (2.1)$$

Per passare al modello in spazio di stato che ci permetterà di ricavare la funzione di trasferimento del sistema, scriviamo gli stati, gli ingressi e le uscite in questo modo:

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \theta \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} && \text{variabili di stato} \\ u &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m \\ f_a \end{bmatrix} && \text{ingresso di controllo} \\ y &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix} && \text{uscita del sistema} \end{aligned}$$

Infine, sostituendo le precedenti grandezze nel modello I/O, ricaviamo il modello in spazio di stato del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{b}{m}x_3 + \frac{f_m}{m} \cos x_2 - g \\ \dot{x}_4 = -\frac{\beta}{J}x_4 + \frac{2l}{J}f_a \end{cases} \quad \text{modello di stato non lineare} \quad (2.2)$$

2.2 Punti di equilibrio

Il modello di stato, che rappresenta la dinamica del convertiplano, non è lineare. Per poterne studiare la stabilità è necessario renderlo lineare facendo un'approssimazione attorno ai punti di equilibrio del sistema. Per il calcolo dei punti di equilibrio imponiamo che il sistema sia soggetto ad ingresso arbitrario costante pari a : $\begin{cases} \bar{f}_m = \bar{f}_m \\ \bar{f}_a = \bar{f}_a \end{cases}$

Se il sistema è in equilibrio si trova in uno stato costante quindi poniamo il vincolo che la sua derivata sia nulla: $x = x_e \Leftrightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

Sostituiamo questi valori nel modello in spazio di stato (2.2), ottenendo:

$$\begin{cases} 0 = x_{3e} \\ 0 = x_{4e} \\ 0 = -\frac{b}{m}x_{3e} + \frac{\bar{f}_m}{m}\cos x_{2e} - g \\ 0 = -\frac{\beta}{J}x_{4e} + \frac{2l}{J}\bar{f}_a \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\bar{f}_m}{m}\cos x_{2e} = g \\ \bar{f}_a = 0 \end{cases}$$

Per semplicità decidiamo di imporre all'equilibrio la condizione: $x_2 = \theta = 0$. In tal modo otteniamo che gli unici ingressi costanti in corrispondenza ai quali esistono punti di equilibrio con $x_2 = \theta = 0$ sono: $\begin{cases} \bar{f}_m = mg \\ \bar{f}_a = 0 \end{cases}$

Il generico stato di equilibrio che rispetta i vincoli è il seguente:

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \\ x_{3e} \\ x_{4e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove la quota del convertiplano all'equilibrio x_{1e} è arbitraria.

2.3 Linearizzazione del Modello

Ora si può determinare il sistema linearizzato attorno al generico punto di equilibrio $x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ precedentemente calcolato, partendo dallo sviluppo in serie di Taylor arrestato ai termini del primo ordine:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = f_i(x) \simeq & f_i(x_{eq}) + \frac{\partial f_i(x_{eq})}{\partial x_1}(x_1 - x_{1e}) + \frac{\partial f_i(x_{eq})}{\partial x_2}(x_1 - x_{2e}) + \frac{\partial f_i(x_{eq})}{\partial x_3}(x_1 - x_{3e}) + \\ & + \frac{\partial f_i(x_{eq})}{\partial x_4}(x_1 - x_{4e}) \end{aligned}$$

dove \dot{x}_i rappresenta la derivata temporale della i -esima variabile di stato del sistema ed f_i la componente i -esima della funzione f . Il termine $f_i(x_{eq})$ è nullo per definizione di punto di equilibrio.

In questo modo la dinamica dei piccoli scostamenti di x ed u rispetto ai valori costanti di equilibrio può essere descritta in modo semplificato come segue:

$$\delta\dot{x} = F_{x_e}\delta x + G_{x_e}\delta u$$

dove:

$$\delta x = x - x_e = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{1e} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta u = \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m - mg \\ f_a - 0 \end{bmatrix}$$

e le matrici F_{x_e} e G_{x_e} sono:

$$F_{x_e} = \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=x_e \\ f_m=mg \\ f_a=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f_m}{m} \sin x_{2e} & -\frac{b}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix}$$

$$G_{x_e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\cos x_{2e}}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix}$$

2.4 Funzione di trasferimento

Una volta linearizzato, il sistema può essere rappresentato come segue:

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx + Du \end{cases} \quad (2.3)$$

che in forma estesa è:

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - x_{1e} \\ \theta \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_m - mg \\ f_a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z - x_{1e} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - x_{1e} \\ \theta \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

L'uscita scelta per il sistema non dipende dall'ingresso ma solo dallo stato quindi la matrice D in questo caso è nulla. La matrice di trasferimento si riduce alla forma:

$$\begin{aligned} W(s) = H(sI - F)^{-1}G &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & \frac{1}{s(s+\frac{b}{m})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & \frac{1}{s(s+\frac{\beta}{J})} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+\frac{b}{m}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+\frac{\beta}{J}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & \frac{1}{s(s+\frac{b}{m})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & \frac{1}{s(s+\frac{\beta}{J})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(b+ms)} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{s(\beta+Js)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se prendiamo in considerazione l'azione del solo ingresso f_m sulla componente $z - x_{1e}$ della posizione verticale, la funzione di trasferimento è esprimibile nella forma:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(b+ms)} \quad (2.4)$$

Analogamente quando agisce solo l'ingresso f_a sulla posizione angolare θ , la funzione di trasferimento è:

$$G_2(s) = \frac{2l}{s(\beta+Js)} \quad (2.5)$$

Capitolo 3

Stabilità dei punti di equilibrio del sistema

Lo studio della stabilità è necessario per verificare se, nel caso in cui il sistema venga spostato dalla condizione di equilibrio, esso vi ritornerà o meno. Un punto di equilibrio del sistema è asintoticamente stabile se, in assenza di ingresso, lo stato del sistema per $t \rightarrow \infty$ converge asintoticamente al punto di equilibrio a condizione che lo stato iniziale si discosti di poco dal valore all'equilibrio. Per valutare la stabilità del sistema non lineare studiamo il segno delle radici dell'equazione caratteristica che è pari a $\Lambda_F(s) = |sI_4 - F|$:

- se tutte le radici hanno parte reale negativa il sistema è asintoticamente stabile;
- se ci sono delle radici che hanno parte reale positiva il sistema è instabile;
- se ci sono delle radici a parte reale nulla ma nessuna radice a parte reale positiva non si possono trarre conclusioni sulla stabilità asintotica del punto di equilibrio.

Se non possiamo valutare la stabilità in senso lato, proviamo a vedere se il sistema è BIBO stabile analizzando il denominatore della funzione di trasferimento, che deve avere tutti i poli a parte reale negativa.

Per poter proseguire con l'analisi della stabilità dobbiamo attribuire dei valori numerici ai parametri che caratterizzano il sistema:

$$\begin{aligned} J &= 5000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ m &= 2000 \text{ kg} \\ b &= 150 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m} \\ \beta &= 15 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad} \\ l &= 10 \text{ m} \\ g &= 9.81 \text{ m}/\text{s}^2 \end{aligned}$$

A partire dal sistema $\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx + Du \end{cases}$ troviamo che:

$$|sI_4 - F| = s^2 \left(s + \frac{b}{m} \right) \left(s + \frac{\beta}{J} \right) = s^2 \left(s + \frac{150}{2000} \right) \left(s + \frac{15}{5000} \right)$$

Quindi le radici della funzione caratteristica sono:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 && \text{con molteplicità } \nu = 2 \\ s_2 &= -\frac{150}{2000} = -0,075 && \text{con molteplicità } \nu = 1 \\ s_3 &= -\frac{15}{5000} = -0,0003 && \text{con molteplicità } \nu = 1 \end{aligned}$$

Se applichiamo il criterio di linearizzazione, per determinare la stabilità asintotica dei punti di equilibrio, è evidente che non si può fare nessuna ipotesi (3° caso) visto che ci sono due radici nulle e nessuna a parte reale positiva.

Andiamo ora ad analizzare il denominatore della funzione di trasferimento per valutare la stabilità BIBO del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio. Se sostituiamo i valori numerici nelle funzioni di trasferimento otteniamo:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(b + ms)} = \frac{1}{s(150 + 2000s)} = 150 \frac{1}{s \left(1 + \frac{40}{3}s \right)} \simeq 10^{2.18} \frac{1}{s \left(1 + \frac{s}{10^{-1.12}} \right)}$$

$$G_2(s) = \frac{2l}{s(\beta + Js)} = \frac{20}{s(15 + 5000s)} = 300 \frac{1}{s \left(1 + \frac{1000}{3}s \right)} \simeq 10^{2.48} \frac{1}{s \left(1 + \frac{s}{10^{-2.5}} \right)}$$

Entrambi i denominatori hanno una radice nulla e una a parte reale negativa quindi il sistema non è neanche BIBO stabile. Possiamo vederlo anche dai grafici delle risposte al gradino unitario (Figure 3.1 e 3.2), che in effetti hanno un andamento divergente per $t \rightarrow \infty$.

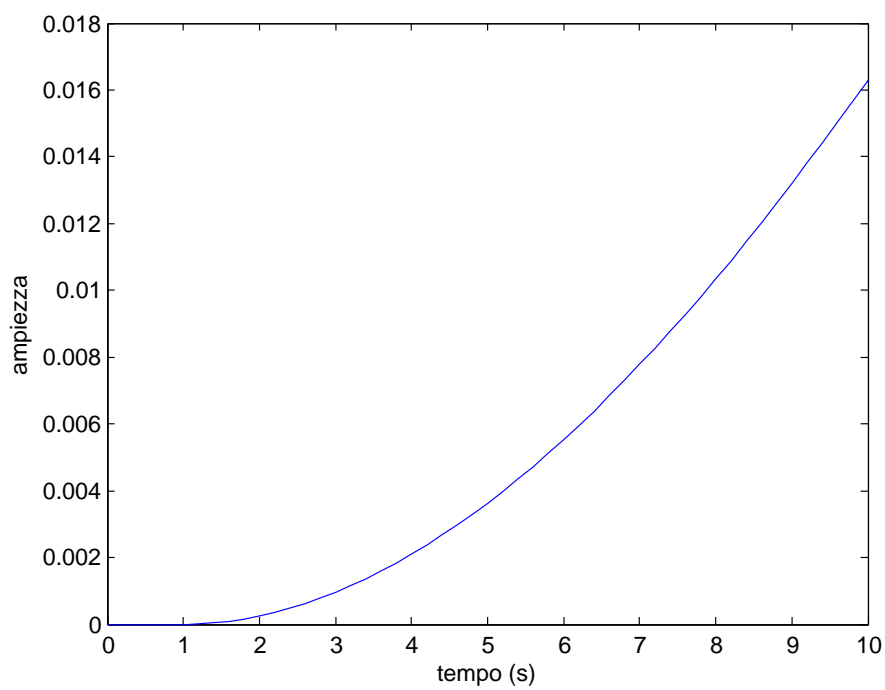


Figura 3.1: Risposta al gradino unitario di G_1

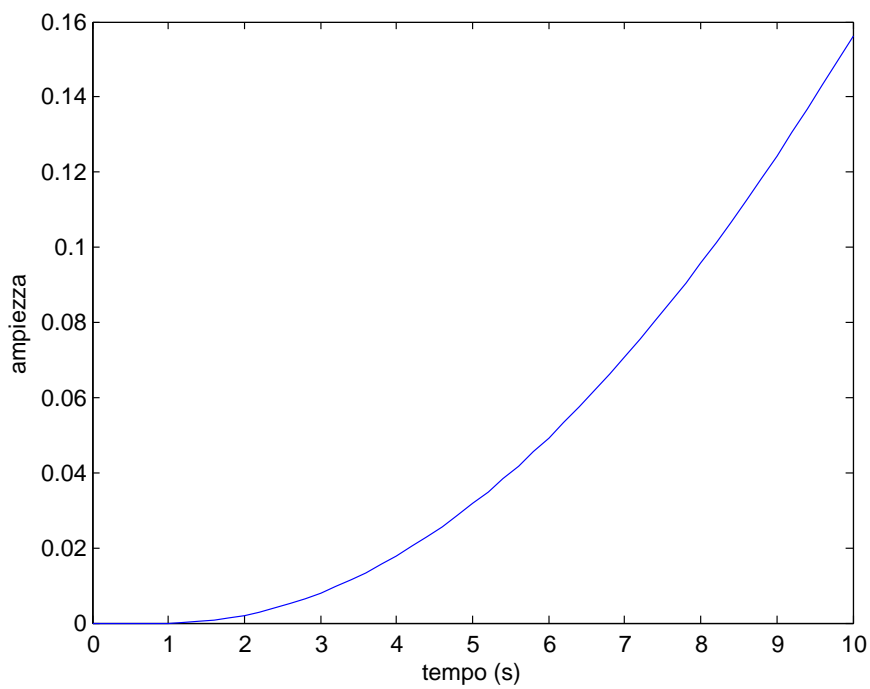


Figura 3.2: Risposta al gradino unitario di G_2

Progettazione del controllore

4.1 Controllo della posizione del velivolo

Supponendo che il velivolo si trovi inizialmente alla quota $\bar{z} = 0$, progetteremo una legge di controllo per l'ingresso f_m che agisca in modo da garantire due requisiti simultaneamente:

- che si raggiunga il 98% della quota z di regime pari a 1 m , senza mai eccedere un valore pari a 1.1 m , in un tempo non superiore a 2 s ;
- che in presenza di una variazione di $\pm 30\%$ del valore nominale del parametro b (coefficiente di attrito viscoso dell'aria), l'errore relativo sull'uscita corrispondente ad ingressi con frequenze inferiori a 1 rad/s , sia minore dell'1%.

4.1.1 Controllo della quota z

Inizialmente progettiamo un controllore in retroazione che rispetti i vincoli imposti dalla prima richiesta, ovvero dobbiamo fare in modo che il sistema si porti alla quota di regime senza errori. Fortunatamente questa specifica è già garantita dalla presenza di un polo nell'origine nella funzione di trasferimento G_1 , infatti il sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da G_1 è di *tipo 1* quindi l'errore a regime al gradino è nullo: si ottiene l'inseguimento perfetto.

Possiamo esprimere la specifica del raggiungimento del 98% in 2 s come il tempo di assestamento al 2% che, per la richiesta, non deve appunto superare i 2 s .

Per quanto riguarda il limite superiore della quota raggiungibile, non si tratta altro che della sovraelongazione che, rapportando gli 1.1 m con 1 m della quota di regime, risulta dover essere al massimo del 10%.

$$\begin{cases} t_{a2\%} \leq 2\text{ s} \\ S \leq 10\% \end{cases}$$

Prima di cominciare con i calcoli espliciti, facciamo una piccola digressione per spiegare come si possono ricavare le formule per la sovraelongazione e il tempo di assestamento.

Un sistema del secondo ordine con due poli complessi coniugati $\alpha \pm j\beta$ e senza zeri è caratterizzato, a meno di un fattore costante, da una funzione di trasferimento in catena chiusa del tipo:

$$W(s) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

dove $\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ e $\xi = -\frac{\alpha}{\omega_n}$.

Da ciò ne deriva che $\beta = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ quindi per avere poli complessi coniugati, ξ deve essere compreso tra -1 e 1 . D'altra parte, lo studio della risposta al gradino è interessante solo nel caso in cui il sistema sia stabile, quindi quando i poli hanno parte reale non positiva, cioè per $0 \leq \xi < 1$.

Determiniamo la risposta al gradino del sistema di secondo ordine antitrasformando:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} W(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s \left(1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)} \right\} = (1 - Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\beta t + \phi)) H(t) \quad (4.1)$$

dove $A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$ e $\phi = \arctan \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right)$.

Il valore S della massima sovraelongazione è dato dalla differenza fra il valore massimo raggiunto $y_{MAX} = y(t_p)$ (t_p = tempo di picco) ed il valore di regime raggiunto \bar{y} , normalizzato rispetto alla differenza tra valore iniziale y_o e valore di regime:

$$S = \frac{|y_{MAX} - \bar{y}|}{|\bar{y} - y_o|}$$

Possiamo ricavare la relazione esatta fra il coefficiente di smorzamento ξ e la massima sovraelongazione S , imponendo:

$$\frac{dy}{dt} = -Ae^{-\xi\omega_n t} \beta \cos(\beta t + \phi) + A\xi e^{-\xi\omega_n t} \sin(\beta t + \phi) = 0 \quad (4.2)$$

L'equazione (4.2) è verificata se e solo se:

$$\xi\omega_n \sin(\beta t + \phi) - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \cos(\beta t + \phi) = 0$$

Ovvero quando:

$$\tan(\beta t + \phi) = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$

Poiché $\phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$, ξ deve valere $\beta t = k\pi$ con $k = 0, 1, \dots$

Per gli istanti di massimo e minimo vale:

$$t_k = \frac{k\pi}{\beta} = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

Se sostituiamo questi istanti nella risposta (4.1), otteniamo:

$$y(t_k) = 1 - \frac{e^{-\frac{k\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(k\pi + \phi) = 1 - (-1)^k e^{-\frac{k\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Dalle espressioni precedenti, ricaviamo che $T_{MAX} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$ quindi:

$$S = y(t_1) - 1 = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

La massima sovraelongazione si raggiunge tanto prima quanto maggiore è la pulsazione naturale ω_n , e tanto più tardi quanto maggiore è lo smorzamento. Il picco di sovraelongazione è funzione solo dello smorzamento della coppia di poli del sistema e decresce piuttosto rapidamente con esso. Affinché la sovraelongazione non ecceda il valore massimo S_{MAX} , il sistema deve avere smorzamento $\geq \xi_{min}$ e i poli devono appartenere ad un settore conico con asse la semiretta reale negativa e semiapertura $\phi_{MAX} = \arccos(\xi_{min})$.

Invece, affinché il sistema sia sufficientemente rapido nel rispondere al gradino, dobbiamo garantire un tempo di assestamento molto breve. Il tempo di assestamento $t_{a,p\%}$ è definito come il più piccolo valore per il quale vale:

$$|1 - y(t)| = |Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\beta t + \phi)| \leq \frac{p}{100} \quad \forall t \geq t_a \quad (4.3)$$

E' difficile valutare esplicitamente questa espressione per la presenza della funzione seno, quindi possiamo approssimare per eccesso $\sin(\beta t + \phi)$ con il valore massimo del suo argomento nel periodo. Essendo $A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} > 0$ per $0 < \xi < 1$, ricaviamo dall'equazione (4.3) che:

$$e^{-\xi\omega_n t} \leq \frac{p}{100} \frac{1}{A}$$

$$\xi\omega_n t \geq -\ln\left(\frac{p}{100}\right) + \ln(A)$$

Da cui:

$$t_{a,p\%} \simeq \frac{4.6 - \ln(p) - \frac{1}{2} \ln(1 - \xi^2)}{\xi \omega_n}$$

Per smorzamenti ξ sufficientemente piccoli, si può adottare la relazione approssimata:

$$t_{a,p\%} \simeq \frac{4.6 - \ln(p)}{\xi \omega_n} \quad (4.4)$$

Ora possiamo dire conclusa l'analisi generale quindi passiamo al nostro caso specifico. Siamo in grado di sfruttare la trattazione precedente poiché approssimiamo la funzione di trasferimento in catena chiusa, ottenuta attraverso il controllo, con una funzione di trasferimento con denominatore di secondo ordine.

Se imponiamo il vincolo sulla percentuale massima di sovralongazione pari al 10% otteniamo:

$$S = e^{\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \leq 0.1$$

Ricaviamo ξ :

$$-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \leq \ln 0.1$$

$$\pi\xi \geq 2.3\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\xi^2 \geq \frac{(2.3)^2}{\pi^2 + (2.3)^2} \simeq 0.349$$

$$\xi \simeq 0.591 \quad (4.5)$$

$$\xi = \sin\left(\frac{M_\varphi}{2}\right) \quad (4.6)$$

dove M_φ è il margine di fase.

La relazione (4.6) è molto importante poiché esprime un legame tra lo smorzamento dei poli dominanti del sistema in anello chiuso e il margine di fase della funzione di trasferimento di anello. Il valore dello smorzamento ξ così ottenuto è approssimato e fornisce solamente un'indicazione di primo tentativo del vero smorzamento dei poli dominanti del sistema in anello chiuso. Per valori di M_φ inferiori a circa $1.3 \text{ rad} \simeq 75^\circ$, è possibile sostituire alla funzione *seno* il suo argomento. Si ha quindi la relazione approssimata:

$$\xi = \frac{M_\varphi}{2} \frac{\pi}{180} \simeq \frac{M_\varphi}{100} \quad (M_\varphi \text{ in gradi})$$

Sostituiamo il valore di ξ calcolato nell'espressione (4.5) e troviamo che il margine di fase è pari a:

$$M_\varphi \simeq 60^\circ$$

A partire dall'espressione (4.4), troviamo che il tempo di assestamento al 2% è pari a:

$$t_{a2\%} = \frac{4}{\xi \cdot \omega_A} \quad (4.7)$$

Se sostituiamo in (4.7) il valore di ξ già calcolato e se imponiamo come limite superiore 2 s otteniamo:

$$t_{a2\%} = \frac{4}{\xi \cdot \omega_A} \leq 2\text{ s} \implies \omega_A \geq \frac{4}{\xi \cdot t_{a2\%}} \simeq 3.38\text{ rad/s} \quad \text{pulsazione di attraversamento}$$

Se disegniamo il diagramma di Bode di G_1 (Figura 4.1) vediamo che la pulsazione di attraversamento è circa pari a $10^{-2.15} \simeq 0.007\text{ rad/s} < 3.38\text{ rad/s}$.

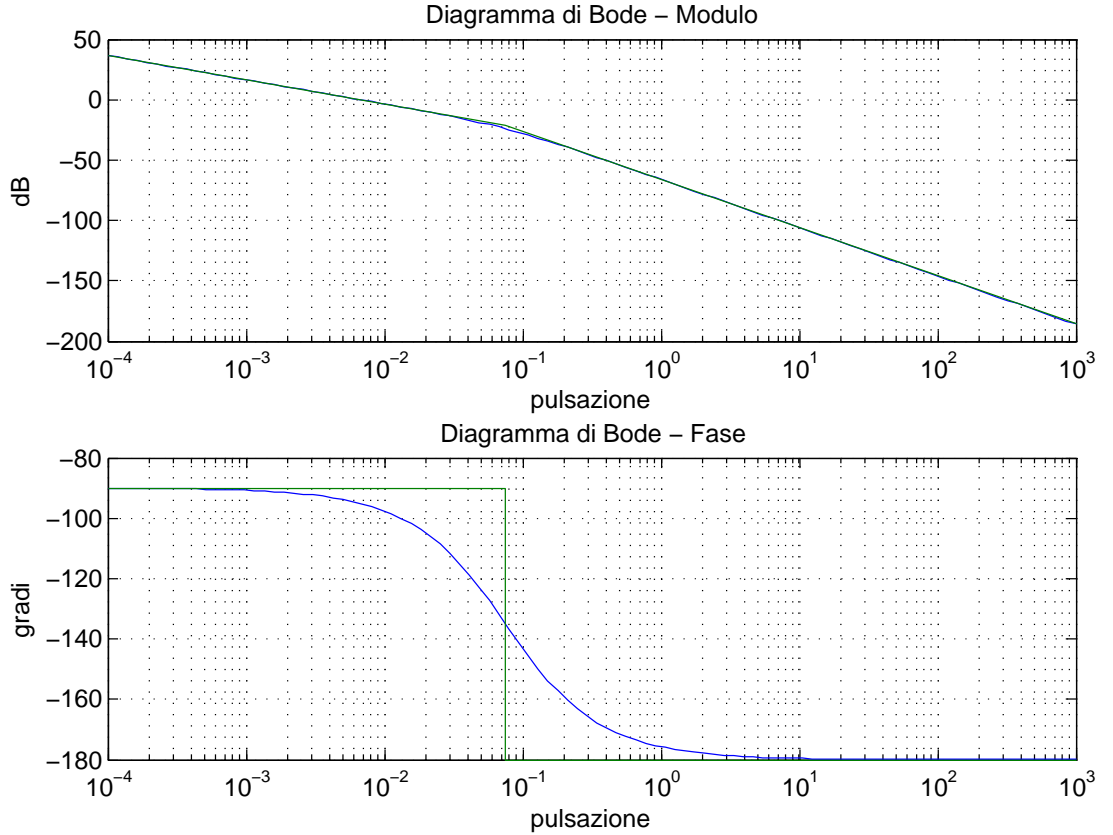


Figura 4.1: Diagramma di Bode di G_1

Il margine di fase è già rispettato ma dobbiamo fare in modo che la pulsazione di attraversamento si sposti oltre i 3.38 rad/s . Inseriamo uno zero stabile e una componente di guadagno di Bode per alzare il grafico delle ampiezze, in modo tale da spostare a destra la pulsazione di taglio e poi inseriamo un polo instabile nei pressi della pulsazione di attraversamento per riabbassare la fase e ottenere il margine richiesto:

$$C_{A1}(s) = 12600 \cdot \frac{1 + \frac{s}{2}}{1 + \frac{s}{70}} \simeq 10^{4.1} \cdot \frac{1 + \frac{s}{10^{0.3}}}{1 + \frac{s}{10^{1.85}}} \quad (4.8)$$

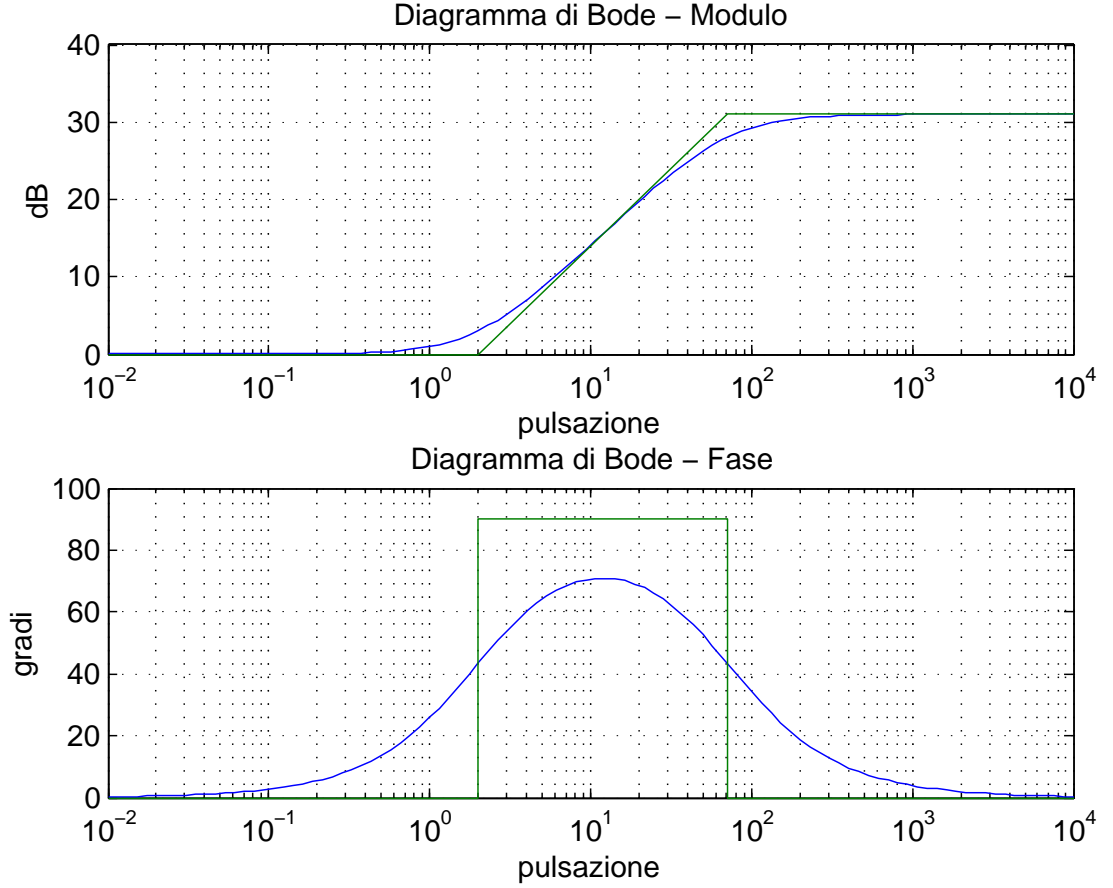


Figura 4.2: Diagramma di Bode di C_{A1}

Otteniamo così:

$$\tilde{G}_1'(s) = C_{A1}(s) \cdot G_1(s) = 10^{6.58} \cdot \frac{1 + \frac{s}{10^{0.3}}}{s \left(1 + \frac{s}{10^{-1.12}}\right) \left(1 + \frac{s}{10^{1.85}}\right)} \quad (4.9)$$

La pulsazione di taglio che otteniamo è pari a $10^{0.56} \simeq 3.63 \text{ rad/s} > 3.38 \text{ rad/s}$ (Figura 4.3).

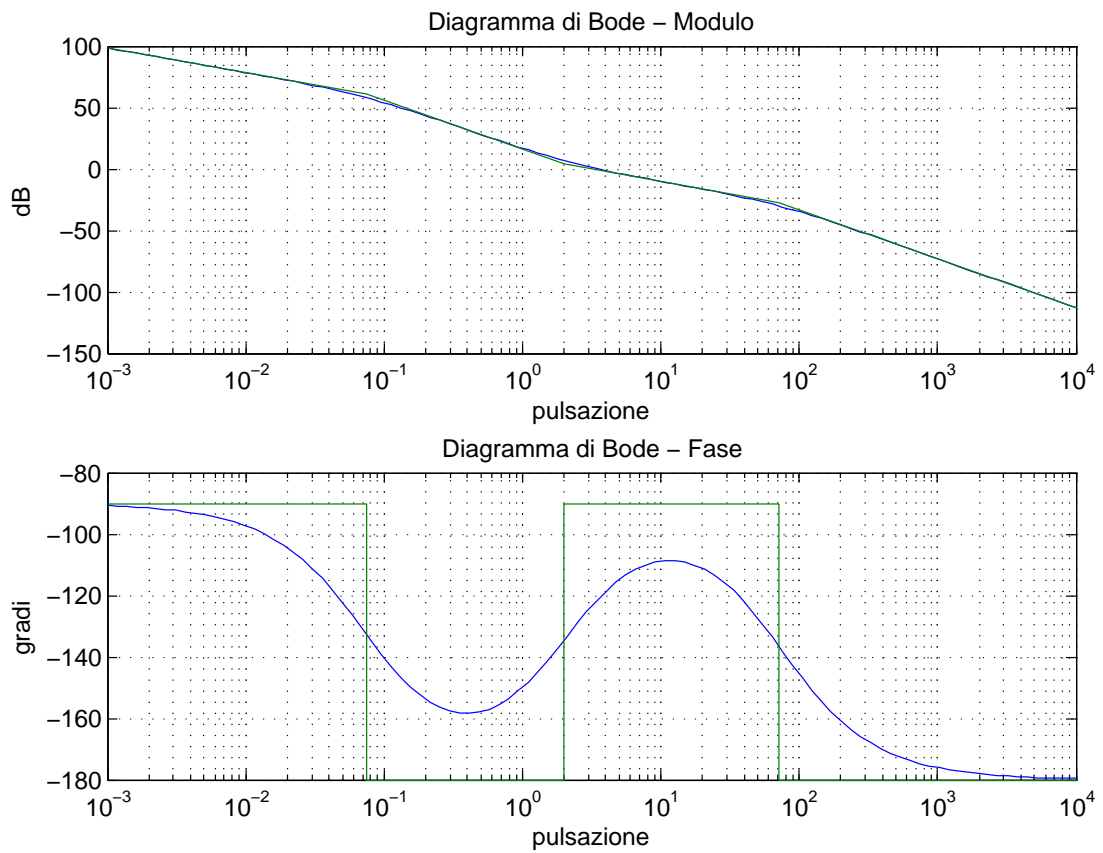


Figura 4.3: Diagramma di Bode di \tilde{G}_1'

4.1.2 Controllo sul parametro b

La seconda richiesta impone che in presenza di una variazione di $\pm 30\%$ del valore nominale del parametro b , l'errore relativo sull'uscita corrispondente ad ingressi con pulsazioni inferiori a 1 rad/s sia minore dell'1%.

Consideriamo dapprima la sensibilità della risposta del sistema alle difformità di comportamento delle componenti rispetto a quello nominale (problema della robustezza del sistema rispetto ad errori di modello). Per semplicità, modelliamo tali difformità come variazioni del parametro b rappresentativo del modello rispetto ad un valore nominale \bar{b} . Sia dunque $\bar{Y}_1(s) = G_1(\bar{b}, s)U_1(s)$ la risposta dell'impianto in anello aperto ad un particolare ingresso $U(s)$ in condizioni nominali, e $Y_1(s) = G_1(b, s)U_1(s)$ la risposta in condizioni perturbate. La differenza relativa tra le uscite vale:

$$\frac{\Delta Y_1(s)}{\bar{Y}_1(s)} = \frac{Y_1(s) - \bar{Y}_1(s)}{\bar{Y}_1(s)} = \frac{G_1(s, b) - G_1(s, \bar{b})}{G_1(s, \bar{b})} = \frac{\Delta G_1(s)}{G_1(s)}$$

Supponiamo che tale variazione sia piccola, ed esprimiamo la variazione risentita sulla uscita in termini relativi approssimandola al primo ordine. Si avrà dunque:

$$\frac{\Delta G_1(s)}{G_1(s)} \simeq \left(\frac{\partial G_1(s, b)}{\partial b} \bigg|_{b=\bar{b}} \frac{\bar{b}}{G_1(s)} \right) \frac{\Delta b}{\bar{b}} = S_b(s) \frac{\Delta b}{\bar{b}}$$

dove $S_b(s)$, la sensibilità alle variazioni del parametro b dell'impianto (in anello aperto), è definita come:

$$\begin{aligned} S_b(s) &= \bar{b} \frac{1}{G_1(s, \bar{b})} \frac{\partial G_1(s, b)}{\partial b} \bigg|_{b=\bar{b}} = \bar{b} s(\bar{b} + ms) \left(-\frac{1}{s(\bar{b} + ms)^2} \right) = \\ &= -\frac{\bar{b}}{(\bar{b} + ms)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

L'espressione (4.10) rappresenta la sensibilità considerando la sola funzione di trasferimento G_1 . Se affianchiamo il controllore C_1 in catena chiusa, la sensibilità totale sarà:

$$S_T(s) = S_{C_1}(s)S_b(s) = \frac{S_b(s)}{1 + C_1(s)G_1(s)}$$

Sia $\Delta b = 0.3 \cdot \bar{b}$ la variazione del parametro e $\Delta y_1/\bar{y}_1 = 0.01$ l'errore sull'uscita. Perché la condizione sia verificata imponiamo:

$$S_T(j\omega) \frac{\Delta b}{\bar{b}} \leq \frac{\Delta y_1}{\bar{y}_1} = 0.01$$

Da cui:

$$|S_T(j\omega)| = \frac{S_b(j\omega)}{1 + C_1(j\omega)G_1(j\omega)} \leq \frac{\bar{b}}{\Delta b} \frac{\Delta y_1}{\bar{y}_1} = \frac{\bar{b}}{0.3\bar{b}} \cdot 0.01 \simeq 0.033$$

Dal diagramma di Bode dei moduli di S_b (Figura 4.4) vediamo che il valore massimo raggiunto dal modulo dell'ampiezza è pari a 0 dB quindi $S_{b,MAX} = 1 \equiv 0 \text{ dB}$.

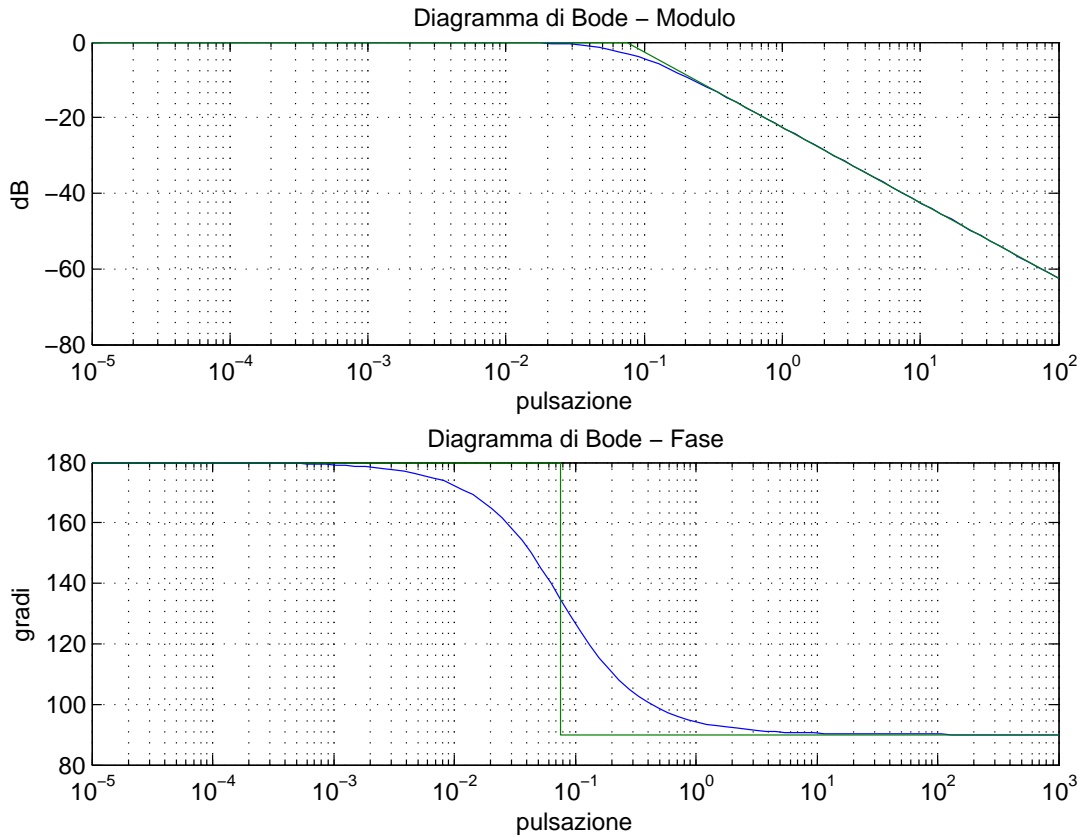


Figura 4.4: Diagramma di Bode di S_b

Sostituendo il valore di $S_{b,MAX}$ nella disuguaglianza otteniamo:

$$C_1(j\omega)G_1(j\omega) \geq 30 \cdot S_{b,MAX} - 1 = 29 \simeq 29 \text{ dB} \quad \text{da imporre } \forall \omega < 1 \text{ rad/s}$$

Nel diagramma di Bode di $\tilde{G}'_1 = C_{A1} \cdot G_1$ (Figura 4.3), l'ampiezza è $> 29 \text{ dB}$ solo prima di $10^{-0.35} \simeq 0.45 \text{ rad/s}$ quindi dobbiamo alzare ulteriormente l'ampiezza costruendo un ulteriore controllore che sarà costituito dal solo guadagno di Bode:

$$C_{B1}(s) = 10^{0.7} \simeq 5 \quad (4.11)$$

$$\tilde{G}_1(s) = C_{B1}(s) \cdot \tilde{G}'_1(s) = 10^{7.28} \cdot \frac{1 + \frac{s}{10^{0.3}}}{s \left(1 + \frac{s}{10^{-1.12}}\right) \left(1 + \frac{s}{10^{1.85}}\right)} \quad (4.12)$$

Alla fine, con questa legge di controllo, otteniamo una pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 10^{1.2} \simeq 15.85 \text{ rad/s} > 3.38 \text{ rad/s}$ e un margine di fase corrispondente $M_\varphi \simeq 80^\circ > 60^\circ$ (Figura 4.5).

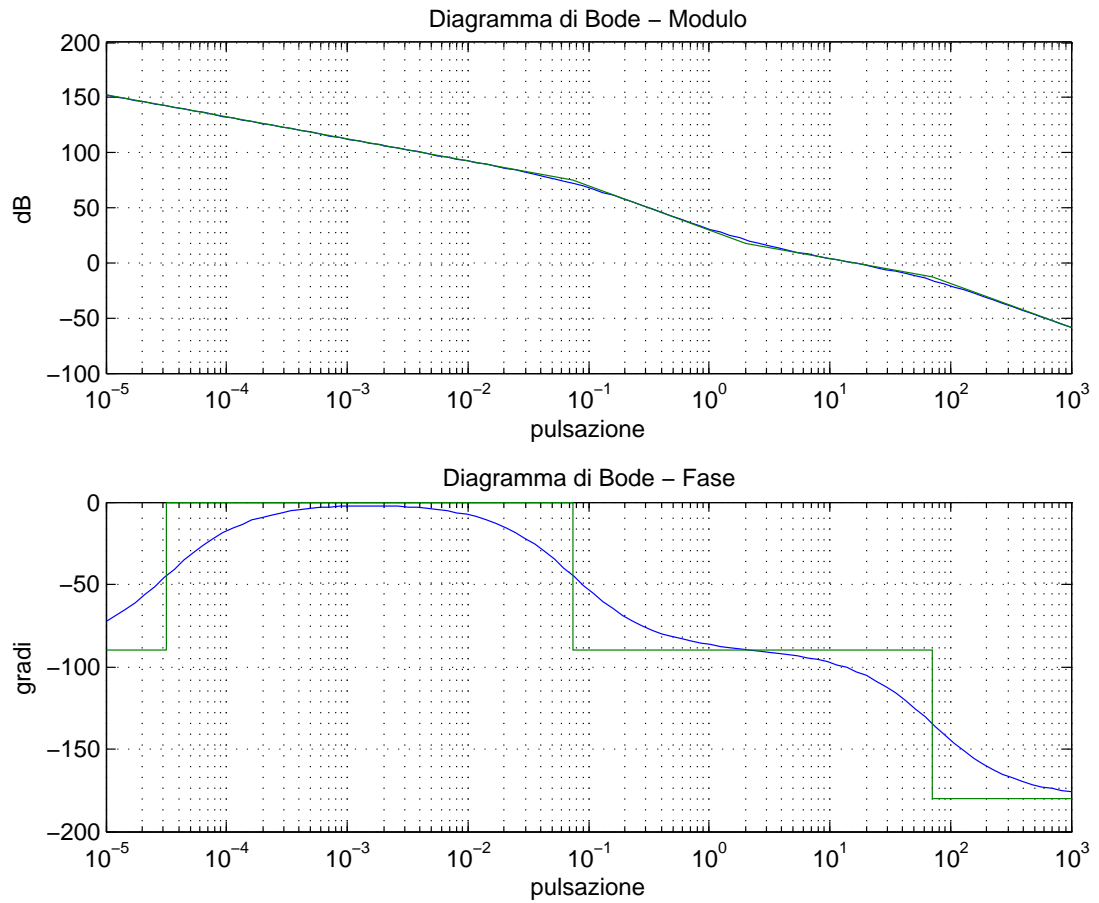


Figura 4.5: Diagramma di Bode di \tilde{G}_1

4.2 Controllo della rotazione del velivolo

Supponendo che il velivolo si trovi inizialmente ad un'inclinazione nulla: $\bar{\theta} = 0^\circ$, progetteremo una legge di controllo per l'ingresso f_a che agisca in modo da garantire due requisiti simultaneamente:

- che si raggiunga il 95% dell'inclinazione di regime $\theta = 30^\circ$ necessaria per virare, senza mai eccedere un valore pari a 30.6° , in un tempo non superiore a 5 s;
- che in presenza di una variazione di $\pm 10\%$ del valore nominale del parametro β (coefficiente di attrito viscoso dell'aria), l'errore relativo sull'uscita corrispondente ad ingressi con frequenze inferiori a 0.1 rad/s , sia minore del 5%.

4.2.1 Controllo sul parametro β

In questo caso scegliamo di progettare prima il controllore che faccia in modo di rispettare i vincoli imposti dalla seconda richiesta, cioè il comportamento del sistema alla variazione del parametro che modella il coefficiente d'attrito dell'aria alla rotazione del velivolo.

La sensibilità alle variazioni del parametro β è definita come:

$$\begin{aligned} S_\beta(s) &= \bar{\beta} \frac{1}{G_2(s, \bar{\beta})} \left. \frac{\partial G_2(s, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\bar{\beta}} = \bar{\beta} s(\bar{\beta} + Js) \left(-\frac{1}{s(\bar{\beta} + Js)^2} \right) = \\ &= -\frac{\bar{\beta}}{(\bar{\beta} + Js)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

dove $\bar{\beta}$ è il valore nominale di β .

L'espressione (4.13) rappresenta la sensibilità considerando la sola funzione di trasferimento G_2 . Se affianchiamo il controllore C_2 in catena chiusa, la sensibilità totale sarà:

$$S_T(s) = S_{C_2}(s) S_\beta(s) = \frac{S_\beta(s)}{1 + C_2(s) G_2(s)}$$

Sia $\Delta\beta = 0.1 \cdot \bar{\beta}$ la variazione del parametro e $\Delta y_2 / \bar{y}_2 = 0.05$ l'errore sull'uscita. Perché la condizione sia verificata imponiamo:

$$S_T(j\omega) \frac{\Delta\beta}{\bar{\beta}} \leq \frac{\Delta y_2}{\bar{y}_2} = 0.05$$

Da cui:

$$|S_T(j\omega)| = \frac{S_\beta(j\omega)}{1 + C_2(j\omega) G_2(j\omega)} \leq \frac{\bar{\beta}}{\Delta\beta} \frac{\Delta y_2}{\bar{y}_2} = \frac{\bar{\beta}}{0.1\bar{\beta}} 0.05 \simeq 0.5$$

Dal diagramma di Bode di S_β (Figura 4.6) vediamo che il valore massimo raggiunto dal modulo è pari a 0 dB quindi $S_{\beta,MAX} = 1 \equiv 0\text{ dB}$.

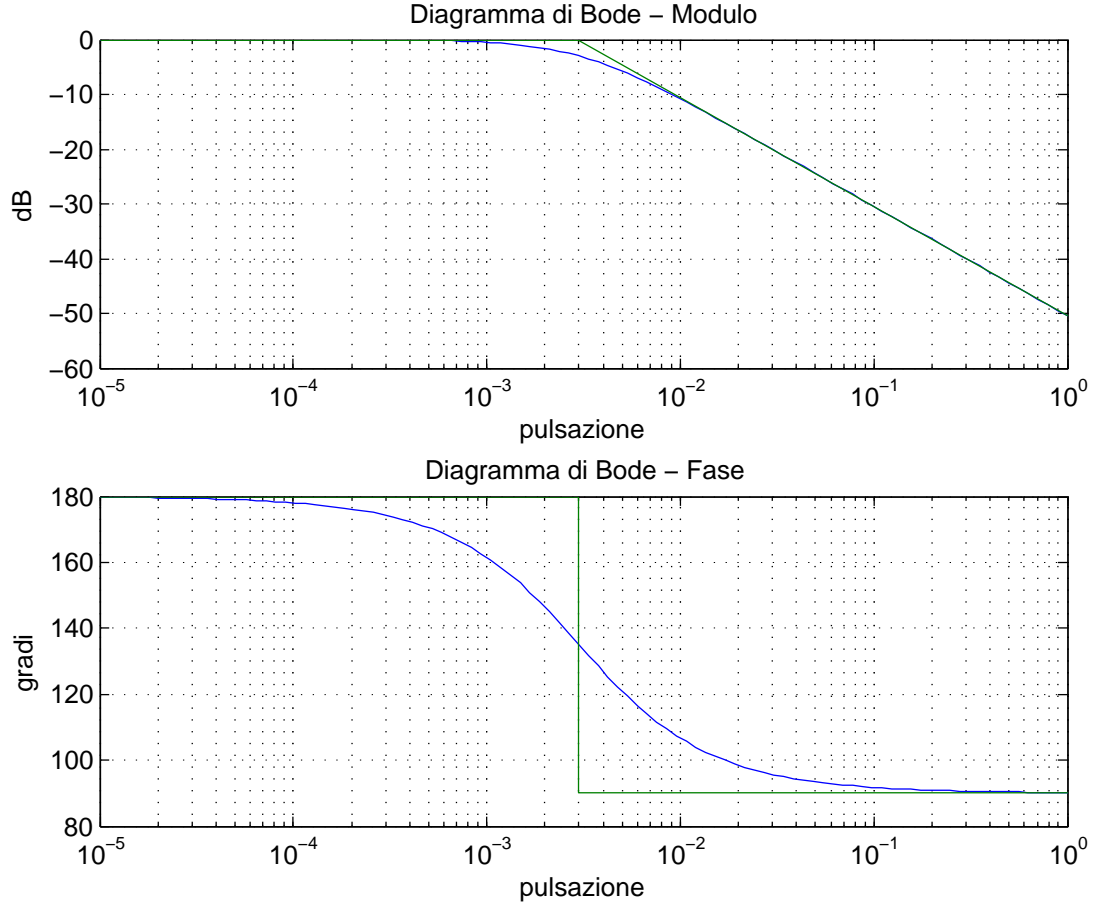


Figura 4.6: Diagramma di Bode di S_β

Sostituendo il valore di $S_{\beta,MAX}$ nella disuguaglianza otteniamo:

$$C_2(j\omega)G_2(j\omega) \geq 2 \cdot S_{\beta,MAX} - 1 = 1 \cong 0\text{ dB}$$

$$\text{da imporre } \forall \omega < 0.1\text{ rad/s}$$

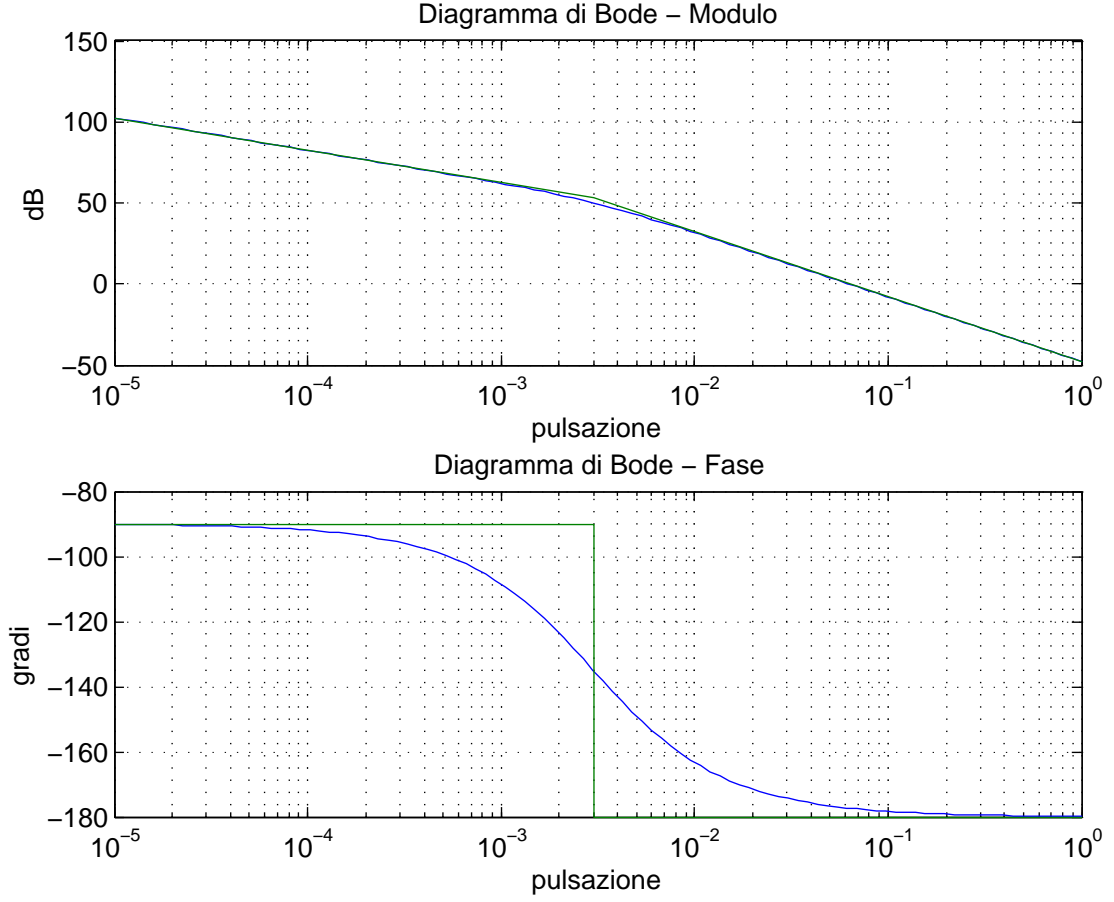


Figura 4.7: Diagramma di Bode di G_2

Nel diagramma di Bode di G_2 (Figura 4.7), l'ampiezza è $> 0 \text{ dB}$ solo prima di $10^{-1.2} \simeq 0.063 \text{ rad/s}$ quindi dobbiamo alzare l'ampiezza costruendo un controllore che sarà costituito dal solo guadagno di Bode:

$$C_{A2}(s) = 10^{0.4} \simeq 2.5 \quad (4.14)$$

Alla fine, con questa legge di controllo, otteniamo che per $\tilde{G}'_2 = C_{A2} \cdot G_2$ la pulsazione di attraversamento ω_A è proprio pari a $10^{-1} \simeq 0.1 \text{ rad/s}$ (Figura 4.8).

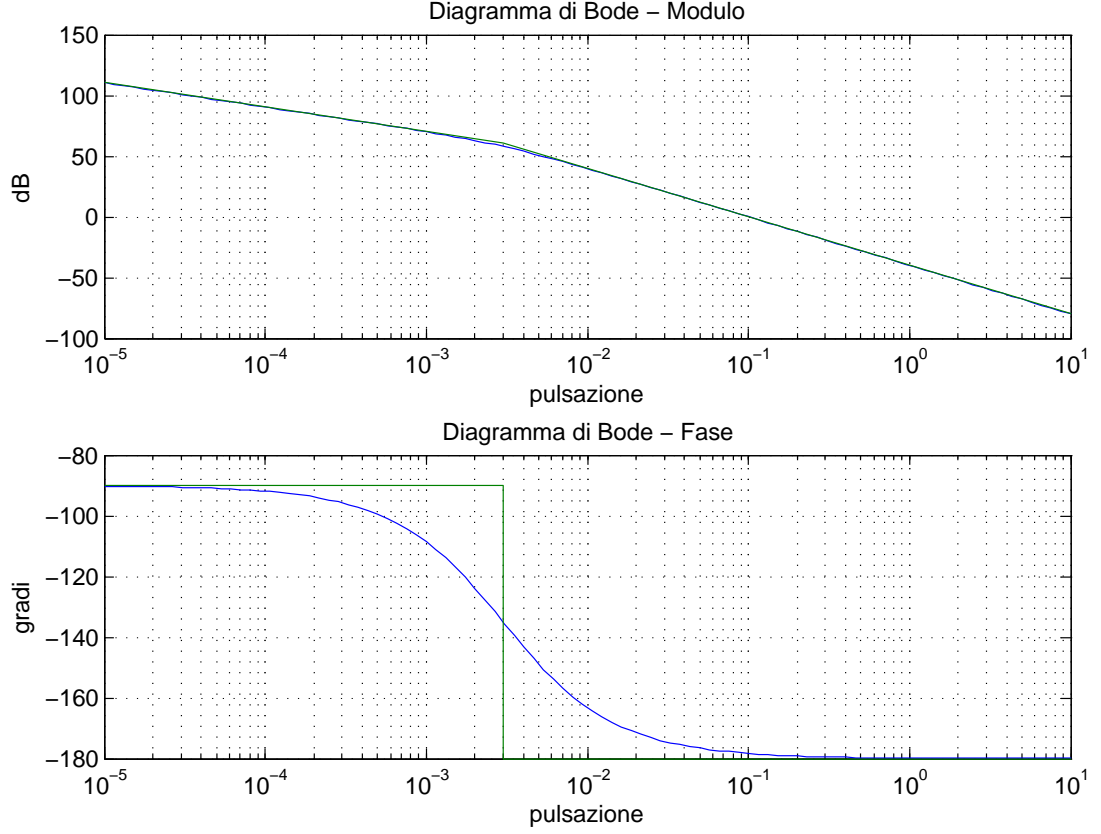


Figura 4.8: Diagramma di Bode di \tilde{G}_2'

4.2.2 Controllo dell'angolo di rotazione θ

Ora progettiamo un controllore che rispetti i vincoli imposti dalla prima richiesta, ovvero dobbiamo fare in modo che il sistema si porti all'inclinazione di regime $\theta = 30^\circ$. Anche in questo caso la specifica è già garantita dalla presenza di un polo nell'origine nella funzione di trasferimento G_2 , infatti il sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa della funzione di trasferimento G_2 è di *tipo* 1 e quindi l'errore a regime al gradino è nullo. Possiamo esprimere il raggiungimento del 95% in 5 s come il tempo di assestamento al 5% che, per la richiesta, non deve superare i 5 s. Per quanto riguarda il limite superiore della quota raggiungibile, non si tratta altro che della sovraelongazione che, rapportando i 30.6° con i 30° dell'inclinazione di regime, risulta dover essere al massimo del 20%.

$$\begin{cases} t_{a5\%} \leq 5 \text{ s} \\ S \leq 20\% \end{cases}$$

Quindi imponendo, come prima, il vincolo sulla percentuale massima pari al 20% otteniamo:

$$S = e^{\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \leq 0.2$$

Ricaviamo ξ :

$$-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \leq \ln 0.2$$

$$\pi\xi \geq 1.61\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\xi^2 \geq \frac{(1.61)^2}{\pi^2 + (1.61)^2} \simeq 0.2$$

$$\xi \simeq 0.45 \implies M_\varphi \simeq 45^\circ \quad \text{margine di fase}$$

La formula per il tempo di assestamento al 5% è data da:

$$t_{a5\%} = \frac{3}{\xi \cdot \omega_A}$$

Se sostituiamo il valore di ξ appena calcolato e se imponiamo come limite superiore 5 s otteniamo:

$$t_{a5\%} = \frac{3}{\xi \cdot \omega_A} \leq 5 \text{ s} \implies \omega_A \geq \frac{3}{\xi \cdot t_{a5\%}} \simeq 1.316 \text{ rad/s}$$

pulsazione di attraversamento

Dal diagramma di Bode di \tilde{G}_2' (Figura 4.8) sappiamo che la pulsazione di attraversamento è $10^{-1} = 0.1 \text{ rad/s} < 1.316 \text{ rad/s}$. Neanche il margine di fase è rispettato perché è circa di 0° . Dobbiamo fare in modo che la pulsazione di attraversamento si sposti oltre gli 1.316 rad/s quindi inseriamo una componente di guadagno di Bode per alzare il grafico delle ampiezze. Successivamente inseriamo uno zero stabile subito prima della pulsazione di attraversamento per garantire un margine di fase che sia almeno di 45° . Per stabilizzare ulteriormente il controllo inseriamo anche un polo, qualche decade dopo, in modo che non vada ad interferire con i risultati già ottenuti:

$$C_{B2}(s) = 400 \cdot \frac{1 + \frac{s}{1.26}}{1 + \frac{s}{100}} \simeq 10^{2.6} \cdot \frac{1 + \frac{s}{10^{0.1}}}{1 + \frac{s}{10^2}} \quad (4.15)$$

$$\tilde{G}_2(s) = C_{B2}(s) \cdot \tilde{G}'_2(s) \simeq 10^{5.48} \cdot \frac{1 + \frac{s}{10^{0.1}}}{s \left(1 + \frac{s}{10^{-2.5}}\right) \left(1 + \frac{s}{10^2}\right)} \quad (4.16)$$

La pulsazione di taglio che otteniamo è pari a $10^{0.53} \simeq 3.38 \text{ rad/s} > 1.316 \text{ rad/s}$ con un margine di fase corrispondente pari a $67^\circ > 45^\circ$ (Figura 4.9).

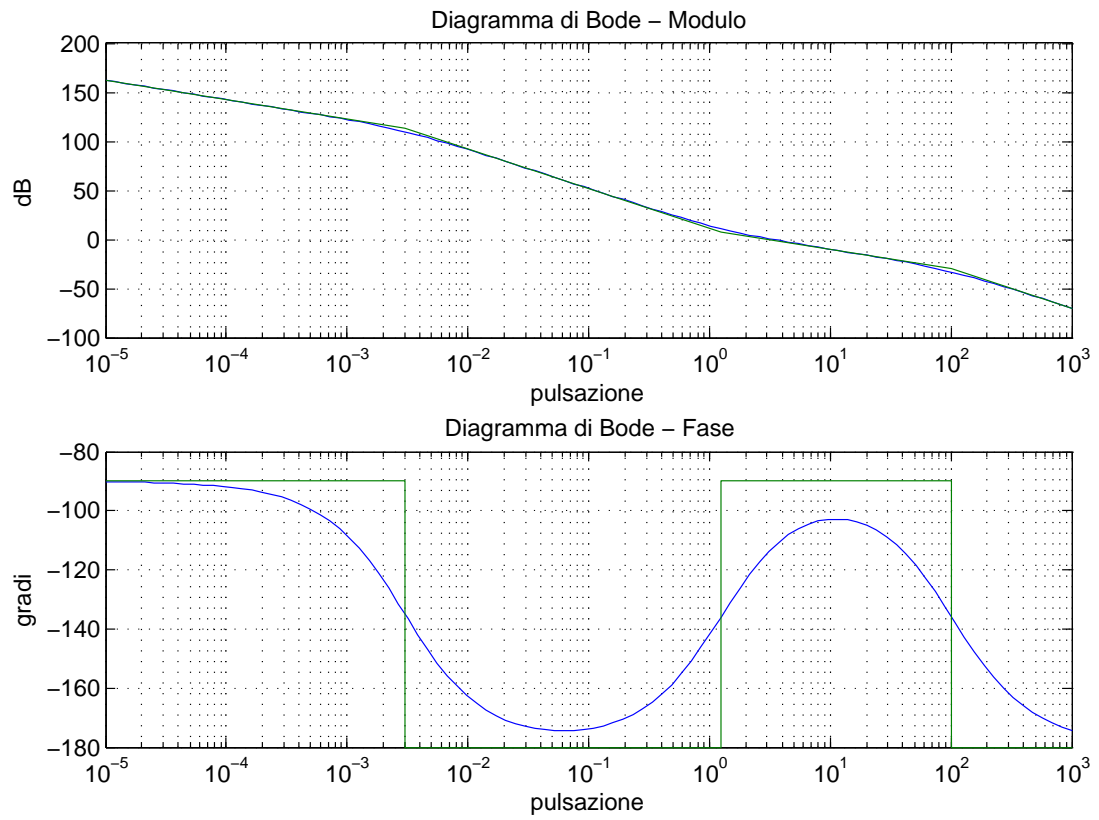


Figura 4.9: Diagramma di Bode di \tilde{G}_2

Capitolo 5

Conclusioni

Lo scopo della tesi è quello di progettare una legge di controllo che garantisca il rispetto di determinate specifiche imposte dal problema. Ora, grazie a Simulink, possiamo verificare se le modifiche che abbiamo apportato al sistema sono effettivamente efficaci.

Per prima cosa calcoliamo la nuova funzione di trasferimento $W_1(s)$ ad anello chiuso in retroazione negativa ricavata dall'espressione:

$$W_1(s) = \frac{\tilde{G}_1(s)}{1 + \tilde{G}_1(s)} = \frac{C_{B1}(s)C_{A1}(s)G_1(s)}{1 + C_{B1}(s)C_{A1}(s)G_1(s)}$$

che, sostituendo le espressioni precedentemente calcolate, è pari a:

$$W_1(s) = \frac{10^{7.28} \left(1 + \frac{s}{10^{0.3}}\right)}{10^{7.28} \left(1 + \frac{s}{10^{0.3}}\right) + s \left(1 + \frac{s}{10^{-1.12}}\right) \left(1 + \frac{s}{10^{1.85}}\right)} \quad (5.1)$$

La rappresentazione del sistema controllato con lo schema a blocchi di Simulink è la seguente:

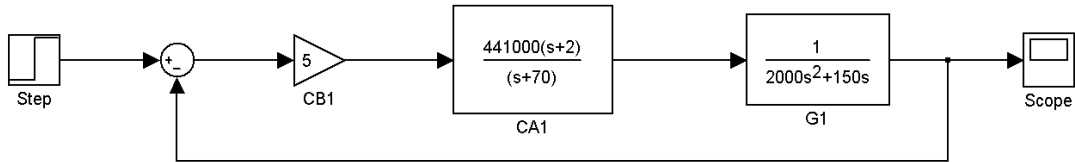


Figura 5.1: Schema a blocchi del sistema in catena chiusa W_1

Se osserviamo il grafico della risposta al gradino unitario (Figura 5.2), vediamo che le specifiche richieste: $\begin{cases} t_{a2\%} \leq 2 \text{ s} \\ S \leq 10\% \end{cases}$ sono rispettate.

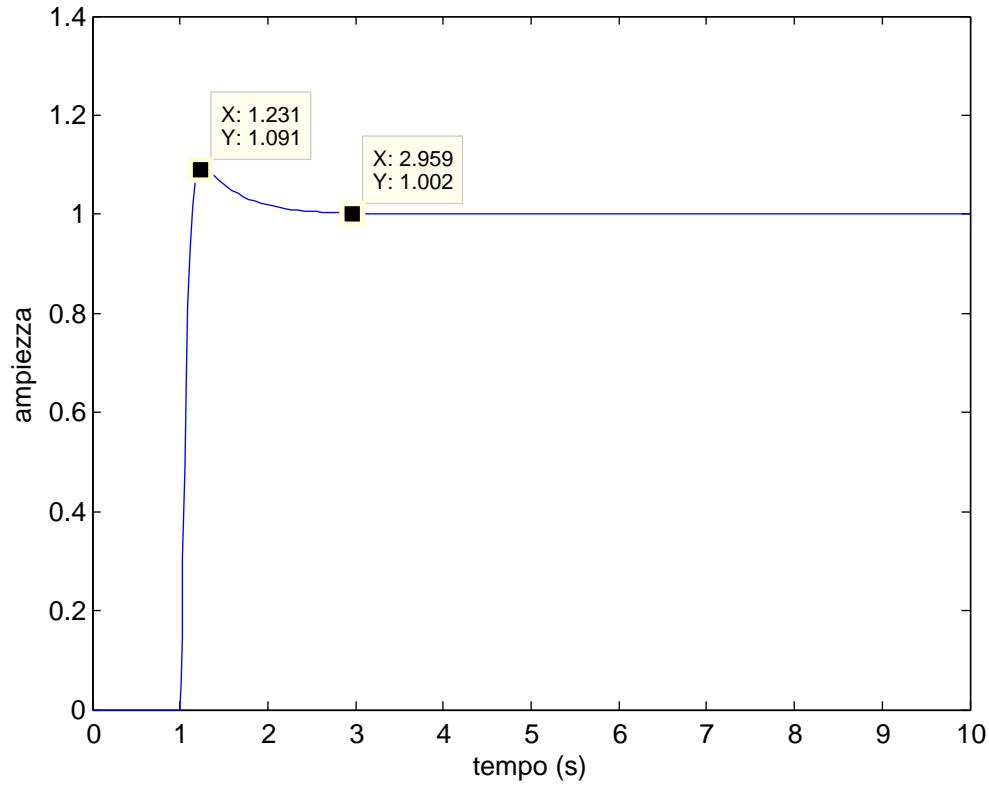


Figura 5.2: Risposta al gradino unitario di W_1

Analogamente, per quanto riguarda la seconda parte del sistema, la funzione di trasferimento in close loop è:

$$W_2(s) = \frac{\tilde{G}_2(s)}{1 + \tilde{G}_2(s)} = \frac{C_{B2}(s)C_{A2}(s)G_2(s)}{1 + C_{B2}(s)C_{A2}(s)G_2(s)}$$

Se sostituiamo i valori numerici otteniamo:

$$W_2(s) = \frac{10^{5.48} \left(1 + \frac{s}{10^{0.1}}\right)}{10^{5.48} \left(1 + \frac{s}{10^{0.1}}\right) + s \left(1 + \frac{s}{10^{-2.5}}\right) \left(1 + \frac{s}{10^2}\right)} \quad (5.2)$$

Se rappresentiamo con il diagramma a blocchi il sistema otteniamo la seguente struttura:

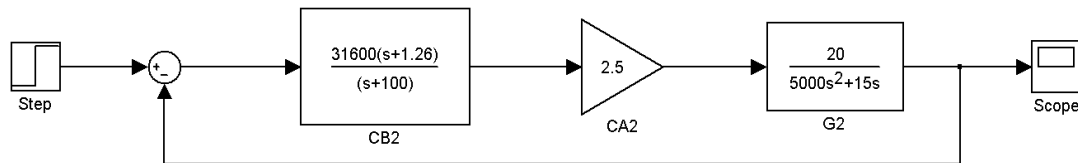


Figura 5.3: Schema a blocchi del sistema in catena chiusa W_2

Anche in questo caso, osservando la risposta al gradino in Figura 5.4, le specifiche relative a sovraelongazione e tempo di assestamento: $\begin{cases} t_{a5\%} \leq 2 \text{ s} \\ S \leq 20\% \end{cases}$ sono rispettate.

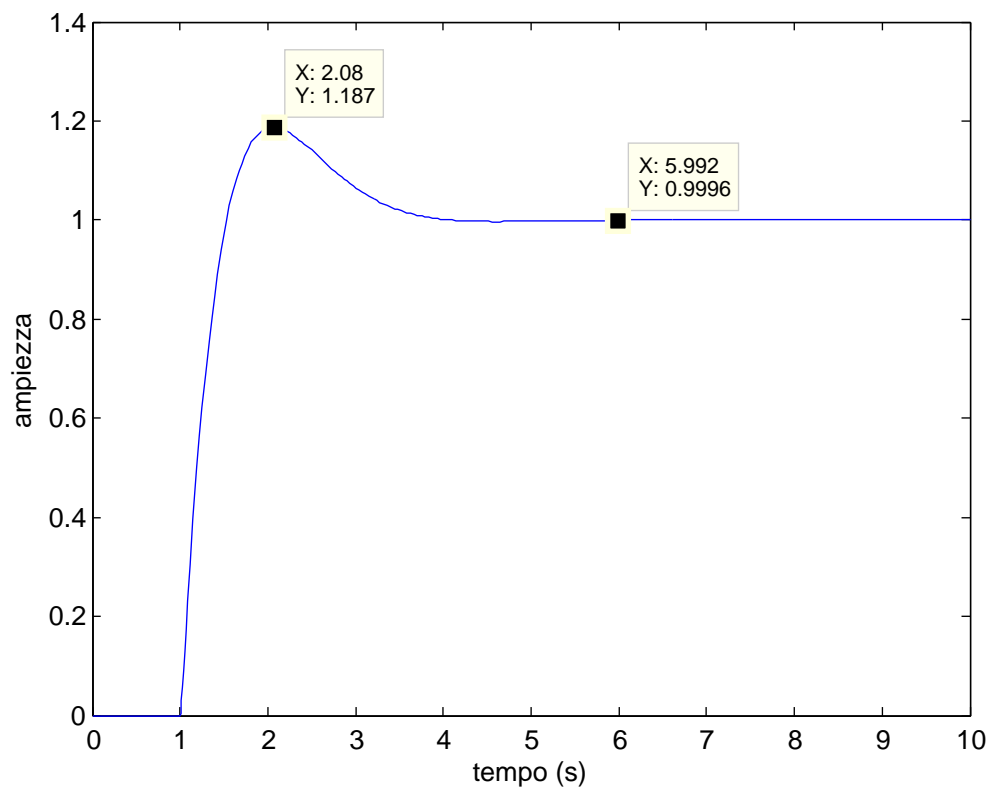


Figura 5.4: Risposta al gradino unitario di W_2

Bibliografia

- [1] Antonio Bicchi. *Fondamenti di Automatica - Parte I*. 2013. URL: <http://www.centropiaggio.unipi.it/sites/default/files/fda1-text.pdf>.
- [2] Mauro Bisiacco e Simonetta Braghetto. *Teoria dei sistemi dinamici*. Progetto Leonardo, Esculapio Bologna, 2010.
- [3] Mauro Bisiacco e Maria Elena Valcher. *Controlli automatici*. Libreria Progetto Padova, 2008.
- [4] Giovanni Di Giorgio. *Teoria del volo dell'elicottero. Aerodinamica – Meccanica del volo*. Aracne editrice, 2009.
- [5] Federico Del Grande. *Simulazione della dinamica del convertiplano per analisi di manovre a bassa velocità*. 2008. URL: <http://etd.adm.unipi.it/t/etd-01292008-180627/>.