

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA ED ASTRONOMIA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea Triennale

**Geodetiche su gruppi di Lie
ed idrodinamica dei fluidi perfetti**

Laureando:

Gianmarco Stramazzo

Matricola 1051777

Relatori:

Prof. Francesco Fassò

Dott. Nicola Sansonetto

Anno Accademico 2014-2015

Indice

Introduzione	1
Notazioni ed avvertenze	2
1 Introduzione alla Teoria dei gruppi di Lie	3
1.1 Gruppi di Lie	3
1.1.1 Omomorfismi di gruppi di Lie	4
1.1.2 Azioni di un gruppo di Lie su una varietà	5
1.2 Algebre di Lie	6
1.2.1 La mappa esponenziale	10
1.2.2 <i>Hat map</i> e <i>breve map</i> per $SO(3)$	11
1.3 Azioni Aggiunta e Co-Aggiunta	12
1.3.1 Azione Aggiunta di un gruppo di Lie	12
1.3.2 Azione Co-Aggiunta di un gruppo di Lie	12
1.3.3 Operatori aggiunti e co-aggiunti di un gruppo di Lie	13
2 Geodetiche su varietà Riemanniane	17
3 Il Corpo Rigido di Euler-Poincot	21
3.1 Le mappe di trivializzazione sinistra e destra per un gruppo di Lie G .	21
3.2 Metriche invarianti a sinistra e prodotti scalari su \mathfrak{g}	23
3.3 Il caso di $SO(3)$ e l'equazione di Euler per il corpo rigido	24
4 L'idrodinamica dei fluidi perfetti	27
4.1 L'equazione di Euler per l'idrodinamica	30
Conclusioni	33
Riferimenti bibliografici	34

Introduzione

L'obiettivo della presente tesi è lo studio dell'equazione di Euler per gruppi di Lie con metriche invarianti. Applicheremo tale teoria, dovuta ad Arnol'd [1], al caso del corpo rigido di Euler-Poinsot ed, in analogia, al caso dei fluidi ideali ed incompressibili, la cui varietà delle configurazioni, $S\text{Diff}(\mathcal{M})$, è un gruppo di Lie infinito-dimensionale con metrica invariante a destra. Le equazioni di Euler per il corpo rigido e per i fluidi ideali ed incompressibili vengono interpretate come equazioni del moto sull'algebra di Lie del gruppo [1, 14].

Daremo inoltre una dimostrazione (Teorema 4.1.1) di un risultato enunciato in [7] e la cui dimostrazione è data solo nel caso n -dimensionale che ci consentirà di derivare l'equazione di Euler per i fluidi incompressibili.

Questo approccio ha il vantaggio di permettere l'applicazione di tecniche proprie della Teoria dei gruppi di Lie allo studio dell'idrodinamica e consente di ottenere risultati notevoli nell'analisi della stabilità dei flussi del fluido perfetto ed incompressibile [1, 14].

L'organizzazione della tesi è la seguente. Il Capitolo primo è un'introduzione alla Teoria dei gruppi di Lie [10, 12, 15]. Il Capitolo secondo richiama alcune nozioni di Geometria Riemanniana, quali la definizione di geodetiche e la loro connessione con i sistemi meccanici [4, 6, 15]. Il Capitolo terzo ha lo scopo di mettere in evidenza la struttura Lie-gruppale della trattazione del corpo rigido di Euler-Poinsot [1, 14]. Il Capitolo quarto è dedicato all'idrodinamica del fluido perfetto ed incompressibile in un aperto di \mathbb{R}^3 , in analogia con lo studio del corpo rigido di Euler-Poinsot [7, 11].

Notazioni ed avvertenze

In questa tesi valgono le seguenti convenzioni ed asserzioni:

- Assumeremo note le nozioni di base della Teoria della varietà differenziabili, quali la nozione di varietà differenziabile, di applicazione differenziabile o *liscia* fra varietà, di pushforward, ecc. Per un'introduzione a tali concetti vedere [10, 15].
- Tutte le varietà differenziabili, se non specificato diversamente, sono da intendersi reali, di dimensione finita e di classe \mathcal{C}^∞ , ossia *lisce*. Esse verranno chiamate semplicemente varietà. Analogamente gli oggetti e le strutture usate sono da intendersi lisci.
- Denoteremo l'insieme dei campi vettoriali definiti su una varietà \mathcal{M} con $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e l'insieme delle k -forme con $\Omega^k(\mathcal{M})$. L'insieme dei campi tensoriali del tipo $\binom{h}{k}$ con $h, k \in \mathbb{N}$ verrà denotato con $\mathcal{T}_k^h(\mathcal{M})$.
- Useremo la notazione moltiplicativa per i gruppi. L'unità verrà denotata, in genere, con e o con $\mathbf{1}$ se si considera il caso particolare di gruppi di matrici.
- Chiameremo le applicazioni a valori reali funzioni; utilizzeremo il più generico applicazione o mappa altrimenti.
- Tutti gli spazi vettoriali considerati saranno da intendersi spazi vettoriali su \mathbb{R} .
- Denoteremo lo spazio vettoriale della matrici $n \times n$ ad entrate reali con $M(n)$.
- Le figure presenti nella tesi sono state tratte da [7] e da [13].

Capitolo 1

Introduzione alla Teoria dei gruppi di Lie

1.1 Gruppi di Lie

Nel presente Capitolo verranno introdotte le nozioni fondamentali della *Teoria dei gruppi di Lie*.

Definizione 1.1.1 (Gruppo di Lie). Un *gruppo di Lie* (G, \cdot) è un gruppo dotato di una struttura di n -varietà differenziabile *compatibile* con la struttura di gruppo, ossia tale che l'operazione \cdot e l'inversione $(\cdot)^{-1}$ siano applicazioni lisce. La dimensione della struttura di varietà, n , è detta *dimensione del gruppo di Lie*.

Esempio 1.1.1 $(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. Con evidenza (\mathbb{R}^*, \cdot) è un gruppo di Lie di dimensione 1. Anche $(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo di Lie di dimensione 1.

Esempio 1.1.2 $(GL(n))$. L'insieme $GL(n) := \{A \in M(n) : \det(A) \neq 0\}$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione di matrici riga per colonna detto *gruppo generale lineare* in dimensione $n \in \mathbb{N}^*$. È inoltre una sottovarietà n^2 -dimensionale di $M(n)$, che è uno spazio vettoriale di dimensione n^2 , poiché è un suo sottinsieme aperto. Infatti $GL(n) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, laddove \mathbb{R}^* è aperto in \mathbb{R} e la funzione $\det : M(n) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua. La moltiplicazione fra matrici è liscia in quanto le entrate di AB sono polinomi nell'entrate di A e B , per ogni $A, B \in M(n)$. Anche l'inversione è liscia in quanto, per la regola di Cramer, le entrate della matrice A^{-1} sono esprimibili come funzioni razionali delle entrate di A , per ogni $A \in M(n)$. In definitiva, $GL(n)$ è un gruppo di Lie di dimensione n^2 .

Notiamo inoltre che lo spazio tangente ad $M(n)$ in ogni suo punto si identifica in modo naturale con lo spazio vettoriale $M(n)$ stesso. Di conseguenza lo spazio tangente a $GL(n)$ in ogni suo punto si identifica in modo pure naturale con lo spazio vettoriale $M(n)$, in quanto $GL(n)$ è un suo sottinsieme aperto.

Chiamiamo *gruppo di Lie di matrici* un sottogruppo di $GL(n)$.

Esempio 1.1.3 $(O(n))$. L'insieme $O(n) := \{A \in GL(n) : A^T A = \mathbb{1}\}$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione di matrici riga per colonna detto *gruppo ortogonale* in dimensione $n \in \mathbb{N}^*$. Proviamo che $O(n)$ è una sottovarietà di dimensione $n(n-1)/2$ di $GL(n)$. $Sym(n) := \{A \in M(n) : A = A^T\}$ è uno spazio vettoriale di dimensione $n(n+1)/2$. Sia $\psi : GL(n) \rightarrow Sym(n)$ l'applicazione liscia definita da $A \mapsto A^T A - \mathbb{1}$. È possibile dimostrare che ψ è una sommersione [12], da cui segue che l'insieme di livello $\psi^{-1}(\mathbb{0}) = O(n)$ è una sottovarietà di $GL(n)$ di dimensione $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$. In conclusione, $O(n)$ è un gruppo di Lie di dimensione $n(n-1)/2$.

Notiamo inoltre che $O(n)$ è un sottogruppo di $GL(n)$, dunque lo spazio tangente a $O(n)$ in ogni suo punto si identifica in modo naturale con un sottospazio vettoriale di $M(n)$.

Esempio 1.1.4 ($SO(n)$). L'insieme $SO(n) := \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione di matrici riga per colonna detto *gruppo ortogonale speciale* in dimensione $n \in \mathbb{N}^*$. Dimostriamo che esso è un sottinsieme aperto di $O(n)$, da cui seguirà che $SO(n)$ è una sottovarietà di $GL(n)$ di dimensione $n(n-1)/2$. Per definizione, $SO(n) = \det^{-1}(1)$ con $\det : O(n) \rightarrow \{-1, 1\}$; dunque $SO(n)$ è un sottinsieme aperto di $O(n)$, in quanto la funzione determinante è continua. Quindi $SO(n)$ è un gruppo di Lie di dimensione $n(n-1)/2$.

1.1.1 Omomorfismi di gruppi di Lie

Definizione 1.1.2 (Omomorfismo di gruppi di Lie). Definiamo *omomorfismo di gruppi di Lie* (G, \cdot) e (H, \cdot) un'applicazione liscia $F : G \rightarrow H$ che sia un omomorfismo di gruppi. Chiamiamo *isomorfismo di gruppi di Lie* un diffeomorfismo fra gruppi di Lie (intesi come varietà) che sia anche un isomorfismo di gruppi. Diciamo che i gruppi (G, \cdot) e (H, \cdot) sono isomorfi se esiste un isomorfismo di gruppi di Lie da G in H . Chiamiamo infine *automorfismo di gruppo di Lie* un isomorfismo di gruppi di Lie da G in G .

Come per ogni gruppo, in un gruppo di Lie risultano definite le applicazioni di moltiplicazione a sinistra ed a destra per un fissato elemento $h \in G$.

Definizione 1.1.3 (Traslazioni sinistra e destra). Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie e sia $h \in G$. Chiamiamo *traslazione sinistra* L_h l'applicazione da G in sè

$$L_h : G \rightarrow G \quad g \mapsto hg \tag{1.1}$$

e *traslazione destra* R_h l'applicazione da G in sè

$$R_h : G \rightarrow G \quad g \mapsto gh \tag{1.2}$$

Con evidenza, le applicazioni L_h e R_h sono diffeomorfismi da G in G , con applicazioni inverse date, rispettivamente, da $L_{h^{-1}}$ e da $R_{h^{-1}}$. Queste mappe non sono degli isomorfismi di gruppi di Lie in quanto non sono degli omomorfismi di gruppi. Tuttavia esse inducono, per composizione, un particolare automorfismo di gruppo di Lie.

Definizione 1.1.4 (Automorfismo interno indotto da h). Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie e sia $h \in G$. Definiamo *automorfismo interno indotto da h* l'applicazione $C_h := L_h \circ R_{h^{-1}}$

$$C_h : G \rightarrow G \quad g \mapsto hgh^{-1} \tag{1.3}$$

Notiamo che tale applicazione è effettivamente un automorfismo di gruppo di Lie. Infatti C_h è un diffeomorfismo da G in G in quanto composizione di due diffeomorfismi ed inoltre, per ogni $h, g, k \in G$

$$C_h(gk) = hgkh^{-1} = hgh^{-1}hkh^{-1} = (hgh^{-1})(hkh^{-1}) = C_h(g)C_h(k).$$

Osserviamo che, poiché L ed R commutano rispetto alla composizione di funzioni, si ha anche che $C_h = R_{h^{-1}} \circ L_h$ per ogni $h \in G$.

1.1.2 Azioni di un gruppo di Lie su una varietà

Definizione 1.1.5 (Azione sinistra di un gruppo di Lie su una varietà). Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie, \mathcal{M} una varietà. Chiamiamo *azione sinistra di G su \mathcal{M}* un'applicazione liscia:

$$\Phi : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \quad (g, p) \mapsto \Phi(g, p) \quad (1.4)$$

tale che:

1. $\Phi(g_1, \Phi(g_2, p)) = \Phi(g_1 g_2, p) \quad \forall g_1, g_2 \in G, \quad \forall p \in \mathcal{M}$
2. $\Phi(e, p) = p \quad \forall p \in \mathcal{M}$

In maniera analoga si definiscono le *azioni destre di G su \mathcal{M}* sostituendo la condizione 1. con $\Psi(g_1, \Psi(g_2, p)) = \Psi(g_2 g_1, p)$.

Si può dimostrare facilmente che se Φ è un'azione, allora per ogni $g \in G$ la mappa $\Phi_g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ definita da $\Phi_g(p) := \Phi(g, p)$ per ogni $p \in \mathcal{M}$ è un diffeomorfismo.

Per consuetudine, ci focalizziamo sulle azioni sinistre.

Su ogni gruppo di Lie G , vi sono un'azione naturale sinistra ed una destra indotte, rispettivamente, dalle traslazioni sinistra e destra.

Definizione 1.1.6. Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie. L'azione $L_{left} : G \times G \rightarrow G$ definita, per ogni $g, h \in G$, da

$$L_{left}(g, h) = L_g h \quad (1.5)$$

si dice *azione sinistra di G su sé stesso*. L'azione $R_{right} : G \times G \rightarrow G$ definita, per ogni $g, h \in G$, da

$$R_{right}(g, h) = R_g h \quad (1.6)$$

si dice *azione sinistra di G su sé stesso*. Per semplicità, laddove non vi sia ambiguità, poniamo $L_{left} \equiv L$ e $R_{right} \equiv R$.

Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie, \mathcal{M} una varietà, $\Phi : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ un'azione di G su \mathcal{M} . È possibile rialzare un'azione di un gruppo di Lie G su una varietà \mathcal{M} ad un'azione di G sul fibrato tangente $T\mathcal{M}$, di \mathcal{M} .

Definizione 1.1.7 (Sollevamento tangente di un'azione). Sia \mathcal{M} una varietà, (G, \cdot) un gruppo di Lie, $\Phi : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ un'azione sinistra (o destra) di G su \mathcal{M} . Il *sollevamento tangente di Φ* è l'azione sinistra (o destra) $T\Phi$ di G su $T\mathcal{M}$ così definita:

$$(g, (p, v)) \mapsto T\Phi_g(p, v) := (\Phi_g(p), d(\Phi_g)_p(v)) \quad (1.7)$$

per ogni $g \in G, p \in \mathcal{M}, v \in T_p\mathcal{M}$.

Consideriamo ora il sollevamento $TL : G \times G \rightarrow TG$ dell'azione sinistra L di G su sé stesso ed il sollevamento $TR : G \times G \rightarrow TG$ dell'azione destra R di G su sé stesso. Essi sono dati, rispettivamente, da:

$$TL_g(h, v) = (L_g(h), d(L_g)_h(v)) \quad (1.8)$$

$$TR_g(h, v) = (R_g(h), d(R_g)_h(v)) \quad (1.9)$$

Esempio 1.1.5 (Sollevamenti tangenti dell'azione sinistra e destra per gruppo di Lie di matrici). Notiamo innanzitutto che è possibile calcolare $d(L_g)_h(v)$, espressione che compare nel sollevamento tangente TL , considerando curve passanti per h con vettore velocità $v \in T_h G$. Precisamente

$$d(L_g)_h(v) = \frac{d}{dt}(L_g(c(t)))|_{t=0} \quad \forall g, h \in G, \quad \forall v \in T_h G$$

dove $c(t)$ è una curva tale che $c(0) = h$ e $c'(0) = v \in T_h G$. Nel caso in cui G sia un gruppo di Lie di matrici, se $C(t)$ è una curva in G passante per $A \in G$ con vettore tangente $\dot{A} \in T_A G$, ovvero $C(0) = A$ e $C'(0) = \dot{A}$, abbiamo che

$$\frac{d}{dt}(L_R(C(t)))|_{t=0} = R\dot{C}(0) = R\dot{A} \quad (1.10)$$

per ogni $A, R \in G$. Dunque il sollevamento tangente dell'azione sinistra è dato da

$$TL(R, (A, \dot{A})) = (RA, R\dot{A}) \quad (1.11)$$

per ogni $A, R \in G$. Similmente si determina che il sollevamento tangente dell'azione destra è dato da

$$TL(R, (A, \dot{A})) = (AR, \dot{A}R) \quad (1.12)$$

per ogni $A, R \in G$.

Concludiamo questa sezione con una definizione che sarà utile in seguito (Capitolo 3).

Definizione 1.1.8. Sia $\Phi : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ un'azione di un gruppo di Lie G su una varietà \mathcal{M} . Diciamo che una funzione $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ è *invariante o simmetrica* rispetto all'azione Φ se, per ogni $g \in G$,

$$F \circ \Phi_g = F. \quad (1.13)$$

Il gruppo G viene detto *gruppo di Lie di simmetria di F* .

1.2 Algebre di Lie

Diamo anzitutto la definizione di che cosa si intenda per *algebra di Lie*.

Definizione 1.2.1 (Algebra di Lie). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Esista una mappa $[\cdot, \cdot]_V$

$$[\cdot, \cdot]_V : V \times V \rightarrow V \quad (v, w) \mapsto [v, w]_V$$

bilineare, antisimmetrica e soddisfacente l'*identità di Jacobi*, ovvero tale che

$$[v, [w, z]_V]_V + [w, [z, v]_V]_V + [z, [v, w]_V]_V = 0 \quad \forall v, w, z \in V. \quad (1.14)$$

Allora $(V, [\cdot, \cdot]_V)$ si chiama *algebra di Lie*. L'operazione $[\cdot, \cdot]_V$ prende il nome di *parentesi di Lie* su V . Per semplicità, indicheremo spesso un'algebra di Lie $(V, [\cdot, \cdot]_V)$ soltanto con V .

Esempio 1.2.1 ($\mathfrak{X}(\mathcal{M})$). Ricordiamo che, data un varietà \mathcal{M} , l'insieme $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ dei campi vettoriali su \mathcal{M} costituisce uno spazio vettoriale di dimensione infinita ed esiste su di esso una parentesi di Lie $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{X}(\mathcal{M})}$, detta alcune volte *parentesi di Jacobi-Lie*, definita nel seguente modo:

$$[X, Y]_{\mathfrak{X}(\mathcal{M})}(f) = X(Yf) - Y(Xf) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \quad (1.15)$$

laddove, per ogni campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, Xf indica la derivata di Lie di f lungo X . Dunque $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ munito della parentesi di Jacobi-Lie costituisce un'algebra di Lie detta *algebra di Lie dei campi vettoriali su \mathcal{M}* .

Esempio 1.2.2 ($M(n)$). Lo spazio vettoriale $M(n)$ munito dell'usuale *commutatore di matrici* $[\cdot, \cdot] : M(n) \times M(n) \rightarrow M(n)$ definito da $[A, B] := AB - BA$ per ogni $A, B \in M(n)$ è un'algebra di Lie.

Esempio 1.2.3 (\mathbb{R}^3). Lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 munito dell'operazione data dal prodotto esterno è un'algebra di Lie.

Definizione 1.2.2 (Sottoalgebra di Lie). Sia $(V, [\cdot, \cdot]_V)$ un'algebra di Lie ed $S \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V . Diciamo che S è una *sottoalgebra di Lie* di V se è chiuso rispetto alla parentesi di Lie definita su V , ovvero se $[v, w]_V \in S$ per ogni $v, w \in S$.

Sotto questa ipotesi, la restrizione di $[\cdot, \cdot]_V$ ad $S \times S$ definisce una parentesi di Lie. Il sottospazio S , munito di tale restrizione, è un'algebra di Lie.

Definiamo ora una classe particolare di applicazioni lineari fra algebre di Lie che ne preservano la struttura algebrica.

Definizione 1.2.3 (Omomorfismo di algebre di Lie). Siano $(V, [\cdot, \cdot]_V)$, $(W, [\cdot, \cdot]_W)$ due algebre di Lie, $\varphi : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali. Diciamo che φ è un *omomorfismo di algebre di Lie* se φ preserva le parentesi di Lie $[\cdot, \cdot]_V$ e $[\cdot, \cdot]_W$, ovvero se

$$\varphi([v, w]_V) = [\varphi(v), \varphi(w)]_W \quad (1.16)$$

per ogni $v, w \in V$. Chiamiamo isomorfismo di algebre di Lie un omomorfismo di algebre di Lie invertibile. Date due algebre di Lie $(V, [\cdot, \cdot]_V)$, $(W, [\cdot, \cdot]_W)$, diciamo che V e W sono isomorfe se esiste un isomorfismo di algebre di Lie da V in W .

Entriamo ora nel dettaglio dei gruppi di Lie e della loro connessione con le algebre di Lie. Diamo due definizioni basilari per la definizione di algebra di Lie di un gruppo di Lie G .

Definizione 1.2.4. Siano \mathcal{M} , \mathcal{N} due varietà, $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un diffeomorfismo e $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Denotiamo con $dF(X)$ il campo vettoriale su \mathcal{N} definito ponendo

$$dF(X)|_q := dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)}) \quad (1.17)$$

per ogni $q \in \mathcal{N}$.

Definizione 1.2.5. Siano \mathcal{M} , \mathcal{N} due varietà, sia $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un'applicazione liscia. Diciamo che un campo vettoriale $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ è *F-correlato* ad un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ se $V_{F(q)} = dF_p(X_p)$ per ogni $q \in \mathcal{M}$.

Notiamo che, nel caso in cui $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ sia un diffeomorfismo, esiste, per ogni $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, un unico campo *F-correlato* ad X , $dF(X)$ definito in (1.17). Se F è soltanto un'applicazione liscia allora possono esistere più campi vettoriali su \mathcal{N} *F-correlati* ad un dato campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ o potrebbe non esserne nessuno [15].

Definizione 1.2.6 (Campo vettoriale invariante a sinistra). Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie, $X \in \mathfrak{X}(G)$. Diciamo che X è un campo vettoriale *invariante a sinistra* se X è L_g -correlato a sé stesso per ogni $g \in G$, ovvero se

$$d(L_g)(X)|_h := d(L_g)_h(X_h) = X_{L_g(h)} = X_{gh} \quad (1.18)$$

per ogni $g, h \in G$.

Un'arbitraria combinazione lineare di campi vettoriali invarianti a sinistra è ancora un campo vettoriale invariante a sinistra, data la linearità del differenziale $d(L_g)_h$ per ogni $g \in G$ in ogni punto $h \in G$. Dunque il sottinsieme di $\mathfrak{X}(G)$ formato dai campi vettoriali invarianti a sinistra costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{X}(G)$, che denotiamo con $Lie(G)$.

Vogliamo provare ora che $Lie(G)$ è una sottoalgebra di $(\mathfrak{X}(G), [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{X}(G)})$.

Lemma 1.2.1. *Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie. Per ogni $X, Y \in \text{Lie}(G)$, $[X, Y]_{\mathfrak{X}(G)} \in \text{Lie}(G)$.*

Dimostrazione. Siano $X, Y \in \text{Lie}(G) \subseteq \mathfrak{X}(G)$. Poniamo per semplicità $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{X}(G)} \equiv [\cdot, \cdot]$. Occorre provare, in base a Definizione 1.2.6, che $dL_h([X, Y])|_g = [d(L_h)_g(X_g), d(L_h)_g(Y_g)]$ per ogni $h, g \in G$. Ciò è equivalente a mostrare che $dL_h([X, Y]) = [dL_h(X), dL_h(Y)]$ per ogni $h \in G$. Essendo L_h un diffeomorfismo, tale risultato segue da un fatto più generale: se $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ è un diffeomorfismo fra varietà, $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, allora

$$[dF(X), dF(Y)]_{\mathfrak{X}(\mathcal{N})} = dF([X, Y]_{\mathfrak{X}(\mathcal{M})}) \quad (1.19)$$

Ricordiamo che esiste un isomorfismo fra $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e le derivazioni sull' \mathbb{R} -algebra $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ [10, 15]. Affermiamo che valga $X(f \circ F) = (dF(X)(f)) \circ F$ per ogni funzione di classe \mathcal{C}^∞ in un aperto di \mathcal{N} . Per ogni $p \in \mathcal{M}$ ed ogni funzione $f \in \mathcal{C}^\infty$ in un intorno di $F(p)$ si ha $X(f \circ F)(p) = (dF_p(X_p))(f)$ e $dF(X)(f)(F(p)) = dF(X)|_{F(p)}(f)$. Quindi $X(f \circ F) = (dF(X)(f)) \circ F$ se e solo se $dF_p(X_p) = dF(X)|_{F(p)}$ per ogni $p \in \mathcal{M}$. Sia ora g una funzione definita su un aperto di \mathcal{N} . Allora $XY(g \circ F) = X((dF(Y))(g) \circ F) = dF(X)dF(Y)(g) \circ F$ e $YX(g \circ F) = dF(Y)dF(X)(g) \circ F$; quindi $[X, Y]_{\mathfrak{X}(\mathcal{M})}(g \circ F) = ([dF(X), dF(Y)]_{\mathfrak{X}(\mathcal{N})})(g) \circ F$ e di nuovo abbiamo che $[dF(X), dF(Y)]_{\mathfrak{X}(\mathcal{N})}$ è F -correlato a $[X, Y]_{\mathfrak{X}(\mathcal{M})}$. Ricordiamo che nel caso di diffeomorfismi, dato un campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, esiste un solo campo F -correlato ad X in $\mathfrak{X}(\mathcal{N})$, denotato con $dF(X)$.

Applichiamo tale risultato al gruppo di Lie G . Essendo L_h , per ogni $h \in G$, un diffeomorfismo, allora abbiamo che

$$dL_h([X, Y]) = [dL_h(X), dL_h(Y)] = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \text{Lie}(G) \quad \forall h \in G \quad (1.20)$$

Dunque $[X, Y] \in \text{Lie}(G)$, per ogni $X, Y \in \text{Lie}(G)$. \square

Possiamo ora dare la definizione di algebra di Lie di un gruppo di Lie (G, \cdot) .

Definizione 1.2.7 (Algebra di Lie del gruppo G). *Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie. La sottoalgebra $\text{Lie}(G)$, costituita dai campi vettoriali su G invarianti a sinistra, munita della parentesi di Lie indotta dalla parentesi di Jacobi-Lie $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{X}(G)}$, è detta *algebra di Lie del gruppo* (G, \cdot) .*

La nozione di algebra di Lie appena data è alquanto astratta e di difficile applicazione. Fortunatamente, l'algebra di Lie di un gruppo (G, \cdot) può essere concepita, più intuitivamente da un punto di vista geometrico, come lo spazio tangente nell'identità a G , $T_e G$. Vale il seguente teorema fondamentale.

Teorema 1.2.1. *Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie. La mappa $\epsilon : \text{Lie}(G) \rightarrow T_e G$ definita da $\epsilon(V) := V_e$ per ogni $V \in \text{Lie}(G)$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. In particolare $\text{Lie}(G)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita la cui dimensione è uguale a $\dim T_e G = \dim G$.*

Dimostrazione. La linearità e la liscenza di $\epsilon : \text{Lie}(G) \rightarrow T_e G$ seguono direttamente dalla sua definizione. Per dimostrare il teorema costruiamo un'applicazione inversa per ϵ . Introduciamo l'applicazione $(\tilde{\cdot}) : T_e G \rightarrow \mathfrak{X}(G)$, $V \mapsto \tilde{V}$ con $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(G)$ definita da

$$\tilde{V}_g := d(L_g)_e(V) \quad \forall g \in G \quad (1.21)$$

Dalla linearità della mappa differenziale $d(L_g)_e$ per ogni $g \in G$, segue che la mappa $(\tilde{\cdot})$ è un'applicazione lineare fra spazi vettoriali. Verifichiamo che $\tilde{V} \in \text{Lie}(G)$ per ogni $V \in T_e G$. Dalla definizione di \tilde{V} e dal fatto che $L_h \circ L_g = L_{hg}$ per ogni $h, g \in G$ abbiamo che

$$d(L_h)_g(\tilde{V}_g) = d(L_h)_g \circ d(L_g)_e(V) = d(L_{hg})_e(V) = \tilde{V}_{hg}$$

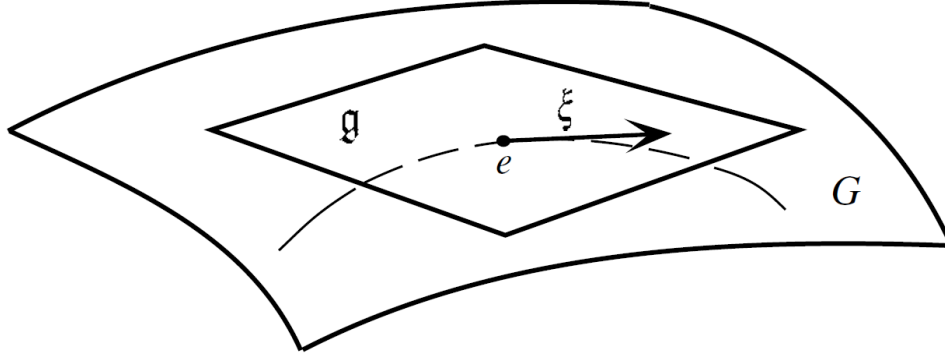


Figura 1.1: Gruppo di Lie G , algebra $\mathfrak{g} = T_e G$ e vettore $\xi \in T_e G$.

per ogni $h, g \in G$, $V \in T_e G$. Dunque $\tilde{V} \in \text{Lie}(G)$ per ogni $V \in T_e G$. Dall'altro canto

$$\epsilon(\tilde{V}) = (\tilde{V})_e = d(L_e)_e(V) = V$$

per ogni $V \in T_e G$; ciò prova che $\epsilon \circ \tilde{(\cdot)} = \text{id}_{T_e G}$. Viceversa, per ogni $X \in \text{Lie}(G)$, abbiamo

$$(\epsilon(\tilde{X}))_g = (\tilde{X}_e)_g = d(L_g)_e(X_e) = X_g \quad \forall g \in G$$

che prova che $\tilde{(\cdot)} \circ \epsilon = \text{id}_{\text{Lie}(G)}$. \square

Dato $V \in T_e G$, useremo la notazione \tilde{V} sopra introdotta per denotare l'unico campo vettoriale invariante a sinistra associato a V .

Poiché $\text{Lie}(G) \cong T_e G$ (per il Teorema precedente) e poiché su $\text{Lie}(G)$ è definita un'operazione di parentesi di Lie indotta dalla parentesi di Jacobi-Lie su $\mathfrak{X}(G)$, possiamo definire una parentesi di Lie sullo spazio vettoriale n -dimensionale $T_e G$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]_{T_e G} &: T_e G \times T_e G \rightarrow T_e G \\ [V, W]_{T_e G} &:= ([\tilde{V}, \tilde{W}]_{\text{Lie}(G)})_e \quad \forall V, W \in T_e G \end{aligned} \quad (1.22)$$

Notiamo che, con l'introduzione di tale parentesi di Lie, l'applicazione $\epsilon : \text{Lie}(G) \rightarrow T_e G$ è un isomorfismo di algebre di Lie.

Constatato ciò, in quanto segue chiameremo *algebra di Lie di (G, \cdot)* lo spazio tangente $T_e G$ dotato della parentesi $[\cdot, \cdot]_{T_e G}$, data l'immediatezza di questa nozione da un punto di vista geometrico (Figura 1.1). Tale spazio vettoriale viene denotato, per tradizione, con la lettera gotica minuscola di quella che denota il gruppo di Lie di cui è algebra. Per cui $(T_e G, [\cdot, \cdot]_{T_e G}) := \mathfrak{g}$.

Esempio 1.2.4 ($\mathfrak{gl}(n)$). Nell'Esempio 1.1.2 abbiamo notato come lo spazio tangente al gruppo di Lie $GL(n)$ in ogni suo punto si identifichi naturalmente con $M(n)$. In particolare $T_{\mathbb{1}}GL(n) = M(n)$. Si può provare inoltre [10] che la parentesi di Lie $[\cdot, \cdot]_{T_{\mathbb{1}}GL(n)}$ coincide con con il commutatore fra matrici introdotto nell'Esempio 1.2.2. In definitiva, $\mathfrak{gl}(n) = M(n)$.

Esempio 1.2.5 ($\mathfrak{o}(n)$). Come notato nell'Esempio 1.1.3, $O(n) = \psi^{-1}(0)$. L'algebra di Lie $\mathfrak{o}(n)$ è il nucleo $\ker(d(\psi)_{\mathbb{1}}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n) : d(\psi)_{\mathbb{1}}(A) = 0\} = \{A \in M(n) :$

$d(\psi)_{\mathbb{1}}(A) = 0$ }, poiché $\mathfrak{gl}(n) = M(n)$. Fissiamo $B \in GL(n)$, $A \in M(n)$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} d(\psi)_B(A) &= \frac{d}{dt}(\psi(B+tA))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}((B+tA)^T(B+tA) - \mathbb{1})|_{t=0} \\ &= A^T B + B^T A. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Imponendo $B = \mathbb{1}$ e $d(\psi)_B(A) = 0$, otteniamo che $\mathfrak{o}(n) = \{A \in M(n) : A^T + A = 0\} = Skew(n)$.

Esempio 1.2.6 ($\mathfrak{so}(n)$). Nell'Esempio 1.1.4 abbiamo provato che $SO(n)$ è un aperto di $O(n)$. Inoltre $SO(n)$ contiene l'unità $\mathbb{1} \in O(n)$, quindi $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n) = Skew(n)$.

1.2.1 La mappa esponenziale

Introduciamo il concetto di mappa esponenziale per gruppi di Lie. Diamo prima la seguente definizione.

Definizione 1.2.8 (Sottogruppo ad un parametro di un gruppo di Lie). Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie. Chiamiamo *sottogruppo ad un parametro di G* ogni applicazione $F : \mathbb{R} \rightarrow G$ che sia omomorfismo di gruppi di Lie di $(\mathbb{R}, +)$ in (G, \cdot) .

Vale il fondamentale Teorema.

Teorema 1.2.2. *Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie. I sottogruppi ad un parametro di G sono esattamente tutte e sole le curve integrali uscenti dall'identità e in G dei campi vettoriali invarianti a sinistra. Ci sono dunque le seguenti corrispondenze biunivoche:*

$$\{F : \mathbb{R} \rightarrow G \mid F \text{ sia omomorfismo di gruppi di Lie}\} \longleftrightarrow Lie(G) \longleftrightarrow \mathfrak{g}$$

Dimostrazione. Consultare [10]. □

Dato $\tilde{X} \in Lie(G)$, $X \in \mathfrak{g}$, chiamiamo *sottogruppo ad un parametro generato da $X \in \mathfrak{g}$* o da $\tilde{X} \in Lie(G)$ la curva integrale di \tilde{X} uscente dall'identità e .

Definizione 1.2.9 (Mappa esponenziale). Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie, \mathfrak{g} la sua algebra di Lie. Chiamiamo *mappa esponenziale* la mappa $exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ definita ponendo $exp(X) = F(1)$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$, laddove F è il sottogruppo ad un parametro generato da X .

L'importanza della mappa esponenziale è sottolineata dalle sue proprietà. Alcune di queste sono contenute nel seguente teorema.

Teorema 1.2.3. *Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie, \mathfrak{g} la sua algebra. La mappa $exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ gode delle seguenti proprietà:*

1. è liscia;
2. $\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathfrak{g}, exp((s+t)X) = exp(sX)exp(tX)$;
3. $\forall X \in \mathfrak{g}, F(t) = exp(tX)$ è il sottogruppo ad un parametro generato da X ;
4. il flusso di un campo vettoriale invariante a sinistra X è dato da $(t, g) \mapsto R_{exp(tX)}g$, laddove R è la traslazione destra di G .

Dimostrazione. Vedere [10] o [12]. □

Come conseguenza, diamo la definizione di generatore infinitesimo di un'azione.

Definizione 1.2.10 (Generatore infinitesimo di un'azione associato a $\xi \in \mathfrak{g}$). Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie, \mathcal{M} una varietà differenziabile, $\Phi : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ un'azione sinistra di G su \mathcal{M} . Per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$, chiamiamo *generatore infinitesimo dell'azione* Φ associato a ξ il campo vettoriale $\xi_{\mathcal{M}} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ definito da

$$\xi_{\mathcal{M}}(p) := \frac{d}{dt}(\Phi(\exp(t\xi), p))|_{t=0} \quad (1.24)$$

per ogni $p \in \mathcal{M}$.

1.2.2 Hat map e breve map per $SO(3)$

Abbiamo visto nell'Esempio 1.1.4 che $SO(n)$ è un gruppo di Lie di matrici di dimensione $n(n-1)/2$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. Nell'Esempio 1.2.6 abbiamo dimostrato che $\mathfrak{so}(n) = Skew(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. Nel caso particolare $n = 3$ è possibile identificare \mathbb{R}^3 con $\mathfrak{so}(3)$ tramite un isomorfismo di spazi vettoriali, noto come *hat map* $\widehat{\cdot}$

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathfrak{so}(3) \\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &\mapsto \widehat{\mathbf{v}} := \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \in Skew(3). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Vale inoltre

$$\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$

per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$.

Osservazione 1.2.1. Se dotiamo \mathbb{R}^3 della parentesi di Lie data dal prodotto esterno \times in \mathbb{R}^3 la hat map è un isomorfismo di algebre di Lie, in quanto

$$\begin{aligned} \widehat{(\mathbf{v} \times \mathbf{w})}\mathbf{z} &= (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{z} = -(\mathbf{z} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} - (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) \times \mathbf{v} \\ &= -\mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{z}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = -\widehat{\mathbf{w}}\widehat{\mathbf{v}}\mathbf{z} + \widehat{\mathbf{v}}\widehat{\mathbf{w}}\mathbf{z} \\ &= [\widehat{\mathbf{v}}, \widehat{\mathbf{w}}]\mathbf{z} \end{aligned} \quad (1.26)$$

per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$.

Diamo ora la seguente definizione, utile per fissare la notazione.

Definizione 1.2.11 (Accoppiamento naturale). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{R} , V^* lo spazio duale di V . Chiamiamo *accoppiamento naturale* di V^* con V l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definita, per ogni $\alpha \in V^*$ e $v \in V$, da

$$\langle \alpha, v \rangle_V = \alpha(v). \quad (1.27)$$

Per semplicità poniamo, laddove non vi sia ambiguità, $\langle \cdot, \cdot \rangle_V = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Alla luce di ciò, così come $\mathfrak{so}(3)$ può essere identificato con \mathbb{R}^3 , in maniera altrettanto naturale $\mathfrak{so}(3)^*$ può essere identificato con \mathbb{R}^3 tramite l'isomorfismo di spazi vettoriali *breve map* $\check{\cdot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)^*$ definita da

$$\mathbf{v} \mapsto \check{\mathbf{v}} \quad \text{tale che} \quad \langle \check{\mathbf{v}}, \widehat{\mathbf{w}} \rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.28)$$

laddove $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è l'usuale prodotto scalare in \mathbb{R}^3 e $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}$ è l'accoppiamento naturale di $\mathfrak{so}(3)^*$ con $\mathfrak{so}(3)$.

Nelle restanti due sezioni, definiremo particolari azioni di un gruppo di Lie, utili nei Capitoli 3 e 4.

1.3 Azioni Aggiunta e Co-Aggiunta

1.3.1 Azione Aggiunta di un gruppo di Lie

Definizione 1.3.1 (Azione Aggiunta di un gruppo di Lie). Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie. Chiamiamo *Azione Aggiunta di G su \mathfrak{g}* , l'azione $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ definita da

$$(g, \xi) \mapsto \text{Ad}_g(\xi) := d(C_g)_e(\xi) \quad (1.29)$$

per ogni $g \in G$, $\xi \in \mathfrak{g}$.

L'Azione Aggiunta di un gruppo di Lie (G, \cdot) è un'azione sinistra in quanto

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{g_1}(\text{Ad}_{g_2}(\xi)) &= d(C_{g_1})_e \circ d(C_{g_2})_e(\xi) \\ &= d(L_{g_1} \circ R_{g_1^{-1}}) \circ d(L_{g_2} \circ R_{g_2^{-1}})(\xi) \\ &= d(L_{g_1} \circ R_{g_1^{-1}} \circ L_{g_2} \circ R_{g_2^{-1}})_e(\xi) \\ &= d(C_{(g_1 g_2)})_e(\xi) = \text{Ad}_{(g_1 g_2)}(\xi) \end{aligned} \quad (1.30)$$

per ogni $g_1, g_2 \in G$, $\xi \in \mathfrak{g}$.

Esempio 1.3.1 (Azione Aggiunta di $SO(3)$). Consideriamo una curva $t \mapsto B(t) \in SO(3)$ tale che $B(0) = \mathbb{1}$ e $B'(0) = \hat{\Omega}$ con $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Allora

$$\begin{aligned} \text{Ad}_R(\hat{\Omega}) &= d(C_R)_e(\hat{\Omega}) \\ &= \frac{d}{dt}(C_R(B(t)))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(RB(t)R^{-1})|_{t=0} \\ &= R\hat{\Omega}R^{-1}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ma, per ogni $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, abbiamo che

$$(\text{Ad}_R(\hat{\Omega}))(\mathbf{w}) = R\hat{\Omega}(R^{-1}\mathbf{w}) = R[\hat{\Omega} \times (R^{-1}\mathbf{w})] = R\hat{\Omega} \times \mathbf{w} = \widehat{R\hat{\Omega}\mathbf{w}}. \quad (1.32)$$

In definitiva, per ogni $\Omega \in \mathbb{R}^3$ e $R \in SO(3)$

$$\text{Ad}_R(\hat{\Omega}) = \widehat{R\hat{\Omega}}. \quad (1.33)$$

Ricordando la hat map (1.25) abbiamo anche che, per ogni $\Omega \in \mathbb{R}^3$ e $R \in SO(3)$

$$\text{Ad}_R(\Omega) = R\Omega \quad (1.34)$$

ovvero l'Azione Aggiunta di $SO(3)$ può essere identificata con l'usuale azione lineare di $SO(3)$ su \mathbb{R}^3 [10].

1.3.2 Azione Co-Aggiunta di un gruppo di Lie

Ricordiamo, innanzitutto, la definizione di applicazione trasposta.

Definizione 1.3.2 (Mappa trasposta). Sia $\varphi : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali, $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ l'accoppiamento naturale di V^* con V , $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ l'accoppiamento naturale di W^* con W . L'unica applicazione lineare $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$ tale che

$$\langle \varphi^*(\alpha), v \rangle_V = \langle \alpha, \varphi(v) \rangle_W \quad (1.35)$$

per ogni $\alpha \in W^*$ e $v \in V$ è detta *mappa duale o trasposta di φ* .

Abbiamo quindi la seguente definizione.

Definizione 1.3.3 (Azione Co-Aggiunta di un gruppo di Lie). Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie, \mathfrak{g}^* lo spazio duale dell'algebra di Lie di G . Chiamiamo *Azione Co-Aggiunta di G su \mathfrak{g}^** l'azione $\text{Ad}^* : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definita da

$$(g, \alpha) \mapsto \text{Ad}^*(g, \alpha) := (\text{Ad}_{g^{-1}})^*(\alpha) \quad (1.36)$$

per ogni $g \in G$ e $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, laddove $(\text{Ad}_{g^{-1}})^*$ è la mappa trasposta di $\text{Ad}_{g^{-1}}$.

Anche l'Azione Co-Aggiunta di un gruppo di Lie (G, \cdot) è un'azione sinistra. Infatti

$$\begin{aligned} \langle \text{Ad}^*(g_1, \text{Ad}^*(g_2, \alpha)), \xi \rangle &= \langle (\text{Ad}_{g_1^{-1}})^*((\text{Ad}_{g_2^{-1}})^*(\alpha)), \xi \rangle \\ &= \langle (\text{Ad}_{g_2^{-1}})^*(\alpha), \text{Ad}_{g_1^{-1}}(\xi) \rangle \\ &= \langle \alpha, \text{Ad}_{g_2^{-1}}(\text{Ad}_{g_1^{-1}}(\xi)) \rangle \\ &= \langle \alpha, \text{Ad}_{(g_1 g_2)^{-1}}(\xi) \rangle \\ &= \langle \text{Ad}^*(g_1 g_2, \alpha), \xi \rangle \end{aligned} \quad (1.37)$$

per ogni $g_1, g_2 \in G$, $\xi \in \mathfrak{g}$.

Esempio 1.3.2 (Azione Co-Aggiunta di $SO(3)$). Tenendo conto di (1.28), abbiamo che

$$\begin{aligned} \langle \text{Ad}_{R^{-1}}^*(\check{\Pi}), \hat{\Omega} \rangle &= \langle \check{\Pi}, \text{Ad}_{R^{-1}} \hat{\Omega} \rangle \\ &= \langle \check{\Pi}, \widehat{R^{-1}\Omega} \rangle \\ &= \langle \check{\Pi}, \widehat{R^{-1}\Omega} \rangle \\ &= \Pi \cdot R^{-1}\Omega \\ &= R^{-T}\Pi \cdot \Omega \\ &= R\Pi \cdot \Omega \\ &= \langle (R\Pi)^\vee, \hat{\Omega} \rangle \end{aligned} \quad (1.38)$$

per ogni $R \in SO(3)$, $\hat{\Omega} \in \mathfrak{so}(3)$, $\check{\Pi} \in \mathfrak{so}(3)^*$. Da questo segue che

$$\text{Ad}^*(R, \check{\Pi}) = (R\Pi)^\vee \quad (1.39)$$

per ogni $\Pi \in \mathbb{R}^3$ e per ogni $R \in SO(3)$. Se identifichiamo $\mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$ tramite (1.28) allora

$$\text{Ad}^*(R, \Pi) = R\Pi \quad (1.40)$$

per ogni $\Pi \in \mathbb{R}^3$ e per ogni $R \in SO(3)$, ovvero l'Azione Co-Aggiunta di $SO(3)$ può essere identificata con l'usuale azione lineare di $SO(3)$ su \mathbb{R}^3 [10].

1.3.3 Operatori aggiunti e co-aggiunti di un gruppo di Lie

Diamo la seguente definizione.

Definizione 1.3.4 (Operatore aggiunto di un gruppo di Lie). Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie. La mappa $\text{ad} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ definita da

$$(\xi, \eta) \mapsto \text{ad}_\xi(\eta) := \xi_{\mathfrak{g}}(\eta) = \frac{d}{dt}(\text{Ad}(\exp(t\xi), \eta))|_{t=0} \quad (1.41)$$

è detta *azione aggiunta di \mathfrak{g} su sé stesso* od *operatore aggiunto di G* .

Abbiamo poi la seguente Proposizione.

Proposizione 1.3.1. *Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie. Allora*

$$\text{ad}_\xi(\eta) = [\xi, \eta] \quad (1.42)$$

per ogni $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, laddove $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ è la parentesi di Lie su $\mathfrak{g} = T_e G$.

Dimostrazione. Siano $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Sia $\phi_t(g) = \exp(t\xi)$ il flusso del campo $\tilde{\xi} \in \mathfrak{X}(G)$. Per il punto 3. del Teorema 1.2.3 abbiamo che $\phi_t(g) = R_{\exp(t\xi)}g$. Tenendo conto del fatto che la parentesi di Lie è la derivata di Lie di due campi vettoriali $[X, Y] = \mathcal{L}_X(Y)$ [15] otteniamo

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= [\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]_e \\ &= \mathcal{L}_{\tilde{\xi}}(\tilde{\eta})(e) \\ &= \frac{d}{dt}(d(\phi_{-t})_{\phi_t(e)}(\tilde{\eta}(\phi_t(e))))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(d(R_{\exp(-t\xi)})_{\exp(t\xi)}(\tilde{\eta}(\exp(t\xi))))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(d(R_{\exp(-t\xi)})_{\exp(t\xi)}(d(L_{\exp(t\xi)})_e(\eta)))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(d(R_{\exp(-t\xi)} \circ L_{\exp(t\xi)})_e(\eta))|_{t=0}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

per ogni $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, da cui segue che

$$\text{ad}_\xi(\eta) = \xi_{\mathfrak{g}}(\eta) = \frac{d}{dt}(\text{Ad}_{\exp(t\xi)}(\eta))|_{t=0} = [\xi, \eta] \quad (1.44)$$

per ogni $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. \square

Definizione 1.3.5 (Operatore co-aggiunto di un gruppo di Lie). Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie, \mathfrak{g} la sua algebra di Lie. Fissato $\xi \in \mathfrak{g}$, consideriamo la mappa duale di ad_ξ , $\text{ad}_\xi^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$, ovvero l'applicazione definita da

$$\langle \text{ad}_\xi^*(\alpha), \eta \rangle = \langle \alpha, \text{ad}_\xi(\eta) \rangle \quad (1.45)$$

per ogni $\eta \in \mathfrak{g}$, $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, laddove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è l'accoppiamento naturale di \mathfrak{g}^* con \mathfrak{g} . La mappa $\text{ad}^* : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$, $(\xi, \alpha) \mapsto \text{ad}_\xi^*(\alpha)$ è detta *azione co-aggiunta di \mathfrak{g} su sé stesso* od *operatore co-aggiunto di G* .

Esempio 1.3.3 (Operatori aggiunti e co-aggiunto di $SO(3)$). Sfruttando la definizione precedente e la Proposizione 1.3.1 abbiamo che

$$\begin{aligned} \langle \text{ad}_\xi^*(\alpha), \eta \rangle &= \langle \alpha, \text{ad}_\xi(\eta) \rangle \\ &= \langle \alpha, [\xi, \eta] \rangle \\ &= \langle \alpha, \xi\eta \rangle - \langle \alpha, \eta\xi \rangle. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Per $SO(3)$, identifichiamo $\alpha \in \mathfrak{so}(3)^*$ con $\alpha \in \mathfrak{so}(3)$ tramite l'accoppiamento naturale dato dalla traccia¹

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \xi\eta \rangle - \langle \alpha, \eta\xi \rangle &= \text{tr}(\alpha(\xi\eta)^T) - \text{tr}(\alpha(\eta\xi)^T) \\ &= \text{tr}(\alpha\eta^T\xi^T) - \text{tr}(\alpha\xi^T\eta^T) \\ &= -\text{tr}(\alpha\xi^T\eta^T) + \text{tr}(\xi^T\alpha\eta^T) \\ &= \langle -[\alpha, \xi^T], \eta \rangle \end{aligned} \quad (1.47)$$

¹Nel caso di algebre di Lie di matrici \mathfrak{g} l'accoppiamento naturale dato dalla traccia è dato da $\langle A, B \rangle := \text{tr}(AB^T)$ per ogni $A, B \in M(n)$.

da cui $\text{ad}_\xi^*(\alpha) = -[\alpha, \xi^T]$. Nel caso particolare di $\mathfrak{so}(3)$, poiché $\xi = -\xi^T$, abbiamo $\text{ad}_\xi^*(\alpha) = [\alpha, \xi]$.

Quindi, per ogni $\hat{\Omega}, \hat{\mathbf{W}} \in \mathfrak{so}(3)$, $\text{ad}_{\hat{\Omega}}(\hat{\mathbf{W}}) = [\hat{\Omega}, \hat{\mathbf{W}}] = \widehat{\Omega \times \mathbf{W}}$ per Osservazione 1.2.1, da cui

$$\text{ad}_{\hat{\Omega}}(\hat{\mathbf{W}}) = \widehat{\Omega \times \mathbf{W}}. \quad (1.48)$$

Per quanto riguarda l'operatore co-aggiunto, se $\check{\Pi} \in \mathfrak{so}(3)^*$ e $\hat{\Omega} \in \mathfrak{so}(3)$,

$$\begin{aligned} \langle \text{ad}_{\hat{\Omega}}^*(\check{\Pi}), \hat{\mathbf{W}} \rangle &= \langle \check{\Pi}, \text{ad}_{\hat{\Omega}}(\hat{\mathbf{W}}) \rangle \\ &= \langle \check{\Pi}, \widehat{\Omega \times \mathbf{W}} \rangle \\ &= \Pi \cdot (\Omega \times \mathbf{W}) \\ &= (\Pi \times \Omega) \cdot \mathbf{W} \\ &= \langle (\Pi \times \Omega)^\vee, \hat{\mathbf{W}} \rangle \end{aligned} \quad (1.49)$$

per ogni $\hat{\mathbf{W}} \in \mathfrak{so}(3)$, da cui

$$\text{ad}_{\hat{\Omega}}^*(\check{\Pi}) = (\Pi \times \Omega)^\vee \quad (1.50)$$

per ogni $\hat{\Omega} \in \mathfrak{so}(3)$, $\check{\Pi} \in \mathfrak{so}(3)^*$. Tenendo conto degli isomorfismi (1.25) e (1.28), gli operatori aggiunto e co-aggiunto di $SO(3)$ sono dati da

$$\text{ad}_\Omega(\mathbf{W}) = \Omega \times \mathbf{W} \quad (1.51)$$

$$\text{ad}_\Omega^*(\Pi) = \Pi \times \Omega \quad (1.52)$$

per ogni $\Omega, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^3$.

Capitolo 2

Geodetiche su varietà Riemanniane

Il presente Capitolo richiama alcuni concetti di Geometria Riemanniana quali la definizione di geodetiche di una varietà Riemanniana ed il ruolo che esse hanno nello studio dei sistemi meccanici (Teorema 2.0.1). Per approfondimenti vedere [4, 6, 15].

Diamo le seguenti fondamentali Definizioni.

Definizione 2.0.6 (Connessione). Sia \mathcal{M} varietà, $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ il fibrato tangente su \mathcal{M} . Una *connessione (lineare)* su $T\mathcal{M}$ è un'applicazione

$$\begin{aligned}\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ (X, V) &\mapsto \nabla_X V\end{aligned}$$

che

1. sia $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ -lineare in X , ovvero sia tale che per ogni $X_1, X_2, V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e per ogni $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} V = f\nabla_{X_1} V + g\nabla_{X_2} V$$

2. sia \mathbb{R} -lineare in V , ovvero sia tale che per ogni $X, V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$\nabla_X (aV_1 + bV_2) = a\nabla_X V_1 + b\nabla_X V_2$$

3. soddisfi la *regola di Leibniz*, ovvero sia tale che per ogni $X, V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$

$$\nabla_X (fV) = (Xf)V + f\nabla_X V. \quad (2.1)$$

Il campo vettoriale $\nabla_X V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ è detto *derivata covariante* di V lungo X associata alla connessione ∇ .

Definizione 2.0.7 (Varietà Riemanniana). Sia \mathcal{M} una varietà. Sia $\tilde{g} \in \mathcal{T}_2^0(\mathcal{M})$ un campo tensoriale del tipo $\binom{0}{2}$ che sia:

1. *simmetrico*: $\tilde{g}_p(v, w) = \tilde{g}_p(w, v) \quad \forall v, w \in T_p\mathcal{M}, \quad \forall p \in \mathcal{M}$;
2. *definito positivo*: $\tilde{g}_p(v, v) > 0 \quad \forall v \in T_p\mathcal{M} \setminus \{O_p\} \quad \forall p \in \mathcal{M}$.

La coppia (\mathcal{M}, \tilde{g}) è detta *varietà Riemanniana*.

Definizione 2.0.8 (Connessione compatibile con una metrica). Sia (\mathcal{M}, \tilde{g}) una varietà Riemanniana e ∇ una connessione su \mathcal{M} . Diciamo che ∇ è una connessione *compatibile con la metrica* \tilde{g} se

$$\nabla_X(\tilde{g}(Y, Z)) = \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \nabla_X Z) \quad (2.2)$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, laddove ricordiamo che $\nabla_X f = Xf$ per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ per la condizione (2.1).

Sia quindi (\mathcal{M}, \tilde{g}) una varietà Riemanniana. Rileviamo il seguente fondamentale risultato: esiste ed è unica una connessione su \mathcal{M} compatibile con la metrica \tilde{g} e tale che $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]_{\mathfrak{X}(\mathcal{M})} = 0$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ [6, 15]. Tale connessione su \mathcal{M} è detta *connessione di Levi-Civita di (\mathcal{M}, \tilde{g})* .

Ricordiamo, infine, che cosa si intende per derivata covariante D_σ lungo una curva σ . Sia (\mathcal{M}, \tilde{g}) varietà Riemanniana, ∇ la sua connessione di Levi-Civita. Chiamiamo *campo vettoriale lungo una curva* $\sigma :]a, b[\rightarrow \mathcal{M}$ un'applicazione $V :]a, b[\rightarrow T\mathcal{M}$ tale che $V(t) \in T_{\sigma(t)}\mathcal{M}$ per ogni $t \in]a, b[$. Lo spazio vettoriale dei campi vettoriali lungo una curva σ viene denotato con $\mathfrak{X}(\sigma)$. Diciamo che $V \in \mathfrak{X}(\sigma)$ è *estendibile* se esistono un intorno aperto U dell'immagine di σ ed un campo vettoriale $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(U)$ con $V(t) = \tilde{V}(\sigma(t))$ per ogni $t \in]a, b[$. Si può provare [6, 15] che, per ogni curva σ , esiste ed è unico un operatore $D_\sigma : \mathfrak{X}(\sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\sigma)$, detto *derivata covariante lungo σ* , tale che

$$DV(t) = \nabla_{\sigma'(t)}(\tilde{V}) \quad \forall t \in]a, b[\quad (2.3)$$

per ogni $V \in \mathfrak{X}(\sigma)$ estendibile con estensione \tilde{V} .

Abbiamo dunque la seguente definizione.

Definizione 2.0.9 (Geodetica). Sia (\mathcal{M}, \tilde{g}) una varietà Riemanniana, ∇ la sua connessione di Levi-Civita. Una *geodetica della varietà Riemanniana (\mathcal{M}, \tilde{g})* è una curva $\sigma :]a, b[\rightarrow \mathcal{M}$ tale che $D_\sigma(\sigma') = 0$. In altre parole, $\sigma :]a, b[\rightarrow \mathcal{M}$ è geodetica della varietà Riemanniana se e solo se il vettore tangente $\sigma' \in \mathfrak{X}(\sigma)$ è parallelo lungo σ (un campo vettoriale lungo σ , $V \in \mathfrak{X}(\sigma)$, è detto *parallelo* se $D_\sigma(V) = 0$).

Localmente, la condizione di parallelismo espressa in Definizione 2.0.9 è un sistema di equazione differenziali ordinarie lineari [15]. Infatti, in una qualunque carta (U, φ) di \mathcal{M} che abbia intersezione non vuota con il sostegno di σ , l'equazione (2.3) si scrive

$$\frac{dV^k}{dt}(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n (\Gamma_{jh}^k \circ \sigma)(t)(x^j \circ \sigma)'(t)V^h(t) \quad \forall t \in]a, b[\quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad (2.4)$$

con $V(t) = \sum_{h=1}^n V^h(t) \frac{\partial}{\partial x^h} |_{\sigma(t)}$ e laddove $\Gamma_{jh}^k \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$, per ogni $k, j, h \in \{1, \dots, n\}$, sono le funzioni note come *simboli di Christoffel* della connessione ∇ rispetto alla data carta locale.

Nel caso delle geodetiche, usando la convenzione di Einstein, l'Equazione (2.4) diviene

$$(x^k \circ \sigma)'' + (\Gamma_{ij}^k \circ \sigma)(x^i \circ \sigma)'(x^j \circ \sigma)' = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad (2.5)$$

A questo punto, dimostriamo il seguente fondamentale risultato.

Teorema 2.0.1. *Una curva $c :]a, b[\rightarrow \mathcal{M}$ è una geodetica della varietà Riemanniana (\mathcal{M}, \tilde{g}) se e solo se soddisfa localmente le equazioni di Euler-Lagrange per la Lagrangiana $L : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$L(p, v) = \frac{1}{2} \tilde{g}_p(v, v) \quad \forall v \in T_p\mathcal{M} \quad \forall p \in \mathcal{M} \quad (2.6)$$

Dimostrazione. In coordinate, la rappresentativa di $L : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ è data da $\bar{L}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\tilde{g}_{ij}v^i v^j$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. In coordinate abbiamo anche che $\bar{c}(t) = (\varphi \circ c)(t) := (q^1(t), \dots, q^n(t))$. Nel seguito sottintendiamo la dipendenza da t . Dunque la condizione

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q^i} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.7)$$

diviene

$$\frac{d}{dt} (\tilde{g}_{ij} \dot{q}^j) = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^k \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.8)$$

che è

$$\tilde{g}_{ij} \ddot{q}^j = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial q^k} \right) \dot{q}^j \dot{q}^k \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.9)$$

Risistemando gli indici in (2.9) abbiamo

$$\ddot{q}^i = \tilde{g}^{li} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial q^l} - \frac{\partial \tilde{g}_{lj}}{\partial q^k} \right) \dot{q}^j \dot{q}^k \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.10)$$

Tali equazioni sono di fatto equivalenti a

$$\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.11)$$

Infatti, considerando la connessione di Levi-Civita della varietà Riemanniana (\mathcal{M}, \tilde{g}) , abbiamo che i simboli di Christoffel sono dati da [4, 15]

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \tilde{g}^{il} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{lk}}{\partial q^j} + \frac{\partial \tilde{g}_{lj}}{\partial q^k} - \frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial q^l} \right) \quad (2.12)$$

e quindi, data la simmetria di \tilde{g} ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{il} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{lk}}{\partial q^j} + \frac{\partial \tilde{g}_{lj}}{\partial q^k} - \frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial q^l} \right) \dot{q}^j \dot{q}^k \\ &= \tilde{g}^{il} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{lj}}{\partial q^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial q^l} \right) \dot{q}^j \dot{q}^k \end{aligned} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.13)$$

ovvero la curva $c :]a, b[\rightarrow \mathcal{M}$ soddisfa localmente le equazioni di Euler-Lagrange se e solo se è una geodetica della varietà Riemanniana (\mathcal{M}, \tilde{g}) . \square

Di conseguenza le geodetiche della varietà Riemanniana (\mathcal{M}, \tilde{g}) hanno un'interpretazione meccanica: sono i moti del sistema Lagrangiano di varietà delle configurazioni \mathcal{M} e Lagrangiana $L = \frac{1}{2}\tilde{g}$. Tali moti vengono chiamati *spontanei* in quanto avvengono in assenza di forze attive.

Diamo, in conclusione, due definizioni che risultano utili per i successivi Capitoli.

Definizione 2.0.10 (Isometria). Sia $H : (\mathcal{M}_1, \tilde{g}_1) \rightarrow (\mathcal{M}_2, \tilde{g}_2)$ un'applicazione liscia fra varietà Riemanniane della stessa dimensione. Diciamo che H è un'*isometria* in $p \in \mathcal{M}_1$ se per ogni $v, w \in T_p \mathcal{M}_1$ si ha

$$(\tilde{g}_2)_{H(p)}(dH_p(v), dH_p(w)) = (\tilde{g}_1)_p(v, w). \quad (2.14)$$

Diciamo che H è un'*isometria* se è un diffeomorfismo ed è isometria in ogni punto $p \in \mathcal{M}_1$.

Definizione 2.0.11. Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie, \tilde{g} metrica Riemanniana su G . Diciamo che \tilde{g} è *invariante a sinistra* se per ogni $h \in G$ si ha che $L_h : G \rightarrow G$ è un'isometria di G in G , ovvero se

$$\tilde{g}_{hg}(d(L_h)_g(v), d(L_h)_g(w)) = \tilde{g}_g(v, w) \quad (2.15)$$

per ogni $v, w \in T_g G$, $h, g \in G$. In maniera speculare, diciamo che \tilde{g} è *invariante a destra* se per ogni $h \in G$ si ha che $R_h : G \rightarrow G$ è un'isometria di G in G , ovvero se

$$\tilde{g}_{gh}(d(R_h)_g(v), d(R_h)_g(w)) = \tilde{g}_g(v, w) \quad (2.16)$$

per ogni $v, w \in T_g G$, $h, g \in G$.

Capitolo 3

Il Corpo Rigido di Euler-Poinsot

Nella trattazione che segue assumeremo nota la teoria del corpo rigido ed, in particolar modo, la teoria del corpo rigido di Euler-Poinsot. Per un'introduzione, consultare [16].

Per corpo rigido di Euler-Poinsot si intende un corpo rigido il quale abbia un punto fisso O in un sistema di riferimento $\Sigma(t) = \{O(t), E_1(t), E_2(t), E_3(t)\}$ nel quale le forze attive che agiscono sul corpo abbiano momento risultante nullo rispetto ad O . Lo spazio delle configurazioni del corpo rigido di Euler-Poinsot è, come ben noto, $SO(3)$. Tale varietà di dimensione 3 è anche, per quanto dimostrato in Esempio 1.1.4, un gruppo di Lie. Nel caso del corpo rigido di Euler-Poinsot, come vedremo, tale gruppo di Lie è anche il gruppo di simmetria della Lagrangiana del sistema rispetto all'azione sinistra di $SO(3)$ su sé stesso.

Assumiamo che il corpo rigido preso in esame sia formato da $N \geq 3$ punti materiali¹ non allineati P_1, \dots, P_N . La descrizione del sistema può essere fatta introducendo, oltre al sistema di riferimento Σ , detto *spaziale*, un sistema di riferimento $\Sigma' = \{O, E'_1(t), E'_2(t), E'_3(t)\}$ detto *del corpo*, in quanto ad esso solidale.

In generale la configurazione del corpo rigido ad ogni istante t è determinata dalla matrice di rotazione $R(t)$ che manda le coordinate $\mathbf{X}(t)$ rispetto a Σ' di un vettore di \mathbb{V}^3 nelle corrispondenti $\mathbf{x}(t)$ rispetto al riferimento Σ .

$$\mathbf{x}(t) = R(t)\mathbf{X}(t) \quad (3.1)$$

Fissati questi due sistemi di riferimento, il moto del corpo rigido avviene su $SO(3)$, varietà della configurazioni.

3.1 Le mappe di trivializzazione sinistra e destra per un gruppo di Lie G

In quest'ottica, poiché la varietà delle configurazioni del sistema meccanico considerato è $SO(3)$ allora lo spazio delle fasi è $TSO(3)$. Come per ogni gruppo di Lie (G, \cdot) , $TSO(3)$ è diffeomorfo, in due modi naturali, ad $SO(3) \times \mathfrak{so}(3)$.

¹Assumiamo che lo spazio fisico nel quale si muovono i punti materiali sia uno spazio euclideo 3-dimensionale \mathbb{E}^3 con spazio direttore \mathbb{V}^3 come fatto in [16].

Definizione 3.1.1 (Trivializzazione sinistra di TG). Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie. Chiamiamo *mappa di trivializzazione sinistra* la mappa $\lambda_G : TG \rightarrow G \times \mathfrak{g}$ definita da

$$(g, \dot{g}) \mapsto \lambda_G(g, \dot{g}) := (g, d(L_{g^{-1}})_g(\dot{g})) \quad (3.2)$$

per ogni $(g, \dot{g}) \in TG$, la quale ha come inversa $\lambda_G^{-1} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow TG$ con $\lambda_G^{-1}(g, \xi) = (g, d(L_g)_e(\xi))$ per ogni $g \in G, \xi \in \mathfrak{g}$.

In maniera analoga abbiamo la seguente definizione.

Definizione 3.1.2 (Trivializzazione destra di TG). Sia (G, \cdot) un gruppo di Lie. Chiamiamo *mappa di trivializzazione destra* la mappa $\rho_G : TG \rightarrow G \times \mathfrak{g}$ definita da

$$(g, \dot{g}) \mapsto \rho_G(g, \dot{g}) := (g, d(R_{g^{-1}})_g(\dot{g})) \quad (3.3)$$

per ogni $(g, \dot{g}) \in TG$, la quale ha come inversa $\rho_G^{-1} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow TG$ con $\rho_G^{-1}(g, \xi) = (g, d(R_g)_e(\xi))$ per ogni $g \in G, \xi \in \mathfrak{g}$.

Le mappe λ_G e ρ_G sono entrambe diffeomorfismi da TG in $G \times \mathfrak{g}$.

Osservazione 3.1.1. Ci interessa scrivere la versione trivializzata del sollevamento tangente di L su TG : $\Phi_{TL} : G \times (G \times \mathfrak{g}) \rightarrow (G \times \mathfrak{g})$ con $\Phi_{TL}(h, (g, \xi)) := \lambda_G \circ TL_h \circ \lambda_G^{-1}(g, \xi)$. Si può dimostrare che tale mappa è un'azione su $G \times \mathfrak{g}$ che chiamiamo *azione TL trivializzata a sinistra (o destra)* od anche *pushforward di TL tramite λ_G o ρ_G* . Da un calcolo algebrico, sfruttando la Definizione 3.1.1 e l'equazione (1.8), otteniamo che $\Phi_{TL}(h, (g, \xi)) = (hg, \xi)$. Nel caso particolare di $SO(3)$, l'azione TL trivializzata a sinistra è data da

$$\Phi_{TL}(S, (R, \hat{\Omega})) = (SR, \hat{\Omega}) \quad \forall S, R \in SO(3) \quad \forall \hat{\Omega} \in \mathfrak{so}(3) \quad (3.4)$$

Un discorso analogo si può fare anche per l'azione destra di G su sé stesso, ed in tal caso avremmo l'azione *TR trivializzata a sinistra (o destra)* (*pushforward di TR tramite λ_G o ρ_G*).

Sotto l'azione delle mappe (3.2) e (3.3) ciascun atto di moto $(R, \dot{R}) \in TSO(3)$ viene mappato in (R, ω_b) e (R, ω_s) rispettivamente, con ω_b, ω_s dati da

$$\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{g} \ni \omega_s := d(R_{R^{-1}})_R(\dot{R}) = \dot{R}R^{-1} \quad (3.5)$$

$$\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{g} \ni \omega_b := d(L_{R^{-1}})_R(\dot{R}) = R^{-1}\dot{R}. \quad (3.6)$$

Poiché $\omega_s \in \mathfrak{so}(3) = \text{Skew}(3)$, esisterà un vettore $\omega \in \mathbb{R}^3$, detto *velocità angolare spaziale nell'atto di moto* (R, \dot{R}) tale che $\hat{\omega} := \omega_s$. Così facendo, dall'equazione (3.1) otteniamo che

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{R}(t)R(t)^{-1}\mathbf{x}(t) = \hat{\omega}(t)\mathbf{x}(t) = \omega(t) \times \mathbf{x}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Allo stesso modo, poiché $\omega_b \in \mathfrak{so}(3) = \text{Skew}(3)$, esisterà un vettore $\Omega \in \mathbb{R}^3$ detto *velocità angolare del corpo nell'atto di moto* (R, \dot{R}) tale che $\hat{\Omega} := \omega_b$.

Con evidenza, essendo R_h un diffeomorfismo per ogni $h \in G$, il suo differenziale in ogni punto è un isomorfismo e quindi $\hat{R} = d(R_R)_\mathbb{1}(\omega_s)$ da cui si ottiene la relazione che lega ω_s ed ω_b :

$$\omega_b = d(L_{R^{-1}})_R \circ d(R_R)_\mathbb{1}(\omega_s) = \text{Ad}_{R^{-1}} \omega_s. \quad (3.8)$$

Segue che $\Omega = R^{-1}\omega$ in base all'espressione dell'Azione Aggiunta di $SO(3)$ su $\mathfrak{so}(3)$.

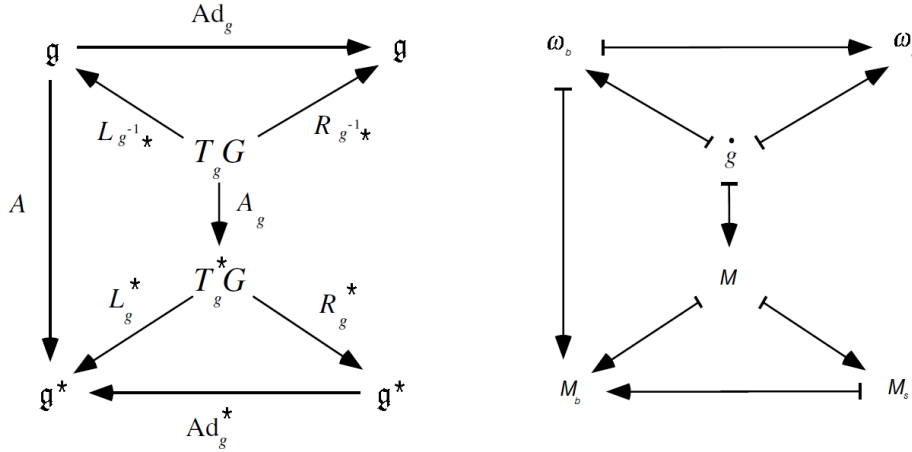


Figura 3.1: Diagramma commutativo per \mathfrak{g} e \mathfrak{g}^* . La mappa differenziale, valutata in un punto p , di un'applicazione liscia $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, $d(F)_p$ si denota anche con $F_*|_p$.

3.2 Metriche invarianti a sinistra e prodotti scalari su \mathfrak{g}

Vladimir Igorevič Arnol'd notò (si veda [14]) che, in un gruppo di Lie (G, \cdot) , esistono tante metriche invarianti a sinistra (Definizione 2.0.11) quante strutture euclidee sull'algebra \mathfrak{g} . Infatti è sufficiente definire in un sol punto, ad esempio nell'identità e , un prodotto scalare reale ed estenderlo poi ad ogni punto del gruppo di Lie mediante traslazione sinistra. Sia dato un operatore lineare $A: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$, detto *operatore d'inerzia*, simmetrico cioè tale che

$$\langle A(\xi), \eta \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle A(\eta), \xi \rangle_{\mathfrak{g}} \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g} \quad (3.9)$$

e definito positivo (la positiva definitezza è richiesta solo per le applicazioni meccaniche, ed è questo il caso) cioè tale che

$$\langle A(\xi), \xi \rangle_{\mathfrak{g}} > 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{g} \setminus \{0\} \quad (3.10)$$

laddove $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ è l'accoppiamento naturale di \mathfrak{g}^* con \mathfrak{g} (Definizione 1.2.11).

Per ogni $g \in G$ definiamo $A_g: T_g G \rightarrow T_g^* G$ nel modo seguente (Figura 3.1)

$$A_g(\xi) := d(L_{g^{-1}})_g^* \circ A \circ d(L_{g^{-1}})_g(\xi) \quad \forall \xi \in T_g G \quad (3.11)$$

Con evidenza, $A_e = A$.

In questo modo, associamo ad ogni punto, in maniera liscia, un prodotto scalare su $T_g G$ per ogni $g \in G$, ovvero una metrica Riemanniana \tilde{g} su G

$$\tilde{g}_g(\xi, \eta) := \langle A_g(\xi), \eta \rangle_{T_g G} \quad \forall \eta, \xi \in T_g G \quad \forall g \in G \quad (3.12)$$

laddove $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_g G}$ è l'accoppiamento naturale di $T_g^* G$ con $T_g G$. Tale metrica è, inoltre,

invariante a sinistra su G . Infatti:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(d(L_h)_g(\xi), d(L_h)_g(\eta))_{hg} &= \langle A_{hg}(d(L_h)_g(\xi)), d(L_h)_g(\eta) \rangle \\
&= \langle d(L_{(hg)^{-1}})_{hg}^* \circ A \circ d(L_{(hg)^{-1}})_{hg}(d(L_h)_g(\xi)), d(L_h)_g(\eta) \rangle \\
&= \langle d(L_{h^{-1}})_{hg}^* \circ d(L_{g^{-1}})_g^* \circ A \circ d(L_{(hg)^{-1}})_{hg}(d(L_h)_g(\xi)), d(L_h)_g(\eta) \rangle \\
&= \langle d(L_{g^{-1}})_g^* \circ A \circ d(L_{(hg)^{-1}})_{hg}(d(L_h)_g(\xi)), d(L_{h^{-1}})_{hg} \circ d(L_h)_g(\eta) \rangle \\
&= \langle d(L_{g^{-1}})_g^* \circ A \circ d(L_{g^{-1}})_g \circ d(L_{h^{-1}})_{hg}(d(L_h)_g(\xi)), \eta \rangle \\
&= \langle d(L_{g^{-1}})_g^* \circ A \circ d(L_{g^{-1}})_g(\xi), \eta \rangle \\
&= \langle A_g(\xi), \eta \rangle \\
&= \tilde{g}(\xi, \eta)_g
\end{aligned} \tag{3.13}$$

per ogni $\xi, \eta \in T_g G$, laddove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota l'accoppiamento naturale dell'opportuno spazio tangente a G .

La trattazione fin qui fatta per le metriche invarianti a sinistra, può essere rifatta anche nel caso di invarianza a destra in maniera del tutto similare. Ciò verrà utilizzato nel Capitolo 4.

3.3 Il caso di $SO(3)$ e l'equazione di Euler per il corpo rigido

Consideriamo, nel caso di $SO(3)$, l'operatore di inerzia $\mathcal{I}_O : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ relativo al punto fisso O espresso nella base $\{E'_1, E'_2, E'_3\}$ di Σ' per \mathbb{V}^3 . Tenendo conto delle identificazioni $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$ e $\mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$ tramite la hat map (Equazione (1.25)) e tramite la breve map (Equazione (1.28)), possiamo definire l'operatore $A : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)^*$ ponendo

$$A := (\hat{\cdot}) \circ \mathcal{I}_O \circ (\cdot)^{-1} \tag{3.14}$$

per $SO(3)$.

Poniamo inoltre $M := A_R \dot{R}$ per ogni $R \in SO(3)$ e chiamiamo tale vettore in $T_R^* SO(3)$ *momento angolare*. Ancora una volta, traslando a sinistra ed a destra il vettore M nell'identità $\mathbb{1}$, otteniamo la definizione di *momento angolare spaziale nell'atto di moto* $(R, \dot{R}) M_s := d(R_R)_{\mathbb{1}}^*(M) \in \mathfrak{so}(3)^*$ e di *momento angolare rispetto al corpo nell'atto di moto* $(R, \dot{R}) M_b := d(L_R)_{\mathbb{1}}^*(M) \in \mathfrak{so}(3)^*$. Si verifica inoltre, da un calcolo, che $M_b = A(\omega_b)$. Se supponiamo $A : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)^*$ invertibile, abbiamo che $\omega_b = A^{-1}(M_b)$.

Applicando il procedimento sopra descritto al caso del corpo rigido di Euler-Poinsot, è possibile determinare esplicitamente la metrica Riemanniana \tilde{g} . Da un calcolo si ottiene

$$\tilde{g}_R(v, w) := \text{tr}(v \mathbb{J} w^T) \quad \text{con } v, w \in T_R SO(3) \tag{3.15}$$

laddove $\mathbb{J} := \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{X}_\alpha \mathbf{X}_\alpha^T$ e \mathbf{X}_α per ogni $\alpha \in \{1, \dots, N\}$ è il rappresentativo del vettore posizione $OP_\alpha \in \mathbb{V}^3$ relativo all' α -esimo punto materiale del corpo rigido nel riferimento Σ' solidale al corpo. Tale metrica è, ovviamente (per (3.13)), invariante a sinistra.

Ricordiamo che l'espressione dell'energia cinetica del corpo rigido di Euler-Poinsot è $T = \frac{1}{2} \mathcal{I}_O \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ espressa nella base $\{E'_1, E'_2, E'_3\}$ di Σ' per \mathbb{V}^3 laddove $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^3$ è il rappresentativo in Σ' del vettore $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{V}^3$, *velocità angolare di Σ' rispetto a Σ* [16]. Questa stessa espressione può essere riscritta nel seguente modo

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \mathcal{I}_O \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \\ &= \frac{1}{2} \langle A(\hat{\boldsymbol{\Omega}}), \hat{\boldsymbol{\Omega}} \rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

laddove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è l'accoppiamento naturale di $\mathfrak{so}(3)^*$ con $\mathfrak{so}(3)$.

Sfruttando l'invarianza a sinistra e tenendo conto del fatto che $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \omega_b$ abbiamo, per ogni $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^3$, che

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \langle A(\hat{\boldsymbol{\Omega}}), \hat{\boldsymbol{\Omega}} \rangle = \frac{1}{2} \langle A(\omega_b), \omega_b \rangle \\ &= \frac{1}{2} \tilde{g}_1(\omega_b, \omega_b) = \frac{1}{2} \tilde{g}_1(d(L_{R^{-1}})_R(\dot{R}), d(L_{R^{-1}})_R(\dot{R})) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{g}_R(\dot{R}, \dot{R}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

per ogni $(R, \dot{R}) \in TSO(3)$.

Non essendoci forze attive ($T = L$), otteniamo la seguente Lagrangiana

$$\begin{aligned} L : TSO(3) &\rightarrow \mathbb{R} \\ L(R, \dot{R}) &:= \frac{1}{2} \tilde{g}_R(\dot{R}, \dot{R}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\dot{R} J \dot{R}^T) \quad \forall (R, \dot{R}) \in TSO(3) \end{aligned} \quad (3.18)$$

In accordo con il Teorema 2.0.1, il moto di un corpo rigido di Euler-Poinsot su $SO(3)$ è una *geodetica della varietà Riemanniana* $SO(3)$ con metrica invariante a sinistra data da (3.15).

Osserviamo ora il seguente fatto centrale: è possibile dimostrare [14] che le geodetiche $t \mapsto R(t)$ della varietà Riemanniana $SO(3)$, vengono mappate nei moti f_t , soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = R(t) \hat{\boldsymbol{\Omega}}(t) \\ \mathcal{I}_O \dot{\boldsymbol{\Omega}}(t) = \mathcal{I}_O \boldsymbol{\Omega}(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t) \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.19)$$

su $SO(3) \times \mathfrak{so}(3)$, dalla trivializzazione sinistra $\lambda_{SO(3)}$ in modo tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} TSO(3) & \xrightarrow{t \mapsto (R(t), \dot{R}(t))} & TSO(3) \\ \lambda_{SO(3)} \downarrow & & \downarrow \lambda_{SO(3)} \\ SO(3) \times \mathfrak{so}(3) & \xrightarrow{f_t} & SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \end{array}$$

Tale osservazione dà prova di come le equazioni (3.19) siano *di fatto* una riscrittura su $SO(3) \times \mathfrak{so}(3)$ delle equazioni del moto di Lagrangiana (3.18). Le equazioni in (3.19) sono dette *equazioni del moto trivializzate a sinistra* per tale Lagrangiana ed assumono tale forma semplificata proprio in virtù dell'invarianza a sinistra di (3.18) [12].

La prima equazione del sistema (3.19) permette, noto $\boldsymbol{\Omega}(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, di ricostruire il moto $t \mapsto R(t)$ ed è pertanto detta *formula di ricostruzione* [12].

La seconda equazione, detta equazione di Euler per il corpo rigido, è un'equazione del moto sull'algebra $\mathfrak{so}(3)$. Notiamo che tale equazione può essere riscritta, tenendo conto dell'Equazione (1.52) e dell'Equazione (3.14) nel seguente modo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A(\omega_b(t))) &= \frac{d}{dt}(\mathcal{I}_O \boldsymbol{\Omega}(t)) = \text{ad}_{\boldsymbol{\Omega}(t)}^*(\mathcal{I}_O \boldsymbol{\Omega}(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ &= \text{ad}_{\omega_b(t)}^*(A(\omega_b(t))). \end{aligned} \quad (3.20)$$

od, alternativamente, in termini di momento angolare $M_b(t) \in \mathfrak{so}(3)^*$

$$\frac{d}{dt}(M_b(t)) = \text{ad}_{A^{-1}M_b(t)}^*(M_b(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.21)$$

Riscriviamo un'ultima volta tale equazione in un'ulteriore forma utile per la successiva applicazione idrodinamica. Se introduciamo l'operatore B definito, per un gruppo di Lie (G, \cdot) dotato di una metrica Riemanniana \tilde{g} , da $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$

$$\tilde{g}_e([a, b], c) = \tilde{g}_e(\text{ad}_a b, c) := \tilde{g}_e(B(c, a), b) \quad \forall b \in \mathfrak{g} \quad (3.22)$$

l'equazione (3.20), in $SO(3)$, diviene

$$\frac{d}{dt}(\omega_b(t)) = B(\omega_b(t), \omega_b(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.23)$$

Per approfondimenti consultare [1].

Osservazione 3.3.1. Non a caso, scegliendo la trivializzazione sinistra λ , il pushforward del sollevamento tangente TL su $TSO(3)$ tramite λ è un'azione sotto la quale le equazioni in (3.19) non cambiano. Infatti $\Phi_{TL}(S, (R(t), \Omega(t))) = (SR(t), \Omega(t))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ da cui

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{R}(t) = R(t)\hat{\Omega}(t) \\ \mathcal{I}_O\dot{\Omega}(t) = \mathcal{I}_O\Omega(t) \times \Omega(t) \end{cases} &\xrightarrow{\Phi_{TL}} \begin{cases} S\dot{R}(t) = SR(t)\hat{\Omega}(t) \\ \mathcal{I}_O\dot{\Omega}(t) = \mathcal{I}_O\Omega(t) \times \Omega(t) \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \dot{R}(t) = R(t)\hat{\Omega}(t) \\ \mathcal{I}_O\dot{\Omega}(t) = \mathcal{I}_O\Omega(t) \times \Omega(t) \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ricapitolando, ad ogni geodetica della varietà Riemanniana, $SO(3)$, $t \mapsto R(t)$, corrispondono dunque quattro curve

$$\omega_b(t) \in \mathfrak{so}(3), \quad M_b(t) \in \mathfrak{so}(3)^*, \quad \omega_s(t) \in \mathfrak{so}(3), \quad M_s(t) \in \mathfrak{so}(3)^* \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.25)$$

che soddisfano le equazioni sopra descritte e, per le ultime due, la seconda equazione cardinale della Meccanica, $\frac{dM_s(t)}{dt}|_{\Sigma} = 0$ [16].

Da un punto di vista più generale, per descrivere una geodetica su un qualunque gruppo di Lie (G, \cdot) con metrica invariante da qualche lato, "riportiamo" il vettore velocità $\dot{g}(t)$ della curva sull'algebra usando la traslazione opportuna, a seconda dell'invarianza della metrica (od equivalentemente della Lagrangiana). In questo modo otteniamo una legge di evoluzione per il vettore velocità sull'algebra di Lie \mathfrak{g} (vedere seconda equazione di (3.19)). Questo è ciò che faremo anche nel caso idrodinamico nel Capitolo successivo.

Capitolo 4

L'idrodinamica dei fluidi perfetti

Per *fluido* si intende una sostanza, od una miscela di sostanze, che, sotto l'azione di uno sforzo di taglio, si deforma illimitatamente. Nella trattazione seguente i fluidi verranno trattati in un'ottica classica ed assumeremo, inoltre, che siano composti da unità puntiformi fondamentali dette *particelle*.

Il più semplice, ma anche il più efficace, modello da cui partire per la descrizione della dinamica di un fluido è il modello fisico del *fluido perfetto od ideale*. In tale modello i fluidi sono considerati *omogenei, inviscidi*, ovvero privi di viscosità, e non in grado di scambiare calore con l'ambiente esterno. Supporremo, in aggiunta, che tali fluidi siano *incomprimibili*. Lo studio della dinamica del fluido, sotto queste ipotesi, viene chiamato *idrodinamica*.

Supponiamo di aver scelto un sistema di riferimento per la descrizione fisica del fluido, nel quale esso non sia soggetto a forze esterne, quali ad esempio forze di volume. Ipotizziamo che il fluido stesso sia contenuto in un aperto¹ \mathcal{M} sufficientemente regolare di \mathbb{R}^3 . Esiste un'equazione, ricavata per la prima volta da Euler nel 1755 e la cui derivazione fisica è reperibile in [2], che lega il campo di velocità $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, la densità $\rho(x, y, z, t)$ e la pressione² $p(x, y, z, t)$ del fluido per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $(x, y, z) \in \mathcal{M}$

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)}(\mathbf{grad} p(\mathbf{x}, t)) \quad (4.1)$$

laddove \mathbf{grad} è l'usuale gradiente in \mathbb{R}^3 . L'equazione (4.1), di importanza fondamentale per la fluidodinamica ed, in particolare, per l'idrodinamica, è nota come *equazione di Euler per i fluidi ideali ed incomprimibili*. Vi è un'ulteriore ipotesi fisica a cui deve sottostare il campo di velocità $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ dell'equazione (4.1): l'impenetrabilità della superficie di bordo. Matematicamente, questa assunzione viene tradotta dall'imposizione che il campo vettoriale $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ sia tangente al bordo $\partial\mathcal{M}$ dell'aperto regolare $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Lo scopo di questo Capitolo è di mostrare come, seguendo la Teoria di Arnol'd [7], vi sia un'analogia evidente fra la dinamica del corpo rigido di Euler-Poinsot in $SO(3)$ e l'idrodinamica di un fluido perfetto in uno spazio n -dimensionale.

Iniziamo con due definizioni fondamentali.

¹Immaginiamo tale aperto \mathcal{M} come il recipiente nel quale è contenuto il liquido ideale ed incomprimibile.

²Quest'ultima è bene definita nel caso del fluido *ideale* come specificato in [5].

Definizione 4.0.1 (Forma od elemento di volume). Chiamiamo *forma di volume* od *elemento di volume* su una n -varietà \mathcal{M} , $n \in \mathbb{N}$, una n -forma differenziale $\nu \in \Omega^n(\mathcal{M})$ mai nulla.

Definizione 4.0.2 (Diffeomorfismo che preserva l'elemento di volume). Siano \mathcal{M} , \mathcal{N} due n -varietà, $n \in \mathbb{N}$, munite delle forme di volume $\mu_{\mathcal{M}} \in \Omega^n(\mathcal{M})$ e $\mu_{\mathcal{N}} \in \Omega^n(\mathcal{N})$. Diciamo che un diffeomorfismo fra varietà $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ preserva l'elemento di volume se $F^*\mu_{\mathcal{N}} = \mu_{\mathcal{M}}$. Qui il pullback F^* mappa k -forme in \mathcal{N} in k -forme in \mathcal{M} nel modo seguente

$$F^*\mu_{\mathcal{N}_p}(v_1, \dots, v_n) := (\mu_{\mathcal{N}})_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_n)) = (\mu_{\mathcal{M}})_p(v_1, \dots, v_n)$$

per ogni $p \in \mathcal{M}$, per ogni $v_1, \dots, v_n \in T_p\mathcal{M}$.

Ciò detto, illustriamo nel dettaglio l'idea di fondo.

Sia (\mathcal{M}, \tilde{g}) varietà Riemanniana dotata di una forma di volume μ (non necessariamente quella Riemanniana); supponiamo che il fluido preso in esame riempra tale varietà. Consideriamo un'arbitraria configurazione di riferimento delle particelle del fluido, in cui ciascuna di esse è identificabile con un punto di \mathcal{M} . Ogni altra configurazione del fluido si ottiene da tale configurazione di riferimento tramite un diffeomorfismo di \mathcal{M} in sé che preserva l'elemento di volume.

$$SDiff(\mathcal{M}) := \{g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \mid g \text{ sia diffeomorfismo, } g^*\mu = \mu\}. \quad (4.2)$$

È possibile mostrare che $SDiff(\mathcal{M})$ è un gruppo di Lie infinito-dimensionale rispetto alla composizione [7]³. Il flusso del fluido è descritto da una curva $t \mapsto g_t$, laddove g_t è un diffeomorfismo di \mathcal{M} in sé che mappa la posizione iniziale al tempo 0 di ciascuna particella del fluido nella posizione al tempo $t \in \mathbb{R}$. In altre parole ogni diffeomorfismo $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ che preserva l'elemento di volume costituisce una *configurazione* del sistema fisico rappresentato dal fluido perfetto ed incompressibile nella varietà \mathcal{M} .

Osservazione 4.0.2. Tratteremo i gruppi di Lie di dimensione infinita come gruppi di Lie di dimensione finita a tutti gli effetti⁴. Per questa ragione bisogna tener presente che buona parte dei risultati esposti presenta, nelle dimostrazioni, problemi analitici non banali. Alla luce di tutto ciò, la strategia da noi utilizzata sarà la seguente. Dopo aver osservato che certi fatti e risultati valgono in dimensione finita, essi verranno usati per riformulare la questione nel caso infinito-dimensionale di $SDiff(\mathcal{M})$. Alcuni di questi risultati possono essere provati altri ancora sono tuttora oggetto di ricerca.

Essendo $G = SDiff(\mathcal{M})$ un gruppo di Lie, è possibile considerarne la sua algebra di Lie, \mathfrak{g} . Si dimostra che tale algebra di Lie coincide con

$$SVect(\mathcal{M}) := \{v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) : \operatorname{div}_{\mu}(v) = 0, v \text{ tangente a } \partial\mathcal{M}^5\} \quad (4.3)$$

laddove div_{μ} è la divergenza⁶ [6, 15] associata alla forma di volume μ .

³Considereremo, nel seguito, soltanto i diffeomorfismi che possono essere connessi con l'identità tramite una famiglia continua di cammini, cioè considereremo la componente connessa all'identità di $SDiff(\mathcal{M})$, ovvero $SDiff_0(\mathcal{M})$. Continueremo a usare la notazione $SDiff(\mathcal{M})$, rimandando a [7] per una distinzione più accurata.

⁴Una possibile soluzione a quest'ultimo problema è quella di modellare la varietà \mathcal{M} su uno spazio di *Frechet* come suggerito in [13]. Non diremo nulla di più su questo argomento, la cui trattazione è al di fuori degli scopi di questa tesi.

⁵Nell'eventualità si consideri \mathcal{M} varietà con bordo [7].

⁶In generale, la divergenza rispetto ad una forma di volume μ è definita da $\operatorname{div}_{\mu}(v) := \mathcal{L}_v(\mu)$ per ogni $v \in SVect(\mathcal{M})$ laddove $\mathcal{L}_v(\mu)$ è la derivata di Lie di μ lungo il campo vettoriale v .

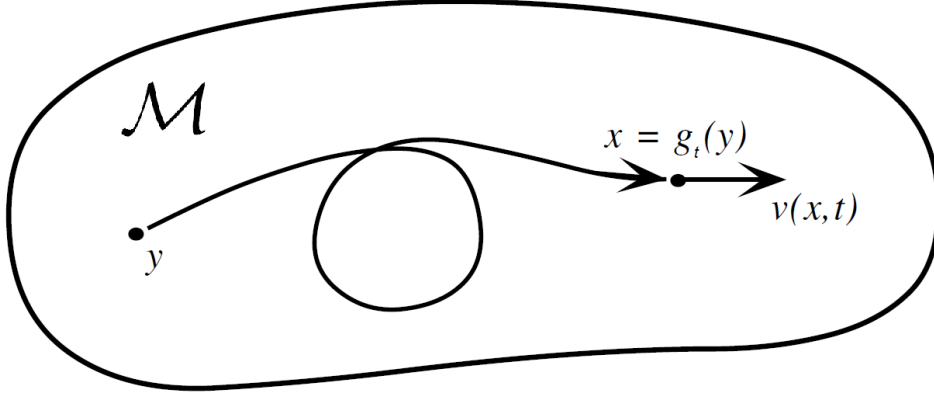


Figura 4.1: Il moto di una particella di fluido in \mathcal{M} .

Essendo il fluido preso in esame incomprimibile, possiamo assumere ragionevolmente che la densità sia costante, che per semplicità poniamo ad uno. L'energia cinetica del sistema fisico rappresentato dal fluido ideale ed incomprimibile su (\mathcal{M}, \tilde{g}) è data da

$$T = \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2} v^2 \mu = \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2} \tilde{g}(v, v) \mu \quad (4.4)$$

laddove $v \in \mathfrak{SVect}(\mathcal{M})$ è il campo di velocità del fluido con $v(x, t) = \frac{\partial g_t(y)}{\partial t}$, $x = g_t(y)$. In questo caso y è la posizione iniziale, x la posizione al tempo t (vedere Figura 4.1). Tale campo di velocità è un campo vettoriale in \mathcal{M} , che appartiene a $\mathfrak{SVect}(\mathcal{M})$ [7]. Diamo la seguente definizione.

Definizione 4.0.3 (prodotto scalare su $\mathfrak{g} = \mathfrak{SVect}(\mathcal{M})$). Sia (\mathcal{M}, \tilde{g}) una n -varietà Riemanniana con elemento di volume μ . La metrica Riemanniana \tilde{g} di \mathcal{M} definisce un prodotto scalare su $\mathfrak{g} = \mathfrak{SVect}(\mathcal{M})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$\langle v, w \rangle_{\mathfrak{g}} := \int_{\mathcal{M}} \tilde{g}(v, w) \mu \quad \forall v, w \in \mathfrak{SVect}(\mathcal{M}) \quad (4.5)$$

Dunque l'energia cinetica può essere vista come derivante da un prodotto scalare su \mathfrak{g} . Per tale ragione è possibile, in analogia con quanto fatto nella sottosezione 3.2 per le metriche invarianti a sinistra, definire una metrica invariante a destra su $S\text{Diff}(\mathcal{M})$, detta *metrica indotta da* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$.

Teorema 4.0.1. *Il prodotto scalare su $\mathfrak{g} = \mathfrak{SVect}(\mathcal{M})$ (Equazione (4.5)) definisce una metrica su $S\text{Diff}(\mathcal{M})$ invariante a destra (Definizione 2.0.11).*

Dimostrazione. Vedere [7]. □

In definitiva, è possibile definire sul gruppo di Lie $S\text{Diff}(\mathcal{M})$ una metrica invariante a destra, la cui scrittura esplicita non è elementare (per ulteriori dettagli consultare [7]).

In accordo con Teorema 2.0.1, i flussi di un fluido ideale ed incomprimibile $t \mapsto g_t$ su una varietà Riemanniana \mathcal{M} sono le geodetiche della varietà Riemanniana $S\text{Diff}(\mathcal{M})$ con metrica indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$. Le equazioni del moto del sistema, di cui le geodetiche sono soluzioni, si riscrivono nell'algebra di Lie $\mathfrak{SVect}(\mathcal{M})$ tramite la trivializzazione *destra*, ottenendo la legge di evoluzione del campo di velocità del fluido ideale, detta *equazione di Euler o di Euler-Arnold*. Il procedimento è analogo a quello del corpo rigido di Euler-Poinsot.

Concludiamo con le seguenti osservazioni, utili nella sezione successiva.

Osservazione 4.0.3. Sia (\mathcal{M}, \tilde{g}) varietà Riemanniana. Nel caso di $S\text{Diff}(\mathcal{M})$, l'operatore aggiunto ad $: S\text{Vect}(\mathcal{M}) \times S\text{Vect}(\mathcal{M}) \rightarrow S\text{Vect}(\mathcal{M})$ è definito da

$$\text{ad}_v w := -[v, w]_{\mathfrak{X}(\mathcal{M})} \in S\text{Vect}(\mathcal{M}) \quad \forall v, w \in S\text{Vect}(\mathcal{M}) \quad (4.6)$$

laddove, a differenza di quanto accade in Proposizione 1.3.1, il segno meno che compare nella formula (4.6) è dovuto all'invarianza a destra in questo caso, a sinistra nel caso del corpo rigido di Euler-Poinsot e della trattazione del Capitolo primo.

Osservazione 4.0.4. Sia (\mathcal{M}, \tilde{g}) varietà Riemanniana. Per quanto riguarda l'operatore B in $S\text{Vect}(\mathcal{M})$, la definizione è del tutto simile: $B : S\text{Vect}(\mathcal{M}) \times S\text{Vect}(\mathcal{M}) \rightarrow S\text{Vect}(\mathcal{M})$ è tale che

$$\langle \text{ad}_v w, z \rangle_{S\text{Vect}(\mathcal{M})} = \langle -[v, w]_{\mathfrak{X}(\mathcal{M})}, z \rangle_{S\text{Vect}(\mathcal{M})} := \langle B(z, v), w \rangle_{S\text{Vect}(\mathcal{M})} \quad (4.7)$$

per ogni $w \in S\text{Vect}(\mathcal{M})$, laddove $\langle \cdot, \cdot \rangle_{S\text{Vect}(\mathcal{M})}$ è il prodotto scalare sull'algebra $S\text{Vect}(\mathcal{M})$ definito in (4.5).

A patto di determinare l'operatore B , è possibile dunque ottenere l'equazione di Euler (corrispondente a (3.23)) per un fluido ideale ed incomprimibile sull'algebra di Lie $S\text{Vect}(\mathcal{M})$, con (\mathcal{M}, \tilde{g}) varietà Riemanniana, nel seguente modo:

$$\frac{dv}{dt} = -B(v, v) \quad \text{con} \quad v \in S\text{Vect}(\mathcal{M}) \quad (4.8)$$

laddove la presenza del segno meno rispetto a (3.23) deriva dall'invarianza a destra della metrica [14].

4.1 L'equazione di Euler per l'idrodinamica

Lo scopo di quest'ultima sezione è quello di ricavare l'equazione di Euler per i fluidi ideali ed incomprimibili (4.1). Consideriamo l'usuale elemento di volume di \mathbb{R}^3 (dx) e l'usuale operatore di divergenza (div) in \mathbb{R}^3 .

Tutto si riduce alla determinazione della forma esplicita dell'operatore B , nel caso in cui \mathcal{M} sia un aperto sufficientemente regolare di \mathbb{R}^3 . Da una ben nota identità vettoriale⁷ abbiamo che

$$\mathbf{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = a \text{div}(\mathbf{b}) - b \text{div}(\mathbf{a}) + [\mathbf{b}, \mathbf{a}]_{\mathfrak{X}(\mathcal{M})} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \quad (4.9)$$

laddove \mathbf{rot} è l'usuale operatore differenziale di rotore in \mathbb{R}^3 . Nel caso di campi a divergenza nulla la (4.9) si riduce a

$$\mathbf{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]_{\mathfrak{X}(\mathcal{M})} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S\text{Vect}(\mathcal{M}) \quad (4.10)$$

Ciò detto, dimostriamo il seguente teorema riguardante la forma esplicita dell'operatore B introdotto in Osservazione 4.0.4 nel caso dell'idrodinamica in un aperto di \mathbb{R}^3 . Tale risultato è deducibile da un più generale teorema, dimostrato in [7], che riguarda l'idrodinamica in varietà Riemanniane n -dimensionali. Qui diamo una dimostrazione del calcolo esplicito dell'operatore B per l'idrodinamica in un aperto di \mathbb{R}^3 .

Teorema 4.1.1 (Operatore B per l'idrodinamica in un aperto di \mathbb{R}^3). *Sia \mathcal{M} aperto sufficientemente regolare di \mathbb{R}^3 , $B : S\text{Vect}(\mathcal{M}) \times S\text{Vect}(\mathcal{M}) \rightarrow S\text{Vect}(\mathcal{M})$, l'operatore definito nell'Osservazione 4.0.4. Allora per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in S\text{Vect}(\mathcal{M})$*

$$B(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \mathbf{rot} \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{grad} p \quad (4.11)$$

⁷È un'identità la cui dimostrazione è reperibile in [7]

Dimostrazione. In base alla definizione dell'operatore B (Osservazione 4.0.4) abbiamo, per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in SVect(\mathcal{M})$, che

$$\begin{aligned} \langle B(\mathbf{a}, \mathbf{c}), \mathbf{b} \rangle &= \langle \text{ad}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \\ &= \langle [\mathbf{b}, \mathbf{a}]_{x(\mathcal{M})}, \mathbf{c} \rangle \\ &= \langle \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \mathbf{c} \rangle. \end{aligned} \quad (4.12)$$

laddove si è posto, per semplicità, $\langle \cdot, \cdot \rangle \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle_{SVect(\mathcal{M})}$.
A questo punto vogliamo provare che

$$\langle \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \mathbf{c} \rangle = \langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \text{rot}(\mathbf{c}) \rangle \quad (4.13)$$

per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in SVect(\mathcal{M})$. Dalla definizione di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ((4.5)), ciò è equivalente a provare che

$$\int_{\mathcal{M}} \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \, dx = \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \text{rot}(\mathbf{c}) \, dx \quad (4.14)$$

per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in SVect(\mathcal{M})$. Sfruttando la ben nota identità vettoriale

$$\text{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\text{rot}(\mathbf{v})) - \mathbf{v} \cdot (\text{rot}(\mathbf{w})) \quad (4.15)$$

per \mathbf{v}, \mathbf{w} campi vettoriali in \mathbb{R}^3 , otteniamo che la (4.14) è equivalente a

$$\int_{\mathcal{M}} \text{div}((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \, dx = 0 \quad (4.16)$$

per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in SVect(\mathcal{M})$. Usando il Teorema della Divergenza otteniamo che la (4.16) è equivalente a

$$\int_{\partial\mathcal{M}} [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = 0 \quad (4.17)$$

per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in SVect(\mathcal{M})$, laddove $d\sigma$ è l'elemento di superficie di \mathcal{M} , $\hat{\mathbf{n}}$ il versore normale uscente dal bordo $\partial\mathcal{M}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ campi vettoriali in $SVect(\mathcal{M})$.

Poiché $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sono campi vettoriali tangenti al bordo $\partial\mathcal{M}$, tale è anche $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, dunque la condizione espressa in (4.17) è senz'altro soddisfatta.

In conclusione, la (4.12) si riscrive

$$\begin{aligned} \langle B(\mathbf{a}, \mathbf{c}), \mathbf{b} \rangle &= \langle \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \mathbf{c} \rangle \\ &= \langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \text{rot}(\mathbf{c}) \rangle \\ &= \langle \text{rot}(\mathbf{c}) \times \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle. \end{aligned} \quad (4.18)$$

per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in SVect(\mathcal{M})$.

Imponendo ora che $B(\mathbf{c}, \mathbf{a}) \in SVect(\mathcal{M})$ abbiamo che $B(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \text{rot}(\mathbf{c}) \times \mathbf{a}$ modulo il gradiente di una funzione p in \mathcal{M} , ottenuta soltanto dalla condizione che $\text{div}(B(\mathbf{c}, \mathbf{a})) = 0$ e che $B(\mathbf{c}, \mathbf{a})$ sia tangente a $\partial\mathcal{M}$ per ogni $\mathbf{c}, \mathbf{a} \in SVect(\mathcal{M})$, ossia che $B(\mathbf{c}, \mathbf{a}) \in SVect(\mathcal{M})$ per ogni $\mathbf{c}, \mathbf{a} \in SVect(\mathcal{M})$. In definitiva, otteniamo

$$B(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \text{rot}(\mathbf{c}) \times \mathbf{a} + \text{grad} p \quad \forall \mathbf{c}, \mathbf{a} \in SVect(\mathcal{M}) \quad (4.19)$$

Nel caso particolare in cui $\mathbf{a} = \mathbf{c} \equiv \mathbf{v} \in SVect(\mathcal{M})$ abbiamo

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \text{rot}(\mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \text{grad} p \quad \forall \mathbf{v} \in SVect(\mathcal{M}) \quad (4.20)$$

□

Alla luce di quanto appena dimostrato, l'equazione (4.8) diviene quindi

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{rot}(\mathbf{v}) - \mathbf{grad} p \quad \text{con} \quad \mathbf{v} \in SVect(\mathcal{M}) \quad (4.21)$$

con p funzione di \mathcal{M} definita dalla condizione che $\text{div}(\mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v})) = 0$, $\mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ sia tangente a $\partial\mathcal{M}$ per ogni $\mathbf{v} \in SVect(\mathcal{M})$. Tenendo conto dell'identità vettoriale

$$\frac{1}{2}\mathbf{grad} v^2 = \mathbf{v} \times \mathbf{rot}(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} \quad \text{con} \quad \mathbf{v} \in SVect(\mathcal{M}) \quad (4.22)$$

l'equazione (4.21) può essere riscritta nella forma seguente

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} - \mathbf{grad}(p - \frac{1}{2}v^2). \quad (4.23)$$

Ricordando che $\rho = 1$ per il fluido incomprimibile considerato, la (4.23) coincide con (4.1) a meno di una ridefinizione della funzione p . Abbiamo ricavato l'equazione di Euler per l'idrodinamica dei fluidi perfetti ed incomprimibili in un aperto regolare di \mathbb{R}^3 .

Osservazione 4.1.1. Notiamo che l'equazione (4.20) per l'operatore \mathbf{B} può essere generalizzata per n -varietà Riemanniane \mathcal{M} trovando che l'operatore $\mathbf{B} : SVect(\mathcal{M}) \times SVect(\mathcal{M}) \rightarrow SVect(\mathcal{M})$ è dato da

$$\mathbf{B}(v, v) = \nabla_v v + \mathbf{grad} p \quad \text{con} \quad v \in SVect(\mathcal{M}) \quad (4.24)$$

laddove $\nabla_v v$ denota la derivata covariante del campo vettoriale v lungo il campo vettoriale v , ∇ la connessione di Levi-Civita di \mathcal{M} , \mathbf{grad} il gradiente definito su \mathcal{M} [15]. Un enunciato preciso di tale risultato (4.24) per n -varietà è reperibile in [7].

<i>Group</i>	<i>Metric</i>	<i>Equation</i>
SO(3)	$\langle \omega, A\omega \rangle$	Euler top
SO(3) \times \mathbb{R}^3	quadratic forms	Kirchhoff equation for a body in a fluid
SO(n)	Manakov's metrics	n -dimensional top
Diff(S^1)	L^2	Hopf (or, inviscid Burgers) equation
Virasoro	L^2	KdV equation
Virasoro	H^1	Camassa–Holm equation
Virasoro	\dot{H}^1	Hunter–Saxton (or Dym) equation
SDiff(M)	L^2	Euler ideal fluid
SDiff(M)	H^1	averaged Euler flow
SDiff(M) \times SVect(M)	$L^2 + L^2$	Magnetohydrodynamics
Maps($S^1, \text{SO}(3)$)	H^{-1}	Heisenberg magnetic chain

Figura 4.2: Equazioni di Euler e rispettivi gruppi di Lie. La scelta di un gruppo e di un'opportuna metrica definisce la corrispondente equazione di Euler.

Conclusioni

L'applicazione della Teoria dei gruppi di Lie per la derivazione di equazioni di Euler è una tecnica standard e generale. Nella presente tesi ci si è limitati a studiare i casi del corpo rigido di Euler-Poinsot e dell'idrodinamica di un fluido perfetto ed incompressibile in un aperto di \mathbb{R}^3 . Tuttavia tale metodo può essere opportunamente generalizzato: molti sistemi conservativi in Fisica Matematica vengono descritti mediante flussi geodetici su opportuni gruppi di Lie rispetto ad un'opportuna metrica invariante. In Figura 4.2 vi è una lista di equazioni derivabili con questo tipo di approccio. Per approfondimenti vedere [7, 13].

Bibliografia

- [1] V.I.Arnol'd, *On the differential geometry of infinite-dimensional Lie groups and its applications to the hydrodynamics of perfect fluids*, Traduzione di *Annales de L'Institut Fourier*, Volume **16**, No.1, 319-361, 1966, Traduzione dal Francese a cura di Alain Chenciner
- [2] L.D.Landau, E.M.Lifshitz, *Fluid Mechanics: Volume 6 of Course of Theoretical Physics*, Pergamon Press Ltd., Terza Edizione, 1966, Traduzione dal Russo a cura di J.B.Sykes, W.H.Reid
- [3] D.Ebin, J.E.Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the notion of an incompressible fluid*, *Ann.of Math.*, (2) **92** (1970), 102-163
- [4] R.Abraham, J.E.Marsden con assistenza di T.S.Ratiu, R.Cushman, *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Canada, 1978
- [5] A.Chorin, J.E.Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag New York, Inc., 1992
- [6] John M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag New York, Inc., 1997
- [7] V.I.Arnol'd, B.A.Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics*, Springer-Verlag New York, Inc., 1998
- [8] J.E.Marsden, T.S.Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanics*, Seconda Edizione, Springer-Verlag New York, Inc., 1998
- [9] J.E.Marsden, T.S.Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanics*, Seconda Edizione, Springer-Verlag New York, Inc., 1998
- [10] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer Science+Business Media, New York, 2003
- [11] B.A.Khesin, *Topological Fluid Dynamics*, Note da American Mathematical Society (AMS), Gennaio 2005
- [12] D.D.Holm, T.Schmah, C.Stoica, *Geometric Mechanics and Symmetry: From Finite to Infinite Dimensions*, Oxford University Press, Oxford, 2009
- [13] B.A.Khesin, R.Wendt, *The Geometry of Infinite-Dimensional Groups*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009
- [14] V.I.Arnol'd, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti University Press, Roma, 2010, Traduzione dal Russo a cura di Roberto Bernieri e Brunello Tirozzi

- [15] M.Abate, F.Tovena, *Geometria Differenziale*, Springer-Verlag Italia, 2011
- [16] F.Fassò, *Dispense per il corso di Istituzioni di Fisica Matematica per il corso di laurea triennale in Fisica A.A.2014-2015* Coop.Libreria Editrice Università di Padova (CLEUP), Padova, 2015