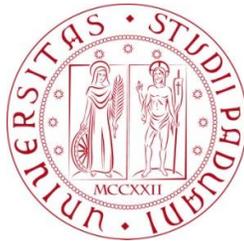


Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Scienze Statistiche
Corso di Laurea Triennale in
STATISTICA, ECONOMIA E FINANZA



RELAZIONE FINALE
UNIT ROOT TESTS

TEST A RADICE UNITARIA

Relatore: Ch.mo Prof. Silvano Bordignon
Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureando: Alberto Talpo
Matricola N 1051660

Anno Accademico 2014/2015

Indice

Introduzione	5
Capitolo 1 : Test di radice unitaria: Generalità	7
Capitolo 2: Test di Dickey-Fuller - DF test	
2.1 Caratteristiche	12
2.2 Simulazione distribuzioni	16
2.3 Applicazione a serie simulate	
2.3.1 Randow walk senza drift	18
2.3.2 Randow walk con drift	20
2.3.3 Processo con trend lineare	24
2.4 Applicazione ad una serie finanziaria	26
2.5 Applicazione ad una serie economica	29
Capitolo 3: Test di Dickey-Fuller aumentato - ADF test	
3.1.1 Proprietà	33
3.1.2 Scelta dell'ordine del processo	34
3.2 Applicazione ad una serie economica	35
3.3 Applicazione ad una serie finanziaria	40
Capitolo 4: Test di Phillips-Perron - PP test	
4.1 Peculiarità	43
4.2 Applicazione ad una serie economica	46
4.3 Applicazione ad una serie finanziaria	49
Capitolo 5: Test di Kwiatkowski,Phillips,Schmidt,Shin - KPSS test	
5.1 Caratteristiche	52
5.2 Simulazione distribuzioni	55
5.3 Applicazione ad una serie economica	57
5.4 Applicazione ad una serie finanziaria	59

Capitolo 6: Test di Elliot, Rothenberg e Stock - ERS tests	
6.1 Caratteristiche	61
6.2 Point optimal test - P_T test	
6.2.1 Proprietà	62
6.2.2 Applicazione ad una serie economica	63
6.2.3 Applicazione ad una serie finanziaria	64
6.3 Test DF-GLS	
6.3.1 Caratteristiche	66
6.3.2 Applicazione ad una serie economica	66
6.3.3 Applicazione ad una serie finanziaria	68
Capitolo 7: Test di Schmidt-Phillips - SP test	
7.1 Peculiarità	69
7.2 Applicazione ad una serie economica	70
7.3 Applicazione ad una serie finanziaria	71
Capitolo 8: Test di Zivot-Andrews - ZA test	
8.1 Caratteristiche	73
8.2 Applicazione ad una serie economica	75
8.3 Applicazione ad una serie finanziaria	77
Capitolo 9:	
Verifica dei limiti dei test ADF e PP	80
Conclusioni	86
Appendice	88
Bibliografia	90
Ringraziamenti	92

Introduzione

In molti ambiti risulta essere molto importante lo studio dell'andamento di fenomeni visti sotto un orizzonte di lungo periodo. Gli strumenti utili e versatili impiegati per tali scopi sono le **serie storiche**. Ogni serie è espressa da un generale processo stocastico in grado di descrivere il suo *processo generatore dei dati* (DGP), portandola ad assumere la seguente forma:

$$Y_t = f(t) + u_t$$

dove:

- $f(t)$ è la parte *deterministica*, ovvero completamente prevedibile;
- u_t invece è la parte *stocastica* in quanto segue delle leggi probabilistiche.

Nei campi economico e finanziario, molte serie sono in un'ottica generale **non stazionarie**, dettate dalla presenza di una componente tendenziale di fondo denominata *trend*. Tale entità può assumere la configurazione di trend *deterministico* o trend *stocastico*. La differenza risiede nel tipo di funzione che lo descrive; nel primo si trova una relazione non aleatoria, mentre nel secondo una funzione meramente variante nel tempo in modo casuale. La distinzione del trend risulta particolarmente importante per capire se il già menzionato *processo generatore dei dati* (DGP) è **trend-stazionario** (T-S) o **differenza-stazionario** (D-S).

Si ha un processo trend-stazionario se sottraendo alla serie storica Y_t la sua componente deterministica $f(t)$, si ottiene un processo stazionario. Nel caso di un differenza-stazionario, togliendo ad Y_t il suo primo ritardo Y_{t-1} , si ottiene una serie temporale stazionaria per la presenza di un trend stocastico.

E.g. si consideri la serie: $Y_t = TD_t + \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

Ipotizzando che la componente deterministica TD_t sia pari a $\alpha_0 + \alpha_1 t$, bisogna stimare il valore di questo trend deterministico lineare e sottrarlo alla serie di partenza perché sia stazionaria.

Infatti: $Y_t - TD_t = \epsilon_t$, chiaramente stazionaria sia in media sia in varianza in quanto il termine d'errore ϵ_t è inteso come un processo stocastico stazionario.

Applicando l'operatore differenza $\Delta = 1 - B$, si ottiene invece:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \alpha_1 + \epsilon_t - \epsilon_{t-1}.$$

Il processo possiede la stazionarietà, ma assume la forma di un MA(1) non invertibile con media α_1 . Quest'ultima procedura non è corretta per rendere la serie stazionaria in quanto è stata introdotta una radice unitaria. Inoltre, ΔY_t è chiamata sovra-differenziata poiché si è instaurata la sovra-differenziazione.

Iniziando da un modello Random walk con drift invece:

$Y_t = \alpha_0 + Y_{t-1} + \epsilon_t$, il modo corretto per il detrending si ha usando Δ . Quindi: $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \alpha_0 + \epsilon_t$, una serie stazionaria con valore atteso α_0 . Pensando di determinare $TD_t = \alpha_0 t$, in quanto un RW con drift è interpretabile anche come:

$$Y_t = Y_0 + \alpha_0 t + \sum_{i=0}^{t-1} \epsilon_{t-i},$$

e poi toglierlo dal processo, si provoca

la sotto-differenziazione, dato che il trend stocastico $\sum_{i=0}^{t-1} \epsilon_{t-i}$ si elimina solo tramite differenza.

Test di Radice Unitaria

Generalità

I test di radice unitaria sono dei tipi di test che vengono usati per stabilire se la serie temporale in esame presenta una radice unitaria al suo interno, la quale permette di affermare se il *processo generante i dati* risulta essere, come sopra citato, **trend-stazionario** oppure **differenza-stazionario**.

La discriminazione è necessaria ad una corretta individuazione sull'implementazione della procedura di detrendizzazione (*detrending*) da seguire, all'utilità in campo economico-finanziario sulle interpretazioni delle variazioni consistenti di lungo periodo, a caratteristiche peculiari degli assets quali il *mean-reverting behavior*, ovvero la tendenza dei titoli finanziari ad oscillare attorno alla media ed a molti altri fattori macro-economici, nonché dei mercati finanziari. Nel caso in cui la serie storica Y_t in oggetto d'analisi sia trend-stazionaria (T-S), la sua struttura è la seguente:

$Y_t = TD_t + \epsilon_t$ ove $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, un processo aleatorio a media nulla e componenti incorrelate tra loro.

Per ipotesi semplicistiche, è ragionevole supporre un trend deterministico al più lineare, cioè: $TD_t = \alpha_0 + \alpha_1 t$.

Il caso opposto prevede che la serie abbia un processo D-S, differenza-stazionario. Quindi assumerà la forma di:

$Y_t = \delta_0 + Y_{t-1} + \epsilon_t$. Ipotizzando che ϵ_t sia un white noise (WN), il modello di tale serie viene ricondotto ad un *Random Walk con drift* (δ_0 potrebbe essere nulla ed Y_t sarebbe un *Random walk privo di costante*).

Le istruzioni sottostanti simulano i grafici principali di un ar1 con radice uguale a 0.5 e un random walk con costante pari a 0.9:

```
T <- 300
```

```
#AR(1)
```

```
ar1 <- arima.sim(list(order = c(1,0,0), ar = 0.5), n = T)
```

```
par(mfrow = c(2,2))
```

```
plot(ar1, type = "l", xlab = "Tempo")
```

```
acf(ar1, lag.max = T/4)
```

```
pacf(ar1, lag.max = T/4)
```

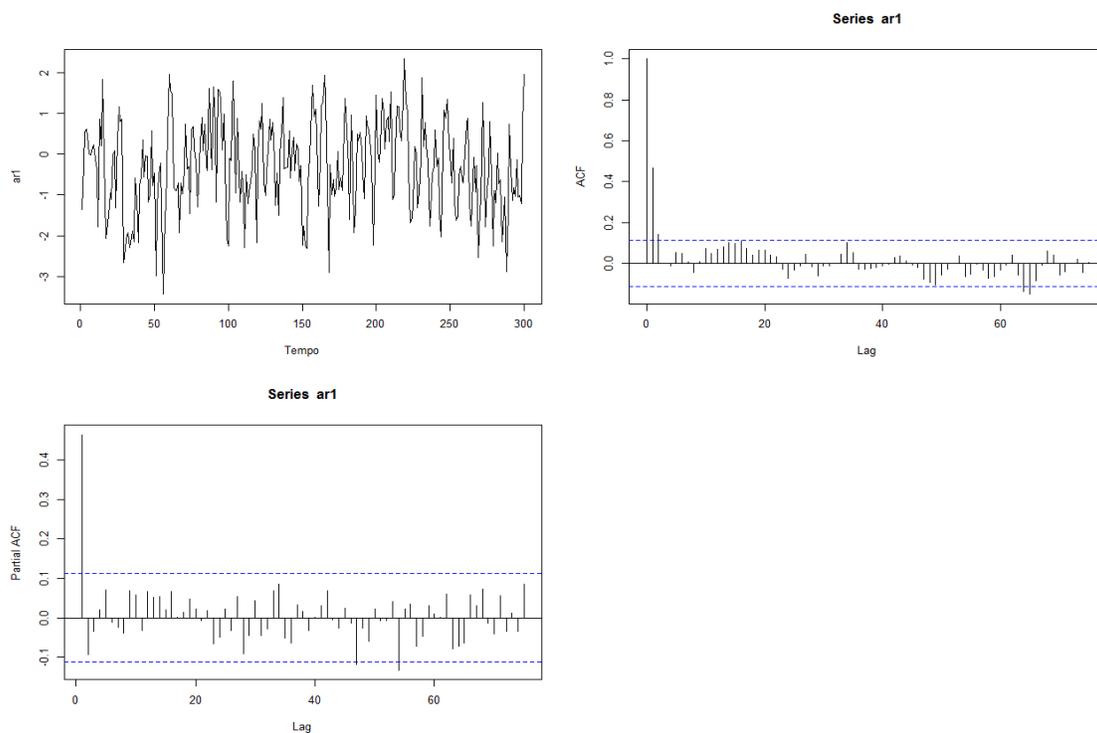


Figura 1. Simulazione serie, ACF e PACF di un processo AR(1) con $\phi = 0.5$.

```
#Random walk con drift
```

```
x <- rnorm(T) + 0.9
```

```
rw <- cumsum(x)
```

```
par(mfrow = c(3,2))
```

```
plot(rw, type = "l", xlab = "Tempo")
```

```

acf(rw, lag.max = T/4)
pacf(rw, lag.max = T/4)
plot(diff(rw), type = "l", xlab = "Tempo")
acf(diff(rw), lag.max = T/4)
pacf(diff(rw), lag.max = T/4)

```

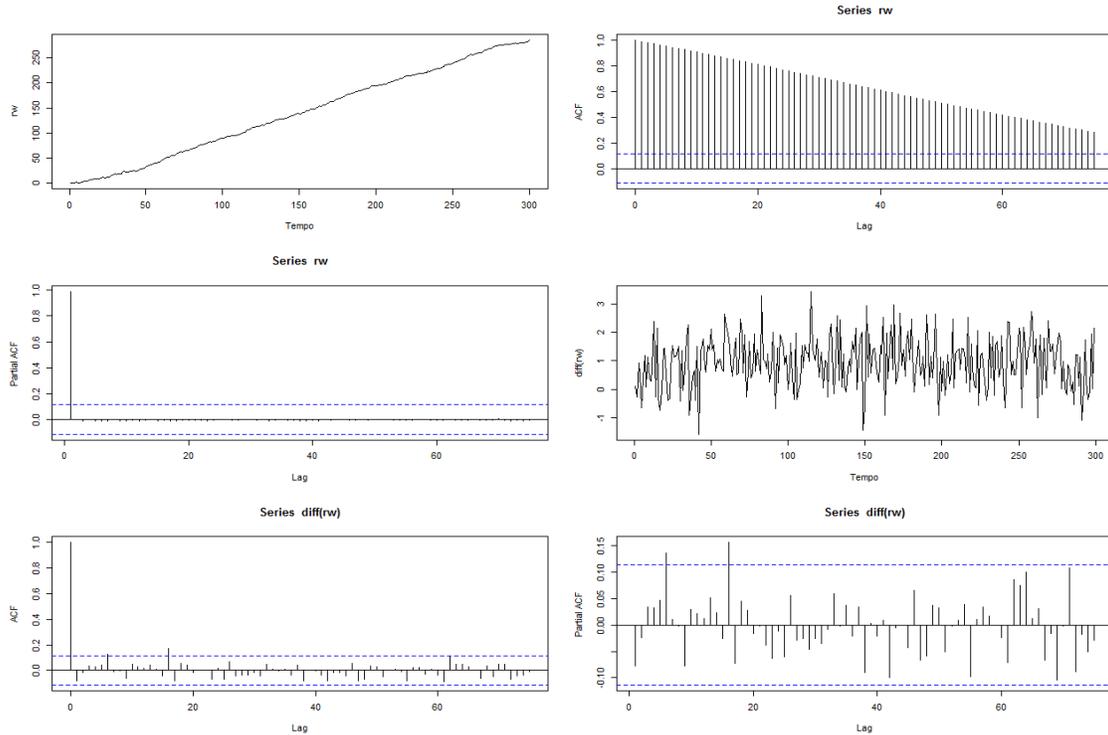


Figura 2. Simulazione serie, ACF e PACF di un processo Random walk con drift e Random walk con drift a cui è stato applicato l'operatore differenza prima ΔY_t per indurlo ad essere stazionario.

Riprendendo i modelli $Y_t = \delta_0 + Y_{t-1} + \epsilon_t$ ed $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \epsilon_t$, è molto flessibile ed agevole combinarli nel modello congiunto: $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \nu_t$, dove: $\nu_t = \phi \nu_{t-1} + \epsilon_t$, ϵ_t processo aleatorio con valore atteso nullo e componenti incorrelate.

Dalle opportune trasformazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \alpha_0 + \alpha_1 t + \phi \nu_{t-1} + \epsilon_t = \\
 &= \alpha_0 + \alpha_1 t + \phi(Y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_1(t-1)) + \epsilon_t = \\
 &= \alpha_0(1 - \phi) + \alpha_1 \phi + \alpha_1(1 - \phi)t + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t
 \end{aligned}$$

Si sopraggiunge alla struttura finale di Y_t :

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t,$$

$$\text{con: } \beta_0 = \alpha_0(1 - \phi) + \alpha_1 \phi;$$

$$\beta_1 = \alpha_1(1 - \phi).$$

Da quest'ultima serie storica, si nota che:

- Se $\phi = 1$, si ottiene un Random Walk con drift, poichè:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + Y_{t-1} + \epsilon_t, \text{ o meglio: } \beta_0 = \alpha_1, \beta_1 = 0,$$

$$\text{implicando: } Y_t = \alpha_1 + Y_{t-1} + \epsilon_t.$$

Questo modello è dunque **differenza - stazionario**;

- Se $|\phi| < 1$, la serie in esame diviene: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$,
ossia un modello chiaramente **trend - stazionario**.

L'attenzione viene posta sulla verifica se la radice ϕ è in modulo minore di uno o uguale ad esso.

Un'ulteriore considerazione può essere fatta se viene applicato l'operatore $\Delta = 1 - B$ alla serie Y_t , in quanto:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 t + \phi Y_{t-1} - Y_{t-1} + \epsilon_t =$$

$$= \beta_0 + \beta_1 t + (\phi - 1)Y_{t-1} + \epsilon_t, \text{ ottenendo:}$$

$$W_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 t + \varphi Y_{t-1} + \epsilon_t.$$

L'analogia col processo aleatorio di prima deriva dal fatto che verificare $\varphi = 0$ è la medesima congettura di $\phi = 1$ nel modello non differenziato appunto.

Finora si è supposto che la componente deterministica fosse uguale a $\alpha_0 + \alpha_1 t$, però potrebbe essere necessario considerare ulteriori modelli da cui partire per la selezione, tra i quali:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \nu_t \text{ oppure il più semplice:}$$

$$Y_t = \alpha_0 + \nu_t, \text{ dove in ciascuno } \nu_t = \phi \nu_{t-1} + \epsilon_t.$$

Scegliendo quest'ultimo, reiterando il processo precedentemente utilizzato, si perviene a:

$$Y_t = \alpha_0(1 - \phi) + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$Y_t = \beta_0 + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t, \beta_0 = \alpha_0(1 - \phi).$$

- Se effettivamente $|\phi| < 1$, il processo assume la forma:

$$Y_t = \beta_0 + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t, \text{ puramente } \mathbf{T-S};$$

- Se $\phi = 1$, esso si presenta come:

$$Y_t = Y_{t-1} + \epsilon_t, \mathbf{D-S} \text{ con } \beta_0 = 0.$$

"Complicando leggermente" la situazione, nel *DGP* avente:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \nu_t, \text{ l'operazione rimane la stessa:}$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t, \text{ comprendente:}$$

$$- \beta_0 = \alpha_0(1 - \phi) + \phi(\alpha_1 - \alpha_2);$$

$$- \beta_1 = \alpha_1(1 - \phi) + 2\phi\alpha_2 \text{ ed infine}$$

$$- \beta_2 = \alpha_2(1 - \phi).$$

Analizzando come già fatto prima, con $\phi = 1$,

$$Y_t = (\alpha_1 - \alpha_2) + 2\alpha_2 t + Y_{t-1} + \epsilon_t,$$

assolutamente **differenza-stazionario** (presenta un trend stocastico ed uno deterministico quadratico).

Con $|\phi| < 1$, $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$, cioè **trend-stazionario**.

L'analisi potrebbe essere applicata a qualunque serie temporale scelta come punto di partenza, costituita da una funzione polinomiale di grado k (i cui parametri dipendono da ϕ), il primo ritardo di Y_t e la componente erratica ϵ_t , ma si arriverebbe all'unica comune considerazione: testare se ϕ sia o meno pari ad 1. Tali tipi di *test* vengono chiamati **Test di radice unitaria** (unit root tests). Essendo stati implementati da *David A. Dickey* e *Wayne A. Fuller*, assumono il nome di **Test di Dickey - Fuller**.

Essi sono stati costruiti attorno ai seguenti modelli:

$$- Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t;$$

$$- Y_t = \alpha_0 + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t;$$

$$- Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t.$$

I test DF (acronimo di Dickey-Fuller) si rifanno dunque a serie storiche distribuite secondo un *modello autoregressivo* AR(1).

Test di Dickey - Fuller - DF test

I test di Dickey - Fuller servono a stabilire se un modello presenta una radice ϕ unitaria, tanto da selezionare se si parla di processo **differenza-stazionario** o **trend-stazionario**. Si è visto che essi si basano su un AR(1). Di seguito si analizzeranno tutti i possibili casi a cui tale test DF può essere applicato, ovvero per primo quando il processo autogressivo di ordine $r = 1$ possiede media nulla (i.e. $\alpha_0 = 0$); successivamente quando è presente il termine $TD_t = \alpha_0$ ed infine dove $TD_t = \alpha_0 + \alpha_1 t$.

2.1 Caratteristiche

Si consideri la serie temporale: $Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$.

Le ipotesi da verificare, sono:

- $H_0 : \phi = 1$ (i.e. $Y_t \sim I(1)$);
- $H_1 : |\phi| < 1$ (i.e. $Y_t \sim I(0)$).

Se H_1 risulta vera, allora le usuali statistiche convergono asintoticamente (Hamilton (1994) pg. 216):

- $\sqrt{T}(\hat{\phi} - \phi) \sim N(0, 1 - \phi^2)$;
- $t = \frac{\hat{\phi} - 1}{SE(\hat{\phi})} \sim N(0, 1)$, dove per ognuna: $\hat{\phi} \sim N(\phi, \frac{1}{T}(1 - \phi^2))$.

In H_0 , esse sono funzioni di particolari processi stocastici a tempo continuo chiamati *moti Browniani standard* o *processi di Wiener*. Un *processo di Wiener* $W(\cdot)$ è un processo stocastico a tempo continuo associante ad ogni dato $r \in [0, 1]$ una variabile casuale scalare (o reale) $W(r)$ soddisfacente:

1. $W(0) = 0$;
2. $\forall 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq 1$ le differenze $W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_k) - W(t_{k-1})$ sono variabili normali indipendenti dove $W(s) - W(t) \sim N(0, (s - t))$;

3. $W(s)$ risulta essere continua in s .

Un processo browniano può essere costruito attraverso lo *scaling limit* di un Random walk o con altri processi stocastici a tempo discreto con incrementi stazionari indipendenti. Ciò è in accordo col *teorema di Donsker*.

Alcune proprietà di un moto Browniano sono:

1. $W(r) \sim N(0, r)$;
2. $\sigma W(r) \sim N(0, r\sigma^2)$ (chiuso alle trasformazioni di scala);
3. $W(r)^2 \sim r\chi^2(1)$

Nell'ipotesi di non stazionarietà, $\hat{\phi}$ si distribuirebbe approssimativamente come una $N(1, 0)$, il che sarebbe impossibile e non avrebbe alcun senso. Phillips (1987) ha dimostrato che i momenti campionari di Y_t convergono alle seguenti funzioni di moti Browniani:

$$\begin{aligned}
 - T^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^T y_{t-1} &\sim \sigma \int_0^1 W(r) dr; \\
 - T^{-2} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2 &\sim \sigma^2 \int_0^1 W(r)^2 dr; \\
 - T^{-1} \sum_{t=1}^T y_{t-1} \epsilon_t &\sim \sigma^2 \int_0^1 W(r) dW(r).
 \end{aligned}$$

Egli ha provato inoltre che, laddove $\phi = 1$:

$$\begin{aligned}
 1. T(\hat{\phi} - 1) &\sim \frac{\int_0^1 W(r) dW(r)}{\int_0^1 W(r)^2 dr}; \\
 2. t_{\hat{\phi}=1} &\sim \frac{\int_0^1 W(r) dW(r)}{\left(\int_0^1 W(r)^2 dr\right)^{1/2}}.
 \end{aligned}$$

La 2. viene chiamata *Dickey-Fuller distribution* (DF) e non ha una forma rappresentativa precisa. I quantili di suddetta distribuzione devono essere ottenuti da approssimazioni numeriche o con simulazioni. La 1. invece è detta *normalized bias distribution* la quale, rispetto alla precedente, possiede una definita distribuzione limitata tant'è che non dipendendo da alcun parametro di disturbo, si può usarla come statistica test per verificare l'ipotesi d'unitarietà di ϕ .

Dalle distribuzioni emergono delle considerazioni importanti:

1. $\hat{\phi}$ è super consistente in quanto converge in probabilità al vero valore ϕ con T al posto di $T^{\frac{1}{2}}$;
2. $\hat{\phi}$ non risulta essere distribuito asintoticamente come una variabile gaussiana, così come $t_{\phi=1}$ non converge asintoticamente alla normale standardizzata.

La dimostrazione della convergenza di $T(\hat{\phi} - 1)$ è qui riportata:

Si è detto che, sotto H_0 , $T(\hat{\phi} - 1) \sim \frac{\int_0^1 W(r)dW(r)}{\int_0^1 W(r)^2 dr}$.

Posto $y_0 = 0$, la serie Y_t può essere riscritta come: $y_t = \sum_{t=1}^T \epsilon_t$.

Essendo allora: $E[Y_t] = 0$ e $Var[Y_t] = Var[\sum_{t=1}^T \epsilon_t] = \sum_{t=1}^T Var[\epsilon_t] = \sigma^2 t$, in quanto si suppone ϵ_t siano variabili casuali *i.i.d.* (indipendenti e identicamente distribuite) come una $N(0, \sigma^2)$:

$$(\hat{\phi} - 1) = \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} \epsilon_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}$$

Poichè: $y_t^2 = (y_{t-1} + \epsilon_t)^2 \implies y_{t-1}\epsilon_t = \frac{1}{2}(y_t^2 - y_{t-1}^2 - \epsilon_t^2)$, segue che:

$$\sum_{t=1}^T y_{t-1}\epsilon_t = \frac{1}{2}(y_T^2 - y_0^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \epsilon_t^2.$$

Pertanto, dividendo il numeratore per T , si ottiene:

$$\frac{1}{\sigma^2 T} \sum_{t=1}^T y_{t-1}\epsilon_t = \frac{1}{2} \left(\frac{y_T}{\sigma\sqrt{T}} \right)^2 - \frac{1}{2\sigma^2 T} \sum_{t=1}^T \epsilon_t^2 \sim \frac{1}{2}(Z - 1),$$

$$Z = \left(\frac{y_T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \sim \chi^2(1), \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \epsilon_t^2 \xrightarrow{p} \sigma^2. \quad \text{Poichè: } y_{t-1} \sim N(0, (t-1)\sigma^2),$$

il valore atteso del denominatore $\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2$ è pari a:

$$E\left(\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2\right) = \sigma^2 \sum_{t=1}^T t - 1 = \sigma^2 T(T - 1).$$

Dividendo il denominatore di $\hat{\phi} - 1$ per T^2 , si ha:

$$T(\hat{\phi} - 1) = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{t-1}\epsilon_t}{\frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}. \quad \text{Se: } \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{t-1}\epsilon_t \sim \frac{\sigma^2}{2} W(1)^2 - \frac{\sigma^2}{2} \equiv \omega_1 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2 &\sim \sigma^2 \int_0^1 W(r)^2 dr \equiv \omega_2, \quad \text{allora: } T(\hat{\phi} - 1) \sim \frac{\omega_1}{\omega_2} = \\ &= \frac{\frac{\sigma^2}{2} W(1)^2 - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2 \int_0^1 W(r)^2 dr} = \frac{\frac{1}{2}(W(1)^2 - 1)}{\int_0^1 W(r)^2 dr} = \frac{\int_0^1 W(r) dW(r)}{\int_0^1 W(r)^2 dr} \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

I test di Dickey-Fuller, sono calcolati considerando la serie prima differenziata ΔY_t , la cui verifica si basa perciò su $\varphi = (1 - \phi) = 0$.

2.2 Simulazioni distribuzioni DF e Normalized bias

Per simulare le distribuzioni $t_{\hat{\phi}=1}$ e $T(\hat{\phi} - 1)$, si usa il seguente codice, il quale produce un'estrazione randomizzata delle funzioni dei moti Browniani a cui le due distribuzioni convergono sotto H_0 :

```
wiener <- function(nobs) #ciclo per la creazione del processo di Wiener
{ e <- rnorm(nobs)
y <- cumsum(e)
ym1 <- y[1:(nobs-1)]
intw2 <- nobs^(-2)* sum(ym1^2)
intwdw <- nobs^(-1) * sum(ym1 * e[2:nobs])
ans <- list(intw2=intw2, intwdw=intwdw)
ans }
```

Poi, il sottostante ciclo genera le distribuzioni:

```
#Ciclo per la creazione delle DF e Normalized bias distribuzioni
```

```
nobs <- 1000
```

```
nsim <- 1000
```

```
df <- rep(0,nsim) #Dickey-Fuller distribution
```

```
nb <- rep(0,nsim) #Normalized bias distribution
```

```
for(i in 1:nsim)
```

```
{ bn_moments <- wiener(nobs)
```

```
nb[i] <- bn_moments$intwdw/bn_moments$intw2
```

```
df[i] <- bn_moments$intwdw/sqrt(bn_moments$intw2)}
```

Per ottenere i due istogrammi relativi alle distribuzioni appena create, si è usufruito delle seguenti istruzioni:

```
hist(nb, col = "grey", ylab = "", main = "Distribuzione Normalizzata Distorta")
```

```
hist(df, col = "grey", ylab = "", main = "Distribuzione Dickey-Fuller").
```

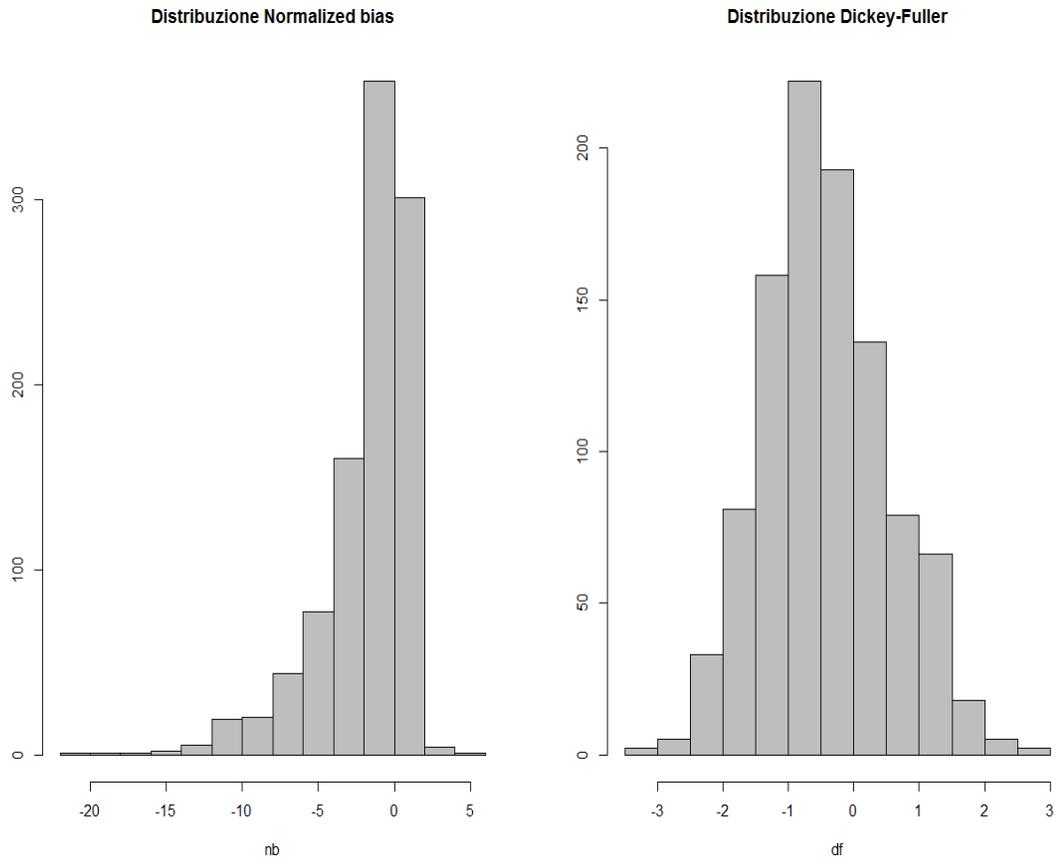


Figura 3. Grafico delle distribuzioni normalized bias e Dickey-Fuller.

Dal grafico, si nota che la *DF* è asimmetrica verso sinistra rispetto alla normale standardizzata; mentre la *normalized bias* è altamente asimmetrica nel medesimo verso e non si distribuisce come una variabile aleatoria normale.

I quantili empirici delle due statistiche sono rispettivamente:

```
quantile(df, probs = c(0.01,0.05,0.1))
```

1% 5% 10%

-2.531104 -1.810071 -1.520122

```
quantile(nb, probs = c(0.01,0.05,0.1))
```

1% 5% 10%

-13.569639 -7.083673 -5.100377

Essendo la simulazione dei valori critici e dei *p-values* molto lunga, il linguaggio R incorpora all'interno della libreria *urca* dei metodi chiamati *punitroot* e *qunitroot* per svolgere i suddetti compiti, basandosi sull'algoritmo di Mackinnon (1996). (Di seguito *nc* significa privo di costante).

Tali procedure portano ad ottenere i dati:

```
n <- 100 #numerosità del campione
qunitroot(c(0.01,0.05,0.1), trend = "nc", statistic = "n",n) #nb
-13.085720 -7.787147 -5.565243
punitroot(qnorm(0.05), trend = "nc", statistic = "n",n)
0.3704592
qunitroot(c(0.01,0.05,0.1), trend = "nc", statistic = "t",n) #df
-2.588477 -1.944068 -1.614656
punitroot(qnorm(0.05), trend = "nc", statistic = "t",n)
0.09420497, qnorm(0.05) è il quantile 0.05 di una v.c.  $N(0, 1)$ .
```

2.3 Applicazione test DF su serie simulate

2.3.1 Randow walk privo di costante

Si costruisce ora una serie storica intesa come un randow walk senza drift simulato da una variabile casuale normale, per riprodurre il test di radice unitaria.

Il codice è quindi:

```
T <- 300
x <- rnorm(T)
y <- cumsum(x)
plot(y, type = "l", xlab = "tempo", main = "Randow Walk senza
drift") #Disegna il processo Random Walk privo di drift simulato
```

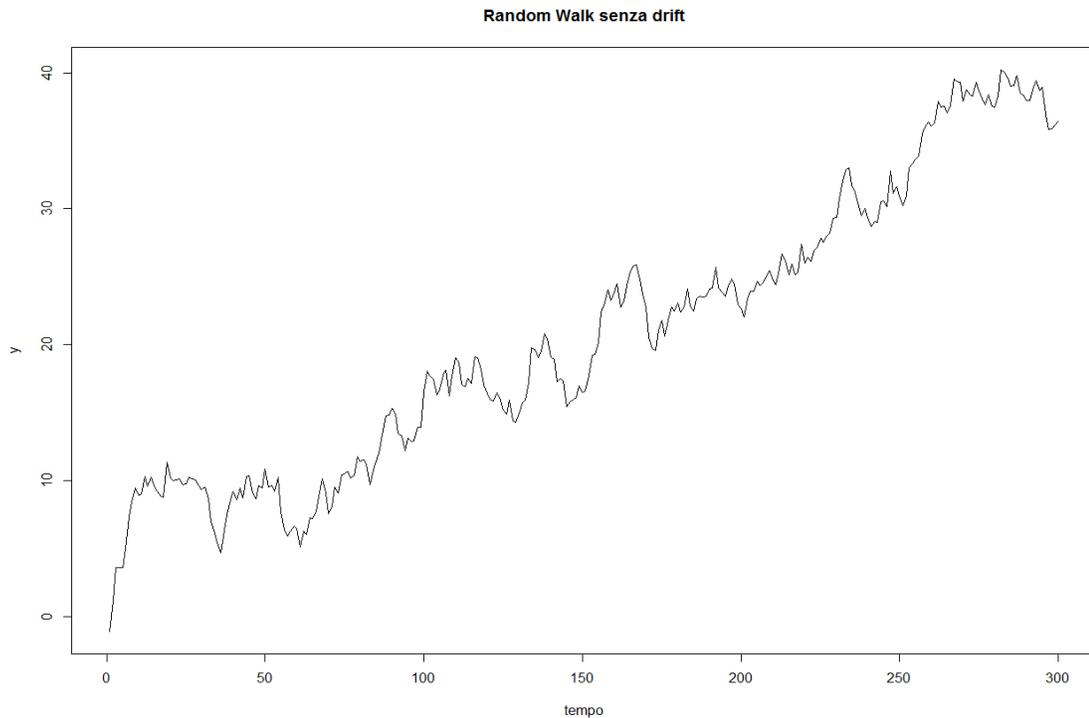


Figura 4. Random Walk puro.

Il test di radice unitaria DF è implementato tramite una delle librerie che R mette a disposizione per gli *unit root tests* citata poco fa: *urca*. In tale libreria, è presente un comando chiamato **ur.df** che permette di costruire sia il DF sia l'*Augmented DF*, ADF, generalizzazione del DF stesso:

```
library(urca)
df1 <- ur.df(y, type = "none", lags = 0)
summary(df1)
```

Test regression none

Call: `lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1)`

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
z.lag.1	0.003321	0.002405	1.381	0.168

Value of test-statistic is: 1.3808

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau1	-2.58	-1.95	-1.62

Esso genera il valore della statistica test $t_{\phi=1}$ con i relativi *q-values* tabulati. Si rifiuta H_0 se $t_{\phi=1}^{oss} = 1.3808 < DF(t_{\phi=1})$, dove $DF(t_{\phi=1})$ indica il valore simulato di t . Dall'output prodotto da `ur.df()`, si nota che l'ipotesi nulla $\phi = 1$ non viene significativamente rifiutata. Ha senso supporre che il processo presenti una radice pari ad 1 al suo interno, in accordo col modello della serie temporale usato per l'analisi (ossia il Random Walk puro sopra creato).

2.3.2 Random Walk con drift

In questo caso, Y_t assumerebbe la forma di: $Y_t = \alpha_0 + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$.

Il sistema d'ipotesi rimane:

$$H_0 : \phi = 1;$$

$$H_1 : |\phi| < 1.$$

Poiché nell'ipotesi nulla si suppone che la serie temporale segua un processo Random walk privo di drift e nell'alternativa essa sia un processo stazionario con eventuale valore atteso diverso da 0, allora le reali implicazioni da saggiare sarebbero:

$$H_0 : (\alpha_0, \phi) = (0, 1) \text{ (i.e. } \phi = 1, \alpha_0 = 0);$$

$$H_1 : |\phi| < 1 \text{ e/o } \alpha_0 \neq 0.$$

Le usuali distribuzioni convergenti ai processi di Wiener sono influenzate dalla presenza, non dal valore, del termine deterministico nella regressione. Quest'affermazione varrà anche nel caso che si discuterà dopo, cioè quando Y_t presenta una componente deterministica lineare. Una considerazione molto importante da fare stabilisce che nel caso in cui i dati osservati non esibiscano incrementi o decrementi nel trend, le ipotesi nulla ed alternativa devono riflettere ciò. Lo studio del test su un modello AR(1) con costante è molto utile per le serie finanziarie nelle quali non risulta essere necessario l'inclusione di un elemento deterministico lineare, come gli spread, i tassi di cambio ed i tassi d'interesse.

I quantili ed i relativi α^{oss} (*p-values*) delle distribuzioni di Dickey-Fuller e *Normalized bias* sono ottenuti attraverso i comandi:

```
qunitroot(c(0.01,0.05,0.1), trend = "c", statistic = "n",n) #nb
-19.49098 -13.53287 -10.87986
```

```
punitroot(qnorm(0.05), trend = "c", statistic = "n",n)
0.8172186
```

```
qunitroot(c(0.01,0.05,0.1), trend = "c", statistic = "t",n) #DF
-3.497007 -2.890614 -2.582360
```

```
punitroot(qnorm(0.05), trend = "c", statistic = "t",n)
0.456049.
```

Si implementa ora, su una serie storica costruita come un processo Random Walk con costante α_0 uguale a 0.6, il test DF in esame:

```
T <- 300
```

```
x2 <- rnorm(T) + 0.6
```

```
y2 <- cumsum(x2)
```

```
plot(y2, type = "l", main = "Random Walk con drift", xlab = "tempo")
```

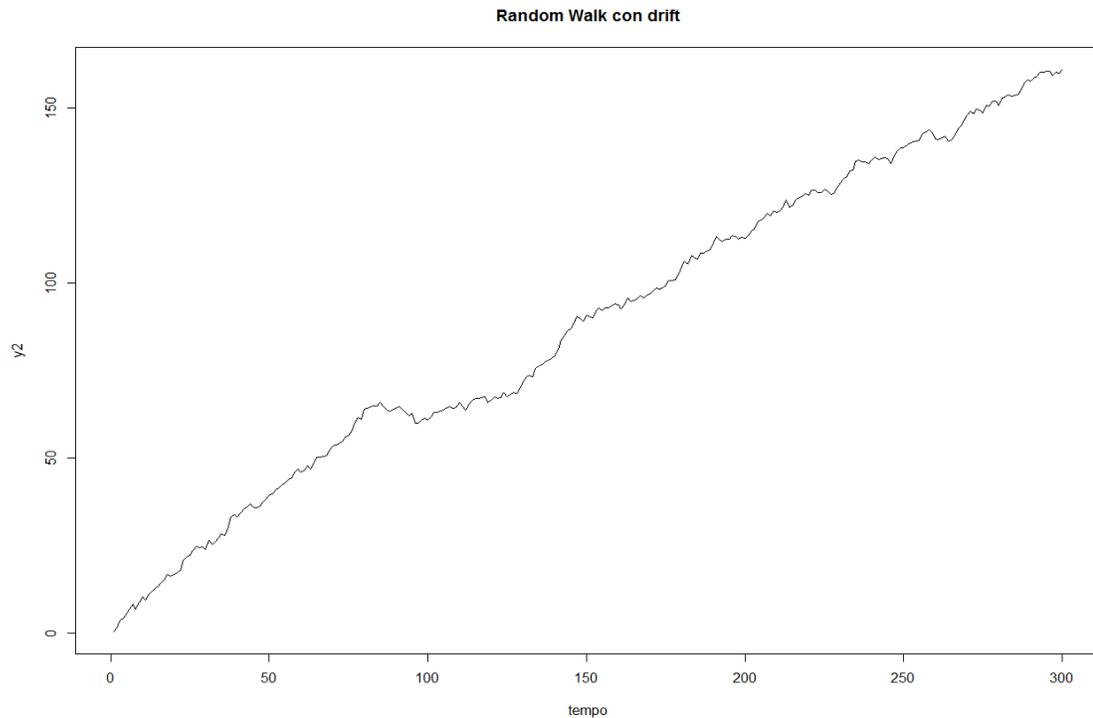


Figura 5. Random walk con costante.

```
library(urca)
df2 <- ur.df(y2, type = "drift", lags = 0)
summary(df2)
Test regression drift
Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.73595	0.12378	5.945	7.73e-09
z.lag.1	-0.00228	0.00126	-1.810	0.0714

Value of test-statistic is: -1.8096 48.2151

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau2	-3.44	-2.87	-2.57
phi1	6.47	4.61	3.79

La statistica test $t_{\phi=1}$ assume il valore di -1.8096, dunque, confrontandola coi quantili simulati, si nota che il processo presenta una radice unitaria in quanto H_0 non viene rifiutata. Per poter saggiare l'ipotesi congiunta $(\alpha_0, \phi) = (0, 1)$, occorre usare un test F con la forma:

$$\phi_1 = \frac{(SSR_1 - SSR_0)/p - p_0}{SSR_0/(T - p)}, \text{ dove:}$$

SSR_1 è la somma dei quadrati dei residui del modello sotto H_0 ;
 SSR_0 è la somma dei quadrati dei residui del modello sotto H_1 ;
 p il numero dei parametri del modello non vincolato e p_0 di quello vincolato.

Sotto H_0 , esso non è distribuito come una *F di Fisher* (se $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$) o asintoticamente come un χ^2 . I valori sono stati tabulati da Dickey- Fuller (1981). Nel processo che si sta studiando, il valore della statistica ϕ_1 risulta essere pari a 48.2151; confrontandolo con i quantili riportati dal metodo ur.df() (denominati phi1), ci si accorge che l'ipotesi viene significativamente rigettata, in quanto $|\phi_1^{oss}| > DF(\phi_1)$. Il test DF porta a dire che Y_t è un processo Random Walk con drift; infatti, si è proprio partiti da tale modello per lo studio e la verifica dei risultati del suddetto test.

2.3.3 Processo con componente deterministica lineare

L'ultima analisi riguarda la serie il cui processo d'analizzare coinciderebbe con la successiva rappresentazione:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t.$$

Il sistema d'ipotesi iniziale rimane sempre lo stesso, però sotto quella nulla, il modello assume le sembianze di un Random walk con drift; mentre sotto l'alternativa ha la forma di un processo trend-stazionario con media diversa da 0.

Perciò, la giusta formulazione di H_0 e H_1 è:

$$H_0 : (\alpha_0, \alpha_1, \phi) = (\alpha_0, 0, 1);$$

$$H_1 : \alpha_0 \neq 0 \text{ e/o } \alpha_1 \neq 0 \text{ e/o } |\phi| < 1 \text{ (i.e. } \bar{H}_0).$$

Le verifiche congiunte da poter saggiare assumono la struttura di:

$$H_0 : (\alpha_0, \alpha_1, \phi) = (\alpha_0, 0, 1) \text{ e}$$

$$H_0 : (\alpha_0, \alpha_1, \phi) = (0, 0, 1).$$

Si costruisce la serie simulata da un processo possedente una componente deterministica lineare e un white noise , nonché le relative statistiche test.

```
T <- 300
```

```
x3 <- rnorm(T)
```

```
trend <- time(x3)
```

```
y3 <- 1 + 0.6*trend + x3
```

```
plot(y3, type = "l", xlab= "tempo", main = "Modello con componente  
tendenziale")
```

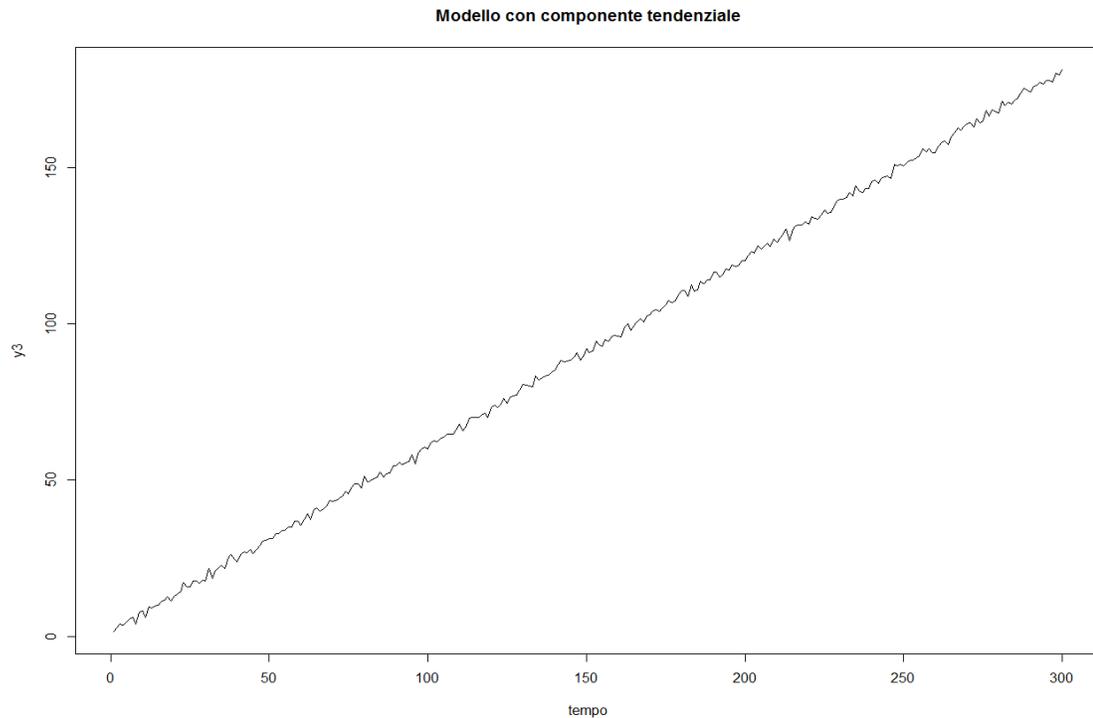


Figura 6. Modello con componente deterministica lineare più errore White noise.

```
library(urca)
df3 <- ur.df(y3, type = "trend", lags = 0)
summary(df3)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	1.72426	0.12821	13.45	<2e-16
z.lag.1	-1.03643	0.05810	-17.84	<2e-16
tt	0.62083	0.03481	17.84	<2e-16

Value of test-statistic is: -17.8381 144.9083 159.099

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau3	-3.98	-3.42	-3.13
phi2	6.15	4.71	4.05
phi3	8.34	6.30	5.36

ϕ_2 e ϕ_3 sono le statistiche riguardanti le ipotesi congiunte:

$(\alpha_0, \alpha_1, \phi) = (0, 0, 1)$ e $(\alpha_0, \alpha_1, \phi) = (\alpha_0, 0, 1)$.

$t_{\phi=1}$, ϕ_2 e ϕ_3 , come nel modello Random walk con costante, sono influenzate dalla presenza di TD_t , ossia della parte deterministica del processo autoregressivo. Essendo t pari a -17.8381, l'ipotesi d'unitarietà della radice è rifiutata. In aggiunta a ciò, ϕ_2 e ϕ_3 rifiutano significativamente l'ipotesi H_0 , cioè la serie presenta una componente lineare nel trend e una radice al ritardo Y_{t-1} in modulo minore di 1. Essa dunque risulta trend-stazionaria.

2.4. Applicazione test DF ad una serie finanziaria reale

Il test è stato sinora usato su serie storiche simulate. Si procede adesso ad studiarne gli effetti sulla serie finanziaria delle quotazioni mensili delle azioni dell'azienda Apple Inc. secondo l'indice del NASDAQ, nel periodo dal gennaio del 1992 a dicembre del 2007. I prezzi delle *stocks* sono espressi in logaritmi naturali e si è scelto quello di chiusura aggiustato per dividendi e split. (Fonte: yahoo.finance). Il codice è pertanto:

```
library(tseries)
```

```
library(urca)
```

```
x <- get.hist.quote(instrument = "^AAPL", quote = "AdjClose", start  
= "1992-01-01", end = "2007-12-31", compression = "m")
```

```
#get.hist.quote fornisce la possibilità di scaricare le serie finanziarie  
direttamente nell'ambiente R
```

```
apple <- log(x)
```

```
plot(apple, type = "l", xlab = "Tempo", main = "Prezzo di chiusura  
aggiustato azioni Apple Inc.")
```

Prezzo di chiusura aggiustato azioni Apple Inc.

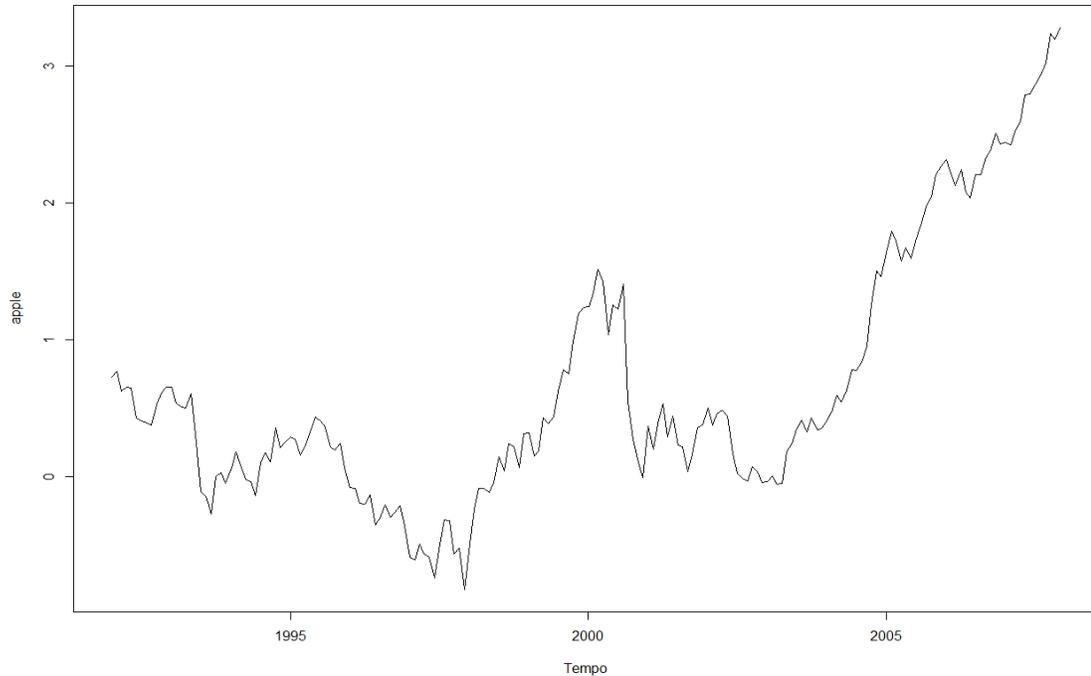


Figura 7. Serie storica mensile azioni Apple dal 01-1992 al 12-2007.

Per prima cosa, si nota che la serie sembra possedere un modello Random walk puro; tuttavia, occorre effettuare il test DF per esserne certi e poter trarre la conclusione:

```
d1 <- ur.df(apple, type = "none", lags = 0)
summary(d1)
```

Test regression none. Call: lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
z.lag.1	0.012362	0.009869	1.253	0.212

Value of test-statistic is: 1.2526

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau1	-2.58	-1.95	-1.62

Dal valore della statistica t , si evince il non rifiuto dell'ipotesi d'unitarietà di ϕ . La serie temporale presenta una radice unitaria.

Ciò è anche sostenuto dall'analisi degli altri due processi, ovvero quando il modello da cui partire si ipotizza presenti una costante o una componente deterministica lineare.

```
d2 <- ur.df(apple, type = "drift", lags = 0)
```

```
summary(d2)
```

Test regression drift

Call:

```
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.008174	0.013396	0.610	0.543
z.lag.1	0.008135	0.012071	0.674	0.501

Value of test-statistic is: 0.6739 0.9681

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau2	-3.46	-2.88	-2.57
phi1	6.52	4.63	3.81

t e ϕ_1 portano a non rigettare H_0 . La serie storica è differenzaz-stazionaria e non presenta un drift.

```
d3 <- ur.df(apple, type = "trend", lags = 0)
```

```
summary(d3)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-0.0375825	0.0228356	-1.646	0.1015
z.lag.1	-0.0187156	0.0161651	-1.158	0.2484
tt	0.0006548	0.0002664	2.457	0.0149

Value of test-statistic is: -1.1578 2.6757 3.2528

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau3	-3.99	-3.43	-3.13
phi2	6.22	4.75	4.07
phi3	8.43	6.49	5.47

Il test applicato al modello: $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$ conferma i risultati precedenti: i prezzi di chiusura aggiustati, espressi in logaritmi, delle azioni della società Apple, sono descritti da un Random walk puro.

2.5 Applicazione del test ad una serie economica reale

La serie storica mensile in esame è relativa all'indice dei prezzi al consumo dell'Italia per l'intera collettività, denominato NIC (con base l'anno 1995), nel periodo dal gennaio del 1996 a marzo del 2002. Il dataset NIC.csv è costituito dai valori: generali dell'IPC secondo il protocollo COICOP, da quelli delle variazioni tendenziali e congiunturali dell'indice stesso e per ciascuna delle 12 tipologie di prodotto per il quale è calcolato. X0 identifica i coefficienti dell'indice considerato. (Fonte: Istat)

```
dati <- read.csv("NIC.csv", header = T, sep = ",", dec = ".")
NIC <- X0[1:75] #per estrarre il sottoinsieme di dati del NIC
generale
NIC <- ts(NIC, start = c(1996,1), end = c(2002,3), frequency =
12) #ts serve per creare una serie storica da un vettore di dati
plot(NIC, xlab = "tempo")
```

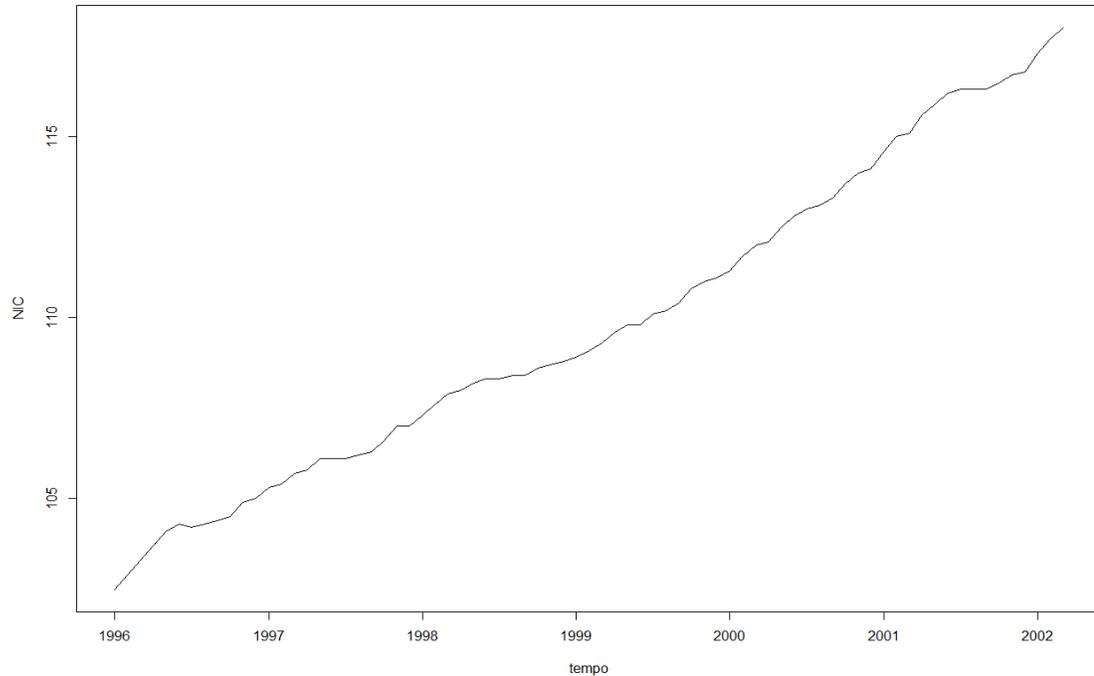


Figura 8. Indice dei prezzi al consumo per la collettività (base 1995 = 100).

Si osserva che la serie temporale presenta una componente deterministica. Anche in questo caso, è necessario prima sottoporre il processo all'analisi del test DF per formulare delle consenzienti conclusioni.

```
library(urca)
```

```
df1 <- ur.df(NIC, type = "none", lags = 0)
```

```
summary(df1)
```

```
Test regression none
```

```
Call: lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
z.lag.1	0.0019123	0.0001521	12.57	<2e-16

Value of test-statistic is: 12.5747

	1pct	5pct	10pct
tau1	-2.60	-1.95	-1.61

La statistica DF $t_{\phi=1}$ presenta un valore molto alto rispetto ai quantili simulati; essa porta a non rigettare l'ipotesi nulla.

Studiando gli altri due modelli con drift e $TD_t = \alpha_0 + \alpha_1 t$, ci si accorge che sostengono solidamente quanto appena affermato.

```
df2 <- ur.df(NIC, type = "drift", lags = 0)
```

```
summary(df2)
```

Test regression drift

```
Call: lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-0.264166	0.438439	-0.603	0.549
z.lag.1	0.004316	0.003993	1.081	0.283

Value of test-statistic is: 1.081 78.5528

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau2	-3.51	-2.89	-2.58
phi1	6.70	4.71	3.86

L'ipotesi congiunta $(\alpha_0, \phi) = (0, 1)$ viene significativamente rifiutata; mentre $\phi = 1$, condizione saggiata da t , non è respinta. La serie economica è rappresentata da un processo RW (Random walk) con costante. Passando all'ultimo modello:

```
df3 <- ur.df(NIC, type = "trend", lags = 0)
```

```
summary(df3)
```

Test regression trend

```
Call: lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt)
```

```
summary(df3)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	2.274665	3.674931	0.619	0.538
z.lag.1	-0.020499	0.035885	-0.571	0.570
tt	0.004911	0.007058	0.696	0.489

Value of test-statistic is: -0.5712 52.1548 0.8223

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau3	-4.04	-3.45	-3.15
phi2	6.50	4.88	4.16
phi3	8.73	6.49	5.47

La congettura $(\alpha_0, \alpha_1, \phi) = (0, 0, 1)$ è rifiutata secondo il valore osservato di ϕ_2 . $H_0 : (\alpha_0, \alpha_1, \phi) = (\alpha_0, 0, 1)$, ipotesi che testa la presenza di radice pari ad 1 senza porre alcun vincolo sulla parte deterministica del modello, non viene rigettata e pertanto la serie storica dell'indice dei prezzi al consumo dell'Italia è definibile come un RW con drift.

Test di Dickey - Fuller aumentato - ADF test

3.1.1 Caratteristiche

I test DF visti sinora si basano sulle serie temporali che presentano un modello autoregressivo di tipo AR(1). Nelle serie storiche economiche e finanziarie, molte volte la realtà della manifestazione di un fenomeno bisogna descriverla con processi *AR* di ordine maggiore di 1 o con comunque processi *Autoregressivi a media mobile* denominati ARMA(p,q), dove p e q indicano gli ordini della parte autoregressiva e di quella mobile. Tali test DF applicati ai modelli appena discussi vengono chiamati Test di Dickey-Fuller Aumentati, *Augmented DF Tests* (ADF).

Si consideri un generico processo AR(p):

$$Y_t = TD_t + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t,$$

con: $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$ e TD_t la componente deterministica che può assumere le strutture precedentemente viste (i.e. $TD_t = 0$, $TD_t = \alpha_0$ oppure $TD_t = \alpha_0 + \alpha_1 t$).

Il modello è possibile riscriverlo come:

$$Y_t = TD_t + \xi Y_{t-1} + \sum_{k=1}^{p-1} \psi_k \Delta Y_{t-k} + \epsilon_t, \quad \xi = \sum_{k=1}^p \phi_k \quad \mathbf{e} \quad \psi_k = - \sum_{i=k+1}^p \phi_i.$$

Sotto H_0 , la serie Y_t segue un processo D-S, implicando che $\xi = 1$. Le statistiche t e *normalized bias* si basano sulle stime dei minimi quadrati del modello appena presentato. Esse hanno quindi la forma seguente:

$$ADF_{\xi=1} = t_{\xi=1} = \frac{\hat{\phi} - 1}{SE(\hat{\phi})};$$

$$ADF_{nb} = \frac{T(\hat{\phi} - 1)}{1 - \hat{\psi}_1 - \dots - \hat{\psi}_p}$$

Una specificazione alternativa del modello autoregressivo AR(p)

$$\text{è: } Z_t = \Delta Y_t = T D_t + \varphi Y_{t-1} + \sum_{k=1}^{p-1} \psi_k Y_{t-k} + \epsilon_t,$$

quando: $\varphi = \xi - 1 = \sum_{k=1}^p \phi_k - 1$. Verificare $\varphi = 0$ è la medesima

congettura di $\xi = 1$ nel modello iniziale.

Usando un processo ARMA stazionario ed invertibile invece, esso può essere riscritto come un $AR(\infty)$, espresso come:

$\pi(B)Y_t = \epsilon_t$, però bisogna stabilire un limite superiore all'ordine di tale processo perché sia applicabile l'ADF. I coefficienti di $\pi(B)$ sono ottenuti eguagliando i pesi B^k a sinistra e a destra dell'equazione: $\pi(B) = (\vartheta(B))^{-1}\phi(B)$, dove $\phi(B)$ e $\vartheta(B)$ sono i polinomi caratteristici della parte autoregressiva e di quella a media mobile dell'ARMA da cui si è partiti.

3.1.2 Scelta dell'ordine del processo

Un problema nell'applicazione dell'ADF risiede proprio nella scelta di p , il grado del processo autoregressivo. Infatti se si utilizza un valore di p troppo elevato, la potenza del test potrebbe diminuire. Nel caso opposto, ovvero quando p è troppo basso, esso potrebbe provocare la correlazione seriale residua negli errori, con la conseguente distorsione (dall'inglese *bias*) nel test.

Ng e Perron (1995) hanno proposto una procedura per l'identificazione dell'ordine del modello:

Per prima cosa, si sceglie un limite superiore per p_{max} e si stima la regressione con $p = p_{max}$. Dopodiché, si verifica la significatività del coefficiente del ritardo $p = p_{max}$.

Se il valore della statistica t è in modulo > 1.6 , allora si usa $p = p_{max}$; in caso contrario si riduce la lunghezza del ritardo di un lag (i.e.1) e si reiterano le operazioni. Una regola pratica per determinare p_{max} , suggerita da Schwert (1989), risulta:

$$p_{max} = [12 \cdot (\frac{T}{100})^{1/4}] ([x] \text{ è la parte intera di } x),$$

permettendo a p_{max} di crescere col campione in modo che le regressioni Y_t e Z_t viste sopra siano valide se gli errori seguono un processo ARMA con un ordine ignoto. Ulteriori limiti del test ADF risiedono nell'inefficacia in situazioni di discriminazione tra radice unitaria e radice molto vicina all'unità o tra processi T-S e D-S possedenti drift. E.g. il test ha potenza bassa se la decisione è tra $\phi = 1$ o $\phi = 0.95$, specialmente nei campioni di dimensione ridotta. Un secondo aspetto risulta la facilità con cui esso indica molto spesso ad accettare l'ipotesi di radice unitaria.

3.2. Applicazione dell'ADF ad una serie economica reale

Si sfrutterà il sopraindicato test su una serie economica trimestrale riguardante la funzione di consumo del Regno Unito nel periodo dal quarto trimestre del 1966 al secondo del 1991, contenuta nel pacchetto urca e chiamata *Raotb/3*. Tutte le variabili costituenti il dataset sono espresse in logaritmi naturali. Dapprima, si considererà un processo AR(3) con una componente deterministica lineare, poi con un drift ed infine con valore atteso pari a 0. Il numero di lags, usufruendo del metodo di Ng e Perron, è stato fissato a 3 per consentire l'incorrelazione degli errori.

Il codice è pertanto:

```
library(urca)
```

```
data(Raotbl3)
```

```
y <- lc
```

```
y <- ts(y, start = c(1966,4), end = c(1991,2), frequency = 4)
```

```
plot(y, xlab = "Tempo")
```

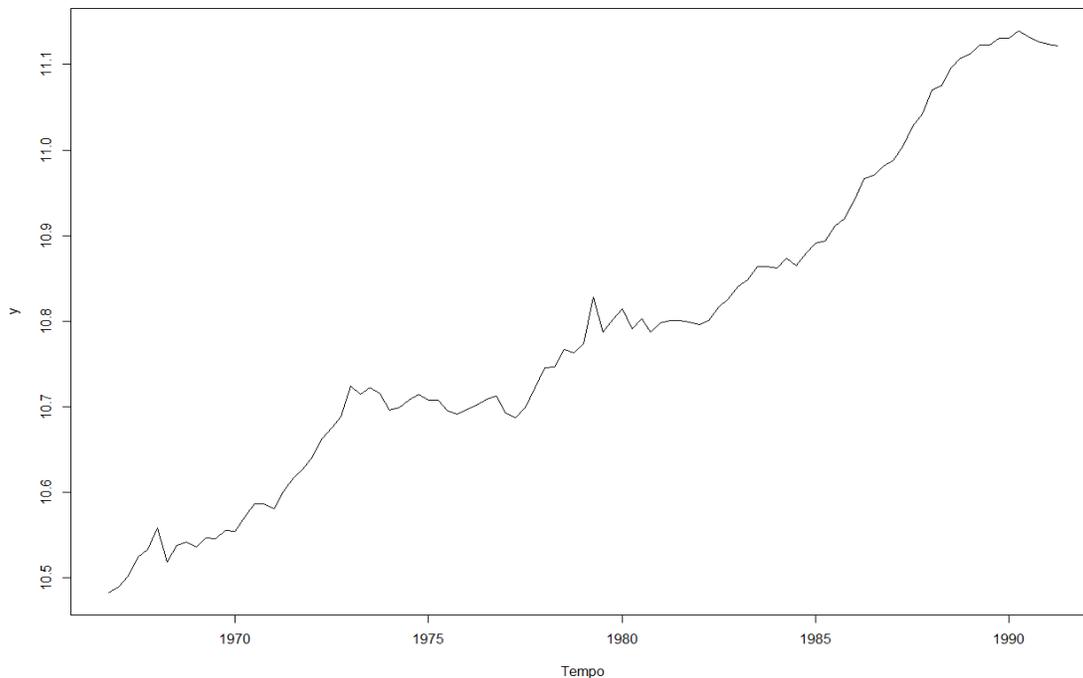


Figura 9. Funzione consumo del Regno Unito.

```
uradf1 <- ur.df(y, lags = 3, type = "trend")
```

```
summary(uradf1)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.7977	0.3548	2.25	0.0270
z.lag.1	-0.0759	0.0339	-2.24	0.0277
tt	0.0005	0.0002	2.28	0.0252
z.diff.lag1	-0.1064	0.1007	-1.06	0.2934
z.diff.lag2	0.2011	0.1012	1.99	0.0500
z.diff.lag3	0.2999	0.1021	2.94	0.0042

Value of test-statistic is: -2.2389 3.7382 2.5972.

	1pct	5pct	10pct
tau3	-4.04	-3.45	-3.15
phi2	6.50	4.88	4.16
phi3	8.73	6.49	5.47

Dalle consuete statistiche si nota che l'ipotesi nulla non viene mai rifiutata. Dunque, per t , il processo presenta un radice unitaria ($\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \xi = 1$), per ϕ_2 : $(\alpha_0, \alpha_1, \xi) = (0, 0, 1)$ e per ϕ_3 : $(\alpha_0, \alpha_1, \xi) = (\alpha_0, 0, 1)$. L'istruzione: `plot(uradf1)` permette di disegnare l'ACF e la PACF dei residui del modello costruito dall'ADF test.

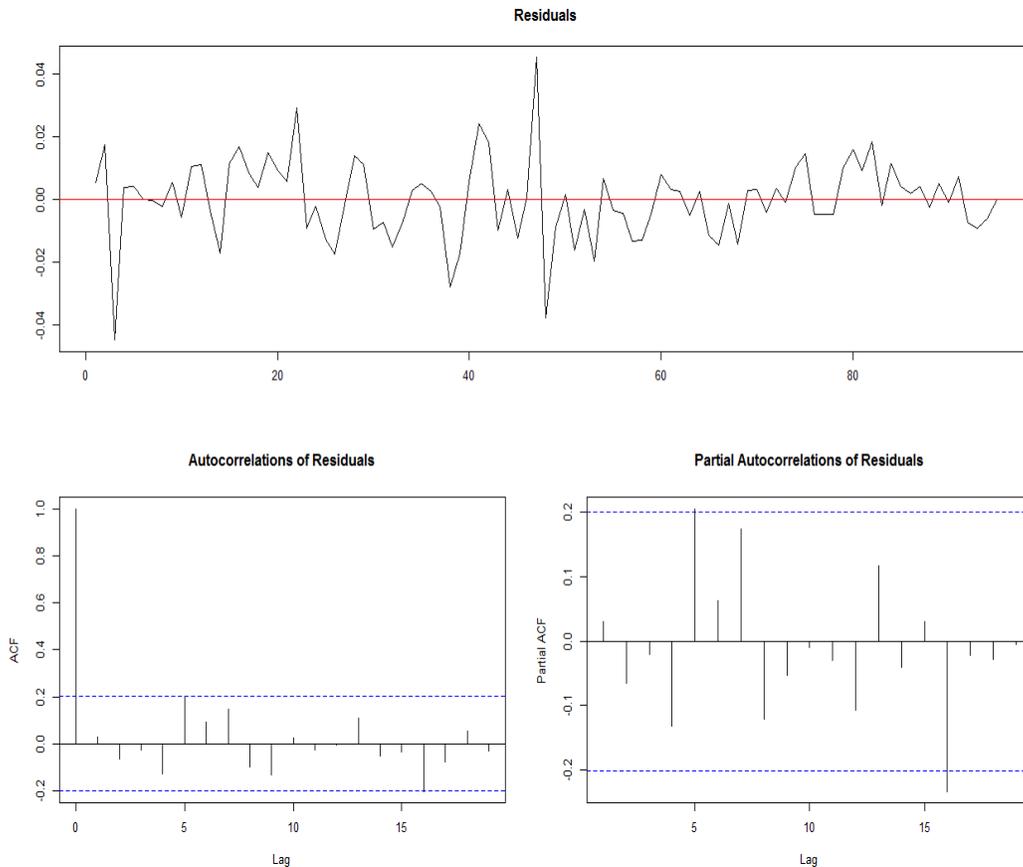


Figura 10. ACF e PACF dei residui del processo analizzato.

Si prosegue a verificare il modello in cui la componente deterministica coincide con una costante α_0 . Di conseguenza:

$$Y_t = \alpha_0 + (\xi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3)Y_{t-1} + \sum_{k=1}^2 \psi_k \Delta Y_{t-k} + \epsilon_t.$$

L'implementazione in R è:

```
uradf2 <- ur.df(y, lags = 3, type = "drift")
summary(uradf2)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.0123	0.0851	0.14	0.8852
z.lag.1	-0.0007	0.0079	-0.09	0.9261
z.diff.lag1	-0.1433	0.1016	-1.41	0.1620
z.diff.lag2	0.1615	0.1020	1.58	0.1169
z.diff.lag3	0.2585	0.1027	2.52	0.0136

Value of test-statistic is: -0.0931 2.8806.

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau2	-3.51	-2.89	-2.58
phi1	6.70	4.71	3.86

phi1, i.e. $\phi_1 = (\alpha_0, \xi) = (0, 1)$, in base ai valori tabulati, porta a non rifiutare H_0 , così come la statistica t . La serie storica presenta una radice unitaria, ma non un drift.

Nell'ultimo caso, in cui Y_t si ipotizza sia priva di costante e quindi abbia media nulla, si ha:

```
uradf3 <- ur.df(y, lags = 3, type = "none")
summary(uradf3)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
z.lag.1	0.0004	0.0002	2.41	0.0180
z.diff.lag1	-0.1445	0.1008	-1.43	0.1550
z.diff.lag2	0.1600	0.1009	1.59	0.1164
z.diff.lag3	0.2569	0.1015	2.53	0.0131

Value of test-statistic is: 2.4089

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau1	-2.6	-1.95	-1.61

Si constata che l'ipotesi nulla non viene rigettata ad alcun livello di significatività. La conclusione porta a dire che il processo presenta una radice pari ad uno, o meglio, Y_t si distribuisce come un $I(1)$.

Si vuole condurre una verifica per cercare di capire se la funzione del consumo lc è rappresentabile da un $I(2)$, ossia se risulta sufficiente differenziare la serie una volta soltanto per raggiungere la stazionarietà. Il codice sottostante permette di eseguirla:

```
z <- diff(y) # il comando diff differenzia una serie storica
urdf2 <- ur.df(z, lags = 3, type = "trend")
summary(urdf2)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.0039	0.0031	1.27	0.2087
z.lag.1	-0.8826	0.2013	-4.39	0.0000
tt	0.0000	0.0001	0.62	0.5348
z.diff.lag1	-0.2253	0.1873	-1.20	0.2321
z.diff.lag2	-0.0467	0.1600	-0.29	0.7711
z.diff.lag3	0.1775	0.1057	1.68	0.0967

Value of test-statistic is: -4.3853 6.4477 9.6164.

Il valore osservato della statistica di Dickey-Fuller $t_{\xi=1}$ è inferiore ai quantili tabulati del modello con la componente deterministica lineare precedente, portando a respingere l'ipotesi nulla. In base ai risultati fin qui ottenuti, si conclude dicendo che la funzione del consumo dello United Kingdom assume un modello con la struttura di un random walk puro.

3.3 Applicazione del test ADF ad una serie finanziaria reale

Il test di Dickey-Fuller aumentato viene usato sulla serie temporale finanziaria dei *prices* delle azioni giornalieri secondo l'indice FTSE100, dove 100 identifica le aziende londinesi più capitalizzate, per il periodo dal 01-01-1995 al 31-12-2000. I prezzi sono espressi nei loro logaritmi naturali e sono stati scelti quelli di chiusura. (Fonte: yahoo.finance)

```
library(tseries)
```

```
x <- get.hist.quote(instrument = "^FTSE", quote = "Close", start =  
"1995-01-01", end = "2000-12-31", compression = "d")
```

```
ftse <- log(x)
```

```
T <- length(ftse)
```

```
plot(ftse, xlab = "Tempo")
```

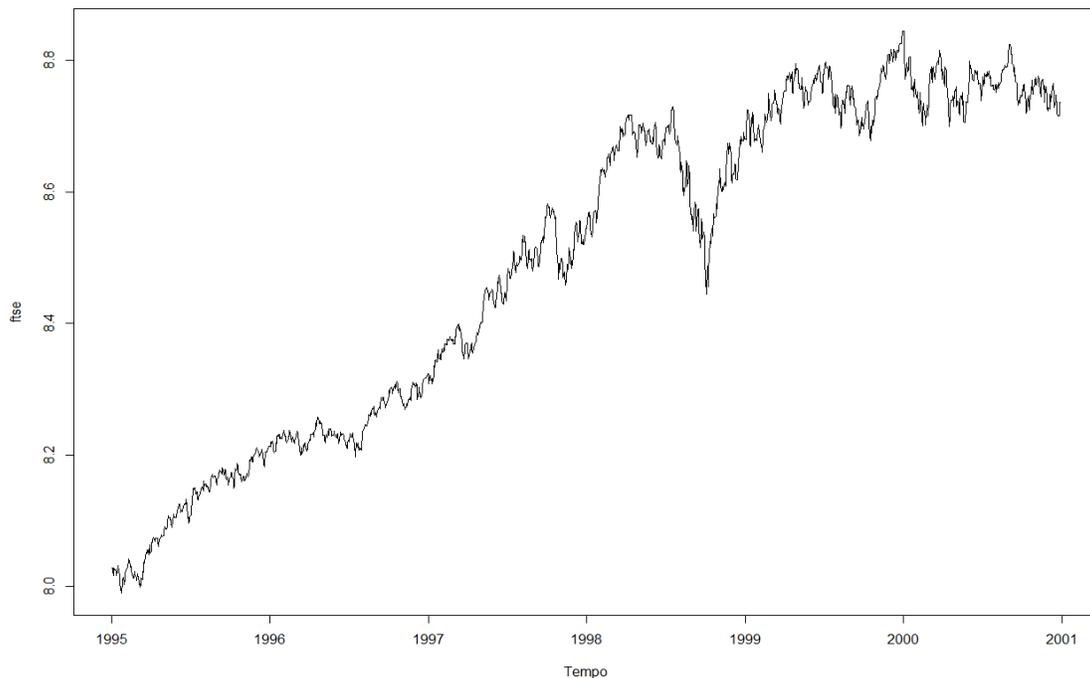


Figura 11. Prezzi di chiusura azioni secondo il FTSE100.

```
pmax <- round(12*(T/100)^(1/4),0) #ritardo massimo del
processo secondo il metodo di Schwert
> pmax [1] 24
```

Sfruttando la procedura di Ng-Perron, il processo assume la forma di un autoregressivo di ordine $r = 7$, in modo tale da garantire anche l'incorrelazione degli errori, ipotesi necessaria al test.

```
adf1 <- ur.df(ftse, type = "trend", lags = 7)
```

```
summary(adf1)
```

```
Test regression trend
```

```
Call: lm(formula = z.diff z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	4.940e-02	2.932e-02	1.685	0.09224
z.lag.1	-5.979e-03	3.631e-03	-1.647	0.09984
tt	2.472e-06	2.013e-06	1.228	0.21959
z.diff.lag1	7.420e-02	2.548e-02	2.912	0.00364
z.diff.lag2	-7.254e-02	2.551e-02	-2.843	0.00452
z.diff.lag3	-7.508e-02	2.560e-02	-2.933	0.00341
z.diff.lag4	-1.649e-02	2.565e-02	-0.643	0.52053
z.diff.lag5	-2.496e-02	2.556e-02	-0.977	0.32889
z.diff.lag6	-4.382e-02	2.548e-02	-1.720	0.08569
z.diff.lag7	-5.369e-02	2.546e-02	-2.109	0.03513

Value of test-statistic is: -1.6466 3.1031 2.1728

	1pct	5pct	10pct
tau3	-3.96	-3.41	-3.12
phi2	6.09	4.68	4.03
phi3	8.27	6.25	5.34

La statistica test t porta a non rifiutare l'ipotesi nulla e quindi il processo è differenza-stazionario. ϕ_2 non viene mai rigettata, altresì per ϕ_3 . Il test ADF indica l'inesistenza della parte deterministica e l'unitarietà nella radice di Y_{t-1} . Occorre tuttavia studiare anche la serie con la sola costante e priva di qualunque componente deterministica.

```
adf2 <- ur.df(ftse, type = "drift", lags = 7)
summary(adf2)
Test regression drift
Call: lm(formula = z.diff z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.014951	0.008548	1.749	0.08047
z.lag.1	-0.001694	0.001006	-1.684	0.09235
z.diff.lag1	0.071023	0.025352	2.801	0.00515
z.diff.lag2	-0.075659	0.025390	-2.980	0.00293
z.diff.lag3	-0.078175	0.025480	-3.068	0.00219
z.diff.lag4	-0.019433	0.025545	-0.761	0.44692
z.diff.lag5	-0.027700	0.025467	-1.088	0.27691
z.diff.lag6	-0.046332	0.025403	-1.824	0.06837
z.diff.lag7	-0.056272	0.025375	-2.218	0.02673

Value of test-statistic is: -1.6842 3.8992

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau2	-3.43	-2.86	-2.57
phi2	6.43	4.59	3.78

Anche in questo caso, l'ipotesi di radice unitaria non viene respinta e l'ipotesi congiunta non viene rigettata all'1% e al 5%. Al 10%, indicherebbe la presenza di un drift nel modello, essendo $|\phi_2^{oss}| > DF(\phi_2)$. Nell'ultimo caso, ci si aspetta che l'ipotesi di radice unitaria rimanga valida.

```
adf3 <- ur.df(ftse, type = "none", lags = 7)
summary(adf3)
```

Value of test-statistic is: 2.1755. Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau1	-2.58	-1.95	-1.62

Il processo presenta un valore della radice pari ad 1, esso è allora differenza-stazionario (D-S) privo di drift.

Test di Phillips - Perron - PP Test

4.1. Peculiarità

Il **test PP**, acronimo di Phillips-Perron, è un tipo di *unit root tests*, test di radice unitaria che, rispetto all' ADF, prevede delle statistiche test non parametriche per lo studio dell'ipotesi nulla di unitarietà della radice. Infatti, esso suppone che la componente erratica del processo possa essere dipendente, ossia correlata ed eteroschedastica. L'attenzione si fonda sulla modalità differente dall'ADF nella trattazione della correlazione seriale nelle regressioni usate: il primo sfrutta una struttura parametrica autoregressiva; invece il test di PP non tiene conto di alcuna forma di correlazione nel processo usato per la verifica dell'ipotesi. La regressione su cui il test di Peter C. B. Phillips e Pierre Perron si basa è:

$$\Delta Y_t = \beta^T D_t + \rho Y_{t-1} + \nu_t, \quad D_t \text{ componente deterministica;}$$

$\nu_t = \psi \nu_{t-1} + \epsilon_t$ un processo $I(0)$ che potrebbe essere eteroschedastico (i.e. non avere la varianza costante $\forall t$).

Passando alle statistiche, esse sono strutturate nel seguente modo:

$$Z_t = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\lambda}^2}\right)^{1/2} \cdot t_{\rho=0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2}{\hat{\lambda}^2}\right) \cdot \left(\frac{T \cdot SE(\hat{\rho})}{\hat{\sigma}^2}\right);$$

$$Z_\rho = T\hat{\rho} - \frac{1}{2} \frac{T^2 \cdot SE(\hat{\rho})}{\hat{\sigma}^2} (\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2),$$

$\hat{\sigma}^2$ e $\hat{\lambda}^2$ sono stimatori consistenti dei parametri di varianza:

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T E[\nu_t^2]; \quad \lambda^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T E[T^{-1} S_T^2], \quad \text{con: } S_T = \sum_{t=1}^T \nu_t.$$

Lo stimatore Newey-West della varianza a lungo periodo di ν_t , usando $\hat{\nu}_t$, risulta consistente rispetto a λ^2 .

Lo stimatore Newey-West standard viene applicato alle serie temporali senza osservazioni mancanti. Si ipotizza che Z_t sia una serie storica osservata in modo continuo $\forall t = 1, \dots, T$, con $E[Z_t] = \mu$. Sia $\gamma_z(j)$ la funzione d'autocovarianza al ritardo k . Si suppone inoltre che Z_t sia debolmente stazionaria con:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_z(j)| < \infty, \text{ allora: } \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T (z_t - \mu) \sim N(0, \Omega), \text{ dove la varianza}$$

$$\text{di lungo periodo del processo è: } \Omega = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_z(j).$$

Lo stimatore *HAC* di Newey-West per Ω assume la forma di:

$$\hat{\Omega}^{NW} = \hat{\gamma}_z(0) + 2 \sum_{j=1}^m \omega(j, m) \hat{\gamma}_z(j),$$

$$\text{ove: } \hat{\gamma}_z(j) = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T (z_t - \bar{z}_T)(z_{t-j} - \bar{z}_T), \quad \bar{z}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z_t.$$

$\omega(j, m)$ è il kernel di Bartlett pari a: $1 - \frac{j}{(m+1)}$ se $j \leq m$;

0 altrimenti. Ciò assicura alla matrice di covarianza d'essere semi-definita positiva. Sotto assunzioni generali, purchè:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} m(T) = \infty \text{ e } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{m(T)}{T^{1/4}} = 0, \quad \hat{\Omega}^{NW} \xrightarrow{p} \Omega \text{ (Newey and West, 1987).}$$

Usufruento invece del *kernel di Parzen*:

$$w(j, m) =$$

$$1 - 6[j/m]^2 + 6[j/m]^3 \text{ se } 0 \leq j/m \leq 1/2;$$

$$2[1 - j/m]^3 \text{ se } 1/2 \leq j/m \leq 1;$$

0 altrimenti,

si ottiene lo stimatore di *Gallant* (1987) che può essere utilizzato al posto del Newey-West (NW).

Nel test PP, implementato sempre nel pacchetto `urca`, si può esprimere il numero di lags manualmente per il calcolo della varianza di lungo termine mediante l'istruzione `use.lag`; altrimenti, se il comando `lags` viene impostato su "long", il valore di default del *bandwidth* coincide con la parte intera di $12(T/100)^{1/4}$; tale valore indica il numero di ritardi che viene inserito nel modello, in quanto una delle assunzioni del test di Phillips-Perron prevede di non specificarlo a priori. Oltretutto, la varianza campionaria dei residui $\hat{\nu}_t$ è anch'essa consistente in relazione a σ^2 . Se $H_0 : \rho = 0$, equivalente a $\phi = 1$ nel modello non differenziato Y_t , allora Z_t e Z_ρ convergono agli stessi moti Browniani del test ADF, per via del fatto che i parametri di disturbo possono essere eliminati anche se ν_t non è un processo i.i.d.

$$Z_t \sim \frac{1/2(W(1)^2 - \sigma_\nu^2/\sigma^2)}{\left(\int_0^1 W(r)^2 dr\right)^{1/2}} - \frac{1/2(\sigma^2 - \sigma_\nu^2)}{\sigma^2 \left(\int_0^1 W(r)^2 dr\right)^{1/2}} = \frac{1/2(W(1)^2 - 1)}{\left(\int_0^1 W(r)^2 dr\right)^{1/2}},$$

pari a: $\frac{\int_0^1 W(r)dW(r)}{\int_0^1 (W(r)^2 dr)^{1/2}}.$

$$Z_\rho \sim \frac{1/2(W(1)^2 - \sigma_\nu^2/\sigma^2)}{\int_0^1 W(r)^2 dr} - \frac{1/2(\sigma^2 - \sigma_\nu^2)}{\sigma^2 \int_0^1 W(r)^2 dr} = \frac{1/2(W(1)^2 - 1)}{\int_0^1 W(r)^2 dr},$$

uguale a: $\frac{\int_0^1 W(r)dW(r)}{\int_0^1 W(r)^2 dr}.$

I valori critici della versione modificata della statistica Z_ρ :

$$Z_{EV} = \frac{Z_\rho}{\sqrt{2}} \text{ sono stati calcolati da Evans e Savin (1981).}$$

4.2 Applicazione del test PP ad una serie temporale economica reale

L'applicazione del test avviene sempre sul dataset Raotbl3.

Si considerano i due modelli:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1(t - 1/2T) + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t;$$

$$Y_t = \alpha_0 + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t. \quad \text{Le statistiche ausiliarie } Z_{\alpha_0} \text{ e } Z_{\alpha_1}$$

sono costruite come:

Nella prima serie:

$$Z_{\alpha_0} = (\hat{s}/\hat{\sigma})t_{\alpha_0} - \hat{\lambda}\hat{\sigma}m_y/M^{1/2}(M + m_y^2)^{1/2};$$

$$Z_{\alpha_1} = (\hat{s}/\hat{\sigma})t_{\alpha_1} - \hat{\lambda}\hat{\sigma}(1/2m_y - m_{ty})/(M/12)^{1/2}\bar{m}_{yy}^{1/2}.$$

Nella seconda:

$$Z_{\alpha_0} = (\hat{s}/\hat{\sigma})t_{\alpha_0} + \hat{\lambda}\hat{\sigma}m_y/\bar{m}_{yy}^{1/2}m_{yy}^{1/2}, \text{ con: } \bar{m}_{yy} = T^{-2} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2$$

$$m_{yy} = T^{-2} \sum_{t=1}^T y_t^2, m_y = T^{-3/2} \sum_{t=1}^T y_t, \hat{\lambda} = 1/2(\hat{\sigma}^2 - \hat{s}^2), m_{ty} =$$

$$= T^{-5/2} \sum_{t=1}^T ty_t \text{ e } M = (1 - T^2)m_{yy} - 12m_{ty}^2 + 12(1 + T^{-1})m_{ty}m_y + \\ - (4 + 6T^{-1} + 2T^{-2})m_y^2.$$

Passando a verificare il primo modello:

```
library(urca)
```

```
data(Raotbl3)
```

```
attach(Raotbl3)
```

```
y <- lc
```

```
y <- ts(y, start = c(1966,4), end = c(1991,2), frequency = 4)
```

```
pp1 <- ur.pp(y, type = "Z-tau", model = "trend", lags = "long")
```

```
summary(pp1)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.5792004	0.3621778	1.599	0.113
yl1	0.9468947	0.0335844	28.194	<2e-16
trend	0.0003472	0.0002155	1.611	0.111

Value of test-statistic, type: Z-tau is: -1.9212.

aux. Z statistics

	Z statistic value
Z-tau-mu	0.7152
Z-tau-beta	2.5699

Z-tau-mu e Z-tau-beta corrispondono a Z_{α_0} e Z_{α_1} rispettivamente.

Critical values for Z statistics:

	1 pct	5 pct	10 pct
Z-tau	-4.053974	-3.455671	-3.153363
Z-tau-mu	3.78	3.11	2.73
Z-tau-beta	3.53	2.79	2.38

I valori critici di Z-tau-mu e Z-tau-beta sono stati presi dalle simulazioni di Dickey-Fuller (1981) tramite il metodo Monte Carlo in un campione di 100 osservazioni, poichè il summary di ur.pp non li visualizza. Dalla statistica Z-tau si nota che l'ipotesi nulla non viene mai respinta. Secondo Z-tau-mu e Z-tau-beta si rifiuta H_0 , ovvero la nullità del coefficiente facente parte dell'elemento deterministico, se e solo se il valore assoluto osservato della statistica è maggiore del quantile tabulato. Si osserva che secondo Z-tau-beta, la congettura non verrebbe rigettata al 10%. Il processo, in relazione ai medesimi esiti forniti dal test ADF, è un differenza-stazionario. Alla stessa affermazione si arriva col modello successivo:

```
pp2 <- ur.pp(y, type = "Z-tau", model = "constant", lags = "long")
summary(pp2)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.010867	0.082462	0.132	0.895
yl1	0.999597	0.007643	130.779	<2e-16

Value of test-statistic, type: Z-tau is: -0.1285.

aux. Z statistics

	Z statistic value
Z-tau-mu	0.1993

Critical values for Z statistics:

	1 pct	5 pct	10 pct
Z-tau	-3.49776	-2.890909	-2.58224
Z-tau-mu	3.22	2.54	2.17

La statistica Z_t conduce a non rifiutare l'ipotesi nulla; Z_{α_0} , i.e. Z-tau, sostiene la non significatività del termine costante nella serie temporale economica. Pertanto, ciò conferma quanto sostenuto nel modello precedente e la funzione del consumo è proprio un processo D-S.

Si vuole controllare inoltre se Y_t possa essere un $I(2)$, il che equivale a verificare se essa è o no stazionaria differenziandola una sola volta.

```
z <- diff(y)
```

```
ppdf2 <- ur.pp(z, type = "Z-tau", model = "trend", lags = "long")
```

```
summary(ppdf2)
```

Value of test-statistic, type: Z-tau is: -10.9606.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	7.340e-03	1.553e-03	4.728	7.96e-06
yl1	-1.253e-01	1.025e-01	-1.222	0.225
trend	1.802e-05	4.996e-05	0.361	0.719

aux. Z statistics

Z statistic value	
Z-tau-mu	2.9528
Z-tau-beta	0.3752

Usufruento dei quantili del modello comprendente la componente deterministica lineare, ci si accorge che il valore della statistica Z_t è minore rispetto ai q -values. L'ipotesi nulla viene rigettata e dunque il modello è un $I(1)$, Random Walk puro. Dagli studi effettuati, si evince che il test PP fornisce gli stessi esiti dell'ADF.

4.3 Applicazione del test PP ad una serie finanziaria reale

Si utilizza nuovamente la serie temporale finanziaria dei prezzi delle azioni secondo l'indice FTSE100.

```
library(tseries)
```

```
x <- get.hist.quote(instrument = "^FTSE", quote = "Close", start = "1995-01-01", end = "2000-12-31", compression = "d")
```

```
ftse <- log(x)
```

```
library(urca)
```

```
pp1 <- ur.pp(ftse, type = "Z-tau", model = "trend", lags = "long")
```

```
summary(pp1)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	7.020e-02	3.028e-02	2.318	0.0206
yl1	9.918e-01	3.566e-03	278.146	<2e-16
trend	3.819e-06	1.974e-06	1.935	0.0532

Value of test-statistic, type: Z-tau is: -1.9947

aux. Z statistics

Z statistic value	
Z-tau-mu	3.1027
Z-tau-beta	1.5898

Critical values for Z statistics:

	1 pct	5 pct	10 pct
Z-tau	-3.96916	-3.41519	-3.129449
Z-tau-mu	3.71	3.08	2.72
Z-tau-beta	3.46	2.78	2.38

La serie finanziaria presenta una radice unitaria. L'ipotesi saggiata da Z-tau-mu verrebbe rigettata al 5% e al 10%, però all'1% no; mentre quella verificata da Z-tau-beta non viene mai rifiutata. I risultati sono molto simili rispetto al test ADF: il processo è un RW puro. Supponendo che TD_t sia costituito dalla componente costante:

```
pp2 <- ur.pp(ftse, type = "Z-tau", model = "constant", lags = "long")
summary(pp2)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.013992	0.008546	1.637	0.102
yl1	0.998406	0.001006	992.534	<2e-16

Value of test-statistic, type: Z-tau is: -1.6064.

aux. Z statistics

Z statistic value	
Z-tau-mu	1.6677

Critical values for Z statistics:

	1 pct	5 pct	10 pct
Z-tau	-3.437348	-2.863854	-2.568021
Z-tau-mu	3.18	2.52	2.16

In quest'analisi, il coefficiente relativo alla componente non stocastica del modello, α_0 (i.e. μ) non è significativo. Oltretutto, la radice è ancora unitaria, in accordo coi modelli appena trattati.

Il test di Phillips-Perron presenta gli stessi problemi che affliggono il test ADF. In aggiunta, se da un lato è più potente perchè non prevede che la componente erratica della serie sia un processo stocastico incorrelato ed omoschedastico, dall'altro le distorsioni dovute alla frazione delle replicazioni per le quali la statistica test cade nella regione di rifiuto (*true or actual size*) maggiore del livello di significatività fissato (*nominal size*) quando le autocorrelazioni della componente erratica sono negative, unite alla maggior sensibilità del test stesso a modelli mal specificati (ossia l'ordine della parte autoregressiva e di quella mobile), ne limitano l'efficienza. L'uso della funzione d'autocorrelazione globale ACF è utile per rilevare tali problemi. Le serie temporali economiche presentano a volte delle correlazioni negative specialmente al ritardo 1.

Test di Kwiatkowski, Phillips, Schmidt e Shin - KPSS test

5.1 Caratteristiche

I test ADF e PP hanno il compito di controllare se la serie in oggetto sia differenza-stazionaria nell'ipotesi nulla. I test di stazionarietà, *stationarity tests*, verificano l'opposto: sotto H_0 il modello che ben rappresenta la serie storica dev'essere trend-stazionario, ossia un $I(0)$. Uno dei più celebri test di stazionarietà è il *KPSS*, implementato da Kwiatkowski, Phillips, Schmidt e Shin (1992). Esso deriva dal modello:

$Y_t = \beta^T D_t + \mu_t + \nu_t$, con: $\mu_t = \mu_{t-1} + \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$, D_t una componente puramente deterministica e ν_t un processo $I(0)$ che potrebbe essere eteroschedastico. Il processo μ_t assume le sembianze di un perfetto random walk. I test di stazionarietà sono interpretabili in due equivalenti modi. Il primo di essi si basa sulla rappresentazione di Wold. Il Teorema di Wold afferma che un processo debolmente stazionario Y_t può essere riscritto come:

$$Y_t = W_t + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i}, \text{ in cui } W_t \text{ è la componente deterministica, } \epsilon_t \text{ è un White Noise e } \psi_0 = 1, \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < +\infty.$$

Si ricorda che la stazionarietà in senso debole di un processo stocastico considera i momenti delle variabili casuali (v.c) Y_t , concentrandosi sui primi due e si ha quando:

- $\mu_t = E[Y_t] \forall t$;
- $Var[Y_t] = \sigma^2 \forall t$;
- $\gamma_k = Cov[Y_t, Y_{t-k}] = E[(Y_t - \mu_t)(Y_{t-k} - \mu_{t-k})] \forall t \neq k$.

Applicando l'operatore differenza Δ alla serie Y_t , essa diviene:

$$\Delta Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i} = \psi^*(B) \epsilon_t, \text{ ove: } \psi^*(B) = 1 - \psi_1^* B - \dots - \psi_k^* B^k.$$

Le ipotesi per l'interpretazione del processo della serie temporale risultano:

- $H_0 : \psi(1)^* = 0$, contro l'alternativa:

- $H_1 : \psi(1)^* > 0$.

Sotto H_0 , il polinomio caratteristico $\psi(B)^*$ presenta una radice unitaria; mentre sotto l'alternativa possiede delle radici esterne al cerchio unitario. Il secondo sfrutta i modelli autoregressivi integrati a media mobile a componenti latenti denominati UGARIMA. Infatti:

$$Y_t = \mu_t + \nu_t, \text{ avente: } \mu_t = \mu_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2),$$

$$\phi(B)\nu_t = \theta(B)\eta_t, \eta_t \sim WN(0, \sigma_\eta^2) \text{ e } Cov[\epsilon_t, \eta_t] = 0 \forall t.$$

Le ipotesi da saggiare sono allora:

$$H_0 : \sigma_\epsilon^2 = 0 \text{ (i.e. } \mu_t = \mu_0);$$

$$H_1 : \sigma_\epsilon^2 > 0 \text{ (i.e. } \mu_t = \mu_0 + \sum_{k=1}^t \epsilon_k).$$

Sotto l'ipotesi nulla, μ_t risulta una costante e dunque la serie è stazionaria. Verificare $\psi^*(1) = 0$ è il medesimo controllo eseguito in H_0 per la varianza di ϵ . Un aspetto implicito che si instaura nell'ipotesi di nullità di σ_ϵ^2 risiede in una radice pari ad 1 nella parte a media mobile di ΔY_t , quest'ultima intesa come un ARMA. Si ipotizzi che Y_t sia espressa come:

$$Y_t = \mu_t + \nu_t, \nu_t \sim I(0) \text{ (ovvero } \phi(B)\nu_t = \theta(B)\eta_t), \mu_t = \mu_{t-1} + \epsilon_t,$$

con ϵ_t un white noise. Tramite l'operatore Δ , il processo assume le sembianze di: $\Delta Y_t = \epsilon_t + \nu_t - \nu_{t-1}$. Se ν_t è un processo indipendente e identicamente distribuito $\forall t$, in base al *Teorema di rappresentazione di Granger* si ha che:

$$\Delta Y_t = \delta_t + \theta \delta_{t-1}, \delta \text{ errore delle previsioni non osservabili.}$$

Se $Cov[\epsilon_t, \nu_t] = 0$:

$$Cov[\Delta Y_t, \Delta Y_{t-1}] = Cov(\epsilon_t + \nu_t - \nu_{t-1}, \epsilon_{t-1} + \nu_{t-1} - \nu_{t-2}) = -\sigma_\nu^2 \text{ e}$$

$Cov[\Delta Y_t, \Delta Y_{t-k}] = 0 \forall k > 1$, la funzione d'autocovarianza coincide con quella di un MA(1).

Per $\Delta Y_t = \epsilon_t + \nu_t - \nu_{t-1}$, la funzione d'autocovarianza è allora :

$$\gamma_0 = \sigma_\epsilon^2 + 2\sigma_\nu^2;$$

$$\gamma_1 = -\sigma_\nu^2 \text{ e } 0 \forall k > 1.$$

Per $Y_t = \delta_t + \theta\delta_{t-1}$ invece:

$$\gamma_0^* = (1 + \theta^2)\sigma_\delta^2;$$

$\gamma_1^* = \theta\sigma_\delta^2$ e $0 \forall k > 1$. Definendo il rapporto di segnale-rumore:

$$q = \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sigma_\nu^2}, \text{ si ha: } \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-1}{q+2} \text{ e } \rho_1^* = \frac{\theta}{1+\theta^2}.$$

Eguagliando $\rho_1 = \rho_1^*$ e risolvendo per θ , scegliendone il valore

$$\text{invertibile } < 0, \text{ si arriva a: } \theta = \frac{-(q+2) \pm \sqrt{(q+2)^2 - 4}}{2}.$$

$$\Delta Y_t = \delta_t + \theta\delta_{t-1}, \text{ se } Cov[\epsilon_t, \nu_t] = 0: \theta = \frac{-(q+2) + \sqrt{(q)^2 + 4q}}{2}.$$

$$\text{Se } \sigma_\epsilon^2 = 0 \implies q = 0 \implies \theta = \frac{-2}{2} = -1,$$

cosicchè: $\psi(B) = \theta(B)/\phi(B) = 1 + \theta L$ abbia una radice unitaria ($\theta(B)$ è il polinomio della parte a media mobile, $\phi(B)$ di quella autoregressiva).

Il test KPSS possiede la struttura del moltiplicatore lagrangiano (LM) o della statistica score ed è dato da:

$$KPSS = \frac{T^{-2} \sum_{t=1}^T \hat{S}_t^2}{\hat{\lambda}^2}, \text{ in cui: } \hat{S}_t = \sum_{k=1}^t \hat{\nu}_k, \hat{\nu}_k \text{ è il residuo della}$$

regressione di Y_t su D_t e $\hat{\lambda}^2$ è lo stimatore consistente di lungo periodo della varianza di ν_t utilizzando $\hat{\nu}_t$. Come nel test PP, $\hat{\lambda}^2$ può assumere le configurazioni dello stimatore di Newey-West oppure di Gallant.

Kwiatkowski, Phillips, Schmidt e Shin hanno dimostrato che sotto l'ipotesi nulla, la statistica test converge ad un processo di Wiener a seconda della forma di D_t , componente deterministica del modello, non dai valori assunti dai coefficienti β della componente stessa. In particolare, se $D_t = 1$:

$KPSS \sim \int_0^1 V_1(r)^2 dr$, con: $V_1(r) = W(r) - rW(1)$, $W(r)$ un moto browniano standard per $r \in [0, 1]$; mentre se $D_t = (1, t)^T$:

$KPSS \sim \int_0^1 V_2(r)^2 dr$, $V_2(r) = W(r) + r(2 - 3r)W(1) + 6r(r^2 + -1) \int_0^1 W(s) ds$.

I valori critici di suddetta statistica devono essere calcolati tramite metodi di simulazione.

5.2 Simulazione distribuzioni del test

Si costruiscono i processi browniani del test ed i corrispondenti valori critici. Il codice è perciò:

```
wiener2 <- function(nobs) {
e <- rnorm(nobs)
e1 <- e - mean(e)
e2 <- residuals(lm(e ~ seq(1,nobs)))
y1 <- cumsum(e1)
y2 <- cumsum(e2)
intW2.1 <- nobs^(-2) * sum(y1 ^2)
intW2.2 <- nobs^(-2) * sum(y2 ^2)
ans <- list(intW2.1=intW2.1,
intW2.2 <- intW2.2)
ans }
```

```

#Simulazione delle distribuzioni del test KPSS: nobs <- 1000
nsim <- 10000
KPSS1 <- rep(0,nsim)
KPSS2 <- rep(0,nsim)
for (i in 1:nsim) {
  BN.moments <- wiener2(nobs)
  KPSS1[i] <- BN.moments$intW2.1
  KPSS2[i] <- BN.moments$intW2.2 }
par(mfrow=c(1,2))
hist(KPSS1, col = "grey", ylab = "", main = "Distribuzione di KPSS
quando Dt = 1")
hist(KPSS2, col = "grey", ylab = "", main = "Distribuzione di KPSS
quando Dt = (1,t)")

```

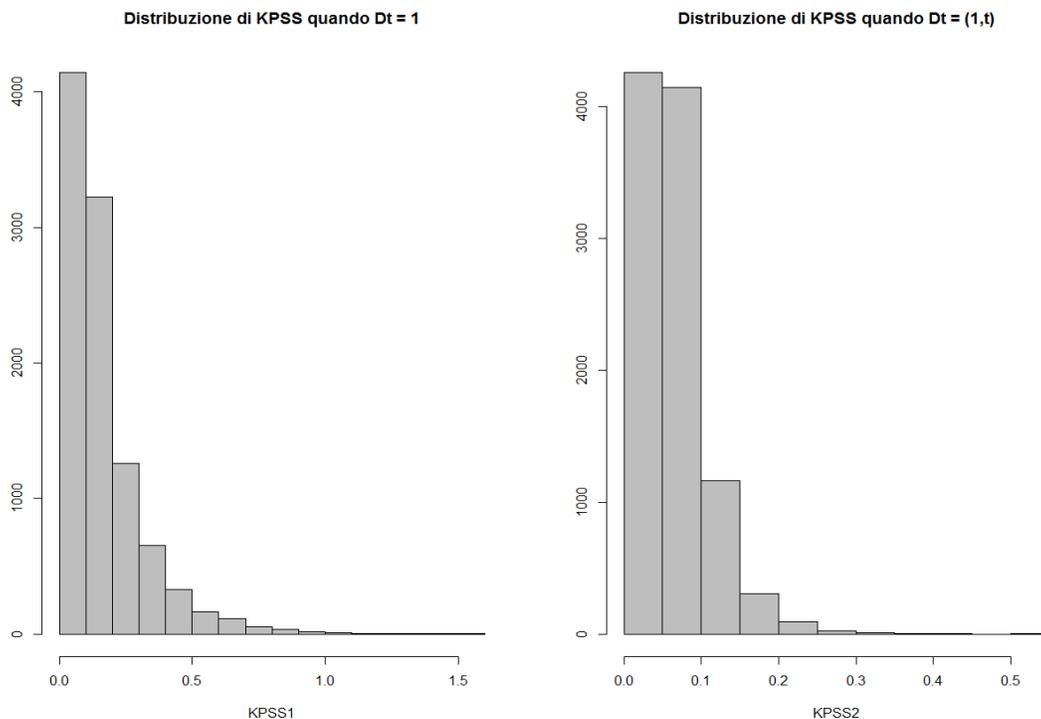


Figura 12. Statistiche del test KPSS sotto l'ipotesi di stazionarietà H_0 .

I quantili sono ottenuti asintoticamente dalle istruzioni :
`quantile(KPSS1 o KPSS2, probs=c(0.90,0.925,0.95,0.975,0.99))`

5.3. Applicazione del KPSS test a due serie economiche reali

Le serie storiche in oggetto d'analisi sono incentrate sui tassi d'interesse e i salari nominali degli Stati Uniti, quest'ultima espressa in logaritmi naturali. Entrambe fanno parte del dataset nporg appartenente alla libreria urca.

```
library(urca)
```

```
data(nporg)
```

```
attach(nporg)
```

```
ir <- na.omit(nporg[, "bnd"]) #na.omit serve per eliminare i valori nulli
```

```
wg <- log(na.omit(nporg[, "wg.n"]))
```

```
ir <- ts(ir, start = 1900, end = 1970, frequency = 1)
```

```
wg <- ts(wg, start = 1900, end = 1970, frequency = 1)
```

```
par(mfrow=c(1,2))
```

```
plot(ir, type = "l", xlab = "Tempo")
```

```
plot(wg, type = "l", xlab = "Tempo")
```

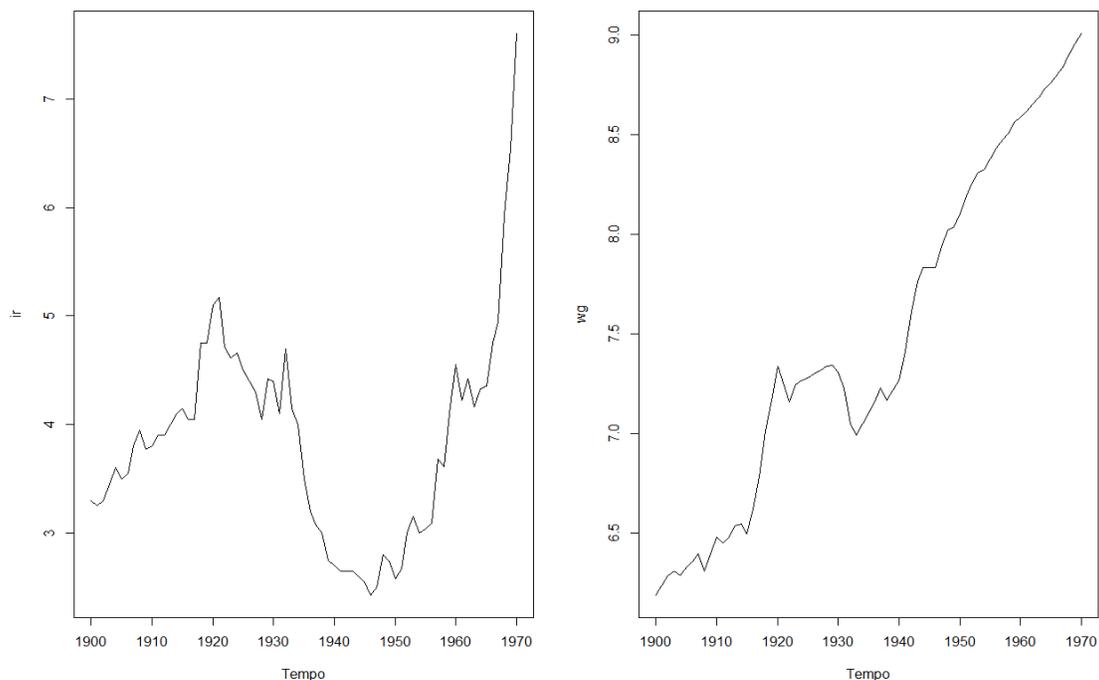


Figura 13. A sinistra i tassi d'interesse ed a destra i salari nominali in logaritmi.

Per ir si usa il modello avente D_t uguale ad una costante; mentre per i salari si ipotizza che D_t abbia le sembianze di una componente deterministica lineare. È stato scelto in ognuno di essi un numero di ritardi uguale a 8. Il metodo `ur.kpss` permette di scegliere la lunghezza del ritardo tra *short* (breve termine), *long* (lungo termine) o *nil* (non viene applicato alcun metodo di correzione dell'errore). *Short* e *long* vengono calcolati con le stesse procedure usate nell'`ur.pp`: $[4(\frac{T}{100})^{1/4}]$ e $[12(\frac{T}{100})^{1/4}]$. In alternativa, si settano i lags manualmente attraverso `use.lag` (come si è fatto con queste serie).

Mu e tau si riferiscono alle statistiche KPSS1 e KPSS2 rispettivamente.

```
irkpss <- ur.kpss(ir, type = "mu", use.lag = 8)
```

```
summary(irkpss)
```

Test is of type: mu with 8 lags.

Value of test-statistic is: 0.1325

Critical value for a significance level of:

	10 pct	5 pct	2.5 pct	1 pct
critical values	0.347	0.463	0.574	0.739

```
wgkpss <- ur.kpss(wg, type = "tau", use.lag = 8)
```

```
summary(wgkpss)
```

Test is of type: tau with 8 lags.

Value of test-statistic is: 0.1007

Critical value for a significance level of:

	10 pct	5 pct	2.5 pct	1 pct
critical values	0.119	0.146	0.176	0.216

Ciascuna delle statistiche non respinge l'ipotesi H_0 di nullità della varianza dell'errore di μ_t , essendo $KPSS_{1,2}^{oss} > q-values$, portando a dire che sia i tassi sia i salari sono trend-stazionari (i.e. $I(0)$).

5.4 Applicazione test KPSS ad una serie finanziaria reale

Lo studio viene condotto sulle azioni della Microsoft Corporation nel periodo dal primo gennaio del 2000 al 31 dicembre del 2013 a cadenza settimanale. I prezzi considerati sono quelli aggiustati per split e dividendi.

```
x <- get.hist.quote(instrument = "MSFT", quote = "AdjClose", start = "2000-01-01", end = "2013-12-31", compression = "w")
```

```
microsoft <- log(x)
```

```
plot(microsoft, xlab = "Tempo")
```

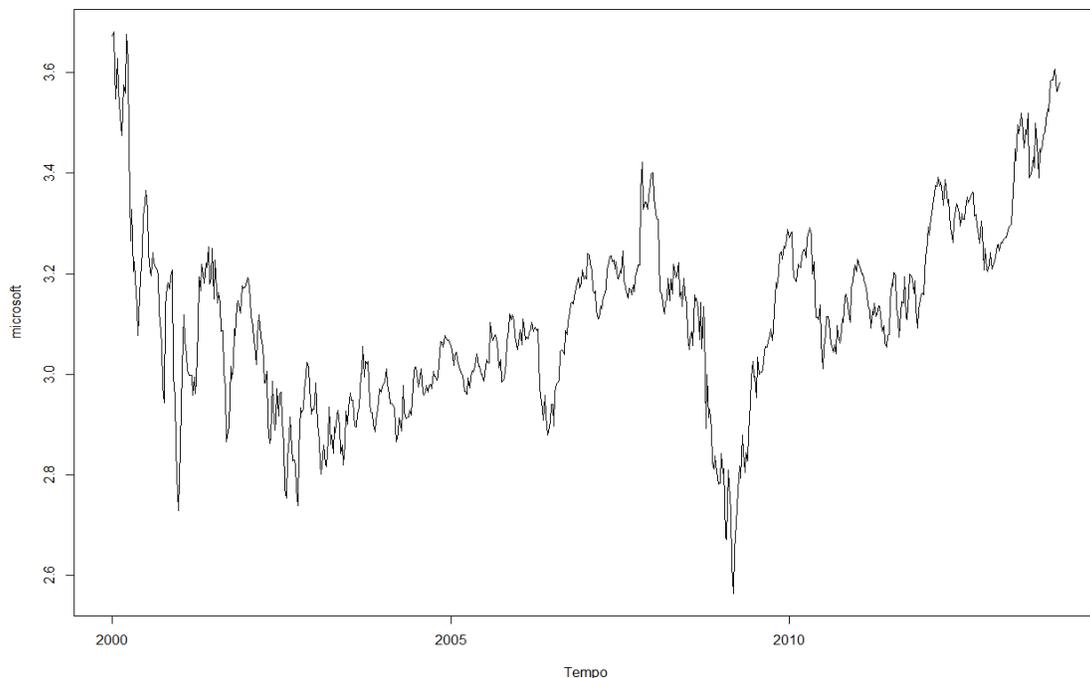


Figura 14. Prezzi di chiusura aggiustati della società Microsoft.

Il grafico sembra evidenziare un processo differenza-stazionario.

```
kpss1 <- ur.kpss(microsoft, type = "mu", lags = "long")
```

```
summary(kpss1) Test is of type: mu with 19 lags.
```

Value of test-statistic is: 1.0191

	10 pct	5 pct	2.5 pct	1 pct
critical values	0.347	0.463	0.574	0.739

La congettura nulla viene rigettata a qualunque livello di significatività. La serie è dunque un RW con drift, come sottolineato dal grafico seguente:

`plot(kpss1)`

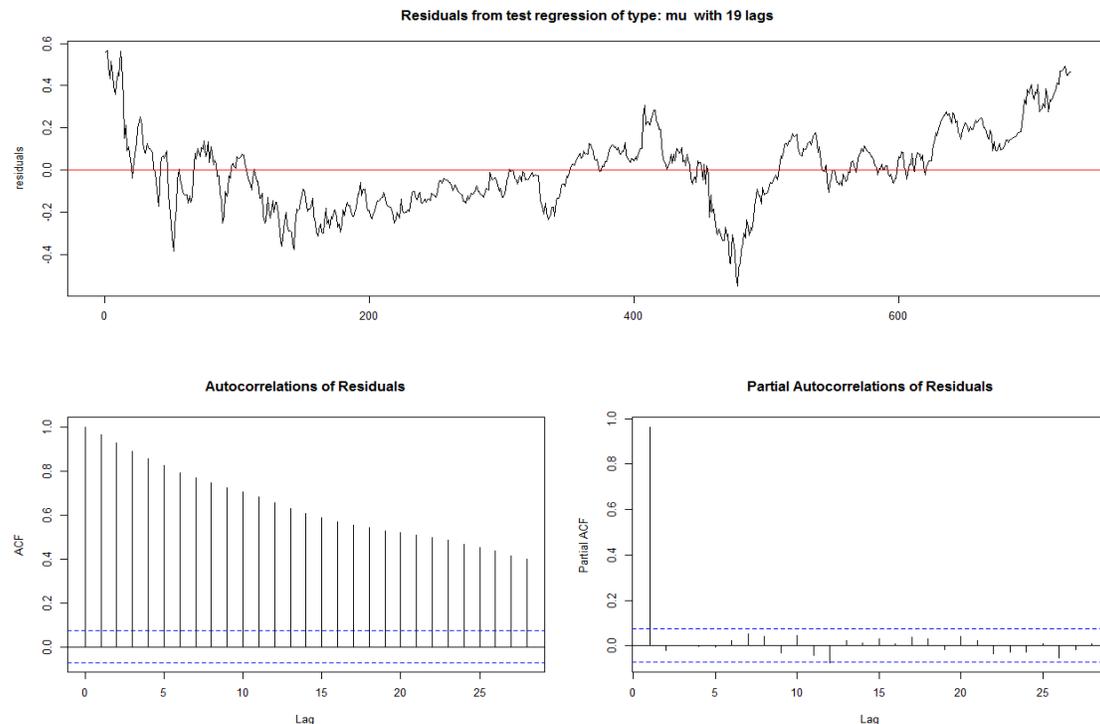


Figura 15. ACF e PACF del test kpss1.

Inoltre, viene eseguito il test KPSS nel processo dove la componente deterministica si ipotizza sia lineare.

```
kpss2 <- ur.kpss(microsoft, type = "tau", lags = "long")
```

```
summary(kpss2)
```

Test is of type: tau with 19 lags.

Value of test-statistic is: 0.3204

	10 pct	5 pct	2.5 pct	1 pct
critical values	0.119	0.146	0.176	0.216

L'ipotesi di trend-stazionarietà viene nuovamente respinta, il che implica di fatto che Y_t è un $I(1)$, anzi, un random walk con costante.

Test di Elliot, Rothenberg e Stock - ERS tests

6.1 Caratteristiche

I test di radice unitaria utilizzati sinora presentano notevoli inconvenienti. Soprattutto, Schwert (1989) ha scoperto che supponendo ΔY_t sia un modello ARMA con un'ampia e negativa componente a media mobile, i test ADF e PP rigettano con troppa facilità l'ipotesi nulla rappresentante la serie come un $I(1)$ quando è vera; addirittura, il test PP è maggiormente distorto. Caner e Killian (2001) hanno trovato problemi simili nel KPSS. I test che verranno adesso presentati cercano di oltrepassare i limiti trovati. Essi sono conosciuti come *Efficient unit root tests*, Test efficienti di radice unitaria. Si assuma che la serie storica sia stata generata da: $Y_t = \beta^T D_t + \nu_t$, per la quale: $\nu_t = \phi \nu_{t-1} + \epsilon_t$, $E[\nu_0] < \infty$, ϵ_t sia un processo erratico con valore atteso uguale a 0 e varianza di lungo termine λ^2 . Si consideri l'ipotesi $\phi = 1$ contro $|\phi| < 1$. Se si conosce la distribuzione dei dati, il Lemma di Neyman-Pearson, che si basa sul rapporto tra le verosimiglianze sotto l'ipotesi H_0 ed H_1 , fornisce il test "uniformemente più potente" (cioè presenta a pari livello di significatività una funzione di potenza uniformemente superiore a quella di ogni altro test rispetto ad una specifica ipotesi alternativa) confrontato con qualsiasi altro punto ϕ^* . La funzione di potenza esprime la probabilità di rifiuto dell'ipotesi nulla quando l'alternativa risulta vera. La potenza di questo test ottimale è concepita come una funzione di ϕ^* fornente un limite superiore (*envelope*) per la potenza di qualunque altro test che si basa sulla stessa distribuzione dei dati. Un aspetto non desiderabile di questo *power envelope* è che dipende da ϕ^* e non sono presenti

test uniformi con maggior potenza piena da usare per $|\phi| < 1$. Tuttavia, i test sviluppati da Elliot, Rothenberg e Stock (ERS) (2001) possiedono delle statistiche test le quali si avvicinano molto al *power envelope* per un ampia gamma di alternative (con $\phi = 1 + c/T$, $c < 0$).

6.2 Point optimal unit root test - P_T test

6.2.1 Peculiarità

Il punto iniziale degli ERS test è la statistica asintoticamente ottimale all'alternativa $\phi^* = 1 - c^*/T$, $c^* < 0$. Si definisce il vettore T -dimensionale y_ϕ e la matrice D_ϕ $T \times q$ dimensionale:

$$y_\phi = (y_1, y_2 - \phi y_1, \dots, y_T - \phi y_{T-1})^T;$$

$$D_\phi = (D_1^T, D_2^T - \phi D_1^T, \dots, D_T^T - \phi D_{T-1}^T)^T.$$

Successivamente, $\forall \phi$, si costruisce $S(\phi)$ come la somma dei quadrati dei residui della regressione lineare di y_ϕ su D_ϕ :

$$S(\phi) = \tilde{y}_\phi^T \tilde{y}_\phi, \text{ dove: } \tilde{y}_\phi = y_\phi - D_\phi \hat{\beta}_\phi, \hat{\beta}_\phi = (D_\phi^T D_\phi)^{-1} D_\phi^T y_\phi.$$

Il primo test ERS studiato è il P_T . Esso ha la forma:

$$P_T = (S(\phi^*) - \phi^* S(1)) / \hat{\lambda}^2.$$

I quantili sono stati tabulati da Elliot, Rothenberg e Stock (2001) per le stesse strutture della componente deterministica utilizzate nel test KPSS. Conducendo vari esperimenti, gli autori del test hanno trovato che se $\phi^* = 1 + c^*/T$ è scelto in modo che la potenza di P_T sia tangente al *power envelope* al 50% di potenza, la potenza complessiva di P_T , per un ampio raggio di valori di ϕ^* minori di 1, è vicina al *power envelope* stesso. Per un dato campione di ampiezza T , il valore di ϕ^* nel P_T avente il 50% di potenza, è influenzato dal valore di c^* e dalla struttura dell'elemento deterministico della serie storica (i.e. D_t).

Se $D_t = 1$, $c^* = -7$; se $D_t = (1, t)^T$, $c^* = -13.5$.

6.2.2 Applicazione del test ad una serie economica reale

Il prodotto nazionale lordo (PNL) reale, calcolato in logaritmi, degli Stati Uniti viene sottoposto all'analisi del test P_T .

```
library(urca)
data(nporg)
attach(nporg)
PNLreale <- log(na.omit(nporg[, "gnp.r"]))
PNLreale <- ts(PNLreale, start = 1909, end = 1970, frequency =
1)
plot(PNLreale, xlab = "Tempo")
```

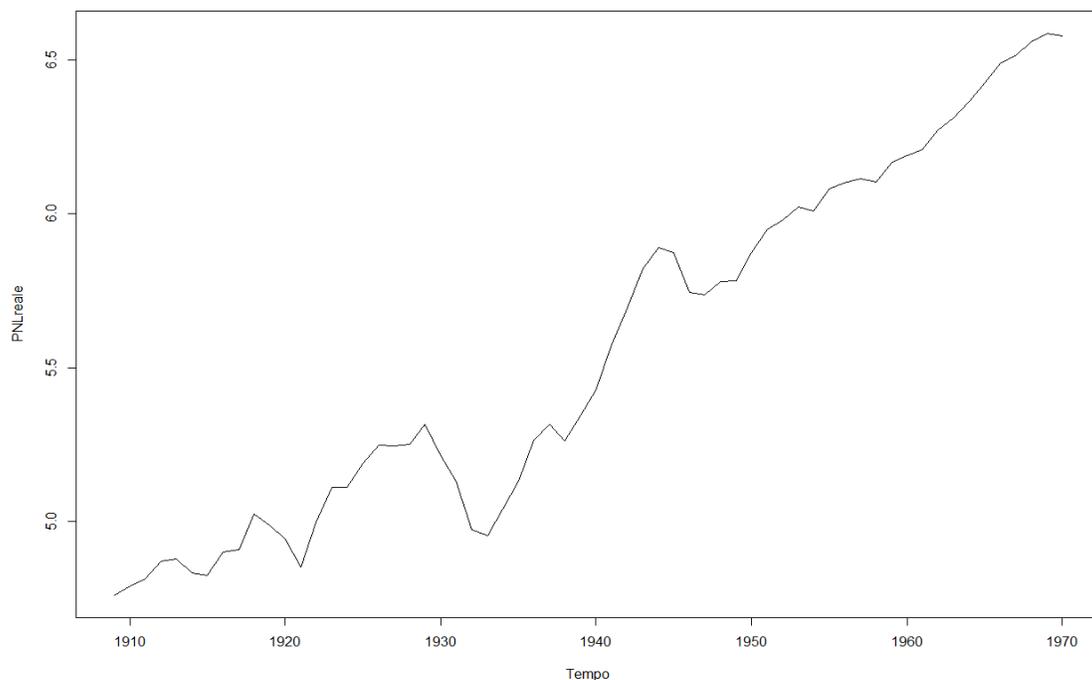


Figura 16. Prodotto nazionale lordo (dall'inglese *Gross National Product*, GNP) degli USA.

```
pt <- ur.ers(PNLreale, type = "P-test", model = "trend")
summary(pt)
Test of type P-test
detrrending of series with intercept and trend
```

Value of test-statistic is: 6.6528.

Critical values of P-test are:

	1 pct	5 pct	10 pct
critical values	4.26	5.64	6.79

Non si rifiuta l'ipotesi nulla all'1% e al 5%. Al 10% il test indicherebbe un processo $I(0)$ per via del fatto che $P_T^{oss} < 6.79$. Benché al 10% la statistica indichi il contrario, si stabilisce che la serie temporale è differenza-stazionaria ($I(1)$).

Effettuando il controllo sul modello differenziato:

```
PNLDiff <- diff(PNLreale)
```

```
pt2 <- ur.ers(PNLDiff, type = "P-test", model = "trend")
```

```
summary(pt2)
```

Value of test-statistic is: 2.6761.

Il valore osservato della statistica è sempre minore dei q -values appena riportati. La serie ottiene la stazionarietà differenziandola una sola volta, essendo il valore del point optimal test minore dei quantili e dunque l'ipotesi H_0 rifiutata (i.e. il processo è $I(1)$). Il metodo `ur.es` sfrutta il criterio Bayesiano, detto BIC, per il numero ottimale di ritardi.

6.2.3 Applicazione del test ad una serie finanziaria reale

Si studiano le fluttuazioni del tasso di cambio giornaliero dollaro-euro per il periodo dal 29 dicembre del 2008 al 30 dicembre del 2014 (fonte: Federal Reserve Economic Data).

```
x <- read.csv("DEXUSEU.csv", header = TRUE, sep = ",", dec = ".", na.strings = ".") #na.strings serve per indicare ad R come interpretare i valori nulli
```

```
attach(x)
```

```
dollaro.euro <- log(na.omit(x[, "VALUE"]))
```

```
plot(dollaro.euro, xlab = "Tempo")
```

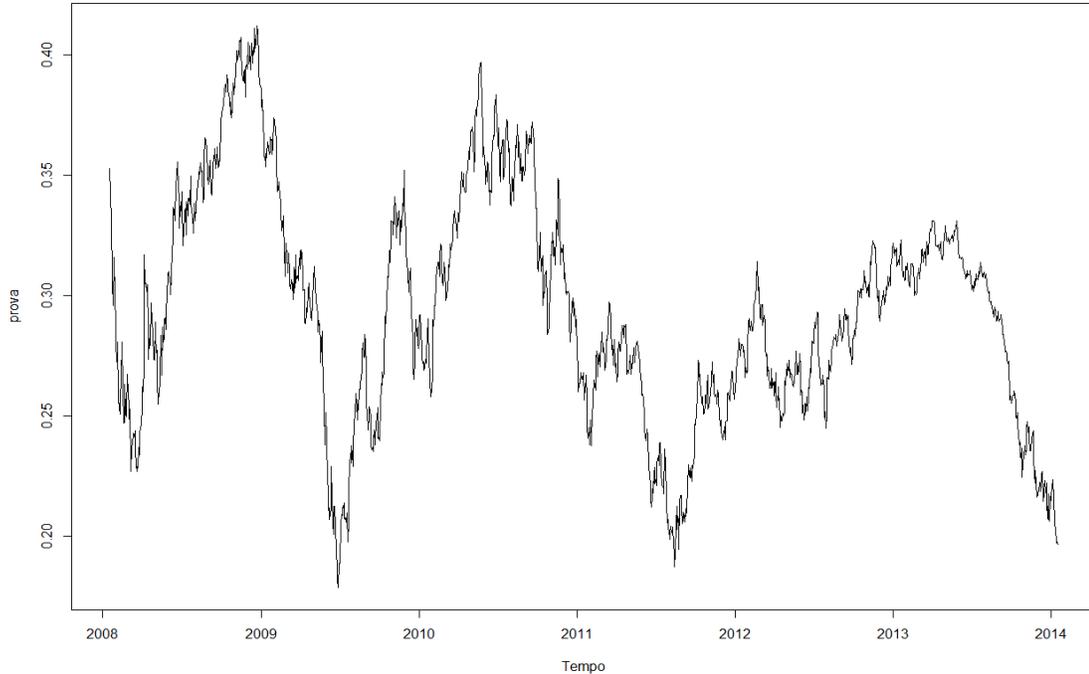


Figura 17. Tasso di cambio US-EU (dollaro-euro) giornaliero.

```
pt.trend <- ur.ers(eurodollaro, type = "P-test", model = "trend")
summary(pt.trend)
```

Value of test-statistic is: 7.6059. Critical values of P-test are:

	1 pct	5 pct	10 pct
critical values	3.96	5.62	6.89

Ci si accorge che $P_T^{oss} > q - values$. L'ipotesi d'unitarietà della radice non viene rigettata e quindi la serie è un processo differenza stazionario. Verificando il modello con la sola costante:

```
pt.drift <- ur.ers(eurodollaro, type = "P-test", model = "constant")
summary(pt.drift)
```

Value of test-statistic is: 7.3711. Critical values of P-test are:

	1 pct	5 pct	10 pct
critical values	1.99	3.26	4.48

Il test conferma quanto detto: il tasso di cambio Us-Eu è un D-S.

6.3 DF-GLS test

6.3.1 Caratteristiche

Il test DF-GLS è un test di radice unitaria costruito come versione efficiente dell'ADF. Nel dettaglio, la statistica t corrispondente al test DF facente parte degli ERS, è indotta così: Si crea la serie detrendizzata: $Y_t^d = Y_t - \hat{\beta}_{\phi^*} D_t$. La procedura è stata chiamata da ERS *GLS detrending*. (Per i dati ottenuti dalla componente deterministica ed aventi deviazioni ergodico-stazionarie dal trend, il teorema di Grenander assicura che le stime dei minimi quadrati dei parametri del trend, le quali ignorano la correlazione seriale, sono asintoticamente equivalenti alle stime dei minimi quadrati generalizzati includenti la correlazione seriale).

Poi, si stima il modello: $\Delta Y_t^d = \pi Y_{t-1}^d + \sum_{k=1}^{p-1} \psi_k \Delta Y_{t-k} + \epsilon_t$ e la corrispondente statistica $t_{\pi=0}$. Se $D_t = 1$, gli autori del test hanno scoperto che la distribuzione asintotica del DF-GLS è la stessa dell'ADF, però presenta maggior potenza nella discriminazione tra una radice unitaria ed una vicina all'unità. Per di più, ha lo stesso potere del test P_T quando $c^* = -7$. Invece, se $D_t = (1, t)^T$, DF-GLS ha una distribuzione diversa dalla statistica derivata dal test ADF. I valori critici sono stati tabulati da ERS, Ng e Perron (2001); il test ADF efficiente possiede la stessa potenza del P_T se $c^* = -13.5$.

6.3.2 Applicazione ad una serie economica reale

Si riprende la serie del consumo lc nel dataset Raotbl3.

```
data(Raotbl3)
```

```
y <- lc
```

```
y <- ts(y, start = c(1966,4), end = c(1991,2), frequency = 4)
dfgls1 <- ur.ers(y, type = "DF-GLS", model = "trend", lag.max = 3)
summary(dfgls1)
```

Value of test-statistic is: -2.2758

Critical values of DF-GLS are:

	1 pct	5 pct	10 pct
critical values	-3.58	-3.03	-2.74

Il processo ha una radice pari a 1, essendo l'ipotesi nulla mai respinta. Nel modello con la costante:

```
dfgls2 <- ur.ers(y, type = "DF-GLS", model = "constant", lag.max = 3)
summary(dfgls2)
```

Value of test-statistic is: 1.2326

Critical values of DF-GLS are:

	1 pct	5 pct	10 pct
critical values	-2.59	-1.94	-1.62

Il valore osservato di t è nettamente maggiore dei valori simulati. Gli esiti sono in perfetta sintonia con quelli formulati dall'ADF: Y_t è differenza-stazionaria, quindi un processo $I(1)$. Essa non si distribuisce nemmeno come un $I(2)$, poiché l'ipotesi nulla viene rifiutata:

```
z <- diff(y)
```

```
i2 <- ur.ers(z, type = "DF-GLS", model = "trend", lag.max = 3)
```

```
summary(i2)
```

Value of test-statistic is: -4.3606

Critical values of DF-GLS are:

	1 pct	5 pct	10 pct
critical values	-3.58	-3.03	-2.74

6.3.3 Applicazione ad una serie finanziaria reale

L'analisi viene condotta sulla serie storica finanziaria già usufruita nel test ADF, l'indice giornaliero del FTSE londinese.

```
y <- get.hist.quote(instrument = "^GSPC", quote = "Close", start = "1995-01-01", end = "2001-12-31", compression = "d")
```

```
ftse <- log(y)
```

```
ftse.dfgls1 <- ur.ers(ftse, type = "DF-GLS", model = "trend", lag.max = 7)
```

```
summary(sp500.dfgls1)
```

Value of test-statistic is: -1.5366.

Critical values of DF-GLS are:

	1 pct	5 pct	10 pct
critical values	-3.48	-2.89	-2.57

Inoltre:

```
ftse.dfgls2 <- ur.ers(ftse, type = "DF-GLS", model = "constant", lag.max = 7)
```

```
summary(ftse.dfgls2)
```

Value of test-statistic is: 1.1248

Critical values of DF-GLS are:

	1 pct	5 pct	10 pct
critical values	-2.57	-1.94	-1.62

$t^{d\text{ oss}} > DF - GLS\ q - value$ a qualunque livello di significatività scelto, dove con d si intende detrending. La serie temporale risulta differenza-stazionaria, come già affermato dagli esiti del test ADF e PP.

Il test efficiente DF-GLS fornisce gli stessi risultati dei due precedenti test di radice unitaria applicati alle medesime serie.

Test di Schmidt-Phillips - SP test

7.1. Peculiarità

Il test SP è un tipo di test a radice unitaria definente lo stesso set dei parametri di disturbo (dall'inglese *nuisance parameters*) nelle ipotesi; per giunta, esso considera una funzione polinomiale di grado superiore ad 1 per costruire l'elemento deterministico. E.g. nella serie economica lc più volte impiegata in cui D_t è formata dalla sola costante, α_0 ha la funzione di componente deterministica sotto l'ipotesi nulla; nell'ipotesi H_1 , è intesa come un regressore per la serie. Schmidt e Phillips hanno sviluppato dunque una statistica test per superare questo limite. Essa presenta la struttura di un moltiplicatore lagrangiano (LM, lagrange multiplier) descritta qui sotto.

Si definisce:

$$Y_t = \beta + Z_t\delta + x_t, \quad x_t = \pi x_{t-1} + \epsilon_t, \quad \text{avente: } \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \quad \forall t \text{ e}$$

$Z_t = (t, t^2, \dots, t^p)$. Avvalendosi dell'operatore ritardo:

$$\Delta Y_t = \Delta Z_t\delta + \nu_t, \quad \text{si costruisce: } \tilde{\varphi}_x = y_1 - Z_1\tilde{\delta}, \quad \text{ove } \tilde{\delta} \text{ è la stima}$$

OLS di δ nel modello differenziato. Definendo: $\tilde{S}_t = y_t - \tilde{\varphi}_x - Z_t\tilde{\delta}$,

si arriva al processo che permette di derivare la statistica test $\tilde{\rho}$:

$$\Delta Y_t = \Delta Z_t\gamma + \phi\tilde{S}_{t-1} + \eta_t, \quad \text{in cui } \eta_t \text{ è una componente erratica di quest'ultima serie differenziata.}$$

Perciò: $Z(\rho) = \frac{\tilde{\rho}}{\hat{\omega}^2} = \frac{T\tilde{\phi}}{\hat{\omega}^2}$, $\tilde{\phi}$ stima OLS di ϕ , e

$$\hat{\omega}^2 = \frac{T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t^2}{T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t^2 + 2T^{-1} \sum_{j=1}^l \sum_{t=j+1}^T \hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_{t-j}}. \quad \hat{\epsilon}_t \text{ sono i residui di } \epsilon_t.$$

Un'altra statistica t-ratio che risulta possibile creare è: $Z(t) = \frac{\tilde{\tau}}{\hat{\omega}^2}$ per saggiare $\phi = 0$.

7.2 Applicazione ad una serie economica reale

Il dataset impiegato è l'nporg, contenente la variabile d'interesse, il prodotto nazionale lordo in termini nominali stavolta. L'SP test è anch'esso parte della libreria urca, noto con la sigla ur.sp. Per la serie temporale, si utilizza un trend quadratico, suggerito dal grafico sottostante.

```
library(urca)
data(nporg)
attach(nporg)
PNLnom <- na.omit(nporg[, "gnp.n"])
PNLnom <- ts(PNLnom, start = 1909, end = 1970, frequency =
1)
plot(PNLnom, xlab = "Tempo")
```

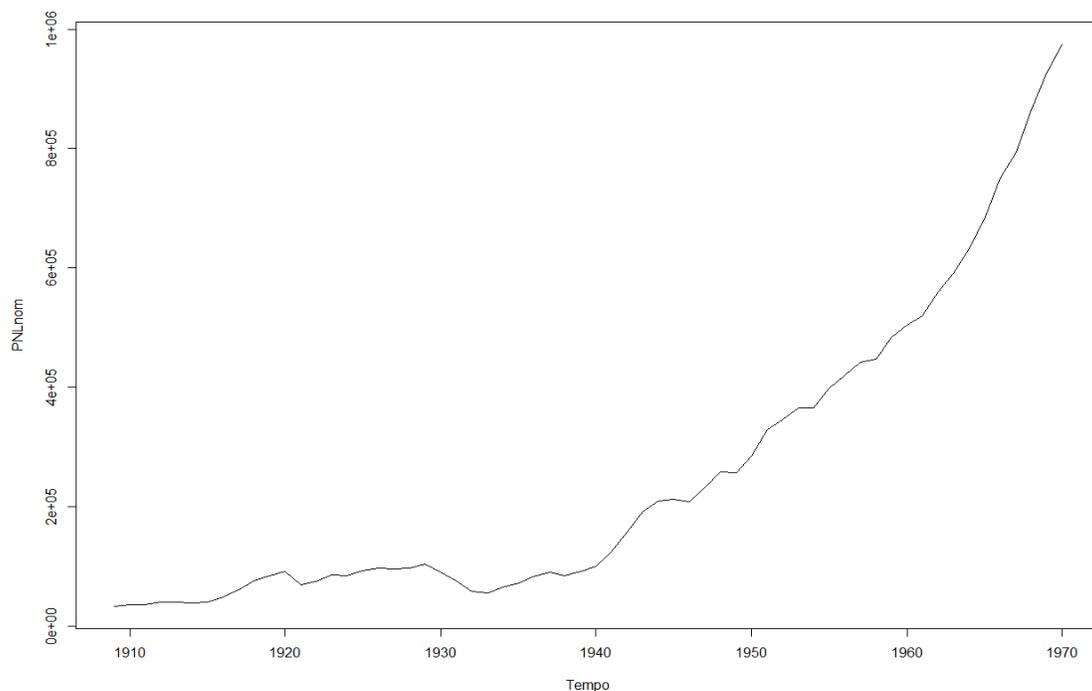


Figura 18. Prodotto nazionale lordo nominale degli USA.

```
sp.tilde <- ur.sp(PNLnom, type = "rho", pol.deg = 2, signif = 0.05)
summary(sp.tilde)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	9355.40157	7395.30256	1.265	0.2110
y.lagged	0.98813	0.04112	24.033	<2e-16
trend.exp1	-982.32296	610.13476	-1.610	0.1129
trend.exp2	30.27619	16.15727	1.874	0.0661

Value of test-statistic is: -8.5056.

Critical values (per ciascun livello di significatività):

	1 pct	5 pct	10 pct
$\tilde{\rho}$	-30.40	-23.70	-20.40

Il valore assunto da $\tilde{\rho}$ non è mai inferiore ai quantili tabulati. Il test segnala una serie storica puramente differenza-stazionaria.

Proseguendo con la statistica $\tilde{\tau}$:

```
sp.tau <- ur.sp(PNLnom, type = "tau", pol.deg = 2, signif = 0.05)
```

```
summary(sp.tau)
```

Value of test-statistic is: -2.0257

Critical values

	1 pct	5 pct	10 pct
$\tilde{\tau}$	-4.16	-3.65	-3.34

Si accetta l'ipotesi della radice pari ad 1 a tutti i livelli fissati (ovvero 1, 5, 10%). Il modello a cui il PNL si rifà è un $I(1)$ pertanto.

7.3 Applicazione ad una serie finanziaria reale

Si sottopone ad esame la serie giornaliera dei prezzi delle azioni secondo l'indice SP500. La serie viene stimata con una funzione polinomiale di grado 2. (Fonte: yahoo.finance)

```
library(tseries)
```

```
x <- get.hist.quote(instrument = "^GSPC", quote = "AdjClose", start = "1992-01-01", end = "2001-12-30", compression = "d")
```

```
sp500 <- log(x)
```

```
plot(sp500, xlab = "Tempo")
```

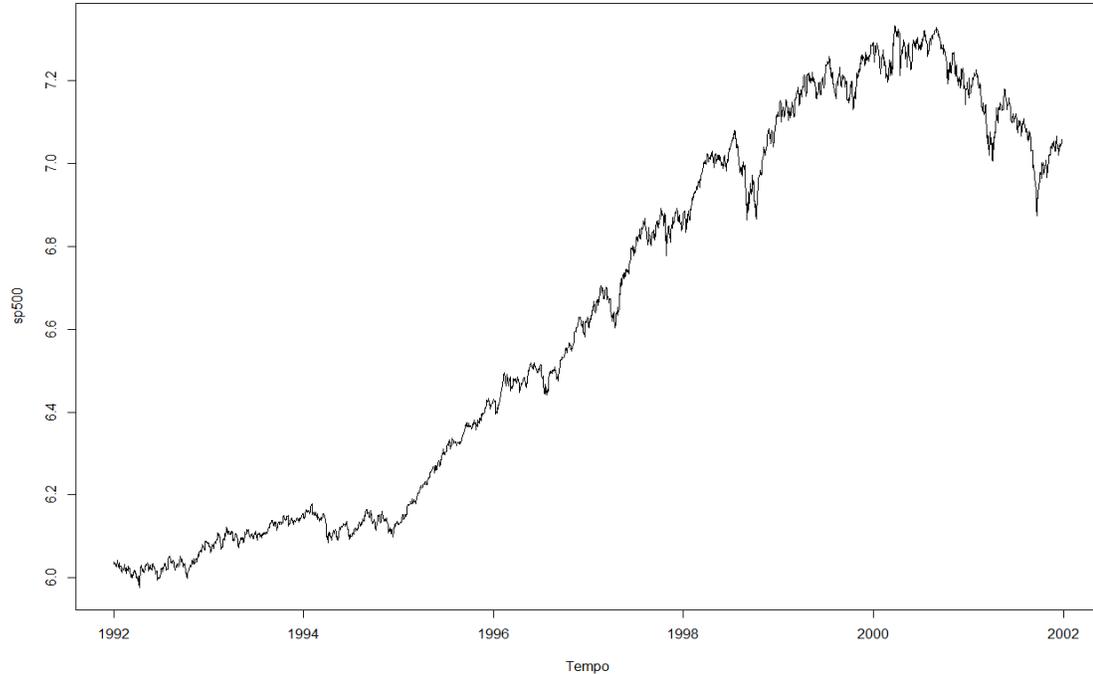


Figura 19. Prices di chiusura aggiustati delle stocks secondo lo SP500.

```
sp1 <- ur.sp(sp500, type = "tau", pol.deg = 2, signif = 0.05)
```

```
summary(sp1)
```

Value of test-statistic is: -0.6831. Critical values:

	1 pct	5 pct	10 pct
$\tilde{\tau}$	-4.06	-3.53	-3.26

Per $\tilde{\rho}$:

```
sp2 <- ur.sp(sp500, type = "rho", pol.deg = 2, signif = 0.05)
```

```
summary(sp2)
```

Value of test-statistic is: -0.9334. Critical values:

	1 pct	5 pct	10 pct
$\tilde{\rho}$	-32.6	-24.7	-21.1

I test conducono a non rigettare l'ipotesi di radice unitaria. Il processo stocastico che ben rappresenta il logaritmo dei prezzi aggiustati delle azioni secondo l'SP500 è un differenzazionario, i.e. $I(1)$.

Test di Zivot - Andrews - ZA test

8.1 Caratteristiche

I processi autoregressivi su cui si implementano gli *unit root tests* potrebbero presentare i cosiddetti break strutturali (*structural breaks*, ossia cambiamenti di regime). Essi possono derivare e.g. da interventi di politica economica o dalla ridefinizione dei dati della serie temporale che potrebbe essere causata dalla nuova definizione per contare il numero di disoccupati decretata. Il modo per cercare di modellare i break è ricorrere alle variabili dummy. Si prenda in considerazione il seguente processo generatore dei dati (GDP):

$$Y_t = \alpha_0 + \delta S_t + y_0 + \sum_{i=1}^t \epsilon_t, S_t = 1 \text{ se } t \geq \tau; 0 \text{ altrimenti.}$$

Il break fa sentire i suoi effetti su tutta la serie storica. Si simula sia un random walk con drift sia un RW con drift e break:

```
T <- 300
x <- rnorm(T) + 0.5
y1 <- cumsum(x)
S <- c(rep(0,149), rep(1,151))
y2 <- 6*S + cumsum(x)
plot(y1,type = "l", lty = 1, ylab = "", xlab = "")
lines(y2, lty = 2)
legend(10,140, legend = c("RW con drift", "RW con drift e break"),
lty = c(1,2))
```

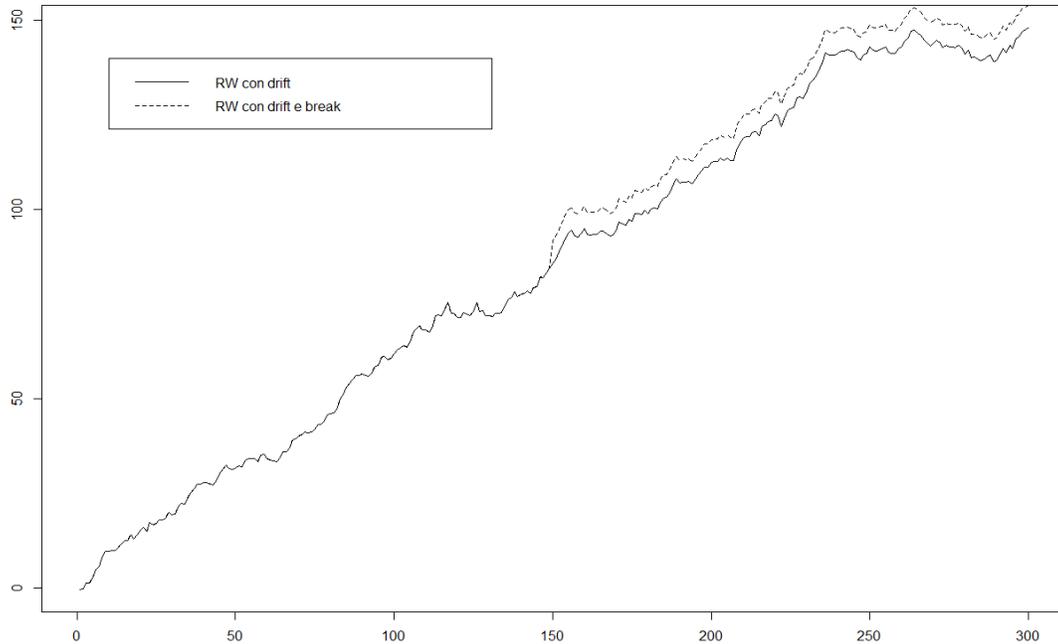


Figura 20. Confronto processi random walk con e senza break strutturali.

La difficoltà nello stabilire se una serie temporale è differenziale o trend-stazionaria è indotta dalla presenza dello shift, cioè del break strutturale compreso nel *GDP* della serie. Il test di Zivot e Andrews è una versione modificata di quello creato da Perron che si basa sulla versione aggiustata del test ADF per processi con breaks. La differenza tra quest'ultimo e il ZA risiede in primis nella composizione dello shift: nel test di Perron si ipotizza che la struttura del *break point* sia conosciuta a priori; nel ZA esso è definito esogeneamente, oltrepassandone uno degli ampi limiti. Un ulteriore limite del test di Perron è la propensione a rigettare l'ipotesi di radice unitaria. Il criterio a cui il test ZA fa fronte è nello scegliere la data dello shift nel punto che fornisce il risultato meno favorevole per l'ipotesi nulla di coincidenza con un processo random walk con drift.

La statistica test è molto simile a quella del test di Perron (si ricorda che quest'ultimo è una versione dell'ADF per processi AR(p) con punti di break): $t_{\hat{\alpha}^i}[\hat{\lambda}_{inf}^i] = \inf_{\lambda \in \Delta} t_{\hat{\alpha}^i}(\lambda)$ per $i = A, B, C$, in cui Δ è un sottoinsieme chiuso dell'intervallo $(0, 1)$. t dipende dunque dalla regressione usata. Esse sono:

$$Y_t = \hat{\mu}^A + \hat{\theta}^A DU_t(\hat{\lambda}) + \hat{\beta}^A t + \hat{\alpha}^A Y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \hat{c}_i^A \Delta Y_{t-i} + \hat{\epsilon}_t;$$

$$Y_t = \hat{\mu}^B + \hat{\beta}^B t + \hat{\gamma}^B DT_t^*(\hat{\lambda}) + \hat{\alpha}^B Y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \hat{c}_i^B \Delta Y_{t-i} + \hat{\epsilon}_t;$$

$$Y_t = \hat{\mu}^C + \hat{\theta}^C DU_t(\hat{\lambda}) + \hat{\beta}^C t + \hat{\gamma}^C DT_t^*(\hat{\lambda}) + \hat{\alpha}^C Y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \hat{c}_i^C \Delta Y_{t-i} + \hat{\epsilon}_t, \quad DU_t(\lambda) = 1 \text{ se } t > T\lambda; 0 \text{ altrimenti, } DT_t^*(\lambda) = t - T\lambda \text{ se } t > T\lambda; 0 \text{ altrimenti.}$$

8.2 Applicazione a due serie economiche reali

Il dataset rimane nporg, ma vengono studiate le serie dei salari nominali e reali degli Stati Uniti d'America (la serie dei nominal wages è stata studiata anche dal test KPSS). Nel comando ur.za, intercept corrisponde al primo dei modelli appena riportati; trend al secondo e both all'ultimo.

```
library(urca)
```

```
data(nporg)
```

```
salari.nom <- log(na.omit(nporg[, "wg.n"]))
```

```
salari.reali <- log(na.omit(nporg[, "wg.r"]))
```

```
za.nom <- ur.za(salari.nom, model = "intercept", lag = 7)
```

```
summary(za.nom)
```

```
Teststatistic: -5.3024.
```

```
Critical values:
```

	1 pct	5 pct	10 pct
t	-5.34	-4.80	-4.58

Potential break point at position: 30.

Per i salari reali:

```
za.reali <- ur.za(salari.reali, model = "both", lag = 8)
```

```
summary(za.reali)
```

Teststatistic: -4.7441.

Critical values:

	1 pct	5 pct	10 pct
<i>t</i>	-5.57	-5.08	-4.82

Potential break point at position: 41.

L'ipotesi d'unitarietà della radice, nella serie dei salari nominali, non verrebbe rigettata all'1%, però sia all'5% sia al 10% si concluderebbe che essa è T-S. Nei salari reali, H_0 viene sempre non rigettata, dunque è D-S. L'istruzione plot di ur.za permette di disegnare il modello della statistica t (se c'è un break strutturale, viene evidenziato con una linea verticale tratteggiata):

```
plot(za.nom)
```

```
plot(za.reali)
```

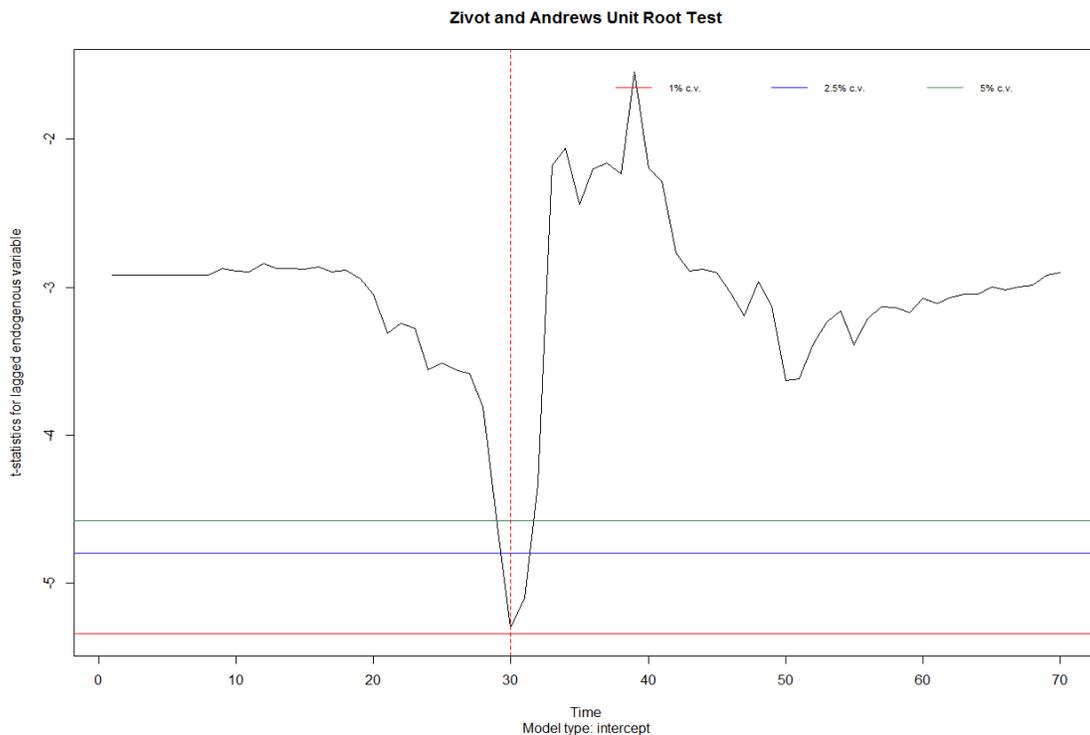


Figura 21. Modello statistica test salari nominali nel quale sussiste uno shift.

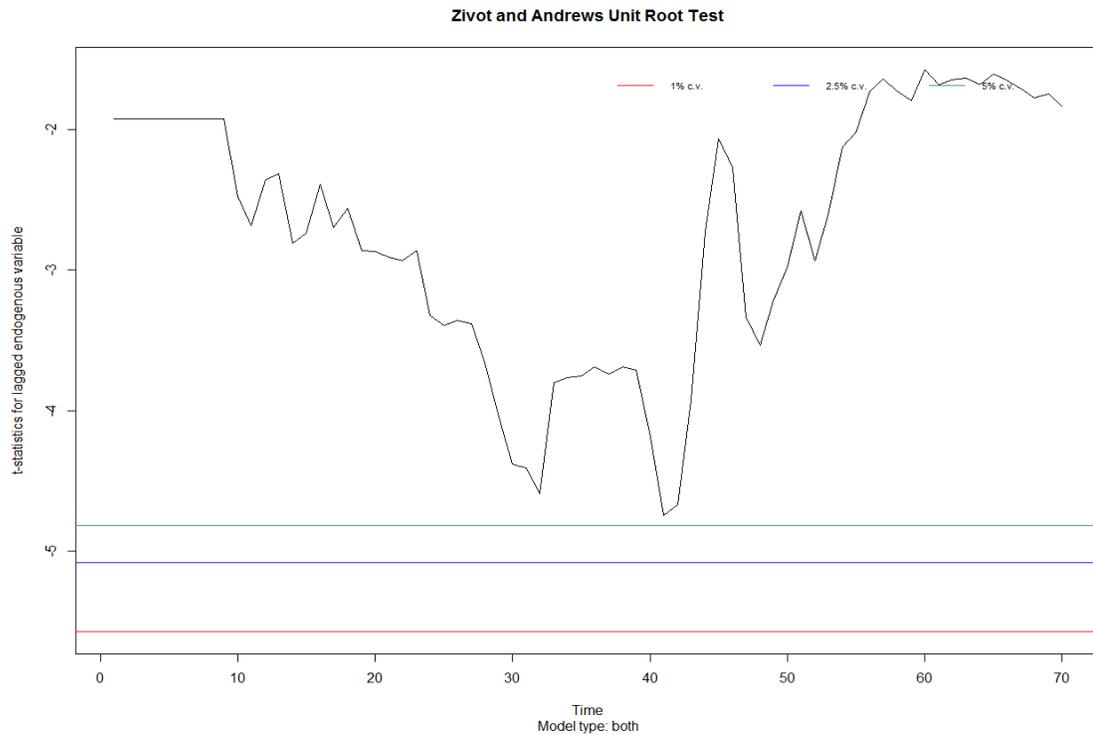


Figura 22. Modello statistica test salari reali.

8.3 Applicazione del test ad una serie finanziaria reale

Si prende la serie giornaliera del tasso cambio yen-dollaro dal 29 dicembre del 1997 al 30 dicembre del 2008 appartenente al dataset DEXJPUS.csv. (Fonte: Federal Reserve Economic Data)

```
y <- read.csv("DEXJPUS.csv", header = T, sep = ",", dec = ".",
na.strings = ".")
```

```
attach(y)
```

```
yen.dollaro <- log(na.omit(y[, "VALUE"]))
```

```
plot(yen.dollaro, xlab = "Tempo")
```

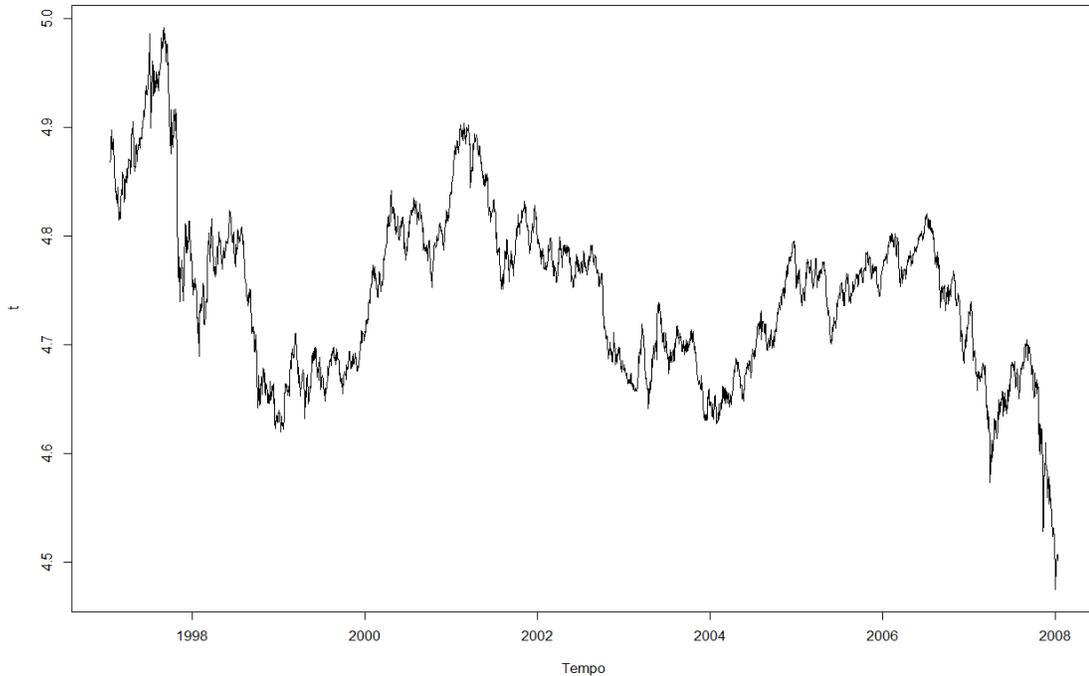


Figura 23. Tasso di cambio yen giapponese-dollaro.

```
yenUs.a <- ur.za(yenUs.a, model = "intercept")
summary(yenUs.a)
```

Teststatistic: -2.9584. Critical values:

	1 pct	5 pct	10 pct
t	-5.34	-4.80	-4.58

Potential break point at position: 2713.

Il valore osservato di t è più grande rispetto ai quantili tabulati.

Y_t risulta essere un RW con drift e non possiede punti di break strutturali. Si giunge alle identiche deduzioni attraverso la regressione successiva:

```
yenUs.b <- ur.za(yen.dollaro, model = "both")
summary(yenUs.b)
```

Teststatistic: -3.0608. Potential break point at position: 158.

	1 pct	5 pct	10 pct
t	-5.57	-5.08	-4.82

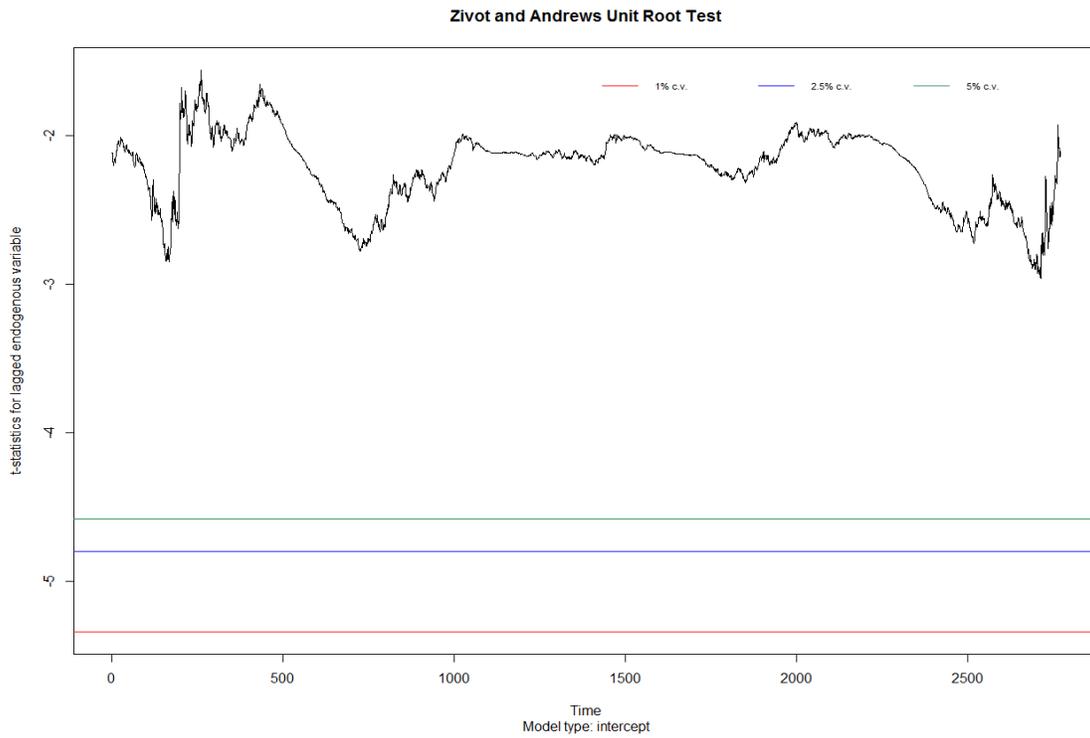


Figura 24. Processo statistica test con intercetta.

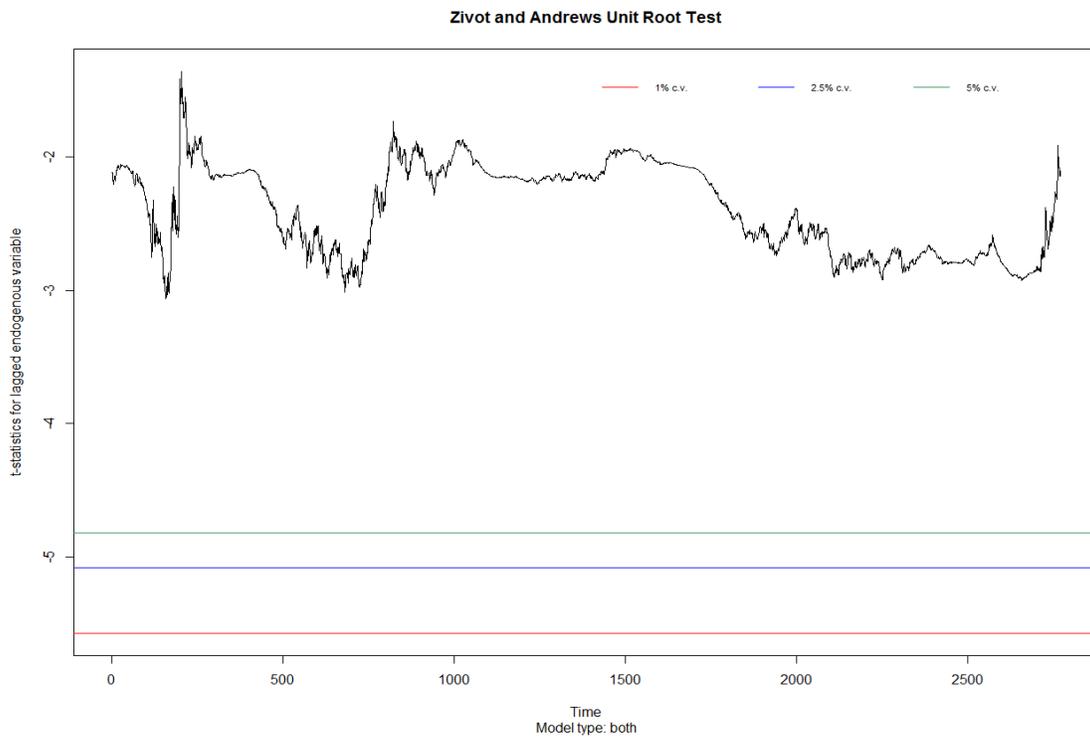


Figura 25. Processo statistica test con intercetta e trend lineare.

Verifica dei limiti dei test ADF e PP

Si eseguono degli esperimenti su delle serie simulate, per cogliere i limiti principali intrinseci nei test ADF e PP, ossia la loro propensione a non rifiutare l'ipotesi d'unitarietà ed a non indicare un processo $I(1)$ quando si inizia da un ARMA non stazionario con coefficienti della parte a media mobile ampiamente negativi.

```
T <- 1000
```

```
library(urca)
```

Si inizia sottoponendo ad esame il test DF per un processo AR(1) con valore atteso nullo:

```
#Simulazioni processi ARIMA tramite il metodo arima.sim()
```

```
y1 <- arima.sim(list(order = c(1,0,0), ar = 0.800), n = T)
```

```
y2 <- arima.sim(list(order = c(1,0,0), ar = 0.900), n = T)
```

```
y3 <- arima.sim(list(order = c(1,0,0), ar = 0.950), n = T)
```

```
y4 <- arima.sim(list(order = c(1,0,0), ar = 0.990), n = T)
```

```
y5 <- arima.sim(list(order = c(1,0,0), ar = 0.991), n = T)
```

```
df1 <- ur.df(y1, type = "none", lags = 0)
```

```
summary(df1)
```

Value of test-statistic is: -9.7283. Critical values:

	1 pct	5 pct	10 pct
tau1	-2.58	-1.95	-1.62

L'ipotesi H_0 viene respinta a ciascun livello di significatività, dato che la radice autoregressiva del processo analizzato è stata fissata a 0.8. Procedendo con gli altri modelli:

```
df2 <- ur.df(y2, type = "none", lags = 0)
```

```
summary(df2)
```

Value of test-statistic is: -6.8654.

I quantili tabulati rimangono gli stessi.

Il valore osservato della statistica $t_{\phi=1}$ è inferiore ai q -values. L'ipotesi della presenza di una radice unitaria viene rigettata.

```
df3 <- ur.df(y3, type = "none", lags = 0)
summary(df3)
```

Value of test-statistic is: -5.482.

```
df4 <- ur.df(y4, type = "none", lags = 0)
summary(df4)
```

Value of test-statistic is: -1.9532.

Si osserva che sino a 0.990, l'ipotesi che la radice del modello simulato sia uguale a 1 viene rifiutata. Quando $\phi = 0.990$, sebbene sia un valore molto vicino ad 1, l'ipotesi nulla verrebbe rigettata al 5% e al 10%, all'1% esprimerebbe la presenza di una radice unitaria. Il test inizia infatti a presentare i primi sintomi di debolezza. L'ultimo processo, i.e y5, conferma quanto appena detto:

```
df5 <- ur.df(y5, type = "none", lags = 0)
summary(df5)
```

Value of test-statistic is: -1.766.

Nonostante il coefficiente dell'AR(1) sia 0.991, il test DF non rifiuta per $\alpha = (1\%, 5\%)^T$ l'ipotesi che il *DGP* sia un $I(1)$, ossia un random walk puro; il test è addirittura più biased di prima. Per radici prossime all'unità allora, il DF è un test di radice unitaria distorto perchè accetta con troppa frequenza la congettura esprime la radice autoregressiva pari ad 1. Dando alla componente deterministica del processo la struttura di un drift o una funzione polinomiale di grado 1, il test stesso risulta avere meno potenza. Si decide di fissare la costante $D_t : \alpha_0 = 0.4$. Iniziando da $\phi = 0.950$:

```
x3 <- y3 + 0.4
drf3 <- ur.df(x3, type = "drift", lags = 0)
```

summary(drf3)

Value of test-statistic is: -5.5114 15.1887. Critical values:

	1 pct	5 pct	10 pct
tau1	-3.43	-2.86	-2.57
phi1	6.43	4.59	3.78

Il test di Dickey-Fuller è in equilibrio col modello creato. Segnala l'inesistenza dell'unitarietà nella radice e quindi il DGP è un $I(0)$ (processo stazionario con costante). Se $\phi = 0.990$:

```
x4 <- y4 + 0.4
```

```
drf4 <- ur.df(x4, type = "drift", lags = 0)
```

```
summary(drf3)
```

Value of test-statistic is: -2.2916 2.626.

t non rigetta l'ipotesi nulla $\phi = 1$ a qualunque livello di significatività; ϕ_1 non evidenzia alcun drift. Il test è più inefficace del processo iniziale con media nulla studiato sopra poiché non rifiuta la presenza della radice unitaria a tutti i livelli fissati (1, 5, 10%).

Infine: $D_t = \alpha_0 + \alpha_1 t$:

```
trend <- time(y3)
```

```
z3 <- 1 + 0.7*trend + y3
```

```
dtr3 <- ur.df(z3, type = "trend", lags = 0)
```

```
summary(drt3)
```

Value of test-statistic is: -5.5384 162.9595 15.3373.

Critical values:

	1 pct	5 pct	10 pct
tau3	-3.96	-3.41	-3.12
phi2	6.09	4.68	4.03
phi3	8.27	6.25	5.34

Il test è in linea col processo autoregressivo simulato.

```
z4 <- 1 + 0.7*trend + y4
```

```
dtr4 <- ur.df(z4, type = "trend", lags = 0)
```

```
summary(dtr4)
```

Value of test-statistic is: -2.4616 151.4272 3.1498.

La serie dovrebbe essere un random walk con drift secondo il test; in realtà non è ammissibile per il semplice fatto che la regressione usata si basa su un modello autoregressivo di ordine 1 con valore atteso $1 + 0.7t/(1 - \phi) = 0.01$, ossia il processo è t-s.

Risultati molto simili pervengono dal test PP. Ad esempio:

```
pp3 <- ur.pp(x3, type = "Z-tau", model = "constant", use.lag = 0)
```

```
summary(pp3)
```

Value of test-statistic, type: Z-tau is: -5.5963. aux. Z statistics:

	Z-value
Z-tau-mu	1.2974

Critical values:

	1 pct	5 pct	10 pct
Z-tau	-3.439534	-2.864849	-2.568544
Z-tau-mu	3.18	2.52	2.16

```
pp4 <- ur.pp(x4, type = "Z-tau", model = "constant", use.lag = 0)
```

```
summary(pp4)
```

Value of test-statistic, type: Z-tau is: -2.2548. aux. Z statistics:

	Z-value
Z-tau-mu	1.2525

Un altro svantaggio dell'ADF e del PP risiede nel non accettare l'ipotesi nulla di distribuzione della serie come un $I(1)$ quand'è vera e si usa un processo ARMA con determinate caratteristiche.

Si consideri un semplice ARMA(1,1) con drift uguale a 0.9:

```
T <- 1000
```

```
arma1 <- arima.sim(list(order = c(1,0,1), ar = 0.999, ma = -0.950),
```

```
n = T)
```

```
w1 <- 0.9 + arma1
```

```
adf1 <- ur.df(w1, type = "drift")
```

```
summary(adf1)
```

Value of test-statistic is: -19.3031 186.3071.

I quantili tabulati rimangono gli stessi del DF con drift. Il processo presenta una radice autoregressiva $\phi = 0.999$, sostanzialmente unitaria, eppure l'ADF specifica che il vero *DGP* è un $I(0)$ con media non nulla. L'esito appena ottenuto è alla luce di ciò che Schwert (1989) ha scoperto sul test ADF: se $\Delta Y_t \sim ARMA(p, q)$ in cui vi è una componente a media mobile con valori ampiamente negativi, il test è distorto. In aggiunta, il PP è maggiormente distorto dell'ADF.

```
ppf1 <- ur.pp(w1, type = "Z-tau", model = "constant", lags = "long")
```

```
summary(ppf1)
```

Value of test-statistic, type: Z-tau is: -32.0427. aux. Z statistics:

	Z-value
Z-tau-mu	29.6683

I *q-values* sono i medesimi delle regressioni dei test PP precedenti. Il test PP rifiuta maggiormente l'ipotesi di differenza-stazionarietà della serie storica.

Conclusioni

I test di radice unitaria sono degli strumenti efficaci per capire soprattutto la struttura del processo stocastico da cui una serie storica deriva. Come si è visto nel corso dell'applicazione di ciascun test ad alcune serie economiche e finanziarie, quasi sempre la serie temporale possiede l'aspetto di un processo differenza-stazionario. Infatti, i movimenti duraturi e di lungo periodo sono meglio rappresentati da componenti tendenziali stocatiche, semmai da combinazioni di trend stocastici e deterministici. I trend deterministici, una volta stimati i loro coefficienti, sono completamente prevedibili. I test per la discriminazione del *DGP* spiegati in questa tesi sono alcuni dei più famosi test di radice unitaria presenti in letteratura. Il DF risulta utile quando si devono analizzare serie che si distribuiscono come un processo $AR(1)$, quindi esse non hanno una struttura particolarmente complessa. L'ADF tratta serie storiche descritte da modelli più generali del DF ed è stato creato proprio per tale scopo. Sebbene essi siano inefficaci in alcune situazioni e presentino dei limiti, sono i più usati e conosciuti nella verifica della presenza di una radice unitaria. Basti pensare che si potrebbero benissimo usare gli ERS poiché sono efficienti, più robusti e hanno maggior potenza nella scelta del *detrending* di una serie temporale rispetto all'ADF, al PP e al KPSS. Con dei cambiamenti di regime, lo ZA tiene conto dei *break points* e le sue statistiche test si adattano pienamente ad un processo stocastico dove i dati esibiscono degli improvvisi andamenti diversi rispetto a quelli analizzati prima che succedesse tale cambiamento. L'uso delle serie storiche è importante per studiare l'evoluzione nel tempo di qualunque tipologia di fenomeno e vedere se è stazionario o come renderlo tale.

Appendice

Generalizzazione del test KPSS

Il test KPSS affrontato in questa tesi deriva da un modello generale elaborato da Nabeya e Tanaka (1988).

Sia: $Y_t = x_t a_t + z_t^T b_0 + \epsilon_t$, con: $a_t = a_{t-1} + \nu_t$ il cui valore iniziale è a_0 , $\nu_t \sim N(0, \sigma_\nu^2)$ i.i.d. e $\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$ i.i.d. ($Cov[\nu_t, \epsilon_t] = 0$). Sotto l'ipotesi nulla, $a_t = a_0$, cioè $\sigma_\nu^2 = 0$; mentre sotto H_1 :

$$Y_t = x_t a_0 + z_t^T b_0 + x_t \sum_{k=1}^t \nu_k + \epsilon_t. \text{ I due autori hanno costruito}$$

il miglior test invariante per la nullità della varianza di ν . Esso si basa sul rapporto tra due forme quadratiche: $\frac{e^T D_x A_t D_x e}{e^T e}$, dove $D_x = \text{diag}(x_1, \dots, x_T)$, A_T è tale che l'elemento (s, t) -esimo è $\min(s, t)$, e è il vettore dei residui dalla regressione di Y_t su x_t e z_t . Il test sviluppato da Kwiatkowski, Phillips, Schmidt e Shin considera il modello:

$Y_t = a_0 + b_0 t + \epsilon_t$, caso speciale del modello di Nabeya e Tanaka perchè $x_t = 1$ e $z_t = t$. Se $b_0 = 0$, Y_t è trend-stazionaria poichè presenta solo la costante (in inglese level-stazionarity); altrimenti sotto H_1 si parla di processo RW con drift: $Y_t = a_0 + b_0 t + \sum_{k=1}^t \nu_k$.

A_T è possibile scriverla come $C_T^T C_T$, C_T una matrice triangolare superiore avente tutti gli elementi sopra la diagonale principale uguali a 1. Perciò, $D_x = I_T$, in modo tale che $e^T D_x A_T D_x e = e^T C_T^T C_T e$. (Si può dimostrare che $C_T e$ risulta un vettore contenente le somme parziali inverse di e_t , i.e. è l'elemento t -esimo di $R_t = \sum_{i=t}^T e_i$). Si definisca S_t come le somme parziali di e_t . Quindi, $R_1 = S_T = 0$ e $S_t = -R_{t+1}$ per $t = 1, \dots, T - 1$.

La statistica di Nabeya e Tanaka è pertanto: $\eta_i = \frac{T^{-2} \sum_{t=1}^T R_t^2}{\hat{\sigma}_T^2} =$

$$= \frac{T^{-2} \sum_{t=1}^T S_t^2}{\hat{\sigma}_T^2}, \text{ in cui } \hat{\sigma}_T^2 = \frac{e^T e}{T}, e \text{ è ottenuto regredendo } Y_t \text{ sulla}$$

costante 1 o su 1 e t a seconda della forma che la componente deterministica assume.

Per permettere che ϵ_t sia debolmente dipendente (i.e. la correlazione tra $\epsilon_t, \epsilon_{t+k}$ tende a 0 sufficientemente velocemente

se $k \rightarrow \infty$) ed eteroschedastico: $\eta_i = \frac{T^{-2} \sum_{t=1}^T S_t^2}{\hat{s}_T^2}$, per il quale \hat{s}_T^2 è lo stimatore Newey-West o Gallant di $\sigma^2 = \lim_T T^{-1} E(S_T^2)$. Queste statistiche test si riferiscono pertanto al test KPSS.

Bibliografia

Di Fonzo T. , Lisi F., *Serie storiche economiche, Analisi statistiche e applicazioni*, Carocci editore, 2005.

B. Pfaff, *Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R*, Springer, Second edition, 2008.

Caner M. and L. Kilian (2001). "Size Distortions of Tests of the Null Hypothesis of Stationarity: Evidence and Implications for the PPP Debate," *Journal of International Money and Finance*, 20, 639-657.

Dickey D. and W. Fuller (1979). "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.

Dickey D. and W. Fuller (1981). "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Econometrica*, 49, 1057-1072.

Elliot G., T.J. Rothenberg, and J.H. Stock (1996). "Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root," *Econometrica*, 64, 813-836.

Fuller, W. (1996). *Introduction to Statistical Time Series, Second Edition*. John Wiley, New York.

Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press, New Jersey.

Hatanaka, T. (1995). *Time-Series-Based Econometrics: Unit Roots and Co-Integration*. Oxford University Press, Oxford.

Kwiatkowski, D., P.C.B. Phillips, P. Schmidt and Y. Shin (1992). "Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root," *Journal of Econometrics*, 54, 159-178.

MacKinnon, J. (1996). "Numerical Distribution Functions for Unit Root and Cointegration Tests," *Journal of Applied Econometrics*, 11, 601-618.

Maddala, G.S. and I.-M. Kim (1998). *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*. Oxford University Press, Oxford.

Ng, S., and P. Perron (1995). "Unit Root Tests in ARMA Models with Data-Dependent Methods for the Selection of the Truncation Lag," *Journal of the American Statistical Association*, 90, 268-281.

Ng, S., and P. Perron (2001). *Lag Length Selection and the Construction of Unit Root Tests with Good Size and Power*, *Econometrica*, 69, 1519-1554.

Perron, P. and S. Ng. (1996). "Useful Modifications to Some Unit Root Tests with Dependent Errors and their Local Asymptotic Properties," *Review of Economic Studies*, 63, 435-463.

Phillips, P.C.B. (1987). "Time Series Regression with a Unit Root," *Econometrica*, 55, 227-301.

Phillips, P.C.B. and P. Perron (1988). "*Testing for Unit Roots in Time Series Regression*," *Biometrika*, 75, 335-346.

Phillips, P.C.B. and Z. Xiao (1998). "*A Primer on Unit Root Testing*," *Journal of Economic Surveys*, 12, 423-470.

Schwert, W. (1989). "*Test for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation*," *Journal of Business and Economic Statistics*, 7, 147-159.

Said, S.E. and D. Dickey (1984). "*Testing for Unit Roots in Autoregressive Moving-Average Models with Unknown Order*," *Biometrika*, 71, 599-607.

Stock, J.H. (1994). "*Units Roots, Structural Breaks and Trends*," in *R.F. Engle and D.L. McFadden (eds.), Handbook of Econometrics, Volume IV*. North Holland, New York.

Hayashi F., *Econometrics*, Princeton University Press, dic 2011.

A. Colin Cameron, Pravin K. Trivedi, *Microeconometrics: Methods and Applications*, Cambridge University Press, may 2005.

Deepa D. D. and Wenxin D., *Nonparametric HAC Estimation for Time Series Data with Missing Observations*, Board of Governors of the Federal Reserve System International Finance Discussion Papers, Number 1060, November 2012.

Per scaricare serie storiche economiche dall'Istat:

<http://seriestoriche.istat.it> o in alternativa: <http://dati.istat.it>.

Per scaricare serie finanziarie:

<https://it.finance.yahoo.com>;

<https://research.stlouisfed.org/fred2>.

Ringraziamenti

Innanzitutto, desidero ringraziare il mio relatore, il Professore Silvano Bordignon, che ha saputo darmi dei consigli preziosi e si è dimostrato, oltre a un docente altamente qualificato, una persona gentile e disponibile.

In secondo luogo, la mia famiglia, la quale mi ha sempre sostenuto, nonché spronato a non arrendermi mai. Senza di loro non sarei giunto sin qui e per tutto ciò che hanno fatto, gliene sono grato.

Il terzo grazie va a dei compagni di corso, i quali ho avuto la fortuna di conoscere e si sono rivelati dei grandi amici: Stefano Martinelli, su cui si può ogni volta contare per la sua umanità e il suo senso dell'umorismo; Alessio Tognon, per lo scambio di idee, opinioni e per il fatto che mi ha insegnato ad andare sempre avanti; Giulia Toma, per la sua infinita pazienza ed i suoi suggerimenti quando ne avevo bisogno.

Inoltre, ringrazio tutti gli amici e le persone che mi vogliono bene e mi hanno sostenuto in questo arco di tre anni all'università, permettendomi di raggiungere tale traguardo.