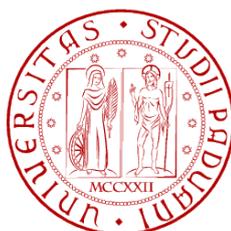


Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Scienze Statistiche

Corso di laurea triennale in

Statistica, Economia e Finanza



RELAZIONE FINALE

**Analisi delle performance dei
mercati emergenti e di
frontiera: impatto
sull'allocazione di un
portafoglio azionario**

Relatore: Prof. Massimiliano Caporin

Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali "Marco Fanno"

Laureando: Jessica Vettorazzo

Anno Accademico 2012/2013

Questo documento è stato scritto in L^AT_EX su Debian GNU/Linux.
Tutti i marchi registrati appartengono ai rispettivi proprietari.

Indice

Introduzione	1
1 Analisi descrittive e correlazioni	5
1.1 Analisi statistico-descrittive	6
1.1.1 Frontier Markets	7
1.1.2 BRICS	18
1.1.3 G7	23
1.1.4 Commenti	30
1.2 Correlazioni	31
2 Calcolo e confronto delle frontiere efficienti	33
2.1 Cenni teorici	33
2.1.1 Frontiera efficiente con il titolo privo di rischio	36
2.1.2 Frontiera efficiente con vincoli di positività	37
2.1.3 Inferenza sulla frontiera efficiente	38
2.2 Frontiere efficienti pre-post crisi senza vincoli di positività	39
2.3 Frontiere efficienti pre-post crisi con vincoli di positività	46
2.3.1 Introduzione di ulteriori vincoli	51
3 Allocazione mensile simulata	55
3.1 Fase operativa	56
3.1.1 Codice per il calcolo dei portafogli ottimi, caso dimensioni variabili	56
3.1.2 Codice per il calcolo dei portafogli ottimi, caso dimensioni fisse	63
3.2 Portafogli stimati	67
3.2.1 Portafogli costruiti con G7, BRICS e FM	67
3.2.2 Portafogli costruiti con G7 e BRICS	72
3.2.3 Portafogli costruiti con G7	77
4 Misure di performance	81
4.1 Definizioni	81
4.2 Calcolo e confronto degli indici dei portafogli costruiti sui tre tipi di asset	83

4.2.1	Misure di performance a livello grafico	83
4.2.2	Indici di Sharpe, Sortino e Alpha di Jensen	109
	Conclusioni	111
	Bibliografia	113

Introduzione

La diversificazione di portafoglio mediante mercati emergenti e di frontiera risulta veramente efficace in termini di performance? Avrebbe potuto limitare gli effetti negativi dovuti alla crisi finanziaria globale?

Scopo dell'elaborato è tentare di dare una risposta a queste domande. Prima attraverso analisi descrittive degli indici di mercato dei vari Paesi, analizzando anche le frontiere efficienti per poi valutare alcuni portafogli ottimi simulati, costruiti su dati storici.

I mercati di frontiera

Definizioni

È opportuno in primo luogo capire cosa si intende per mercato *sviluppati, emergente e di frontiera*.

Un mercato *sviluppati* è proprio di un Paese all'avanguardia, caratterizzato da stabilità politica e un alto grado di industrializzazione. È un luogo meno rischioso per gli investimenti, di conseguenza meno redditizio di altri mercati.

FTSE, Standard & Poor's, MSCI, Dow Jones e Russell hanno stipulato una lista degli stati considerati "fully developed": Australia, Austria, Belgio, Canada, Cipro, Danimarca, Finlandia, Francia, Germania, Grecia, Hong Kong, Irlanda, Israele, Italia, Giappone, Lussemburgo, Olanda, Nuova Zelanda, Norvegia, Portogallo, Singapore, Corea del Sud, Spagna, Svezia, Svizzera, Regno Unito, Stati Uniti. Va chiarito che non c'è pieno accordo sullo stato di Cipro, a causa dei recenti eventi politico-economici. In questa analisi come "fully developed" verranno considerati i G7 (Stati Uniti, Canada, Francia, Germania, Italia, Giappone, Regno Unito).

I mercati cosiddetti *emergenti* appartengono a Paesi non ancora pienamente sviluppati che tuttavia grazie a ritmi di crescita molto elevati lo stanno rapidamente diventando. Ne fanno parte: Brasile, Cile, Cina, Repubblica Ceca, Ungheria, India, Indonesia, Lettonia, Malesia, Messico, Pakistan, Perù, Filippine, Polonia, Russia, Sudafrica, Thailandia, Taiwan, Turchia, Venezuela.

Per le caratteristiche comuni verranno in questa sede scelti i BRICS (Brasile, Russia, India, Cina, Sudafrica), nazioni che condividono uno status economico in via di sviluppo, un elevato popolamento (Russia e Brasile centinaia di milioni di abitanti, Cina e India circa due miliardi e mezzo di abitanti), un esteso territorio ricco di risorse naturali e sono state caratterizzate negli ultimi anni da una forte crescita del PIL assieme alla quota del commercio mondiale.

I mercati *di frontiera*, termine coniato dall'International Finance Corporation (IFC) nel 1981, sono nazioni dove è possibile investire, ma con capitalizzazioni di mercato generalmente più basse e meno liquidità che negli altri Paesi. Chi vi investe normalmente cerca alti rendimenti con un orizzonte temporale lungo e bassa correlazione con altri mercati.

Non è univoca in questo caso la classificazione, verrà qui presa a riferimento quella di MSCI:

- **Americhe:** Argentina, Giamaica, Trinidad e Tobago.
- **Europa e CIS:** Bosnia Erzegovina, Bulgaria, Croazia, Estonia, Lituania, Kazakistan, Romania, Serbia, Slovenia, Ucraina.
- **Africa:** Botswana, Ghana, Kenya, Mauritius, Nigeria, Tunisia, Zimbabwe.
- **Medio Oriente:** Bahrain, Giordania, Kuwait, Libano, Oman, Qatar, Arabia Saudita, Emirati Arabi Uniti.
- **Asia:** Bangladesh, Pakistan, Sri Lanka, Vietnam.

Mercati di frontiera: aspetti positivi e negativi

Una delle buone ragioni per impegnare parte delle proprie risorse nei mercati di frontiera è la forte crescita economica che recentemente stanno sostenendo. Questi Paesi in termini di incremento medio annuo del PIL nel periodo 2000-2009 hanno avuto 17 delle 20 migliori economie mondiali, vedendo una crescita media del 4,4% , rispetto al 2,2% dei Paesi sviluppati e vicina al 4,5% dei Paesi emergenti. In particolare il Qatar nello stesso periodo ha realizzato un tasso di crescita medio del 12,2%, il Kazakistan dell'8,6%, il Vietnam del 7,3%. Inoltre le previsioni di crescita da qui al 2015 del Fondo Monetario Internazionale (FMI) mostrano una crescita del 7% per il Ghana e del 6,8% per la Nigeria.

Tale crescita economica è accompagnata da un forte incremento demografico soprattutto in America centrale, Africa, Medio oriente, India e Sud-est asiatico. In Giappone e in Italia solo il 14% della popolazione ha meno di 15 anni, in Bangladesh il 36% mentre in Zambia il 46%. Una giovane

popolazione è un'importante risorsa se lo stato riesce a coglierla, ad esempio attraverso l'istruzione, migliori condizioni igienico-sanitarie, un accesso più veloce ai capitali.

Gli investimenti in infrastrutture si mantengono elevati, basti pensare al Vietnam il cui rapporto tra investimenti lordi e Pil è stato del 38% nel 2009, valore nettamente superiore a quello dei Paesi sviluppati.

La disponibilità di materie prime è un altro importante fattore che sostiene la crescita e permette a questi Paesi di reperire risorse economiche a sostegno dello sviluppo interno, favorendo la costruzione di infrastrutture, alloggi e trasporti. L'Africa è una regione ricca di risorse naturali tra cui petrolio, gas, diversi metalli e minerali oltre che terreni che possono essere destinati ad uso agricolo. Risorse che hanno attratto anche mercati emergenti come Cina, India e Brasile, i quali hanno ricambiato gli Stati africani con infrastrutture vitali come quelle per i trasporti, centrali energetiche, scuole e ospedali.

Un altro aspetto positivo è l'intermediazione finanziaria in espansione, sostenuta dalla "micro-finanza". Grazie alla micro-finanza persone che non riuscirebbero ad ottenere prestiti o altri tipi di prodotti finanziari dalle tradizionali istituzioni di credito, riescono attraverso le cosiddette "banche dei poveri" o "etiche" ad accedere a questi servizi. Il principale servizio è il microcredito, che consiste in piccoli prestiti per attività artigianali o imprenditoriali. I tassi d'interesse sono ancora molto elevati ma sono attesi in riduzione grazie ad una migliore gestione del rischio e una maggiore informatizzazione.

Ci sono segnali favorevoli anche negli assetti politici, in particolare di Costa d'Avorio, Botswana e Ghana. Occorre però puntualizzare che dalle statistiche di Transparency International la corruzione in questi Paesi è percepita essere ancora molto elevata. Non si può negare quindi l'esistenza di un rischio politico, ma una buona diversificazione di portafoglio potrebbe contribuire a ridurlo.

Un altro elemento molto importante è la bassa correlazione esistente tra i singoli mercati di frontiera, evidenza che contrasta con i BRICS, dove le correlazioni tra Brasile, Russia, India, Cina e Sudafrica sono aumentate in coerenza con la tendenza degli operatori ad investire in quei Paesi considerandoli il solo gruppo su cui collocare la propria ricchezza quando si cerca un extrarendimento maggiore in un contesto di minore avversione al rischio. Oltre a ciò i Paesi di frontiera sono poco correlati anche con gli altri indici. Nel dicembre 2011, la correlazione a 36 mesi dell'indice S&P Frontier Markets ex-GCC con l'indice S&P 500 è stata 0,68 rispetto allo 0,86 dell'indice MSCI Emerging Markets e lo 0,92 dell'indice MSCI EAFE. La correlazione fra mercati di frontiera e mercati emergenti è stata anch'essa moderata, con una media di 0,40 dal 2006. Grazie alla ridotta correlazione, diversificando in questi Paesi, si dovrebbe quindi ridurre il rischio.

Naturalmente gli aspetti negativi non mancano, ci sono rischi associati all'in-

vestimento in questi mercati, assimilabili a quelli percepiti dagli investitori nei Paesi emergenti alla fine del secolo scorso. Ci sono rischi operativi legati alla minore liquidità e trasparenza dei mercati, alle controparti e alle normative, anche per effetto della diversità delle regolamentazioni.

Ci sono poi limiti all'esercizio dei diritti di voto e al numero massimo di azioni detenibili dagli operatori esteri. Il rischio di cambio può essere elevato, complice l'inflazione, così come le politiche monetarie e fiscali di questi Paesi. Aprire un conto per operare sui mercati locali può risultare piuttosto difficoltoso, a causa di commissioni elevate (mediamente intorno al 2,5%), alle quali possono sommarsi spese per le transazioni valutarie, riducendo quindi i possibili profitti. La liquidità è molto bassa e quindi il bid/ask spread (differenza tra prezzo di acquisto e vendita) è ampio ed i tempi di esecuzione degli ordini lunghi.

Capitolo 1

Analisi descrittive e correlazioni

Come proxy dell'andamento del mercato nei vari Paesi si considerano gli indici pubblicati da MSCI (Morgan Stanley Capital International), agenzia che calcola molteplici indici azionari internazionali, usati in molti fondi comuni, ETF e da investitori privati come parametro di riferimento (benchmark) per lo sviluppo del rendimento del loro portafoglio.

Dal sito www.msci.com sono stati quindi scaricati gli indici di mercato a frequenza mensile, in valuta locale, per singolo Paese di frontiera e per ogni componente dei BRICS e dei G7. È importante precisare che non si tiene conto in questa sede del rischio di cambio essendo ogni serie storica espressa nella valuta del Paese di appartenenza. Avendo preso in esame il periodo campionario Gennaio 2003 - Marzo 2013 non si possono includere tutti i Frontier Markets MSCI, ma soltanto quelli per cui sono effettivamente disponibili gli ultimi 123 dati, questione che verrà presa in considerazione e risolta in un secondo momento.

Verranno analizzati per i mercati di frontiera gli MSCI di Argentina, Croazia, Estonia, Slovenia, Kenya, Mauritius, Nigeria, Giordania, Libano, Pakistan, Sri Lanka, per i mercati emergenti gli MSCI di Brasile, Russia, India, Cina, Sudafrica, infine per i mercati sviluppati MSCI di Germania, Italia, Regno Unito, Francia, Giappone, Canada, Stati Uniti. Paesi a cui da qui in avanti verranno per brevità associate delle sigle (tabella 4.10). Successivamente saranno mostrati grafici rappresentanti la correlazione tra i vari Paesi sempre nel periodo Gennaio 2003 - Marzo 2013, che verrà poi scisso in due parti (Gennaio 2003-Giugno 2007 e Luglio 2007-Marzo 2013) per vedere da vicino l'impatto della crisi finanziaria sulle correlazioni tra i vari asset.

Argentina	ARG
Croazia	HRV
Estonia	EST
Slovenia	SVN
Kenya	KEN
Mauritius	MUS
Nigeria	NGA
Giordania	JOR
Libano	LBN
Pakistan	PAK
Sri Lanka	LKA
Brasile	BRA
Russia	RUS
India	IND
Cina	CHN
Sudafrica	ZAF
Germania	DEU
Italia	ITA
Regno Unito	GBR
Francia	FRA
Giappone	JPN
Canada	CAN
Stati Uniti	USA

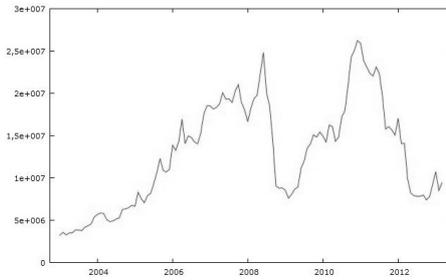
Tabella 1.1: Codici dei Paesi secondo lo standard ISO 3166-1.

1.1 Analisi statistico-descrittive

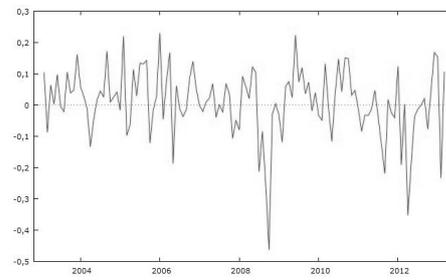
Per ogni Paese verrà mostrata una serie di figure (ogni grafico è stato ottenuto con il software *Gretl*) che comprende: la serie storica dei prezzi dell'indice di mercato, i rendimenti logaritmici ad esso relativi, i correlogrammi del momento primo e secondo dei rendimenti logaritmici, la loro distribuzione di frequenza con annesso test di normalità (riportato in alto a sinistra del grafico) e statistiche descrittive. Il test usato è quello di Doornik-Hansen che combina gli indici di asimmetria e curtosi per verificare l'ipotesi nulla che i rendimenti si distribuiscano normalmente. Oltre all'esito del test (\checkmark se si accetta l'ipotesi nulla, \times in caso contrario) in tabella 1.2 sono riassunte le principali statistiche descrittive per avere un confronto immediato tra i rendimenti dei vari indici. Sono riportati con arrotondamento alla terza cifra decimale, espressi in percentuale ed annualizzati: media, mediana, minimo, massimo, deviazione standard dei rendimenti. Le ultime due colonne invece si riferiscono ad asimmetria ed eccesso di curtosi, i cui valori in caso di normalità devono essere pari a zero.

1.1.1 Frontier Markets

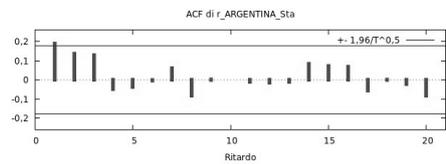
Argentina



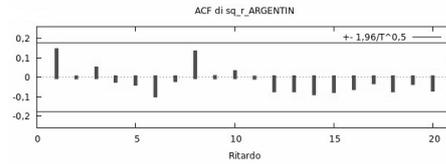
(a) Serie storica MSCI Argentina.



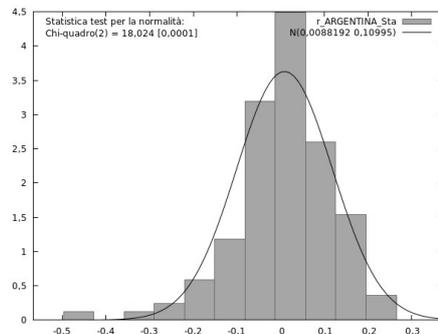
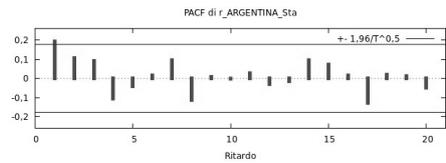
(b) Serie storica rendimenti MSCI Argentina.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



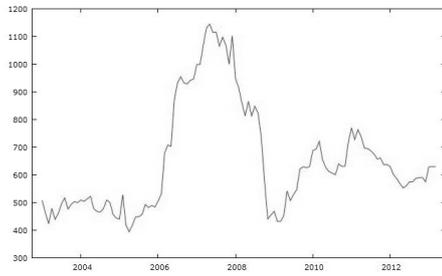
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,0088192
Mediana	0,019377
Minimo	-0,46280
Massimo	0,23041
Scarto quadratico medio	0,10995
Coeff. di variazione	12,468
Asimmetria	-1,0464
Curtosi	2,6858

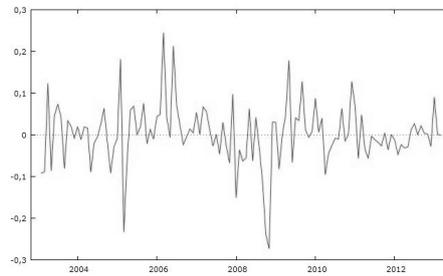
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.1

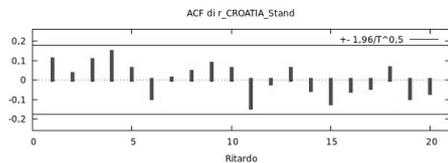
Croazia



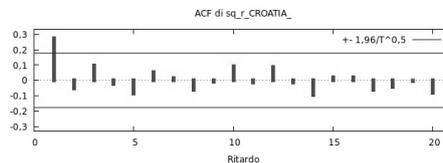
(a) Serie storica MSCI Croazia.



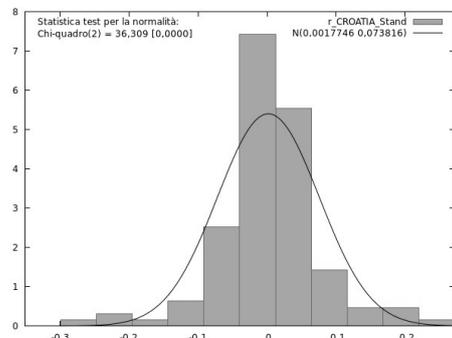
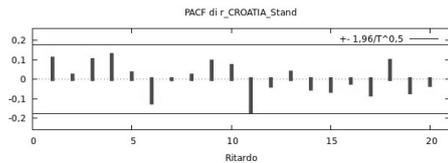
(b) Serie storica rendimenti MSCI Croazia.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



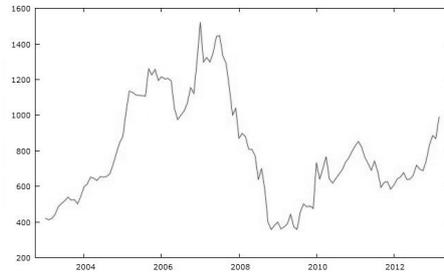
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,0017746
Mediana	0,00052836
Minimo	-0,27309
Massimo	0,24542
Scarto quadratico medio	0,073816
Coeff. di variazione	41,596
Asimmetria	-0,28589
Curtosi	3,2320

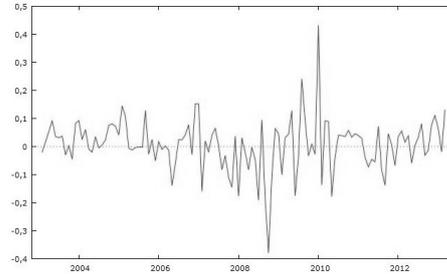
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.2

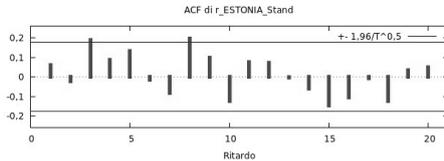
Estonia



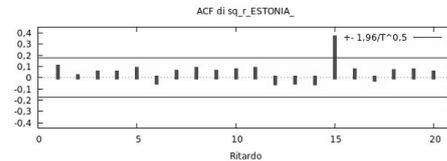
(a) Serie storica MSCI Estonia.



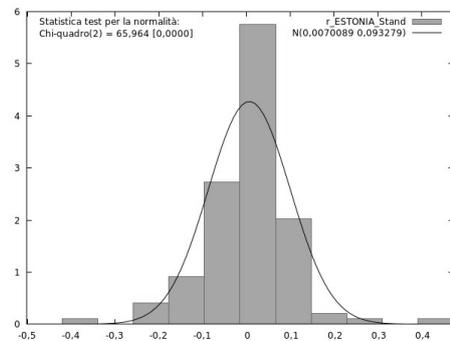
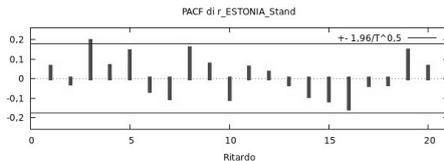
(b) Serie storica rendimenti MSCI Estonia.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



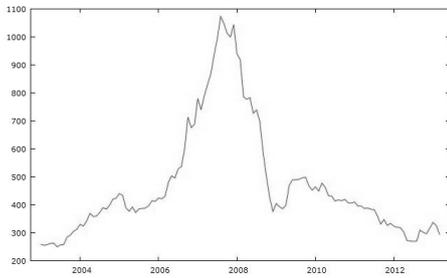
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,0070089
Mediana	0,016958
Minimo	-0,37953
Massimo	0,43214
Scarto quadratico medio	0,093279
Coeff. di variazione	13,309
Asimmetria	-0,037986
Curtosi	4,7741

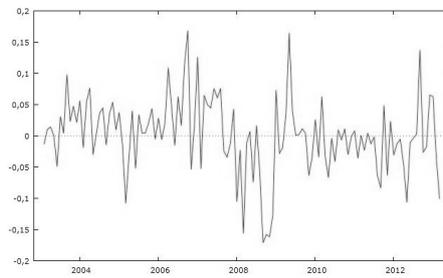
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.3

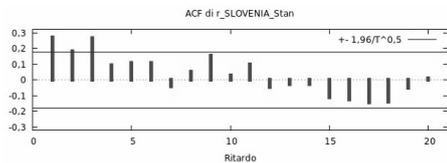
Slovenia



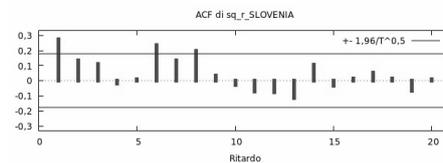
(a) Serie storica MSCI Slovenia.



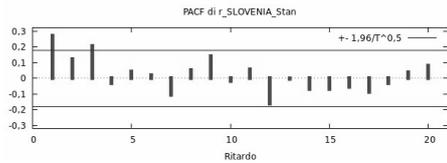
(b) Serie storica rendimenti MSCI Slovenia.



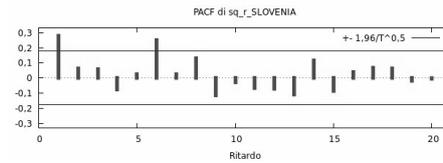
(c) Correlogrammi rendimenti.



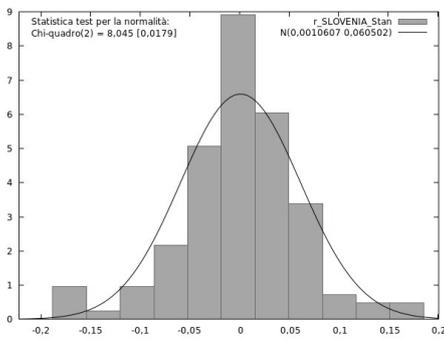
(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



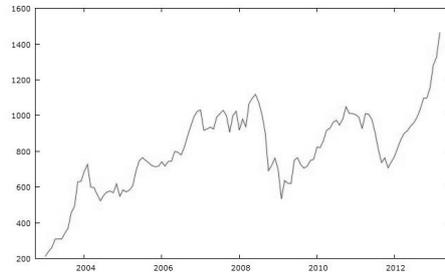
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,0010607
Mediana	0,0024420
Minimo	-0,17123
Massimo	0,16858
Scarto quadratico medio	0,060502
Coeff. di variazione	57,039
Asimmetria	-0,22023
Curtosi	1,1096

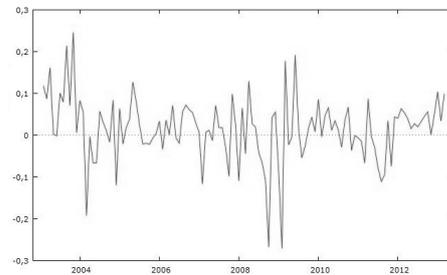
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.4

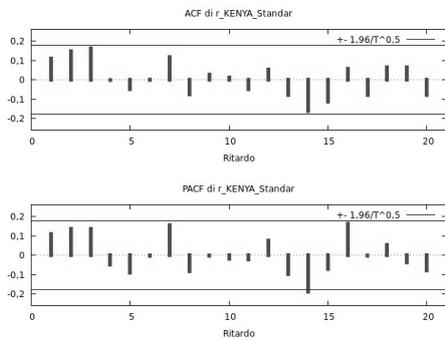
Kenya



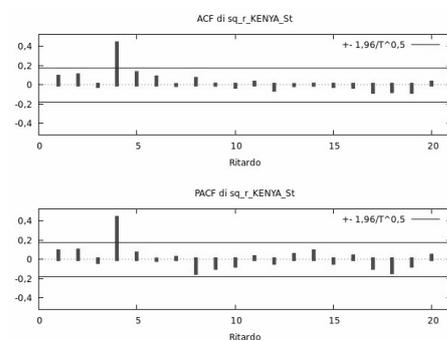
(a) Serie storica MSCI Kenya.



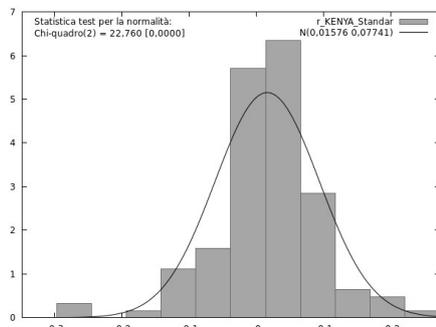
(b) Serie storica rendimenti MSCI Kenya.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



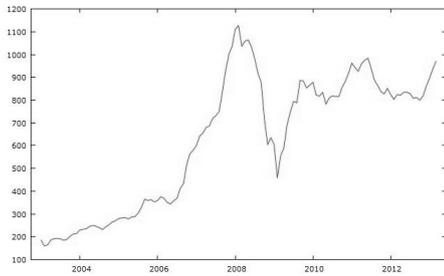
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,015760
Mediana	0,018750
Minimo	-0,27119
Massimo	0,24605
Scarto quadratico medio	0,077410
Coeff. di variazione	4,9117
Asimmetria	-0,57350
Curtosi	2,7345

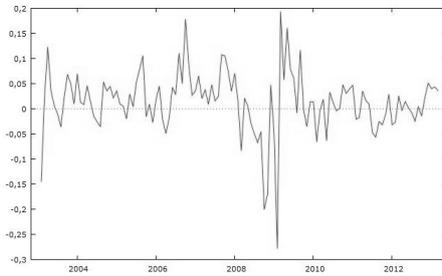
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.5

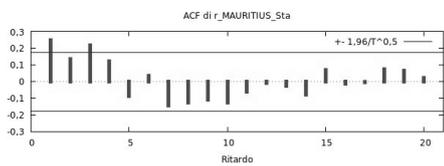
Mauritius



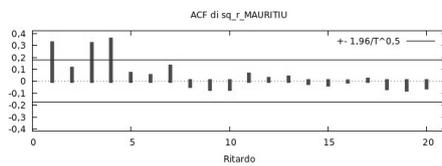
(a) Serie storica MSCI Mauritius.



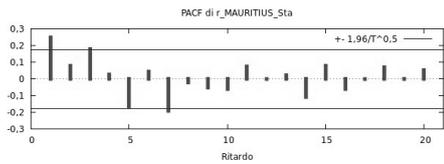
(b) Serie storica rendimenti MSCI Mauritius.



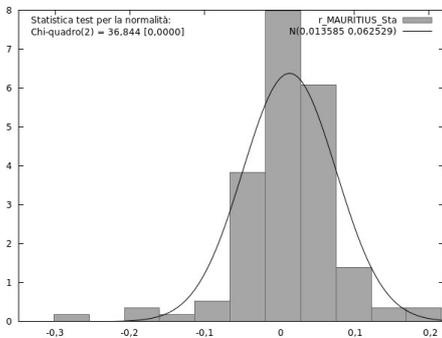
(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



(e) Distribuzione di frequenza.

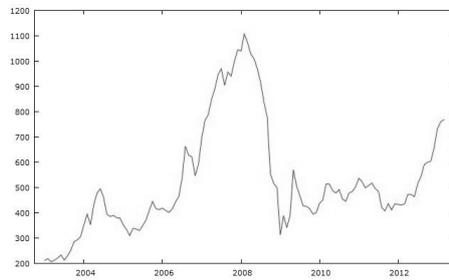


Media	0,013585
Mediana	0,015323
Minimo	-0,27820
Massimo	0,19371
Scarto quadratico medio	0,062529
Coeff. di variazione	4,6026
Asimmetria	-0,95497
Curtosi	4,8903

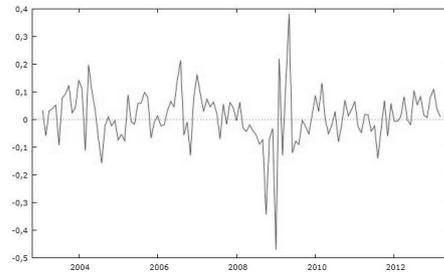
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.6

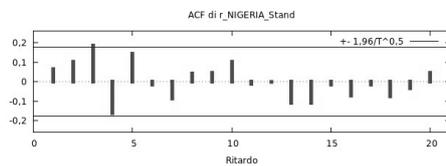
Nigeria



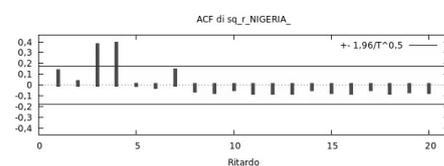
(a) Serie storica MSCI Nigeria.



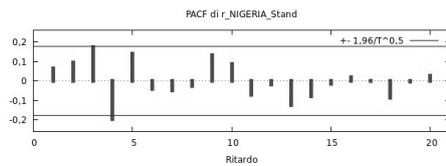
(b) Serie storica rendimenti MSCI Nigeria.



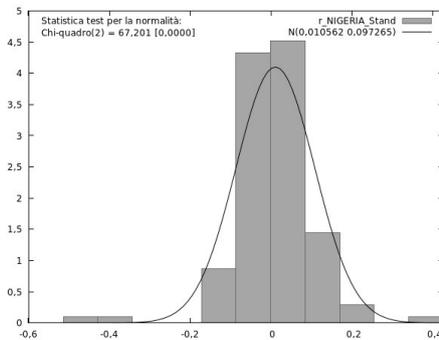
(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



(e) Distribuzione di frequenza.

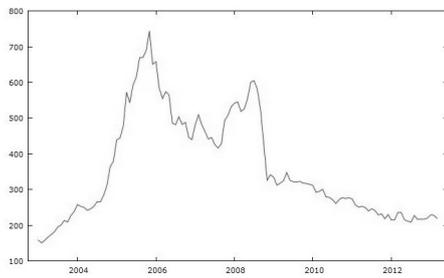


Media	0,010562
Mediana	0,012189
Minimo	-0,47071
Massimo	0,38276
Scarto quadratico medio	0,097265
Coeff. di variazione	9,2086
Asimmetria	-0,77150
Curtosi	6,2642

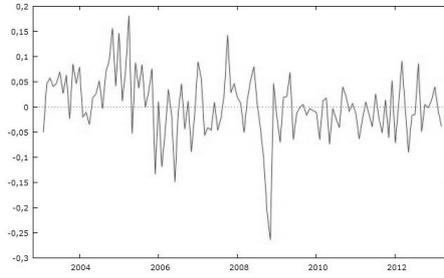
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.7

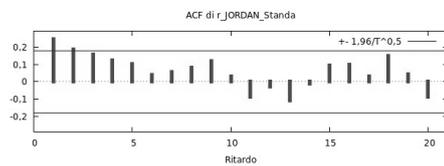
Giordania



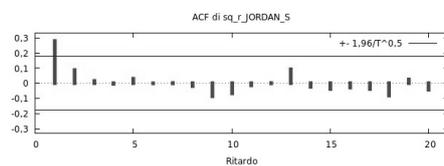
(a) Serie storica MSCI Giordania.



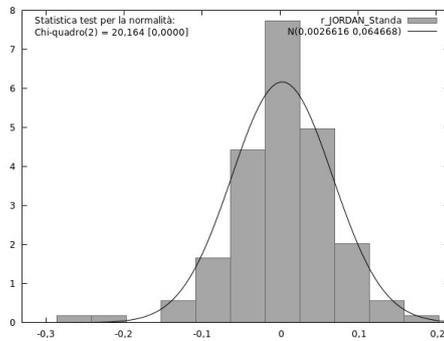
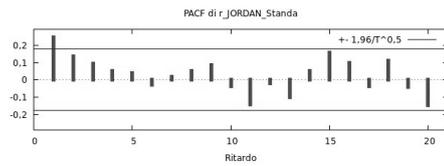
(b) Serie storica rendimenti MSCI Giordania.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



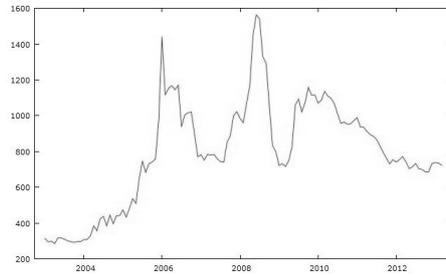
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,0026616
Mediana	0,0052306
Minimo	-0,26388
Massimo	0,18140
Scarto quadratico medio	0,064668
Coeff. di variazione	24,297
Asimmetria	-0,60166
Curtosi	2,5692

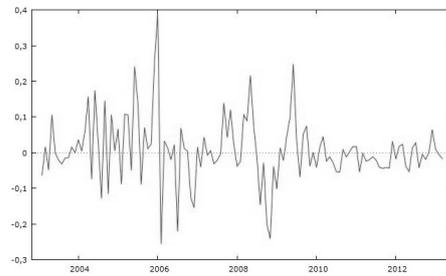
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.8

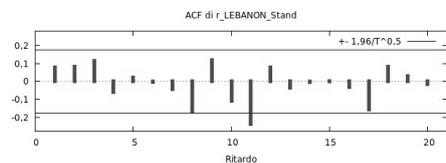
Libano



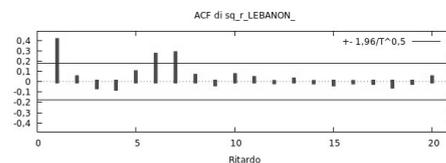
(a) Serie storica MSCI Libano.



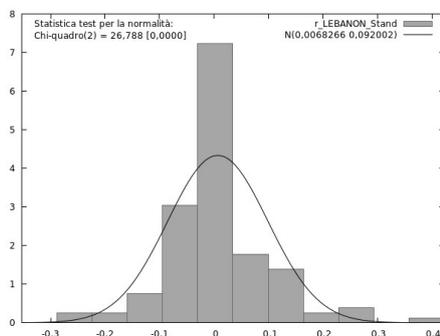
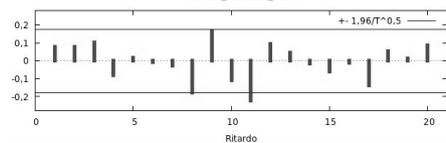
(b) Serie storica rendimenti MSCI Libano.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



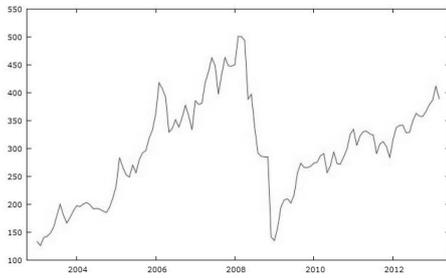
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,0068266
Mediana	4,8606e-05
Minimo	-0,25613
Massimo	0,38995
Scarto quadratico medio	0,092002
Coeff. di variazione	13,477
Asimmetria	0,59757
Curtosi	3,0938

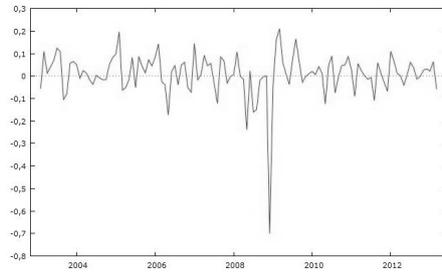
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.9

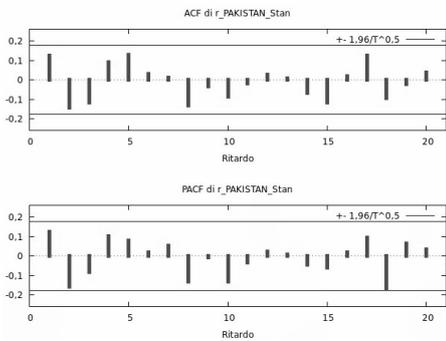
Pakistan



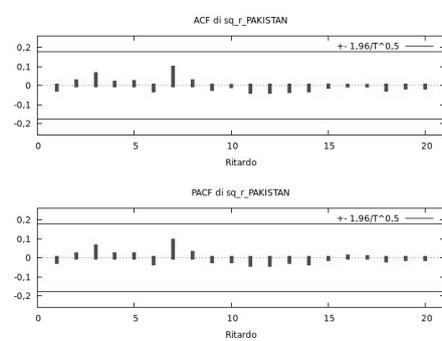
(a) Serie storica MSCI Pakistan.



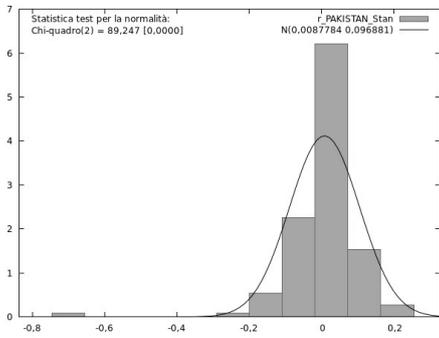
(b) Serie storica rendimenti MSCI Pakistan.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



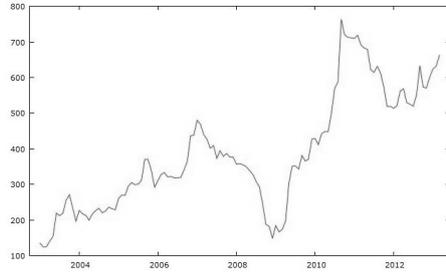
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,0087784
Mediana	0,012177
Minimo	-0,70009
Massimo	0,21000
Scarto quadratico medio	0,096881
Coeff. di variazione	11,036
Asimmetria	-3,2838
Curtosi	22,155

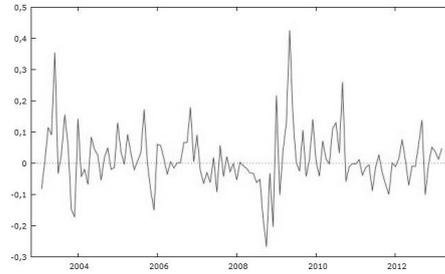
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.10

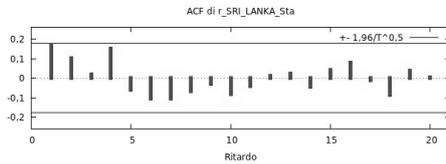
Sri Lanka



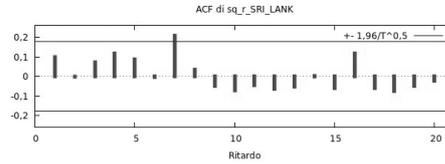
(a) Serie storica MSCI Sri Lanka.



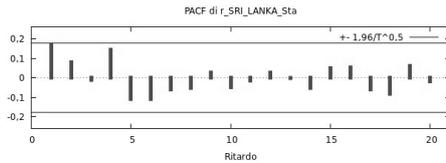
(b) Serie storica rendimenti MSCI Sri Lanka.



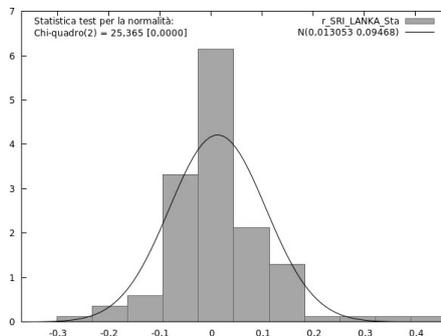
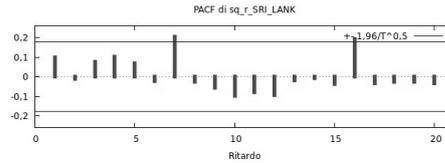
(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



(e) Distribuzione di frequenza.



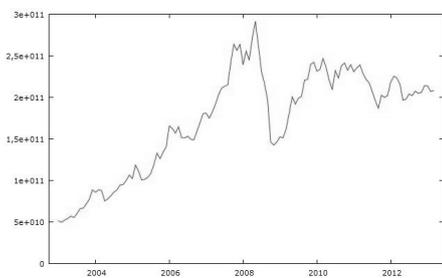
Media	0,013053
Mediana	0,0017285
Minimo	-0,26710
Massimo	0,42607
Scarto quadratico medio	0,094680
Coeff. di variazione	7,2535
Asimmetria	0,94215
Curtosi	3,8152

(f) Statistiche descrittive.

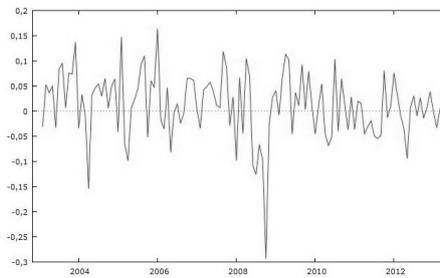
Figura 1.11

1.1.2 BRICS

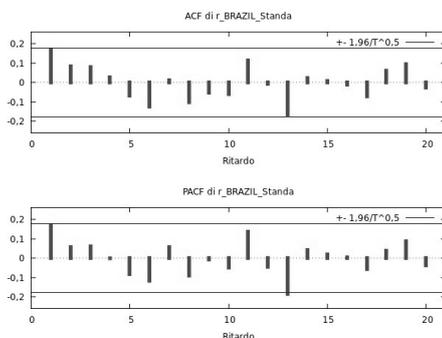
Brasile



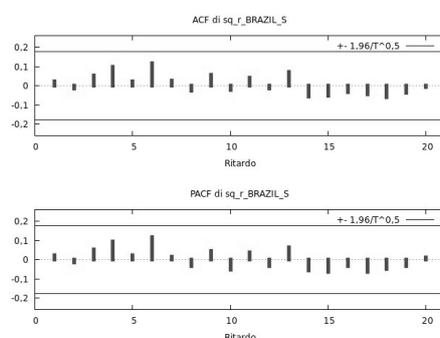
(a) *Serie storica MSCI Brasile.*



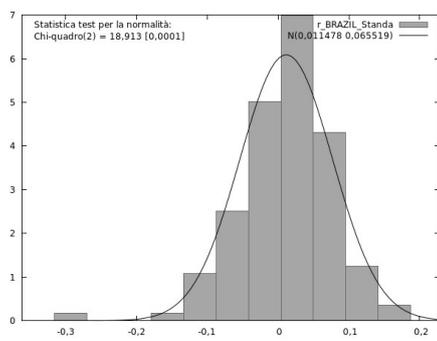
(b) *Serie storica rendimenti MSCI Brasile.*



(c) *Correlogrammi rendimenti.*



(d) *Correlogrammi rendimenti al quadrato.*



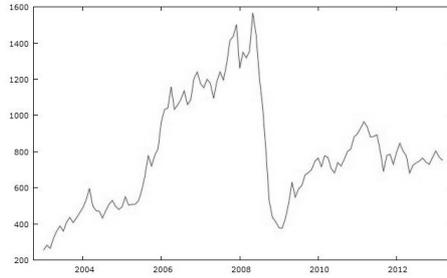
(e) *Distribuzione di frequenza.*

Media	0,011478
Mediana	0,011265
Minimo	-0,29324
Massimo	0,16410
Scarto quadratico medio	0,065519
Coeff. di variazione	5,7082
Asimmetria	-0,83146
Curtosi	2,8610

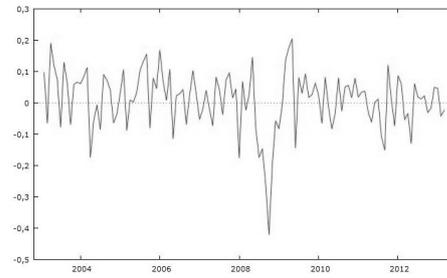
(f) *Statistiche descrittive.*

Figura 1.12

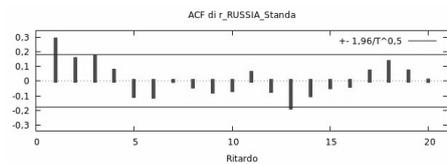
Russia



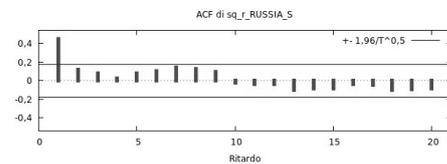
(a) Serie storica MSCI Russia.



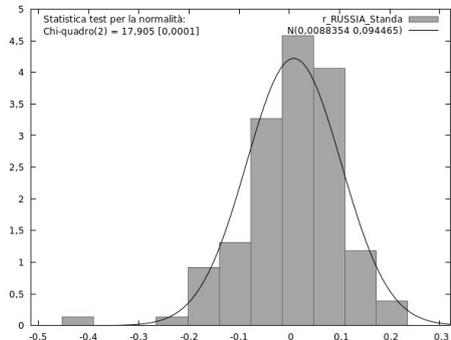
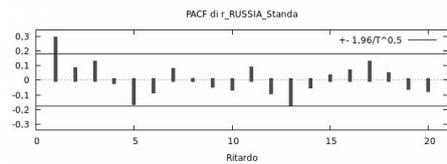
(b) Serie storica rendimenti MSCI Russia.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



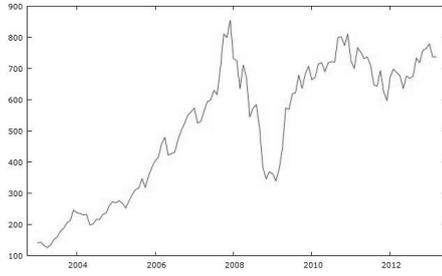
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,0088354
Mediana	0,023780
Minimo	-0,42139
Massimo	0,20462
Scarto quadratico medio	0,094465
Coeff. di variazione	10,692
Asimmetria	-1,0317
Curtosi	2,7572

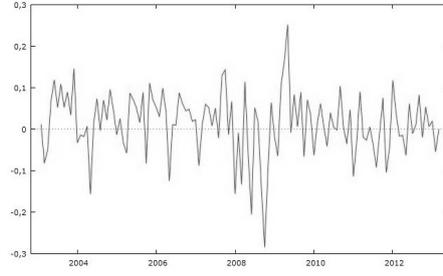
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.13

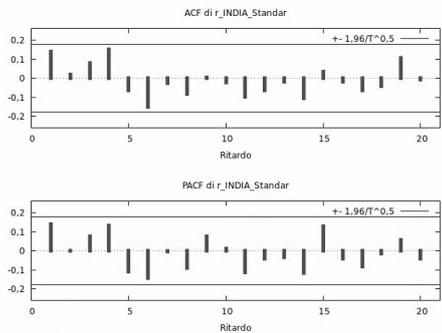
India



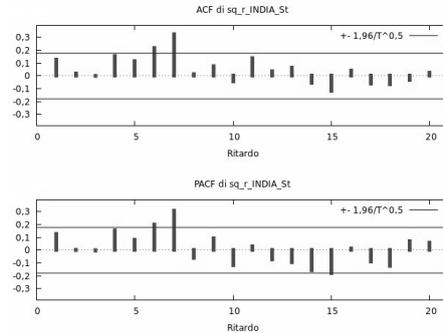
(a) Serie storica MSCI India.



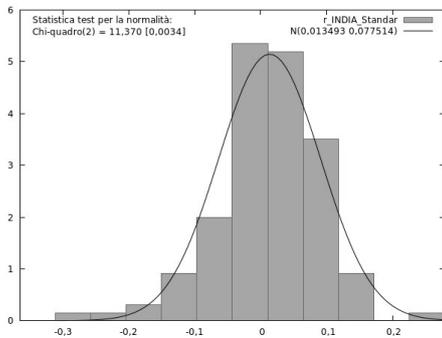
(b) Serie storica rendimenti MSCI India.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



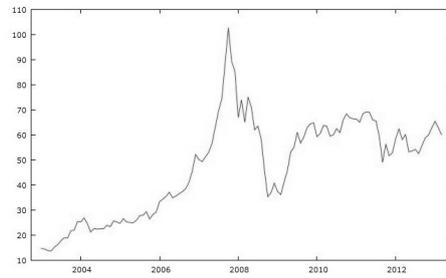
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,013493
Mediana	0,013012
Minimo	-0,28470
Massimo	0,25200
Scarto quadratico medio	0,077514
Coeff. di variazione	5,7448
Asimmetria	-0,58378
Curtosi	1,6647

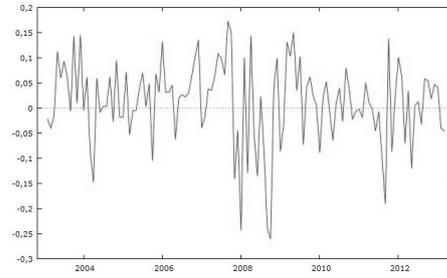
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.14

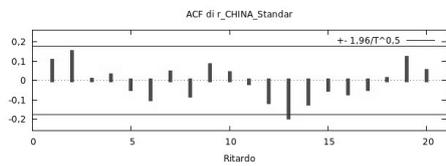
Cina



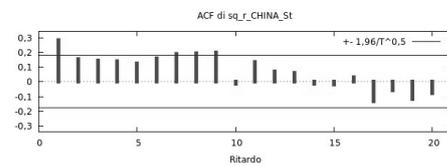
(a) Serie storica MSCI Cina.



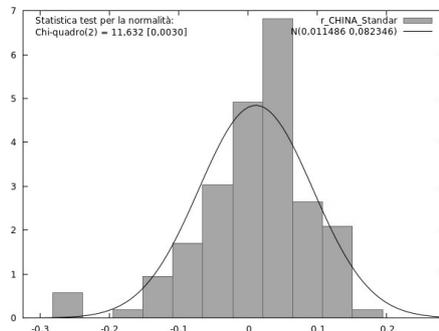
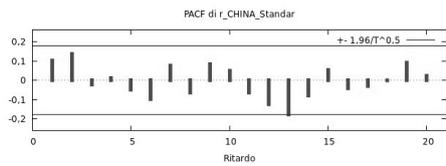
(b) Serie storica rendimenti MSCI Cina.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



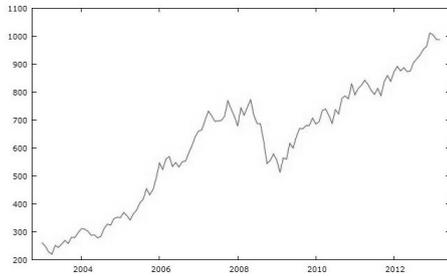
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,011486
Mediana	0,021735
Minimo	-0,26027
Massimo	0,17297
Scarto quadratico medio	0,082346
Coeff. di variazione	7,1691
Asimmetria	-0,78863
Curtosi	1,1390

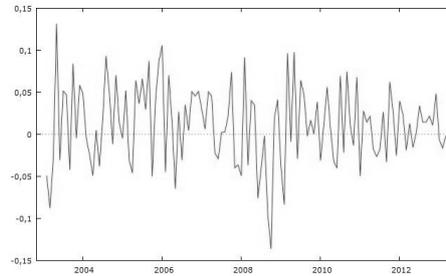
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.15

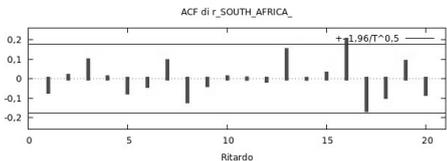
Sudafrica



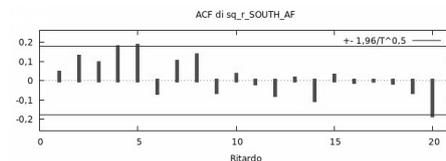
(a) Serie storica MSCI Sudafrica.



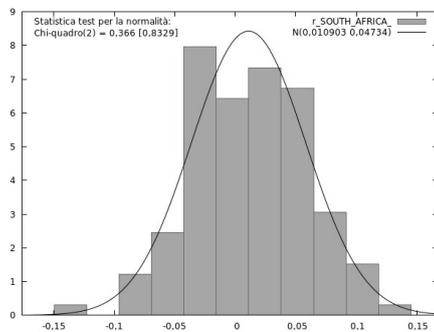
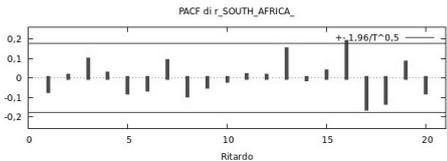
(b) Serie storica rendimenti MSCI Sudafrica.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



(e) Distribuzione di frequenza.

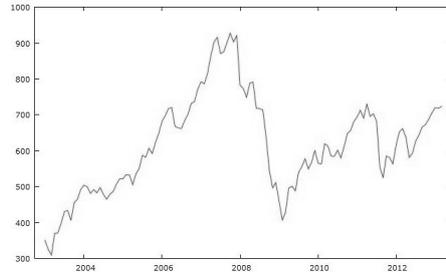
Media	0,010903
Mediana	0,012447
Minimo	-0,13630
Massimo	0,13167
Scarto quadratico medio	0,047340
Coeff. di variazione	4,3419
Asimmetria	-0,11355
Curtosi	-0,053437

(f) Statistiche descrittive.

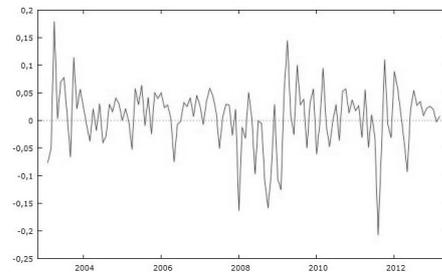
Figura 1.16

1.1.3 G7

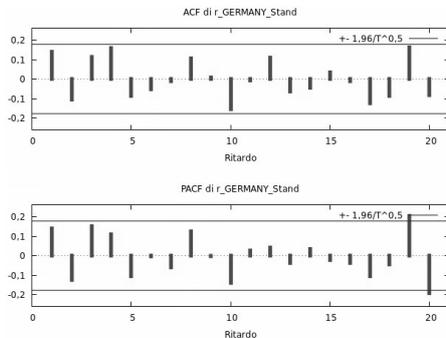
Germania



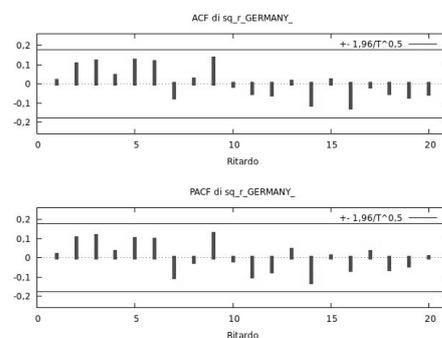
(a) Serie storica MSCI Germania.



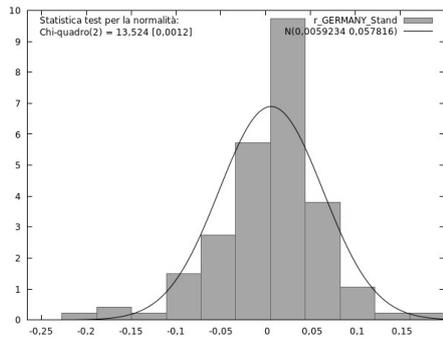
(b) Serie storica rendimenti MSCI Germania.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



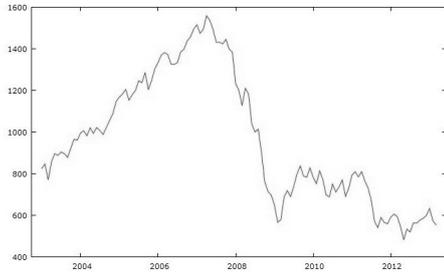
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,0059234
Mediana	0,015354
Minimo	-0,20748
Massimo	0,17956
Scarto quadratico medio	0,057816
Coeff. di variazione	9,7605
Asimmetria	-0,66861
Curtosi	1,9975

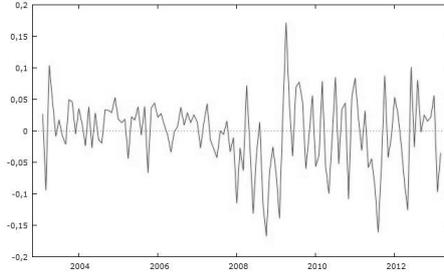
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.17

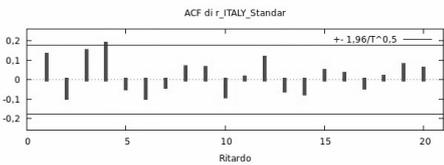
Italia



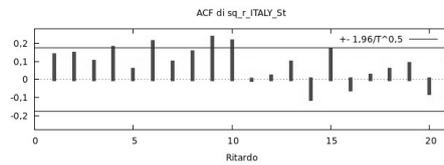
(a) Serie storica MSCI Italia.



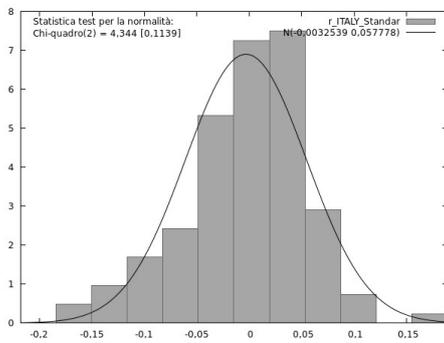
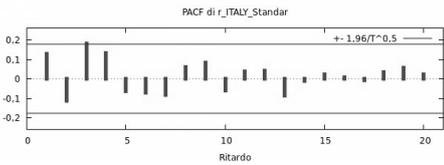
(b) Serie storica rendimenti MSCI Italia.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



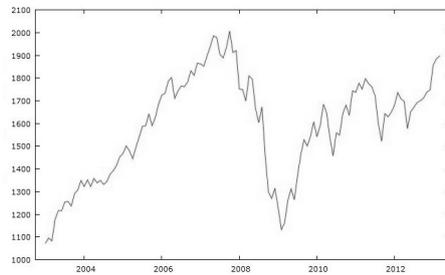
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	-0,0032539
Mediana	0,0077487
Minimo	-0,16720
Massimo	0,17154
Scarto quadratico medio	0,057778
Coeff. di variazione	17,756
Asimmetria	-0,41871
Curtosi	0,57692

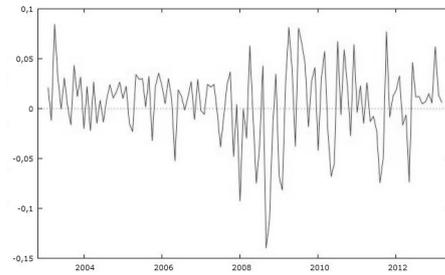
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.18

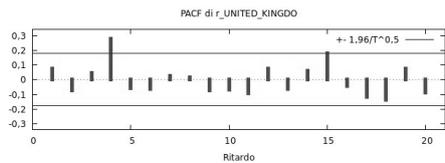
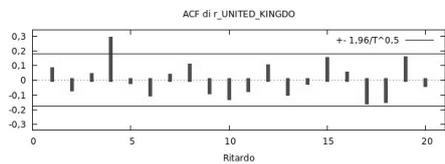
Regno Unito



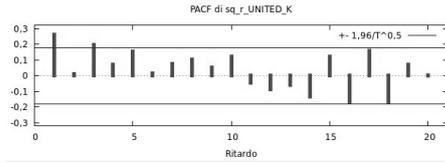
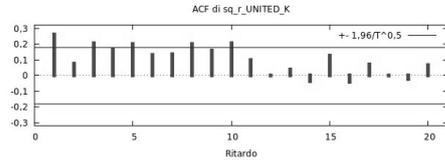
(a) Serie storica MSCI Regno Unito.



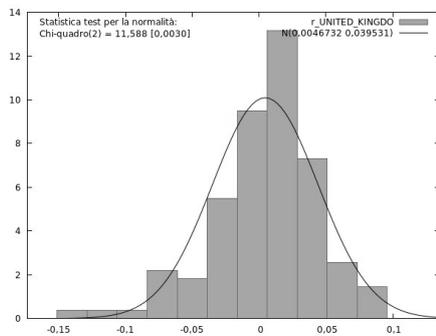
(b) Serie storica rendimenti MSCI Regno Unito.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



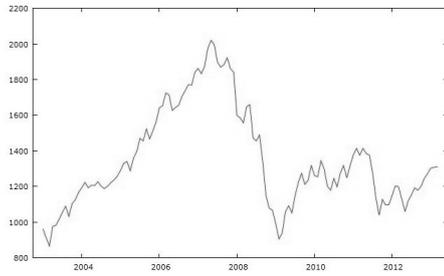
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,0046732
Mediana	0,010462
Minimo	-0,13982
Massimo	0,084663
Scarto quadratico medio	0,039531
Coeff. di variazione	8,4592
Asimmetria	-0,79480
Curtosi	1,2960

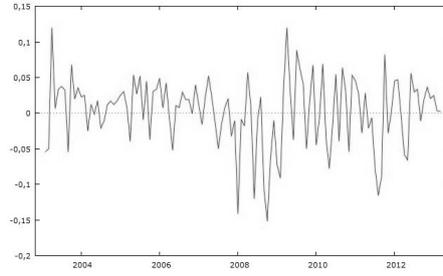
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.19

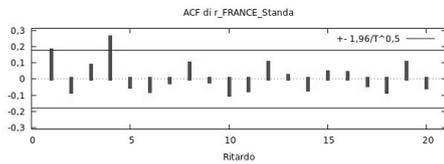
Francia



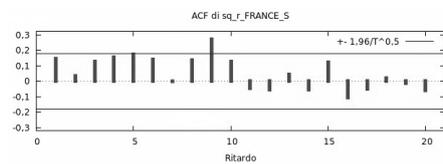
(a) Serie storica MSCI Francia.



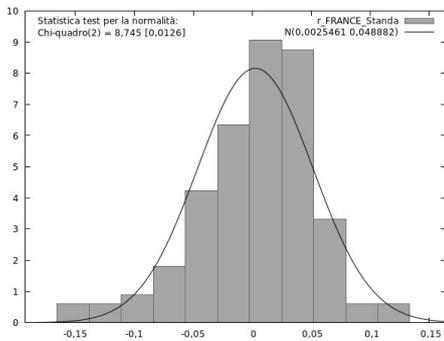
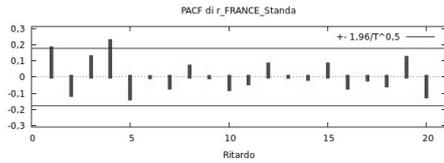
(b) Serie storica rendimenti MSCI Francia.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



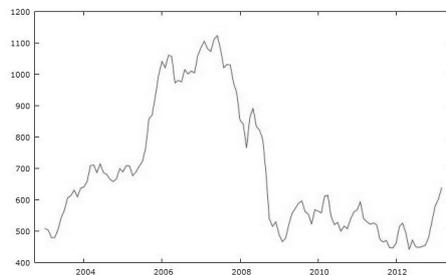
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,0025461
Mediana	0,011577
Minimo	-0,15172
Massimo	0,11991
Scarto quadratico medio	0,048882
Coeff. di variazione	19,199
Asimmetria	-0,67166
Curtosi	0,82596

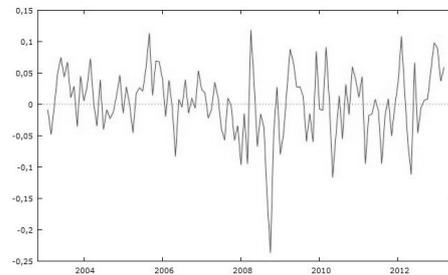
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.20

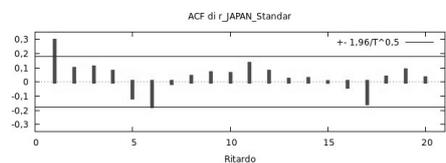
Giappone



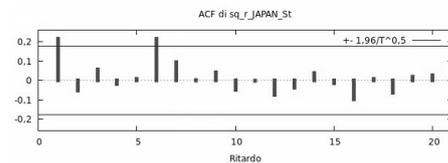
(a) Serie storica MSCI Giappone.



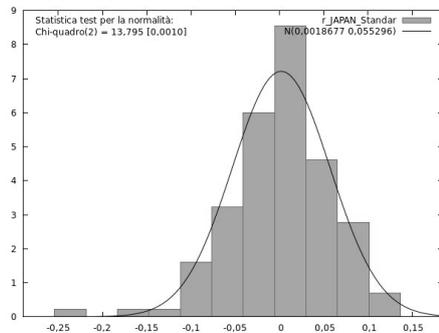
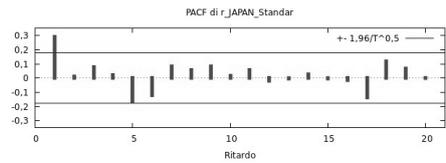
(b) Serie storica rendimenti MSCI Giappone.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



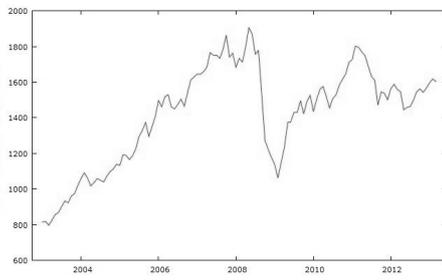
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,0018677
Mediana	0,0074414
Minimo	-0,23649
Massimo	0,11875
Scarto quadratico medio	0,055296
Coeff. di variazione	29,607
Asimmetria	-0,78635
Curtosi	2,1074

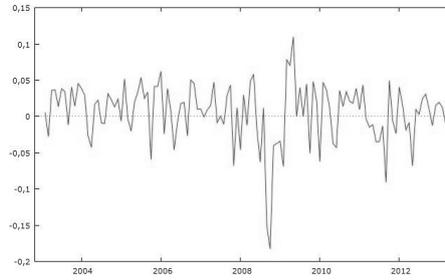
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.21

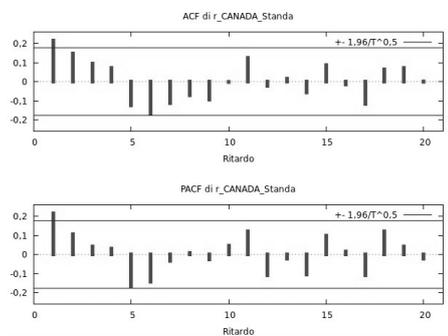
Canada



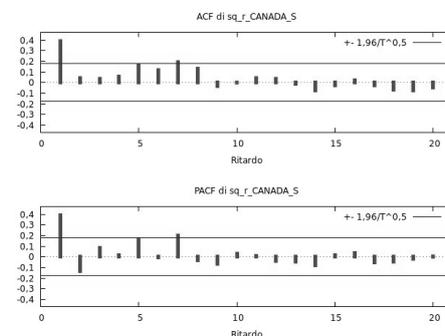
(a) Serie storica MSCI Canada.



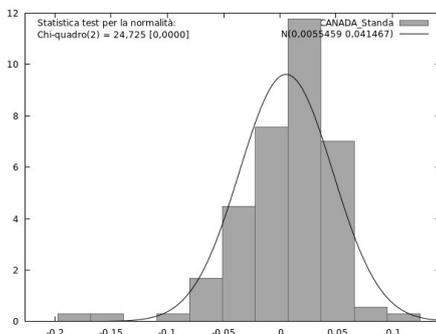
(b) Serie storica rendimenti MSCI Canada.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



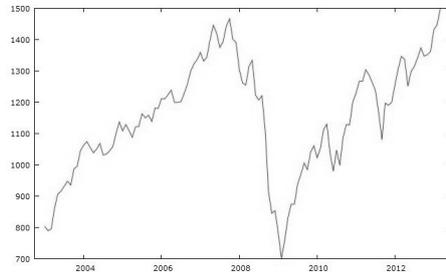
(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,0055459
Mediana	0,012578
Minimo	-0,18268
Massimo	0,10983
Scarto quadratico medio	0,041467
Coeff. di variazione	7,4770
Asimmetria	-1,2999
Curtosi	3,7987

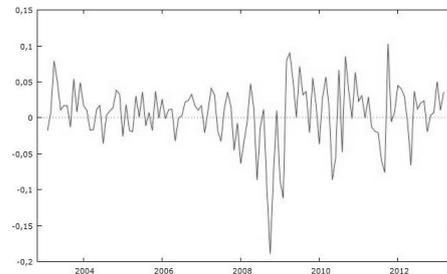
(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.22

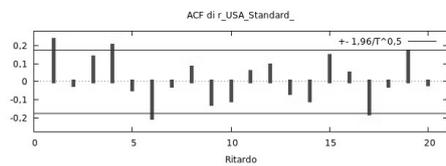
Stati Uniti



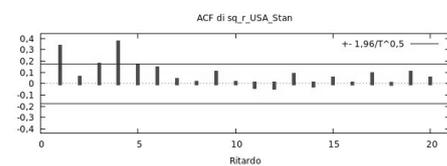
(a) Serie storica MSCI Stati Uniti.



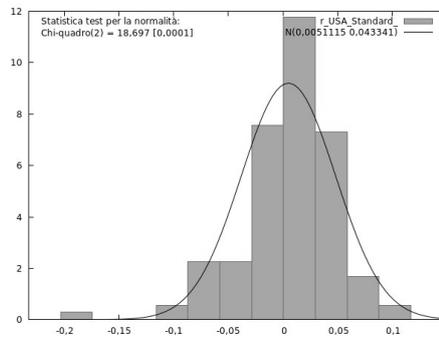
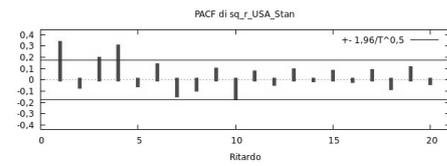
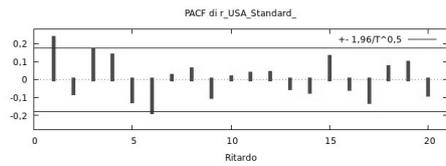
(b) Serie storica rendimenti MSCI Stati Uniti.



(c) Correlogrammi rendimenti.



(d) Correlogrammi rendimenti al quadrato.



(e) Distribuzione di frequenza.

Media	0,0051115
Mediana	0,010755
Minimo	-0,18931
Massimo	0,10285
Scarto quadratico medio	0,043341
Coeff. di variazione	8,4790
Asimmetria	-1,0651
Curtosi	2,8973

(f) Statistiche descrittive.

Figura 1.23

	Media	Mediana	Min	Max	Volatilità	Asimm.	Curtosi	Norm.
ARG	10,583	23,253	-555,362	276,490	38,089	-1,04640	2,68580	×
HRV	2,130	0,634	-327,702	294,507	25,571	-0,28589	3,2320	×
EST	8,411	20,350	-455,440	518,574	32,313	-0,03799	4,7741	×
SVN	1,273	2,930	-205,477	202,293	20,958	-0,22023	1,1096	×
KEN	18,913	22,500	-325,433	295,265	26,816	-0,57350	2,7345	×
MUS	16,302	18,387	-333,837	232,456	21,661	-0,95497	4,8903	×
NGA	12,675	14,627	-564,849	459,310	33,694	-0,77150	6,2642	×
JOR	3,194	6,277	-316,657	217,685	22,402	-0,60166	2,5692	×
LBN	8,192	0,058	-307,355	467,940	31,870	0,59757	3,0938	×
PAK	10,534	14,612	-840,113	251,998	33,561	-3,2838	22,155	×
LKA	15,664	2,074	-320,520	511,290	32,798	0,94215	3,8152	×
BRA	13,773	13,518	-351,893	196,916	22,696	-0,83146	2,8610	×
RUS	10,602	28,535	-505,670	245,550	32,724	-1,0317	2,7572	×
IND	16,192	15,615	-341,642	302,396	26,852	-0,58378	1,6647	×
CHN	13,784	26,083	-312,323	207,561	28,526	-0,78863	1,1390	×
ZAF	13,084	14,936	-163,557	157,998	16,399	-0,11355	-0,05343	✓
DEU	7,108	18,425	-248,981	215,471	20,028	-0,66861	1,9975	×
ITA	-3,905	9,298	-200,641	205,850	20,015	-0,41871	0,57692	×
GBR	5,608	12,554	-167,781	101,596	13,694	-0,79480	1,2960	×
FRA	3,055	13,892	-182,060	143,888	16,933	-0,67166	0,82596	×
JPN	2,241	8,930	-283,786	142,496	19,155	-0,78635	2,1074	×
CAN	6,655	15,094	-219,212	131,791	14,364	-1,2999	3,7987	×
USA	6,134	12,906	-227,173	123,422	15,014	-1,0651	2,8973	×

Tabella 1.2: Statistiche descrittive a confronto

1.1.4 Commenti

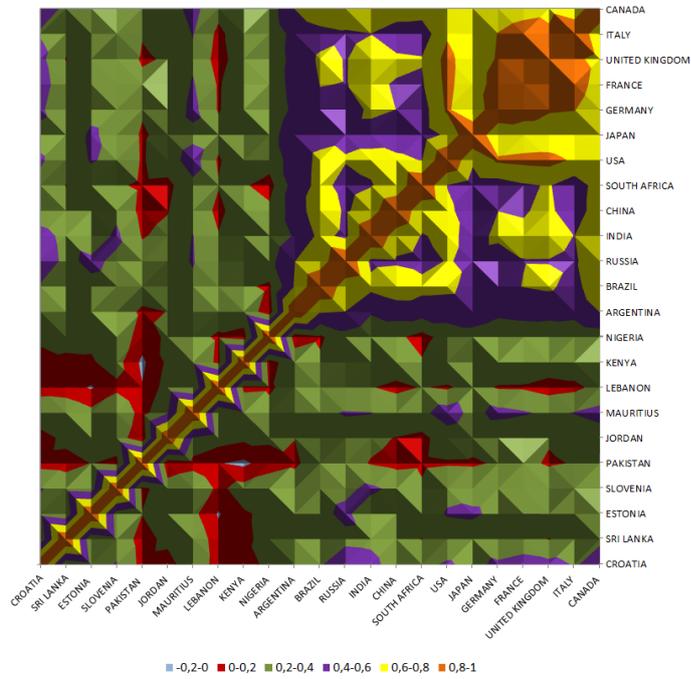
Ciò che accomuna tutti gli Stati è il crollo dell'indice di mercato in corrispondenza del 2008, giunto ai minimi storici intorno all'anno successivo. La causa principale viene attribuita alla crisi finanziaria scoppiata negli Stati Uniti nell'autunno 2008 che ha provocato un "effetto domino" sui mercati europei e del resto del mondo, assieme ad un incremento della volatilità dei rendimenti. Si vede chiaramente dai grafici come gli effetti della crisi siano stati di portata mondiale, tanto che molti Paesi ne stanno subendo tuttora le conseguenze. Soltanto gli indici di Stati Uniti e Regno Unito, per i Paesi sviluppati, sono tornati ai livelli pre crisi, indicando un probabile superamento della fase di recessione economica. Tra i mercati emergenti e di frontiera si distinguono in modo particolare Sudafrica, Sri Lanka, i cui MSCI presentano un trend complessivamente crescente, e Kenya, il quale nell'ultimo anno ha subito una forte crescita del mercato superando di gran lunga i valori precedenti alla crisi. L'Argentina sembrava dare segnali positivi di ripresa per poi subire un altro crollo del mercato nel 2011.

Osservando i correlogrammi si può notare come in molti casi il ritardo di ordine uno (talvolta anche il terzo e il quarto) fuoriesca dalle bande di confidenza di Bartlett, ciò significa che il rendimento del mese t dipende da quello del mese $t - 1$, facendo supporre la non stazionarietà della se-

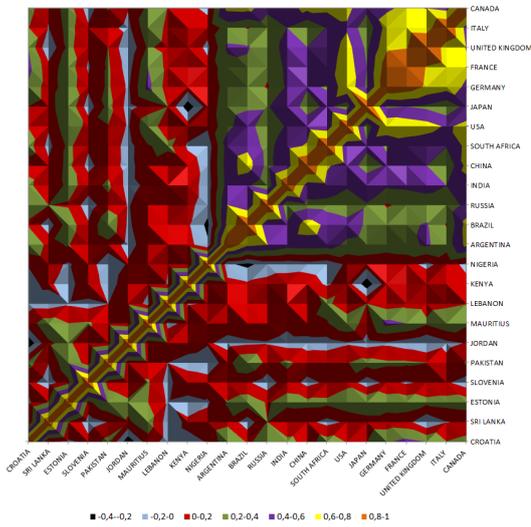
rie storica. Sostanzialmente però risulta difficile adeguare ai rendimenti un modello ARIMA utilizzabile per fare previsioni, in quanto le funzioni di autocorrelazione globale e parziale non hanno un andamento che permette di identificare chiaramente modelli di tale classe. I rendimenti al quadrato mantengono lo stesso comportamento, indicando possibile presenza di eteroschedasticità condizionale, ma anche in questo caso la volatilità non può essere prevista tanto facilmente con un modello della classe ARCH-GARCH che colga il fenomeno di volatility-clustering. Per quanto riguarda le distribuzioni di frequenza si può affermare, osservando i p-value del test di normalità, che in nessun caso i rendimenti possono essere realizzazioni di una variabile casuale Normale, eccetto che per il Sudafrica. Questa affermazione viene supportata anche dalle statistiche descrittive, in particolare da asimmetria quasi sempre negativa e da eccesso di curtosi, suggerendo una distribuzione per i rendimenti leptocurtica, ossia con code più pesanti rispetto al caso di normalità, e che presenti asimmetria. È da notare infine come i rendimenti dei mercati emergenti e di frontiera presentino media e volatilità maggiori rispetto ai mercati sviluppati, anche a causa di valori più estremi.

1.2 Correlazioni

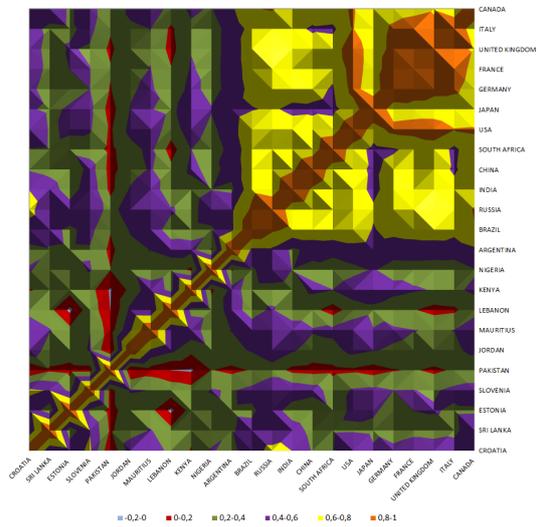
A questo punto viene analizzata la correlazione dei rendimenti esistente tra i vari mercati sempre per il periodo precedentemente preso in considerazione. Essendo difficile riuscire ad interpretare la matrice di correlazione per le elevate dimensioni (23×23) si è deciso di rappresentarla attraverso un grafico a superficie isometrico, in cui colori diversi corrispondono a differenti livelli di correlazione. Si vede chiaramente dalla Figura 1.24 (a) come i mercati di frontiera siano poco correlati tra loro, presentando oltretutto bassa correlazione anche con i G7 e i BRICS, che sono invece altamente correlati tra loro. I grafici successivi, Figura 1.24 (b) e (c), rappresentano la correlazione tra gli stessi asset per il periodo campionario pre crisi e post crisi. Nel primo periodo le correlazioni sono generalmente inferiori rispetto al periodo completo, rimangono comunque relativamente alte per i G7 e per i BRICS, diminuiscono tra BRICS e G7, ancor di più tra i Paesi di frontiera dove arrivano ad essere anche negative. Nel secondo periodo invece si nota un generico notevole incremento della correlazione, diventando alta in alcuni casi anche tra BRICS e Frontier Markets e tra Frontier Markets e G7.



(a) *Periodo completo.*



(b) *Primo periodo.*



(c) *Secondo periodo.*

Figura 1.24: Correlazioni tra FM, BRICS e G7.

Capitolo 2

Calcolo e confronto delle frontiere efficienti

2.1 Cenni teorici

Nel 1959 Harry Markovitz sviluppò la teoria della scelta di portafoglio che gli valse il premio Nobel per l'economia. Il suo lavoro consiste nell'aver proposto un metodo matematico capace di trovare i portafogli migliori fra tutte le combinazioni possibili che si vengono a creare a partire da un insieme dato di asset. Per fare ciò il modello di Markovitz tiene conto delle preferenze dell'investitore, rappresentate dalla sua funzione di utilità che nella fattispecie dipende soltanto dal valore atteso \mathbf{r} e dalla matrice di varianza-covarianza Σ del vettore dei rendimenti considerato. Queste ipotesi sono alquanto restrittive perché la distribuzione dei rendimenti delle attività rischiose si suppone completamente caratterizzata dai primi due momenti. Essendo queste due quantità ignote occorre stimarle ad esempio attraverso degli stimatori campionari, delle stime basate sullo smorzamento esponenziale o ricorrendo a modelli statistico-econometrici.

Un generico portafoglio ha rendimento medio e varianza pari a:

$$\mu_p = \mathbf{r}'\omega = \sum_{i=1}^n r_i \omega_i \quad (2.1)$$

$$\sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad (2.2)$$

dove ω è il vettore dei pesi assegnati a ciascun asset, mentre ρ_{ij} rappresenta la correlazione tra il titolo i e j . Come si può vedere facilmente dalla formula 2.2, una diminuzione (aumento) del coefficiente di correlazione fa ridurre (crescere) la varianza, che viene identificata come rischio di portafoglio. Quindi se a parità di rendimento la correlazione tra due strumenti finanziari è negativa si avrà una riduzione certa del rischio investendo in entrambi.

L'ottimo dell'agente viene determinato massimizzando la funzione di utilità media-varianza $U = \mu_p - \frac{\gamma}{2}\sigma_p^2$, quindi si avrà una soluzione per ogni coefficiente di avversione al rischio γ . L'insieme di tutte le possibili scelte ottime costituisce i portafogli efficienti (figura 2.1).

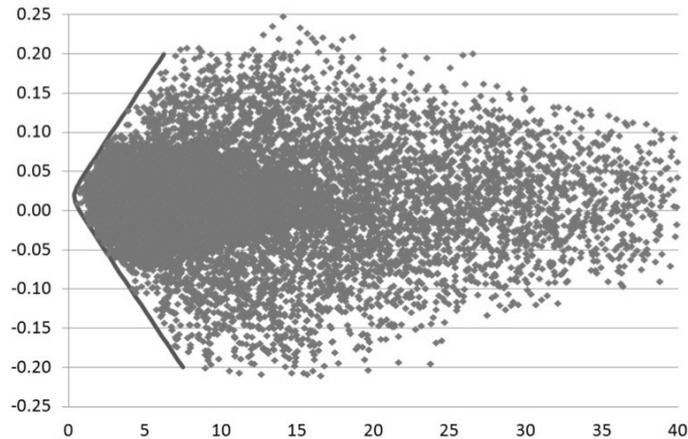


Figura 2.1: Portafogli ammissibili

Lo stesso problema si può risolvere mediante un'ottimizzazione vincolata, massimizzando il rendimento e fissando la varianza, o ugualmente minimizzando il rischio con un dato rendimento obiettivo. Un particolare portafoglio efficiente si trova quindi risolvendo:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \omega' \Sigma \omega \\ \mu_p &= \omega' \mathbf{r} \\ \omega' \mathbf{1}_n &= 1 \end{aligned}$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} \max_{\omega} \omega' \mathbf{r} \\ \sigma_p^2 &= \omega' \Sigma \omega \\ \omega' \mathbf{1}_n &= 1 \end{aligned}$$

La soluzione ottima si ricava ricorrendo al metodo dei moltiplicatori di Lagrange e dopo vari passaggi e sostituzioni successive si giunge alla

relazione tra μ_p e σ_p^2 , denominata *frontiera efficiente*:

$$\sigma_p^2 = \frac{C}{\Delta}\mu_p^2 - \frac{2B}{\Delta}\mu_p + \frac{A}{\Delta} \quad (2.3)$$

$$A = \mathbf{r}'\Sigma^{-1}\mathbf{r}$$

$$B = \mathbf{1}'_n\Sigma^{-1}\mathbf{r}$$

$$C = \mathbf{1}'_n\Sigma^{-1}\mathbf{1}_n$$

$$\Delta = AC - B^2$$

Essa nel piano (μ_p, σ_p^2) assume forma parabolica tuttavia, poiché μ e σ si muovono sulla stessa scala, è comune rappresentarla nello spazio (μ_p, σ_p) in cui corrisponde ad un ramo di iperbole con vertice nel punto $(\frac{1}{\sqrt{C}}, \frac{B}{C})$ e asintoti $\mu_p = \frac{B}{C} \pm \sigma_p\sqrt{\frac{A}{C}}$. (Figura 2.2)



Figura 2.2: Frontiera efficiente nel piano (μ_p, σ_p)

Ovviamente la porzione di frontiera efficiente che interessa ad un investitore è quella superiore, perché a parità di rischio offre un rendimento maggiore. Tra tutti i portafogli ottimi due rivestono particolare importanza: il portafoglio a *varianza minima globale* con pesi pari a $\frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}'_n\Sigma^{-1}\mathbf{1}_n}$, rendimento $\frac{B}{C}$, standard deviation $\frac{1}{\sqrt{C}}$ e quello di *massimo trade-off* con pesi pari a $\frac{\Sigma^{-1}\mathbf{r}}{\mathbf{1}'_n\Sigma^{-1}\mathbf{r}}$, rendimento $\frac{A}{B}$, standard deviation $\frac{\sqrt{A}}{B}$. Il primo si ottiene minimizzando la varianza sotto il vincolo di ammissibilità (si investe il 100% della ricchezza disponibile) e corrisponde al vertice dell'iperbole, il secondo invece è quel particolare portafoglio che risulta dalla massimizzazione

del rapporto media-deviazione standard ed è quello che risolve al meglio il trade-off tra rischio e rendimento di portafoglio. Esso corrisponde al punto di tangenza tra la frontiera efficiente e la retta che passa per l'origine. Sono due portafogli rilevanti perché se si risolvesse il problema utilizzando l'utilità dell'agente come funzione da massimizzare si otterrebbero i pesi ottimi come combinazione lineare del portafoglio a varianza minima globale e di quello a massimo trade-off. Grazie al *Teorema dei due fondi* l'intera frontiera può essere costruita a partire da questi due portafogli efficienti.

2.1.1 Frontiera efficiente con il titolo privo di rischio

Nel caso in cui oltre agli asset rischiosi sia presente un titolo privo di rischio il problema che si deve risolvere è il seguente:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \omega' \Sigma \omega \\ \mu_p = \omega' \mathbf{r} + (1 - \omega' \mathbf{1}_n) r_f \end{aligned}$$

Il vincolo di ammissibilità è quindi implicito nell'espressione del rendimento obiettivo, perché ω' e $(1 - \omega' \mathbf{1}_n)$ sommano a 1. Risolvendo il problema di ottimo allo stesso modo del caso senza *risk-free* si ottiene il seguente risultato:

$$\mu_p = r_f + \sigma_p \sqrt{A - 2Br_f + Cr_f^2} \quad (2.4)$$

Questa espressione corrisponde ad una retta (Figura 2.3) denominata Capital Market Line.

Spostandosi sulla retta da sinistra a destra si passerà per un punto a rendimento pari a r_f , che coincide con il portafoglio a varianza minima globale (tutto il portafoglio investe nell'attività non rischiosa) e inevitabilmente per un punto tale che $\omega' \mathbf{1}_n = 1$. Quest'ultimo coincide con il punto di tangenza tra le due frontiere efficienti ed è chiamato appunto portafoglio di tangenza (in assenza del risk-free diventa il portafoglio di massimo trade-off), composto di soli titoli rischiosi. A sinistra di questo punto $(1 - \omega' \mathbf{1}_n) < 1$ e $\omega' \mathbf{1}_n > 0$, mentre a destra $(1 - \omega' \mathbf{1}_n) < 0$ e $\omega' \mathbf{1}_n > 1$. Nel primo caso si investe una quota di portafoglio positiva sia nel risk-free che nel titolo rischioso, mentre nel secondo caso un agente si indebiterà al tasso risk-free per investire di più negli asset rischiosi. La pendenza della Capital Market Line coincide con il rapporto tra extra-rendimento rispetto al risk-free e deviazione standard, e corrisponde a $\sqrt{A - 2Br_f + Cr_f^2}$, ovvero all'indice di Sharpe del portafoglio di tangenza.

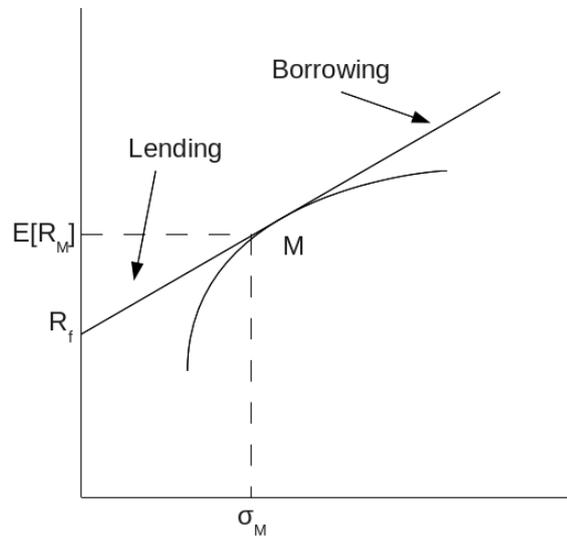


Figura 2.3: Frontiera efficiente nel piano (μ_p, σ_p) con e senza asset privo di rischio.

2.1.2 Frontiera efficiente con vincoli di positività

Per evitare portafogli estremi e quindi troppo rischiosi talvolta si impone la positività dei pesi di portafoglio. Si risolve a tale scopo il problema seguente:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \quad & \omega' \Sigma \omega \\ \mu_p = \quad & \omega' \mathbf{r} \\ \omega' \mathbf{1}_n = \quad & 1 \\ \omega_i \geq 0 \quad & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Essendo presenti vincoli di positività non si riesce più a trovare una soluzione analitica, ma i pesi ottimi vengono costruiti per punti, determinati perciò per via numerica. La frontiera efficiente risultante è limitata superiormente ed inferiormente dai titoli con rendimento massimo e minimo, quindi:

$$\begin{aligned} \max \mu_p &= \max\{r_1, r_2, \dots, r_n\} \\ \min \mu_p &= \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\} \end{aligned}$$

Si ha perciò una riduzione delle combinazioni possibili di portafogli ottimi, per questo motivo la frontiera efficiente vincolata non potrà mai essere a sinistra di quella priva di vincoli.

2.1.3 Inferenza sulla frontiera efficiente

Assumendo di stimare le quantità ignote \mathbf{r} e Σ attraverso i rispettivi momenti campionari, sotto opportune condizioni, tra cui rendimenti IID, si può dimostrare:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{r}_t \xrightarrow[p]{p} \mathbf{r} \\ \hat{\Sigma} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{r}_t - \hat{\mathbf{r}})^2 \xrightarrow[p]{p} \Sigma \\ \sqrt{T}(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) &\xrightarrow[d]{d} N(0, \Sigma) \\ |\sqrt{T}(\hat{\Sigma} - \Sigma)|_{ij} &\xrightarrow[d]{d} N(0, \omega_{ij}) \\ \hat{\mathbf{r}} &\perp \hat{\Sigma}\end{aligned}$$

Test sull'uguaglianza della performance di Sharpe per due portafogli non efficienti

L'obiettivo è confrontare le performance di Sharpe di due portafogli qualsiasi p_1 e p_2 , non per forza efficienti, per attribuire loro un ordinamento. L'ipotesi che si vuole verificare, con alternativa unilaterale, è perciò $H_0 : Sh_{p_1} = Sh_{p_2}$. Per ricavare la statistica test si parte dal seguente risultato asintotico, dove ρ_{12} rappresenta la correlazione tra p_1 e p_2 :

$$\begin{aligned}\sqrt{T} \begin{pmatrix} \widehat{Sh}_{p_1} - Sh_{p_1} \\ \widehat{Sh}_{p_2} - Sh_{p_2} \end{pmatrix} &\xrightarrow[d]{d} N(0, V) \\ V &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{Sh_{p_1}^2}{2} & \rho_{12} + \frac{Sh_{p_1} Sh_{p_2} \rho_{12}^2}{2} \\ \rho_{12} + \frac{Sh_{p_1} Sh_{p_2} \rho_{12}^2}{2} & 1 + \frac{Sh_{p_2}^2}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned}\sqrt{T}(\widehat{Sh}_{p_1} - \widehat{Sh}_{p_2}) &\xrightarrow[d]{d} N(0, a) \\ a &= 2(1 - \rho_{12}) + \frac{Sh_{p_1}^2}{2} + \frac{Sh_{p_2}^2}{2} - Sh_{p_1} Sh_{p_2} \rho_{12}^2\end{aligned}$$

Ora, per verificare l'ipotesi nulla occorre sostituire agli elementi di a le rispettive stime campionarie e successivamente standardizzare la statistica test in

modo da poter confrontare i quantili empirici con quelli tabulati:

$$\frac{\sqrt{T}(\widehat{Sh}_{p_1} - \widehat{Sh}_{p_2})}{\sqrt{\widehat{a}}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Test di esclusione di titoli dai portafogli efficienti

È interessante capire se considerando un sottoinsieme n_1 di titoli dall'universo investibile n , il portafoglio di tangenza della frontiera efficiente che ne risulta è statisticamente equivalente a quello della frontiera costruita con tutti gli asset. A tal fine si stimano le due performance di Sharpe massime $\widehat{Sh}_{T,n} = \frac{\hat{\mu}_{T,n} - r_f}{\hat{\sigma}_{T,n}}$ e $\widehat{Sh}_{T,n_1} = \frac{\hat{\mu}_{T,n_1} - r_f}{\hat{\sigma}_{T,n_1}}$ per confrontare la pendenza delle Capital Market Line. La statistica test per verificare l'ipotesi nulla $H_0 : \widehat{Sh}_n = \widehat{Sh}_{n_1}$ è la seguente:

$$T \frac{\widehat{Sh}_n^2 - \widehat{Sh}_{n_1}^2}{1 + \widehat{Sh}_{n_1}^2} \sim \chi^2(n - n_1)$$

Essa ha sempre segno positivo perché $Sh_n^2 > Sh_{n_1}^2$, infatti escludendo titoli è impossibile ottenere performance di portafoglio maggiori, al massimo uguali.

2.2 Frontiere efficienti pre-post crisi senza vincoli di positività

Utilizzando gli indici di mercato precedentemente analizzati sono state costruite con il foglio di calcolo le frontiere efficienti prima considerando soltanto i G7, poi aggiungendo i BRICS e infine i mercati di frontiera, per vedere gli effetti della diversificazione in questi Paesi. Come per il calcolo delle correlazioni si sono distinti due casi dividendo il periodo campionario in due parti: Gennaio 2003-Giugno 2007 e Luglio 2007-Marzo 2013. Il titolo privo di rischio è stato rimpiazzato dal rendimento annualizzato del Treasury-Bill americano a tre mesi, diviso poi per 12 per renderlo mensile, la matrice Σ è stata sostituita dalla matrice di covarianza campionaria, il vettore \mathbf{r} invece è stato stimato con il Capital Asset Pricing Model. L'utilizzo dei rendimenti campionari avrebbe portato alla mancanza di tangenza, dovuta all'inferiorità del rendimento del portafoglio a varianza minima globale rispetto a quello del titolo non rischioso. Per ogni Paese è stata perciò regredita la serie storica dell'extrarendimento dell'indice azionario su quella dell'extrarendimento di un indice di mercato globale, nella fattispecie MSCI WORLD INDEX:

$$R_t^m - r_{f,t} = \alpha_m + \beta_m(R_t^G - r_{f,t}) + \varepsilon_t$$

I rendimenti di equilibrio degli asset sono stati calcolati poi moltiplicando i β stimati dalle regressioni per il rendimento medio globale ($\approx 0,646$) al netto del titolo privo di rischio. Infine si è aggiunto l'ultimo valore del rendimento del titolo non rischioso per il periodo preso in considerazione:

$$R_m^{eq} = \hat{\beta}_m(\bar{R}^G - r_f) + r_f$$

I principali risultati delle regressioni, ovvero i valori di $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, varianza dell'errore (Residual Standard Error), R^2 , assieme ai rendimenti di equilibrio stimati (R^{eq}), sono stati inseriti nelle tabelle 2.1 e 2.2 per i periodi 2003-2007 e 2007-2013. Come si può notare, i coefficienti di determinazione dei modelli di regressione relativi al periodo successivo alla crisi hanno subito un significativo aumento rispetto al precedente, proprio perché il mercato ha avuto una maggiore influenza sui rendimenti dei singoli indici azionari.

Tabella 2.1: Principali risultati delle regressioni (periodo 2003-2007)

$r_f = 0.39\%$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	R^2	RSE	R^{eq}
ARG	0,018	1,684	0,188	0,082	0,822
HRV	0,005	1,035	0,093	0,075	0,656
EST	0,011	1,180	0,188	0,057	0,693
SVN	0,022	0,133	0,004	0,051	0,424
KEN	0,027	0,238	0,005	0,078	0,451
MUS	0,016	0,828	0,145	0,047	0,602
NGA	0,028	0,129	0,001	0,084	0,423
JOR	0,021	-0,115	0,001	0,070	0,361
LBN	0,015	0,572	0,012	0,119	0,537
PAK	0,015	0,853	0,077	0,069	0,609
LKA	0,021	0,169	0,002	0,096	0,433
BRA	0,012	1,443	0,292	0,052	0,760
RUS	0,018	1,173	0,109	0,078	0,691
IND	0,012	1,473	0,297	0,053	0,768
CHN	0,012	1,484	0,296	0,053	0,771
ZAF	0,005	1,238	0,323	0,042	0,708
DEU	-0,001	1,767	0,768	0,023	0,843
ITA	-0,001	0,989	0,472	0,472	0,644
GBR	0,001	0,819	0,670	0,013	0,600
FRA	-0,010	1,255	0,758	0,017	0,712
JPN	0,005	0,835	0,262	0,033	0,604
CAN	0,003	0,905	0,551	0,551	0,622
USA	-0,001	0,978	0,880	0,008	0,641

Tabella 2.2: Principali risultati delle regressioni (periodo 2007-2013)

$r_f = 0.006\%$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	R^2	RSE	R^{eq}
ARG	-0,002	1,290	0,315	0,096	0,832
HRV	-0,005	0,784	0,326	0,057	0,508
EST	0,001	1,009	0,195	0,103	0,652
SVN	-0,042	0,576	0,219	0,055	0,375
KEN	0,009	0,793	0,267	0,066	0,514
MUS	0,007	0,705	0,265	0,059	0,458
NGA	0,003	0,790	0,141	0,098	0,512
JOR	-0,008	0,524	0,211	0,051	0,342
LBN	0,002	0,444	0,088	0,072	0,290
PAK	0,003	0,367	0,036	0,095	0,241
LKA	0,013	0,881	0,169	0,098	0,570
BRA	0,003	0,996	0,582	0,042	0,644
RUS	0,000	1,492	0,595	0,062	0,962
IND	0,008	1,246	0,522	0,060	0,805
CHN	0,005	1,293	0,499	0,065	0,834
ZAF	0,006	0,654	0,523	0,031	0,425
DEU	0,000	1,145	0,817	0,027	0,739
ITA	-0,011	1,185	0,742	0,035	0,765
GBR	0,001	0,898	0,882	0,017	0,581
FRA	-0,004	1,053	0,874	0,020	0,681
JPN	-0,005	1,004	0,630	0,039	0,649
CAN	0,000	0,793	0,699	0,026	0,514
USA	0,003	1,036	0,963	0,010	0,670

Nei grafici che seguono oltre alle frontiere sono stati rappresentati i portafogli di tangenza e le allocazioni costituite al 100% dai singoli indici di mercato. In tutti i casi è evidente lo spostamento verso destra della frontiera efficiente in seguito alla crisi, tutti i punti infatti a parità di rendimento presentano deviazione standard maggiore. Soprattutto è da notare come i portafogli di tangenza prima e dopo la crisi abbiano visto un raddoppio del rischio, mantenendo circa lo stesso rendimento. Ciò va a confermare le supposizioni precedentemente fatte, e cioè che nemmeno i mercati di frontiera sono stati immuni dalla crisi, complice il generico aumento delle correlazioni nel secondo periodo.

Sono state poi raggruppate nello stesso grafico (Figura 2.7) tutte le frontiere efficienti per valutare l'effetto dell'inserimento dei BRICS e dei mercati di frontiera a parità di periodo campionario. Come si vede in figura naturalmente le frontiere assumono una forma più schiacciata con la diminuzione degli asset inclusi, appunto perché le combinazioni di portafogli si riducono,

oltre a questo non sembrano a prima vista essere molto diverse, tuttavia il divario aumenta anche se di poco nel secondo periodo. Questa apparente tendenza viene confermata dai test di esclusione, con p-value tendenti all'unità in tutti i casi.

Quindi per i Paesi scelti e per il periodo campionario preso in considerazione, investire soltanto nei G7 o includere anche BRICS e mercati di frontiera è dal punto di vista statistico equivalente.

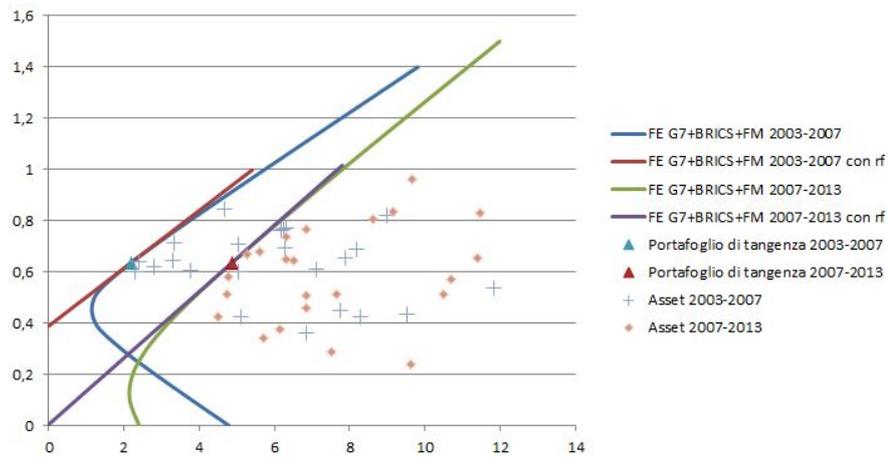


Figura 2.4: Frontiera efficiente con G7, BRICS e mercati di frontiera.

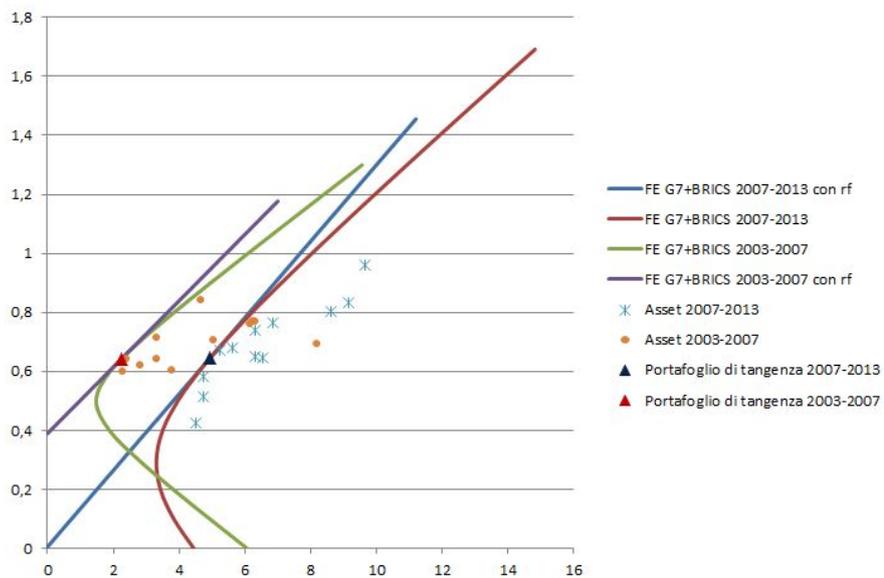


Figura 2.5: Frontiera efficiente con G7 e BRICS.

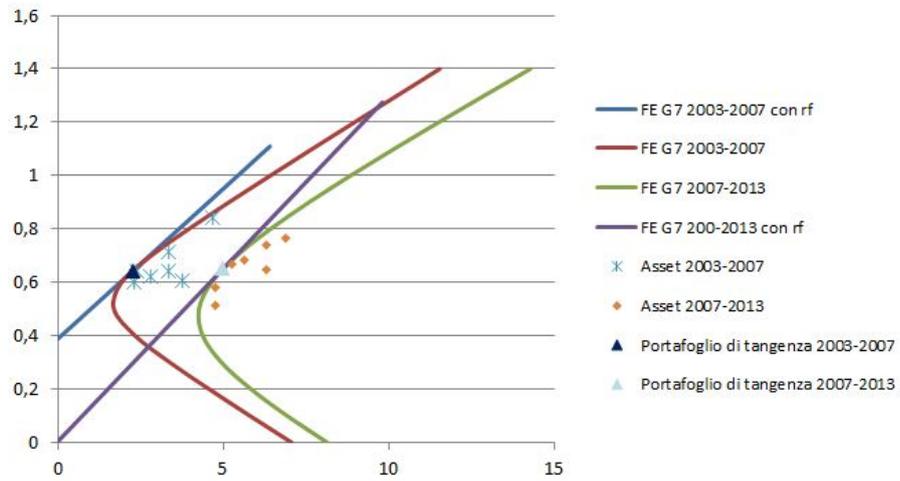


Figura 2.6: Frontiera efficiente con G7.

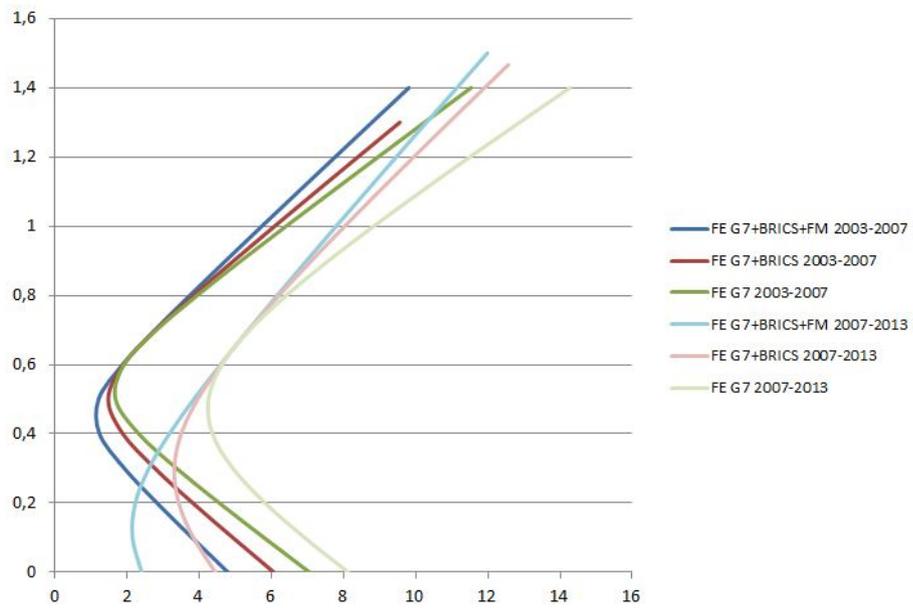


Figura 2.7: Frontiera efficienti pre-post crisi.

Nelle prossime tabelle sono riportate le composizioni del portafoglio di massimo trade-off (MAX TRADE OFF) e di quello a varianza minima globale (VMG), nei due periodi, delle frontiere efficienti costruite con tutti gli indici azionari (Figura 2.8), con i G7 e i BRICS (Figura 2.9) e infine soltanto con i G7 (Figura 2.10). Le ultime due righe riportano il rendimento medio e deviazione standard dei portafogli, espressi in percentuale. Come si può notare, in tutte e tre le frontiere efficienti i Paesi sviluppati occupano una quota preponderante del portafoglio, sia esso a varianza minima globale o a massimo trade-off, ai Paesi emergenti e di frontiera invece sono riservate percentuali inferiori.

Focalizzando ora l'attenzione sul rendimento e sul rischio sono palesi gli effetti della crisi, il portafoglio a varianza minima globale ha visto in tutti i casi aumentare la deviazione standard e diminuire il rendimento, solamente il portafoglio di massimo trade off ha subito un incremento del rendimento accompagnato tuttavia da un aumento del rischio, più che triplicato.

	FE G7+BRICS+FM			
	VMG		MAX TRADE OFF	
	2003-2007	2007-2013	2003-2007	2007-2013
ARG	-2,749%	-6,832%	-2,749%	-0,754%
HRV	2,980%	3,992%	2,980%	1,250%
EST	-6,528%	6,106%	-6,528%	0,587%
SVN	8,074%	19,668%	8,074%	1,989%
KEN	1,003%	-0,782%	1,003%	0,385%
MUS	2,245%	0,371%	2,245%	0,021%
NGA	-1,678%	2,638%	-1,678%	-0,141%
JOR	6,581%	9,208%	6,581%	-0,298%
LBN	0,632%	18,807%	0,632%	1,716%
PAK	0,836%	9,813%	0,836%	1,092%
LKA	4,477%	-6,205%	4,477%	0,360%
BRA	-0,534%	17,752%	-0,534%	1,127%
RUS	-4,768%	-43,257%	-4,768%	-3,261%
IND	-6,288%	-6,699%	-6,288%	-0,736%
CHN	6,365%	-11,344%	6,365%	0,493%
ZAF	-8,978%	44,975%	-8,978%	3,141%
DEU	-46,073%	20,866%	-46,073%	5,515%
ITA	8,336%	0,727%	8,336%	0,856%
GBR	43,442%	23,084%	43,442%	15,179%
FRA	27,424%	-6,543%	27,424%	9,343%
JPN	20,886%	-4,378%	20,886%	9,663%
CAN	6,382%	32,565%	6,382%	5,574%
USA	37,934%	-24,533%	37,934%	46,899%
r	0,453153	0,127374	0,478809	0,613353
sd	1,109895	2,137664	1,140882	4,690886

Figura 2.8: Portafogli a varianza minima globale e di massimo trade off delle frontiere efficienti con BRICS, G7 e FM.

FE G7+BRICS				
	VMG		MAX TRADE OFF	
	2003-2007	2007-2013	2003-2007	2007-2013
BRA	-6,761%	17,841%	-5,176%	0,076%
RUS	-4,413%	-35,015%	-3,470%	-0,884%
IND	-5,990%	-2,407%	-4,662%	0,590%
CHN	2,761%	-21,107%	2,054%	0,472%
ZAF	-10,136%	50,162%	-7,976%	1,182%
DEU	-55,718%	21,260%	-43,009%	3,583%
ITA	2,408%	-9,142%	2,160%	0,658%
GBR	51,567%	23,059%	43,462%	13,290%
FRA	32,532%	2,960%	27,786%	12,113%
JPN	19,554%	10,079%	17,680%	11,095%
CAN	15,694%	62,226%	13,044%	6,552%
USA	58,502%	-19,916%	58,106%	51,273%
r	0,49908	0,289085	0,530501	0,645945
sd	1,476884	3,307313	1,522666	4,943795

Figura 2.9: Portafogli a varianza minima globale e di massimo trade off delle frontiere efficienti con G7 e BRICS.

FE G7				
	VMG		MAX TRADE OFF	
	2003-2007	2007-2013	2003-2007	2007-2013
DEU	-56,420%	-17,699%	-41,217%	3,694%
ITA	2,489%	-35,881%	2,165%	0,478%
GBR	52,057%	84,591%	42,399%	14,749%
FRA	33,208%	28,186%	27,377%	11,733%
JPN	12,250%	5,824%	11,928%	11,133%
CAN	-5,355%	50,055%	-3,116%	6,728%
USA	61,770%	-15,076%	60,464%	51,485%
r	0,525589	0,472326	0,555871	0,648157
sd	1,647115	4,235206	1,6939	4,96128

Figura 2.10: Portafogli a varianza minima globale e di massimo trade off delle frontiere efficienti con G7.

2.3 Frontiere efficienti pre-post crisi con vincoli di positività

Talvolta nella realtà è possibile che le vendite allo scoperto siano vietate o un gestore avente un orizzonte di investimento a medio-lungo termine preferisca non esporsi ai rischi derivanti dallo *short selling*, per questo motivo è comune imporre la positività dei pesi del portafoglio.

Questo problema di ottimizzazione vincolata è stato risolto mediante il Risolutore di Excel, la cui schermata è mostrata in figura 2.11. La cella obiettivo (\$F\$58) corrisponde alla quantità da minimizzare o massimizzare, nel caso specifico per costruire la frontiera efficiente corrisponde alla radice della varianza del portafoglio. Vanno poi inserite delle celle che il risolutore modifica per determinare la soluzione ottima, nella fattispecie i pesi di portafoglio (\$D\$33:\$D\$55) e delle celle contenenti i vincoli da inserire nel problema. È stata richiesta la non negatività dei pesi (\$D\$33:\$D\$55 \geq 0), l'ammissibilità del portafoglio (\$E\$60=1) e infine il rendimento è stato posto uguale al rendimento obiettivo (\$E\$62=\$E\$64).

Imposta obiettivo:

A: Max Min Valgre di:

Modificando le celle variabili:

Soggette ai vincoli:

-
-
-

Rendi non negative le variabili senza vincoli

Selezionare un metodo di risoluzione:

Metodo di risoluzione
Selezionare il motore GRG non lineare per i problemi lisci non lineari del Risolutore. Selezionare il motore Simplex LP per i problemi lineari e il motore evolutivo per i problemi non lisci.

Aggiungi
Cambia
Elimina
Reimposta tutto
Carica/Salva
Opzioni

Guida Risolvi Chiudi

Figura 2.11: Schermata principale Risolutore di Excel.

Dal momento che per la frontiera efficiente vincolata non si riesce a ricavare l'equazione che stabilisce la relazione tra μ_p e σ_p , come precedentemente accennato, bisogna calcolarla per via numerica e quindi usare il Risolutore iterativamente, per ogni punto della frontiera che si intende costruire. Qui di seguito sono riportati grafici che rappresentano le frontiere efficienti con e senza vincoli.

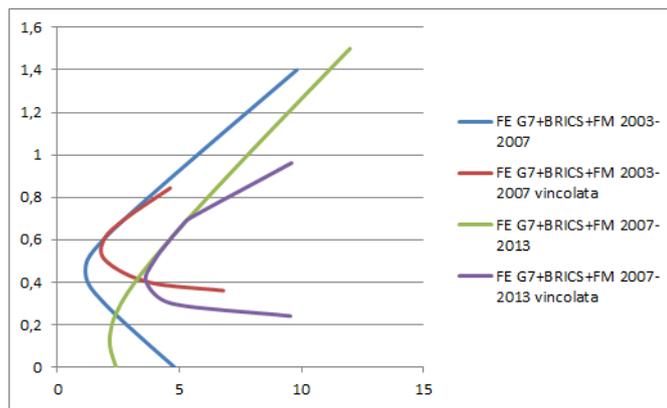


Figura 2.12: Frontiere efficienti G7, BRICS e mercati di frontiera pre-post crisi con e senza vincoli di positività.

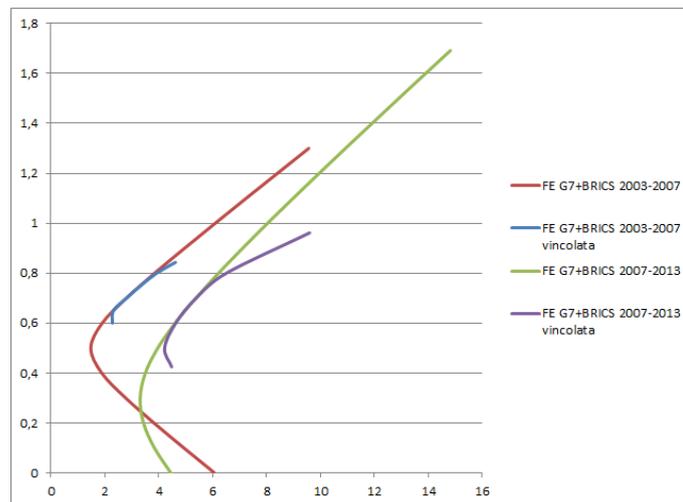


Figura 2.13: Frontiere efficienti G7 e BRICS pre-post crisi con e senza vincoli di positività.

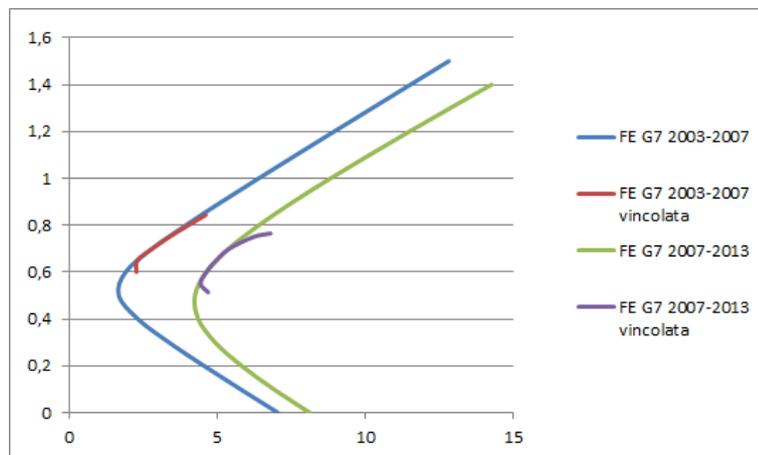


Figura 2.14: Frontiere efficienti G7 pre-post crisi con e senza vincoli di positività.

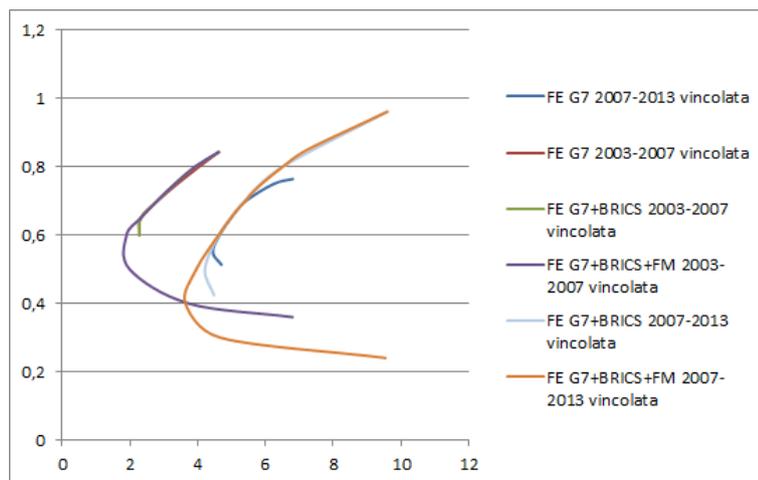


Figura 2.15: Frontiere efficienti pre-post crisi con vincoli di positività.

L'inserimento dei vincoli non determina sostanziali cambiamenti al comportamento delle frontiere prima e dopo la crisi, sono infatti quasi sovrapposte a quelle prive di restrizioni. I limiti superiori e inferiori comportano inoltre una notevole riduzione del rischio, contenendo sia guadagni che perdite. È da notare infine come le frontiere efficienti vincolate che comprendono al loro interno i mercati di frontiera, quindi quelle costruite su un maggior numero di asset, permettano di raggiungere rendimenti più alti, sebbene con maggior rischio, rispetto a quelle contenenti un sottoinsieme di indici azionari.

Analogamente alle frontiere efficienti prive di vincoli vengono mostrati i portafogli a varianza minima globale e di massimo trade off, calcolati con il Risolutore di Excel. Sono stati posti sempre gli stessi vincoli di positività e ammissibilità, con l'esclusione di quello relativo al rendimento obiettivo. Per il primo portafoglio è stata considerata la deviazione standard come funzione obiettivo da minimizzare, mentre per l'altro è stato massimizzato il rapporto rendimento-rischio $\frac{\omega' \mu}{\sqrt{(\omega' \Sigma \omega)}}$.

FE G7+BRICS+FM VINCOLATA				
	VMG		MAX TRADE OFF	
	2003-2007	2007-2013	2003-2007	2007-2013
ARG	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
HRV	0,000%	0,000%	0,000%	0,359%
EST	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
SVN	11,157%	9,100%	7,737%	1,724%
KEN	1,037%	1,652%	0,835%	0,931%
MUS	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
NGA	3,197%	0,000%	2,346%	0,000%
JOR	8,521%	14,238%	6,342%	0,000%
LBN	0,000%	11,864%	0,000%	0,639%
PAK	0,000%	9,825%	0,000%	0,660%
LKA	4,155%	0,000%	3,209%	0,435%
BRA	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
RUS	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
IND	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
CHN	0,000%	0,000%	0,000%	0,022%
ZAF	0,000%	37,169%	0,000%	1,439%
DEU	0,000%	0,000%	0,000%	3,617%
ITA	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
GBR	47,990%	16,152%	41,530%	17,843%
FRA	0,000%	0,000%	0,000%	10,488%
JPN	9,038%	0,000%	9,607%	9,710%
CAN	6,158%	0,000%	5,380%	3,262%
USA	8,748%	0,000%	23,013%	48,871%
r	0,551237	0,401145	0,571535	0,634186
sd	1,722106	3,637494	1,753581	4,851845

Figura 2.16: Portafogli a varianza minima globale e di massimo trade off delle frontiere efficienti vincolate con G7, BRICS e FM.

FE G7+BRICS VINCOLATA				
	VMG		MAX TRADE OFF	
	2003-2007	2007-2013	2003-2007	2007-2013
BRA	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
RUS	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
IND	0,000%	0,000%	0,000%	0,477%
CHN	0,000%	0,000%	0,000%	0,483%
ZAF	0,000%	48,364%	0,000%	0,901%
DEU	0,000%	0,000%	0,000%	3,284%
ITA	0,000%	0,000%	0,000%	0,486%
GBR	45,457%	26,763%	37,530%	13,933%
FRA	0,000%	0,000%	0,000%	12,096%
JPN	12,442%	0,332%	12,052%	11,047%
CAN	4,875%	24,541%	4,797%	5,631%
USA	37,225%	0,000%	45,622%	51,661%
r	0,616909	0,489326	0,620304	0,649599
sd	2,071766	4,208335	2,077457	4,971943

Figura 2.17: Portafogli a varianza minima globale e di massimo trade off delle frontiere efficienti vincolate con G7 e BRICS.

FE G7 VINCOLATA				
	VMG		MAX TRADE OFF	
	2003-2007	2007-2013	2003-2007	2007-2013
DEU	0,000%	0,000%	0,000%	3,694%
ITA	0,000%	0,000%	0,000%	0,478%
GBR	45,457%	48,600%	37,530%	14,749%
FRA	0,000%	0,000%	0,000%	11,733%
JPN	12,442%	0,097%	12,052%	11,133%
CAN	4,875%	51,303%	4,797%	6,728%
USA	37,225%	0,000%	45,622%	51,485%
r	0,616909	0,546724	0,620304	0,648157
sd	2,071766	4,443773	2,077457	4,96128

Figura 2.18: Portafogli a varianza minima globale e di massimo trade off delle frontiere efficienti vincolate con G7.

Nuovamente in seguito alla crisi aumenta il rischio per tutti i portafogli e diminuisce il rendimento ad eccezione di quello a massimo trade-off. È importante evidenziare soprattutto come la diversificazione si sia drasticamente ridotta in presenza di vincoli di positività. Non potendo andare allo scoperto il portafoglio ottimo è concentrato su un numero esiguo di asset, in particolare Stati Uniti, Canada, Regno Unito e Sudafrica.

2.3.1 Introduzione di ulteriori vincoli

Per evitare di concentrare il portafoglio in determinati mercati è stato deciso di inserire altri vincoli, oltre alla positività dei pesi. In particolare la somma della quota relativa ai mercati di frontiera è stata imposta pari al 10%, quella dei BRICS 20% e quella dei G7 pari al 70%. Per quanto riguarda invece le strategie basate su mercati sviluppati ed emergenti è stato assegnato il 30% a quest'ultimi mentre il 70% ai G7. L'inserimento di tali vincoli ovviamente è stato ininfluente per i portafogli costruiti soltanto sui mercati sviluppati.

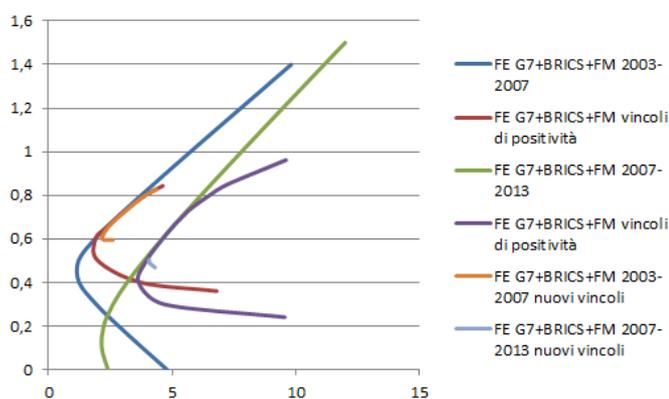


Figura 2.19: Frontiere efficienti pre-post crisi G7, BRICS e FM, con vincoli di positività e introduzione dei nuovi vincoli.

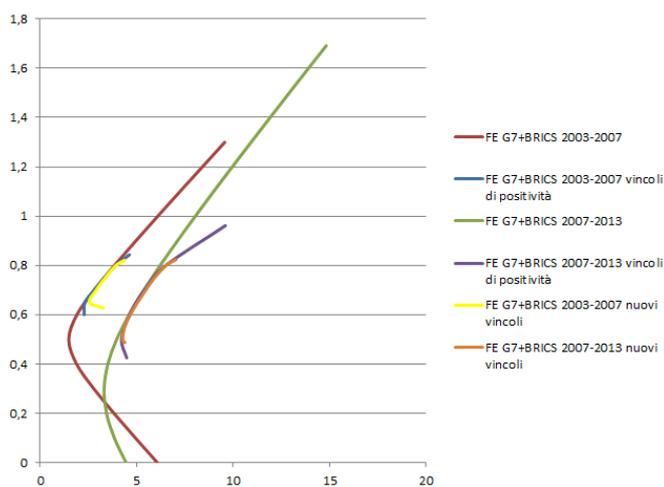


Figura 2.20: Frontiere efficienti pre-post crisi G7 e BRICS, con vincoli di positività e imposizione dei nuovi vincoli.

	FE G7+BRICS+FM			
	VMG		MAX TRADE-OFF	
	2003-2007	2007-2013	2003-2007	2007-2013
ARG	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
HRV	0,000%	0,000%	0,000%	2,430%
EST	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
SVN	0,043%	0,000%	0,402%	1,945%
KEN	0,000%	0,000%	0,000%	2,469%
MUS	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
NGA	2,887%	0,000%	3,232%	0,000%
JOR	5,183%	0,000%	4,255%	0,700%
LBN	0,000%	6,776%	0,000%	1,185%
PAK	0,000%	3,224%	0,000%	1,272%
LKA	1,887%	0,000%	2,110%	0,000%
BRA	2,730%	0,000%	3,692%	3,222%
RUS	2,264%	0,000%	1,848%	0,000%
IND	1,402%	0,000%	2,860%	0,933%
CHN	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
ZAF	13,605%	20,000%	11,600%	15,845%
DEU	0,000%	0,000%	0,000%	5,136%
ITA	0,000%	0,000%	0,000%	1,824%
GBR	47,332%	40,574%	38,836%	7,127%
FRA	0,000%	0,000%	0,000%	9,524%
JPN	2,304%	0,000%	1,657%	7,271%
CAN	0,000%	29,426%	0,000%	0,000%
USA	20,364%	0,000%	29,507%	39,118%
r	0,611338	0,499451	0,810804	0,604134
sd	2,129627	4,061165	4,3807	4,653804

Figura 2.21: Portafogli a varianza minima globale e di massimo trade off delle frontiere efficienti con G7, BRICS, FM in seguito all'introduzione dei nuovi vincoli.

Come si vede dalla tabella in figura 2.21, l'aggiunta di questi vincoli ha permesso di distribuire la ricchezza in modo migliore. La volatilità e il rendimento pre-post crisi dei portafogli a varianza minima globale mantengono circa lo stesso andamento dei casi precedentemente analizzati, tuttavia il portafoglio a massimo trade-off subisce una diminuzione del rendimento in seguito alla crisi a differenza del caso con soli vincoli di positività.

	FE G7+BRICS+FM			
	VMG		MAX TRADE-OFF	
	2003-2007	2007-2013	2003-2007	2007-2013
BRA	2,082%	0,000%	3,260%	5,557%
RUS	4,848%	0,000%	4,280%	1,025%
IND	4,096%	0,000%	6,314%	3,059%
CHN	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
ZAF	18,974%	30,000%	16,146%	20,358%
DEU	0,000%	0,000%	0,000%	42,631%
ITA	0,000%	0,236%	0,000%	9,059%
GBR	40,537%	0,000%	29,041%	6,233%
FRA	0,000%	0,000%	0,000%	8,294%
JPN	0,318%	35,060%	0,000%	0,000%
CAN	0,000%	0,000%	0,000%	3,784%
USA	29,145%	34,705%	40,959%	0,000%
r	0,647011	0,511114	0,653874	0,632517
sd	2,54445	4,243086	2,557861	4,8992

Figura 2.22: Portafogli a varianza minima globale e di massimo trade off delle frontiere efficienti con G7,BRICS, in seguito all'introduzione dei nuovi vincoli.

Capitolo 3

Allocazione mensile simulata

In questa sezione si procederà nella costruzione di portafogli ottimi attraverso una strategia attiva, basata su stime rolling di \mathbf{r} e Σ , per valutarne l'andamento nel corso del tempo, simulando l'attività di un gestore.

Non verrà più applicata la teoria di Markovitz sull'intero periodo campionario, bensì su sottocampioni della durata di 36 mesi. La prima finestra di osservazioni va da Febbraio 2000 a Gennaio 2003, in base alla quale si calcolano i portafogli ottimi per Febbraio 2003. Questa procedura verrà ripetuta iterativamente, di mese in mese, via via eliminando l'osservazione più vecchia e includendo quella più recente, fino ad ottenere l'allocazione ottimale per Aprile 2013. Per ogni rolling window saranno calcolati, con vincoli di positività, i portafogli che massimizzano l'utilità dell'agente per tre coefficienti di avversione al rischio (2, 10 e 50), i portafogli a varianza minima globale e quelli a massimo Sharpe. Verranno poi calcolati gli stessi portafogli imponendo oltre alla positività dei pesi vincoli di upper bound, come in precedenza.

Attraverso questo approccio si possono considerare Paesi che prima erano stati scartati esclusivamente per mancanza di dati. I rendimenti dell'indice MSCI Vietnam, ad esempio, sono disponibili soltanto da Dicembre 2006, per questo motivo non si sono potuti includere nella costruzione delle frontiere efficienti, costruite sul periodo Febbraio 2003-Marzo 2013. Secondo questo approccio invece il Vietnam sarà presente in portafoglio a partire da Novembre 2009. Pertanto ai mercati di frontiera precedentemente esaminati sono stati aggiunti: Bulgaria, Kazakistan, Romania, Serbia, Botswana, Tunisia, Bahrain, Kuwait, Oman, Qatar, Emirati Arabi Uniti e Vietnam.

Per valutare l'effettivo vantaggio di una diversificazione in mercati emergenti e di frontiera verranno calcolati secondo lo stesso procedimento anche i portafogli che escludono i frontier markets e quelli che comprendono solamente i G7. Saranno confrontate infine le tre strategie per mezzo di alcune misure di performance.

3.1 Fase operativa

Dal momento che per risolvere il suddetto problema occorrono numerose iterazioni, 123 per ogni portafoglio, si è ritenuto in questo caso più appropriato ricorrere al software \mathbb{R} , ambiente open-source per l'analisi statistica dei dati, piuttosto di utilizzare il Risolutore di Excel. In primo luogo sono stati riportati per colonna nel foglio di calcolo i rendimenti di ciascun Paese, per il periodo Febbraio 2000-Marzo 2013 lasciando vuote le celle con dati mancanti e sono stati salvati in formato "testo con valori delimitati da tabulazioni", per poter essere acquisiti correttamente dal software statistico. Nel calcolo dei portafogli contenenti i mercati di frontiera ad ogni iterazione la matrice dei rendimenti selezionata non ha sempre lo stesso numero di colonne, perchè vengono eliminate quelle che presentano dati mancanti, al contrario dei BRICS e dei G7, per i quali è disponibile l'intero periodo campionario. Occorre perciò distinguere il codice usato per la costruzione dei portafogli più diversificati, da quello che comprende soltanto G7 o G7 e BRICS, per il quale le dimensioni della matrice dei rendimenti da selezionare sono fisse.

3.1.1 Codice per il calcolo dei portafogli ottimi, caso dimensioni variabili

Prima di salvare la matrice dei rendimenti, è conveniente aggiungere un vettore contenente i numeri da 1 a 35 (numero massimo di Paesi) come prima riga, in modo da usarlo come indice. Ciò permette di salvare, ad ogni iterazione, la quota di portafoglio relativa ad un particolare Paese sempre sulla stessa riga, nella matrice dei pesi stimati che alla fine verrà creata. È necessario successivamente utilizzare un ciclo *for* per ripetere gli stessi calcoli ad ogni finestra temporale. La funzione usata per l'ottimizzazione è `solve.QP`, della libreria `quadprog`. Questa routine implementa il metodo di Goldfarb e Idnani (1982, 1983) per la risoluzione di problemi di programmazione quadratica della forma $\min(-d'B + 1/2b'Db)$ sotto i vincoli $A'b \geq b_0$. Tale funzione si usa in questo modo:

```
solve.QP(Dmat, dvec, Amat, bvec, meq=0, factorized=FALSE)
```

- Dmat è una matrice che compare nella funzione quadratica da minimizzare, in questo caso $\gamma\hat{\Sigma}$, ossia il coefficiente di avversione al rischio moltiplicato per la matrice di varianza-covarianza campionario;
- dvec rappresenta la stima campionaria di \mathbf{r} ;
- Amat è una matrice che definisce i vincoli sotto i quali si vuole minimizzare la funzione quadratica, nella fattispecie il vettore $1'_d$ costituisce la prima riga, al di sotto del quale vi è la matrice identità I_d , dove d è il numero delle colonne della matrice dei rendimenti all'iterazione i ;

- bvec è il vettore che contiene i valori di b_0 ;
- meq pari a n permette di trattare i primi n come vincoli di uguaglianza, mentre tutti gli altri di disuguaglianza.

Portafogli con vincoli di positività

Ad esempio si supponga per assurdo che all'iterazione i il numero dei Paesi privi di dati mancanti sia per semplicità 5, allora i vincoli si esprimono nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove la prima matrice corrisponde ad A_{mat} , il secondo vettore ai pesi da ottimizzare, mentre il terzo coincide con b_{vec} . Si riporta qui di seguito il codice completo per il calcolo del portafoglio che massimizza l'utilità dell'agente con coefficiente di avversione al rischio (Γ) pari a 2 e quello per il calcolo del portafoglio a varianza minima globale.

```
#OTTIMIZZAZIONE CON VINCOLI DI POSITIVITA'
#MASSIMIZZAZIONE UTILITA' AGENTE IN FUNZIONE DI GAMMA=2
library(quadprog)
X=read.table("G7&BRICS&FM_return.txt", header=T, sep="\t", dec=",")
W=matrix(data=NA, nrow=35, ncol=123)
Portfolio=matrix(data=NA, nrow=123, ncol=2)
for(i in 36:158)
{
X2=X[c(i-34):(i+1),]
X1=X[1,]
X1_X2=rbind(X1,X2)
m=t(na.omit(t(X1_X2))) #eliminazione colonne con dati mancanti
M=m[c(2:37),]
indice=c(m[1,])
S=var(M)
d=ncol(M)
Gamma=2
dvec=c(colMeans(M))
Dmat=Gamma*S
U=c(rep(1,d))
I=diag(c(rep(1,d)))
Amat=t(rbind(U,I))
bvec=c(1,rep(0,d))
```

```

optim=solve.QP(Dmat, dvec, Amat, bvec, meq=1, factorized=FALSE)
omegamax=matrix(optim$solution)
W[indice, (i-35)]=omegamax
Portfolio[(i-35),1]=t(omegamax)%*(matrix(dvec))
Portfolio[(i-35),2]=sqrt(t(omegamax)%*S%*omegamax)
}
write.table(W,"Pesi_vincolati.txt", sep="\t", dec=",")
write.table(Portfolio,"P_UTIL.txt", sep="\t", dec=",")

#PORTAFOGLI VARIANZA MINIMA GLOBALE,
#CON VINCOLI DI POSITIVITA'
library(quadprog)
X=read.table("G7&BRICS&FM_return.txt", header=T, sep="\t", dec=",")
W=matrix(data=NA, nrow=35, ncol=123)
PVMG=matrix(data=NA, nrow=123, ncol=2)
for(i in 36:158)
{
X2=X[c(i-34):(i+1),]
X1=X[1,]
X1_X2=rbind(X1,X2)
m=t(na.omit(t(X1_X2)))
M=m[c(2:37),]
indice=c(m[1,])
S=var(M)
d=ncol(M)
R=c(colMeans(M))
dvec=c(rep(0,d))
Dmat=2*S
U=c(rep(1,d))
I=diag(c(rep(1,d)))
Amat=t(rbind(U,I))
bvec=c(1,rep(0,d))
optim=solve.QP(Dmat, dvec, Amat, bvec, meq=1, factorized=FALSE)
omegamax=matrix(optim$solution)
W[indice, (i-35)]=omegamax
PVMG[(i-35),1]=t(omegamax)*(matrix(R))
PVMG[(i-35),2]=sqrt(t(omegamax)%*S%*omegamax)
}
write.table(W,"Pesi_VMG.txt", sep="\t", dec=",")
write.table(PVMG,"P_VMG.txt", sep="\t", dec=",")

```

Per calcolare il portafoglio a massimo Sharpe non si è potuto ricorrere a `solve.QP` perché la funzione da minimizzare non è più quadratica. Avendo usato in questo caso la funzione `nlm`, è stato necessario definire una *function* in cui sono stati inseriti implicitamente i vincoli attraverso una riparametrizzazione di ω . Se gli stati considerati sono per ipotesi 5 come nel precedente

esempio, la riparametrizzazione avviene in questo modo:

$$\omega_1 = \frac{e^{\alpha_1}}{1 + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + e^{\alpha_3} + e^{\alpha_4}}$$

$$\omega_2 = \frac{e^{\alpha_2}}{1 + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + e^{\alpha_3} + e^{\alpha_4}}$$

$$\omega_3 = \frac{e^{\alpha_3}}{1 + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + e^{\alpha_3} + e^{\alpha_4}}$$

$$\omega_4 = \frac{e^{\alpha_4}}{1 + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + e^{\alpha_3} + e^{\alpha_4}}$$

$$\omega_5 = \frac{1}{1 + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + e^{\alpha_3} + e^{\alpha_4}}$$

Sono stati in tal modo imposti la positività dei pesi con la funzione esponenziale e il vincolo di ammissibilità ($\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 = 1$). Il codice utilizzato è il seguente:

```
#PORTAFOGLI SHARPE MASSIMO,
#CON VINCOLI DI POSITIVITA'
#(attraverso riparametrizzazione di omega)
X=read.table("G7&BRICS&FM_return.txt", header=T, sep="\t", dec=",")
W=matrix(data=NA, nrow=35, ncol=123)
PSMAX=matrix(data=NA, nrow=123, ncol=2)
f=function(a){
k=sum(exp(a[1:(d-1)]))
j=c(exp(a[1:(d-1)])/(1+k))
w=matrix(c(j,1-sum(j)))
-((t(w)%*%R)/sqrt((t(w)%*%S%*%w)))
}
for(i in 36:158)
{
X2=X[c(i-34):(i+1),]
X1=X[1,]
X1_X2=rbind(X1,X2)
m=t(na.omit(t(X1_X2)))
M=m[c(2:37),]
indice=c(m[1,])
S=var(M)
d=ncol(M)
R=matrix(colMeans(M))
probl=nlm(f,c(rep(0,(d-1))))
a=matrix(probl$estimate)
k=sum(exp(a[1:(d-1)]))
j=c(exp(a[1:(d-1)])/(1+k))
w=matrix(c(j,1-sum(j)))
W[indice,(i-35)]=w
PSMAX[(i-35),1]=t(w)%*%(matrix(R))
PSMAX[(i-35),2]=sqrt(t(w)%*%S%*%w)
```

```

}
write.table(W,"Pesi_SMAX.txt", sep="\t", dec=",")
write.table(P_SMAX,"P_SMAX.txt", sep="\t", dec=",")

```

Portafogli con vincoli di positività e di upper-bound

Per evitare una riduzione drastica della diversificazione, analogamente a quanto è stato fatto per le frontiere efficienti, si è imposta al 10% la somma dei pesi dei mercati di frontiera, 20% quella dei BRICS, 70% quella dei G7, mantenendo i consueti vincoli di positività. La quota di portafoglio riservata ad un particolare tipo di mercato rimane perciò costante ad ogni mese (Figura 3.1).

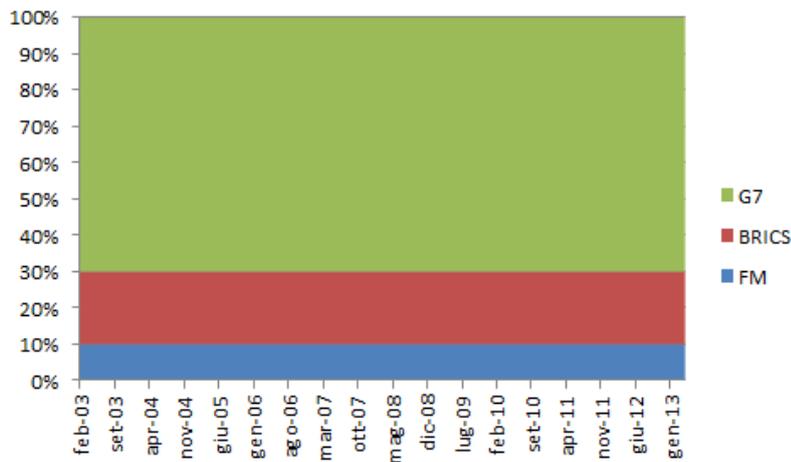


Figura 3.1

Supponendo per assurdo che all'iterazione i il numero di FM, BRICS e G7 sia rispettivamente 2,2,3, i vincoli si impongono nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \omega_1 \\
 \omega_2 \\
 \omega_3 \\
 \omega_4 \\
 \omega_5 \\
 \omega_6 \\
 \omega_7
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0,1 \\
 0,2 \\
 0,7 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

```

#OTTIMIZZAZIONE CON VINCOLI DI POSITIVITA' E UPPER BOUND
#MASSIMIZZAZIONE UTILITA' AGENTE IN FUNZIONE DI GAMMA=2
library(quadprog)
X=read.table("G7&BRICS&FM_return.txt", header=T, sep="\t", dec=",")
W=matrix(data=NA, nrow=35, ncol=123)
Portfolio=matrix(data=NA, nrow=123, ncol=2)
for(i in 36:158)
{
X2=X[c(i-34):(i+1),]
X1=X[1,]
X1_X2=rbind(X1,X2)
m=t(na.omit(t(X1_X2)))
M=m[c(2:37),]
indice=c(m[1,])
S=var(M)
d=ncol(M)
Gamma=2
dvec=as.matrix(c(colMeans(M)))
Dmat=Gamma*S
fm=d-12
I=(diag(c(rep(1,d))))
L1=c(rep(1, fm), rep(0, 12))
L2=c(rep(0, fm), rep(1, 5), rep(0, 7))
L3=c(rep(0, fm), rep(0, 5), rep(1, 7))
Amat=cbind(L1, L2, L3, I)
bvec=c(0.1, 0.2, 0.7, rep(0, d))
optim=solve.QP(Dmat, dvec, Amat, bvec, meq=3, factorized=FALSE)
omegamax=matrix(optim$solution)
W[indice, (i-35)]=omegamax
Portfolio[(i-35), 1]=t(omegamax)%*(matrix(dvec))
Portfolio[(i-35), 2]=sqrt(t(omegamax)%*%S%*%omegamax)
}
write.table(W, "Pesi_vincolati_NEW.txt", sep="\t", dec=",")
write.table(Portfolio, "P_UTIL_NEW.txt", sep="\t", dec=",")

```

Il calcolo del portafoglio a massimo Sharpe è stato un po' più difficoltoso. La somma dei G7 non si è potuta imporre pari a 0.7 ma 0.69, i pesi stimati relativi ai mercati sviluppati sono stati poi moltiplicati per 1,014492754 (0.7/0.69) per riportare a uno la somma delle quote. Supponendo che i primi due pesi si riferiscano ai mercati di frontiera, i successivi due ai BRICS e gli ultimi tre ai G7 si sono implicitamente definiti i vincoli in questo modo:

$$\omega_1 = 0,1 \frac{e^{\alpha_1}}{1 + e^{\alpha_1}}$$

$$\omega_2 = 0,1 \frac{1}{1 + e^{\alpha_1}}$$

$$\omega_3 = 0,2 \frac{e^{\alpha_2}}{1 + e^{\alpha_2}}$$

$$\omega_4 = 0,2 \frac{1}{1 + e^{\alpha_2}}$$

$$\omega_5 = 0,69 \frac{e^{\alpha_3}}{1 + e^{\alpha_3} + e^{\alpha_4}}$$

$$\omega_6 = 0,69 \frac{e^{\alpha_4}}{1 + e^{\alpha_3} + e^{\alpha_4}}$$

$$\omega_7 = 0,69 \frac{1}{1 + e^{\alpha_3} + e^{\alpha_4}}$$

Si riporta qui di seguito il codice:

```
#PORTAFOGLI SHARPE MASSIMO,
#CON VINCOLI DI POSITIVITA' E UPPER BOUND
#(attraverso riparametrizzazione di omega)
X=read.table("G7&BRICS&FM_return.txt", header=T, sep="\t", dec=",")
W=matrix(data=NA, nrow=35, ncol=123)
PSMAX=matrix(data=NA, nrow=123, ncol=2)
f=function(a) {
k1=sum(exp(a[1:(fm-1)]))
k2=sum(exp(a[1:4]))
k3=sum(exp(a[1:6]))
j1=0.1*c(exp(a[1:(fm-1)])/(1+k1))
j2=0.2*c(exp(a[1:4])/(1+k2))
j3=0.69*c(exp(a[1:6])/(1+k3))
w=matrix(c(j1,0.1-sum(j1),j2,0.2-sum(j2),j3,0.69-sum(j3)))
-((t(w)%*%R)/sqrt((t(w)%*%S%*%w)))
}
for(i in 36:158)
{
X2=X[c(i-34):(i+1),]
X1=X[1,]
X1_X2=rbind(X1,X2)
m=t(na.omit(t(X1_X2)))
M=m[c(2:37),]
indice=c(m[1,])
S=var(M)
d=ncol(M)
R=matrix(colMeans(M))
fm=(d-12)
```

```

probl=nlm(f, c(rep(0, (d-3))))
a=matrix(probl$estimate)
k1=sum(exp(a[1:(fm-1)]))
k2=sum(exp(a[1:4]))
k3=sum(exp(a[1:6]))
j1=0.1*c(exp(a[1:(fm-1)])/(1+k1))
j2=0.2*c(exp(a[1:4])/(1+k2))
j3=0.69*c(exp(a[1:6])/(1+k3))
w=matrix(c(j1, 0.1-sum(j1), j2, 0.2-sum(j2), j3, 0.69-sum(j3)))
W[indice, (i-35)]=w
PSMAX[(i-35), 1]=t(w)%*%(matrix(R))
PSMAX[(i-35), 2]=sqrt(t(w)%*%S%*%w)
}
write.table(W, "Pesi_SMAX_NEW.txt", sep="\t", dec=",")
write.table(PSMAX, "P_SMAX_NEW.txt", sep="\t", dec=",")

```

3.1.2 Codice per il calcolo dei portafogli ottimi, caso dimensioni fisse

Rispetto al caso precedente qui non occorre inserire una riga che faccia da indice perché nessun mercato presenta valori mancanti, di conseguenza non c'è più bisogno della funzione `na.omit`. Verrà riportato solo il codice adoperato per i portafogli contenenti BRICS e G7, per la costruzione dei portafogli basati esclusivamente sui mercati sviluppati il procedimento è lo stesso.

Portafogli con vincoli di positività

```

#MASSIMIZZAZIONE UTILITA' CON VINCOLI DI POSITIVITA'
#Gamma=2
#G7+BRICS (dimensioni fisse)
library(quadprog)
X=read.table("G7&BRICS_return.txt", header=T, sep="\t", dec=",")
W=matrix(data=NA, nrow=12, ncol=123)
Portfolio=matrix(data=NA, nrow=123, ncol=2)
for(i in 36:158)
{
M=X[c(i-35):i,]
S=var(M)
d=ncol(M)
Gamma=2
dvec=c(colMeans(M))
Dmat=Gamma*S
U=c(rep(1, d))
I=diag(c(rep(1, d)))
Amat=t(rbind(U, I))
bvec=c(1, rep(0, d))

```

```

optim=solve.QP(Dmat, dvec, Amat, bvec, meq=1, factorized=FALSE)
omegamax=matrix(optim$solution)
W[c(1:d), (i-35)]=omegamax
Portfolio[(i-35), 1]=t(omegamax)%*(matrix(dvec))
Portfolio[(i-35), 2]=sqrt(t(omegamax)%*%S%*omegamax)
}
write.table(W, "Pesi_vincolati.txt", sep="\t", dec=",")
write.table(Portfolio, "P_UTIL.txt", sep="\t", dec=",")

```

```

#PORTAFOGLI VARIANZA MINIMA GLOBALE,
#CON VINCOLI DI POSITIVITA'
#G7+BRICS (dimensioni fisse)
library(quadprog)
X=read.table("G7&BRICS_return.txt", header=T, sep="\t", dec=",")
W=matrix(data=NA, nrow=12, ncol=123)
PVMG=matrix(data=NA, nrow=123, ncol=2)
for(i in 36:158)
{
M=X[c(i-35):i,]
S=var(M)
R=matrix(colMeans(M))
d=ncol(M)
dvec=c(rep(0, d))
Dmat=2*S
U=c(rep(1, d))
I=diag(c(rep(1, d)))
Amat=t(rbind(U, I))
bvec=c(1, rep(0, d))
optim=solve.QP(Dmat, dvec, Amat, bvec, meq=1, factorized=FALSE)
omegamax=matrix(optim$solution)
W[c(1:d), (i-35)]=omegamax
PVMG[(i-35), 1]=t(omegamax)%*%R
PVMG[(i-35), 2]=sqrt(t(omegamax)%*%S%*omegamax)
}
write.table(W, "Pesi_VMG_G7BRICS.txt", sep="\t", dec=",")
write.table(PVMG, "P_VMG_G7BRICS.txt", sep="\t", dec=",")

```

```

#PORTAFOGLI SHARPE MASSIMO,
#CON VINCOLI DI POSITIVITA'
#(riparametrizzazione di omega)
#G7+BRICS (dimensioni fisse)

```

```

X=read.table("G7&BRICS_return.txt", header=T, sep="\t", dec=",")
W=matrix(data=NA, nrow=12, ncol=123)
PSMAX=matrix(data=NA, nrow=123, ncol=2)
for(i in 36:158)
{
M=X[c(i-35):i,]
S=var(M)
R=matrix(colMeans(M))
d=ncol(M)
f=function(a){
k=sum(exp(a[1:(d-1)]))
j=c(exp(a[1:(d-1)])/(1+k))
w=matrix(c(j,1-sum(j)))
-((t(w)%*%R)/sqrt((t(w)%*%S%*%w)))
}
probl=nlm(f,c(rep(0,d)))
a=matrix(probl$estimate)
k=sum(exp(a[1:(d-1)]))
j=c(exp(a[1:(d-1)])/(1+k))
w=matrix(c(j,1-sum(j)))
W[c(1:d),(i-35)]=w
PSMAX[(i-35),1]=t(w)%*%(matrix(R))
PSMAX[(i-35),2]=sqrt(t(w)%*%S%*%w) }
write.table(W,"Pesi_SMAX.txt", sep="\t", dec=",")
write.table(PSMAX,"P_SMAX.txt", sep="\t", dec=",")

```

Portafogli con vincoli di positività e di upper-bound

In questo caso la somma dei pesi relativi ai BRICS è stata posta uguale al 30%, mentre quella dei G7 pari al 70%, sempre mantenendo il vincolo di positività.

```

#MASSIMIZZAZIONE UTILITA' CON VINCOLI DI
# POSITIVITA' E DI UPPER BOUND
#Gamma=2
#G7+BRICS (dimensioni fisse)
library(quadprog)
X=read.table("G7&BRICS_return.txt", header=T, sep="\t", dec=",")
W=matrix(data=NA, nrow=12, ncol=123)
Portfolio=matrix(data=NA, nrow=123, ncol=2)
for(i in 36:158)
{
M=X[c(i-35):i,]
S=var(M)
Gamma=2
d=ncol(M)
dvec=as.matrix(c(colMeans(M)))
Dmat=Gamma*S

```

```

I=(diag(c(rep(1,12))))
L1=c(rep(1,5),rep(0,7))
L2=c(rep(0,5),rep(1,7))
Amat=cbind(L1,L2,I)
bvec=c(0.3,0.7,rep(0,12))
optim=solve.QP(Dmat, dvec, Amat, bvec, meq=2, factorized=FALSE)
omegamax=matrix(optim$solution)
W[c(1:d),(i-35)]=omegamax
Portfolio[(i-35),1]=t(omegamax)%*(matrix(dvec))
Portfolio[(i-35),2]=sqrt(t(omegamax)%*%S%*omegamax) }
write.table(W,"Pesi_vincolati_NEW.txt", sep="\t", dec=",")
write.table(Portfolio,"P_UTIL_NEW.txt", sep="\t", dec=",")

```

```

#PORTAFOGLI SHARPE MASSIMO,
#CON VINCOLI DI POSITIVITA'
#E UPPER BOUND
#(riparametrizzazione di omega)
#G7+BRICS (dimensioni fisse)
X=read.table("G7&BRICS_return.txt", header=T, sep="\t", dec=",")
W=matrix(data=NA, nrow=12, ncol=123)
PSMAX=matrix(data=NA, nrow=123, ncol=2)
f=function(a) {
k2=sum(exp(a[1:4]))
k3=sum(exp(a[1:6]))
j2=0.3*c(exp(a[1:4])/(1+k2))
j3=0.7*c(exp(a[1:6])/(1+k3))
w=matrix(c(j2,0.3-sum(j2),j3,0.7-sum(j3)))
-(t(w)%*%R)/sqrt((t(w)%*%S%*w)))}
for(i in 36:158)
{
M=X[c(i-35):i,]
S=var(M)
d=ncol(M)
R=matrix(colMeans(M))
probl=nlm(f,c(rep(0,(d-2))))
a=matrix(probl$estimate)
k2=sum(exp(a[1:4]))
k3=sum(exp(a[1:6]))
j2=0.3*c(exp(a[1:4])/(1+k2))
j3=0.7*c(exp(a[1:6])/(1+k3))
w=matrix(c(j2,0.3-sum(j2),j3,0.7-sum(j3)))
W[c(1:d),(i-35)]=w
PSMAX[(i-35),1]=t(w)%*(matrix(R))
PSMAX[(i-35),2]=sqrt(t(w)%*%S%*w) }
write.table(W,"Pesi_SMAX_NEWG7BRICS.txt", sep="\t", dec=",")
write.table(PSMAX,"P_SMAX_NEWG7BRICS.txt", sep="\t", dec=",")

```

3.2 Portafogli stimati

Si riportano ora dei grafici ad area, creati con Microsoft Excel, che rappresentano le composizioni dei portafogli ottimi (con i soli vincoli di positività) per ciascun mese, mostrando i portafogli calcolati sugli asset G7, BRICS, FM, quelli contenenti G7 e BRICS e infine soltanto G7.

3.2.1 Portafogli costruiti con G7, BRICS e FM

Massimizzazione utilità agente

$$\gamma = 2$$

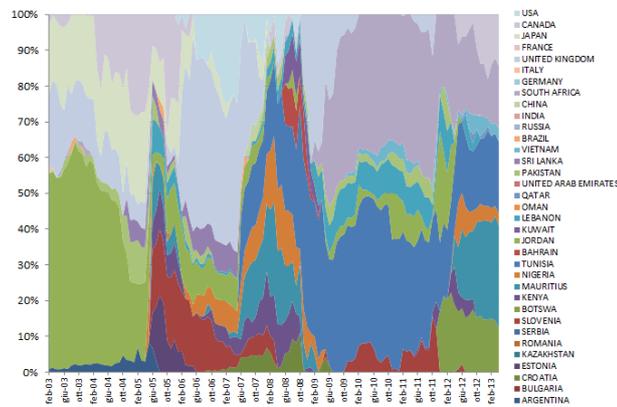


Figura 3.2: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 2$, quota di ogni singolo Paese.

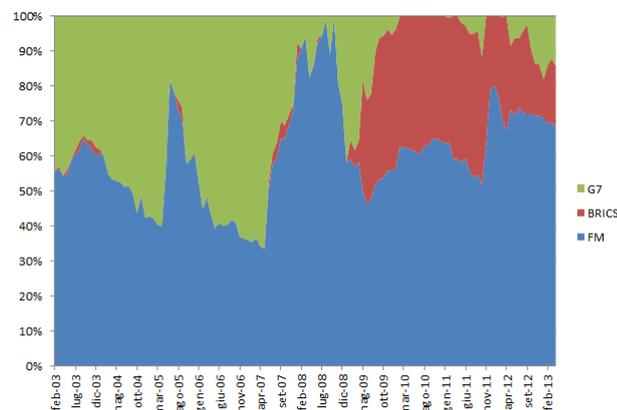


Figura 3.3: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 2$, quota dei G7, BRICS e FM.

$$\gamma = 10$$

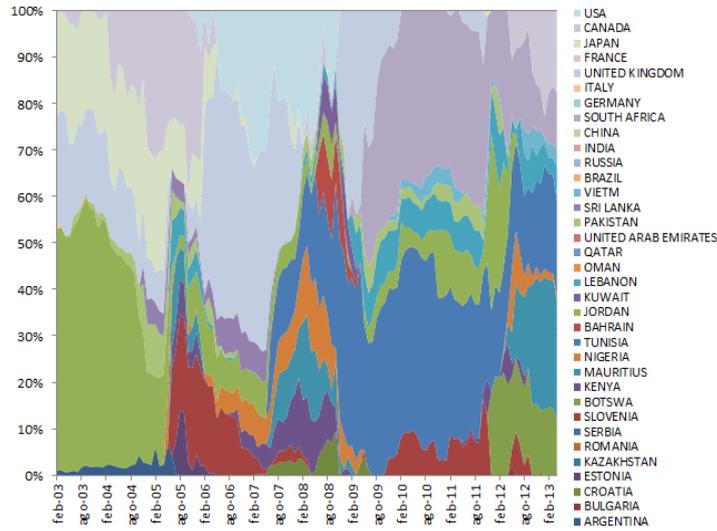


Figura 3.4: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 10$, quota di ogni singolo Paese.

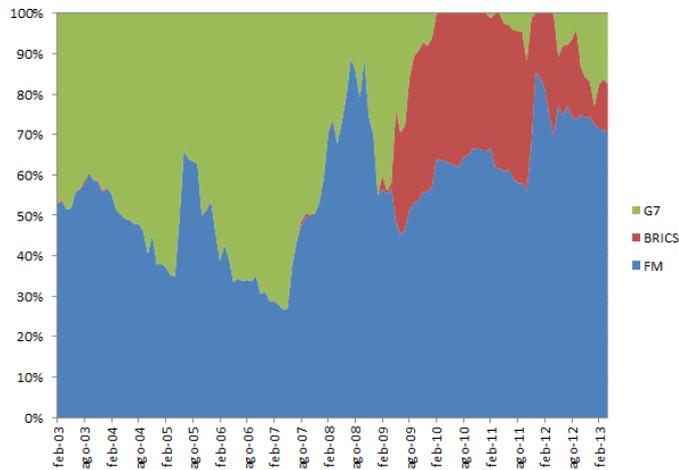


Figura 3.5: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 10$, quota dei G7, BRICS e FM.

$$\gamma = 50$$

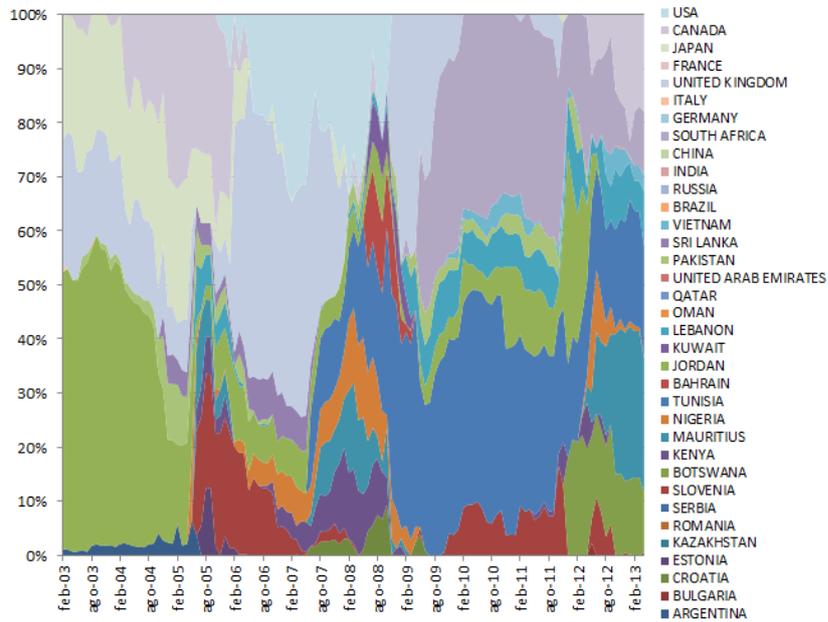


Figura 3.6: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 50$, quota di ogni singolo Paese.

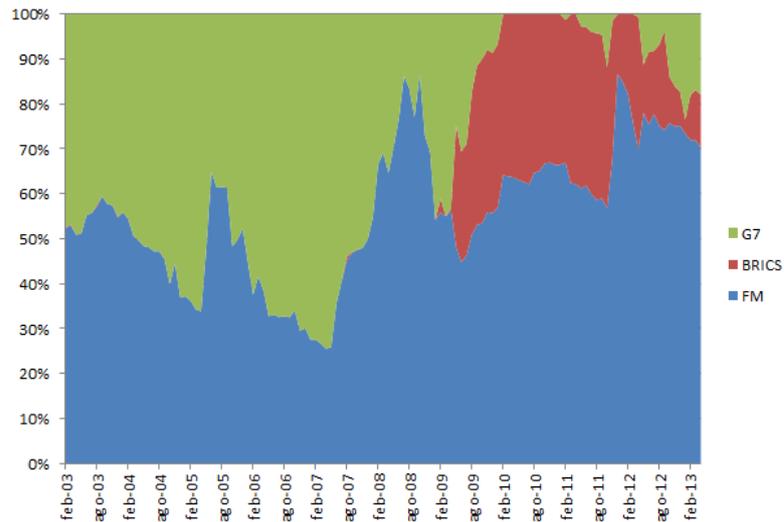


Figura 3.7: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 50$, quota dei G7, BRICS e FM.

Portafogli a varianza minima globale

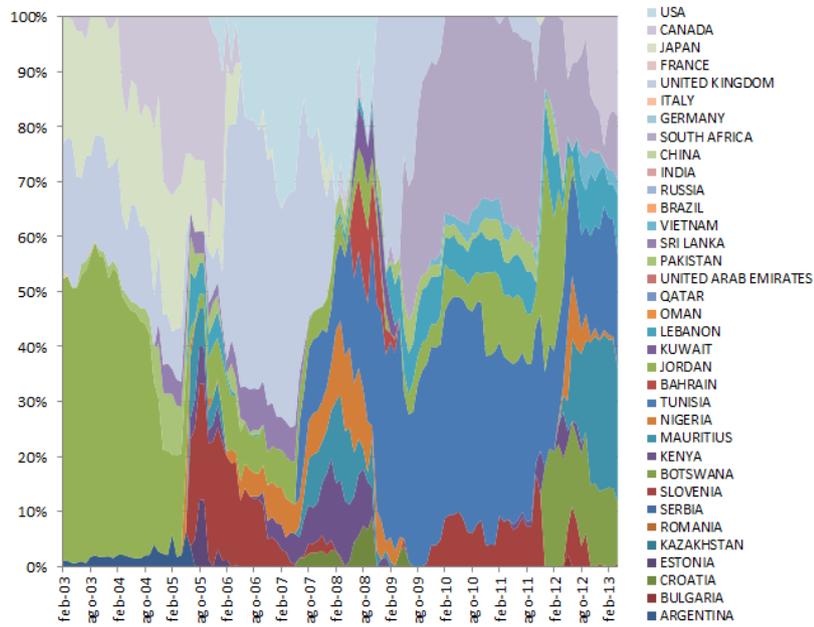


Figura 3.8: Portafogli a varianza minima globale, quota di ogni singolo Paese.

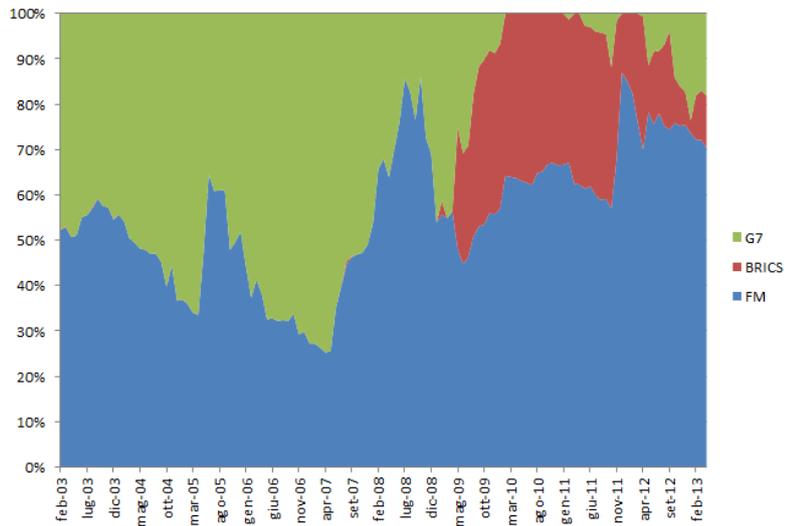


Figura 3.9: Portafogli a varianza minima globale, quota dei G7, BRICS e FM.

Portafogli a massimo Sharpe

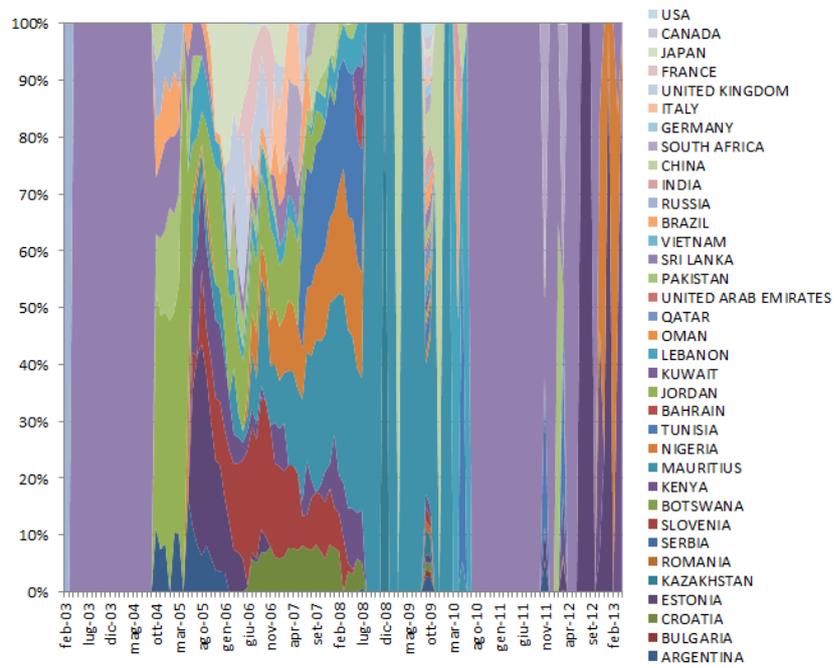


Figura 3.10: Portafogli a massimo Sharpe, quota di ogni singolo Paese.

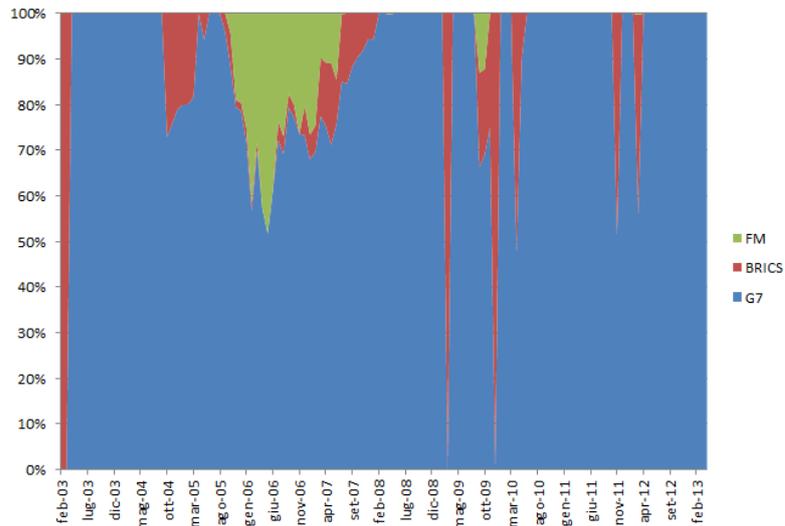


Figura 3.11: Portafogli a massimo Sharpe, quota dei G7, BRICS e FM.

3.2.2 Portafogli costruiti con G7 e BRICS

Massimizzazione utilità agente

$$\gamma = 2$$

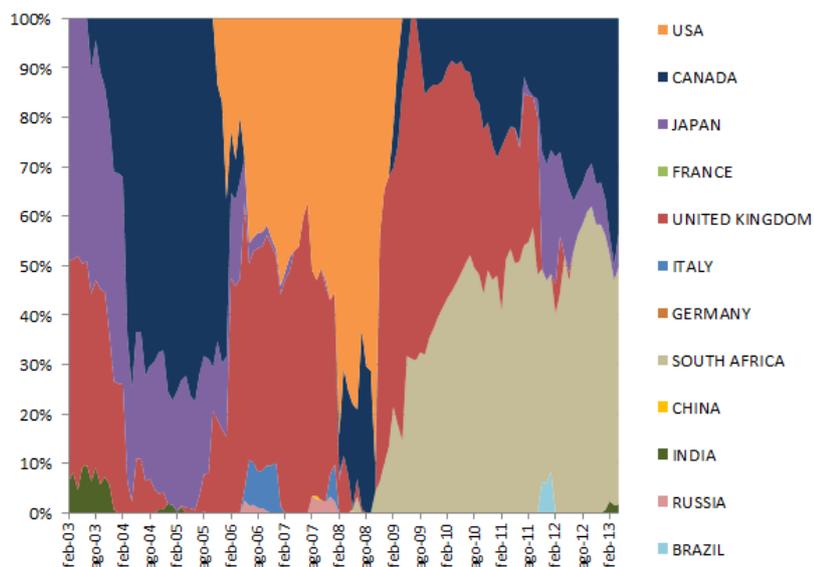


Figura 3.12: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 2$, quota di ogni singolo Paese.

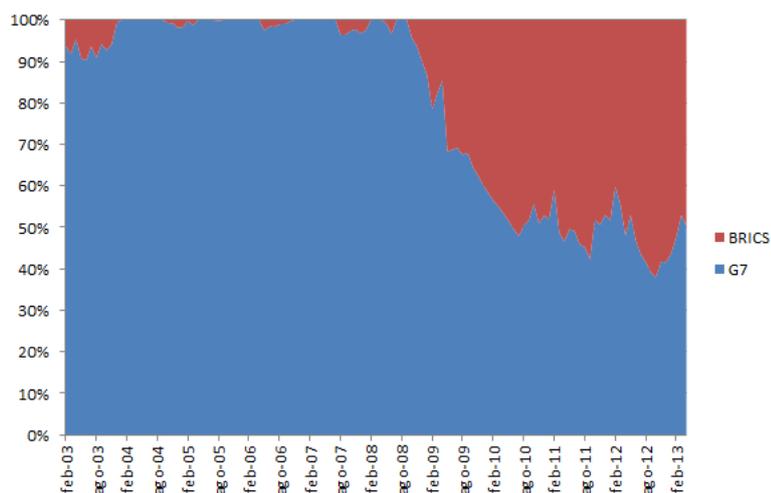


Figura 3.13: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 2$, quota di G7 e BRICS.

$$\gamma = 10$$

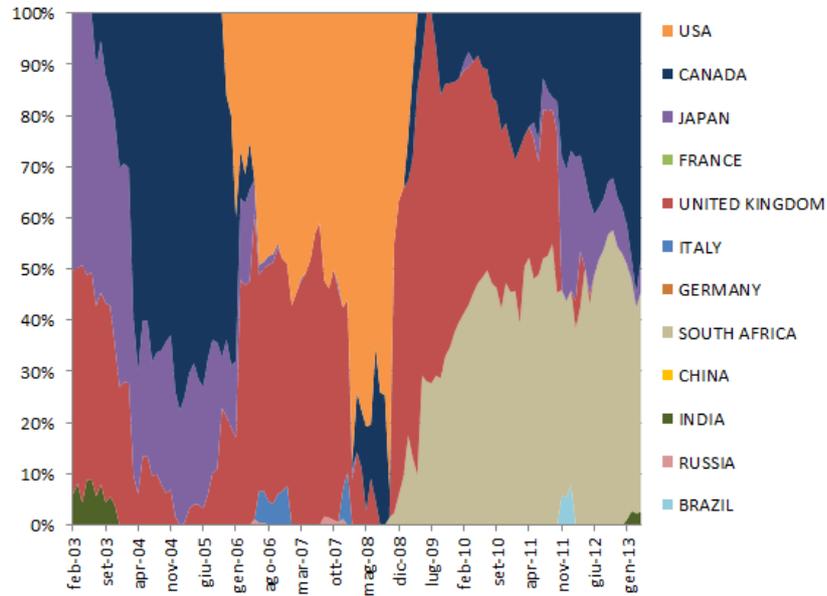


Figura 3.14: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 10$, quota di ogni singolo Paese.

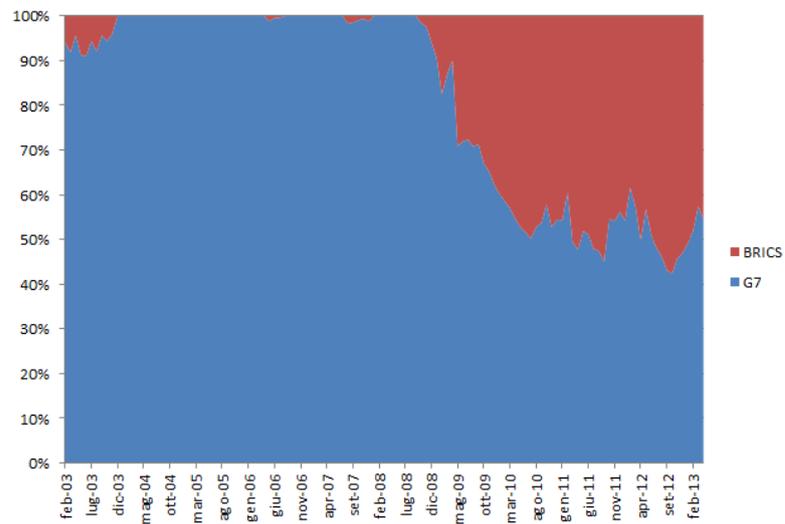


Figura 3.15: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 10$, quota di G7 e BRICS.

$$\gamma = 50$$

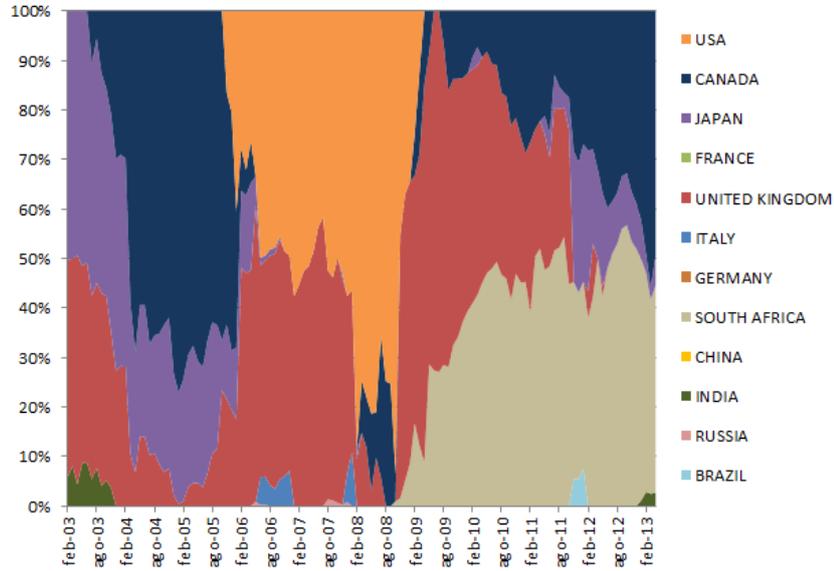


Figura 3.16: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 50$, quota di ogni singolo Paese.

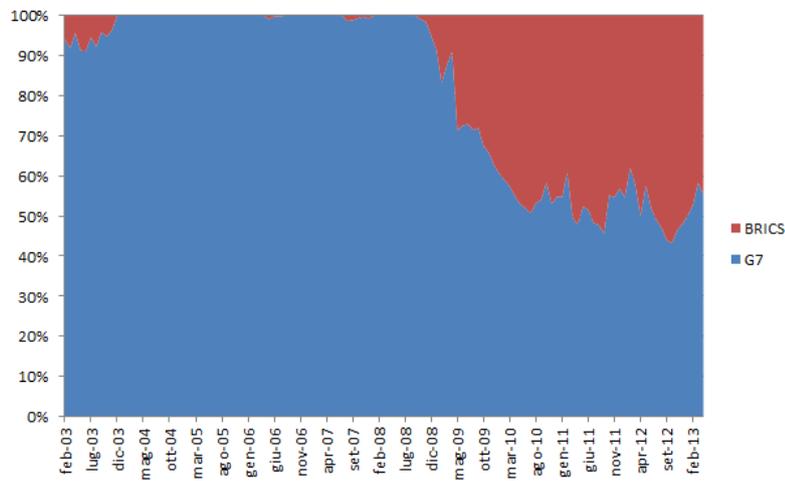


Figura 3.17: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 50$, quota di G7 e BRICS.

Portafogli a varianza minima globale

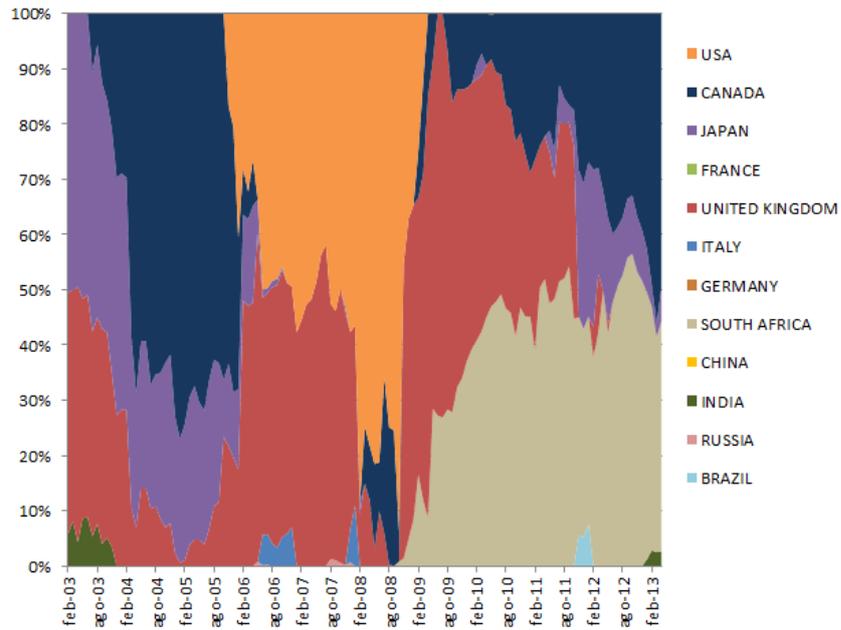


Figura 3.18: Portafogli a varianza minima globale, quota di ogni singolo Paese.

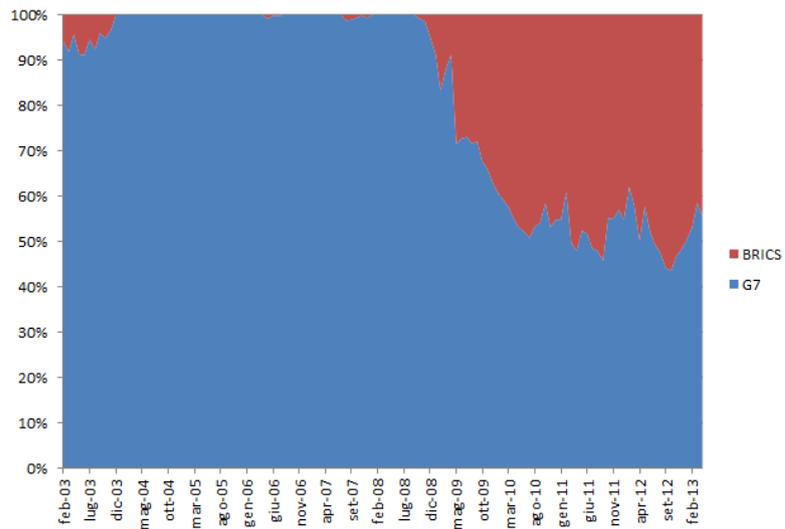


Figura 3.19: Portafogli a varianza minima globale, quota dei G7 e BRICS.

Portafogli a massimo Sharpe

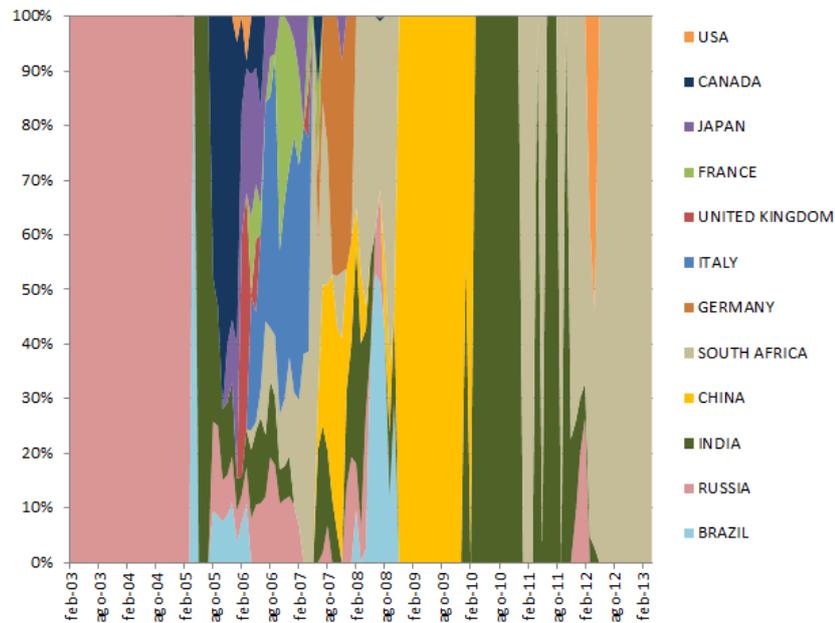


Figura 3.20: Portafogli a massimo Sharpe, quota di ogni singolo Paese.

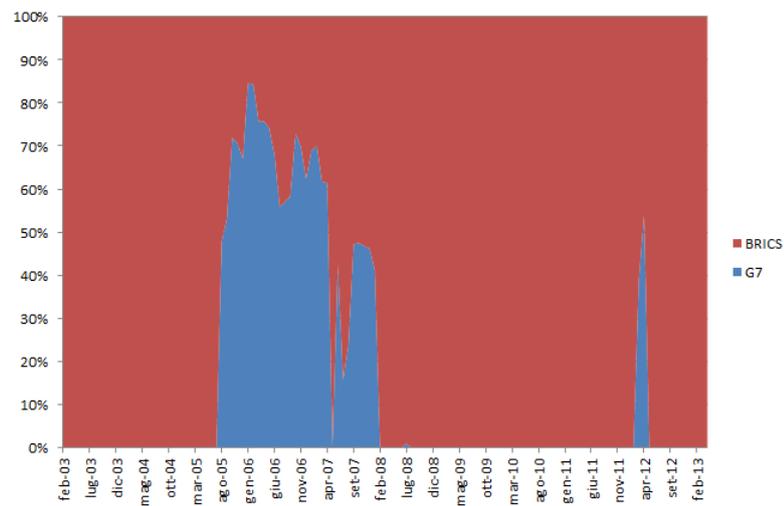


Figura 3.21: Portafogli a massimo Sharpe, quota dei G7 e BRICS.

3.2.3 Portafogli costruiti con G7

Massimizzazione utilità agente

$$\gamma = 2$$

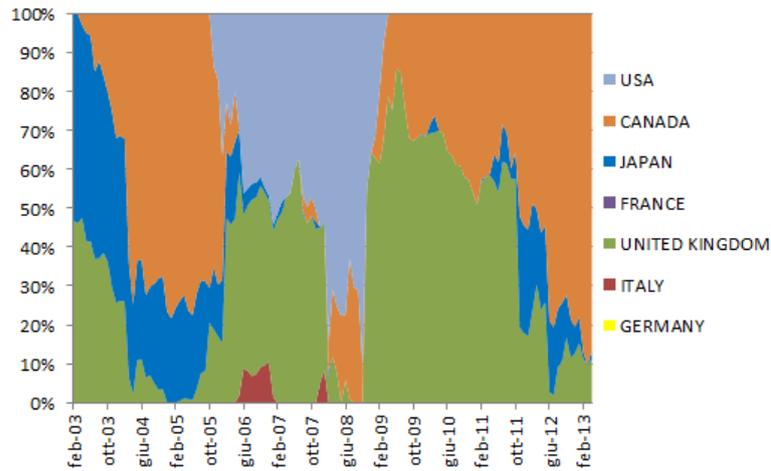


Figura 3.22: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 2$, quota di ogni singolo Paese.

$$\gamma = 10$$

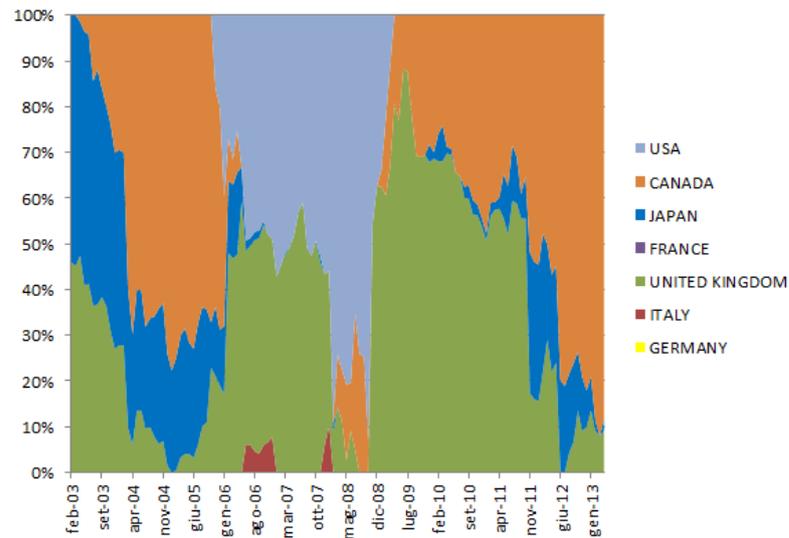


Figura 3.23: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 10$, quota di ogni singolo Paese.

$$\gamma = 50$$

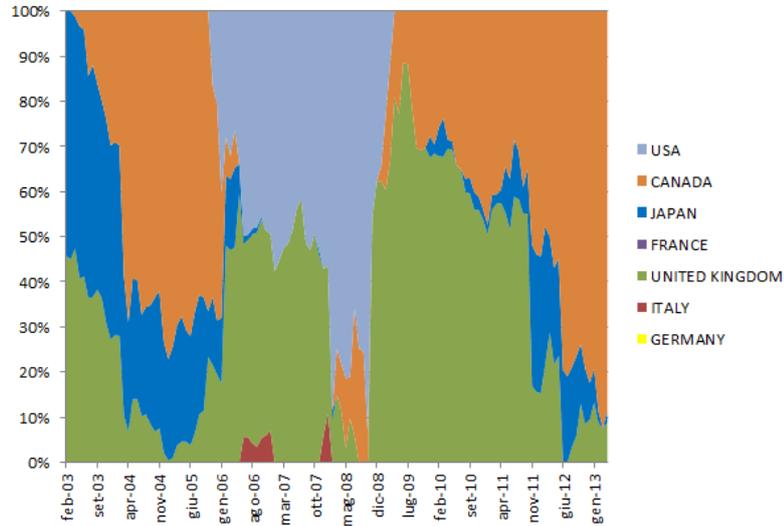


Figura 3.24: Portafoglio che massimizza utilità agente, $\gamma = 50$, quota di ogni singolo Paese.

Portafogli a varianza minima globale

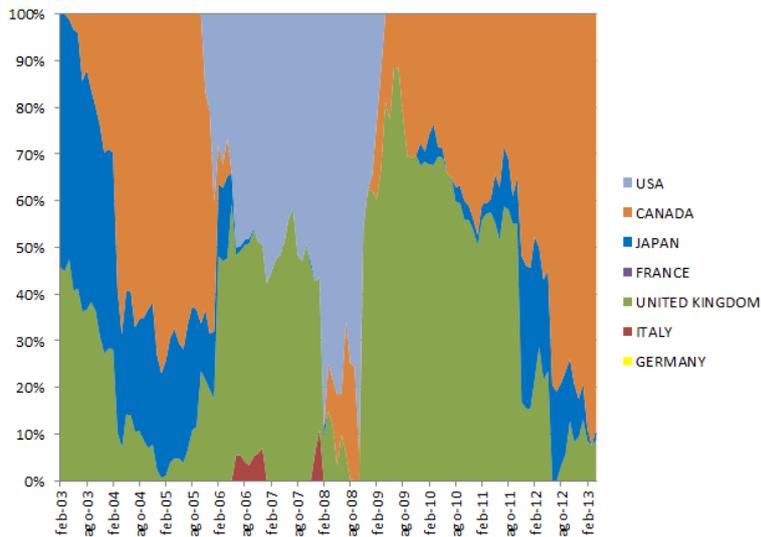


Figura 3.25: Portafogli a varianza minima globale, quota di ogni singolo Paese.

Portafogli a massimo Sharpe

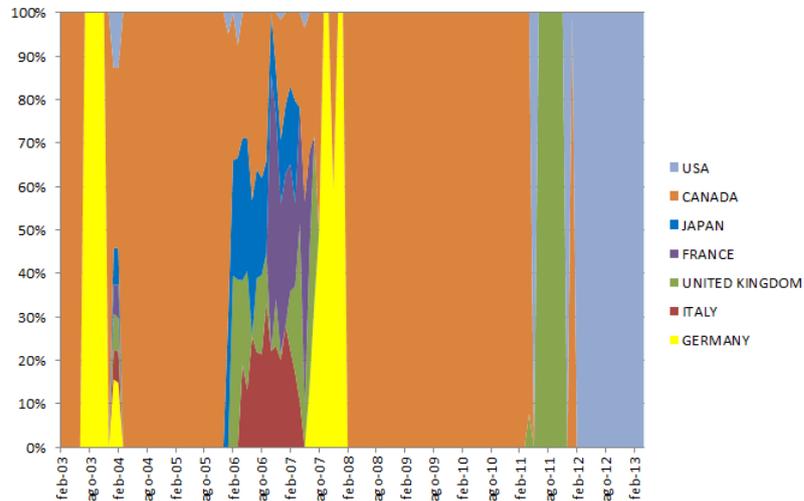


Figura 3.26: Portafogli a massimo Sharpe, quota di ogni singolo Paese.

Commenti

La composizione di tutti i portafogli, siano essi costruiti sui G7, G7 e BRICS o G7, BRICS e FM, non subisce sostanziali cambiamenti al variare dell'avversione al rischio, e in secondo luogo la quota investita sui BRICS sostiene un progressivo aumento dal momento in cui la crisi economica ha avuto avvio. I portafogli che massimizzano l'indice di Sharpe hanno invece un andamento completamente diverso e in diversi mesi si concentrano del tutto o quasi su un solo asset, riducendo la diversificazione.

Capitolo 4

Misure di performance

Per valutare le strategie si compareranno i rendimenti semplici e cumulati, la deviazione standard, il turnover e il drawdown dei vari portafogli. Verranno utilizzate inoltre alcune misure di performance assolute basate su rapporti tra una misura di rendimento e una misura di rischio, come gli indici di Sharpe e di Sortino, e misure relative costruite mediante un approccio di regressione rispetto ad uno o più fattori di rischio, in particolare sui *Global Factors* di Fama e French.

4.1 Definizioni

- **Turnover:** il turnover misura quanto i pesi del portafoglio variano in un certo intervallo di tempo, perciò valori alti possono implicare più elevati costi di transazione, con conseguente riduzione dei rendimenti netti, ceteris paribus. Il turnover al tempo t si calcola con la seguente formula, nella versione approssimata:

$$\tilde{\tau}_t = \sum_{i=1}^N |\omega_{i,t} - \omega_{i,t-1}|$$

- **Drawdown:** la serie storica dei Drawdown fornisce informazioni sulle perdite realizzate da uno strumento finanziario dal tempo 1 al tempo t . Per l'analisi dei rendimenti di un portafoglio è comune utilizzare il Massimo Drawdown, la massima perdita che si può realizzare in un investimento in un intervallo di tempo, ossia il rendimento che si ottiene comperando al massimo globale e vendendo al minimo globale successivo. Il drawdown al tempo t , noto il rendimento percentuale X_t è pari a:

$$D_t(X_t) = \min(D_{t-1} + X_t, 0), \quad D_0 = 0$$

- **Indice di Sharpe:** è già stato menzionato in precedenza, se il risk-free è nullo consiste nel rapporto tra la media e la deviazione standard dei rendimenti di un portafoglio da 1 a t . La preferenza va per i portafogli che hanno l'indice più elevato. Si possono confrontare gli indici di Sharpe dei portafogli anche utilizzando i test per verificarne l'uguaglianza, la statistica test è quella già vista nella costruzione della frontiera efficiente in presenza del titolo privo di rischio (§ 2.1.3), solo che qui i rendimenti da considerare sono quelli realizzati da una particolare strategia.
- **Indice di Sortino:** è molto simile all'indice di Sharpe, differisce nella misura del rischio che secondo Sortino è rappresentata dalla semideviazione standard, calcolata solo sui rendimenti negativi. La volatilità che caratterizza movimenti positivi di prezzo, è infatti un'accezione positiva per un investimento finanziario. Si calcola in questo modo:

$$Sr(X_t) = \frac{E[X_t]}{E[(\min(X_t, 0))^2]^{\frac{1}{2}}}$$

- **Alpha di Jensen:** l'intercetta della regressione secondo il CAPM $X_t = \alpha + \beta r_{m,t} + \varepsilon_t$ (dove r_m rappresenta il rendimento del benchmark), prende il nome di Alpha di Jensen. Gli strumenti finanziari con i maggiori α presentano le migliori opportunità di investimento, proprio perché hanno prodotto un rendimento (o extrarendimento) maggiore rispetto a quello che avrebbero dovuto registrare sulla base del solo rischio sistematico, rappresentato da β . Verrà in questa sede considerato l'alpha di una regressione alternativa, di cui il CAPM è un caso particolare, che prende spunto dal lavoro di Fama e French:

$$X_t = \alpha + \beta_m r_{m,t} + \beta_s SMB_t + \beta_b HML_t + \varepsilon_t$$

SMB (Small Minus Big) coincide con il differenziale di rendimento tra le imprese di maggiori e minori dimensioni, in termini di capitalizzazione di mercato. HML (High Minus Low) è invece la differenza di rendimento tra le imprese aventi valori alti e bassi dell'indice book-to-market (rapporto tra il valore di bilancio e il valore di mercato delle azioni).

4.2 Calcolo e confronto degli indici dei portafogli costruiti sui tre tipi di asset

Verranno presentate in primo luogo le principali misure di performance grafiche, che comprendono rendimenti semplici e cumulati, deviazioni standard, turnover, drawdown e infine gli indicatori, per ogni strategia costruita. Si distingueranno i portafogli costruiti sotto i soli vincoli di positività da quelli in cui si sono aggiunti gli upper-bound.

4.2.1 Misure di performance a livello grafico

Portafogli che massimizzano utilità agente (vincoli di positività)

$$\gamma = 2$$

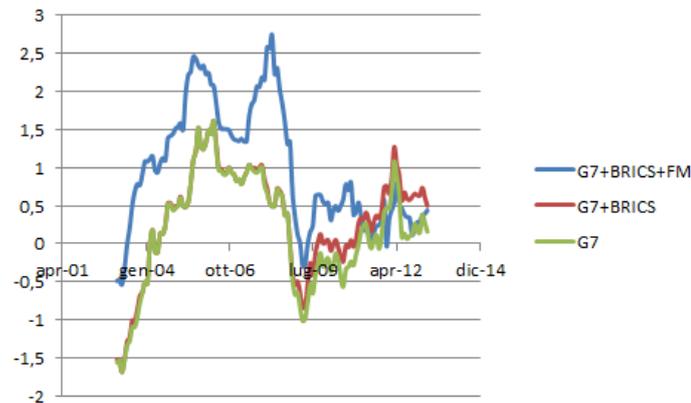


Figura 4.1: Rendimenti percentuali delle tre strategie a confronto.

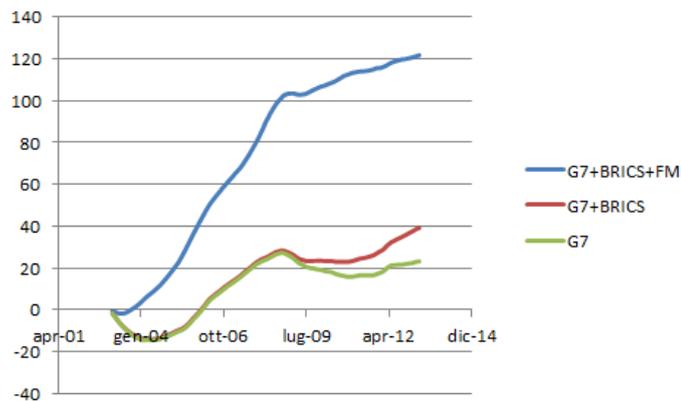


Figura 4.2: Rendimenti cumulati delle tre strategie a confronto.

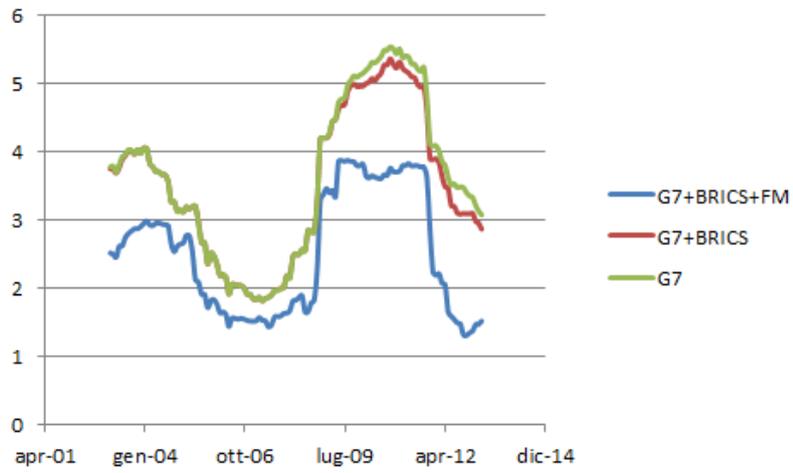


Figura 4.3: Deviazioni standard delle tre strategie a confronto.

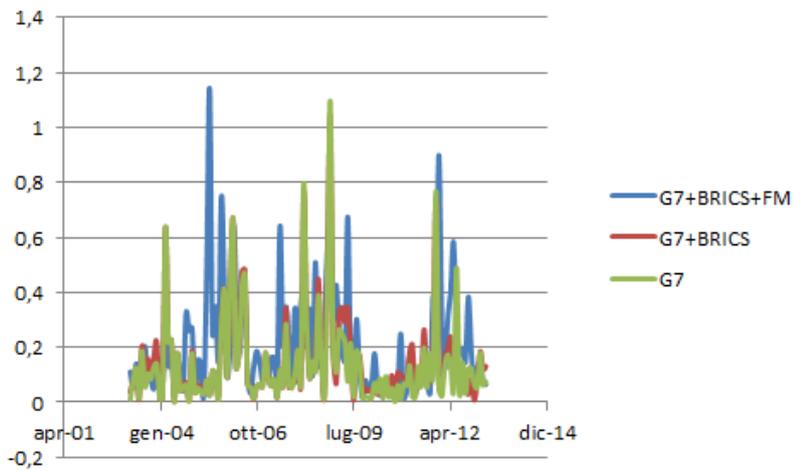


Figura 4.4: Turnover delle tre strategie a confronto.

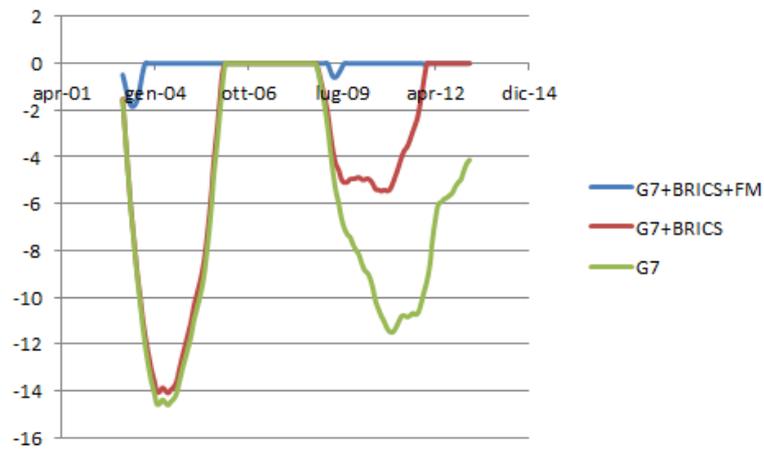


Figura 4.5: Successione dei drawdown per ogni strategia.

	G7+BRICS+FM	G7+BRICS	G7
$\gamma = 2$	-1,82776	-14,0896	-14,6016

Tabella 4.1: Massimo drawdown di ogni strategia.

$\gamma = 10$

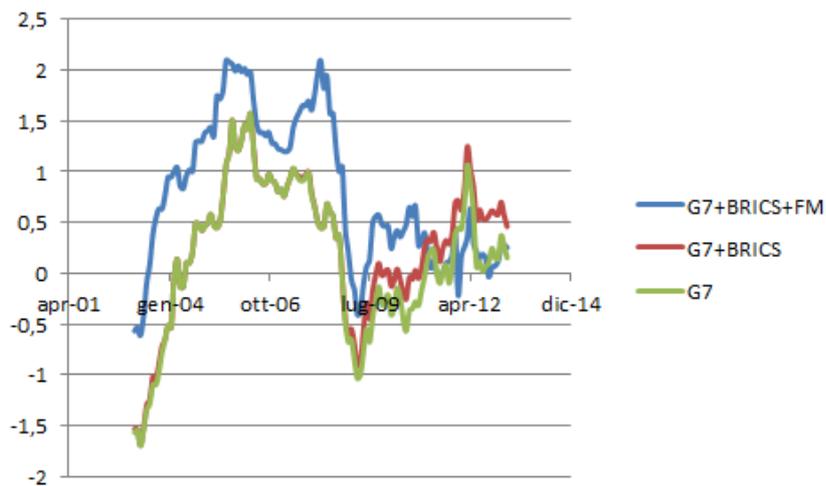


Figura 4.6: Rendimenti delle tre strategie a confronto.

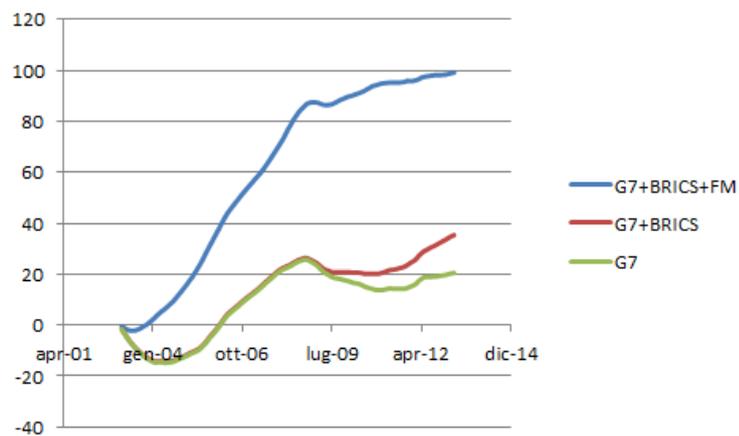


Figura 4.7: Rendimenti cumulati delle tre strategie a confronto.

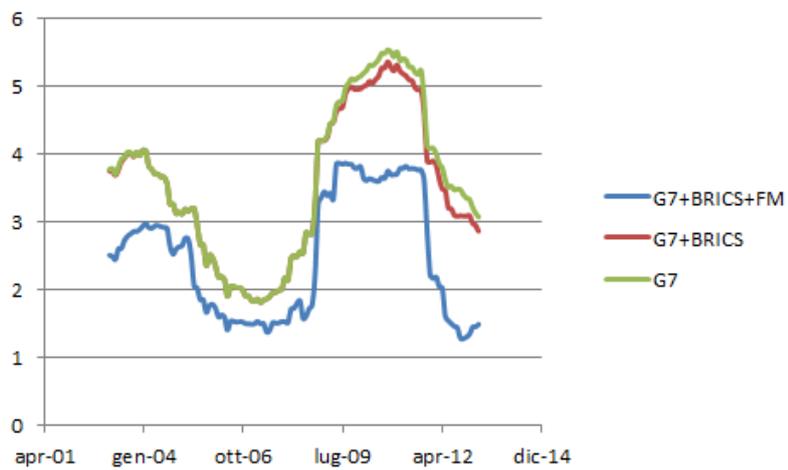


Figura 4.8: Deviazioni standard delle tre strategie a confronto.

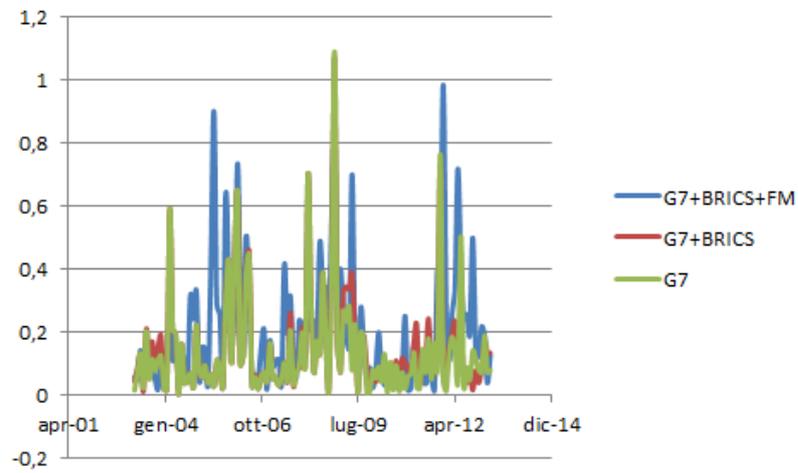


Figura 4.9: Turnover delle tre strategie a confronto.

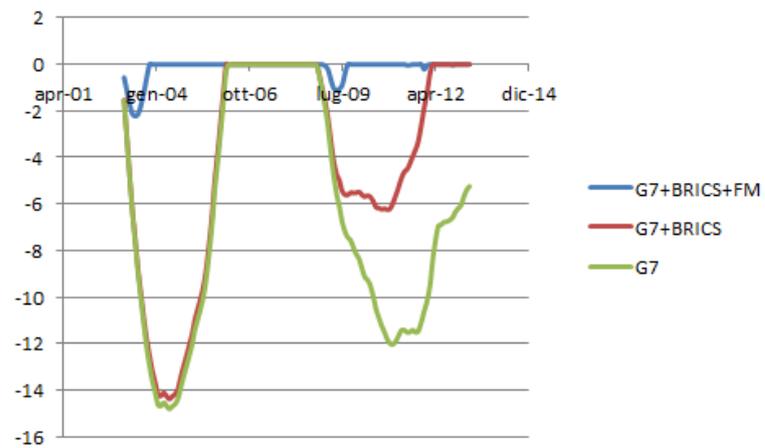


Figura 4.10: Successione dei drawdown per ogni strategia.

	G7+BRICS+FM	G7+BRICS	G7
$\gamma = 10$	-2,22577	-14,3789	-14,8041

Tabella 4.2: Massimo drawdown di ogni strategia.

$$\gamma = 50$$

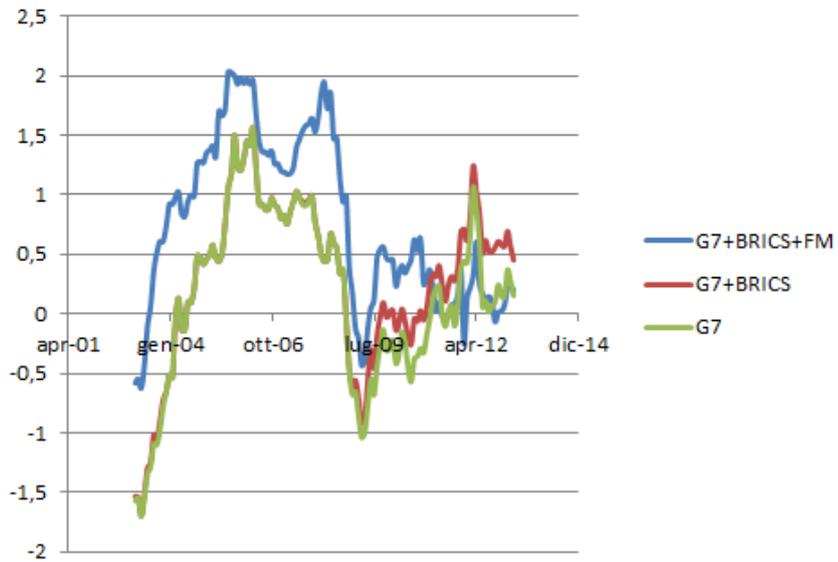


Figura 4.11: Rendimenti percentuali delle tre strategie a confronto.

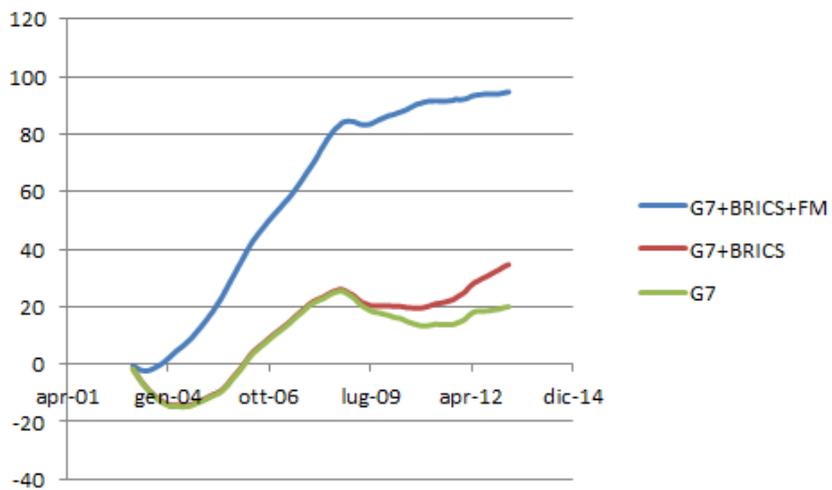


Figura 4.12: Rendimenti cumulati delle tre strategie a confronto.

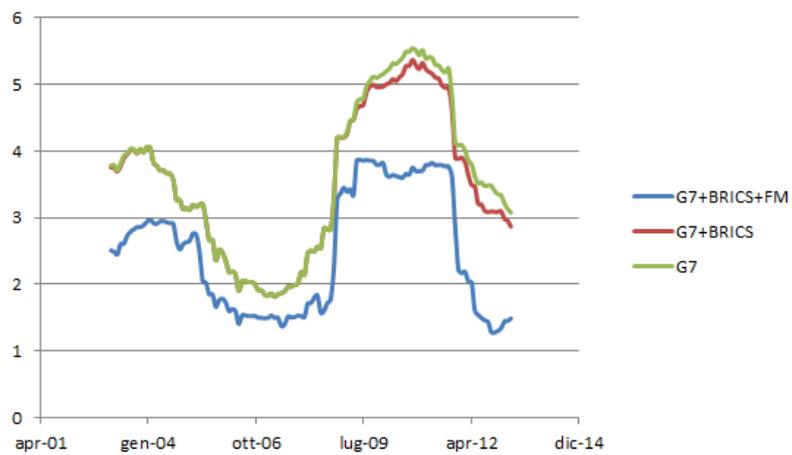


Figura 4.13: Deviazioni standard delle tre strategie a confronto.

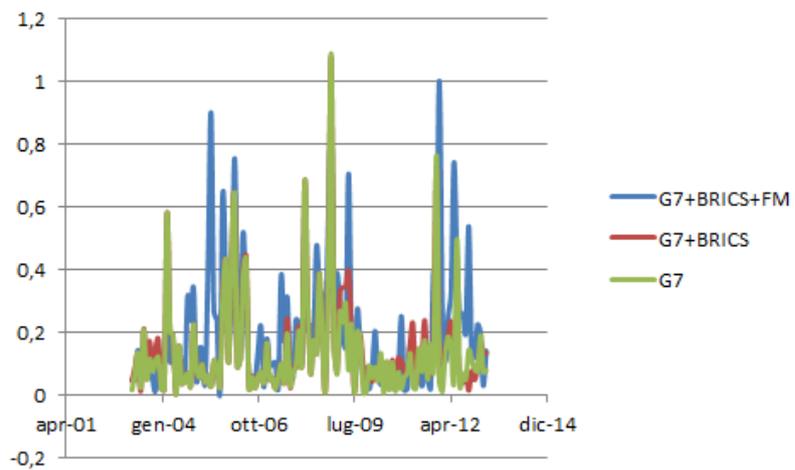


Figura 4.14: Turnover delle tre strategie a confronto.

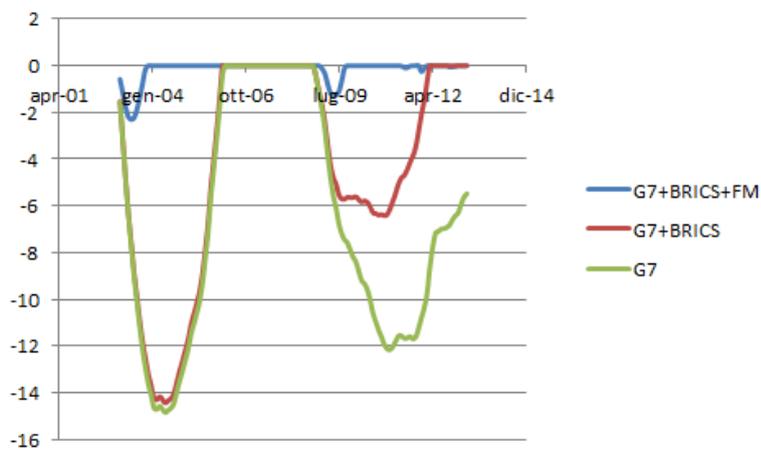


Figura 4.15: Successione dei drawdown per ogni strategia.

	G7+BRICS+FM	G7+BRICS	G7
$\gamma = 50$	-2,30071	-14,4352	-14,8446

Tabella 4.3: Massimo drawdown di ogni strategia.

Portafogli a varianza minima globale (vincoli di positività)

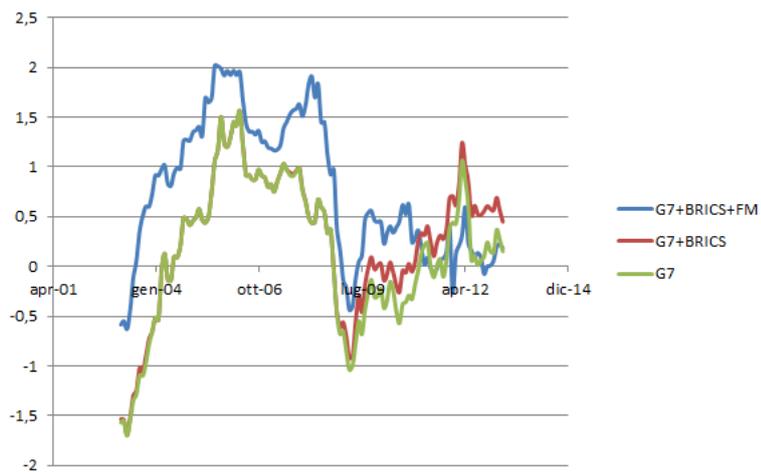


Figura 4.16: Rendimenti percentuali delle tre strategie a confronto.

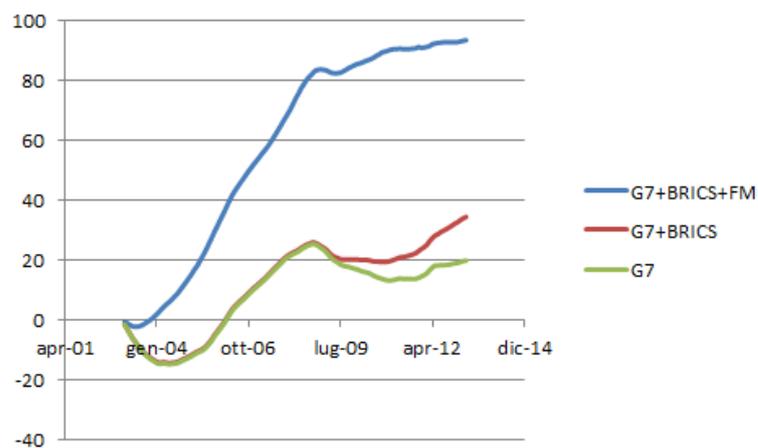


Figura 4.17: Rendimenti cumulati delle tre strategie a confronto.

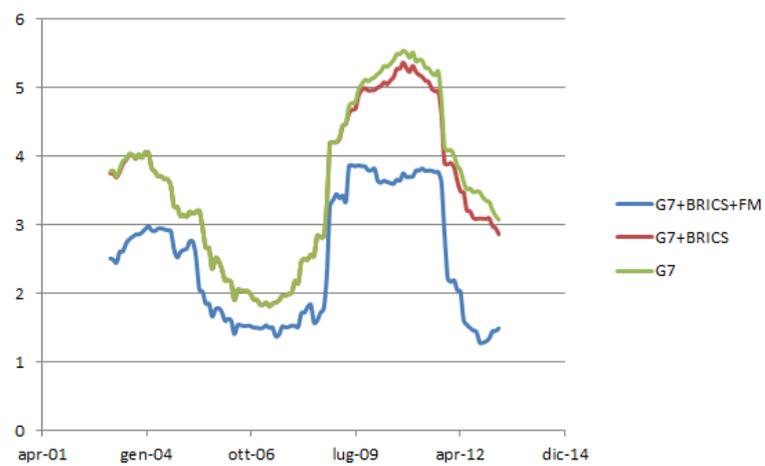


Figura 4.18: Deviazioni standard delle tre strategie a confronto.

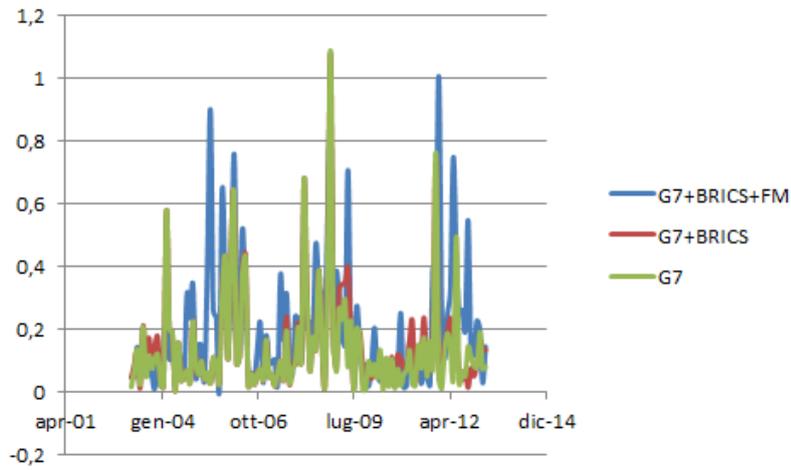


Figura 4.19: Turnover delle tre strategie a confronto.

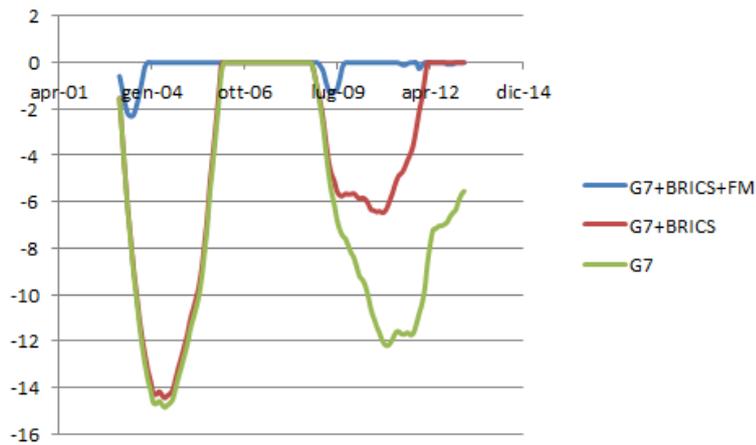


Figura 4.20: Successione dei drawdown per ogni strategia.

	G7+BRICS+FM	G7+BRICS	G7
VMG	-2,31942	-14,4493	-14,8547

Tabella 4.4: Massimo drawdown di ogni strategia.

Portafogli a massimo Sharpe (vincoli di positività)

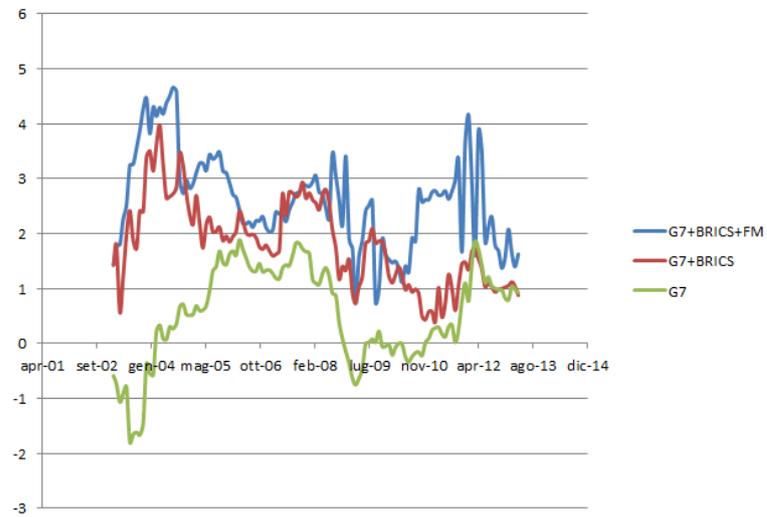


Figura 4.21: Rendimenti percentuali delle tre strategie a confronto.

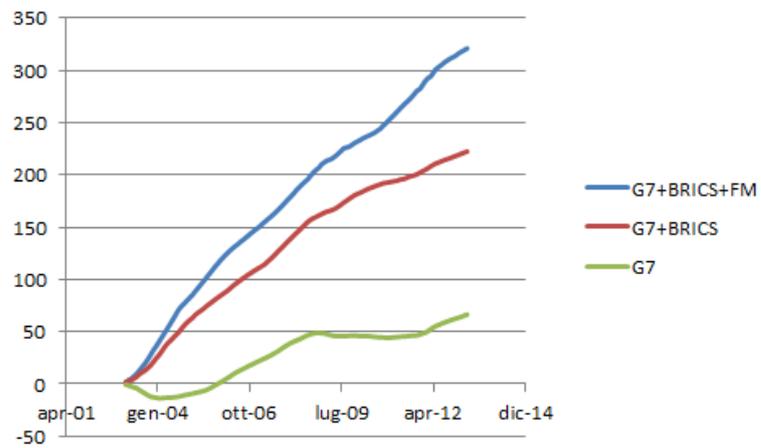


Figura 4.22: Rendimenti cumulati delle tre strategie a confronto.

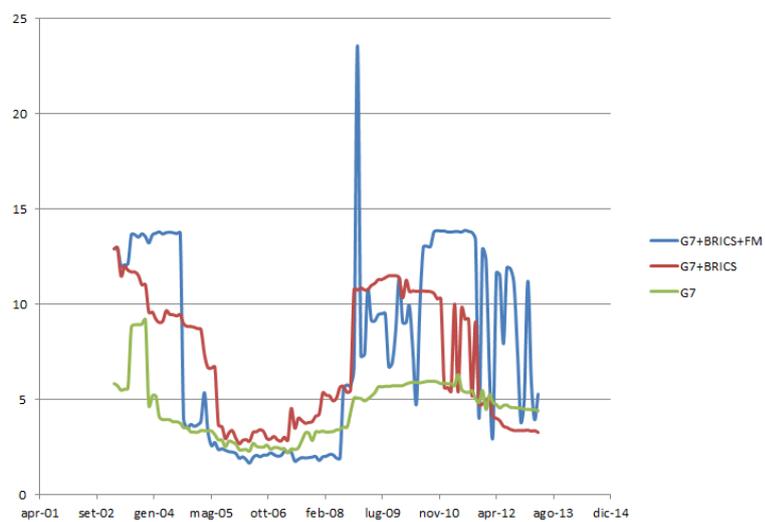


Figura 4.23: Deviazioni standard delle tre strategie a confronto.

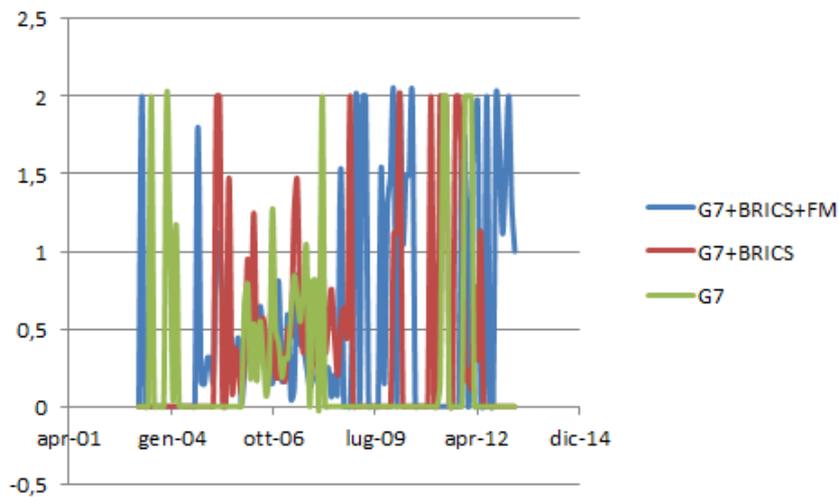


Figura 4.24: Turnover delle tre strategie a confronto.

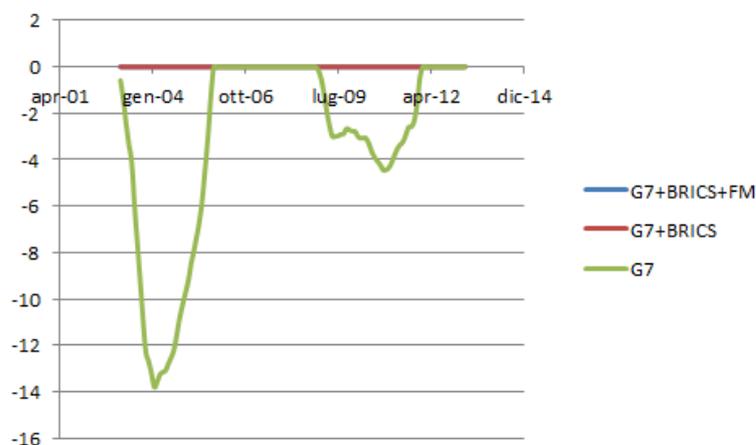


Figura 4.25: Successione dei drawdown per ogni strategia.

	G7+BRICS+FM	G7+BRICS	G7
MAX SHARPE	0	0	-13,8023

Tabella 4.5: Massimo drawdown di ogni strategia.

Commenti

Si focalizzi innanzitutto l'attenzione sui portafogli a varianza minima globale e su quelli calcolati massimizzando l'utilità al variare del coefficiente di avversione al rischio. Si distinguono positivamente e in maniera netta quelli che diversificano anche sui mercati di frontiera, come si vede dai grafici infatti hanno rendimenti semplici e cumulati superiori rispetto agli altri portafogli, deviazioni standard e drawdown di gran lunga inferiori, turnover simili. I portafogli che includono G7 e BRICS e quelli contenenti soltanto i G7 hanno un andamento affine. Occorre però puntualizzare che nell'ultimo anno gli strumenti finanziari più diversificati hanno subito un calo del rendimento, comunque assieme ad una forte riduzione del rischio. Al contrario quelli che investono in G7 e BRICS hanno visto incrementare lievemente il rendimento. In conclusione i portafogli che investono anche nei Frontier Markets sono secondo queste misure di performance in assoluto migliori perché tuttalpiù hanno sempre raggiunto rischio inferiore a parità di rendimento. Considerando ora i portafogli a massimo Sharpe si può constatare che quelli costruiti sui G7 e BRICS si avvicinano di più a quelli che contengono G7, BRICS e FM. Non si può stabilire quale delle due strategie sia migliore, entrambe hanno avuto rendimenti sempre positivi, l'ultima un po' più alti, ma è stata caratterizzata da deviazione standard più variabile.

Portafogli che massimizzano utilità agente (vincoli di positività e di upper-bound)

$$\gamma = 2$$

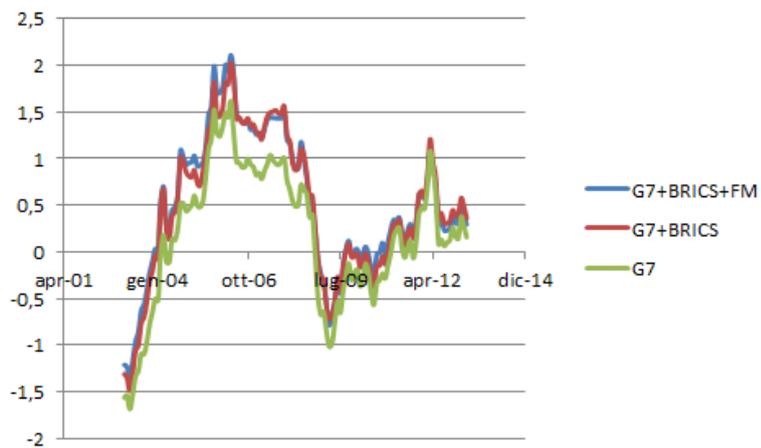


Figura 4.26: Rendimenti percentuali delle tre strategie a confronto.

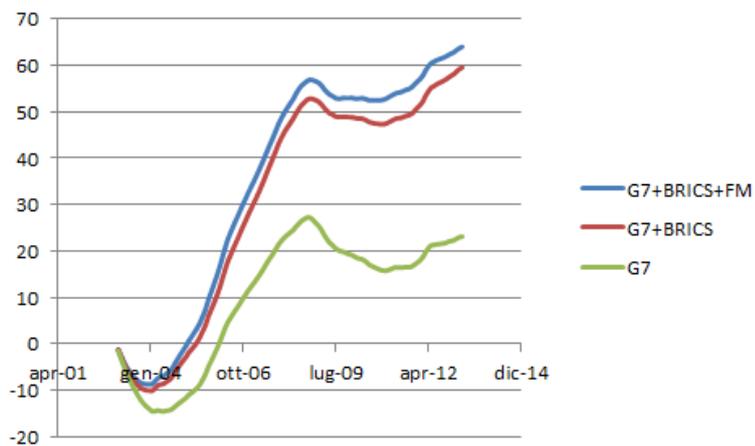


Figura 4.27: Rendimenti cumulati delle tre strategie a confronto.

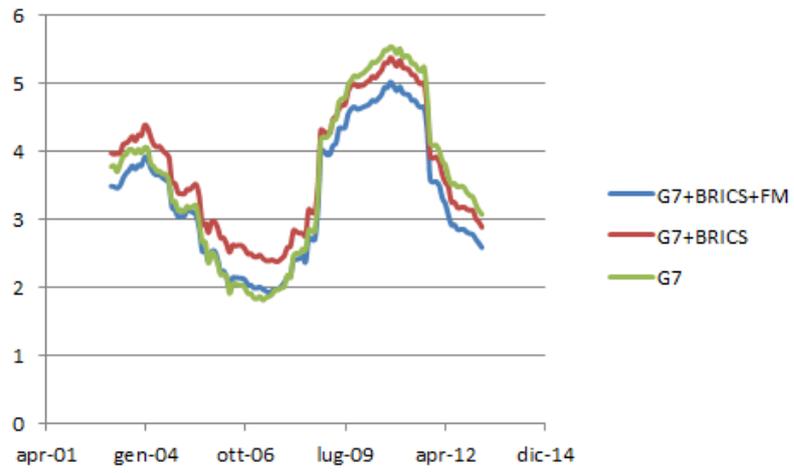


Figura 4.28: Deviazioni standard delle tre strategie a confronto.

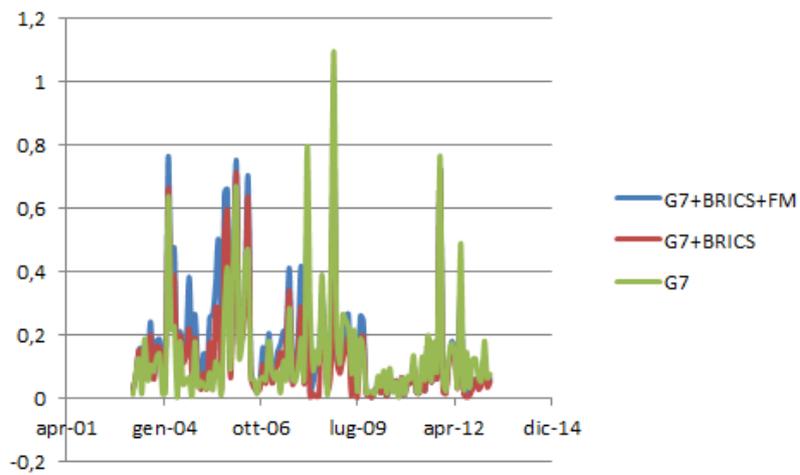


Figura 4.29: Turnover delle tre strategie a confronto.

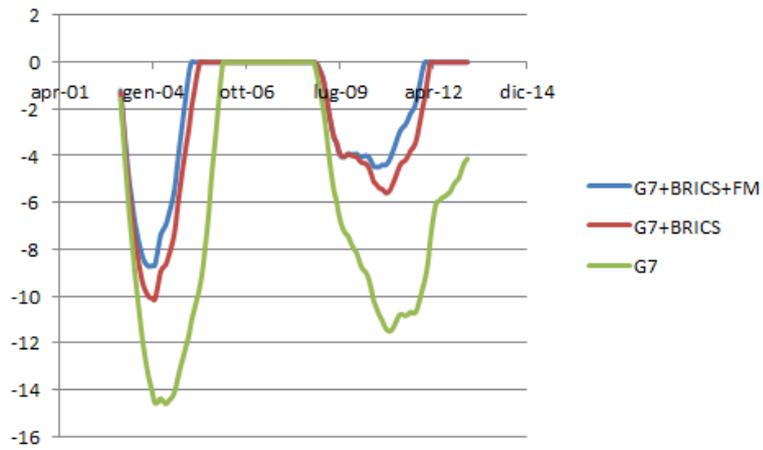


Figura 4.30: Successione dei drawdown per ogni strategia.

	G7+BRICS+FM	G7+BRICS	G7
$\gamma = 2$	-8,73655	-10,1555	-14,6016

Tabella 4.6: Massimo drawdown di ogni strategia.

$\gamma = 10$

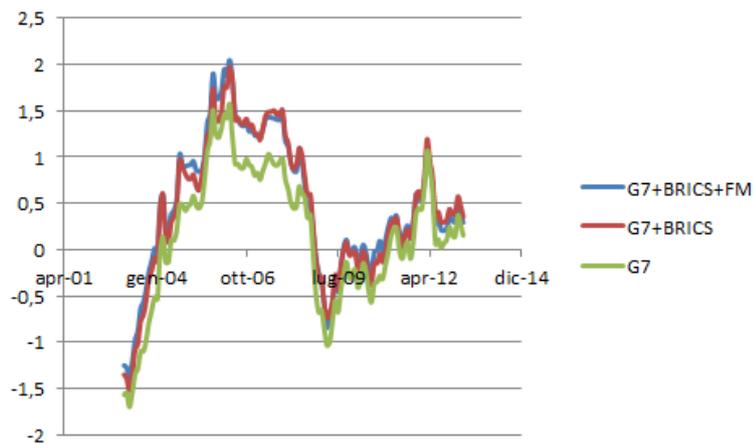


Figura 4.31: Rendimenti percentuali delle tre strategie a confronto.

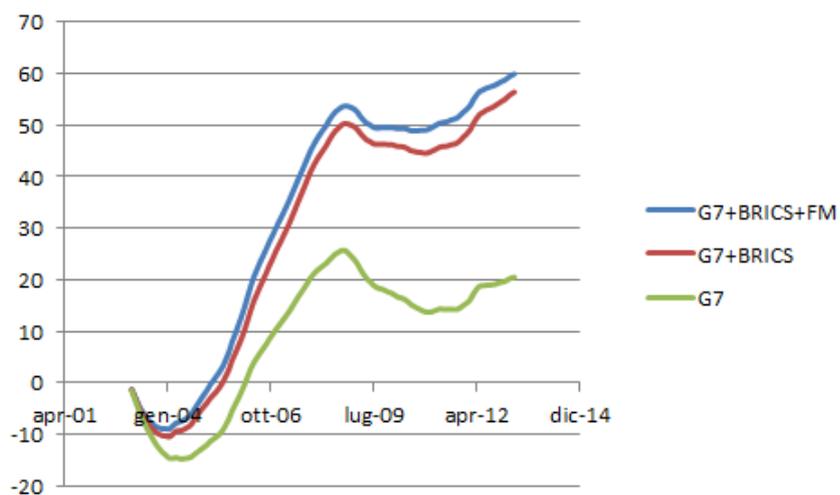


Figura 4.32: Rendimenti cumulati delle tre strategie a confronto.

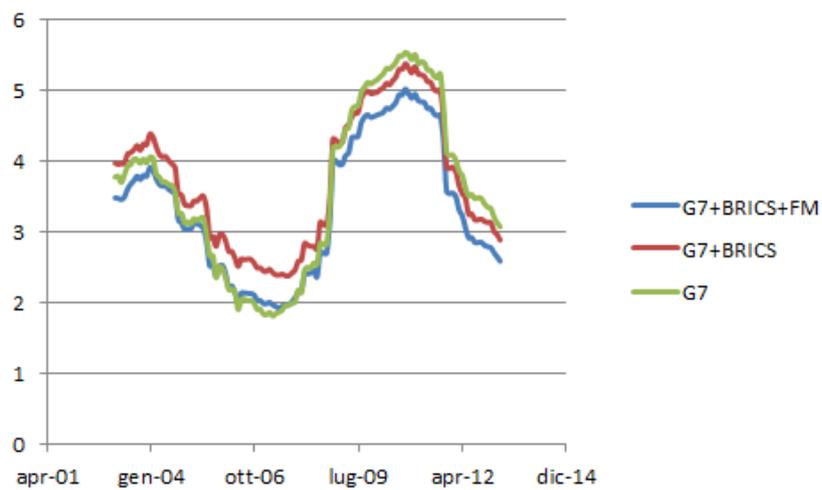


Figura 4.33: Deviazioni standard delle tre strategie a confronto.

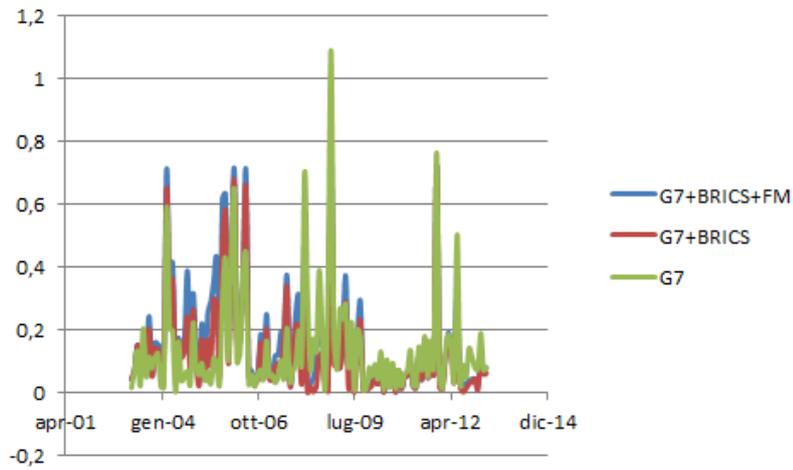


Figura 4.34: Turnover delle tre strategie a confronto.

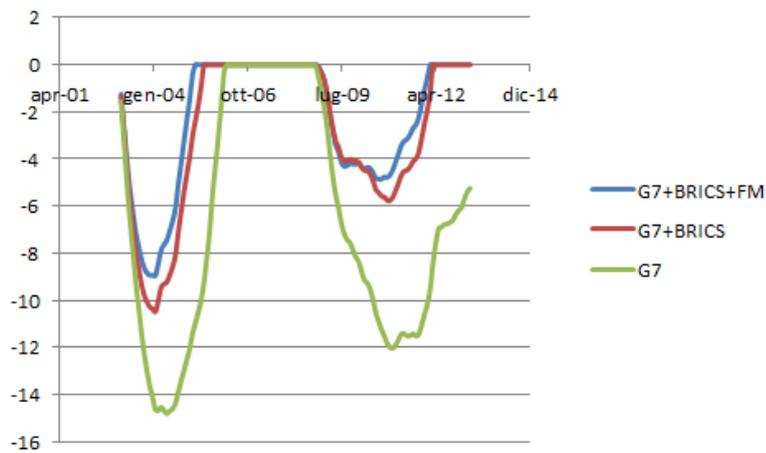


Figura 4.35: Successione dei drawdown per ogni strategia.

	G7+BRICS+FM	G7+BRICS	G7
$\gamma = 10$	-8,94839	-10,4894	-14,8041

Tabella 4.7: Massimo drawdown di ogni strategia.

$$\gamma = 50$$

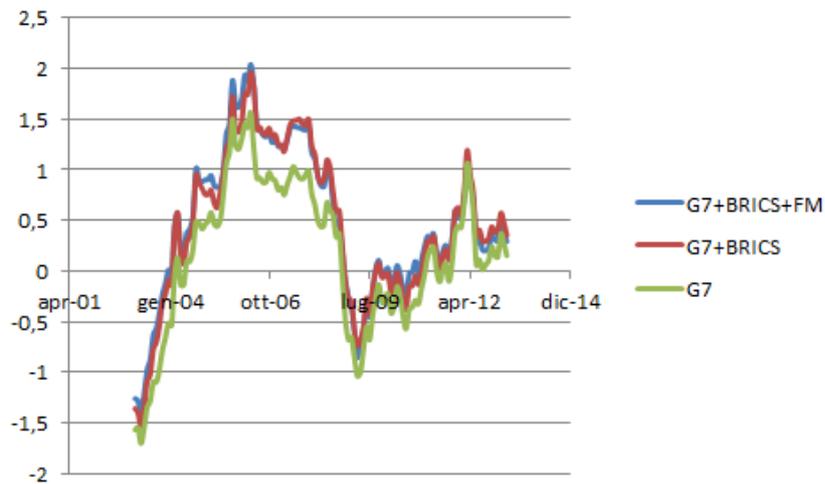


Figura 4.36: Rendimenti percentuali delle tre strategie a confronto.

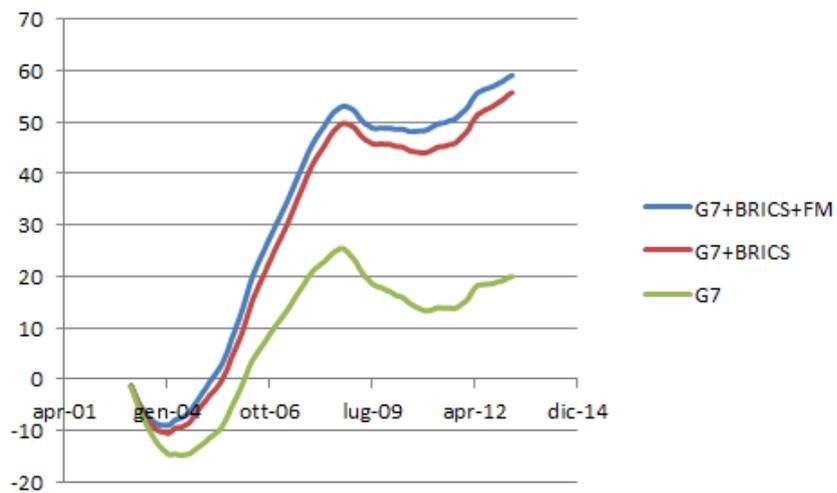


Figura 4.37: Rendimenti cumulati delle tre strategie a confronto.

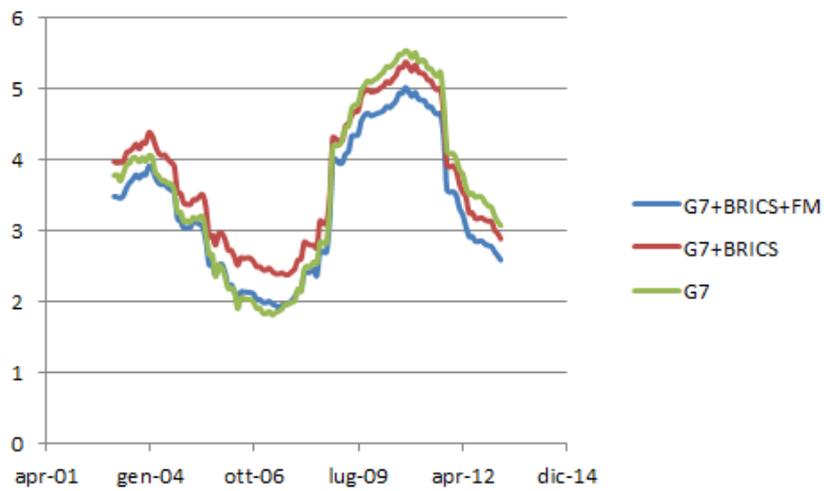


Figura 4.38: Deviazioni standard delle tre strategie a confronto.

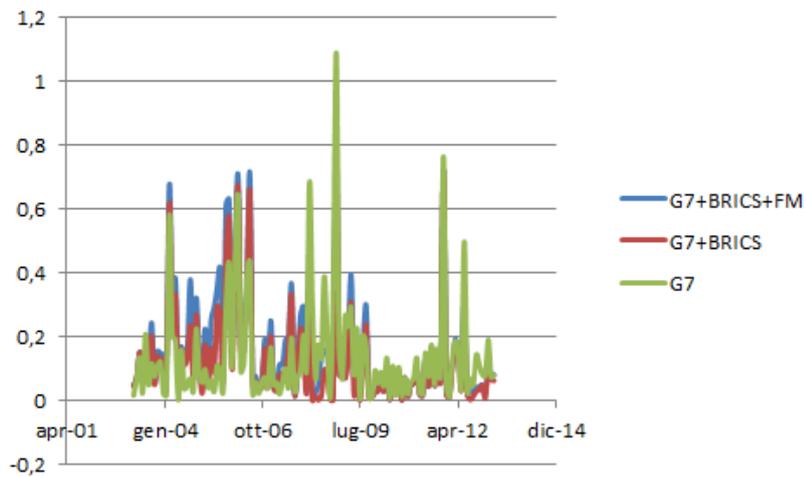


Figura 4.39: Turnover delle tre strategie a confronto.

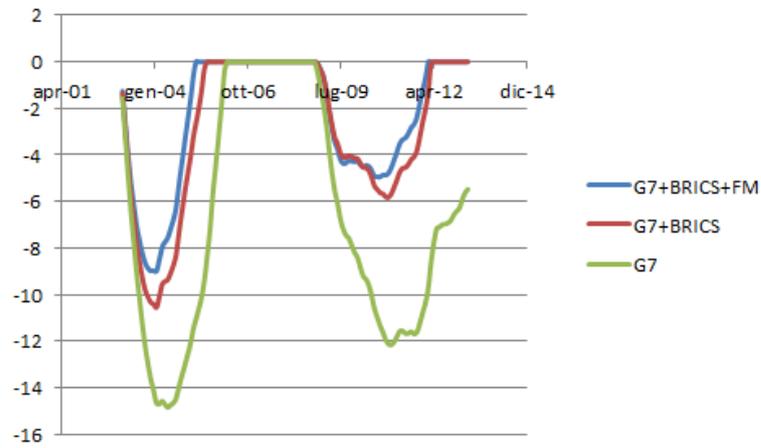


Figura 4.40: Successione dei drawdown per ogni strategia.

	G7+BRICS+FM	G7+BRICS	G7
$\gamma = 50$	-8,99564	-10,5538	-14,8446

Tabella 4.8: Massimo drawdown di ogni strategia.

Portafogli a varianza minima globale (vincoli di positività e di upper-bound)

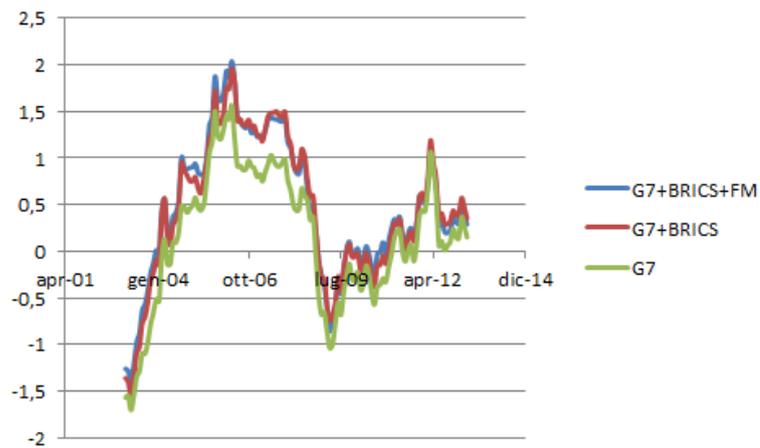


Figura 4.41: Rendimenti percentuali delle tre strategie a confronto.

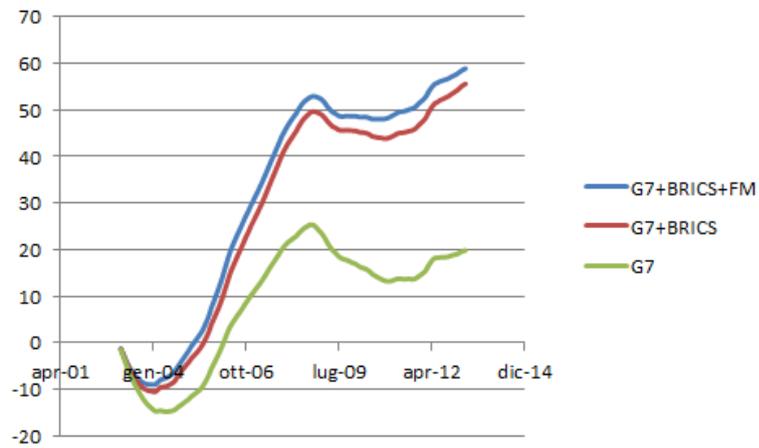


Figura 4.42: Rendimenti cumulati delle tre strategie a confronto.

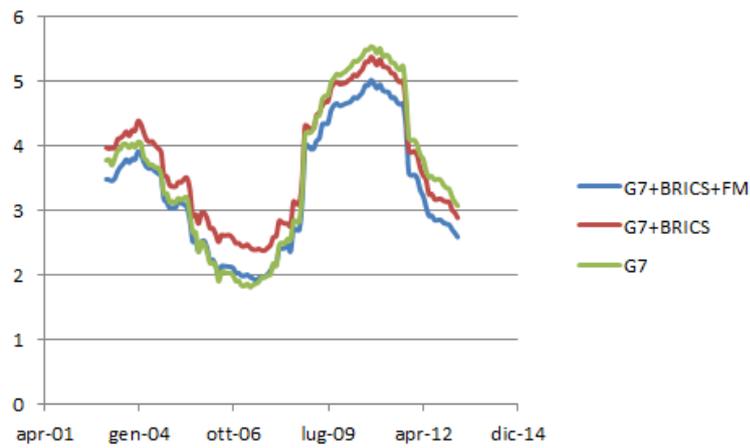


Figura 4.43: Deviazioni standard delle tre strategie a confronto.

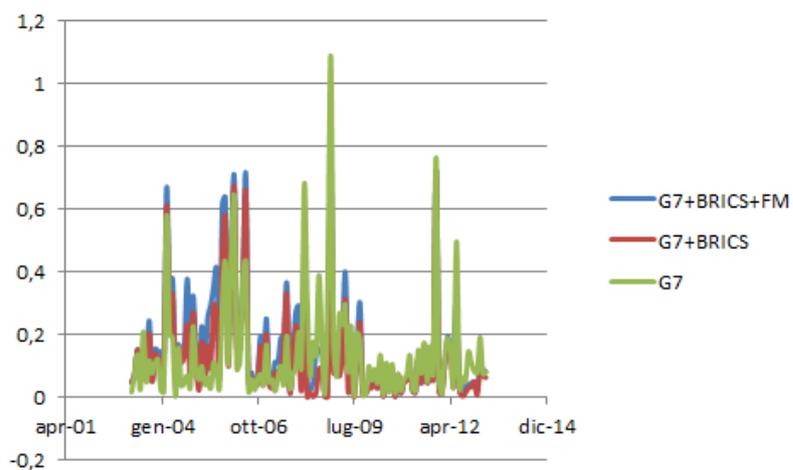


Figura 4.44: Turnover delle tre strategie a confronto.

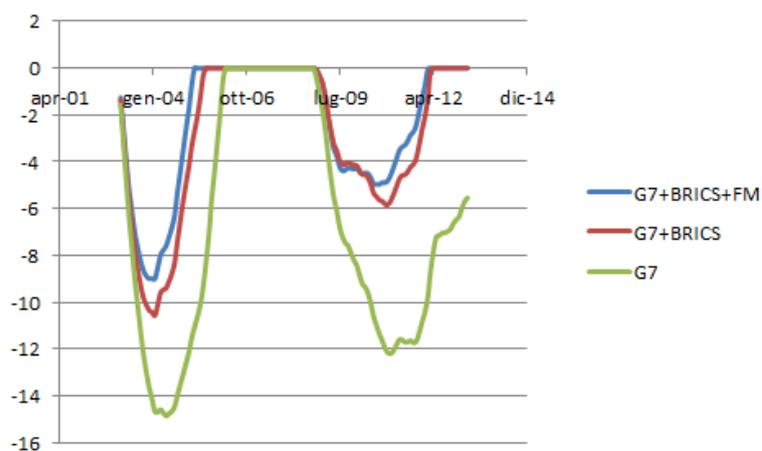


Figura 4.45: Successione dei drawdown per ogni strategia.

	G7+BRICS+FM	G7+BRICS	G7
VMG	-9,00743	-10,5705	-14,8547

Tabella 4.9: Massimo drawdown di ogni strategia.

Portafogli a massimo Sharpe (vincoli di positività e di upper-bound)



Figura 4.46: Rendimenti percentuali delle tre strategie a confronto.

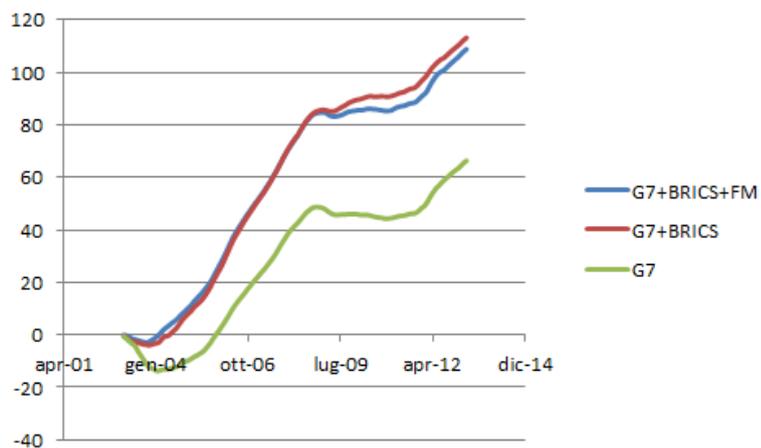


Figura 4.47: Rendimenti cumulati delle tre strategie a confronto.

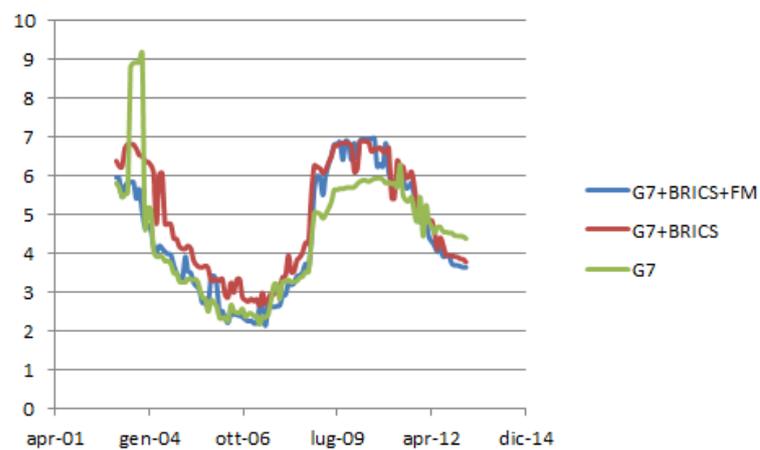


Figura 4.48: Deviazioni standard delle tre strategie a confronto.

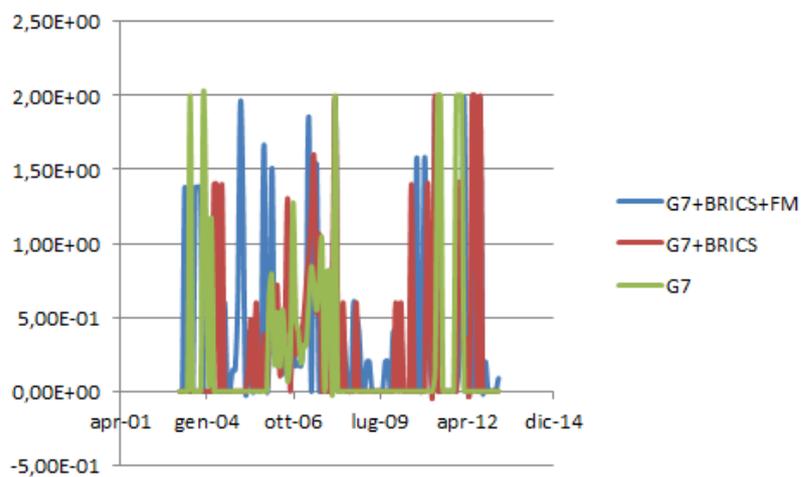


Figura 4.49: Turnover delle tre strategie a confronto.

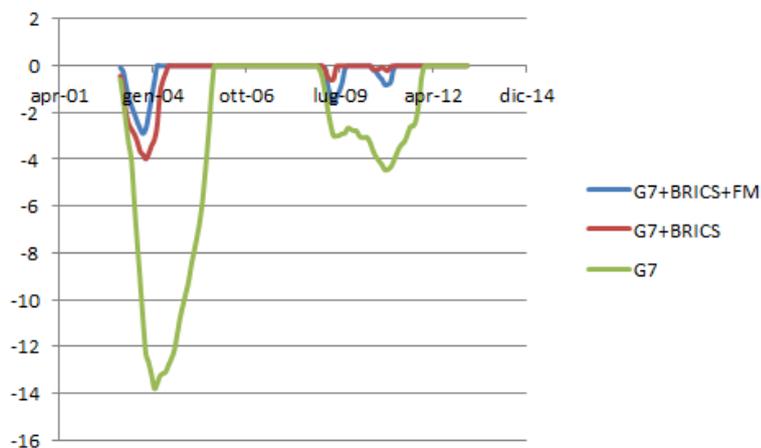


Figura 4.50: Successione dei drawdown per ogni strategia.

	G7+BRICS+FM	G7+BRICS	G7
MAX SHARPE	-2,89725	-3,98597	-13,8023

Tabella 4.10: Massimo drawdown di ogni strategia.

Commenti

I portafogli contenenti G7,BRICS,FM e quelli con G7,BRICS hanno misure di performance a livello grafico relativamente simili, un po' meglio i primi, i quali presentano peraltro volatilità inferiore. Le strategie costruite esclusivamente sui mercati sviluppati invece sono caratterizzate da rendimenti semplici e cumulati più bassi, turnover e drawdown peggiori. Inoltre i grafici mettono in evidenza, sempre per i G7, un livello di rischio superiore rispetto a tutti gli altri portafogli, ad eccezione del periodo che va da inizio 2004 ai mesi prossimi all'inizio della crisi.

4.2.2 Indici di Sharpe, Sortino e Alpha di Jensen

Le tabelle che seguono riportano gli indici di Sharpe, di Sortino e gli α di ogni strategia e per ciascun tipo di portafoglio.

Portafogli con vincoli di positività

		Sharpe	Sortino	α
$\gamma = 2$	G7+BRICS+FM	1,223	10,866	NA
	G7+BRICS	0,451	0,782	0,341
	G7	0,257	0,416	0,209
$\gamma = 10$	G7+BRICS+FM	1,108	7,140	NA
	G7+BRICS	0,410	0,690	0,310
	G7	0,229	0,364	0,187
$\gamma = 50$	G7+BRICS+FM	1,076	6,501	NA
	G7+BRICS	0,401	0,673	0,303
	G7	0,223	0,354	0,183
VMG	G7+BRICS+FM	1,067	6,352	NA
	G7+BRICS	0,399	0,670	0,302
	G7	0,222	0,351	0,182
MAX SHARPE	G7+BRICS+FM	2,997	NA	NA
	G7+BRICS	2,297	NA	NA
	G7	0,620	1,341	0,572

Tabella 4.11

Portafogli con vincoli di positività e di upper-bound

		Sharpe	Sortino	α
$\gamma = 2$	G7+BRICS+FM	0,676	1,736	0,541
	G7+BRICS	0,623	1,462	0,508
	G7	0,257	0,416	0,209
$\gamma = 10$	G7+BRICS+FM	0,643	1,575	0,507
	G7+BRICS	0,595	1,352	0,482
	G7	0,229	0,364	0,187
$\gamma = 50$	G7+BRICS+FM	0,636	1,543	0,501
	G7+BRICS	0,589	1,330	0,477
	G7	0,223	0,354	0,183
VMG	G7+BRICS+FM	0,634	1,535	0,499
	G7+BRICS	0,588	1,324	0,476
	G7	0,222	0,351	0,182
MAX SHARPE	G7+BRICS+FM	1,145	6,716	0,908
	G7+BRICS	1,179	6,705	0,943
	G7	0,620	1,341	0,572

Tabella 4.12

Per quanto riguarda i portafogli ottimizzati con i soli vincoli di positività e in particolare quelli a massimo Sharpe contenenti G7, BRICS, FM e quelli costruiti su G7, BRICS non è stato possibile calcolare l'indice di Sortino in quanto hanno avuto solo rendimenti positivi. In riferimento all'Alpha di Jensen è stato attribuito NA ai portafogli per i quali né i fattori di Fama e French né il mercato sono risultati significativi, facendo supporre l'incapacità di queste variabili di spiegare i rendimenti. Per tutti gli altri portafogli l'unica variabile significativa è SMB, sono stati perciò esclusi dal modello tutti i regressori con coefficienti statisticamente uguali a zero e considerati gli α di queste regressioni. Gli indici di Sharpe relativi ai portafogli diversificati su un maggior numero di Paesi sono in tutti i casi più alti rispetto a quelli che ne contengono un sottoinsieme, questo viene avvalorato anche dai test unilaterali di uguaglianza delle performance di Sharpe dei vari portafogli, i cui p-value tendono a zero. Lo stesso vale per i portafogli con G7 e BRICS rispetto a quelli aventi solo i G7. L'indice di Sortino si comporta in modo analogo, lo stesso non si può dire per l'Alpha di Jensen. La presenza di numerosi NA non permette di giungere a chiare conclusioni, ad ogni modo gli α presenti sono più elevati per i G7+BRICS rispetto ai G7, per i portafogli che massimizzano l'utilità e per quelli a varianza minima globale. L'introduzione dei vincoli di upper-bound riconferma migliori le performance dei portafogli costruiti sul maggior numero di Paesi rispetto alle altre strategie, tuttavia, in merito al portafoglio a massimo Sharpe essi hanno indice di Sharpe statisticamente equivalente (p-value 0.819) ai portafogli contenenti mercati sviluppati ed emergenti.

Conclusioni

Al termine di questo lavoro è necessario mettere in chiaro i principali risultati raggiunti. I portafogli costruiti sotto vincoli di positività che diversificano in mercati emergenti e di frontiera sono sotto ogni aspetto migliori di quelli che si espongono esclusivamente sui mercati sviluppati, lo stesso vale per quelli che contengono G7 e BRICS. In particolare le allocazioni mensili costruite massimizzando il rapporto rischio-rendimento non hanno mai realizzato rendimenti negativi. I pesi stimati sono tuttavia molto concentrati in determinati mercati, per questo si è deciso di riservare il 70% della quota di portafoglio ai G7, il 30% ai BRICS e il 10% ai Frontier Markets. Con l'introduzione di vincoli di upper-bound oltre a quelli di positività si nota rispetto a prima un generico calo delle performance per tutti i portafogli, a prescindere dai Paesi in essi contenuti. Si confermano comunque migliori anche in questo caso le strategie basate su G7, BRICS e Frontier Markets e quelle costruite su G7 e BRICS rispetto ai portafogli che impiegano la ricchezza interamente nei G7. Si può quindi rispondere affermativamente ad uno dei due quesiti posti nell'introduzione, è evidente come l'impiego di parte delle risorse nei mercati emergenti e di frontiera apporti benefici alle performance di portafoglio. Questo risultato fa supporre inoltre che gli effetti negativi della crisi sarebbero stati più contenuti e probabilmente non avrebbero contagiato tutto il mondo se gli agenti fossero stati più oculati, ad esempio diversificando maggiormente l'investimento in questo tipo di Paesi piuttosto di acquistare strumenti finanziari che promettevano rendimenti alti, ma un livello di rischio sottostimato.

Bibliografia

- [1] Appunti di *Econometria dei mercati finanziari*, prof. M. Caporin, Università degli Studi di Padova, A.A. 2012-2013
- [2] Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, Stephen J. Brown, William N. Goetzmann, *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, 2009
- [3] Gallo G.M., Pacini B., *Metodi quantitativi per i mercati finanziari*, Carocci Editore, 2002
- [4] Morningstar Incorporated, *Slalom sulle piste di frontiera. Alla scoperta delle vie incontaminate di Asia, Africa, Europa e sud America*, Morningstar Investor, edizione Novembre/Dicembre 2012
- [5] Pastorello S., *Rischio e rendimento. Teoria finanziaria e applicazioni econometriche*, Il Mulino, 2001
- [6] Speidell L., *Frontier Market Equity Investing: Finding the Winners of the Future*, Research Foundation of CFA Institute, 2011

Per dubbi e chiarimenti: vettorazzo.jessica@gmail.com