



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI SCIENZE MM.FF.NN.

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA E APPLICATA

TESI DI LAUREA

Le Serie di Farey

RELATORE: Ch.mo Prof. Benedetto SCIMEMI

LAUREANDA: EULALIA GIGLIO

ANNO ACCADEMICO 2002/03

Indice

Introduzione	3
Capitolo 1: La Serie di Farey	7
1.1 Note storiche	7
1.2 La Serie di Farey	9
1.3 Approssimazioni	18
1.3.1 Approssimazione di un numero reale	18
1.3.2 Approssimazione Diofantea	21
1.4 Sezioni di Farey	28
Capitolo 2: Circoli di Ford	31
2.1 Note storiche	31
2.2 I Circoli di Ford	32
2.3 Approssimazione Diofantea	37
Capitolo 3: Altre applicazioni della Serie di Farey	43
3.1 L'Albero di Stern-Brocot	43
3.2 Teorema di Pick applicato alla Serie di Farey	49
3.3 Entropia armonica	52
3.4 Fillotassi	54
3.5 Frazioni continue	58
3.6 Insieme di Mandelbrot	62
Bibliografia	65

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è descrivere le principali caratteristiche della Serie di Farey e scoprire in quali capitoli della matematica e di altre discipline esse fanno la loro comparsa.

John Farey era un geologo, non un matematico, ma il suo nome è legato ad un'osservazione matematica fatta in un giornale (pubblicato nel 1816), nel quale introduceva quella che ora è detta la Serie di Farey, descrivendo qualche sua proprietà senza darne dimostrazione. La "Serie" prende il nome da chi per la prima volta l'ha pubblicata e non da chi ne ha dimostrato le proprietà. Fu, infatti, Cauchy a dimostrarle nello stesso anno e questo produsse varie polemiche tra i due, che si contendevano il nome della serie stessa.

Farey non fu, comunque, il primo a notare le proprietà caratteristiche della serie. In realtà C.Haros nel 1802, aveva studiato le approssimazioni con le frazioni e usato la costruzione che Farey enuncerà anni dopo. A ribadire questo fatto fu Hardy nell'"Apology" dove scrisse:

“...Farey è immortale perché non riuscì a dimostrare un teorema che Haros aveva dimostrato perfettamenteamente quattordici anni prima...”

Nel primo capitolo, dopo un'introduzione storica, vedremo la definizione della serie in questione, con le sue principali proprietà; in particolare la "proprietà curiosa" citata da Farey. Essa afferma che date tre frazioni successive della sequenza, quella centrale è la "mediante" delle altre due (date

le frazioni $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$ la mediana è $\frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$); oltre a questa proprietà vedremo

che se $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$ sono due termini successivi, allora $m_2n_1 - m_1n_2 = 1$.

Vedremo poi come si può applicare la Serie di Farey per risolvere un'equazione diofantea del tipo $ax-by=1$ (per questa ho scritto un algoritmo nel linguaggio di programmazione C++), e per approssimare un numero reale compreso tra zero e uno (anche per questo ho scritto un programma nel linguaggio C++).

Parlando di approssimazione diofantea, vedremo varie disuguaglianze che utilizzano la Serie di Farey. Tra esse si proverà il teorema per cui dato γ un numero irrazionale, esistono infinite frazioni h/k tali che $\left| \gamma - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{2k^2}$. Con

l'uso della Serie di Farey sarà dimostrato il Teorema di Dirichlet, il Teorema di Hurwitz. Si vedrà l'esistenza di infiniti numeri primi congrui a uno modulo quattro.

Nel secondo capitolo, tratterò una rappresentazione geometrica della Serie di Farey.

L.R. Ford pubblicò nel 1938 un articolo intitolato "Fractions" nell' "American Mathematical Monthly" e propose la rappresentazione geometrica delle frazioni, mediante cerchi, che ora si chiamano "cerchi di Ford".

La "proprietà curiosa", prima citata, viene interpretata e ridimostrata mediante i cerchi di Ford (i due cerchi tangenti corrispondono a due frazioni successive nella Serie di Farey).

Sempre con l'uso dei cerchi, è possibile risolvere l'equazione $ax-by=1$, e anche possibile trattare l'approssimazione diofantea; in particolare, il teorema già enunciato prima, che equivale a dire che, dato γ un numero irrazionale, la linea $x=\gamma$ nel piano cartesiano incontra infiniti cerchi di Ford.

Nell'ultimo capitolo ho descritto alcuni legami della Serie di Farey con altri argomenti matematici e non.

Tra gli argomenti trattati c'è l'Albero di Stern-Brocot, che è una variante della serie di Farey, estesa e disposta ad "albero". Dimostrerò anche in questo caso la "proprietà curiosa" (che, infatti, continua a valere) e altre caratteristiche. Introducendo, poi, delle matrici, costruirò un algoritmo (anch'esso tradotto nel linguaggio C++) che permette di trovare la "strada" per raggiungere una determinata frazione di Farey. Vedremo come questo algoritmo sia legato all'algoritmo di Euclide.

Infine, rappresentando le frazioni come punti nel piano cartesiano ridimostrerò le proprietà principali della Serie di Farey con l'uso del teorema di Pick.

Uscendo dall'ambito strettamente matematico si vedrà come la Serie di Farey compaia nella trattazione dell'entropia armonica, nella fillotassi, nella genesi dell'insieme di Mandelbrot. Scopriremo il legame tra le frazioni continue e la Serie di Farey.

Naturalmente esistono altre applicazioni legate alla serie di Farey, che non vengono trattate in questa tesi. Tra queste citiamo la teoria dei gaps (in connessione con lo sviluppo in frazioni continue di funzioni di variabile complessa ([24])) e l'ipotesi di Riemann ([3]).

L'argomento di questa tesi è stato scelto anche perché si presta ad essere inserito in un programma di matematica per la scuola secondaria superiore, offrendo così l'occasione di riprendere quella aritmetica che viene spesso trascurata.

Capitolo 1

La serie di Farey

1.1 Note storiche¹

John Farey nacque a Woburn nel Bedfordshire (Inghilterra) nel 1766. Fu educato alla scuola locale fino a 16 anni, poi si trasferì ad Halifax (nello Yorkshire) dove scoprì l'attitudine per la matematica, il disegno e l'agrimensura. Si sposò nel 1790 e l'anno dopo ebbe un figlio, John Farey (anch'egli noto insieme al padre come geologo). Il V duca di Bedford, Francis, aveva molte proprietà nel Bedfordshire e nel 1792 nominò Farey come amministratore delle sue terre a Woburn. Egli lavorò per dieci anni e durante questo periodo fece perizie geologiche. Nel mese di ottobre del 1808, William Smith, il miglior geologo conosciuto per lo sviluppo della stratigrafia, fu impiegato dal Duca. Grazie a Smith, Farey poté approfondire le sue conoscenze relative a terreni e rocce. Nello stesso anno il Duca morì e il fratello John allontanò Farey. Egli decise di trasferirsi a Londra dove praticò come geologo ed ispettore. Due furono i contributi importanti di Farey alla

¹ Si veda [12],[13],[14]

scienza. Il primo è nell'ambito della geologia: studiò la stratigrafia tra Londra e Brighton (dove viaggiava per andare a trovare il fratello). Il materiale è raccolto nel "General View of the Agriculture and Minerals of Derbyshire" scritto in due volumi tra il 1811 e il 1813 dallo stesso Farey. Inoltre egli scrisse circa 60 articoli tra il 1804 e il 1824, la maggior parte pubblicate nell'"Enciclopedia del Rees". Il primo articolo riguardava la velocità del suono. Nel 1816 pubblicò un articolo sulla matematica (il secondo contributo importante di Farey). Fu inviato al redattore come "proprietà curiosa delle frazioni". L'articolo consiste di quattro paragrafi: nel primo Farey nota questa proprietà ed esamina alcune tabelle di numeri interi e razionali. Nel secondo dà la definizione e indica la "proprietà curiosa". Ecco la definizione data da Farey nel suo articolo:

" per un numero fisso n , considero tutti i numeri razionali tra 0 e 1, che espressi nei numeri più bassi, hanno denominatore che non supera n . Essa sarà scritta in ordine crescente, cominciando con il più piccolo. La "proprietà curiosa" è che ogni membro della sequenza è uguale al razionale il cui numeratore è la somma dei numeratori delle frazioni ai due lati, e il denominatore è la somma dei denominatori ai due lati"(quella che per noi è la "mediante").

Nel terzo paragrafo fornisce un esempio e nell'ultimo si legge:

"Non sono informato se questa proprietà curiosa delle frazioni sia stata scoperta prima di oggi; o se ammette una dimostrazione facile o generale. Questi sono punti su cui sarei felice di conoscere i sentimenti di alcuni dei nostri lettori matematici..."

Un lettore matematico della traduzione francese del giornale era Cauchy il quale dette la dimostrazione sulle medianti ("la proprietà curiosa") già nel 1816, subito dopo la pubblicazione dell'articolo. Nonostante questo, la serie prese il nome di Farey.

Farey morì nella sua casa londinese il 6 Gennaio 1826.

1.2 La serie di Farey²

Definizione 1.1

Per ogni intero positivo n la *Serie di Farey* F_n (più precisamente successione), è l'insieme di tutte le frazioni $\frac{a}{b}$ irriducibili ($\text{MCD}(a,b)=1$) con $0 \leq a \leq b \leq n$, ordinato secondo l'ordine crescente.

Il numero "n" è detto *ordine della serie*.

Esempio 1.1

Le prime 6 sono:

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\};$$

$$F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\};$$

$$F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\};$$

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\};$$

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\};$$

$$F_6 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Osservazione 1.1

Il numero dei termini della Serie F_n è dato da:

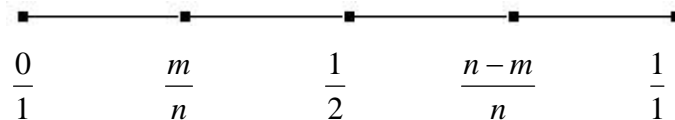
$$N=1+\sum_{k=1}^n \phi(k) \quad , \quad \text{dove la } \phi(k) \text{ è la funzione di Eulero.}$$

² Si veda [1],[2],dal [6] al [10],[12], dal [16] al [18]

Osservazione 1.2

La Serie di Farey F_n è simmetrica, nel senso che per ogni frazione m/n della serie di Farey c'è una frazione di Farey simmetrica $\frac{n-m}{n}$ rispetto a $1/2$.

Infatti se $(m,n)=1$, anche $(n-m,n)=1$.



Osservazione 1.3

Eccetto F_1 , ogni F_n ha un numero dispari di termini.

Definizione 1.2

Date due frazioni a/b e c/d , con $(a,b)=1$ e $(c,d)=1$, si chiama *mediante* la frazione che ha al numeratore la somma dei numeratori e al denominatore la somma dei denominatori:

$$\frac{a+c}{b+d}.$$

Osservazione 1.4

Se si vuole parlare di mediante tra due numeri razionali è necessario partire dalla loro forma ridotta, altrimenti la definizione porta ad un altro numero e le proprietà successive non valgono.

Viceversa, se $(a,b)=1=(c,d)$ non sempre risulta $(a+c,b+d)=1$.

Osservazione 1.5

Se $a/b < c/d$ allora $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Infatti basta moltiplicare e si ottiene:

$a(b+d) < b(a+c)$ da cui $ad < bc$ che è vera per ipotesi, e si fa la stessa cosa per l'altra disuguaglianza.

Teorema 1.1

Siano $\frac{h}{k}, \frac{l}{m}$ due termini successivi in F_n .

Allora $lk - hm = 1$.

Dimostrazione

Per induzione.

E' vero per $n=1,2,3$.

Si suppone che sia vero per la serie F_n . Sia a/b una frazione ridotta non appartenente alla serie F_n , per qualche $b > n$. La frazione data si trova tra due frazioni successive $\frac{h}{k}, \frac{l}{m}$ appartenenti alla serie di ordine n :

$\frac{h}{k} < \frac{a}{b} < \frac{l}{m}$. Per l'ipotesi induttiva vale $lk - hm = 1$. Si pone:

$$r = ak - bh > 0 \quad \text{e} \quad s = lb - am > 0, \quad (a)$$

con s e r interi non negativi.

Risolviendo le equazioni e ricordando che vale $lk - hm = 1$, si ottiene:

$$a = sh + rl \quad \text{e} \quad b = sk + rm. \quad (b)$$

In tal modo si ottiene che tutte le frazioni ridotte a/b tali che

$\frac{h}{k} < \frac{a}{b} < \frac{l}{m}$, sono della forma $\frac{a}{b} = \frac{sh + rl}{sk + rm}$, per opportuni r, s interi

positivi. Viceversa, per ogni $s, r > 0$, $s+r > 0$, si ha:

$$\frac{h}{k} < \frac{sh + rl}{sk + rm} < \frac{l}{m}, \quad (\text{come osservazione 1.5}).$$

Il più piccolo valore che b può assumere è $n+1$, che si ha se a/b appartiene alla serie di Farey di ordine $n+1$, ma non di ordine n . Allora il più piccolo valore che s e r possono assumere è $s=1, r=1$, così si ha:

$$a = h + l, \quad b = k + m.$$

La frazione $\frac{a}{b} = \frac{h+l}{k+m}$ (la medianta), soddisfa il teorema. Infatti:

$$ak - hb = (h+l) \cdot k - h(k+m) = lk - hm = 1 \quad (\text{per l'ipotesi induttiva})$$

$$lb - am = l(k+m) - m(h+l) = lk - hm = 1 \quad (\text{per l'ipotesi induttiva})$$

CVD

Osservazione 1.6

Con il teorema precedente si ha: se $\frac{h}{k}, \frac{l}{m}$ sono termini successivi in F_n , e se il termine a/b è in F_{n+1} con $\frac{h}{k}, \frac{a}{b}, \frac{l}{m}$ successivi in F_{n+1} , allora a/b è la medianta di h/k e l/m .

Si è così dimostrato che le frazioni che appartengono alla serie di Farey di ordine $n+1$ ma non di ordine n , sono medianti di frazioni della serie di Farey di ordine n .

Osservazione 1.7

Se $\frac{m}{n}$ e $\frac{m_1}{n_1}$ sono due frazioni adiacenti, allora la differenza è uguale al reciproco del prodotto dei due denominatori:

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m}{n} = \frac{1}{n \cdot n_1}.$$

Si ottiene direttamente applicando il teorema 1.1.

Teorema 1.2

Sono equivalenti le seguenti proprietà:

1. Siano $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$ due termini successivi in F_n , allora $m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1$.
2. Presi $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}$ tre termini successivi in F_n , quello centrale è la

mediante degli altri due:

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 + m_3}{n_1 + n_3}$$

Dimostrazione

$$1 \Rightarrow 2$$

Si suppone che siano vere le due identità:

$$m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1 \quad (a)$$

$$m_3 n_2 - m_2 n_3 = 1$$

sottraendo e risistemando i membri si ottiene:

$$(m_3 + m_1)n_2 = (n_3 + n_1)m_2 \quad (b)$$

$$\text{da cui si ricava la 2: } \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 + m_3}{n_1 + n_3}.$$

$$2 \Rightarrow 1$$

Per induzione su n:

$$\text{L'ipotesi è: } \frac{m_i}{n_i} = \frac{m_{i-1} + m_{i+1}}{n_{i-1} + n_{i+1}} \text{ in ogni } F_n \quad (c)$$

Per F_2 è verificata la proprietà 1. Ora si suppone vera per F_n , $n > 2$ e si dimostra per F_{n+1} .

Per ipotesi induttiva per F_n vale la $m_i n_{i-1} - m_{i-1} n_i = 1$ e riscrivendo la formula (c) si ha $(m_{i+1} + m_{i-1}) n_i = m_i (n_{i+1} + n_{i-1})$. Sottraendo tra loro queste due ultime formule si ottiene : $m_{i+1} n_i - m_i n_{i+1} = 1$ che è quello che si voleva. CVD.

Teorema 1.3

Siano $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$ due termini successivi in F_n .

Allora $n_1 + n_2 \geq n + 1$.

Dimostrazione

Si può supporre $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$. Per l'osservazione 1.5 sappiamo che la

mediante si trova tra due frazioni $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} < \frac{m_2}{n_2}$.

Se fosse $n_1+n_2 \leq n$ allora la frazione mediana sarebbe un termine della sequenza posto in mezzo a due frazioni che per ipotesi erano successive. Deve quindi essere $n_1+n_2 \geq n+1$. CVD.

Teorema 1.4

Siano a, b interi, tali che $(a,b)=1$. Allora, l'equazione Diofantea

$$ax+by=1$$

ammette soluzione.

Dimostrazione

Si può assumere che $0 < a < b$. Allora, poiché $(a,b)=1$, a/b è una frazione ridotta quindi appare in una qualche Sequenza di Farey (ad esempio in quella di ordine b , F_b).

Si consideri ora una frazione h/k precedente alla frazione a/b : $\frac{h}{k} < \frac{a}{b}$.

Per il Teorema 1.1 si ha $ak-bh=1$.

Perciò $x=k$ e $y=-h$, è una soluzione cercata. CVD

Corollario

Siano a, b interi, tali che $(a,b)=1$. Allora, l'equazione Diofantea

$$ax+by=c$$

ammette soluzione per ogni intero.

Dimostrazione

Si considera $ax_0+by_0=1$. Allora si può scrivere $a(x_0c)+b(y_0c)=c$, e quindi $x=x_0c$, $y=y_0c$ è la soluzione cercata. CVD

Algoritmo 1.1³

Si descrive un procedimento costruttivo per risolvere $ax-by=1$ con $a < b$.

Si introduce il determinante $\begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix}$ il cui segno stabilisce se $\frac{x}{y} > \frac{a}{b}$ (il

determinante è positivo) o $\frac{x}{y} < \frac{a}{b}$ (il determinante è negativo). Se è nullo la

frazione x/y è la frazione a/b (o un suo multiplo).

Poiché $\frac{0}{1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{1}$ si trova $\begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} < 0$, $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} > 0$.

Si consideri la medianta $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

1. Se $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{vmatrix} > 0$ allora $0/1 < a/b < 1/2$.

Si considera ancora la medianta tra $0/1$ e $1/2$ e si calcola il determinante avendo sostituito $1/2$ con $1/3$.

Se è positivo allora la frazione sarà a sinistra della medianta considerata ($0/1 < a/b < 1/3$), se è negativo sarà $1/3 < a/b < 1/2$ e così via;

2. Se $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{vmatrix} < 0$ allora $1/2 < a/b < 1/1$.

Si considera ancora la medianta (che sarà $2/3$) e si calcola il determinante, se è positivo la frazione sarà collocata a sinistra se è negativo a destra.

3. Dalla dimostrazione del Teorema 1.1 segue che, dopo un numero finito di

passi il determinante è nullo: $\begin{vmatrix} m & a \\ n & b \end{vmatrix} = 0$

allora la soluzione è data dalla frazione che precedeva m/n .

Esempio 1.2

Si vuole risolvere $78x+122y=14$ (che è un caso più generale), deve essere $(a,b)=1$, quindi l'espressione diventa $39x+61y=7$. Per il corollario del Teorema 1.4 si considera l'equazione $39x_0+61y_0=1$. Si parte con $39/61$ ($39 < 61$).

$0/1 < 39/61 < 1/1$.

³ Si veda [10]

La mediant è $1/2$, quindi $\begin{vmatrix} 1 & 39 \\ 2 & 61 \end{vmatrix} = -17 < 0$, quindi

$1/2 < 39/61 < 1/1$. La mediant è $2/3$, quindi si calcola: $\begin{vmatrix} 2 & 39 \\ 3 & 61 \end{vmatrix} = 5 > 0$, quindi

$1/2 < 39/61 < 2/3$. La mediant è $3/5$ da cui $\begin{vmatrix} 3 & 39 \\ 5 & 61 \end{vmatrix} = -12 < 0$

$3/5 < 39/61 < 2/3$. La mediant è $5/8$: $\begin{vmatrix} 5 & 39 \\ 8 & 61 \end{vmatrix} = -7 < 0$, allora

$5/8 < 39/61 < 2/3$. La mediant è $7/11$: $\begin{vmatrix} 7 & 39 \\ 11 & 61 \end{vmatrix} = -2 < 0$

$7/11 < 39/61 < 2/3$. La mediant è $9/14$: $\begin{vmatrix} 9 & 39 \\ 14 & 61 \end{vmatrix} = 3 > 0$

$7/11 < 39/61 < 9/14$. La mediant è $16/25$: $\begin{vmatrix} 16 & 39 \\ 25 & 61 \end{vmatrix} = 1 > 0$

$7/11 < 39/61 < 16/25$. La mediant è $23/36$: $\begin{vmatrix} 23 & 39 \\ 36 & 61 \end{vmatrix} = -1 < 0$

$16/25 < 39/61 < 23/36$. La mediant è $39/61$: $\begin{vmatrix} 39 & 39 \\ 61 & 61 \end{vmatrix} = 0$.

Una soluzione è data dalla coppia $(x_0, y_0) = (-25, 16)$, ma si potrebbe considerare anche la coppia $(x_0, y_0) = (36, -23)$. Per trovare la soluzione dell'equazione iniziale basta moltiplicare il risultato per 7.

Questo algoritmo può essere eseguito da un calcolatore. Qui di seguito ci sono le istruzioni nel linguaggio di programmazione C++.

```
# include <iostream>

main()
{int a,b,d,x,y;
  int u=1, v=1, w=1, z=0;

  cout<<"inserisci i coefficienti a,b dell'equazione ax-
  by=1"<<' \n' ;
  cout<<"a=" ;
  cin>>a;
  cout<<"b=" ;
  cin>>b;

do
```

```

{x=u+w;
y=v+z;
d=y*b-x*a;
if (d>0) {u=x ; v=y ;}
else if (d<0){w=x; z=y;}}
while (d!=0);

cout<<"i valori di x e y sono"<<"\n";
cout<<"x="<<w;
cout<<"\n"<<"y="<<z<<"\n";
}

```

Osservazione 1.8

Ecco un modo per costruire F_{n+1} partendo dalla sequenza precedente F_n .

Si prenda $F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$. Per ottenere la F_2 si inserisce la mediana delle due

frazioni che è $\frac{1}{2}$. Per ottenere la F_3 basta inserire le mediane (che in questo

caso sono 2) : $\frac{0+1}{1+2} = \frac{1}{3}; \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$ e quindi si trova $F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$. Per

ottenere la F_4 si aggiungono 2 frazioni, poi per ottenere la F_5 se ne aggiungeranno 4. La regola è quindi quella di aggiungere tutte le mediane tra due coppie di frazioni successive in F_{n-1} , scartando quelle con il denominatore maggiore di n . Se n è un numero primo p , allora il numero di frazioni da aggiungere a F_{p-1} per ottenere F_p è $p-1$: in generale, il numero delle frazioni da aggiungere per passare da una certa F_n a quella successiva è dato dalla funzione di Eulero $\phi(n+1)$. Usando questo procedimento si trovano tutte le frazioni, perché tutte sono mediane.

1.3 Approssimazioni

1.3.1 Approssimazione di un numero reale ⁴

Ora si considera l'uso della serie di Farey per l'approssimazione di un numero reale compreso tra 0 e 1. Il procedimento è simile a quello usato nell'esempio 1.2.

Sia k un numero reale, $0 \leq k \leq 1$, e sia F_n la serie di Farey con n assegnato. Si vuole approssimare al meglio k con una frazione della serie di Farey.

Si devono determinare le due frazioni che "racchiudono" il numero k , fino a trovare quella che lo approssima meglio.

La procedura è la seguente:

1. Se $k=0$ allora $k=0/1$;
2. Se $k=1$ allora $k=1/1$;
3. Se $0 < k < 1$ si deve vedere se k si trova alla destra o alla sinistra della mediana tra i primi due termini. Si può scrivere:

$$k = (1-k) \cdot 0 + k \cdot 1$$

$$1 = (1-k) \cdot 1 + k \cdot 1$$

si pone $q_1=1-k$ e $r_1=k$, si ha

$$\frac{k}{1} = \frac{q_1 \cdot 0 + r_1 \cdot 1}{q_1 \cdot 1 + r_1 \cdot 1}.$$

Caso 1. $q_1 > r_1$ allora mi sposto alla sinistra:

$$\frac{k}{1} = \frac{(q_1 - r_1) \cdot 0 + r_1 \cdot (0 + 1)}{(q_1 - r_1) \cdot 1 + r_1 \cdot (1 + 1)}$$

In questo modo k è compreso tra $0/1$ e $1/2$.

Si pone ora $q_2=q_1-r_1$ e $r_2=r_1$.

Caso 2. $q_1 < r_1$ allora mi sposto alla destra:

$$\frac{k}{1} = \frac{q_1 \cdot (0 + 1) + (r_1 - q_1) \cdot 1}{q_1 \cdot (1 + 1) + (r_1 - q_1) \cdot 1}$$

In questo modo k è compreso tra $1/2$ e $1/1$

Si pone ora $q_2=q_1$ e $r_2=r_1-q_1$.

⁴ Si veda [17]

Ora con q_2 e r_2 trovati si applica lo stesso procedimento considerando i due casi: $q_2 < r_2$ oppure $q_2 > r_2$ cambiando gli intervalli in considerazione.

Ogni volta che $q_s < r_s$ si considera l'intervallo alla destra, mentre se $q_s > r_s$ si considera quello a sinistra.

Il procedimento si itera fino a quando si trova p tale che $q_p = r_p$. In questo caso si ha:

$$k = \frac{q_p a + r_p c}{q_p b + r_p d} \text{ e quindi } a/b < k < c/d.$$

Allora

$$k = \frac{a + c}{b + d}.$$

Se non si trova $q_p = r_p$ allora, si può solo collocare k tra due frazioni contigue in F_n . Variando n esse si possono prendere vicine quanto si vuole.

Esempio 1.3

Trovare la migliore approssimazione per $k=0.23$ nella serie di Farey con $n=4$.

Si considerano esattamente tutti i passaggi fatti nella spiegazione.

$$0.23 = (1 - 0.23) \cdot 0 + 0.23 \cdot 1$$

$$1 = (1 - 0.23) \cdot 1 + 0.23 \cdot 1$$

$$q_1 = 1 - 0.23 = 0.77; r_1 = 0.23$$

$$\text{E' il caso 1, cioè } q_1 > r_1 \text{ quindi } \frac{0.23}{1} = \frac{(0.77 - 0.23) \cdot 0 + 0.23 \cdot (0 + 1)}{(0.77 - 0.23) \cdot 1 + 0.23 \cdot (1 + 1)}$$

$$\text{Si ha } q_2 = 0.54 \text{ e } r_2 = 0.23$$

Ora si ha $q_2 > r_2$ quindi:

$$\frac{0.23}{1} = \frac{(0.54 - 0.23) \cdot 0 + 0.23 \cdot (0 + 1)}{(0.54 - 0.23) \cdot 1 + 0.23 \cdot (1 + 2)}$$

$$q_3 = 0.54 - 0.23 = 0.31$$

$$r_3 = r_2 = 0.23$$

$$q_3 > r_3 \text{ quindi } \frac{0.23}{1} = \frac{(0.31 - 0.23) \cdot 0 + 0.23 \cdot (0 + 1)}{(0.31 - 0.23) \cdot 1 + 0.23 \cdot (1 + 3)}$$

$$q_4 = 0.08$$

$$r_4 = 0.23$$

Non ho trovato $q_p=r_p$ per $n=4$. Posso comunque dire che un'approssimazione per 0.23 è data dalla frazione:

$$0/1 \leq k \leq 1/3, k = (a+c)/(b+d) = (0+1)/(1+3) = 1/4.$$

Se si considera F_5 allora troverei la frazione $(0+1)/(1+4) = 1/5$ che approssima k .

Algoritmo 1.2

Anche questo algoritmo può essere affidato a un calcolatore. Le istruzioni nel linguaggio C++ sono le seguenti:

```
# include <iostream>

main()
{
  double q,r;
  double k, errore;
  int a,b,c,d,num,den;

  cout<<"dammi il numero  $0 \leq k \leq 1$  da approssimare con una
frazione di Farey";
  cin>>k;
  cout<<"inserisci l'errore che posso accettare ";
  cin>>errore;

  a=0, b=1, c=1, d=1;

  if (k==0)
    cout<<"l' approssimazione per"<<k<<" è 0/1";
  if (k==1)
    cout<<"\n"<<"l' approssimazione per"<<k<<" è 1/1";
  else
  {
    q=1-k;
    r=k;
    num=a+b;
    den=c+d;
    while(q-r>errore || r-q>errore)
    {
      if (q>r)
      {
        b=a+b;
        d=c+d;
        q=q-r;
        num=a+b;
        den=c+d;
      }
    }
  }
}
```

```

        else
        {
            a=a+b;
            c=c+d;
            r=r-q;
            num=a+b;
            den=c+d;
        }
    }
}

cout<<"la frazione di Farey che approssima il numero
"<<k<<"è";
cout<<" "<<num<<"/"<<den<<endl;;
}

```

1.3.2 Approssimazione Diofantea⁵

Osservazione 1.9

Se a/b e a'/b' sono due frazioni successive della sequenza di Farey F_n .

Allora si ha:

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{a+a'}{b+b'} \right| = \frac{1}{b(b+b')} \leq \frac{1}{b(n+1)}$$

$$\left| \frac{a'}{b'} - \frac{a+a'}{b+b'} \right| = \frac{1}{b'(b+b')} \leq \frac{1}{b'(n+1)}$$

Dimostrazione

Sia $a/b < a'/b'$, si ottiene immediatamente:

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a+a'}{b+b'} = \frac{ba'-ab'}{b'(b+b')} = \frac{1}{b'(b+b')} \leq \frac{1}{b'(n+1)}$$

$$\frac{a+a'}{b+b'} - \frac{a}{b} = \frac{ba'-ab'}{b(b+b')} = \frac{1}{b(b+b')} \leq \frac{1}{b(n+1)}$$

⁵ Si veda [2] e dal [6] al [9]

Dove nell'ultima uguaglianza si è usato il Teorema 1.1 e la minorazione è data dal Teorema 1.3. CVD

Teorema 1.5

Sia n un intero positivo e sia ξ reale irrazionale; allora esiste una frazione a/b tale che

$0 < b \leq n$, $(a,b)=1$ e

$$\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b(n+1)}.$$

Dimostrazione

Non è restrittivo supporre $0 < \xi < 1$.

Si prendano tutte le frazioni di Farey di ordine n ; siano a/b e a'/b' contigue in F_n e $a/b < \xi < a'/b'$. Si consideri anche la mediant.

Allora sarà

$$\frac{a}{b} < \xi < \frac{a+a'}{b+b'} \quad \text{o} \quad \frac{a+a'}{b+b'} < \xi < \frac{a'}{b'}.$$

Sia vero il primo caso, quindi si possono usare le disuguaglianze date dall'osservazione precedente:

$$\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \left| \frac{a+a'}{b+b'} - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{1}{b(n+1)}.$$

CVD

Corollario

Dato $\eta \geq 1$ e ξ reale, allora esiste una frazione a/b tale che:

$(a,b)=1$, $0 < b \leq \eta$

$$\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b\eta}.$$

Dimostrazione

Si dimostra come nel caso precedente con $n=[\eta]$. Infatti:

$$\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b([\eta] + 1)} < \frac{1}{b\eta}$$

Osservazione 1.10

Dato $n \geq 1$. Se l/m è una frazione ridotta con denominatore $m > n$, allora esiste sempre h/k con $k \leq n$, tale che

$$\left| \frac{l}{m} - \frac{h}{k} \right| \leq \frac{1}{(n+1)k}.$$

Teorema 1.6 (Teorema di Dirichlet)

Se ξ un numero irrazionale, allora ci sono infinite frazioni a/b tali che

$$\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^2}.$$

Dimostrazione

La seguente dimostrazione è fatta usando un metodo diverso da quello originario di Dirichlet, cioè usando le frazioni di Farey.

Per ogni $n=1,2,3,\dots$ si può trovare (per il Teorema 1.5) un a_n e un b_n tali che:

$$\left| \xi - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n(n+1)}.$$

Si suppone per assurdo che le frazioni $\frac{a_n}{b_n}$ siano in numero finito. Si

prenda il più piccolo dei numeri $\left| \xi - \frac{a_n}{b_n} \right|$, sia quello con $n=k$. Quindi si

ottiene:

$$\left| \xi - \frac{a_n}{b_n} \right| \geq \left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right| \quad \forall n=1,2,\dots$$

Ma $\left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right| > 0$ poiché ξ è irrazionale, si può quindi trovare un n

sufficientemente grande tale che:

$$\frac{1}{n+1} < \left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right|.$$

Questo produce una contraddizione, infatti:

$$\left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right| \leq \left| \xi - \frac{a_n}{b_n} \right| \leq \frac{1}{b_n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} < \left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right|. \quad \text{CVD}$$

Osservazione 1.11

La condizione che ξ sia irrazionale è necessaria. Se infatti fosse razionale,

$\xi = \frac{r}{s}$, $s > 0$, allora se a/b è una frazione tale che $\frac{a}{b} \neq \frac{r}{s}$, $b > s$ si ha

$$\left| \frac{r}{s} - \frac{a}{b} \right| = \frac{|rb - as|}{sb} \geq \frac{1}{sb} > \frac{1}{b^2}.$$

Quindi tutte le a/b per le quali vale $\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^2}$ hanno denominatore $b \leq s$, e sono quindi in numero finito.

Teorema 1.7

Sia γ un numero irrazionale, allora esistono infinite frazioni h/k tali che:

$$\left| \gamma - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{2k^2}.$$

Dimostrazione

Siano a/b e c/d termini successivi della serie F_n , con $n > 1$, $b \neq d$.

Si supponga di avere $\frac{a}{b} < \gamma < \frac{c}{d}$. Si vuole dimostrare che vale:

$$\gamma - \frac{a}{b} < \frac{1}{2b^2} \quad \text{o} \quad \frac{c}{d} - \gamma < \frac{1}{2d^2}. \quad (1)$$

Per assurdo valgano entrambe le:

$$\gamma - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{2b^2} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} - \gamma \geq \frac{1}{2d^2} \quad (2)$$

Allora $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2} = \frac{b^2 + d^2}{2b^2d^2}$.

Dal Teorema 1.1 otteniamo $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}$, quindi:

$$0 \geq \frac{b^2 + d^2}{2b^2d^2} - \frac{1}{bd} = \frac{(b-d)^2}{2b^2d^2}.$$

Non può essere negativa, quindi è nulla, contraddizione, quindi è vera la (1). CVD

Teorema 1.8 (Teorema di Hurwitz)

Per ogni γ irrazionale esistono infinite frazioni h/k tali che:

$$\left| \gamma - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}k^2}.$$

Dimostrazione

Sia γ compreso tra le due frazioni successive m_1/n_1 e m_2/n_2 in F_n . Si

prenda la medianta $\frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$ (che apparterrà ad una Serie di Farey

successiva), ora γ potrà essere da una parte o dall'altra della medianta.

Si suppone che: $\frac{m_1}{n_1} < \gamma < \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} < \frac{m_2}{n_2}$.

Per assurdo siano vere le seguenti disuguaglianze:

$$\gamma - \frac{m_1}{n_1} \geq \frac{1}{\sqrt{5}n_1^2}; \quad \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} - \gamma \geq \frac{1}{\sqrt{5}(n_1 + n_2)^2}; \quad \frac{m_2}{n_2} - \gamma \geq \frac{1}{\sqrt{5}n_2^2}.$$

$$1^0 + 2^0: \frac{1}{n_1(n_1 + n_2)} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{(n_1 + n_2)^2} \right)$$

$$1^0 + 3^0: \frac{1}{n_1 \cdot n_2} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} \right)$$

devono essere vere entrambe, si deve cioè risolvere il sistema di

$$\text{equazioni} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{xy} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \\ \frac{1}{x(x+y)} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \right) \end{array} \right.$$

Sviluppando i termini e sommando si ottiene

$$\sqrt{5}(x^2 + 2xy) \geq 3x^2 + 2y^2 + 2xy \text{ che diventa}$$

$$[(1 - \sqrt{5})x + 2xy]^2 \leq 0. \text{ Non può essere nulla perché } \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \text{ è}$$

irrazionale, non è negativa perché è un quadrato quindi si ha una contraddizione. Le infinite frazioni si ottengono all'aumentare di n. CVD

Teorema 1.9

Se n e A sono interi positivi tali che $n \mid A^2 + 1$, $n \geq 2$, allora esistono degli interi s, t, tali che $n = s^2 + t^2$.

Dimostrazione

Si prenda $N = [\sqrt{n}] < n$. Per l'ipotesi si ha $(n, A) = 1$. Perciò in accordo con l'osservazione 1.10 esiste una frazione $\frac{r}{s}$ ridotta tale che:

$$\left| \frac{A}{n} - \frac{r}{s} \right| \leq \frac{1}{(N+1)s} \quad 0 < s \leq N.$$

Questo produce

$$|As - rn| \leq \frac{n}{N+1} = \frac{n}{[\sqrt{n}] + 1} < \sqrt{n}.$$

Se si prende $t = As - rn$ si ha:

$$t^2 + s^2 = (As - rn)^2 + s^2 = s^2(A^2 + 1) - 2Asrn + r^2n^2$$

e così : $t^2 + s^2 \equiv 0 \pmod{n}$.

D'altra parte:

$$t^2 + s^2 < (\sqrt{n})^2 + ([\sqrt{n}])^2 \leq 2n .$$

Così $t^2 + s^2$ è un multiplo positivo di n ma più piccolo di $2n$.

Questo lascia solo una possibilità:

$$n = t^2 + s^2 .$$

CVD.

Corollario

Se $n | A^2 + B^2$, $n \geq 2$ e $(A, B) = 1$ allora esiste s, t con $n = s^2 + t^2$.

Dimostrazione

Si ha l'identità algebrica:

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2$$

Poichè $(A, B) = 1$, si possono prendere C e D tali che $AD - BC = 1$:

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + 1.$$

Se $n | A^2 + B^2$, allora $n | T^2 + 1$ dove $AC + BD = T$. Quindi per il teorema 1.9 si ha che n è della forma $t^2 + s^2$. CVD

Teorema 1.10

Esistono infiniti numeri primi $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Dimostrazione

Si suppone che i primi p , $p \equiv 1 \pmod{4}$ siano in numero finito: $5, 13, 17, \dots, p$. Si formi il numero $N = (2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot \dots \cdot p)^2 + 1$ con $N \equiv 1 \pmod{4}$.

Ma non è primo perché tutti i primi congrui a $1 \pmod{4}$ sono più piccoli di N .

Inoltre esso non ha fattori pari, perché è un numero dispari. Così ogni fattore di N sarà della forma $a^2 + b^2$, perché esso divide un numero della forma $A^2 + 1$. Esso è congruo a $1 \pmod{4}$, perché ogni quadrato è congruo a $1 \pmod{4}$ o congruo a $0 \pmod{4}$, e poiché $a^2 + b^2$ è

dispari, $a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod{4}$. Di conseguenza ogni primo divisore di N è congruo a 1 (mod 4). Tale numero è un divisore primo diverso da 5, 13, ..., p , poiché questi non dividono N .

Assurdo.

Quindi i primi $p \equiv 1 \pmod{4}$ sono infiniti. CVD

1.4 Sezioni di Farey⁶

Invece di considerare la rappresentazione dei numeri nella retta reale, si consideri un cerchio C la cui circonferenza abbia lunghezza uno. Si consideri un punto scelto a caso nel cerchio, che sarà l'origine O . Se x è un numero reale $0 \leq x < 1$ si denoti con P_x il punto lungo la circonferenza che dista x dall'origine (misurato in senso orario). In questo modo si possono rappresentare tutti i numeri, facendo però attenzione al fatto che tutti i numeri che differiscono per un intero sono rappresentati dallo stesso punto.

Si prenda la Serie di Farey F_n e si costruiscano tutte le medianti di due termini

successivi $\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'}$. In particolare si considerino i primi due termini $\frac{0}{1}, \frac{1}{n}$ e gli

ultimi due $\frac{n-1}{n}, \frac{1}{1}$. Le rispettive medianti sono: $\frac{0+1}{1+n} = \frac{1}{n+1}$ e

$$\frac{n-1+1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

La generica mediante $\mu = \frac{h+h'}{k+k'}$ è rappresentata dal punto P_μ .

In questo modo il cerchio è diviso in archi, detti *Archi di Farey*, che hanno per estremi due medianti che provengono da tre frazioni successive in F_n e ciascun arco contiene un *Punto di Farey* (cioè la rappresentazione di un punto appartenente alla Serie F_n).

L'insieme degli archi di Farey è detto *Sezione di Farey*.

⁶ Si veda [5]

Teorema 1.11

Nella sezione di Farey di ordine $n > 1$, ogni arco di Farey che contiene il punto che rappresenta h/k , ha lunghezza compresa tra $\frac{1}{k(2n-1)}$ e $\frac{1}{k(n+1)}$.

Dimostrazione

Sia $P_{h/k}$ il punto di Farey della frazione h/k . Siano h_1/k_1 e h_2/k_2 in F_n , una precedente e l'altra successiva alla frazione h/k . Allora l'arco intorno a $P_{h/k}$ è composto da due parti le cui lunghezze sono:

$$\frac{h}{k} - \frac{h+h_1}{k+k_1} = \frac{1}{k(k+k_1)} \quad \text{e} \quad \frac{h+h_2}{k+k_2} - \frac{h}{k} = \frac{1}{k(k+k_2)}.$$

Poiché $k \neq k_1$ ed entrambi sono minori di n , si ha $k+k_1 < 2n$, $k+k_1 \leq 2n-1$ analogamente per k_2 , inoltre per il Teorema 1.3 si ha $k+k_1 \geq n+1$. Quindi

$$\text{sostituendo si ottiene: } \frac{1}{k(2n-1)} \leq \text{lung. arco} \leq \frac{1}{k(n+1)}. \quad \text{CVD}$$

Capitolo 2

Circoli di Ford

2.1 Note storiche⁷

Gli antichi non avevano un simbolismo per i calcoli algebrici, ma usavano solo argomenti geometrici; ad esempio il prodotto di due numeri era rappresentato dall'area di un rettangolo i cui lati avevano lunghezze date dai due numeri in questione. L'algebra e la geometria si separano con l'introduzione sistematica delle nozioni algebriche avvenuta nel XVI secolo; nel secolo successivo c'è "l'invenzione" della geometria analitica e si inizia ad osservare che un problema geometrico può essere risolto anche algebricamente. Tuttavia i matematici separano le due discipline studiandole in modo indipendente. Poco più tardi si inizierà a scoprire che l'algebra e la geometria sono collegate e questo porta a risultati semplici e importanti. Uno di questi collegamenti è dato dai circoli di Ford che sono la rappresentazione geometrica della Serie di Farey, le cui proprietà risultano illustrate in modo sorprendente.

⁷ Si veda [15]

Lester Randolph Ford (29 ottobre 1886, 7 Marzo 1975) nel 1938 pubblica “Frazioni”, nel mensile “American Mathematical Monthly”. All’inizio dell’articolo, egli si rivolge ai lettori per portare l’attenzione allo sviluppo delle frazioni di Farey. Egli propone di studiarle in un nuovo modo cioè con una rappresentazione geometrica, costruendo per la prima volta i Circoli di Ford. Questo è uno dei suoi lavori ma non l’unico. Infatti studiò le Funzioni discontinue, lavorò nel dipartimento matematico dell’Università del Missouri-Colombia nel 1912. Il suo contributo nella matematica fu così importante che fu istituito nel 1964 il “Lester R. Ford Award”, premio assegnato agli autori degli articoli pubblicati nel mensile “The American Mathematical Monthly” o nel “Mathematics Magazine”. Inoltre, egli fu redattore dello stesso mensile americano dal 1942 al 1946, e tra il 1947 e il 1948 fu il presidente dell’associazione “Mathematical Association of America”. Insieme al suo ultimo figlio, che porta lo stesso nome, studiò altri aspetti della matematica. I circoli di Ford sono dunque una rappresentazione e una visualizzazione pratica della serie di Farey.

2.2 I Circoli di Ford⁸

Definizione 2.1

Si consideri un sistema di riferimento ortonormale x, y .

Dati due interi h, k , (con $\text{MCD}(h,k)=1$, $k \neq 0$) il cerchio di raggio $\frac{1}{2k^2}$ e

centrato in $\left(\frac{h}{k}; \frac{1}{2k^2}\right)$ è il *Cerchio (o circolo) di Ford* associato alla frazione

h/k .

Esso sarà indicato $C(h/k)$.

⁸ Si veda [4],[8],[12],[18],[19]

Si osserva che tutti questi cerchi sono tangenti all'asse delle ascisse. Conviene considerare anche la frazione impropria $1/0$. Essa sarà rappresentata dal cerchio improprio $C(1/0)$ che è la retta $y=1$ (sarà l'unico "cerchio" di Ford non tangente all'asse x).

Teorema 2.1

Due cerchi di Ford associati a due frazioni distinte non si intersecano mai. Sono tangenti se e solo se esiste n , per cui le frazioni sono contigue in F_n .

Dimostrazione

Si prendano i cerchi $C(h/k)$ e $C(l/m)$, di centro:

$$\left(\frac{h}{k}, \frac{1}{2k^2}\right) \text{ e } \left(\frac{l}{m}, \frac{1}{2m^2}\right) \text{ con } hm-kl \neq 0.$$

Si consideri la figura 2.1

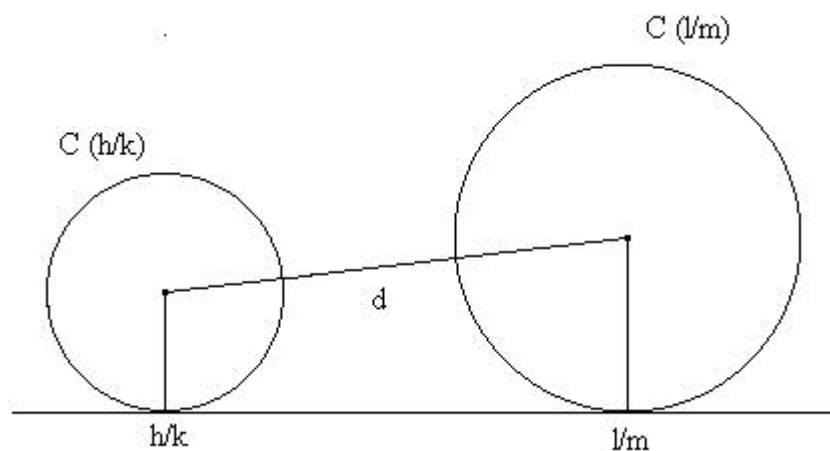


Figura 2.1

Il quadrato della distanza tra i centri è dato da:

$$d^2 = \left(\frac{l}{m} - \frac{h}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2k^2}\right)^2$$

Sia s la somma dei due raggi:

$$s^2 = (r_1 + r_2)^2 = \left(\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2m^2}\right)^2, \text{ poichè:}$$

$$d^2 - s^2 = \left(\frac{h}{k} - \frac{l}{m}\right)^2 - \frac{1}{k^2 m^2} = \frac{(hm - kl)^2 - 1}{k^2 m^2}.$$

Poiché il termine nella parentesi è sempre maggiore o uguale a 1, si ha $d^2 - s^2 \geq 0$, quindi i cerchi non si intersecano mai. Essi sono tangenti se e solo se vale l'uguaglianza, cioè se e solo se $|hm - kl| = 1$. In questo caso, per il Teorema 1.2, h/k e l/m sono due frazioni successive di una qualche Serie di Farey. CVD

Osservazione 2.1

Se i cerchi $C(h/k)$ e $C(l/m)$ sono tangenti, allora i punti di tangenza hanno coordinate razionali.

Se $h_1/k_1, h_2/k_2$ e h_3/k_3 sono tre termini successivi della serie di Farey allora i cerchi $C(h_1, k_1)$ e $C(h_2/k_2)$ sono tangenti in

$$\alpha_1 = \left(\frac{h_2}{k_2} - \frac{k_1}{k_2(k_2^2 + k_1^2)}, \frac{1}{k_2^2 + k_1^2} \right)$$

e i cerchi $C(h_2, k_2)$ e $C(h_3, k_3)$ sono tangenti in

$$\alpha_2 = \left(\frac{h_2}{k_2} - \frac{k_3}{k_2(k_2^2 + k_3^2)}, \frac{1}{k_2^2 + k_3^2} \right), \text{ come in fig.2.3}$$

Inoltre α_1 giace sulla semicirconferenza di diametro $(h_1/k_1, 0) - (h_2/k_2, 0)$ e α_2 sulla semicirconferenza di diametro $(h_2/k_2, 0) - (h_3/k_3, 0)$.

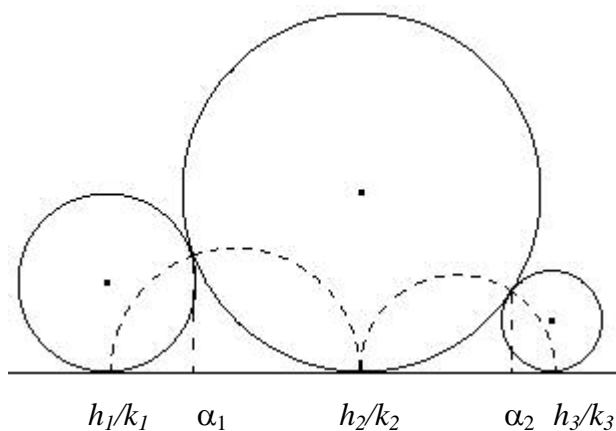


Figura 2.2

Teorema 2.2

Se i cerchi di Ford corrispondenti alle due frazioni a/b e c/d si toccano, allora il cerchio che corrisponde alla mediante, $(a+c)/(b+d)$, è tangente ad entrambi (fig.2.4).

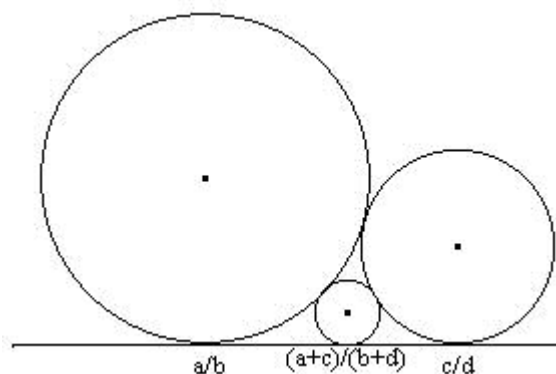


Figura 2.3

Dimostrazione

Si è visto nel Teorema 2.1 che due cerchi sono tangenti se e solo se $bc-ad=1$ allora si può anche scrivere:

$$(b+d)c-(a+c)d=1 \text{ e } (a+c)b-(b+d)a=1,$$

quindi tra i due cerchi dati ne esiste un altro tangente. Cioè il cerchio

mediante $C\left(\frac{a+c}{b+d}\right)$ è tangente a $C(a/b)$, ed è tangente a $C(c/d)$. CVD

Osservazione 2.2

Usando il Teorema precedente è possibile costruire molti altri cerchi tangenti e medianti (figure 2.5). Quindi ogni cerchio ha infiniti cerchi tangenti.

In questo modo si definiscono dei “triangoli” limitati da archi di cerchi mutuamente tangenti. Essi sono chiamati *Triangoli Circolari*.

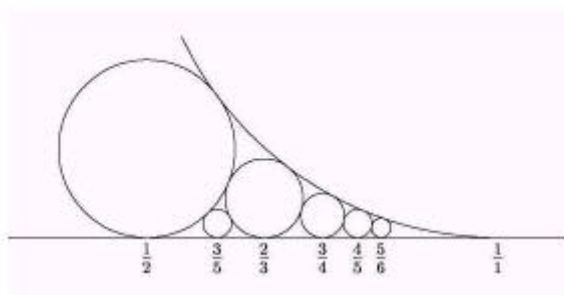


Figura 2.4.a

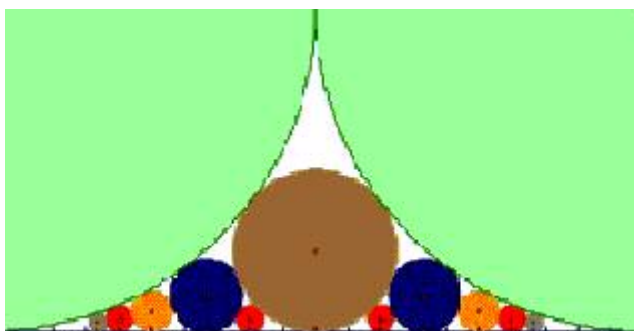


Figura 2.4.b

Teorema 2.3

Ogni cerchio di Ford ha infiniti cerchi di Ford tangenti.

Dimostrazione

E' possibile dimostrare il teorema pensando alle frazioni di Farey, cioè dimostrando che $\frac{h}{k}$ ha infinite frazioni adiacenti. Si sa che una frazione tangente (successiva) esiste e che $xh - yk = 1$ ha sempre soluzione negli interi. L'equazione data ha infinite soluzioni ma si vuole trovare l'espressione delle adiacenti. Si suppone di avere due frazioni $\frac{H}{K}$ e $\frac{H_n}{K_n}$ irriducibili entrambe adiacenti a $\frac{h}{k}$ (dalla stessa parte):

$$hK - Hk = 1$$

$$hK_n - H_n k = 1$$

Sottraendo:

$$h(K - K_n) - k(H - H_n) = 0$$

cioè

$$h(K - K_n) = k(H - H_n)$$

poiché le frazioni, per ipotesi, erano irriducibili, si ha

$$k \text{ divide } K - K_n$$

$$h \text{ divide } H - H_n.$$

Diventa $K_n = K + nk$ con n intero positivo.

Sostituendo:

$$-hnk = k(H - H_n)$$

cioè

$$H_n = H + nh$$

Quindi tutte le frazioni adiacenti a $\frac{h}{k}$ possono essere espresse nella

forma $\frac{H_n}{K_n} = \frac{H + nh}{K + nk}$, $n=0, 1, 2, \dots$

In questo modo si ottiene una sequenza infinita di cerchi di Ford. CVD

2.3 Approssimazione Diofantea

Teorema 2.4⁹

Sia γ un numero irrazionale, allora esistono infinite frazioni h/k tali che:

$$\left| \gamma - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{2k^2}.$$

⁹ Si veda [8]

Dimostrazione

Nel grafico che contiene i cerchi di Ford si traccia una linea verticale $x=\gamma$. Se γ è irrazionale la retta $x=\gamma$ non può passare per i punti di tangenza $\frac{h}{k}$ di qualche cerchio con l'asse x e neppure per i punti di tangenza di due cerchi (Osservazione 2.1) e quindi la linea $x=\gamma$ taglierà un cerchio (figura 2.5) e, siccome ogni cerchio è circondato da una catena di altri cerchi, essa passerà per un altro cerchio (vedi Teorema 2.3). Dire che $x=\gamma$ taglia il cerchio $C(h/k)$ significa che $\left| \gamma - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{2k^2}$. La linea però passa attraverso un numero infinito di tali cerchi (Teorema 2.3), così si ha che se γ è irrazionale la $\left| \gamma - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{2k^2}$ è soddisfatta per infinite frazioni. CVD

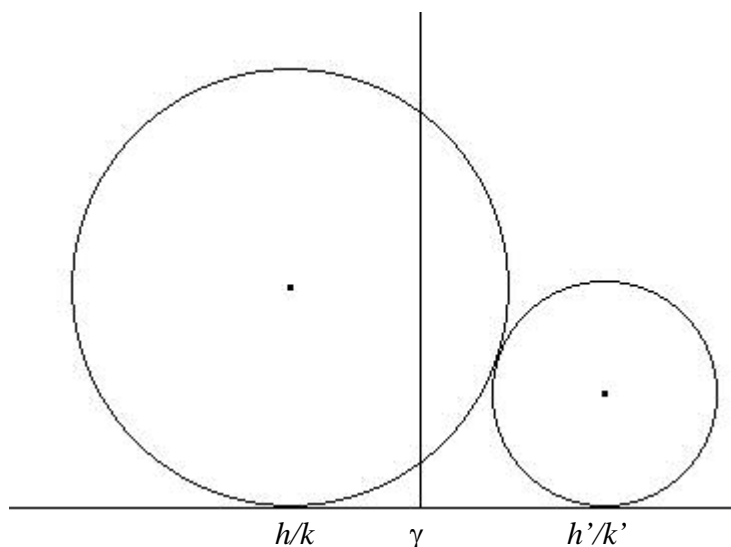


Figura 2.5

Osservazione 2.3

Usando i cerchi di Ford è possibile risolvere l'equazione $ax-by=1$, basta infatti considerare il cerchio $C(a/b)$ e prendere un cerchio tangente $C(y/x)$. Allo stesso modo può essere rappresentato l'Algoritmo 1.1. Infatti partendo dai cerchi $C(0/1)$ e $C(1/1)$ si costruiscono i cerchi medianti e si continua alla

destra o alla sinistra a seconda che il determinante sia negativo o positivo, fino a trovare la frazione cercata.

Teorema 2.5 (Teorema di Hurwitz)¹⁰

Per ogni γ irrazionale esistono infinite frazioni h/k tali che:

$$\left| \gamma - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}k^2}.$$

Dimostrazione

Si supponga che la retta $x=\gamma$ attraversi il triangolo circolare ABC.

Siano $P/Q, p/q, p_1/q_1$, le frazioni che determinano quel triangolo, con:

$$0 < Q \leq q < q_1 = q + Q, \quad p_1 = p + P$$

Si supponga inoltre che $P/Q > p/q$ (come nelle Figure 2.7), quindi

$$Pq - pQ = 1.$$

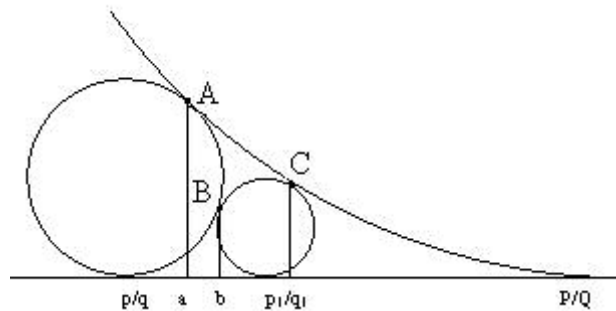


Figura 2.6 (CASO 1)

Il vertice A è il punto di contatto di $C(p/q)$ con $C(P/Q)$, B è il punto di contatto di $C(p/q)$ con $C(p_1/q_1)$ e C è il punto di contatto tra $C(P/Q)$ e $C(p_1/q_1)$. Dalle formule dell'osservazione 2.1 (o in altri modi) si ottengono le differenze:

$$a - \frac{p}{q} = \frac{Q}{q(q^2 + Q^2)} \quad e \quad b - \frac{p}{q} = \frac{q_1}{q(q^2 + q_1^2)};$$

sottraendo membro a membro e ricordando che $q_1 = q + Q$, si ha:

¹⁰ Si veda [4]

$$b-a = \frac{q^2 - qQ - Q^2}{(q^2 + Q^2)(q^2 + q_1^2)}$$

Si pone $q/Q = s \geq 1$. Ora il segno del secondo membro è lo stesso di quello di:

$$s^2 - s - 1 = \left(s + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \left(s - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)$$

Il primo fattore è positivo, quindi il segno dipende dal secondo fattore.

CASO 1. (vedi Figura 2.6 CASO 1) $a < b$ e $s > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Si vuole

dimostrare che P/Q soddisfa l'enunciato del teorema.

$$\left| \frac{P}{Q} - \gamma \right| < \frac{P}{Q} - a = \frac{q}{Q(q^2 + Q^2)} = \frac{s}{s^2 + 1} \cdot \frac{1}{Q^2}$$

Se fosse: $\frac{s}{s^2 + 1} > \frac{1}{\sqrt{5}}$, si avrebbe:

$$s^2 - \sqrt{5}s + 1 < 0, \left(s + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \left(s - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) < 0, \text{ assurdo.}$$

Quindi vale il teorema.

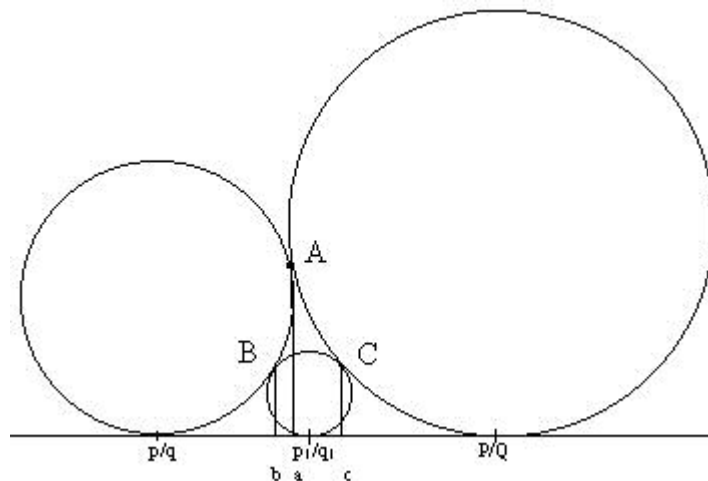


Figura 2.6 (CASO 2)

CASO 2. (vedi Figura 2.6 CASO 2) $b < a$ e $s < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Si sceglie la

frazione p_1/q_1 e facendo dei calcoli analoghi ai precedenti, si ha:

$$\left| \frac{p_1}{q_1} - \gamma \right| < \frac{p_1}{q_1} - b = \frac{q}{q_1(q^2 + q_1^2)} = \frac{s(s+1)}{s^2 + (s+1)^2} \cdot \frac{1}{q_1^2}$$

Se $\frac{s(s+1)}{s^2 + (s+1)^2} > \frac{1}{\sqrt{5}}$, risolvendo, deve essere vera la:

$$s^2 + s - \sqrt{5} - 2 > 0, \quad \text{cioè} \quad \left(s - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) \left(s + \frac{\sqrt{5} + 3}{2} \right) > 0$$

Assurdo, perché il primo fattore è negativo e il secondo positivo.

Quindi il teorema è verificato anche per questo caso.

Poiché la linea passa attraverso infiniti triangoli circolari, allora esistono infinite frazioni che soddisfano il teorema.

Capitolo 3

Altre applicazioni della Serie di Farey

3.1 L'Albero di Stern-Brocot¹¹

L'albero di Stern-Brocot è spesso citato anche come "Albero di Farey", perché in esso compare la serie di Farey (che può essere vista come un sottoalbero). Il nome in realtà è legato al matematico tedesco Moriz Stern e all'orologiaio francese Achille Brocot che, indipendentemente, scoprirono le caratteristiche dell'albero (il primo nel 1858, il secondo nel 1860).

Definizione 3.1

Si parte dalle coppie $0/1$ e $1/0$. La loro medianta è $1/1$, che sarà scritta nella riga successiva. Si uniscono $1/1$ a $0/1$ e a $1/0$ con due "rami". Ora si considerano le medianti tra $0/1$ e $1/1$ e poi tra $1/1$ e $1/0$, trovando $1/2$ e $2/1$, e così via. Ogni nuova coppia viene unita con due rami a quelle che l'hanno prodotta.

Si trova l'albero in figura 3.1.

¹¹ Si veda [11] e [12]

L'albero di Stern-Brocot è l'albero arrestato dopo un numero arbitrario di stadi ottenuto prendendo tutte le possibili medianti. (Figura 3.1)

La teoria delle frazioni di Farey dice che in questo modo, a uno stadio opportuno, si ottengono tutte le frazioni.

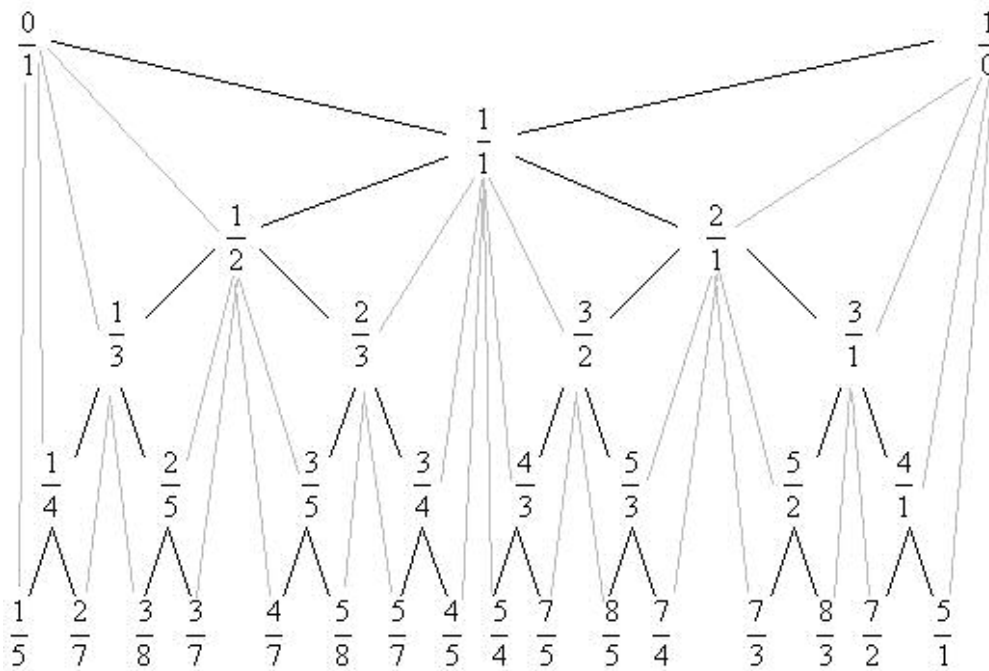


Figura 3.1

Osservazione 3.1

Si nota che le frazioni che compaiono sono tutte ridotte ai minimi termini, cioè se si considera la frazione m/n allora $MCD(m,n)=1$. Si osserva anche che

se $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$, allora $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} < \frac{m_2}{n_2}$ (come già dimostrato

nell'osservazione 1.5). Si ha quindi che la costruzione dell'Albero di Stern-Brocot preserva l'ordine.

Teorema 3.1

Se $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$ sono due frazioni successive in qualche ramo dell'albero, allora

$$m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1 \tag{1}$$

Dimostrazione

Poiché ogni nuova coppia è la mediana di quelle che l'hanno prodotta, la proprietà è vera per il Teorema 1.1.

Osservazione 3.2

Con questa costruzione i termini appaiono una sola volta.

Da un termine qualunque c'è un unico ramo che porta al ramo immediatamente precedente (il tratto nero). Con questo accorgimento da ogni frazione si risale in modo univoco a una delle due frazioni iniziali.

Osservazione 3.3

Si possono osservare delle particolari caratteristiche:

1. Le frazioni che compaiono nella parte sinistra dell'albero sono più piccole di 1 (sono esattamente quelle della Serie di Farey), mentre quelle della parte destra sono più grandi di 1;
2. I denominatori della parte sinistra sono palindromi (ad esempio nella quarta riga si trova 4,5,5,4); i numeratori della parte destra sono palindromi;
3. I numeratori della parte destra coincidono con i denominatori della parte sinistra e i numeratori della parte sinistra coincidono con i denominatori della parte destra;

Da cui si ottiene:

4. Le frazioni della parte sinistra coincidono con le frazioni della parte destra ma con numeratore e denominatore invertiti;
5. Se si numerano le righe, partendo dalla riga zero che è quella corrispondente alle frazioni $0/1, 1/0$, come nella figura 3.2:

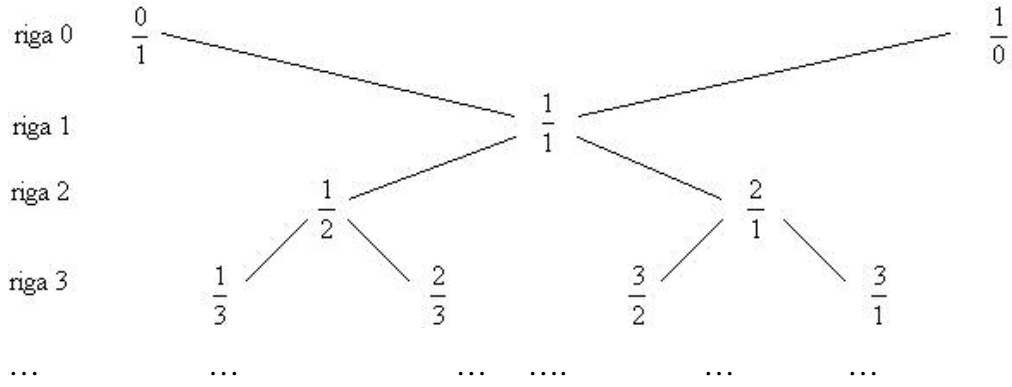
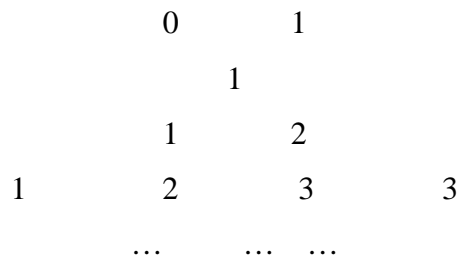


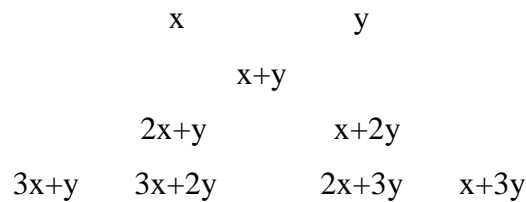
Figura 3.2

si ottiene che la somma dei numeratori della riga n-esima è 3^{n-1} , con $n > 0$.

Visto che i numeratori e i denominatori sono gli stessi, si può considerare l'albero con solo i numeratori:



Questo schema può essere generalizzato considerando due numeri interi qualsiasi x, y :



Lo schema appena visto si indica con $[x,y]$, che nel caso dell'albero di Stern-Brocot è $[0,1]$. Utilizzando $[1,0]$ e $[0,1]$ è possibile ottenere una scrittura generale:

$$[x,y]=x [1,0]+y [0,1].$$

Usando questo tipo di rappresentazione si ha che gli Alberi così ottenuti formano uno spazio vettoriale al variare di x e y in un campo K .

Si introducono due operatori lineari S, D tali che:

$$[x,y]S=[x,x+y]$$

$$[x,y]D=[x+y,y].$$

Questi operatori ammettono una rappresentazione matriciale data da:

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si può definire la “somma diretta” come:

$$[x_1,y_1] \oplus [x_2,y_2]=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix}.$$

Gli operatori si estendono allo spazio “somma”:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 + y_1 \\ y_2 & y_2 + x_2 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & y_1 \\ y_2 + x_2 & x_2 \end{bmatrix}.$$

Si nota che le matrici con determinante uguale a 1 vengono trasformate dagli operatori in matrici che hanno ancora determinante 1.

Usando le matrici S e D e partendo dalla frazione $1/1$, si vuole percorrere l'albero per raggiungere una data frazione.

Ad esempio si vuole trovare il “percorso” della frazione $4/7$.

Partendo da $1/1$ si ottiene SDSS (percorrendo i rami di colore nero).

Calcolando la matrice si ha:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}. \text{ Leggendo in modo opportuno le colonne della matrice si ottiene che}$$

$$\text{le frazioni che hanno generato } 4/7 \text{ sono } 1/2 \text{ e } 3/5: \frac{1+3}{2+5} = \frac{4}{7}.$$

Per migliorare la scrittura si può introdurre, davanti alla sequenza trovata

$$\text{SDSS, la matrice } t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}: t\text{SDSS. La matrice risultante è } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \text{ in questo}$$

modo le colonne danno direttamente le frazioni $1/2$ e $3/5$ che hanno generato $4/7$. Si nota che seguendo il percorso SDSS nell'albero si arriva a $4/7$, mentre

calcolando il valore della matrice si ottengono le frazioni che generano 4/7, cioè la riga precedente.

Esempio 3.1

Si può fare una cosa analoga con 3/5.

La soluzione sarà tSDS.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

1/2 e 2/3 sono le frazioni che producono 3/5.

Algoritmo 3.1

I calcoli appena fatti, possono essere codificati in linguaggio C++:

```
# include <iostream>
main ()

{int m,n;

cout<<"inserisci il numeratore m e denominatore n"<<'\\n';
cout<<"m=";
cin>>m;
cout<<"n=";
cin>>n;

while (n!=m)

    {if (n>m)
        {n=n-m; cout<<"S"<<'\\n';}
      else
        {m=m-n; cout<<"D"<<'\\n';}
    }
}
```

Ad esempio con m=4 e n=7 si ottiene la sequenza SDSS.

Osservazione 3.4

Si applichi l'Algoritmo di Euclide alla frazione 22/87.

$$87=3 \cdot 22 + 21$$

$$22=1 \cdot 21 + 1$$

$$21=21 \cdot 1.$$

di coordinata intera sul bordo del poligono e infine sia $A(P)$ l'area del poligono. Allora

$$A(P)=I(P)+B(P)/2-1.$$

Si rappresenti la frazione m/n nel piano cartesiano come il punto (n,m) .

Definizione 3.2

Una frazione m/n si dice *visibile* se e solo se il segmento che unisce il punto dato con l'origine del sistema non contiene altri punti di coordinata intera.

Lemma 3.1

Per $n \neq 0$ e $m \neq 0$, un punto (n,m) è visibile se e solo se $(n,m)=1$. Inoltre lungo l'asse delle ascisse solo i punti $(\pm 1,0)$ sono visibili e lungo l'asse delle ordinate solo i punti $(0, \pm 1)$ sono visibili.

Si consideri il sistema cartesiano. Si segnino tutti i punti visibili le cui coordinate intere non superano un N assegnato. Se ad esempio $N=5$, i punti sono $0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1$. Essi sono esattamente i termini della Serie F_5 . Procedendo così si possono ottenere tutti i termini della serie di Farey di ordine n .

Si immagini un raggio di origine O diretto nel verso positivo dell'asse x e lo si ruoti in verso antiorario. Si vede che le frazioni sono attraversate dal raggio nello stesso ordine crescente in cui sono disposte nella Serie di Farey.

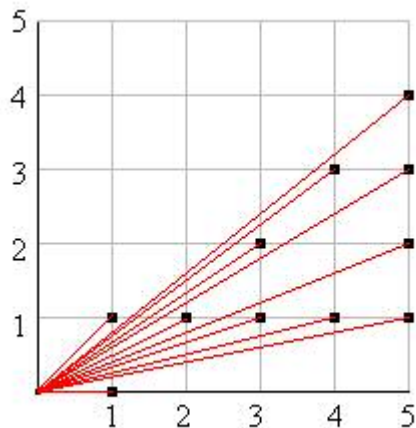


Figura 3.3

Osservazione 3.5

Nel primo ottante, tutte le frazioni (eccetto $1/1$) sono tali che $m < n$.

Inoltre dal lemma 3.1, si ha che tutte le frazioni sono irriducibili.

Infine ogni frazione è la pendenza della retta che unisce il punto considerato con l'origine.

Si consideri ora il Teorema di Pick. Si vuole calcolare l'area del triangolo formato da due punti consecutivi (n_1, m_1) e (n_2, m_2) in qualche F_n e l'origine.

Poiché i due punti sono visibili, i segmenti che li congiungono con l'origine non contengono punti di coordinata intera. Inoltre il segmento che unisce i due punti non può contenere punti di coordinata intera, perché (n_1, m_1) e (n_2, m_2) sono successivi secondo la rotazione del raggio. Per la stessa ragione non ci sono punti interni al triangolo. Quindi dal Teorema di Pick si ha che l'area del triangolo è $A = 3/2 - 1 = 1/2$.

D'altra parte, dalla geometria analitica, l'area del triangolo può essere calcolata come $1/2$ il valore assoluto del determinante:

$$\begin{vmatrix} m_2 & m_1 \\ n_2 & n_1 \end{vmatrix} = m_2 n_1 - m_1 n_2.$$

Il determinante è positivo purchè $m_2/n_2 > m_1/n_1$, che è vero nel caso in considerazione.

Quindi si può scrivere $1/2(m_2 n_1 - m_1 n_2) = 1/2$ da cui si ottiene la proprietà più importante della Serie di Farey (Teorema 1.1), cioè $n_1 m_2 - m_1 n_2 = 1$.

Osservazione 3.6

Usando il Teorema di Pick è possibile dare un'altra dimostrazione dell'osservazione 1.6. Essa è fatta per induzione.

E' vero per i primi termini.

Si suppone vero per i termini della Serie F_{n-1} . Si dimostra per il successivo.

Si considerino le tre frazioni successive $a/b, x/y, c/d$, nella Serie F_n . Si considerino i due triangoli adiacenti T_1 e T_2 : T_1 di vertici $(0,0), (b,a), (y,x)$ e T_2 di vertici $(0,0), (y,x), (d,c)$. Per entrambi vale il Teorema di Pick, quindi:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & a & 1 \\ y & x & 1 \end{vmatrix} = bx - ay = 1 \text{ e } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ y & x & 1 \\ d & c & 1 \end{vmatrix} = yc - xd = 1.$$

Mettendo a sistema e risolvendo:

$$\begin{cases} bx - ay = 1 \\ yc - xd = 1 \end{cases}$$

Usando Cramer si ha $\Delta = bc - ad$ che per ipotesi induttiva è 1.

Quindi si ottiene che la frazione x/y è la medianta.

3.3 Entropia armonica.¹³

Quando due suoni di frequenza f_1, f_2 vengono emessi simultaneamente, l'orecchio umano percepisce questa sovrapposizione (che si chiama *intervallo armonico* f_1/f_2) in modo più o meno gradevole, secondo il valore del rapporto f_1/f_2 . Se la sensazione è gradevole o sgradevole si parla di *consonanza* (o *armonicità*) oppure di *dissonanza*.

Per poter studiare i fenomeni riguardanti la dissonanza e l'armonicità dei suoni esistono vari modelli, tra cui quello chiamato dell' "entropia armonica relativa", che misura, in un certo senso, la gradevolezza di un intervallo.

E' stato elaborato un esperimento per misurare l'entropia armonica, basato sull'ipotesi che il nostro cervello possa riconoscere rapporti di frequenze con denominatore fino a N. Per N=80 si è ottenuta sperimentalmente la curva di entropia riportata nella pagina successiva. Si nota che i minimi e i massimi corrispondono alle frazioni di Farey. In particolare i massimi corrispondono a quelle che vengono chiamate "zone neutre". Sono zone relative a intervalli che però il cervello non riesce ad interpretare né come gradevoli né come sgradevoli.

¹³ Si veda [25]

Le frazioni sul lato destro erano considerate come la rappresentazione degli ipertoni musicali (da $1/1$ a $4/1$), mentre quelli a sinistra erano i toni più bassi (da $1/1$ a $1/4$). I primi sono ascendenti, gli altri discendenti.

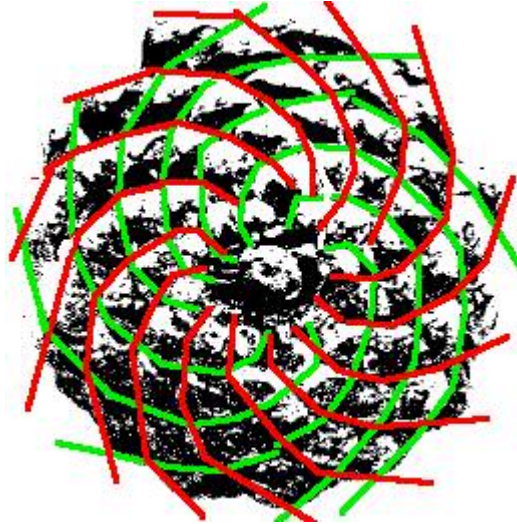
3.5 Fillotassi¹⁵

E' facile osservare che in molte piante e in molti fiori la disposizione dei semi, delle foglie o delle spine si evolve a forma di spirale. Ne sono un esempio il girasole e il cactus:



Si prenda in considerazione il girasole. Esaminando il suo interno si trovano due tipi di spirale (quelli segnati in rosso e quelli segnati in verde):

¹⁵ Si veda [21]



Ogni campione osservato ha un certo numero di spirali rosse ed un certo numero di spirali verdi. I botanici hanno classificato i campioni con dei numeri detti numeri parastechi: se il campione ha 23 spirali rosse e 47 verdi, allora i numeri parastechi sono (23,47). Il primo valore è il minore. Nel caso del girasole i numeri parastechi sono (8,13).

E' stato preso in considerazione un campione di piante e si è osservato che nel 92% dei casi, il numero delle spirali corrisponde a numeri della successione di Fibonacci.

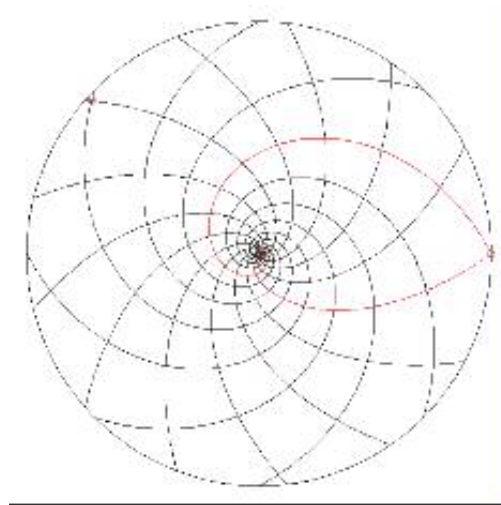
Non è chiaro perché le piante scelgano uno sviluppo a spirale o perché esse favoriscano come numeri parastechi le sequenze di Fibonacci.

Molti botanici hanno studiato questo fenomeno e costruito al computer vari modelli che riproducono lo sviluppo delle spirali nelle piante. Quello più semplice è basato sull'ipotesi che le spirali (con i numeri di Fibonacci) si generi spontaneamente. I tre principi alla base di questo modello sono i seguenti:

- il nuovo punto si forma periodicamente sul bordo del disco centrale;
- una volta formati, i punti si muovono radialmente allontanandosi dal centro;
- nel tempo, la velocità alla quale i nuovi punti si allontanano dal centro diminuisce.

I punti rappresentano il centro di microscopici rigonfiamenti di cellule (detti Primordiali) che arrivano all'estremità che sta crescendo della pianta (detta Meristema Apicale). Questi rigonfiamenti si differenziano per divenire petali, sepali, o spine della pianta.

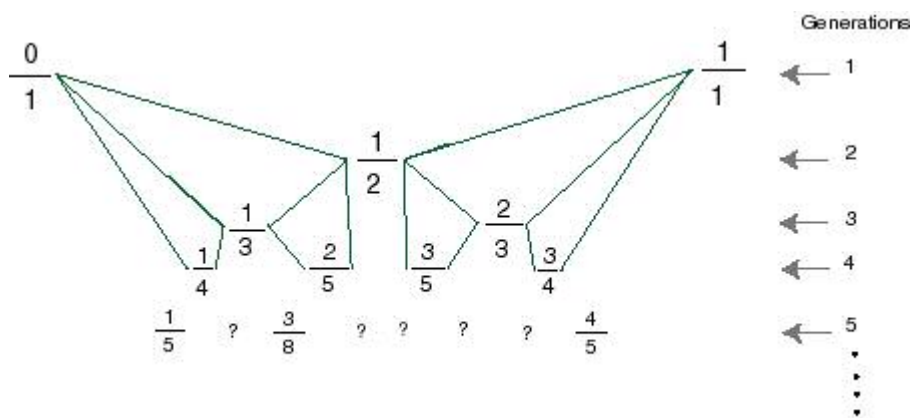
Si può ricostruire lo schema di sviluppo del girasole:



dove si nota la ricorsività della costruzione e come si muovono i punti.

Lo stesso meccanismo si applica nel cactus, nella pigna, nell'ananas dove l'unica differenza è che le spirali evolvono nello spazio e non nel piano. Le spirali si contano allo stesso modo (ad esempio (16,26) dà origine ai numeri parastechi (8,13)).

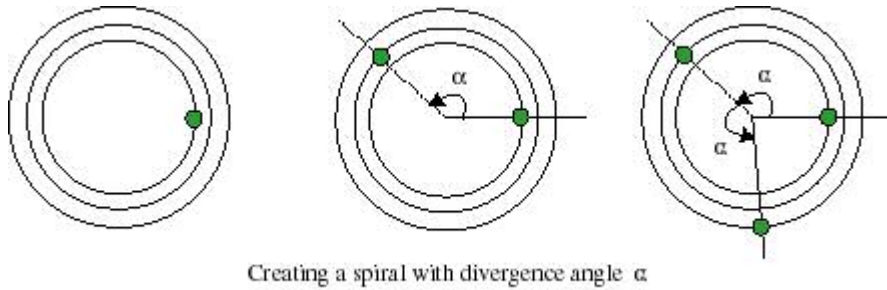
Si è visto che i numeri parastechi compaiono come sequenze di Fibonacci, ma questo non è l'unico modello. Si è preso in considerazione un metodo meno diretto ma che porta allo stesso risultato. La costruzione è un Albero di Farey o meglio di Stern-Brocot.



The Farey Tree

I numeri parastechi (1,2),(3,4),(8,13),..., corrispondono alle frazioni $1/2, 3/4, 8/13, \dots$

Ora si vuole vedere la relazione con le spirali cilindriche. Un modello è rappresentato nella Figura 3.4. Nell'asse x c'è l'angolo di divergenza, cioè l'angolo:



Per creare un spirale si prende un punto nel primo cerchio e lo si sposta nel cerchio successivo dopo una rotazione di un angolo fissato, che in botanica è detto angolo di divergenza.

Nell'asse verticale c'è la crescita della spirale.

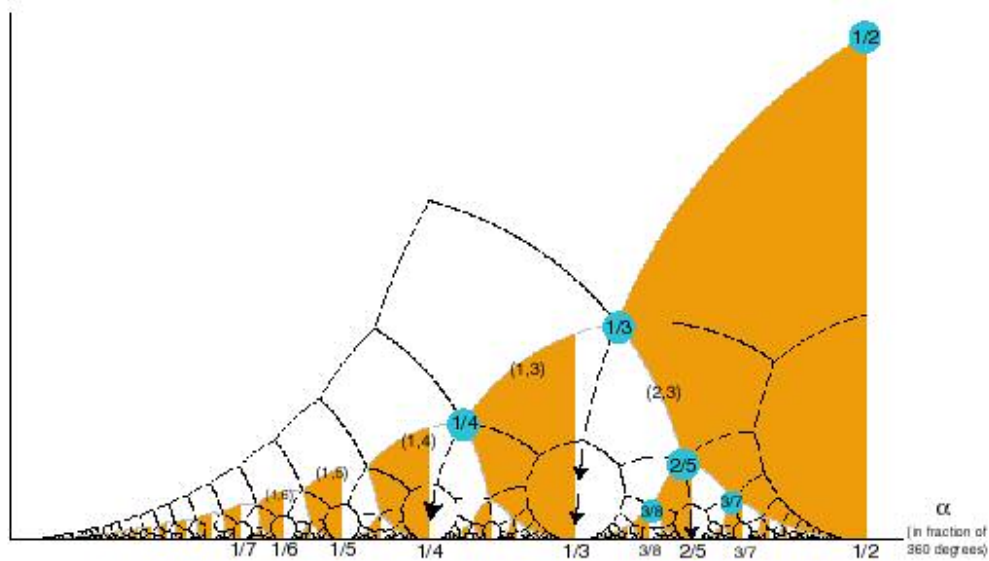


Figura 3.4

Si guardi l'insieme degli archi grigi che si dipartono da un certo punto. Scendendo lungo un arco si trovano delle diramazioni: due archi grigi che scendono e uno nero che continua il grigio. Per dare un indice a quel punto, si continui a scendere lungo l'arco nero fino alla base (come indicano le frecce). Si trova un punto dell'asse x, che è il punto di tangenza con l'asse x delle

circonferenze e ha coordinata razionale. Se si etichettano i punti di diramazione con queste frazioni troviamo l'Albero di Farey. Si può fare così per tutti i punti di diramazione $(2/5, 3/7, \dots)$.

3.6 Frazioni continue¹⁶

Definizione 3.3

Una *Frazione continua semplice finita* è rappresentata dalla scrittura:

$x=[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ che indica la frazione

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

; a_0 intero e gli a_i naturali.

Per $i \leq n$, la frazione continua $[a_0; \dots, a_i]$ è un numero razionale $\frac{p_i}{q_i} = [a_0; a_1,$

$a_2, \dots, a_i]$ detto *i-esima convergente*.

p_n e q_n sono dati dalle formule ricorsive:

$$p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}$$

$$q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$$

con i dati iniziali:

$$p_{-2} = 0 \quad p_{-1} = 1$$

$$q_{-2} = 1 \quad q_{-1} = 0$$

Se x si sostituisce con la sua parte frazionaria $x - [x]$, i numeri $\frac{p_n}{q_n}$ risultano

compresi tra 0 e 1, il termine a_0 è sempre $a_0 = 0$; i dati iniziali sono: $p_{-1} = 1$, $p_0 = 0$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$.

¹⁶ Si veda [22]

Successivamente si considereranno solo frazioni continue con $a_0=0$.

Ogni numero reale x può essere scritto in forma di frazione continua infinita $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots]$ con l'algoritmo:

$$x = [x_0] + \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \quad \text{dove } [x_0] = a_0 \text{ è la parte intera di } x, \dots, \frac{1}{x_n} = a_n + \frac{1}{x_{n+1}} \text{ dove}$$

$$a_n = \left[\frac{1}{x_n} \right].$$

Se x è razionale l'algoritmo è sostanzialmente quello delle divisioni euclidee e finisce dopo un numero finito di passi. Se x è irrazionale si introduce una frazione continua infinita.

Una frazione continua infinita è la serie:

$$\{a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n} + \dots}}$$

e quindi $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n}$.

Si vuole introdurre un algoritmo alternativo al precedente che ad ogni x associa una frazione di Farey.

Definizione 3.4

Sia data una frazione continua $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n}$ con dati

iniziali $p_{-1} = q_0 = 1$ e $q_{-1} = p_0 = 0$ che sia lo sviluppo del numero reale x ($0 \leq x < 1$).

Per ogni convergente $\frac{p_n}{q_n}$ si definisce $\left\{ \frac{jp_{n-1} + p_{n-2}}{jq_{n-1} + q_{n-2}}, \text{ per } 1 \leq j < a_n \right\}$.

Lo sviluppo di x in frazioni di Farey è quello ottenuto dall'unione di questi insiemi (per $n=1, 2, \dots, m$).

Esempio 3.2

Sia $x = [2, 3, 2, 4, \dots]$ si vogliono calcolare i p_i e q_i con le formule date (per le frazioni continue):

$$\begin{aligned}
 n=1 \quad & \frac{1}{2} = \frac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}} \\
 n=2 \quad & \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 1 + 0}{3 \cdot 2 + 1} \\
 n=3 \quad & \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}} = \frac{7}{16} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 7 + 2} \\
 n=4 \quad & \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}} = \frac{31}{71} = \frac{4 \cdot 7 + 3}{4 \cdot 16 + 7} .
 \end{aligned}$$

Le prime convergenti sono: $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{7}{16}, \frac{31}{71}$.

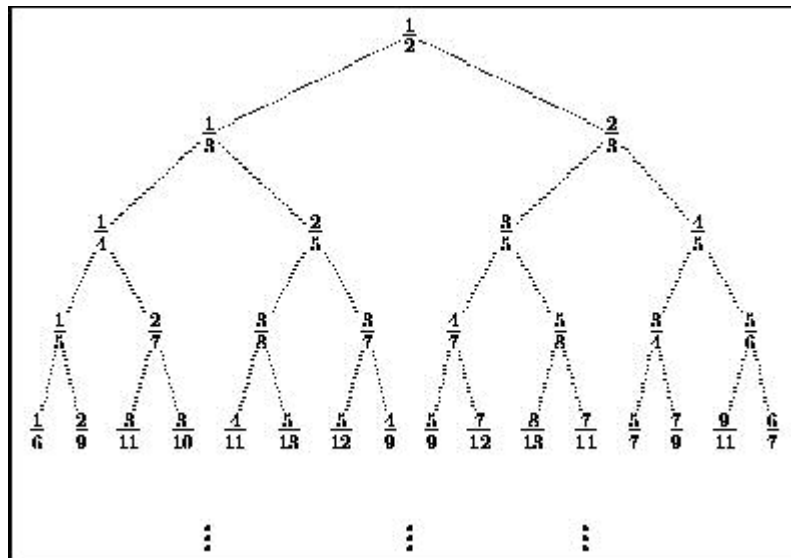
In corrispondenza, usando sempre $x=[2,3,2,4,\dots]$, si calcolano le Frazioni di Farey:

$$\begin{aligned}
 n=1, j=1: \quad & \frac{1 \cdot 0 + 1}{1 \cdot 1 + 0} = 1 \\
 n=2, j=1: \quad & \frac{1 \cdot 1 + 0}{1 \cdot 2 + 1} = \frac{1}{3} \\
 n=2, j=2: \quad & \frac{2 \cdot 1 + 0}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{2}{5} \\
 n=3, j=1: \quad & \frac{1 \cdot 3 + 1}{1 \cdot 7 + 2} = \frac{4}{9} \\
 n=4, j=1: \quad & \frac{1 \cdot 7 + 3}{1 \cdot 16 + 7} = \frac{10}{23} \\
 n=4, j=2: \quad & \frac{2 \cdot 7 + 3}{2 \cdot 16 + 7} = \frac{17}{39} \\
 n=4, j=3: \quad & \frac{3 \cdot 7 + 3}{3 \cdot 16 + 7} = \frac{24}{55}
 \end{aligned}$$

Le prime Frazioni di Farey per x , sono: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{7}{16}, \frac{10}{23}, \frac{17}{39}, \frac{24}{55}, \frac{31}{71}$.

Si ottiene così una successione di frazioni che estende le “convergenti” di x .

Le frazioni derivano una dall'altra seguendo la logica dell'albero di Farey:



L' n-esima frazione $\frac{p_n}{q_n}$ (calcolata con le frazioni continue) è la migliore

approssimazione razionale di x con denominatore che non supera q_n . L' n-

esima approssimante di Farey $\frac{s_n}{t_n}$ è la migliore approssimazione di x

nell'insieme dei numeri razionali $\frac{s}{t}$ con $t \leq t_n$. La differenza tra le due

approssimazioni, è che mentre con le frazioni continue le approssimazioni si trovano un volta a destra e una volta sinistra del valore cercato (cioè una volta sono più grandi ed una volta più piccole), nell'approssimazione con le Frazioni di Farey, esse variano senza una regola precisa (ad esempio dalla 10/23 in poi, sono tutte più piccole di 31/71).

Questa approssimazione può essere visualizzata nel grafico mediante la retta che ha pendenza x , come in Figura 3.5.

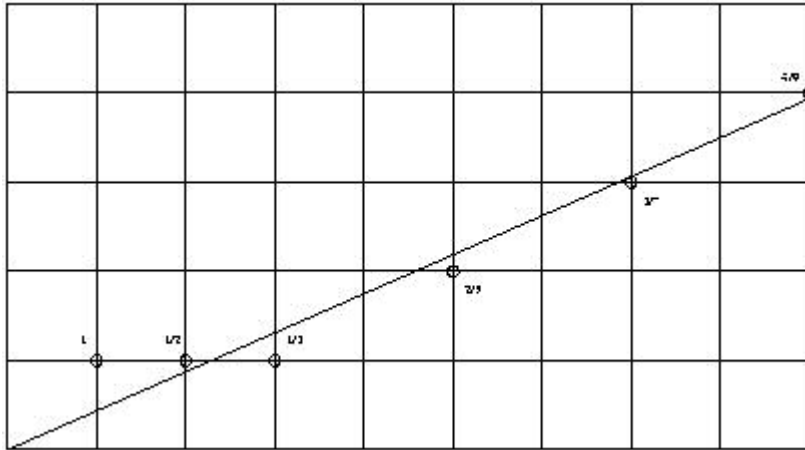


Figura 3.5

3.7 Insieme di Mandelbrot¹⁷

Definizione 3.5

L'Insieme di Mandelbrot è l'insieme dei numeri complessi che si ottengono con l'equazione ricorrente $z_{n+1} = z_n^2 + c$ con $z_0 = c$, per quei valori complessi del parametro c per il quale il valore assoluto $|z_n|$ non diverge.

La forma principale è di un "cuore" intorno al quale ci sono numerosi "bulbi" e diramazioni, come si vede nella Figura 3.6.

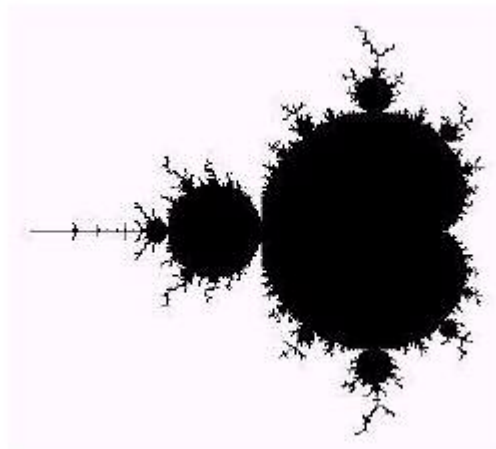


Figura 3.6

¹⁷ Si veda [23]

Da ogni bulbo si estendono altri “bulbi” e delle piccole “decorazioni” e quella che è detta “antenna”(il ramo più lungo che si trova sulla sinistra).

Il bulbo grande contiene c -valori per i quali l'equazione ammette un ciclo di attrazione con periodo q (un ciclo di attrazione è un'orbita $z_0, z_1 = z_0^2 + c, \dots, z_n = z_0$ che ritorna a z_0 dopo n iterazioni) ed è attaccato al “cuore” nel punto del bordo parametrizzato da $c(p/q)$ (detta rotazione p/q). Il bulbo relativo alla frazione p/q e detto bulbo p/q .

Un teorema molto importante afferma che si può riconoscere il bulbo p/q dalla geometria del bulbo stesso: l'informazione dinamica è data dall'informazione geometrica.

Ad esempio nella Figura 3.7.a compare il bulbo $2/5$: per ogni c , l'equazione è caratterizzata da un ciclo con rotazione $2/5$. Il bulbo in considerazione possiede una struttura ad antenna nella quale si vedono cinque raggi: il raggio più piccolo si trova esattamente a $2/5$ “di giro” se si contano i raggi in senso antiorario e partendo da quello successivo al principale (quello direttamente collegato al bulbo più grande). In questo modo si identifica il bulbo $2/5$.

Si consideri ora il bulbo $3/7$ (Figura 3.7.b). Esso ha 7 raggi che partono dal punto di giunzione, e il più piccolo si trova a $3/7$, rispetto la rotazione antioraria. Quindi si può riconoscere il bulbo p/q guardando dove si trova il raggio più piccolo.

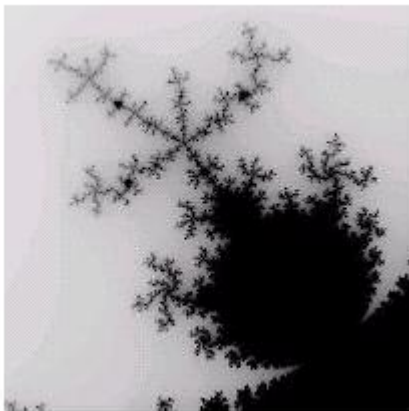


Figura 3.7.a

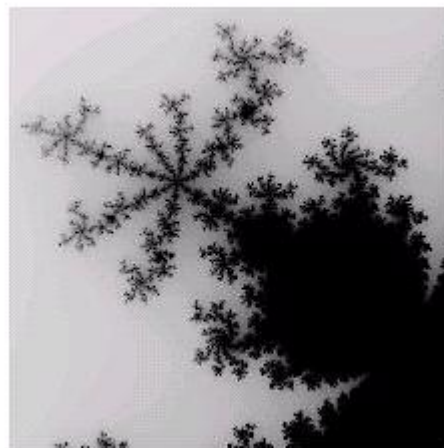


Figura 3.7.b

Si consideri ora la figura 3.8, dove compaiono i “bulbi” $1/2$ (quello sulla sinistra) e $1/3$ (quello più grande posto in alto). Tra essi ce ne sono molti altri,

ma quello più grande è il bulbo $2/5$, che si ottiene usando la “somma di Farey”, cioè la medianta $\left(\frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}\right)$. Questo è un teorema importante che permette di trovare la frazione corrispondente al bulbo che si trova in mezzo a due “bulbi” dati, semplicemente facendo la medianta.

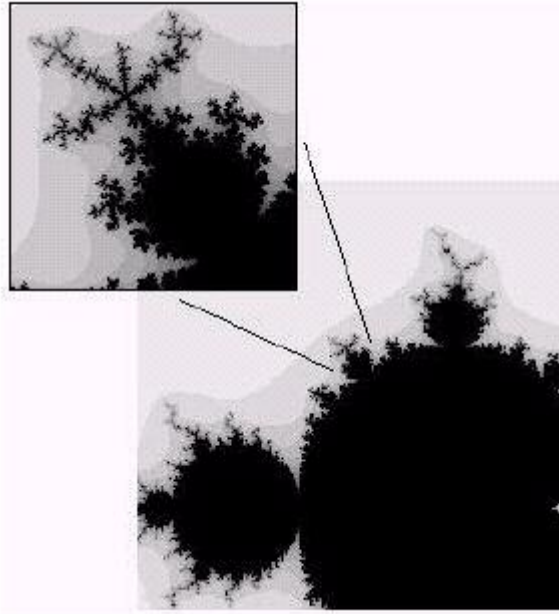


Figura 3.8

Nella Figura 3.9 c'è un altro esempio, dove si possono vedere le diramazioni.

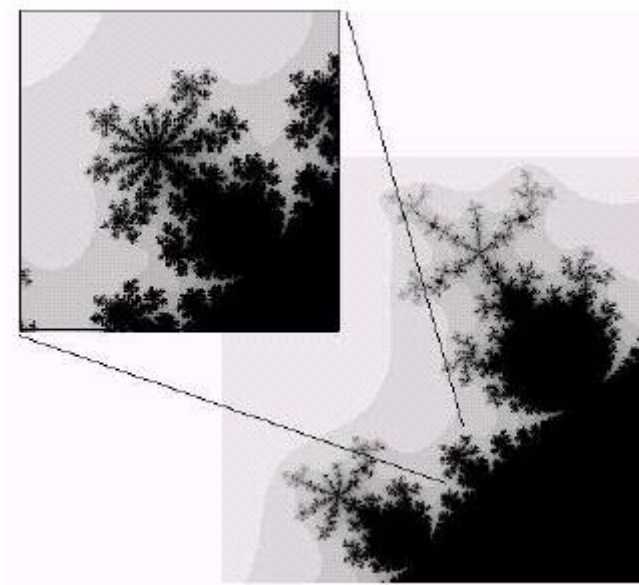


Figura 3.9

Bibliografia

- [1]. Archibald “An introduction to the theory of number”
- [2]. Dickson “Theory of numbers” vol.II
- [3]. H.M. Edwards, “Riemann’s zeta function”
- [4]. L.R.Ford, “Fractions”, American Mathematical Monthly n.45 (1938)
pp.586-601
- [5]. Hardy, Wright “An introduction to the theory of numbers”
- [6]. Landau “Elementary number theory”
- [7]. Niven,Zuckerman “An introduction on the theory of numbers”
- [8]. Rademacher “Higher mathematics from an elementary point of view”
- [9]. Rademacher “Lectures on elementary number theory”
- [10]. B. Scimemi “Attualità e validità dell’aritmetica”pag.141-160

DAL WEB:

- [11]. www.aromatic.com/rudi/ (Riviste n.49,50 del 2003, a cura di
R.d’Alemdert, A.Riddle, P.R. Silverbrahms)
- [12]. www.cut-the-knot.com
- [13]. www.encyclopedia.org
- [14]. www.gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Farey.html
- [15]. www.geocities.com
- [16]. www.mathforum.org/library/drmath/
- [17]. www.mathenjeansfree.fr (articolo di M. F. Parreau)
- [18]. www.mathworld.wolfram.com
- [19]. www.math.ied.edu.hk/spkwan/art/documents/paper.pdf (articolo di
Shi-pui Kwan)
- [20]. www.members.aol.com/Lambda/ILRI/HomePage.html
- [21]. www.math.smith.edu/~phyllo/CourseMaterial/Teachingmodules/phy1tut1.html Fino al
www.math.smith.edu/~phyllo/CourseMaterial/Teachingmodules/phy1tut6.html
- [22]. www.math.unc.edu/Faculty/petersen/refrac.ps (articolo di Kyle Kneisl)

- [23]. www.math.bu.edu/people/bob/papers/farey.pdf (articolo di R. L. Devaney)
- [24]. www.linas.org
- [25]. www.sonic-arts.org/td/entropy.htm (articolo di Paul Erlich)