

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

MRI come sorgente di viscosità nei dischi circumstellari

Relatore:

Prof. Francesco Marzari

Laureando: Francesca Sciolla

Anno Accademico 2014/2015

Indice

1	Introduzione	1
2	Magnetoidrodinamica del disco	1
2.1	Conservazione della massa	1
2.2	Equazioni della dinamica	1
2.3	Equazione di induzione	6
3	Magnetoidrodinamica ideale per un disco	12
4	Instabilità magnetorotazionale	15
5	Conclusioni	20

Capitolo 1

Introduzione

I dischi di accrescimento sono strutture di materiale gassoso che orbitano attorno ad alcuni tipi di corpi stellari, a causa dell'attrazione gravitazionale esercitata da questi ultimi. Come il nome stesso suggerisce, parte del materiale attorno al corpo centrale collassa in esso contribuendo al suo accrescimento. Una tipologia di disco di accrescimento è quello protostellare, che si ha attorno alle stelle in formazione. Esso è un gas, costituito di particelle neutre (in prevalenza molecole H_2), elettroni, ioni (i più importanti sono generalmente K^+ e Na^+) e polveri.

I meccanismi responsabili dell'accrescimento sono complessi. Il flusso di materia verso il corpo centrale si accompagna a un trasporto di momento angolare verso l'esterno. Il processo classicamente è stato descritto in questo modo: l'attrito viscoso tra anelli contigui di gas produce una dissipazione locale di momento angolare. Il materiale si accumula sul corpo centrale, il momento angolare si porta a distanza sempre maggiore.

La viscosità è quindi responsabile del trasporto di momento angolare nel disco.

Quale sia la natura di tale viscosità è una questione dibattuta.

Consideriamo la viscosità molecolare.

$$\nu \sim \lambda c_s \quad (1.1)$$

con c_s la velocità del suono nel disco e λ il cammino libero medio nel gas.

Quest'ultimo è definito come

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma_{mol}} \quad (1.2)$$

ove n è la densità numerica di particelle, σ_{mol} la sezione d'urto per le collisioni molecolari.

Inserendo valori tipici assunti da tali grandezze nel nostro sistema, otteniamo che la viscosità molecolare è molto piccola. I tempi necessari all'evoluzione del disco se essa ne fosse la responsabile sarebbero molto più lunghi di quelli osservati. Non è quindi questa la causa del meccanismo di accrescimento.

Ricordiamo però che il numero di Reynolds è

$$R = \frac{VL}{\nu}, \quad (1.3)$$

con V ed L velocità e dimensioni caratteristiche del fluido, ν viscosità. In presenza di piccole viscosità si avranno dunque alti numeri di Reynolds, corrispondenti a regimi turbolenti. Shakura e Sunyaev hanno fornito un modello per i dischi di accrescimento, che individua la turbolenza come sorgente della viscosità, e quindi causa del trasporto di momento angolare necessario all'evoluzione del sistema.

La scala dei vortici ha come limite massimo le dimensioni verticali del disco, (chiamiamole h), e la velocità del moto non è superiore a quella del suono nel mezzo.

Tale viscosità sarà dunque definita come

$$\nu = \alpha h c_s \tag{1.4}$$

ove α è un parametro adimensionale positivo con valore massimo l'unità. Essa esprime l'efficienza di trasporto di momento angolare, e quindi di accrescimento, mediante viscosità turbolenta.

Il modello di Shakura e Sunyaev vale per una categoria di dischi detti appunto " α disks". Si tratta anzitutto di dischi sottili, in rotazione kepleriana.

Rimane da indagare quale sia il meccanismo responsabile della turbolenza. Nel 1991 Hawley e Balbus hanno proposto un modello che individua la causa della turbolenza nella cosiddetta MRI, magnetorotational instability.

Tale instabilità è dovuta alla combinazione di un debole campo magnetico e della rotazione differenziale del disco, quando il grado di ionizzazione è sufficiente all'accoppiamento magnetico.

Per trattare il comportamento di un disco circumstellare è necessario introdurre la magnetoidrodinamica (MHD). Bisogna tenere in considerazione innanzitutto il fatto che il materiale di cui è costituito il disco è fluido, e quindi ricorrere alle equazioni di Navier-Stokes. L'elettromagnetismo gioca poi un ruolo fondamentale, poiché il gas contiene cariche elettriche in moto. La magnetoidrodinamica, di cui ci serviremo, è la combinazione delle equazioni di Navier-Stokes e di quelle di Maxwell.

Una prima sezione del presente lavoro sarà dedicata proprio alla magnetoidrodinamica: alle equazioni di conservazione di massa, alle equazioni del moto e all'equazione di induzione. In particolare verrà derivata la forma più generale di quest'ultima, con i termini di magnetoidrodinamica non ideale.

Successivamente la trattazione si restringerà alla magnetoidrodinamica ideale, considerata un'approssimazione accettabile per distanze non troppo elevate dalla stella centrale, dove la frazione di ionizzazione è sufficientemente elevata.

In particolare si studieranno gli effetti di una perturbazione nel fluido in equilibrio: la produzione di una forza magnetica di richiamo, proporzionale allo spostamento, responsabile della MRI.

Capitolo 2

Magnetoidrodinamica del disco

Ai fini di una modellizzazione dei dischi circumstellari sarà necessario, come detto, ricorrere alla magnetoidrodinamica. In questa sezione ne verranno ricavate le equazioni fondamentali.

2.1 Conservazione della massa

Anzitutto vale, per ogni specie costituente il gas del disco, un'equazione di conservazione della massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

ove ρ indica la densità del costituente, \vec{v} la sua velocità.

2.2 Equazioni della dinamica

Impostiamo le equazioni della dinamica rispettivamente per le particelle neutre, gli elettroni e gli ioni. Si tratta delle cosiddette equazioni di Navier-Stokes, che descrivono il comportamento di un fluido viscoso.

$$\rho_n \frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t} + \rho_n (\vec{v}_n \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_n = -\vec{\nabla} P_n - \rho_n \vec{\nabla} \Phi - \vec{p}_{nI} - \vec{p}_{ne} \quad (2.2)$$

$$\rho_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + \rho_e (\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_e = -\vec{\nabla} P_e - \rho_e \vec{\nabla} \Phi - \vec{p}_{en} - en_e (\vec{E} + \frac{\vec{v}_e}{c} \times \vec{B}) \quad (2.3)$$

$$\rho_I \frac{\partial \vec{v}_I}{\partial t} + \rho_I (\vec{v}_I \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_I = -\vec{\nabla} P_I - \rho_I \vec{\nabla} \Phi - \vec{p}_{In} + Zen_I (\vec{E} + \frac{\vec{v}_I}{c} \times \vec{B}) \quad (2.4)$$

Tutti i componenti risultano soggetti a un potenziale gravitazionale Φ , alle pressioni P_n , P_I , P_e , rispettivamente per particelle neutre, ioni ed elettroni. Scambiano tra loro momento \vec{p} ove gli indici caratterizzano le due specie tra cui avviene l'interazione. Inoltre la dinamica di ioni ed elettroni, in quanto particelle cariche, presenta anche un

importante contributo elettromagnetico: la forza di Lorentz. \vec{E} è il campo elettrico, \vec{B} quello magnetico, e la carica elementare, Z il numero di ionizzazione per ione.

I termini in \vec{p} esprimono più precisamente la variazione di quantità di moto nell'unità di tempo e di volume. Possono essere scritti in funzione delle differenze di velocità

$$\vec{p}_{nI} = n\mu_{nI}(\vec{v}_n - \vec{v}_I)\nu_{nI}, \quad (2.5)$$

n è la densità di particelle neutre, μ_{nI} la massa ridotta del sistema

$$\mu_{nI} = \frac{m_I m_n}{m_I + m_n}, \quad (2.6)$$

ν_{nI} la frequenza di collisione di una particella neutra con una popolazione di ioni.

Le collisioni vanno a contrastare le differenze di velocità tra le particelle.

Consideriamo un singolo urto tra particelle. Sia esso elastico.

Nel sistema di riferimento del centro di massa la prima particella ha velocità $\vec{v}'_{1,i}$. In seguito alla collisione con la seconda, essa procede con velocità $\vec{v}'_{1,f}$, con angolo di scattering θ . La velocità iniziale può essere scritta in termini della nuova velocità come $v'_{1,i} = v'_{1,f} \cos\theta$. La particella ha acquisito infatti, a causa dell'urto una componente di velocità in un'altra direzione rispetto a quella iniziale.

Chiamando $v'_{1,f} = v'_1$ si avrà che lo scambio di quantità di moto in un urto è

$$\Delta p_{1,2} = m v'_1 (1 - \cos\theta) \quad (2.7)$$

Cambiamo ora sistema di riferimento, riportandoci in quello del laboratorio. Indichiamo con l'apice le grandezze nel sistema di riferimento del centro di massa, senza apice quelle nel laboratorio.

Poiché

$$v'_1 = v_1 - v_{CM} \quad (2.8)$$

e

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (2.9)$$

si avrà

$$\Delta p_{1,2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) (1 - \cos\theta) = \mu_{1,2} (v_1 - v_2) (1 - \cos\theta) \quad (2.10)$$

Per considerare lo scambio complessivo di quantità di moto nell'unità di tempo tale quantità va moltiplicata per la frequenza di collisione tra le particelle, e per la densità delle prime. Inoltre va considerato che

$$\theta \in [0, \pi] \quad (2.11)$$

e quindi bisogna prendere il valor medio del coseno in questo intervallo.

Si avrà infine un'espressione analoga a (2.5)

La frequenza di collisione risulta proporzionale alla densità di ioni n_I , alla sezione d'urto σ_{nI} relativa alla collisione e alla velocità relativa w_{nI} tra particella neutra

e ione. Le velocità relative presentano un profilo di distribuzione maxwelliano, verrà quindi considerata una media su tale distribuzione, come indicato dai bracket in formula seguente:

$$\nu_{nI} = n_I \langle \sigma_{nI} w_{nI} \rangle. \quad (2.12)$$

Complessivamente risulta

$$\vec{p}_{nI} = nn_I \frac{m_I m_n}{m_I + m_n} (\vec{v}_n - \vec{v}_I) \langle \sigma_{nI} w_{nI} \rangle. \quad (2.13)$$

Si può notare che lo scambio degli indici ha come unico effetto un cambio di segno, in accordo col principio di azione e reazione.

Lo scambio di momento tra particelle neutre ed elettroni ha un'espressione analoga, ma essendo $m_e \ll m_n$ si potrà considerare con buona approssimazione $\mu_{ne} \sim m_e$.

Ulteriori importanti approssimazioni possono essere fatte valutando i termini dell'equazione della dinamica di ioni ed elettroni.

Possiamo descrivere il plasma mediante un modello a singolo fluido. Nel nostro plasma coesistono tre tipi di particelle: neutre, elettroni e ioni positivi. Consideriamo ai fini del modello a singolo fluido le sole particelle cariche, in quanto il plasma è ionizzato, mediando le grandezze relative ai due fluidi carichi per costruire equazioni per un unico fluido.

Consideriamo quindi la densità

$$\rho = \rho_e + \rho_I = Zn_I m_I + n_e m_e \quad (2.14)$$

e una velocità media

$$\vec{u} = \frac{\rho_I \vec{v}_I + \rho_e \vec{v}_e}{\rho_I + \rho_e} = \frac{Zn_I m_I \vec{v}_I + n_e m_e \vec{v}_e}{\rho}. \quad (2.15)$$

Assumendo che il gas sia approssimativamente neutro nel complesso,

$$-en_e + eZn_I \approx 0 \quad (2.16)$$

pur ammettendo la possibilità di una piccola densità di carica

$$\sigma = (Zn_I - n_e)e \quad (2.17)$$

avremo

$$Zn_I \approx n_e \approx n \quad (2.18)$$

da cui

$$\rho \approx n(m_I + m) \quad (2.19)$$

$$\vec{u} \approx \frac{nm_I \vec{v}_I + nm_e \vec{v}_e}{nm_I + nm_e} \approx \frac{m_I \vec{v}_I + m_e \vec{v}_e}{m_I + m_e} \approx \vec{v}_I + \frac{m_e}{m_I} \vec{v}_e \quad (2.20)$$

La densità di corrente del fluido avrà la forma

$$\vec{j} = e(Zn_I \vec{v}_I - n_e \vec{v}_e) \approx ne(\vec{v}_I - \vec{v}_e). \quad (2.21)$$

da cui

$$\vec{v}_I = \vec{u} + \frac{m_e}{m_I} \frac{\vec{j}}{ne} \quad (2.22)$$

$$\vec{v}_e = \vec{u} - \frac{\vec{j}}{ne}. \quad (2.23)$$

Avremo ora, nel modello a singolo fluido, un'equazione di continuità analoga a quelle individuali

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.24)$$

e un'equazione del moto complessivo

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right) = \sigma \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} - \vec{\nabla} p, \quad (2.25)$$

ove per ora abbiamo tralasciato gli scambi di momento di questo fluido con le particelle neutre e il potenziale gravitazionale.

Possiamo considerare nulli i termini inerziali, poiché i tempi relativi al moto giro-magnetico sono molto inferiori a quelli del flusso complessivo del fluido. Trascuriamo quindi queste accelerazioni.

L'equazione per gli elettroni sarà allora, dopo aver diviso tutto per ne

$$-\vec{E} - \vec{v}_e \times \vec{B} - \frac{\vec{\nabla} p_e}{ne} = 0, \quad (2.26)$$

ovvero

$$\vec{E} + \left(\vec{u} - \frac{\vec{j}}{ne} \right) \times \vec{B} = -\frac{\vec{\nabla} p_e}{ne} \quad (2.27)$$

Per quanto riguarda i termini di pressione consideriamo la cosiddetta approssimazione di piccolo raggio di Larmor.

Il raggio di Larmor è il raggio della traiettoria elicoidale descritta dalla particella nel campo magnetico.

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \quad (2.28)$$

ove v_{\perp} è la velocità perpendicolare al campo magnetico, ω_c la frequenza di ciclotrone, definita come

$$\omega_c = \frac{qB}{m}. \quad (2.29)$$

Consideriamo ora il rapporto tra il termine di pressione e quello magnetico $\vec{u} \times \vec{B}$

$$\frac{\frac{\nabla p_e}{ne}}{\vec{u} \times \vec{B}} \sim \frac{T}{euBL} \quad (2.30)$$

ove si è tenuto conto dell'equazione di stato dei gas perfetti. L dà misura delle lunghezze caratteristiche del moto del fluido, T è la temperatura.

Definiamo la velocità termica degli ioni come

$$v_{t,I} = \sqrt{\frac{k_B T}{m_I}} \quad (2.31)$$

con k_B costante di Boltzmann.

Sarà allora

$$\frac{\nabla p_e}{ne} \frac{\vec{u} \times \vec{B}}{\vec{B}} \sim \frac{m_I v_{t,I}^2}{euBL} \quad (2.32)$$

Assumendo che il principale contributo alla velocità del fluido sia dato proprio da $v_{t,I}$

$$\frac{\nabla p_e}{ne} \frac{\vec{u} \times \vec{B}}{\vec{B}} \sim \frac{m_I v_{t,I}}{eBL} \quad (2.33)$$

infine, dalle definizioni di frequenza di ciclotrone $\omega_{c,I}$ e raggio di Larmor $r_{L,I}$ per gli ioni

$$\frac{\nabla p_e}{ne} \frac{\vec{u} \times \vec{B}}{\vec{B}} \sim \frac{v_{t,I}}{\omega_{c,I} L} \sim \frac{r_{L,I}}{L} \quad (2.34)$$

Il termine di gradiente di pressione relativo agli elettroni può essere trascurato se il raggio di Larmor è piccolo rispetto alla scala di lunghezze che caratterizzano il moto del fluido.

Tale affermazione è ancora valida se confrontiamo il termine di pressione con $\vec{u}_e \times \vec{B}$

$$\frac{\frac{\nabla P_e}{ne}}{\vec{u}_e \times \vec{B}} = \frac{\frac{\nabla P_e}{ne}}{\vec{u} \times \vec{B} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{ne}} = \frac{\nabla P_e}{\nabla P_e \left(\frac{ne \vec{u} \times \vec{B}}{\nabla P_e} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{\nabla P_e} \right)} \sim \frac{1}{\left(\frac{L}{r_{L,I}} + 1 \right)} \quad (2.35)$$

essendo $\vec{j} \times \vec{B} \sim \nabla P_e$.

Per $r_{L,I} \ll L$ sarà ancora

$$\frac{\frac{\nabla P_e}{ne}}{\vec{u}_e \times \vec{B}} \sim \frac{r_{L,I}}{L + r_{L,I}} \sim \frac{r_{L,I}}{L} \quad (2.36)$$

e potrà essere trascurato.

Ripetendo quanto fatto finora per il termine di pressione degli ioni, si avranno le equazioni semplificate

$$-\vec{p}_{en} - en_e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_e}{c} \times \vec{B} \right) = 0 \quad (2.37)$$

$$-\vec{p}_{In} + Zen_I \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_I}{c} \times \vec{B} \right) = 0. \quad (2.38)$$

Sommiamo ora le due equazioni

$$\vec{p}_{en} + \vec{p}_{In} = (-en_e + Zen_I) \vec{E} + Zen_I \left(\frac{\vec{v}_I}{c} \times \vec{B} \right) - en_e \left(\frac{\vec{v}_e}{c} \times \vec{B} \right) \quad (2.39)$$

Ricordando che avevamo imposto la neutralità del gas, l'equazione precedente diventa

$$\vec{p}_{en} + \vec{p}_{In} = en_e \left(\frac{\vec{v}_I - \vec{v}_e}{c} \times \vec{B} \right). \quad (2.40)$$

Questa può essere espressa in termini di densità di corrente

$$\vec{J} \equiv en_e (\vec{v}_I - \vec{v}_e) \quad (2.41)$$

e quindi

$$\vec{p}_{en} + \vec{p}_{In} = \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B}. \quad (2.42)$$

Torniamo ora all'equazione della dinamica per le particelle neutre. Essa risulta, dalla relazione appena ricavata

$$\rho_n \frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t} + \rho_n (\vec{v}_n \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_n = -\vec{\nabla} P_n - \rho_n \vec{\nabla} \Phi + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B}. \quad (2.43)$$

Anche le particelle neutre sono dunque soggette alla forza di Lorentz, a causa dell'accoppiamento dovuto alle collisioni.

2.3 Equazione di induzione

Trattare di magnetoidrodinamica non può prescindere dal lavorare con le equazioni di Maxwell.

In unità gaussiane esse assumono la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi e (Zn_I - n_e) \quad (2.44)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.45)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.46)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.47)$$

Ricordiamo che si era imposta la neutralità del gas: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ risulta nullo in prima approssimazione. Analogamente può essere trascurato il contributo alla quarta equazione della corrente di spostamento $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Entrambi i termini danno un contributo dell'ordine di $\frac{v^2}{c^2}$, ininfluenza in condizioni non relativistiche.

L'equazione sulla divergenza di \vec{B} non aggiunge nulla di nuovo alle altre purché sia soddisfatta dal campo iniziale.

Ci concentreremo quindi sulle equazioni relative ai rotori di \vec{E} e \vec{B} .

In particolare daremo una diversa espressione dell'equazione di Faraday.

E' prima però necessario ricavare dei risultati intermedi. Scriviamo la velocità relativa tra ioni e particelle neutre $\vec{v}_I - \vec{v}_n$ in funzione della corrente \vec{J} .

Sulla base dell'equazione (2.42) si avrà che se $p_{en} \ll p_{In}$

$$\frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} \simeq \vec{p}_{In}. \quad (2.48)$$

Lo scambio di momento tra ioni e particelle neutre può essere espresso in modo differente da quanto fatto prima.

$$\begin{aligned} \vec{p}_{In} &= \frac{1}{V_I} \frac{1}{V_n} (\vec{v}_I - \vec{v}_n) \frac{m_n m_I}{m_n + m_I} \langle \sigma_{nI} w_{In} \rangle \\ &= \frac{m_n m_I}{V_I V_n} (\vec{v}_I - \vec{v}_n) \frac{\langle \sigma_{nI} w_{In} \rangle}{m_n + m_I} \\ \vec{p}_{In} &= \rho_I \rho_n (\vec{v}_I - \vec{v}_n) \gamma \end{aligned} \quad (2.49)$$

ove γ è il coefficiente di drag

$$\gamma \equiv \frac{\langle \sigma_{nI} w_{nI} \rangle}{m_n + m_I}. \quad (2.50)$$

L'equazione (2.40) diventa

$$\rho_n \rho_I \gamma (\vec{v}_I - \vec{v}_n) = \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} - n_e n m_e \langle \sigma_{ne} w_{ne} \rangle [(\vec{v}_e - \vec{v}_I) + (v_I - v_n)] \quad (2.51)$$

e l'ultimo termine può essere trascurato.

Pertanto

$$\rho_n \rho_I \gamma (\vec{v}_I - \vec{v}_n) = \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} - n_e n m_e \langle \sigma_{ne} w_{ne} \rangle (\vec{v}_e - \vec{v}_I) = \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} + \frac{n m_e}{e} \langle \sigma_{ne} w_{ne} \rangle \vec{J}, \quad (2.52)$$

da cui

$$(\vec{v}_I - \vec{v}_n) = \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c \rho_n \rho_I \gamma} + \frac{n m_e \langle \sigma_{ne} w_{ne} \rangle}{e \langle \sigma_{nI} w_{nI} \rangle} \frac{m_I + m_e}{\rho_n \rho_I} \vec{J}. \quad (2.53)$$

Consideriamo la sezione d'urto relativa allo scattering tra particella neutra ed elettrone approssimativamente geometrica, pertanto la sua espressione non dipenderà dalla massa. Poiché però la velocità media della distribuzione maxwelliana è sostanzialmente quella termica

$$v_{th} = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu_{ne}}} \quad (2.54)$$

segue la proporzionalità $\langle \sigma_{ne} w_{ne} \rangle \propto \frac{1}{\sqrt{\mu_{ne}}} \simeq \frac{1}{\sqrt{m_e}}$.

La sezione d'urto relativa a scattering tra particella neutra e ione è invece maggiore di quella geometrica, a causa delle interazioni di dipolo indotto.

$$\langle \sigma_{nI} w_{nI} \rangle \propto \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_{nI}}} \text{ con } \epsilon < 1.$$

Segue che

$$\frac{\langle \sigma_{nI} w_{nI} \rangle}{\langle \sigma_{ne} w_{ne} \rangle} = \sqrt{\frac{m_e}{\epsilon \mu_{In}}}. \quad (2.55)$$

Torniamo a (2.53), utilizzando ancora la definizione di \vec{J} e μ_{In}

$$\begin{aligned} (\vec{v}_I - \vec{v}_n) &= \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c \rho_n \rho_I \gamma} + \frac{n m_e (m_I + m_n)}{e \rho_n \rho_I} \sqrt{\frac{\epsilon \mu_{In}}{m_e}} \vec{J} = \\ &= \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c \rho_n \rho_I \gamma} + n \frac{(m_I + m_n)}{\rho_n \rho_I} \sqrt{\epsilon \mu_{In} m_e} n_e (\vec{v}_I - \vec{v}_e) = \\ &= \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c \rho_n \rho_I \gamma} + \frac{(m_I + m_n) n_e}{m_n m_I n_I} \sqrt{\epsilon \mu_{In} m_e} (\vec{v}_I - \vec{v}_e) = \\ &= \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c \rho_n \rho_I \gamma} + \frac{1}{\mu_{nI}} \frac{n_e}{n_I} \sqrt{\epsilon \mu_{In} m_e} (\vec{v}_I - \vec{v}_e) = \\ &= \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c \rho_n \rho_I \gamma} + \frac{n_e}{n_I} \sqrt{\frac{\epsilon m_e}{\mu_{nI}}} (\vec{v}_I - \vec{v}_e) \end{aligned}$$

Ricordando l'equazione di neutralità della carica $n_e = Z n_I$ si ha infine

$$(\vec{v}_I - \vec{v}_n) = \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c \rho_n \rho_I \gamma} + Z \sqrt{\frac{\epsilon m_e}{\mu_{nI}}} (\vec{v}_I - \vec{v}_e). \quad (2.56)$$

Ripartiamo ora dall'equazione della dinamica degli elettroni

$$n_e m_e \nu_{en} (\vec{v}_n - \vec{v}_e) - e n_e (\vec{E} + \frac{\vec{v}_e}{c} \times \vec{B}) = 0. \quad (2.57)$$

Espandiamola nel modo seguente, dopo aver diviso per $-e n_e$

$$\frac{m_e \nu_{en}}{e} [(\vec{v}_e - \vec{v}_I) + (\vec{v}_I - \vec{v}_n)] + \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}_n + (\vec{v}_e - \vec{v}_I) + (\vec{v}_I - \vec{v}_n)] \times \vec{B} = 0. \quad (2.58)$$

Sfruttando le relazioni prima ottenute per \vec{p}_{In} avremo

$$\vec{v}_I - \vec{v}_n = \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c \rho_n \rho_I \gamma} + Z \sqrt{\frac{\epsilon m_e}{\mu_{nI}}} (\vec{v}_I - \vec{v}_e). \quad (2.59)$$

Raccogliendo i termini in $\vec{v}_e - \vec{v}_I$

$$\frac{m_e \nu_{en}}{e} \left[(\vec{v}_e - \vec{v}_I)(1 - A) + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c \gamma \rho_I \rho_n} \right] + \vec{E} + \left[\vec{v}_n + (\vec{v}_e - \vec{v}_I)(1 - A) + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c \gamma \rho_I \rho_n} \right] \times \frac{\vec{B}}{c} = 0 \quad (2.60)$$

ove per comodità di scrittura si è posto $A = Z \sqrt{\frac{\epsilon m_e}{\mu_{nI}}}$.

Tale termine può essere trascurato.

Consideriamo ad esempio ioni Na^+ e molecole neutre H_2 . Si avrà allora $Z = 1$.

Le masse sono rispettivamente, per una mole

$$M_{H_2} = 2.01588 \times 10^{-3} \frac{kg}{mol}$$

$$M_{Na^+} = 22.98922 \times 10^{-3} \frac{kg}{mol}$$

Da cui, per ogni particella

$$\begin{aligned} m_n &= 0.334745 \times 10^{-26} \text{ kg} \\ m_I &= 3.817449 \times 10^{-26} \text{ kg} \\ m_e &= 9.1093826 \times 10^{-31} \text{ kg} \end{aligned}$$

Segue

$$\sqrt{\frac{\epsilon m_e}{\mu_n I}} Z \sim 0.017 \sqrt{\epsilon}$$

con $\epsilon \in [0, 1]$.

Trascurando il termine si avrà

$$\vec{E} + \frac{v_n}{c} \times \vec{B} + \frac{(\vec{v}_e - \vec{v}_I)}{c} \times \vec{B} + \frac{(\vec{J} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{c^2 \gamma \rho_n \rho_I} + \frac{m_e \nu_{en}}{e} (\vec{v}_e - \vec{v}_I) + \frac{m_e \nu_{en}}{e} \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c \gamma \rho_n \rho_I} = 0. \quad (2.61)$$

ovvero

$$\vec{E} + \frac{\vec{v}_n}{c} \times \vec{B} - \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{en_e c} \left[1 - \frac{m_e \nu_{en} n_e}{\gamma \rho_n \rho_I} \right] + \frac{(\vec{J} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{c^2 \gamma \rho_n \rho_I} - \frac{\vec{J}}{\sigma_c} = 0 \quad (2.62)$$

ove si è sfruttata l'espressione di \vec{J} in termini delle velocità v_e , v_I e si è definita la conduttività elettrica come

$$\sigma_c \equiv \frac{e^2 n_e}{m_e \nu_{en}}. \quad (2.63)$$

Un'ulteriore approssimazione può essere fatta trascurando il termine in $\frac{m_e \nu_{en} n_e}{\gamma \rho_n \rho_I}$. Si può mostrare infatti, utilizzando le definizioni date di frequenza di collisione e coefficiente di drag, che è dell'ordine del termine A valutato precedentemente.

Ciò conduce all'espressione finale

$$\vec{E} + \frac{v_n}{c} \times \vec{B} - \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{en_e c} + \frac{(\vec{J} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{c^2 \gamma \rho_n \rho_I} - \frac{\vec{J}}{\sigma_c} = 0 \quad (2.64)$$

da cui

$$\vec{E} = -\frac{v_n}{c} \times \vec{B} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{en_e c} - \frac{(\vec{J} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{c^2 \gamma \rho_n \rho_I} + \frac{\vec{J}}{\sigma_c}. \quad (2.65)$$

Dalla seconda equazione di Maxwell

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (2.66)$$

otteniamo

$$\vec{E} = -\frac{\vec{v}_n}{c} \times \vec{B} + \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{4\pi en_e} - \frac{1}{4\pi c \gamma \rho_n \rho_I} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \right] \times \vec{B} + \frac{\eta}{c} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (2.67)$$

con η resistività associata alla conducibilità elettrica σ_c

$$\eta \equiv \frac{c^2}{4\pi \sigma_c}. \quad (2.68)$$

Inserendo \vec{E} nell'equazione di Faraday abbiamo infine

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left[\vec{v}_n \times \vec{B} - \frac{c(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{4\pi en_e} + \frac{1}{4\pi\gamma\rho_I\rho_n} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \right] \times \vec{B} - \eta \vec{\nabla} \times \vec{B} \right]. \quad (2.69)$$

Questa è l'espressione più generale dell'equazione di induzione. Classifichiamone i vari contributi.

- I, Induction $\vec{\nabla} \times (\vec{v}_n \times \vec{B})$
- H, Hall $-\vec{\nabla} \times \left[\frac{c(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{4\pi en_e} \right]$
- A, Ambipolar diffusion $\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{4\pi\gamma\rho_I\rho_n} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \right] \times \vec{B} \right]$
- O, Ohm $-\vec{\nabla} \times (\eta \vec{\nabla} \times \vec{B})$

Quando il solo termine presente è quello di induzione I, siamo in regime di magnetoidrodinamica ideale.

Per avere un'idea di quali termini risultino predominanti in situazioni di magnetoidrodinamica non ideale riportiamo gli andamenti dei rapporti tra essi.

$$\frac{I}{H} \sim \frac{v_n}{v_I - v_e} \quad (2.70)$$

$$\frac{A}{H} \sim Z \frac{eB}{m_I c \gamma \rho_n} = Z \frac{\omega_{cI}}{\gamma \rho} \quad (2.71)$$

$$\frac{O}{H} \sim \frac{\nu_{en} m_e c}{eB} = \frac{\nu_{en}}{\omega_{ce}} \quad (2.72)$$

ove $\omega_{cI} = \frac{eB}{m_I c}$ e $\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e c}$ sono le frequenze di ciclotrone rispettivamente di ioni e elettroni.

La dipendenza esplicita è stata determinata da Balbus e Terquem nel 2001 inserendo valori tipici

$$\frac{A}{H} = Z \sqrt{\frac{9 \times 10^{12} \text{cm}^{-3}}{n}} \sqrt{\frac{T}{10^3 T}} \left(\frac{v_A}{c_s} \right) \quad (2.73)$$

$$\frac{O}{H} = \sqrt{\frac{n}{8 \times 10^{17} \text{cm}^{-3}}} \left(\frac{c_s}{v_A} \right). \quad (2.74)$$

Abbiamo denotato con n la densità totale di tutte le particelle, T la temperatura cinetica, v_A la velocità di Alfvén e c_s la velocità del suono isotermica, definite come:

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{B}}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (2.75)$$

$$c_s = \sqrt{0.429 \frac{kT}{m_p}}, \quad (2.76)$$

con k costante di Boltzmann, m_p massa del protone, 0.425 coefficiente calcolato considerando una massa media per particella di $2.33 m_p$.

Segue da queste considerazioni che i termini non ideali risultano comparabili per temperature dell'ordine di $10^8 K$. Il termine di dissipazione ohmica e di Hall risultano in generale dominanti, ma nelle regioni più esterne il termine di diffusione ambipolare assume un'incidenza maggiore.

Capitolo 3

Magnetoidrodinamica ideale per un disco

In questo lavoro tratteremo il fenomeno della MRI in magnetoidrodinamica ideale, che risulta una buona approssimazione.

Come ricavato nella precedente sezione le equazioni fondamentali per la MHD ideale sono:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \vec{\nabla} \Phi + \left(\frac{\vec{B}}{4\pi} \right) \cdot \vec{\nabla} \vec{B} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.3)$$

L'equazione della dinamica considerata è quella relativa alle particelle neutre, essendo il disco debolmente ionizzato.

Si è esplicitato in essa il termine $\frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B}$.

Operiamo un cambio di coordinate da cartesiane (x, y, z) a cilindriche (R, ϕ, z) con R raggio, ϕ angolo azimutale, z coordinata verticale.

L'equazione della dinamica diventa, nelle sue tre componenti

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right] v_R - \frac{v_\phi^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial R} \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\vec{B}}{4\pi\rho} \cdot \vec{\nabla} B_R - \frac{B_\phi^2}{4\pi\rho R} \quad (3.4)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right] (Rv_\phi) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{\vec{B}}{4\pi\rho} \cdot \vec{\nabla} (RB_\phi) \quad (3.5)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right] v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\vec{B}}{4\pi\rho} \cdot \vec{\nabla} B_z. \quad (3.6)$$

Analogamente per le tre componenti dell'equazione di induzione avremo

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right] B_R = -B_R \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} v_R \quad (3.7)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right] \frac{B_\phi}{R} = -\frac{B_\phi}{R} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{v_\phi}{R} \right) \quad (3.8)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right] B_z = -B_z \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} v_z. \quad (3.9)$$

Un elemento di fluido è in moto con velocità angolare kepleriana Ω , funzione della distanza R . La velocità angolare corrispondente a $R = R_0$ sarà Ω_0 . Fissiamo quest'ultima, mentre R_0 potrà essere arbitrariamente grande: anche $v_\phi = \Omega_0 R_0$ di conseguenza non sarà vincolato.

Affinché l'elemento di fluido si mantenga in moto rotatorio deve essere presente una forza centripeta $-R\Omega^2(R)$.

Poniamoci in un sistema di coordinate rotanti con velocità angolare Ω_0 , concentrando la nostra attenzione su una piccola regione intorno a R_0 .

$$\begin{aligned} R &= R_0 + x & x &\ll R_0 \\ \alpha &= \phi - \Omega_0 t \ll \pi \\ z' &= z & t' &= t \end{aligned}$$

$$\text{affinché } \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Infatti sia $f(x, \alpha, z, t')$ una funzione delle nuove coordinate.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial \alpha} \Omega_0 + \frac{\partial f}{\partial t'} \quad (3.10)$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \Omega_0. \quad (3.11)$$

Introduciamo inoltre $w_\alpha \equiv v_\phi - R\Omega_0$

Nel sistema di riferimento rotante dovremo inserire la forza di Coriolis e quella centrifuga.

Nel limite $R_0 \rightarrow \infty$, abbiamo l'equazione radiale

$$\left[\frac{\partial}{\partial t'} + \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \right] w_R - 2\Omega_0 w_\phi = R(\Omega_0^2 - \Omega^2) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{\vec{B}}{4\pi\rho} \cdot \vec{\nabla} B_R. \quad (3.12)$$

La somma della forza centripeta e centrifuga, espansa al primo ordine in R , risulta

$$R(\Omega_0^2 - \Omega^2) \simeq -x \frac{d\Omega^2}{d \ln R} \quad (3.13)$$

e nel caso di disco in rotazione kepleriana $R(\Omega_0^2 - \Omega^2) \simeq 3x\Omega_0$.

Utilizziamo la notazione x per la componente radiale, y per quella azimutale, z per la verticale. Le equazioni del moto sono infine

$$\left[\frac{\partial}{\partial t'} + \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \right] w_x - 2\Omega w_y = -x \frac{d\Omega^2}{d \ln R} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{\vec{B}}{4\pi\rho} \cdot \vec{\nabla} B_x \quad (3.14)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t'} + \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \right] w_y + 2\Omega w_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{\vec{B}}{4\pi\rho} \cdot \vec{\nabla} B_y \quad (3.15)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t'} + \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \right] w_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{\vec{B}}{4\pi\rho} \cdot \vec{\nabla} B_z. \quad (3.16)$$

Vanno affiancate naturalmente le equazioni di conservazione della massa e di induzione in questo sistema di coordinate rotanti

$$\frac{\partial\rho}{\partial t'} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{w}) = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t'} = \vec{\nabla} \times (\vec{w} \times \vec{B}) \quad (3.18)$$

Capitolo 4

Instabilità magnetorotazionale

Consideriamo lo spostamento $\vec{\xi}$ di un elemento di fluido dall'origine, nel piano (x,y). Tale spostamento dipende solo da z.

All'equilibrio il sistema è sottoposto a un campo magnetico \vec{B} costante diretto verticalmente. Allo spostamento del fluido corrisponde una perturbazione del campo magnetico.

$$\delta\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}). \quad (4.1)$$

Immaginiamo infatti di produrre una variazione $\frac{\delta\vec{B}}{\delta t}$ incrementando la velocità del fluido di \vec{U} , per un tempo infinitesimo δt . Lo spostamento corrispondente sarà proprio $\vec{\xi} = \vec{U}\delta t$. Ricordando l'equazione di Faraday (3.18)

$$\frac{\delta\vec{B}}{\delta t} = \vec{\nabla} \times [(\vec{w} + \vec{U}) \times \vec{B}] = \vec{\nabla} \times (\vec{w} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{B}) \quad (4.2)$$

Il primo termine sarà nullo: esso corrisponde infatti alla situazione di equilibrio e quindi a un campo magnetico non perturbato.

Intuitivamente si avrà allora

$$\delta\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{w}\delta t \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \times (\vec{U}\delta t \times \vec{B}) = 0 + \vec{\nabla} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}). \quad (4.3)$$

Possiamo darne una formulazione integrale integrando su una superficie A, di contorno Γ

$$\int_A \delta\vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_A \vec{\nabla} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\Sigma}. \quad (4.4)$$

Utilizzando il teorema del rotore

$$\int_A \delta\vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\Gamma} (\vec{\xi} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \int_{\Gamma} (d\vec{s} \times \vec{\xi}) \cdot \vec{B}. \quad (4.5)$$

Questa espressione ci consente di dare un'interpretazione ulteriore del risultato. Si tratta di una sorta di conservazione del flusso magnetico attraverso la superficie A. Si

ha infatti che alla variazione di campo magnetico, e quindi del suo flusso attraverso la superficie, a causa dello spostamento $\vec{\xi}$ corrisponde una variazione dello stesso attraverso la superficie laterale. La superficie laterale altro non è che l'integrazione su Γ di $(\vec{ds} \times \vec{\xi})$, ovvero l'area "spazzata" da A nel suo spostamento $\vec{\xi}$.

Torniamo a (4.3). Assumiamo che il gas sia soggetto a una perturbazione locale con andamento $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{z} - \omega t)}$, ove la dipendenza temporale sarà discussa dopo. Segue

$$\delta \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}) = i\vec{k} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}) = (i\vec{k} \cdot \vec{B})\vec{\xi}. \quad (4.6)$$

Ciò vale poiché $\vec{\xi} = (\xi_x, \xi_y, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, k)$, da cui $\vec{\xi} \cdot \vec{k} = 0$.

L'espressione di $\delta \vec{B}$ appena trovata può essere inserita nell'equazione del moto del fluido. Infatti potremo riscrivere il termine

$$\frac{1}{4\pi\rho} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \delta \vec{B} = \frac{1}{4\pi\rho} \vec{B} \cdot (i\vec{k})(i\vec{k} \cdot \vec{B})\vec{\xi} = -\frac{(\vec{k} \cdot \vec{B})^2}{4\pi\rho} \vec{\xi}. \quad (4.7)$$

Ricordando la definizione di velocità di Alfvén (2.75),

$$\frac{1}{4\pi\rho} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \delta \vec{B} = -(\vec{k} \cdot \vec{v}_A)^2 \vec{\xi}. \quad (4.8)$$

Torniamo alle equazioni del moto, riconosciamo al primo membro un termine di derivata materiale

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{w} = \frac{D\vec{w}}{Dt} = \vec{\xi} \quad (4.9)$$

con $\vec{w} = \vec{\xi}$.

Si avranno infine le equazioni di Hill

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_x - 2\Omega \dot{\xi}_y = - \left[\frac{d\Omega^2}{dnR} + (kv_A)^2 \right] \xi_x \\ \ddot{\xi}_y + 2\Omega \dot{\xi}_x = -(kv_A)^2 \xi_y \end{cases} \quad (4.10)$$

Possiamo notare subito un'analogia: esse hanno la forma delle equazioni del moto di due oggetti orbitanti connessi da una molla di costante elastica $(kv_A)^2$.

La soluzione di queste equazioni accoppiate è, come detto, del tipo $e^{i\omega t}$. Siano in particolare

$$\xi_x = a(z)e^{i\omega t} \quad \xi_y = b(z)e^{i\omega t}$$

con a e b funzioni di z .

Deriviamole rispetto al tempo

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_x &= i\omega a(z)e^{i\omega t} & \dot{\xi}_y &= i\omega b(z)e^{i\omega t} \\ \ddot{\xi}_x &= -\omega^2 a(z)e^{i\omega t} & \ddot{\xi}_y &= -\omega^2 b(z)e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Inserendo tali espressioni nel nostro sistema di equazioni differenziali accoppiate abbiamo

$$\begin{cases} -\omega^2 a(z) e^{i\omega t} - 2i\Omega\omega b(z) e^{i\omega t} = - \left[\frac{d\Omega^2}{d\ln R} + (kv_A)^2 \right] a(z) e^{i\omega t} \\ -\omega^2 b(z) e^{i\omega t} + 2i\Omega\omega a(z) e^{i\omega t} = - (kv_A)^2 b(z) e^{i\omega t} \end{cases} \quad (4.11)$$

ove il fattore $e^{i\omega t}$ può ora essere eliminato.

Ricaviamo un'espressione di $b(z)$ dalla seconda equazione e sostituiamola nella prima.

$$b(z) = \frac{2i\Omega\omega a(z)}{\omega^2 - (kv_A)^2} \quad (4.12)$$

$$\omega^2 a(z) + 2i\Omega\omega \frac{2i\Omega\omega a(z)}{\omega^2 - (kv_A)^2} = + \left[\frac{d\Omega^2}{d\ln R} + (kv_A)^2 \right] a(z) \quad (4.13)$$

$$\omega^2 a(z) - \frac{4\Omega^2\omega^2 a(z)}{\omega^2 - (kv_A)^2} = + \left[\frac{d\Omega^2}{d\ln R} + (kv_A)^2 \right] a(z) \quad (4.14)$$

Possiamo ora eliminare $a(z)$ dall'espressione.

$$\frac{\omega^2(\omega^2 - (kv_A)^2) - 4\Omega^2\omega^2 - \left[\frac{d\Omega^2}{d\ln R} + (kv_A)^2 \right] (\omega^2 - (kv_A)^2)}{\omega^2 - (kv_A)^2} = 0 \quad (4.15)$$

Otteniamo infine la relazione di dispersione

$$\omega^4 - \omega^2 \left[4\Omega^2 + 2(kv_A)^2 + \frac{d\Omega^2}{d\ln R} \right] + (kv_A)^2 \left[(kv_A)^2 + \frac{d\Omega^2}{d\ln R} \right] = 0 \quad (4.16)$$

Possiamo riscriverla come

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\kappa^2 + 2(kv_A)^2 \right] + (kv_A)^2 \left[(kv_A)^2 + \frac{d\Omega^2}{d\ln R} \right] = 0 \quad (4.17)$$

κ^2 è la cosiddetta frequenza epicyclica

$$\kappa^2 \equiv 4\Omega^2 + \frac{d\Omega^2}{d\ln R}. \quad (4.18)$$

Si abbia un oggetto che descrive un'orbita attorno a un corpo centrale. Per un osservatore esterno a riposo, deviazioni del corpo dall'orbita circolare sono delle ellissi. A un osservatore che descrive invece un'orbita circolare come quella imperturbata, le deviazioni dell'elemento orbitante appaiono come piccole oscillazioni radiali e azimutali, che descrivono una piccola ellisse retrograda. La frequenza epicyclica è proprio la frequenza di queste oscillazioni.

In assenza di forze si può mostrare che la relazione di dispersione si riduce a

$$\omega^2 = \kappa^2. \quad (4.19)$$

Infatti sia $(kv_a)^2 = 0$

$$\begin{cases} -\omega^2 a(z)e^{i\omega t} - 2i\Omega\omega b(z)e^{i\omega t} = -\frac{d\Omega^2}{d\ln R} a(z)e^{i\omega t} \\ -\omega^2 b(z)e^{i\omega t} + 2i\Omega\omega a(z)e^{i\omega t} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

$$b(z) = \frac{2i\Omega}{\omega} a(z) \quad (4.21)$$

Essendo allora

$$-\omega^2 a(z)e^{i\omega t} + 4\Omega^2 a(z)e^{i\omega t} = -\frac{d\Omega^2}{d\ln R} a(z)e^{i\omega t} \quad (4.22)$$

segue l'equazione

$$\omega^2 = 4\Omega^2 + \frac{d\Omega^2}{d\ln R}. \quad (4.23)$$

Torniamo al caso più generale (4.17). Si è mostrato che gli elementi di fluido sono sottoposti a una forza di richiamo dovuta al campo magnetico, proporzionale allo spostamento, proprio come quella esercitata da una molla.

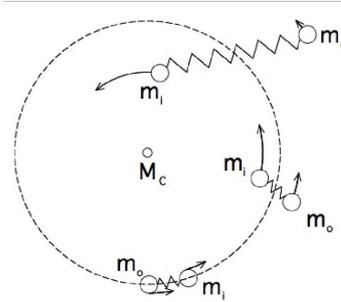
Questa forza può essere responsabile di un'instabilità nel fluido. Trattando $(kv_A)^2$ come costante elastica K della molla, se essa è sufficientemente debole risulterà confrontabile con $\frac{d\Omega^2}{d\ln R}$. In presenza di un profilo di velocità angolare che decresce con la distanza dal centro dell'orbita, ciò conduce a instabilità.

Infatti per

$$\frac{d\Omega^2}{d\ln R} < 0 \quad (4.24)$$

ω^2 assume valori negativi, e ω ha radici immaginarie, positive e negative. Dalla radice negativa segue un andamento esponenziale dello spostamento. Tale condizione risulta soddisfatta nel caso di rotazione kepleriana.

In presenza di valore di $(kv_A)^2$ sufficientemente basso quindi, la forza apparentemente attrattiva della molla provoca nel sistema rotante un allontanamento progressivo degli elementi di fluido. A questa fase iniziale di instabilità segue un mescolamento non lineare delle particelle di gas provenienti da diverse regioni del disco, in una sorta di turbolenza a cascata.



Sfruttando ancora l'analogia evidenziata prima, possiamo pensare a due elementi del fluido come masse orbitanti attorno a un corpo centrale, legate da una molla. La massa più interna ha una maggior velocità angolare, ammesso un profilo del tipo (4.24). La molla tira indietro la massa più veloce m_i esercitando un momento negativo. Ciò provoca una perdita di momento angolare di m_i che “precipita” in orbite più basse. L'effetto contrario è subito da m_o , massa più esterna.

Poiché m_i si muove sempre più verso l'interno e m_o verso l'esterno, l'allungamento della molla risulta sempre maggiore e l'effetto va accentuandosi: lo spostamento cresce esponenzialmente.

Il fenomeno descritto è la cosiddetta MRI, MagnetoRotational Instability, tipica di dischi circumstellari che si trovino a opportuni livelli di ionizzazione.

Capitolo 5

Conclusioni

Nel presente lavoro di tesi si è data una descrizione in termini analitici del fenomeno della MRI. Questo meccanismo è stato recentemente ritenuto responsabile dei fenomeni di viscosità nei dischi di accrescimento, che permette l'evoluzione del disco e ne riduce i tempi a valori di qualche milione di anni.

Ciò è stato ricavato a partire dalle equazioni della magnetoidrodinamica ideale di un disco di accrescimento. Si sono prima ricavate le equazioni più generali della magnetoidrodinamica, evidenziando nell'equazione di induzione del fluido i termini di induzione, di Hall, di Ohm e di diffusione ambipolare.

In presenza di una sufficiente frazione di ionizzazione si è evidenziata la presenza di una forza magnetica di richiamo che, combinata alla rotazione differenziale, produce instabilità. Tale instabilità comporta un mescolamento del gas e una turbolenza che diventa il meccanismo principale di trasporto di momento angolare verso l'esterno, necessario al processo di accrescimento.

La MRI fornisce un modello realistico per il comportamento viscoso di un disco di accrescimento.

Bibliografia

- [1] S. A. Balbus, "Magnetohydrodynamics of Protostellar Disks", *Physical processes around young stars*, *The University of Chicago Press* (2011)
- [2] S. A. Balbus and J. F. Hawley, "A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks: I. Linear Analysis, II. Non linear evolution", *Astrophys. J.*, 376 (1991)
- [3] R. J. Goldston and P. H. Rutherford, "Introduction to Plasma Physics", *Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia*, (1995)
- [4] P. J. Armitage, "Astrophysics of Planet Formation", *Cambridge University Press* (2010)
- [5] A. R. Choudhuri, "The physics of fluids and plasmas, an introduction for astrophysicist", *Cambridge University Press* (1998)
- [6] O. Gressel, R. P. Nelson et al. "Global hydromagnetic simulations of a planet embedded in a dead zone: Gap opening, gas accretion, and formation of a protoplanetary jet", *Astrophys. J.*, 779 (2013)