

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

## Un approccio semiclassico alla formazione delle strutture cosmiche tramite l'equazione di Schrödinger

Relatore:

**Prof. Sabino Matarrese**

Correlatore:

**Dott. Daniele Bertacca**

Laureando:

**Mattia Persano**

**Anno Accademico 2022/2023**



*Transire suum pectus mundoque potiri*  
- *Archimede*



# Indice

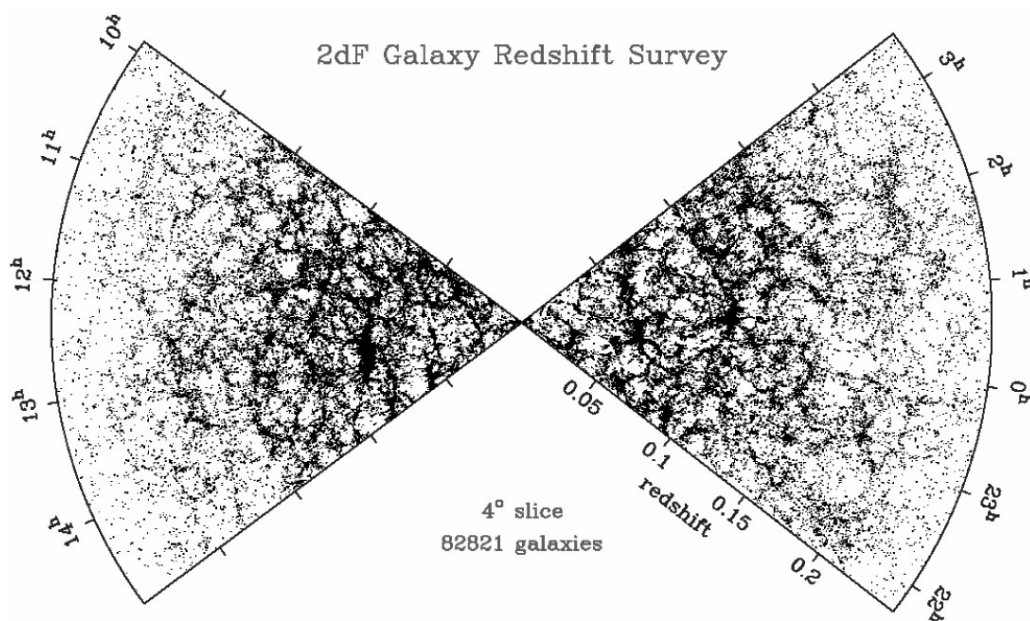
<b>Indice</b>	<b>v</b>
<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Background cosmologico</b>	<b>3</b>
1.1 Il Principio Cosmologico e la metrica dell'Universo . . . . .	3
1.2 Le equazioni di Friedmann ed il modello di Einstein-de Sitter . . . . .	3
1.3 Materia Oscura nell'Universo . . . . .	4
<b>2 Analisi della formazione delle strutture cosmiche</b>	<b>6</b>
2.1 Equazioni dei fluidi in un Universo in espansione . . . . .	6
2.2 Approssimazione di Zel'dovich . . . . .	10
2.3 Approssimazione di Adesione . . . . .	12
<b>3 Approccio semiclassico alla formazione delle strutture cosmiche</b>	<b>17</b>
3.1 Trasformazione di Madelung per le equazioni dei fluidi ed equivalenza con l'equazione di Schrödinger . . . . .	17
3.2 Trasformazione di Madelung in cosmologia . . . . .	20
3.3 Approccio perturbativo allo studio delle soluzioni . . . . .	20
3.3.1 Espansioni perturbative delle variabili dei fluidi . . . . .	21
3.3.2 Teoria Lagrangiana delle perturbazioni . . . . .	22
3.4 Analisi delle soluzioni attraverso un metodo semiclassico . . . . .	23
3.4.1 Soluzione di particella libera . . . . .	24
3.4.2 Soluzione dell'equazione di Schrödinger per ordini successivi . . . . .	26
<b>Conclusioni</b>	<b>30</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>vii</b>



# Introduzione

Uno dei problemi aperti della cosmologia moderna è la comprensione della formazione della “Large-Scale Structure” dell’Universo osservabile.

Osservazioni ad ampio campo infatti rivelano come i “mattoni” dell’Universo, ovvero le galassie, vadano a disporsi in strutture di gerarchia crescente, partendo da ammassi di poche decine di elementi fino a super-ammassi contenenti fino a centinaia di migliaia di galassie. Come è possibile osservare dalla figura 1, questi vanno a generare una struttura “cellulare”, caratterizzata dalla presenza di nodi, da lunghe strutture filamentose e grandi bolle di vuoto, in cui la densità di materia barionica e oscura è molto ridotta.



**Figura 1:** Sky survey contenente 82821 galassie disposte a formare la struttura a grande scala dell’Universo “locale”.

L’obiettivo di questa tesi è analizzare alcuni modelli, sviluppati dal 1970 in poi, che permettono di descrivere la formazione delle strutture cosmiche, studiando la dinamica della materia. La tesi avrà la seguente struttura:

- Nel Capitolo 1 verranno espone le basi teoriche su cui si costruiranno tutti i modelli a seguire, soffermandosi in particolare sul modello di Universo e sulla scelta della componente di Materia Oscura;
- Nel Capitolo 2 verranno tradotte le equazioni dei fluidi per un Universo in espansione, e ne verranno studiate le soluzioni; ci si soffermerà su due modelli-base, chiamati *Approssi-*

*mazione di Zel'dovich e Approssimazione di Adesione*, discutendone i principali risultati e fallacità;

- Nel Capitolo 3 verrà invece esposto un approccio alternativo, basato sul formalismo della Meccanica Quantistica; verrà esposta la *trasformazione di Madelung* che permette il passaggio dalle equazioni dei fluidi ad equazioni di Schrödinger. Verranno poi studiate, attraverso un approccio perturbativo, le soluzioni principali, soffermandosi sulla soluzione di particella libera e sulla principale correzione a questa.



# Capitolo 1

## Background cosmologico

### 1.1 Il Principio Cosmologico e la metrica dell'Universo

Alla base della dissertazione troviamo uno dei principi cardine della cosmologia: il *Principio Cosmologico*. Questo afferma che:

**Proposizione 1.** *Su grandi scale, l'Universo appare omogeneo ed isotropo ad ogni osservatore fondamentale.*

Ciò significa che non esistono direzioni o posizioni preferenziali nell'Universo.<sup>1</sup>

Attraverso la teoria della Relatività Generale è possibile definire la metrica di *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*, metrica che descrive la struttura dello spazio-tempo in accordo con quanto il principio cosmologico afferma. La metrica è la seguente:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right),$$

dove  $a(t)$  è detto *fattore di scala* e contiene l'informazione sulla dinamica dell'Universo ad un tempo fissato. Il parametro  $k$  rappresenta invece la curvatura dello spazio-tempo ed assume tre possibili valori:

- $k = 1$  rappresenta un Universo *chiuso*;
- $k = 0$  rappresenta un Universo *piatto*;
- $k = -1$  rappresenta un Universo *aperto*.

### 1.2 Le equazioni di Friedmann ed il modello di Einstein-de Sitter

La dinamica dell'Universo è descritta dalle equazioni di *Friedmann*: tre equazioni rispetto al fattore di scala  $a(t)$  e le rispettive derivate rispetto al tempo cosmico  $t$ . Le equazioni sono le seguenti:

---

<sup>1</sup>Il fatto che l'Universo appaia omogeneo e isotropo sembra entrare in conflitto con il tema trattato nella tesi. Infatti, asserendo che vi sia una generale omogeneità nella distribuzione di materia nell'Universo, si entra in contrasto con la presenza stessa di strutture cosmiche altamente disomogenee. Va quindi sottolineato che l'omogeneità e l'isotropia dell'Universo si riscontrano considerando porzioni di Universo di molte centinaia di Megaparsec, mentre la presenza di strutture è osservabile su scale ridotte.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (1.1a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (1.1b)$$

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right). \quad (1.1c)$$

Il modello dinamico su cui si costruisce la discussione nei capitoli successivi è il modello di Universo di *Einstein-de Sitter*.<sup>2</sup> Questo modello prevede curvatura nulla, ossia  $k = 0$ , e suppone che gli effetti della costante cosmologica siano trascurabili, pertanto si pone  $\Lambda = 0$ .

Si lavora inoltre sotto l'ipotesi di un Universo dominato da materia non-relativistica e con pressione nulla (chiamata “*dust*”), da cui  $P = 0$ .

Considerando tutte le ipotesi fatte e inserendole nelle equazioni di *Friedmann* si ottengono le seguenti relazioni: in un Universo di *Einstein-de Sitter* il fattore di scala è proporzionale al tempo cosmico secondo la relazione

$$a \propto t^{\frac{2}{3}}, \quad (1.2)$$

mentre la densità di materia  $\rho$  presente nell'Universo è legata al tempo dalla seguente relazione

$$\rho = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (1.3)$$

### 1.3 Materia Oscura nell'Universo

Partendo dalle osservazioni di Fritz Zwicky del 1933 fino a quelle compiute in tempi recenti, si è scoperto che la materia ordinaria, detta “*barionica*”, alla base di tutte quelle strutture osservabili direttamente, costituisce solo una piccola frazione dell'intera quantità di materia presente nell'Universo. Molte sono infatti le osservazioni indirette a sostegno dell'esistenza di un nuovo tipo di materia, detta “*oscura*” (DM), che interagisce con la materia barionica esclusivamente attraverso l'interazione gravitazionale. Difatti, considerando il quantitativo totale di materia che si è stimato esserci nell'Universo, solo il 4% circa risulta essere materia barionica (condensata in strutture e diffusa).

Negli ultimi anni sono stati sviluppati numerosi modelli che cercano di descrivere questa nuova costituente dell'Universo; in particolare è possibile distinguere tre famiglie di possibili candidati [6]:

- **Cold Dark Matter** (CDM) è uno dei modelli di materia oscura, caratterizzata dalla presenza di particelle massive non-relativistiche, ovvero particelle il cui disaccoppiamento dalla radiazione è avvenuto quando il loro rallentamento era tale da non essere più relativistiche. Il modello che spiega la formazione delle strutture cosmiche a partire dalla CDM è detto “*bottom-up*”, modello che prevede in primis la formazione delle strutture base, le galassie, ed in seguito il merging di queste in strutture più grandi, quali cluster e super-cluster di galassie;
- **Hot Dark Matter** (HDM) è un altro modello di materia oscura, che prevede particelle ultra-relativistiche. Un esempio di possibili candidati ad essere HDM sono i neutrini

---

<sup>2</sup>Il modello di *Einstein-de Sitter* non è il modello migliore per una descrizione completa della dinamica dell'Universo: volendo stimare l'età dell'Universo da questo modello si ottiene un tempo  $t \approx 9.6$  Gyr, età di molto inferiore a quella stimata da osservazioni. Tale modello è però una buona approssimazione della dinamica dell'Universo al tempo attuale, Universo dominato dalla *materia*.

cosmici. A causa del grande momento portato da queste particelle, non verranno generate strutture cosmiche le cui masse sono inferiori a  $10^{15} M_{\odot}$ ; si verifica allora il processo inverso a quello che avverrebbe per la CDM. Quest'ultimo, denominato “*top-down*”, descrive la formazione delle strutture cosmiche partendo da quella di grandi masse di materia oscura che, in seguito al processo di *frammentazione*, andrebbero poi a generare strutture via via più piccole;

- **Warm Dark Matter** (WDM) è un modello di materia oscura con caratteristiche intermedie tra la HDM e la CDM.

Da osservazioni di quasars fatte ad alti redshift e da considerazioni in merito alle anisotropie della CMB (Cosmic Microwave Background) si è dedotto che la formazione delle strutture cosmiche non sia compatibile con quanto modellizzato dalla HDM; perciò si ritiene che la HDM non sia la componente principale della materia oscura presente nell'Universo.

Pertanto, la discussione che seguirà nei capitoli successivi sarà costruita considerando la sola componente di CDM, che si ritiene essere la componente dominante di DM nell'Universo.

# Capitolo 2

## Analisi della formazione delle strutture cosmiche

Nel seguente capitolo verrà trattata la teoria dell'*instabilità gravitazionale* [5]. Questa studia la dinamica della CDM trattandola come un fluido comprimibile, e, come tale, studiandone le equazioni che ne governano il moto. Verranno quindi ricavate le equazioni dei fluidi per la materia oscura in un Universo in espansione e ne verranno studiate le soluzioni, focalizzandosi in maniera particolare sull'evoluzione delle disomogeneità di materia. Verranno quindi analizzati due modelli: l'approssimazione di *Zel'dovich* e l'approssimazione di *Adesione*.

### 2.1 Equazioni dei fluidi in un Universo in espansione

Prima di poter scrivere le equazioni dei fluidi che governano la dinamica della CDM è bene definire le seguenti coordinate

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}, \quad (2.1)$$

coordinate inerziali rispetto al sistema (FRW) di riferimento in espansione. La coordinata  $\vec{x}$  è detta *comovente* ed è costante nel tempo.

Si definisce anche la velocità  $\vec{w}$  come

$$\vec{w} \equiv \dot{\vec{r}} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r} + a\frac{d\vec{x}}{dt} = H\vec{r} + \vec{v}, \quad (2.2)$$

dove  $\vec{v}$  è la *velocità peculiare*, ovvero la velocità relativa della materia, mentre  $H$  è il parametro di *Hubble*.

È utile definire la relazione

$$\nabla_{\vec{r}} = \frac{1}{a}\nabla_{\vec{x}}, \quad (2.3)$$

cosicché, data una generica funzione  $f(\vec{r}, t)$ , la derivata materiale di questa è

$$\frac{Df(\vec{r}, t)}{Dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\vec{r}} + (\vec{w} \cdot \nabla_{\vec{r}}) f = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + H(\vec{r} \cdot \nabla_{\vec{r}}) f + (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}}) f. \quad (2.4)$$

Se invece si pensa ad  $f$  come una funzione della coordinata  $\vec{x}$ , la derivata materiale sarà

$$\frac{Df(\vec{x}, t)}{Dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + \left( \dot{\vec{x}} \cdot \nabla_{\vec{x}} \right) f = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + \frac{1}{a}(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}}) f. \quad (2.5)$$

Poiché si ha che  $\frac{Df(\vec{x},t)}{Dt} = \frac{Df(\vec{r},t)}{Dt}$ , allora si avrà che:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\vec{x}} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\vec{r}} + H (\vec{r} \cdot \nabla_{\vec{r}}) f. \quad (2.6)$$

Scelte le coordinate  $\vec{r}$  e supponendo di star trattando un sistema adiabatico, è possibile scrivere l'equazione di *continuità* e di *Eulero* per la CMD:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\vec{r}} + \nabla_{\vec{r}} (\rho \vec{w}) = 0, \quad (2.7a)$$

$$\left. \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \right|_{\vec{r}} + (\vec{w} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{w} v = -\frac{\nabla_{\vec{r}} p}{\rho} + \nabla_{\vec{r}} \Phi, \quad (2.7b)$$

$$\nabla_r^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (2.7c)$$

L'equazione 2.7c è l'equazione di *Poisson* e descrive il comportamento del potenziale  $\Phi$ , potenziale dovuto alla presenza di materia gravitante.

Poiché si vogliono studiare le soluzioni perturbative, è utile separare nelle variabili i termini di background e i termini perturbativi; pertanto si avrà che

$$\rho \equiv \rho_b + \delta\rho, \quad \Phi \equiv \Phi_b + \phi, \quad (2.8)$$

dove le grandezze con il pedice  $b$  fanno riferimento al background cosmico, mentre  $\delta\rho$ <sup>1</sup> rappresenta una fluttuazione di densità dalla situazione di omogeneità ed il termine  $\phi$  rappresenta il *potenziale gravitazionale peculiare*, ovvero una fluttuazione di potenziale rispetto al background.

Separate le componenti di background da quelle perturbative, è possibile riscrivere le equazioni dei fluidi rispetto alle coordinate *comoventi*. Partendo dall'equazione di *Poisson* per il potenziale  $\phi$ , si avrà

$$\nabla_x^2 \phi = 4\pi G a^2 \delta\rho. \quad (2.9)$$

Ricordando le relazioni 2.3 e 2.6 e ricordando la definizione di  $\vec{r}$  e  $\vec{w}$ , si può riscrivere l'equazione di *continuità* come

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\vec{x}} - \cancel{H (\vec{r} \cdot \nabla_r) \rho} + \rho \nabla_r (H \vec{r} + \vec{v}) + \cancel{H (\vec{r} \cdot \nabla_r) \rho} + (\vec{v} \cdot \nabla_r) \rho = 0.$$

Svolgendo le derivate e sapendo che  $H\rho(\nabla_r \cdot \vec{r}) = 3H\rho$ , si ottengono i seguenti termini:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + 3H\rho + \rho \nabla_{\vec{r}} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \rho = 0,$$

da cui si ottiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho + \frac{1}{a} \nabla_x (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.10)$$

Per l'equazione di *Eulero* si ha

$$\left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|_{\vec{r}} + \left. \frac{\partial (H \vec{r})}{\partial t} \right|_{\vec{r}} + (H \vec{r} \cdot \nabla_{\vec{r}}) (H \vec{r}) + (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}}) (H \vec{r}) + (H \vec{r} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{\vec{r}} p - \nabla_{\vec{r}} \Phi_b - \nabla_{\vec{r}} \phi.$$

Si ha che

$$\left. \frac{\partial (H \vec{r})}{\partial t} \right|_{\vec{r}} + (H \vec{r} \cdot \nabla_{\vec{r}}) (H \vec{r}) = -\nabla_{\vec{r}} \Phi_b.$$

<sup>1</sup>Si può notare come la fluttuazione possa assumere valori sia positivi che negativi.

Ciò deriva dall'espressione

$$\left(\dot{H} + H^2\right) \vec{r} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_b \vec{r},$$

che risulta essere soddisfatta poiché  $\dot{\rho} = -3H\rho$  e  $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_b$ , sostituite nelle equazioni di *Friedmann* (1.1), portano alla condizione  $\dot{H} = -4\pi G\rho$ .

Ritornando all'equazione di *Eulero*, si avrà pertanto

$$\left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\vec{r}} + (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}}) (H\vec{r}) + (H\vec{r} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{\vec{r}} p - \nabla_{\vec{r}} \phi.$$

Ricordando che  $\left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\vec{x}} = \left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\vec{r}} + (H\vec{r} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{v}$  si ottiene quindi

$$\left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\vec{x}} + H\vec{v} + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}}) \vec{v} = -\frac{1}{a\rho} \nabla_{\vec{x}} p - \frac{1}{a} \nabla_{\vec{x}} \phi. \quad (2.11)$$

Il passo successivo è linearizzare le equazioni trovate per piccole fluttuazioni di densità. Si pone quindi  $\rho = \rho_b (1 + \delta)$ . Partendo dall'equazione (2.10), si ha

$$\frac{\partial \rho_b (1 + \delta)}{\partial t} + 3H\rho_b (1 + \delta) + \frac{1}{a} \nabla_x (\rho_b (1 + \delta) \vec{v}) = 0,$$

da cui, risolvendo ed escludendo i termini non lineari, si ottiene l'equazione di *continuità* lineare

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a} \nabla_x \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.12)$$

Allo stesso modo è possibile, partendo da (2.11) ottenere l'equazione di *Eulero* lineare:

$$\left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\vec{x}} + H\vec{v} = -\frac{1}{a\rho} \nabla_{\vec{x}} p - \frac{1}{a} \nabla_{\vec{x}} \phi, \quad (2.13)$$

e l'equazione di *Poisson* per il potenziale  $\phi$ :

$$\nabla_x^2 \phi = 4\pi G a^2 \delta \rho. \quad (2.14)$$

Al fine di semplificare lo studio delle soluzioni, è utile applicare la trasformata di Fourier alle variabili dei fluidi:

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \delta_{\vec{k}}(t), \quad (2.15a)$$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \vec{v}_{\vec{k}}(t), \quad (2.15b)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \phi_{\vec{k}}(t). \quad (2.15c)$$

Sostituendo le trasformate (2.15) nelle tre equazioni linearizzate (2.12) (2.13) e (2.14) si ottengono le seguenti equazioni:

$$\dot{\delta}_{\vec{k}} + \frac{i\vec{k} \cdot \vec{v}_{\vec{k}}}{a} = 0, \quad (2.16a)$$

$$\dot{\vec{v}}_{\vec{k}} + H\vec{v}_{\vec{k}} = -\frac{i\vec{k}}{a} (c_s^2 \delta_{\vec{k}} + \phi_{\vec{k}}), \quad (2.16b)$$

$$k^2 \phi_{\vec{k}} = -4\pi G a^2 \rho_b(t) \delta_{\vec{k}}, \quad (2.16c)$$

dove  $c_s^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}$ .

È utile utilizzare il seguente risultato:

**Teorema della circolazione di Kelvin.** *In un fluido perfetto barotropico soggetto ad un campo di forze conservativo, la circolazione su un percorso chiuso  $C$  è costante nel tempo, ovvero:*

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} \oint_C \vec{\omega} \cdot d\vec{l},$$

dove  $\vec{\omega}$  è la vorticità.

Essendo la vorticità definita come  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ , si avrà nel caso cosmologico:

$$\nabla \times \vec{w} = \nabla \times (H\vec{r} + \vec{v}),$$

da cui, applicando il teorema di *Kelvin*, si ottiene che

$$\frac{d}{dt} [\nabla \times (H\vec{r} + \vec{v})] = \nabla \times \left( \dot{H}r + H \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \nabla \times \left( \dot{H}r + H^2\vec{r} + H\vec{v} + \dot{\vec{v}} \right) = 0.$$

Si può quindi vedere che

$$\nabla \times \left( H^2\vec{v} + \dot{\vec{v}} \right) = 0,$$

cioè  $H^2\vec{v} + \dot{\vec{v}}$  è irrotazionale, il che significa che nello *spazio di Fourier* questo vettore è parallelo a  $\vec{k}$ . Pertanto si avrà che, detta  $\vec{v}_\perp$  la componente di  $\vec{v}$  normale al vettore  $\vec{k}$ ,  $H^2\vec{v}_\perp + \dot{\vec{v}}_\perp = 0$ , che quindi porta alla relazione

$$\vec{v}_\perp \propto \frac{1}{a}.$$

Per la componente parallela al vettore  $\vec{k}$ , derivando l'equazione (2.16a), si ottiene

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + \frac{ik}{a} \dot{v}_{\vec{k}} - \frac{ik}{a} H v_{\vec{k}} = 0.$$

Sostituendo (2.16b) nell'equazione trovata, si ha

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + \frac{ik}{a} \left[ -H v_{\vec{k}} - \frac{ik}{a} (c_s^2 \delta_{\vec{k}} + \phi_{\vec{k}}) \right] - \frac{ik}{a} H v_{\vec{k}} = 0.$$

Usando per il potenziale  $\phi_{\vec{k}}$  l'equazione (2.16c) e l'equazione (2.16a), si ottiene l'espressione finale

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + 2H \dot{\delta}_{\vec{k}} + \left[ \frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \rho_b \right] \delta_{\vec{k}} = 0. \quad (2.17)$$

Possiamo definire la quantità

$$k_J = a \frac{\sqrt{4\pi G \rho_b}}{c_s}, \quad (2.18)$$

detta *numero d'onda comovente di Jeans*. Se  $k \ll k_J$ , è possibile approssimare l'equazione (2.18) come

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + 2H \dot{\delta}_{\vec{k}} - 4\pi G \rho_b \delta_{\vec{k}} = 0. \quad (2.19)$$

Ottenuta un'equazione di validità generale, è possibile applicare le ipotesi fatte sul tipo di Universo considerato; ricordando le relazione (1.2) e (1.3) per un Universo di *Einstein-de Sitter*, Universo con curvatura nulla e contenente materia con pressione nulla, si ottiene

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + \frac{4}{3t} \dot{\delta}_{\vec{k}} - \frac{2}{3t^2} \delta_{\vec{k}} = 0. \quad (2.20)$$

Volendo cercare soluzioni dell'equazione in funzione del tempo  $t$ , ponendo  $\delta_{\vec{k}} \propto t^\alpha$  e sostituendo

dola nell'equazione (2.20), si ottengono due soluzioni [7]. La prima restituisce  $\delta_{\vec{k}} \propto t^{-1}$ , che è definita “*decaying mode*”: questa soluzione invalida la linearizzazione in quanto la fluttuazione di densità  $\delta$  diverge nel limite di  $t \rightarrow 0$ ; la seconda soluzione è invece  $\delta_{\vec{k}} \propto t^{\frac{2}{3}}$ , detta “*growing mode*”, soluzione invece compatibile con la linearizzazione, in quanto nel limite di  $t \rightarrow 0$  si ha che la soluzione converge. Sostituendo la seconda soluzione nelle equazioni (2.16b) e (2.16c) è possibile ottenere alcune relazioni per il “*growing mode*”:

$$\delta \propto t^{\frac{2}{3}}, \quad (2.21a)$$

$$v \propto t^{\frac{1}{3}}, \quad (2.21b)$$

$$\phi = \text{const.} \quad (2.21c)$$

## 2.2 Approssimazione di Zel'dovich

È possibile ora studiare l'evoluzione delle fluttuazioni di densità nel cosiddetto *regime debolmente non lineare* passando da un approccio *Euleriano*, in cui si studia il sistema attraverso campi che ne descrivono le grandezze principali, ad uno *Lagrangiano*, ovvero concentrandosi sulla dinamica di singole particelle “*collisionless*”, ovvero non interagenti. In particolar modo verrà trattata l'*approssimazione di Zel'dovich*, modello che dà una prima descrizione del processo di formazione delle strutture cosmiche.

Si parte riscrivendo le equazioni (2.9), (2.10) e (2.11) con una nuova variabile temporale  $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$  e con i seguenti cambi di variabile:

$$\rho \rightarrow \eta \equiv \frac{\rho}{\rho_b} = 1 + \delta, \quad \vec{v} \rightarrow \vec{u} \equiv \frac{d\vec{x}}{da} = \frac{\vec{v}}{a\dot{a}}, \quad \phi \rightarrow \varphi \equiv \frac{3t_*^2}{2a_*^2}\phi, \quad a(t) = a_* \left( \frac{t}{t_*} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Si ottengono le seguenti equazioni:

$$\frac{D\vec{u}}{Da} + \frac{3}{2a}\vec{u} = -\frac{3}{2a}\nabla\varphi, \quad (2.22a)$$

$$\frac{D\eta}{Da} + \eta\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.22b)$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{\delta}{a}, \quad (2.22c)$$

dove la derivata materiale rispetto al fattore di scala  $a(t)$  è  $\frac{D}{Da} \equiv \frac{\partial}{\partial a} + \vec{u} \cdot \nabla$ .

Zel'dovich pone un'*ansatz*: nonostante non si sia in presenza di regime lineare, date le soluzioni (2.21) per il *growing mode*, si può porre  $\vec{u} \approx \text{const.}$  Pertanto si ha che

$$\frac{D\vec{u}}{Da} = 0 \quad (\text{Soluzione lineare}), \quad (2.23)$$

e, per il teorema di *Kelvin*, si ha che  $\vec{u}$  è *irrotazionale*, ovvero può essere espresso come il gradiente di un potenziale scalare

$$\vec{u} = -\nabla\varphi. \quad (2.24)$$

L'ipotesi fatta da *Zel'dovich* è accettabile anche in regime non lineare, poiché, passando allo spazio di *Fourier*, si ha che

$$\varphi_{\vec{k}} \propto \frac{\delta_{\vec{k}}}{k^2}, \quad \vec{u}_{\vec{k}} \propto k\varphi_{\vec{k}} \propto \frac{\delta_{\vec{k}}}{k},$$

per cui, anche se  $\delta_{\vec{k}}$  varia su scale più grandi di  $\varphi_{\vec{k}}$  e  $\vec{u}_{\vec{k}}$ , queste ultime restano lineari per tempi più lunghi (a causa dei pesi  $1/k^2$  e  $1/k$ ).

Inserendo l'*ansatz* di *Zel'dovich* nelle equazioni (2.22) si ottiene un set di tre equazioni



“formalmente esatte”:

$$\frac{D\vec{u}}{Da} = 0, \quad (2.25a)$$

$$\frac{D\eta}{Da} + \eta \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.25b)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\delta}{a}, \quad (2.25c)$$

da cui è possibile estrarre informazioni riguardanti la dinamica delle particelle e della densità. Partendo dall'equazione di *Eulero* (2.25a), una soluzione ha la forma<sup>2</sup>

$$\vec{u}(\vec{x}, a) = \vec{u}_0(\vec{q}), \quad (2.26)$$

ovvero, essendo l'accelerazione nulla, si ha una velocità costante, pari alla velocità iniziale. Date le condizioni iniziali, compatibili con la trattazione lineare, ricordando la (2.24) è possibile definire la velocità iniziale come

$$\vec{u}_0(\vec{q}) = -\nabla_{\vec{q}} \varphi_0(\vec{q}), \quad (2.27)$$

dove  $\varphi_0(\vec{q})$  è il potenziale gravitazionale peculiare iniziale.

Integrando entrambi i membri della (2.26) si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{a_0}^{a(t)} da' \vec{u}(\vec{x}, a') &= \int_{a_0}^{a(t)} da' (-\nabla_{\vec{q}} \varphi_0(\vec{q})) \\ \Rightarrow \vec{x} - \vec{q} &= -(a(t) - a_0) \nabla_{\vec{q}} \varphi_0(\vec{q}). \end{aligned}$$

Imponendo che  $a_0 = 0$  si ottiene la seguente equazione:

$$\vec{x}(\vec{q}, a) = \vec{q} - a \nabla_{\vec{q}} \varphi_0(\vec{q}), \quad (2.29)$$

da cui

$$\vec{u}(\vec{x}(\vec{q}, a), a) = \frac{\vec{x} - \vec{q}}{a}.$$

È quindi possibile descrivere la traiettoria di particelle “*collisionless*”; si nota subito come queste percorrano traiettorie rettilinee sotto l'effetto della loro “*inerzia*”<sup>3</sup> derivante dal potenziale gravitazionale iniziale.

Trovata una soluzione per l'equazione di *Eulero*, è possibile ora passare alla risoluzione dell'equazione di *continuità*. Una soluzione formale può quindi essere ottenuta integrando l'equazione (2.25b):

$$\eta(\vec{x}, a) = \eta_0(\vec{q}) e^{-\int_{a_0}^a da' \nabla \cdot \vec{u}[\vec{x}(\vec{q}, a), a]}. \quad (2.30)$$

Un approccio conveniente allo studio dell'evoluzione della densità è partire dalla conservazione della massa di un elemento infinitesimo di fluido, definita come

$$\eta(\vec{x}, a) d^3x = \eta_0(\vec{q}) d^3q.$$

Ricordando il cambio di coordinate da *Lagrangiane* ad *Euleriane* e la definizione della densità iniziale  $\eta_0(\vec{q}) = (1 + \delta_0(\vec{q}))$ , si ha che

$$\eta(\vec{x}(\vec{q}, a), a) = (1 + \delta_0(\vec{q})) \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right|,$$

<sup>2</sup> $\vec{q}$  rappresenta la posizione nelle coordinate *Lagrangiane*, mentre la  $\vec{x}$  è la posizione in coordinate *Euleriane*.

<sup>3</sup>nel senso Newtoniano.

dove con  $\left| \frac{\partial q}{\partial x} \right|$  si intende lo *Jacobiano* della mappa  $\vec{q} \rightarrow \vec{x}$ .

Prendendone il limite per  $a_0 \rightarrow 0$ , dall'equazione di *Poisson* si vede che  $\varphi \simeq const$ , da cui  $\delta_0 \rightarrow 0$ ; pertanto è possibile esprimere la densità come

$$\eta(\vec{x}(\vec{q}, a), a) = \left| \frac{\partial x}{\partial q} \right|^{-1}. \quad (2.31)$$

Ricordando la mappa (2.29), le componenti della matrice *Jacobiana* saranno

$$\frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \delta_j^i - a \frac{\partial^2 \varphi_0(\vec{q})}{\partial q_i \partial q^j}. \quad (2.32)$$

Il tensore  $D_{0,ij}(\vec{q}) \equiv \frac{\partial^2 \varphi_0(\vec{q})}{\partial q_i \partial q^j}$ , detto *tensore di deformazione*, esprime la variazione della distribuzione di materia oscura nello spazio tridimensionale. In particolare, può essere diagonalizzato localmente, fissando i tre assi principali  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ . Si definiscono  $\lambda_1(\vec{q})$ ,  $\lambda_2(\vec{q})$  e  $\lambda_3(\vec{q})$  gli autovalori del tensore nei rispettivi assi. È possibile quindi riscrivere l'equazione (2.31) come

$$\eta(\vec{x}(\vec{q}, a), a) = \frac{1}{(1 - \lambda_1(\vec{q})a)(1 - \lambda_2(\vec{q})a)(1 - \lambda_3(\vec{q})a)}. \quad (2.33)$$

Se il potenziale gravitazionale iniziale  $\varphi_0(\vec{q})$  è di tipo gaussiano<sup>4</sup> si ha il 92% di probabilità che solo uno dei tre autovalori sia positivo; detto  $\lambda_i(\vec{q})$  tale autovalore, esisterà allora un valore del fattore di scala

$$a_{sc} = \frac{1}{\lambda_i(\vec{q})}, \quad (2.34)$$

tale per cui la densità  $\eta$  diviene infinita (si viene a generare una *caustica*); accade il cosiddetto *shell-crossing*, ovvero particelle con diverse posizioni *Lagrangiane*  $\vec{q}$  arrivano nella stessa posizione *Euleriana*  $\vec{x}$  generando una divergenza nello *Jacobiano*. Poiché il collasso avviene lungo uno dei tre assi principali, da un ellissoide triassiale, all'istante (2.34) viene a crearsi una struttura bidimensionale, della *pancake*, di dimensione finita ma densità infinita.

## Problemi legati all'Approssimazione di Zel'dovich

L'approssimazione di *Zel'dovich* perde di validità nel momento dello *shell-crossing*: le principali ragioni per cui va cercata un'alternativa sono la presenza di zone a densità di materia infinita e l'impossibilità di ottenere strutture stabili nel tempo. Difatto, essendo l'approssimazione di *Zel'dovich* un modello di particella libera, queste, non risentendo di alcuna interazione, continueranno a muoversi lungo traiettorie rettilinee, anche dopo il fenomeno dello *shell-crossing*. Non sarà pertanto possibile ottenere dei *pancakes* "permanenti".

## 2.3 Approssimazione di Adesione

Un'alternativa, proposta nell'articolo di Gurbatov, Saichev e Shandarin del 1989 [2], è aggiungere alle equazioni dei fluidi (2.25) un termine di viscosità cinematica artificiale  $\nu$ , ottenendo così nuove equazioni:

$$\frac{D\vec{u}}{D\tau} = \nu \nabla^2 \vec{u}, \quad (2.35a)$$

$$\frac{D\eta}{D\tau} = -\eta \nabla \cdot \vec{u}, \quad (2.35b)$$

---

<sup>4</sup>come predetto dal modello dell'inflazione.

avendo ridefinito la variabile temporale come  $\tau \equiv a(t)$ .

Il termine di viscosità simula, all'interno della caustica, l'interazione tra particelle dovuta alla presenza di un potenziale gravitazionale, interazione limitata quindi nella zona dello *shell-crossing* e pertanto trascurabile nello spazio circostante.

L'equazione (2.35a), chiamata equazione di *Burgers* 3D, può essere risolta ricordando innanzitutto che, essendo  $\vec{u}$  irrotazionale, può essere definito come

$$\vec{u} \equiv \nabla\Phi,$$

dove  $\Phi$  è il *potenziale velocità*.

Sostituendolo nella (2.35a) si ottiene l'equazione di *Bernoulli*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 = \nu\nabla^2\Phi. \quad (2.36)$$

È possibile risolvere analiticamente la (2.36) applicando la trasformazione non-lineare di *Hopf-Cole*, ridefinendo quindi il potenziale velocità come

$$\Phi = -2\nu \ln U, \quad (2.37)$$

con  $U$  detto *Exponential*.

Sostituendo la nuova variabile nell'equazione (2.36) si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-2\nu \ln U)}{\partial\tau} + \frac{1}{2}[\nabla(-2\nu \ln U)]^2 &= \nu\nabla^2(-2\nu \ln U), \\ -2\nu\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial\tau} + \cancel{2\nu^2\frac{(\nabla U)^2}{U^2}} &= -2\nu^2\frac{\nabla^2 U}{U} + \cancel{2\nu^2\frac{(\nabla U)^2}{U^2}}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\frac{\partial U}{\partial\tau} = \nu\nabla^2 U. \quad (2.38)$$

Questa equazione, detta equazione di *Fokker-Planck* o equazione di *diffusione lineare*, può essere risolta conoscendo le condizioni al contorno e le condizioni iniziali.

Si suppone quindi che una soluzione della (2.38) abbia la forma

$$U(\vec{x}, \tau) = f(\tau)g(\vec{x}), \quad (2.39)$$

ed in particolare, la parte dipendente dal tempo  $\tau$  sia del tipo  $f(\tau) = e^{E\tau}$ . Allora, sostituendo nella (2.38) si ha che

$$Eg(\vec{x}) = \nu\nabla^2 g(\vec{x}),$$

e, passando allo spazio di *Fourier*,

$$\begin{aligned} E_{\vec{k}}g_{\vec{k}} &= -\nu k^2 g_{\vec{k}} \\ \Rightarrow E_{\vec{k}} &= -\nu k^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Pertanto, la soluzione generale della (2.38) avrà la forma

$$U(\vec{x}, \tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-\nu k^2 \tau} g_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (2.41)$$

dove è possibile determinare i coefficienti  $g_{\vec{k}}$  tramite condizioni iniziali e al contorno.

Si cerca ora il *kernel* della soluzione (2.41), imponendo che

$$K(\vec{x}, \tau | \vec{q}, 0) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \delta(\vec{x} - \vec{q}).$$

Al fine di ottenere una soluzione di questo tipo, è possibile scegliere i coefficienti  $g_{\vec{k}}$  della forma

$$g_{\vec{k}} = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{q}}.$$

Allora il *kernel* sarà

$$K(\vec{x}, \tau|\vec{q}, 0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-\nu k^2 \tau} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{q})},$$

che, integrando tramite completamento del quadrato, restituisce

$$K(\vec{x}, \tau|\vec{q}, 0) = (4\pi\nu\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{q})^2}{4\nu\tau}}, \quad (2.42)$$

una Gaussiana centrata in  $\vec{q}$  con dispersione  $2\nu\tau$ .

Per ottenere la soluzione completa, si fa uso di un risultato derivante dal *teorema di Bayes*: dati due eventi A e B, si ha che la probabilità di ottenere A dopo B è

$$P(A|B) = P(A, B)/P(B). \quad (2.43)$$

Se si vuole calcolare  $P(A)$ , si dovrebbe integrare la probabilità di ottenere A e B nello spazio di B, ovvero

$$P(A) = \int dB P(A, B).$$

Pertanto, invertendo la (2.43) e sostituendola nell'integrale, si ottiene

$$P(A) = \int dB P(B) P(A|B). \quad (2.44)$$

Questa relazione, che prende il nome di “*equazione di Chapman-Kolmogorov*”, può essere utilizzata per la risoluzione dell'equazione di *Fokker-Planck*: infatti la soluzione generale avrà la forma

$$U(\vec{x}, \tau) = \int d^3q U_0(\vec{q}) K(\vec{x}, \tau|\vec{q}, 0). \quad (2.45)$$

Resta da determinare  $U_0(\vec{q})$ : ricordando la definizione  $\vec{u}_0(\vec{q}) = -\nabla_q \varphi(\vec{q})$  ed il cambio di variabile (2.37) si ha che

$$\varphi_0 = -2\nu \ln U_0 \quad \Rightarrow \quad U_0 = e^{-\frac{\varphi_0}{2\nu}}.$$

È possibile quindi scrivere la soluzione dell'equazione (2.38) come:

$$U(\vec{x}, \tau) = \int \frac{d^3q}{(4\pi\nu\tau)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\left[ \frac{(\vec{x}-\vec{q})^2}{2\tau} - \varphi_0(\vec{q}) \right]}{2\nu} \right\}, \quad (2.46)$$

che può essere riscritta come

$$U(\vec{x}, \tau) = \int \frac{d^3q}{(4\pi\nu\tau)^{3/2}} \exp \left\{ \frac{-S(\vec{x}, \vec{q}, \tau)}{2\nu} \right\}. \quad (2.47)$$

L'esponente  $S(\vec{x}, \vec{q}, \tau)$  non è altro che l'*azione* classica, soluzione dell'equazione di *Bernoulli* libera, ovvero con  $\nu=0$ :

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (\nabla S)^2 = 0.$$

Ricordando che  $\vec{u}(\vec{x}, \tau) = -2\nu \frac{\nabla U}{U}$ , sarà possibile trovare una soluzione per  $\vec{u}$ : la velocità sarà allora

$$\vec{u}(\vec{x}, \tau) = \frac{\int d^3q \frac{\vec{x}-\vec{q}}{\tau} \exp \{ -S(\vec{x}, \vec{q}, \tau)/2\nu \}}{\int d^3q \exp \{ -S(\vec{x}, \vec{q}, \tau)/2\nu \}}, \quad (2.48)$$

mentre la posizione sarà

$$\vec{x}(\vec{q}, \tau) = \vec{q} + \int_0^\tau d\tau' \vec{u}[\vec{x}(\vec{q}, \tau'), \tau']. \quad (2.49)$$

Per la densità  $\eta$  l'equazione rimane

$$\eta(\vec{x}, \tau) = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right|^{-1}. \quad (2.50)$$

Poiché il coefficiente  $\nu$  regola lo spessore dei “*pancakes*” che vengono a crearsi, si è interessati a ricercare soluzioni nel limite di  $\nu \rightarrow 0$ ; si vede come, in questo limite, se in presenza di una funzione “*sharply-peaked*”, il contributo principale all'integrale verrà dato dal punto di minimo assoluto  $\vec{q}_s$  dell'azione  $S(\vec{x}, \vec{q}, \tau)$ , per  $\vec{x}$  e  $\tau$  fissati. È possibile riscrivere l'integrale espandendo l'azione (fino al secondo ordine) attorno al punto di minimo  $\vec{q}_s$ :

$$U(\vec{x}, \tau) = (4\pi\nu\tau)^{-3/2} \int d^3q \exp \left\{ -\frac{S(\vec{x}, \vec{q}_s, \tau)}{2\nu} - \frac{1}{4\nu} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\vec{q}_s} \delta q^i \delta q_j \right\}.$$

Definendo

$$j_s(\vec{x}, \vec{q}_s, \tau) = \left( \det \left[ \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} \right]_{\vec{q}_s} \right)^{-1/2},$$

si avrà

$$U(\vec{x}, \tau) = \exp \left\{ -\frac{S(\vec{x}, \vec{q}_s, \tau)}{2\nu} \right\} \sum_s j_s(\vec{x}, \vec{q}_s, \tau). \quad (2.51)$$

Infine, ricordando che il punto di minimo assoluto  $\vec{q}_s$  soddisfa la relazione

$$\nabla_q S(\vec{x}, \vec{q}, \tau) \Big|_{\vec{q}_s} = 0,$$

è possibile ottenere la velocità  $\vec{u}$

$$\vec{u}(\vec{x}, \tau) = \sum_s \frac{\vec{x} - \vec{q}_s}{\tau} w_s(\vec{x}, \vec{q}_s, \tau), \quad (2.52)$$

con  $w_s(\vec{x}, \tau) \equiv j_s / \sum_s j_s$ , coefficiente che funge da peso per le varie posizioni iniziali  $\vec{q}_s$ .<sup>5</sup>

È possibile quindi vedere come, a differenza dell'approssimazione di *Zel'dovich*, la velocità finale prende contributi da più traiettorie di particelle, le cui posizioni iniziali vengono date dal minimo assoluto dell'azione.

L'approssimazione di adesione permette così la creazione di strutture stabili grazie alla presenza del termine di viscosità aggiunto artificialmente nelle equazioni. Dato però lo studio per  $\nu \rightarrow 0$ , simulando quindi un'interazione a cortissimo raggio tra le particelle di CDM, ci si aspetta che poco fuori dall'addensamento di materia, le particelle si comportino come predetto all'approssimazione di *Zel'dovich*. Pertanto il modello di Adesione andrà a descrivere unicamente la formazione dello “*scheletro*” delle strutture cosmiche.

<sup>5</sup>Esiste una tecnica *geometrica* per la determinazione dei punti di minimo dell'azione [8]: si cercano i punti di tangenza al potenziale velocità iniziale  $\varphi_0(\vec{q})$ , costruendo parabole a  $\vec{x}$  e  $\tau$  fissati della forma:

$$p(\vec{x}, \vec{q}, \tau) = -\frac{(\vec{x} - \vec{q})^2}{2\tau} + H$$

Si fa variare il coefficiente  $H$  da  $-\infty$  fino al valore per cui la parabola tocca il potenziale  $\varphi_0$ : i punti di contatto corrispondono alle coordinate *Lagrangiane* delle particelle interagenti, mentre il vertice della parabola corrisponde alla posizione *Euleriana* dell'interazione. Per piccoli valori di  $\tau$  le parabole tangono la curva in un solo punto, mentre, all'aumentare di  $\tau$ , queste toccano più punti della curva: ciò equivale al fatto che tutte le particelle le cui coordinate *Lagrangiane* si trovano tra i due punti di tangenza della parabola al potenziale  $\varphi_0$  vanno a condensare in un'unica struttura.

## Problemi legati ai due modelli

Come si è visto, il modello di *Zel'dovich* dà una buona descrizione della dinamica della CDM fino allo *shell-crossing*, mentre l'approssimazione di *Adesione* offre una soluzione, seppur artificiale, al problema dell'instabilità nel tempo delle strutture, divenendo quindi un buon modello *base* per lo studio della formazione delle strutture cosmiche.

Ciò nonostante, i due modelli non offrono una piena descrizione del fenomeno in quanto persistono alcuni problemi che le due teorie non spiegano:

- L'approssimazione di *Zel'dovich* fornisce soluzioni esatte prima dello *shell-crossing* in 1D, mentre necessita di correzioni dovute all'attrazione gravitazionale in 2D e 3D;
- Entrambi i modelli non vietano la possibilità di avere densità di materia negativa;
- L'approssimazione di *Zel'dovich* suppone l'esistenza di punti nello spazio a densità infinita (detti *caustiche*), cosa non compatibile con la realtà;
- *Zel'dovich* inoltre non rende conto della presenza di interazione tra particelle, ma la riduce unicamente a quella dovuta alla loro *inerzia*;

Ci si sente quindi in dovere di ricercare nuove alternative che siano in grado di fornire una descrizione completa del fenomeno

# Capitolo 3

## Approccio semiclassico alla formazione delle strutture cosmiche

Un approccio alternativo all'approssimazione di *Zel'dovich* può essere ricercato nel formalismo della meccanica quantistica. Nel seguente capitolo verrà analizzato quindi il problema della dinamica della CDM cercando di trovare una relazione tra le variabili *classiche* dei fluidi ed il linguaggio dei propagatori. Partendo dall'idea di *L.M. Widrow* e *N. Kaiser* del 1993 [10] di utilizzare l'approccio fluidodinamico in meccanica quantistica sviluppato da *Madelung* per lo studio della dinamica in cosmologia, si passerà quindi all'analisi delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger ottenute, facendo uso della *teoria Lagrangiana delle perturbazioni*.

### 3.1 Trasformazione di Madelung per le equazioni dei fluidi ed equivalenza con l'equazione di Schrödinger

Alla base di questa teoria alternativa vi è il formalismo sviluppato da E. Madelung nel 1926 [3] nel tentativo di costruire un'alternativa alla teoria quantistica di Schrödinger attraverso le equazioni della fluidodinamica [4].

Si parte dalla seguente equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}, t), \quad (3.1)$$

dove  $V(\vec{x})$  è un opportuno potenziale.

L'ipotesi di Madelung riguarda la forma della funzione d'onda:

$$\psi(\vec{x}, t) \equiv R(\vec{x}, t) \exp \left\{ i \frac{S(\vec{x}, t)}{\hbar} \right\}, \quad (3.2)$$

funzione d'onda polare dove  $R(\vec{x}, t)$  rappresenta l'ampiezza e  $S(\vec{x}, t)$  è invece l'azione; sia  $R$  che  $S$  sono quantità reali. In particolare è possibile definire la densità di probabilità come <sup>1</sup>

$$\rho(\vec{x}, t) = \psi^* \psi = R^2, \quad (3.3)$$

densità ovunque non negativa.

Inserendo la funzione d'onda nell'equazione (3.1) e derivando correttamente si ottiene:

---

<sup>1</sup>Definiamo  $\psi^*$  come il complesso coniugato della funzione d'onda.

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 R - \frac{i\hbar}{2m} R \nabla^2 S - \frac{i\hbar}{m} \nabla R \cdot \nabla S + \frac{R}{2m} (\nabla S)^2 + VR \right] e^{i\frac{S}{\hbar}} = \left[ i\hbar \frac{\partial R}{\partial t} - R \frac{\partial S}{\partial t} \right] e^{i\frac{S}{\hbar}}.$$

È possibile distinguere una parte reale ed una immaginaria.  
Dalla parte reale si ottiene

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 = - \left( V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \nabla^2 R \right) \quad (3.4)$$

equazione rappresentante la versione quantistica dell'equazione di Hamilton-Jacobi, formalmente identica all'equazione di Bernoulli. La quantità:

$$Q(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \nabla^2 R,$$

è chiamata *Bohm quantum potential*, centrale nell'interpretazione della meccanica quantistica di Bohm.

Dalla parte immaginaria si ottiene

$$-\nabla \cdot \left( \frac{R^2}{m} \nabla S \right) = \frac{\partial R^2}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Definendo la corrente di probabilità come

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*] = \frac{R^2}{m} \nabla S$$

e la velocità come

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\nabla S}{m},$$

, è possibile riscrivere la (3.5) come

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.6)$$

equazione formalmente equivalente all'equazione di continuità.

È possibile ora compiere il procedimento inverso, ovvero derivare l'equazione di Schrödinger partendo dalle equazioni dei fluidi, dimostrandone quindi l'equivalenza.

Si parte dal considerare le equazioni per un fluido *pressurless*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 = -V, \quad (3.7b)$$

dove l'equazione di Bernoulli è stata riscritta in funzione del potenziale velocità  $\phi$ , poiché la velocità è irrotazionale, ovvero  $\vec{v} = \nabla \phi$ .

Si considera nuovamente una funzione d'onda seguendo l'ipotesi di Madelung, con la seguente forma polare:

$$\psi(\vec{x}, t) \equiv R(\vec{x}, t) \exp \left\{ i \frac{\phi(\vec{x}, t)}{\nu} \right\}, \quad (3.8)$$

tale che la corrispondente densità di probabilità sia

$$\rho(\vec{x}, t) \equiv \psi^* \psi = R^2.$$

Si inizia quindi con il calcolo del gradiente della  $\psi$ :



$$\nabla\psi = e^{i\frac{\phi}{\nu}}\nabla R + \frac{i}{\nu}Re^{i\frac{\phi}{\nu}}\nabla\phi,$$

da cui, applicando nuovamente l'operatore  $\nabla$ , si ottiene

$$\nabla^2\psi = e^{i\frac{\phi}{\nu}}\left[\nabla^2 R + \frac{2i}{\nu}\nabla R \cdot \nabla\phi + \frac{i}{\nu}R\nabla^2\phi - \frac{1}{\nu^2}R(\nabla\phi)^2\right]. \quad (3.9)$$

Usando l'equazione di continuità si ottiene

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot (R^2\nabla\phi) = 0,$$

$$2\frac{\partial R}{\partial t} = -(2\nabla R \cdot \nabla\phi + R\nabla^2\phi),$$

che, sostituita nella (3.9) al posto dei due termini centrali nel r.h.s., restituisce

$$\nabla^2\psi = e^{i\frac{\phi}{\nu}}\left[\nabla^2 R - \frac{2i}{\nu}\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{1}{\nu^2}R(\nabla\phi)^2\right]. \quad (3.10)$$

Infine, basterà invertire l'equazione per ottenere

$$(\nabla\phi)^2 = \frac{2\nu^2}{R}\nabla^2 R - \frac{2i\nu}{R}\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\nu^2}{R}e^{-i\frac{\phi}{\nu}}\nabla^2\psi. \quad (3.11)$$

Si passa ora al calcolo della derivata temporale della  $\psi$ , che restituisce

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = e^{i\frac{\phi}{\nu}}\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{i}{\nu}e^{i\frac{\phi}{\nu}}\frac{\partial\phi}{\partial t},$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{i\nu}{R}\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{i\nu}{R}e^{-i\frac{\phi}{\nu}}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (3.12)$$

Sostituendo le equazioni (3.11) e (3.12) nell'equazione (3.7b) è possibile ottenere l'equazione finale

$$i\nu\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\nu^2}{2}\nabla^2\psi + \left(V + \frac{\nu^2}{2}\frac{\nabla^2 R}{R}\right)\psi. \quad (3.13)$$

È stata ottenuta nuovamente un'equazione formalmente identica all'equazione di Schrödinger, in cui le quantità d'interesse, quali posizione e velocità sono contenute in un campo scalare complesso  $\psi$ ; è possibile notare nuovamente la presenza del termine  $P = \frac{\nu^2}{2}\frac{\nabla^2 R}{R}$ , detto di *quantum pressure*, che, confrontato con l'equazione di Schrödinger, risulta essere il termine Q che era stato definito come *Bohm quantum potential*.

Il nuovo approccio aggira due degli ostacoli emersi nello studio del problema nelle sezioni 2.2 e 2.3. Si ha infatti che:

- L'*ansatz* di Madelung sulla forma della funzione d'onda porta a definire una densità di probabilità che risulta essere sempre non negativa, andando quindi ad aggirare il problema riscontrato della possibilità della presenza di punti nello spazio con densità negativa, situazione non fisica;
- La presenza nell'equazione (3.13) del fattore  $\nu$  permette di non avere *caustiche*, in quanto, nei punti in qui si ha densità di materia infinita, sarà possibile riscaldare l'intera equazione scegliendo un opportuno valore del coefficiente  $\nu$ , che fungerà da *softener*, tale da eliminare le divergenze.

## 3.2 Trasformazione di Madelung in cosmologia

Seguendo i risultati ottenuti nella sezione 3.1, è possibile applicare la trasformazione di Madelung alle equazioni dei fluidi in cosmologia.

Si parte quindi considerando le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial \eta}{\partial a} + \nabla \cdot (\eta \nabla \phi_u) = 0, \quad (3.14a)$$

$$\frac{\partial \phi_u}{\partial a} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_u)^2 = V_{eff}, \quad (3.14b)$$

$$\nabla^2 \varphi_g = \frac{\delta}{a}, \quad (3.14c)$$

ricordando i cambi di variabile:

$$\eta \equiv \frac{\rho}{\rho_b} = 1 + \delta, \quad \vec{u} \equiv \frac{d\vec{x}}{da} = \nabla \phi_u, \quad V_{eff} = \frac{2}{3a} (\varphi_g - \phi_u).$$

La funzione d'onda avrà la forma

$$\psi \equiv Re^{i\frac{\phi}{\nu}} = (1 + \delta)^{1/2} e^{i\frac{\phi}{\nu}}. \quad (3.15)$$

Seguendo la procedura vista nella precedente sezioni è possibile ottenere l'equazione di Schrödinger <sup>2</sup>

$$i\nu \frac{\partial \psi}{\partial a} = -\frac{\nu^2}{2} \nabla^2 \psi + \left[ -V_{eff} + \frac{\nu^2}{2} \frac{\nabla^2 R}{R} \right] \psi, \quad (3.16)$$

dove il potenziale totale soddisfa l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \left( V_{eff} + \frac{3i\nu}{4a} \ln(\psi/\psi^*) \right) = -\frac{3}{2a} (|\psi|^2 - 1). \quad (3.17)$$

Nell'equazione (3.16) è presente il termine di *quantum pressure*; se si esclude dall'equazione di Schrödinger e, attraverso un processo inverso si calcola l'equazione di Bernoulli, si ottiene:

$$\frac{\partial \phi_u}{\partial a} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 = V_{eff} - \frac{\nu^2}{2} \frac{\nabla^2 R}{R}. \quad (3.18)$$

Si vede quindi che omettendo il termine di *quantum pressure* dall'equazione di Bernoulli lo si trova nell'equazione di Schrödinger e viceversa; sarà quindi possibile trascurare tale termine dall'equazione di Schrödinger per semplificare lo studio delle soluzioni, poiché questo sarà comunque presente nell'equazione di Bernoulli.

## 3.3 Approccio perturbativo allo studio delle soluzioni

L'idea è di sondare le soluzioni delle equazioni di Schrödinger attraverso un approccio perturbativo, ricorrendo quindi alla *teoria delle perturbazioni*. Si potranno studiare in questo modo le soluzioni ai vari ordini perturbativi [9].

Primo passo nell'analisi sarà costruire le espansioni perturbative delle grandezze di interesse.

---

<sup>2</sup>Il coefficiente  $\nu$  è formalmente equivalente al coefficiente  $\hbar$  presente nell'equazione di Schrödinger quantistica. Nella seguente dissertazione si è deciso di definire il coefficiente con una lettera differente per evitare di indurre a credere che  $\hbar$  nella trattazione fosse effettivamente la costante di Planck quantistica. Va sottolineato però che, quando si tratterà il limite classico, va ben inteso che si sta prendendo il limite per  $\nu \rightarrow 0$ , a causa della equivalenza formale tra i due coefficienti.

### 3.3.1 Espansioni perturbative delle variabili dei fluidi

Si riparte quindi dalle equazioni dei fluidi riscritte nel seguente modo:

$$\frac{\partial \delta}{\partial a} - \nabla \cdot [(1 + \delta) \nabla \phi_u] = 0, \quad (3.19a)$$

$$\frac{\partial \phi_u}{\partial a} + \frac{1}{2} |\nabla \phi_u|^2 = V_{eff}, \quad (3.19b)$$

$$\nabla^2 \varphi_g = \frac{\delta}{a}. \quad (3.19c)$$

Le equazioni sono rispettivamente l'equazione di *continuità*, di *Bernoulli* e di *Poisson*, dove  $\varphi_g$  non è altro che il potenziale gravitazionale peculiare, mentre  $V_{eff}$  è il potenziale effettivo, definito come:

$$V_{eff} = \frac{3}{2a} (\varphi_g - \phi_u). \quad (3.20)$$

Seguendo una procedura simile a quella svolta nella sezione 2.1, linearizzando cioè le equazioni nel limite di  $a \rightarrow 0$ , si trovano soluzioni analitiche solo se le condizioni al contorno sono del tipo

$$\delta^{(ini)} = 0, \quad \varphi_g^{(ini)} = \phi_u^{(ini)}; \quad (3.21)$$

queste condizioni assicurano la scelta della “*growing mode*”, in accordo con quanto visto nel capitolo precedente.

Poiché l'idea è di studiare le equazioni dei fluidi facendo uso della *teoria delle perturbazioni standard*, l'*ansatz* alla base dell'intera dissertazione successiva sarà esprimere tutte le grandezze di interesse come serie di potenze rispetto alla variabile  $a(t)$ . Si avrà allora:

$$\delta(\vec{x}, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)} a^n, \quad \phi_u(\vec{x}, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_u^{(n)} a^{n-1}, \quad (3.22)$$

$$V_{eff}(\vec{x}, a) = \sum_{n=1}^{\infty} V_{eff}^{(n)} a^{n-2}. \quad (3.23)$$

Date quindi queste ipotesi, poiché sono noti tutti gli ordini degli sviluppi della serie della densità  $\delta$  e del potenziale velocità  $\phi_u$ , attraverso relazioni di ricorsione standard, è possibile determinare tutti gli ordini dell'espansione perturbativa del potenziale effettivo  $V_{eff}$  [1]. Per ricavare i primi due ordini perturbativi del potenziale, si parte dalle espansione della densità e del potenziale velocità:

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} &= \nabla^2 \varphi_g^{(ini)}, & \phi^{(1)} &= \varphi_g^{(1)}, \\ \delta^{(2)} &= \frac{5}{7} \varphi_{g,ll}^{(ini)} \varphi_{g,mm}^{(ini)} + \varphi_{g,llm}^{(ini)} \varphi_{g,m}^{(ini)} + \frac{2}{7} \varphi_{g,lm}^{(ini)} \varphi_{g,lm}^{(ini)}, \\ \phi_u^{(2)} &= \nabla^{-2} \left[ \frac{3}{7} \varphi_{g,ll}^{(ini)} \varphi_{g,mm}^{(ini)} + \varphi_{g,llm}^{(ini)} \varphi_{g,m}^{(ini)} + \frac{4}{7} \varphi_{g,lm}^{(ini)} \varphi_{g,lm}^{(ini)} \right], \end{aligned}$$

dove tutte le derivate e le dipendenze sono rispetto le coordinate *Euleriane*.

Per trovare un'espressione per l'ordine perturbativo n-esimo del potenziale effettivo si procede sostituendo  $\phi_u^{(n)}$  nell'equazione di *Bernoulli* (3.19b), arrivando ad ottenere:

$$V_{eff}^{(n)} = \frac{\partial \phi_u^{(n)}}{\partial a} - \nabla^{-2} \sum_{s_1+s_2=n} \frac{1}{2} \left( \phi_{u,l}^{(s_1)} \phi_{u,l}^{(s_2)} \right)_{mm},$$

da cui è possibile ricavare i primi due ordini perturbativi:

$$V_{eff}^{(1)} = 0, \quad (3.24a)$$

$$V_{eff}^{(2)} = \frac{3}{7} \nabla^{-2} \left[ (\nabla^2 \varphi_g^{(ini)})^2 - (\nabla_i \nabla_j \varphi_g^{(ini)})^2 \right]. \quad (3.24b)$$

È possibile osservare che, in una dimensione entrambi gli ordini perturbativi sono nulli, mentre per un numero maggiore di dimensioni, il secondo termine è generalmente non nullo. Sarà inoltre possibile vedere in seguito come il termine al secondo ordine del potenziale effettivo  $V_{eff}^{(2)}$  costituisca la principale correzione allo studio della dinamica della materia oscura.

### 3.3.2 Teoria Lagrangiana delle perturbazioni

Le soluzioni potranno essere studiate perturbativamente sia con un approccio Lagrangiano sia con uno Euleriano. Si sceglie di utilizzare la *teoria Lagrangiana delle perturbazioni* (LPT) poiché offre una serie di vantaggi sia dal punto di vista teorico che da un punto di vista numerico. Infatti, è assicurata matematicamente l'analiticità delle soluzioni perturbative solo nelle coordinate Lagrangiane, facendo quindi della LPT una teoria convergente per le equazioni dei fluidi; dal punto di vista numerico, l'approccio perturbativo Lagrangiano dà risultati, computando simulazioni ad N-corpi, più in linea con il modello teorico.

Si parte allora dalla mappa Lagrangiana dalla posizione iniziale  $\vec{q}$  al tempo  $a = 0$  alla posizione finale Euleriana  $\vec{x}$  al tempo  $a$ ; tale mappa avrà la seguente forma:

$$\vec{q} \rightarrow \vec{x}(\vec{q}, a) = \vec{q} + \vec{\xi}(\vec{q}, a). \quad (3.25)$$

La quantità  $\vec{\xi}$  è il “*Lagrangian displacement*” e contiene l'informazione sulla dinamica delle particelle. È possibile definire inoltre la rappresentazione Lagrangiana della velocità come

$$\vec{v}(\vec{x}(\vec{q}, a), a) = \partial_a^L \vec{x}(\vec{q}, a) \equiv \dot{\vec{x}}(\vec{q}, a). \quad (3.26)$$

All'istante iniziale la velocità Lagrangiana e quella Euleriana sono equivalenti.

La conservazione del momento per la mappa Lagrangiana può essere scritta come

$$\ddot{\vec{x}}(\vec{q}, a) + \frac{3}{2a} \dot{\vec{x}}(\vec{q}, a) = -\frac{3}{2a} \nabla_x \varphi_g(\vec{x}(\vec{q}, a), a), \quad (3.27)$$

che può essere ridefinita come equazione scalare per il *displacement* prendendone la divergenza Euleriana ed usando la conservazione della massa  $\bar{\rho}[1 + \delta(\vec{x})]d^3x = \bar{\rho}d^3q$ , che integrata restituisce  $\delta = \frac{1}{J} - 1$ .

Un altro risultato necessario alla trattazione del problema deriva dall'avere una velocità irrotazionale in coordinate Euleriane; ciò implica che il rotore di  $\vec{v}$  sia nullo, ovvero  $\nabla_x \times \vec{v} = 0$ . Utilizzando la mappa Lagrangiana e traducendo l'ipotesi di vorticità nulla in coordinate Lagrangiane, si ottiene la seguente espressione:

$$\varepsilon_{ijk} x_{l,j} \dot{x}_{l,k} = 0, \quad (3.28)$$

dove  $\varepsilon_{ijk}$  è il simbolo di Levi-Civita, espressione definita *Invariante di Cauchy*.

Le equazioni (3.27) e (3.28) costituiscono un set completo di equazioni in coordinate Lagrangiane da cui è possibile studiare la dinamica delle particelle di CDM.

Volendo quindi studiare le soluzioni perturbative del problema, è utile riscrivere il *displacement*, seguendo l'*ansatz* proposta nella sezione 3.3.1, come espansione rispetto al parametro  $a$ :

$$\xi_i(\vec{q}, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_i^{(n)}(\vec{q}) a^n. \quad (3.29)$$

In questa ipotesi si ritrova uno dei vantaggi che la teoria perturbativa Lagrangiana dà: si ha infatti analiticità rispetto al tempo solo nell'approccio Lagrangiano [12], assicurando quindi la convergenza delle serie.

Come per le variabili dei fluidi è possibile scrivere i primi termini perturbativi [12], calcolati facendo uso di relazioni di ricorsione:

$$\xi_i^{(1)} = -\nabla_i^L \varphi_g^{(ini)}(\vec{q}) \equiv \xi_i^{ZA}(\vec{q}, a)/a, \quad (3.30a)$$

$$\xi_i^{(2)} = -\frac{3}{7} \nabla_L^{-2} \nabla_i^L \mu_2 \equiv \xi_i^{2LPT}(\vec{q}, a)/a^2, \quad (3.30b)$$

dove  $\mu_2$  è il kernel:

$$\mu_2(\vec{q}) = \frac{1}{2} \left[ (\nabla_L^2 \varphi_g^{(ini)})^2 - (\nabla_i^L \nabla_j^L \varphi_g^{(ini)})^2 \right];$$

si noti come il nucleo  $\mu_2$  sia formalmente identico all'espansione al secondo ordine del potenziale effettivo  $\nabla^2 V_{eff}^{(2)}$ .

Nelle (3.12) compaiono due termini:  $\xi_i^{ZA}$  e  $\xi_i^{2LPT}$ . I due ordini perturbativi corrispondono quindi rispettivamente al displacement ottenuto per l'approssimazione di Zel'dovich, trattata nel capitolo 2.2, ed al termine perturbativo al secondo ordine della teoria perturbativa Lagrangiana. Il primo descrive quindi la dinamica di particelle non interagenti, che seguiranno traiettorie rettilinee; il secondo invece descrive la dinamica di particelle interagenti gravitazionalmente, poiché la gravità non agisce localmente. Da sottolineare come entrambi gli ordini perturbativi siano dipendenti dal gradiente del potenziale gravitazionale iniziale.

L'ultimo passo è esprimere gli invarianti di Cauchy (3.28) perturbativamente, definendone i vari ordini.

È possibile quindi definire l'ordine n-esimo dell'invariante di Cauchy come:

$$C_i^{[n]} := \varepsilon_{ijk} \left( \delta_{lj} + \xi_{l,j}^{[n]} \right) \dot{\xi}_{l,k}^{[n]}, \quad (3.31)$$

dove  $\xi_l^{[n]} := \sum_{i=1}^n \xi_l^{(i)}(\vec{q}) a^i$  e  $\dot{\xi}_l^{[n]} := \sum_{i=1}^n \dot{\xi}_l^{(i)}(\vec{q}) a^i$ .

Come per le espansioni viste precedentemente, anche per gli invarianti di Cauchy è possibile calcolare i primi due ordini perturbativi. Questi risultano essere:

$$C_i^{[0]} = 0, \quad (3.32)$$

$$C_i^{[2]} = \varepsilon_{ijk} \left( \delta_{lj} + \xi_{l,j}^{ZA} + \xi_{l,j}^{2LPT} \right) \left( \dot{\xi}_{l,k}^{ZA} + \dot{\xi}_{l,k}^{2PT} \right) = \frac{a^2}{2} \varepsilon_{ijk} \varphi_{g,lj} V_{eff,lk}^{(2)} + o(a^3). \quad (3.33)$$

Si può notare come l'invariante di Cauchy al secondo ordine sia generalmente non nullo.

### 3.4 Analisi delle soluzioni attraverso un metodo semi-classico

Ottenute le espansioni perturbative delle varie grandezze d'interesse, è possibile passare all'analisi delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger ottenuta nella sezione 3.2.

Si parte quindi dallo studio del sistema in approssimazione di particella libera, corrispondente al primo ordine perturbativo, poiché il potenziale effettivo  $V_{eff}^{(1)}$  risulta essere nullo.

### 3.4.1 Soluzione di particella libera

Le equazioni di particella libera sono la (3.16) e la (3.18), in cui si è posto  $V_{eff} = 0$ . Si avranno quindi le seguenti equazioni:

$$i\nu \frac{\partial \psi}{\partial a} = -\frac{\nu^2}{2} \nabla^2 \psi, \quad (3.34a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 = -\frac{\nu^2}{2} \frac{\nabla^2 R}{R}. \quad (3.34b)$$

In particolare è possibile notare la somiglianza della (3.34b) con l'equazione di Bernoulli ottenuta nell'approssimazione di adesione (2.36), dove il termine di *quantum pressure* è sostituito dal termine  $\nu \nabla^2 \phi$ ; inoltre l'equazione ottenuta nell'approssimazione di adesione è reale, mentre quella ottenuta nel nuovo approccio è un'equazione complessa: ciò porta a voler valutare le somiglianze tra i due metodi compiendo una *rotazione di Wick*, ovvero cambiando la variabile temporale  $a \rightarrow ia$ .

Una soluzione potrà allora essere scritta come:

$$\psi_0(\vec{x}, a) = \int d^3 q K_0(\vec{x}, \vec{q}, a) \psi_i(\vec{q}), \quad (3.35)$$

dove  $K_0(\vec{x}, \vec{q}, a)$  è propagatore di "particella libera" dato dalla formula di *Feynman-Kac*:

$$K_0(\vec{x}, \vec{q}, a) = (2i\pi\nu a)^{-3/2} \exp \left\{ \frac{i}{\nu} S_0(\vec{x}, \vec{q}, a) \right\}. \quad (3.36)$$

$S_0(\vec{x}, \vec{q}, a)$  rappresenta l'azione classica per una particella libera, ed ha la forma:

$$S_0(\vec{x}, \vec{q}, a) = \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \frac{(\vec{x} - \vec{q})}{a}.$$

Il propagatore  $K_0$  esprime quindi l'ampiezza di transizione di una funzione d'onda che dallo stato iniziale  $\psi_0^{(ini)}(\vec{q}, 0)$  va allo stato finale  $\psi_0^{(fin)}(\vec{x}, a)$ ; la sua evoluzione, così come per la funzione d'onda, è governata dall'equazione di Schrödinger

$$i\nu \frac{\partial K_0}{\partial a} = -\frac{\nu^2}{2} \nabla^2 K_0. \quad (3.37)$$

La funzione d'onda, applicando la trasformazione di Madelung, sarà quindi

$$\psi_0(\vec{x}, a) = \frac{1}{(2i\pi\nu a)^{3/2}} \int d^3 q (1 + \delta)^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\nu} \left[ \frac{(\vec{x} - \vec{q})^2}{2a} + \phi_i(\vec{q}) \right] \right\}, \quad (3.38)$$

dove  $\psi_i(\vec{q}) = (1 + \delta)^{1/2} \exp \left[ \frac{i}{\nu} \phi_i(\vec{q}) \right]$ .

**Metodo risolutivo:** Si vuole costruire un metodo che metta in relazione il formalismo della funzione d'onda, e conseguentemente dei propagatori, con le variabili classiche dei fluidi. Un modo conveniente per fare ciò è passare allo studio del problema nello spazio delle fasi, andando a riprendere un metodo, sviluppato in meccanica quantistica, per studiare le correzioni quantistiche di sistemi classici studiati attraverso la meccanica statistica classica.

Nello spazio delle fasi si costruisce, partendo dalla funzione d'onda e ponendo  $\nu \neq 0$ , la *funzione di Wigner*  $f(\vec{x}, \vec{p})$  [11],<sup>3</sup> definita come

$$f_W(\vec{x}, \vec{p}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \exp \left[ \frac{-i\vec{x} \cdot \vec{p}'}{a^{3/2}} \right] \psi \left( \vec{x} + \frac{\nu}{2} \right) \psi^* \left( \vec{x} - \frac{\nu}{2} \right), \quad (3.39)$$

<sup>3</sup>La funzione di Wigner non è una PDF a tutti gli effetti, poiché, per piccoli valori di  $\nu$  potrebbe assumere valore negativo. Per questo motivo è definita come funzione di *quasiprobabilità*.

dove sia la  $\psi$  che la  $f_W$  sono dipendenti dal fattore di scala. Costruire la funzione di Wigner corrisponde ad effettuare un *Coarse-graining* con parametro  $\nu$ , migliorando di fatto lo studio del sistema.<sup>4</sup>

È possibile calcolare i primi due momenti dalla funzione di Wigner,<sup>5</sup> ottenendo:

$$1 + \delta \equiv \rho(\vec{x}) = \int d^3p f_W(\vec{x}, \vec{p}) = |\psi|^2,$$

$$(1 + \delta)\vec{v} = \vec{j} = \int d^3p \frac{\vec{p}}{a^{3/2}} f_W(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{i\nu}{2} [\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi].$$

La funzione di Wigner appare quindi essere un modo molto elegante di studiare il sistema; contenendo infatti tutta l'informazione sulla densità e sulla velocità, permette di poter estrarre le quantità d'interesse semplicemente prendendone il limite classico, ovvero per  $\nu \rightarrow 0$ .

Dopo aver calcolato la funzione di Wigner, sarà sufficiente effettuare il seguente limite:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} f_W(\vec{x}, \vec{p}) = \rho(\vec{x}) \delta_D^{(3)} \left( \frac{\vec{p}}{a^{3/2}} - \vec{v}(\vec{x}) \right) := f_{fl}(\vec{x}, \vec{p}), \quad (3.40)$$

dove la velocità  $\vec{v}(\vec{x})$ , prima dello shell-crossing risulta avere un unico contributo. La  $f_{fl}$  rappresenta quindi la funzione di distribuzione per un fluido perfetto. Sarà possibile calcolare la  $f_{fl}$  che, utilizzando la relazione ottenuta imponendo la conservazione della massa, risulterà essere

$$f_{fl}(\vec{x}, \vec{p}) = \int d^3q \delta_D^{(3)} [\vec{x} - \vec{q} - \vec{\xi}(\vec{q})] \delta_D^{(3)} \left[ \frac{\vec{p}}{a^{3/2}} - \vec{v}^L(\vec{q}) \right], \quad (3.41)$$

dove  $\vec{v}^L(\vec{q})$  non è altro che la rappresentazione Lagrangiana della velocità valutata nella posizione Euleriana. In questo modo è quindi possibile ricavare tutte le informazioni, contenute nella *displacement*  $\vec{\xi}(\vec{q})$  e nella velocità  $\vec{v}(\vec{q})$ , riguardo la dinamica delle particelle di CDM.

È possibile testare il metodo ottenuto per l'approssimazione di particella singola, di cui si conoscono i risultati. Si parte quindi dalla funzione d'onda (3.38), che può essere riscritta come

$$\psi_0(\vec{x}, a) = \int \frac{d^3q}{(2i\pi\nu a)^{3/2}} \exp \left[ i \frac{(\vec{x} - \vec{q})^2}{2\nu a} - \frac{i}{\nu} \phi_g^{(ini)}(\vec{q}) \right], \quad (3.42)$$

dove  $\phi_i(\vec{q}) \equiv \phi_g^{(ini)}(\vec{q})$ , in accordi con le condizioni iniziali.

Si passa allora alla costruzione della funzione di Wigner: si calcola il complesso coniugato  $\psi_0^*(\vec{x} - \frac{\nu}{2}\vec{x}', a)$  e si inserisce insieme alla  $\psi_0(\vec{x} + \frac{\nu}{2}\vec{x}', a)$  nell'integrale (3.39). Si ottengono quindi tre integrali, rispetto le tre variabili  $\vec{x}'$ ,  $\vec{q}'$  e  $\vec{q}$ . Al fine di semplificare il calcolo, si compiono i seguenti cambi di variabile:

$$\vec{q}_+ = \frac{\vec{q} + \vec{q}'}{2}, \quad \vec{q}_- = \vec{q} - \vec{q}',$$

corrispondenti rispettivamente alla coordinata del centro di massa e alla coordinata relativa. Sostituendo si ottiene il seguente integrale:

$$f_{W,0} = \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q_+ d^3q_-}{(2\pi\nu a)^3} \exp \left[ i \vec{x}' \cdot \left( \frac{-\vec{p}}{a^{3/2}} + \frac{\vec{x} - \vec{q}_+}{a} \right) \right]$$

<sup>4</sup>Può essere intesa come una funzione che opera un coarse-graine poiché va ad evitare violazioni del principio di indeterminazione. Poiché si è comunque interessati ad uno studio del limite classico ( $\nu \rightarrow 0$ ), ciò diverrà superfluo.

<sup>5</sup>I primi due momenti ottenuti sono utili nello studio del problema. Infatti, lo shell-crossing porta a fenomeni oscillatori molto forti, con la generazione di vorticità; l'informazione potrà essere estratta la campo di velocità  $\vec{v}$  definito come  $\vec{j}/\rho$ .

$$\times \exp \left\{ \frac{-i}{\nu a} [\vec{q}_- \cdot (\vec{x} - \vec{q}_+) + a \delta \varphi(\vec{q}_+, \vec{q}_-)] \right\}, \quad (3.43)$$

dove  $\delta \varphi(\vec{q}_+, \vec{q}_-)$  è definito come:

$$\delta \varphi(\vec{q}_+, \vec{q}_-) = \varphi_g^{(ini)} \left( \vec{q}_+ + \frac{\vec{q}_-}{2} \right) - \varphi_g^{(ini)} \left( \vec{q}_+ - \frac{\vec{q}_-}{2} \right).$$

Poiché si sta studiando il limite per  $\nu \rightarrow 0$ , si può osservare come l'esponentiale contenente  $\vec{q}_-$  vari molto rapidamente per valori di  $\vec{q}_-$  grandi, rendendo il suo contributo all'integrazione pressoché nullo. Di conseguenza, il contributo principale verrà dato per  $\vec{q}_-$  piccoli; è possibile pertanto approssimare  $\delta \varphi$ , espandendola attorno a  $\vec{q}_-$ :

$$\begin{aligned} \delta \varphi &\simeq \cancel{\varphi_g^{(ini)}(\vec{q}_-)} + \frac{\vec{q}_-}{2} \cdot \nabla \varphi_g^{(ini)}(\vec{q}_+) - \cancel{\varphi_g^{(ini)}(\vec{q}_-)} + \frac{\vec{q}_-}{2} \cdot \nabla \varphi_g^{(ini)}(\vec{q}_+) + o(\vec{q}_-^3) \simeq \\ &\simeq \vec{q}_- \cdot \nabla \varphi_g^{(ini)}(\vec{q}_+) + o(\vec{q}_-^3). \end{aligned}$$

Inserendo l'approssimazione nell'integrale, integrando rispetto alle variabili  $\vec{x}'$  e  $\vec{q}_-$  e prendendone il limite, si ottiene

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} f_{W,0} = \int d^3 q \delta_D^{(3)} [\vec{x} - \vec{q} + a \nabla \varphi_g^{(ini)}(\vec{q})] \times \delta_D^{(3)} \left[ \frac{\vec{p}}{a^{3/2}} + \nabla \varphi_g^{(ini)}(\vec{q}) \right], \quad (3.44)$$

dove è stata rinominata  $\vec{q}_+ \rightarrow \vec{q}$ . Facendo un confronto con l'equazione (3.41), è possibile estrarre il *displacement* e la velocità, che risulteranno quindi essere:

$$\vec{\zeta}_0(\vec{q}) = -a \nabla \varphi_g^{(ini)}(\vec{q}), \quad \vec{v}_0(\vec{q}) = -\nabla \varphi_g^{(ini)}(\vec{q}). \quad (3.45)$$

Le soluzioni ottenute per il *displacement* e per la velocità sono in perfetto accordo con quanto ottenuto attraverso l'approssimazione di Zel'dovich, facendo quindi di questo un ottimo metodo risolutivo per il problema.

Va ricordato che la soluzione di particella libera, studiata tramite l'approccio perturbativo, costituisca il contributo principale alla dinamica della CDM; gli ordini perturbativi successivi sono quindi correzioni al primo ordine.

### 3.4.2 Soluzione dell'equazione di Schrödinger per ordini successivi

Note le soluzioni di particella libera, è possibile procedere con lo studio degli ordini perturbativi successivi, soffermandosi in particolare sulla principale correzione all'ordine dominante, ossia la soluzione di particella libera, detto *next-to-leading order* (NLO).

Si parte allora dalla scrittura di un nuovo propagatore, formato dal prodotto del propagatore di particella libera  $K_0(\vec{x}, \vec{q}, a)$  con un termine che tenga conto dell'interazione delle particelle; si avrà pertanto

$$K(\vec{x}, \vec{q}, a) = K_0(\vec{x}, \vec{q}, a) \exp \left( \frac{i}{\nu} S_{tid}(\vec{x}, \vec{q}, a) \right). \quad (3.46)$$

L'esponente del propagatore totale sarà dato dalla somma dell'azione di particella libera  $S_0$  con quella dovuta all'interazione gravitazionale (*tidal interaction*)  $S_{tid}$ ; poiché l'evoluzione del propagatore è governata dall'equazione di Schrödinger del tipo

$$i\nu \partial_a K = \left( -\frac{\nu^2}{2} \nabla_x^2 + V_{eff} \right) K,$$



sostituendo la (3.46) nell'equazione e usando la (3.37), è possibile ottenere un'equazione differenziale per l'azione  $S_{tid}$ , che risulta essere:

$$\hat{D}_a(\vec{x}, \vec{q})S_{tid} - \frac{i\nu}{2}\nabla_x^2 S_{tid} + \frac{(\nabla_x S_{tid})^2}{2} = -V_{eff}, \quad (3.47)$$

dove  $\hat{D}_a$  è la derivata materiale  $\hat{D}_a \equiv \partial_a + \frac{1}{a}[\vec{x} - \vec{q}] \cdot \nabla_x$ .

Poiché si sta studiando il sistema in un approccio perturbativo, anche per l'azione  $S_{tid}$  verrà applicata l'*ansatz* fatta nella sezione 3.3; si espanderà allora  $S_{tid}$  come

$$S_{tid}(\vec{x}, \vec{q}, a) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\vec{x}, \vec{q}, a); \quad (3.48)$$

ogni coefficiente  $S_n$  è idealmente un  $o(a^n)$ .

Al NLO il contributo al potenziale effettivo verrà dato dal coefficiente del secondo ordine perturbativo  $V_{eff}^{(2)}$  dato dall'equazione (3.24b), coefficiente indipendente dalla variabile temporale. L'espansione perturbativa dell'azione a dominare nel NLO è  $S_1$ ; poiché la derivata materiale abbassa di uno l'esponente del fattore di scala, l'unico termine a sopravvivere nell'equazione (3.47) sarà il primo, mentre gli altri, essendo d'ordine superiore, non contribuiranno. Si ha allora la seguente equazione:

$$\hat{D}_a(\vec{x}, \vec{q})S_1(\vec{x}, \vec{q}, a) = -V_{eff}^{(2)}(\vec{x}). \quad (3.49)$$

Una soluzione sarà

$$\begin{aligned} S_1(\vec{x}, \vec{q}, a) &= -\int_0^a da' V_{eff}^{(2)}\left(\vec{q} + \frac{a'}{a}[\vec{x} - \vec{q}]\right) = \\ &= -a \int_0^1 d\tau V_{eff}^{(2)}(\vec{q} + \tau[\vec{x} - \vec{q}]). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Essendo quest'integrale difficile da valutare in ogni punto, è bene compiere un'approssimazione: volendo infatti preservare la simmetria tra le posizioni  $\vec{x} \leftrightarrow \vec{q}$  sotto inversione temporale  $a \leftrightarrow -a$ , si potrà esprimere  $S_1$  come

$$S_1(\vec{x}, \vec{q}, a) = -\frac{a}{2} \left[ V_{eff}^{(2)}(\vec{q}) + V_{eff}^{(2)}(\vec{x}) \right]. \quad (3.51)$$

Ottenuta una forma esplicita per il contributo al NLO dell'azione, è possibile scrivere il propagatore, e conseguentemente la funzione d'onda, che risultano quindi essere

$$K_{NLO}(\vec{x}, \vec{q}, a) = (2i\pi\nu a)^{-3/2} \exp\left[\frac{i}{\nu}g(\vec{x}, \vec{q}, a)\right], \quad (3.52)$$

dove la funzione  $g(\vec{x}, \vec{q}, a)$  è l'azione totale del sistema fino al NLO, ovvero la somma  $S_0 + S_1$ , con la forma

$$g(\vec{x}, \vec{q}, a) = \frac{(\vec{x} - \vec{q})^2}{2a} - \frac{a}{2} \left[ V_{eff}^{(2)}(\vec{q}) + V_{eff}^{(2)}(\vec{x}) \right]. \quad (3.53)$$

La funzione d'onda al NLO sarà:

$$\psi_{NLO}(\vec{x}, a) = \int d^3q K_{NLO}(\vec{x}, \vec{q}, a) \psi^{(ini)}(\vec{q}), \quad (3.54)$$

con  $\psi^{(ini)}(\vec{q})$  funzione d'onda iniziale.

Con una nuova funzione d'onda, comprendente una parte di interazione gravitazionale tra le particelle, è possibile ripetere il procedimento visto nella precedente sezione, applicato al caso

di particella libera. Si parte quindi costruendo la funzione di Wigner  $f_{W,1}$ : dopo aver calcolato  $\psi_{NLO}^*$ , ed aver sostituito nell'integrale (3.39), si procede con il cambio di variabili:

$$\vec{q}_+ = \frac{\vec{q} + \vec{q}'}{2}, \quad \vec{q}_- = \vec{q} - \vec{q}' ,$$

ottenendo quindi l'integrale

$$\begin{aligned} f_{W,1} &= \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q_+ d^3q_-}{(2\pi\nu a)^3} \exp \left[ i\vec{x}' \cdot \left( \frac{-\vec{p}}{a^{3/2}} + \frac{\vec{x} - \vec{q}_+}{a} \right) \right] \\ &\times \exp \left\{ \frac{-i}{\nu a} [\vec{q}_- \cdot (\vec{x} - \vec{q}_+) + a\delta\varphi(\vec{q}_+, \vec{q}_-)] \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{-ia}{2\nu} [\delta V_2(\vec{q}_+, \vec{q}_-) + \delta V_2(\vec{x}, \nu\vec{x}') ] \right\}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Confrontando l'equazione ottenuta con la (3.43), è possibile vedere come al termine  $\delta\varphi$  si sia aggiunto il termine  $\delta V_2$ , definito come

$$\delta V_2(\vec{q}_+, \vec{q}_-) = V_{eff}^{(2)} \left( \vec{q}_+ + \frac{\vec{q}_-}{2} \right) - V_{eff}^{(2)} \left( \vec{q}_+ - \frac{\vec{q}_-}{2} \right); \quad (3.56)$$

si ha nuovamente che il contributo principale all'integrale verrà dato per piccoli valori di  $\vec{q}_-$ , potendo riscrivere non solo  $\delta\varphi$  come visto nella sezione 3.4.1, ma anche  $\delta V_2$ , espanso attorno a  $\vec{q}_-$ , come

$$\delta V_2(\vec{q}_+, \vec{q}_-) = \vec{q}_- \cdot \nabla V_{eff}^{(2)}(\vec{q}_+) + o(q_-^3). \quad (3.57)$$

Integrando rispetto le variabili  $\vec{x}'$  e  $\vec{q}_-$ , ridefinendo nuovamente  $\vec{q}_+ \rightarrow \vec{q}$  e prendendo il limite classico di ciò che è ottenuto, si ha

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} f_{W,1} = \int d^3q \delta_D^{(3)} [\vec{x} - \vec{q} - \xi^{NLO}(\vec{q}, a)] \times \delta_D^{(3)} \left[ \frac{\vec{p}}{a^{3/2}} + \vec{v}^{L,NLO}(\vec{q}, a) \right], \quad (3.58)$$

dove il *displacement* e la rappresentazione Lagrangiana della velocità risultano essere:

$$\xi_i^{NLO} = -a\varphi_{g,i}^{(ini)} - \frac{a^2}{2} V_{eff,i}^{(2)}, \quad (3.59a)$$

$$\vec{v}_i^{L,NLO} = -\varphi_{g,i}^{(ini)} - aV_{eff,i}^{(2)} + \frac{a^2}{2} \varphi_{g,m}^{(ini)} V_{eff,mi}^{(2)}. \quad (3.59b)$$

Per ottenere la velocità (3.59b) è stato espanso il potenziale effettivo fino al primo ordine nel *displacement*, ottenendo  $V_{eff,i}^{(2)}(\vec{x}) \simeq V_{eff,i}^{(2)}(\vec{q}) - a\varphi_{g,l}^{(ini)} V_{eff,il}^{(2)}(\vec{q})$ .

Si passa ora all'analisi delle soluzioni ottenute.

Il *displacement* al NLO aderisce bene con quanto ottenuto classicamente (3.30), mentre la velocità al NLO differisce per un termine aggiuntivo dai risultati classici ottenuti sempre mediante teoria perturbativa Lagrangiana, ovvero  $\vec{v}_i^{L,LPT} \simeq -\varphi_{g,i}^{(ini)} - aV_{eff,i}^{(2)}$ , termine non presente poiché d'ordine superiore. Si può dimostrare come la presenza del termine aggiuntivo nella velocità  $\vec{v}^{L,NLO}$  sia fondamentale per mantenere la struttura *Hamiltoniana* del problema, ed assicurare che la vorticità globale del sistema venga preservata. Di fatto, anche per una velocità iniziale irrotazionale, dopo lo shell-crossing, trovandosi in un regime di *multi-streaming*, si generano forti turbolenze. Anche per sistemi quantistici e semi-classici il teorema di Kelvin 2.1, già trattato nel precedente capitolo, che afferma che la circolazione  $\Gamma$  calcolata su un percorso chiuso risulta essere conservata, continua ad essere vero. In particolare si può quindi dedurre che, nel caso di assenza di vorticità iniziale,  $\Gamma = 0$  per ogni istante successivo, anche dopo lo shell-crossing.

Gli invarianti di Cauchy costituiscono una formulazione locale del teorema di Kelvin; pertanto, una conservazione di questi sarà associata a quella della vorticità. Nella sezione precedente si è visto come, nel sistema, gli invarianti di Cauchy risultano essere nulli (3.28); ciò porta a voler verificare la conservazione di tale quantità calcolandola per il NLO. Ricordando la mappa Lagrangiana e la rispettiva derivata temporale, si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_{i,j}^{NLO} &= \delta_{ij} - a\varphi_{g,lj}^{(ini)} - \frac{a^2}{2}V_{eff,lj}^{(2)}, \\ \dot{x}_{i,k}^{NLO} &= -\dot{\varphi}_{g,lk}^{(ini)} - aV_{eff,lk}^{(2)} + \frac{a^2}{2}\left(\varphi_{g,m}^{(ini)}V_{eff,lm}^{(2)}\right)_{,k}; \end{aligned}$$

calcolando l'invariante di Cauchy  $C_i^{NLO} = \varepsilon_{ijk}x_{i,j}^{NLO}\dot{x}_{i,k}^{NLO}$ , si ottiene

$$C_i^{NLO} = 0 + o(a^3). \quad (3.61)$$

Pertanto, poiché l'invariante di Cauchy risulta conservato al NLO, la vorticità globale sarà conservata; ciò differisce dal risultato (3.30), che predice la presenza di una vorticità globale non nulla.

Per un sistema quantistico anche la vorticità risulta essere *quantizzata*; questa deriva da difetti topologici generati da salti, di multipli interi di  $2\pi$ , della fase  $\phi_u/\nu$ . La richiesta di vorticità nulla anche dopo lo shell-crossing si traduce nella formazione di coppie di vortici, detti *rotoni*, definiti come:

$$\frac{1}{2\pi\nu} \oint_{C(a)} \nabla\phi_u \cdot d\vec{x} = n_+ - n_- = 0, \quad n_{\pm} \in \mathbb{N}. \quad (3.62)$$

Si ha quindi che la somma di tutte le coppie di *rotoni* risulta essere nulla, garantendo di fatto la conservazione globale della vorticità. Pertanto sarà possibile osservare fenomeni di turbolenza locali, dato il regime di *multi-streaming*, ed allo stesso tempo garantire la conservazione della vorticità iniziale.

Si è ottenuto quindi un approccio alternativo per lo studio della dinamica della materia oscura che restituisce ottimi risultati anche attraverso simulazioni numeriche, ed allo stesso tempo va a risolvere tutti quei problemi sorti nell'analisi del precedente capitolo. Infatti il nuovo modello, oltre ad eliminare la possibilità della formazione di caustiche e di regioni a densità negative, tiene conto anche dell'interazioni presenti tra le particelle di CDM, che venivano invece trascurate dall'approssimazione di Zel'dovich.

# Conclusioni

In questa tesi sono stati analizzati vari modelli per la descrizione della dinamica della CDM. Dopo aver trattato le basi teoriche su cui è costruita tutta la discussione successiva, sono state tradotte le equazioni dei fluidi per un Universo in espansione e se ne sono studiate le soluzioni. Selezionata la soluzione di *Growing-mode*, coerente con la linearizzazione effettuata, sono state analizzate due modelli: l'approssimazione di Zel'dovich e l'approssimazione di Adesione. Nonostante i risultati aderissero in prima approssimazione con le simulazioni, numerosi problemi sono emersi: la presenza di aree nello spazio a densità di materia negativa, la presenza di caustiche e l'assenza di un'interazione tra le particelle sono alcuni degli ostacoli in cui si è incappati. Si è ricercato quindi un approccio alternativo, che desse una buona descrizione della formazione delle strutture cosmiche ed allo stesso tempo fosse in grado di aggirare i problemi emersi dai precedenti modelli.

Partendo dal formalismo sviluppato da Madelung nel tentativo di costruire un'interpretazione alternativa della meccanica quantistica, è stato quindi ottenuto un metodo semi-classico per lo studio della dinamica della CDM, che fa uso del formalismo dell'equazione di Schrödinger e dei propagatori. Quest'ultimi sono stati determinati attraverso la teoria delle perturbazioni. Studiandone le soluzioni, si è visto come la soluzione di particella libera, nonché il contributo principale alla dinamica, fosse pienamente concorde con quanto trovato con Zel'dovich; al fine di tenere conto anche di un'interazione tra le particelle è stata calcolata la correzione principale alla soluzione di particella libera, detta NLO. Aggiunto un potenziale effettivo non nullo nell'equazione di Schrödinger, attraverso tecniche perturbative, è stata ricavata la corrispondente funzione d'onda. Utilizzando la funzione di Wigner, è stato calcolato il limite classico, da cui sono emerse il displacement e la velocità Lagrangiane: quest'ultima ha esibito un termine aggiuntivo, necessario per assicurare la struttura Hamiltoniana del sistema e per garantire la conservazione della vorticità.



# Bibliografia

- [1] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztañaga, and R. Scoccimarro. Large-scale structure of the universe and cosmological perturbation theory. *Physics Reports*, 367(1):1–248, 2002. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157302001357>, doi:[https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(02\)00135-7](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00135-7).
- [2] S. N. Gurbatov, A. I. Saichev, and S. F. Shandarin. The large-scale structure of the Universe in the frame of the model equation of non-linear diffusion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 236(2):385–402, 01 1989. arXiv:<https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/236/2/385/3090727/mnras236-0385.pdf>, doi:10.1093/mnras/236.2.385.
- [3] Erwin Madelung. Quantum theory in hydrodynamical form. *z. Phys*, 40:322, 1927.
- [4] S. Matarrese. Schroedinger equation approach to lss formation.
- [5] S. Matarrese. Notes on gravitational instability. 2006.
- [6] S. Matarrese. Astrophysics and Cosmology notes. 2020.
- [7] Cornelius Rampf, Barbara Villone, and Uriel Frisch. How smooth are particle trajectories in a CDM Universe? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 452(2):1421–1436, 07 2015. arXiv:<https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/452/2/1421/18505404/stv1365.pdf>, doi:10.1093/mnras/stv1365.
- [8] S. F. Shandarin and Ya. B. Zeldovich. The large-scale structure of the universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium. *Rev. Mod. Phys.*, 61:185–220, Apr 1989. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.185>, doi:10.1103/RevModPhys.61.185.
- [9] Cora Uhlemann, Cornelius Rampf, Mateja Gosenca, and Oliver Hahn. Semiclassical path to cosmic large-scale structure. *Phys. Rev. D*, 99:083524, Apr 2019. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.083524>, doi:10.1103/PhysRevD.99.083524.
- [10] Lawrence M. Widrow and Nick Kaiser. Using the Schroedinger Equation to Simulate Collisionless Matter. , 416:L71, October 1993. doi:10.1086/187073.
- [11] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, 40:749–759, Jun 1932. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.40.749>, doi:10.1103/PhysRev.40.749.
- [12] Vladislav Zheligovsky and Uriel Frisch. Time-analyticity of lagrangian particle trajectories in ideal fluid flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 749:404–430, 2014. doi:10.1017/jfm.2014.221.