



**UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA**



**DIPARTIMENTO  
DI INGEGNERIA  
DELL'INFORMAZIONE**

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE**

**CORSO DI LAUREA IN  
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE**

**TESI DI LAUREA  
“Data-Driven Control: Teoria e Applicazioni”**

**Relatore: Prof. Chiuso Alessandro**

**Laureanda: Oliviero Alessandra**

**ANNO ACCADEMICO 2021 – 2022**

**23 settembre 2022**



# Sommario

<b>Introduzione</b> .....	3
<b>Aspetti fondamentali dell'Automazione</b> .....	5
Componenti dei Sistemi di Controllo .....	5
Requisiti di un sistema di controllo .....	7
Sistemi dinamici nel dominio del tempo e stabilità .....	8
<b>Teorie di Controllo basate sui Modelli</b> .....	13
Controllo ottimo.....	13
Model-Predictive Control .....	17
Sistemi Reali Moderni.....	19
<b>Data-Driven Control</b> .....	22
Machine Learning .....	22
Il controllo basato sui dati .....	23
Caso di studio: il problema ottimo nel Data-Driven Predictive Control .....	24
<b>Conclusioni</b> .....	32
<b>Bibliografia e Sitografia</b> .....	33
<b>Ringraziamenti</b> .....	34



## Introduzione

Imparare dai dati è essenziale per ogni area della scienza, è il cuore della statistica e dell'intelligenza artificiale.

Infatti, tutta la conoscenza si basa sulla raccolta di misure e informazioni; ad esempio, il cervello umano è nutrito costantemente con insegnamenti dedotti dall'esperienza, e resta vivo e recettivo se continuamente stimolato con nuove informazioni e nuovi input.

Questo tipo di acquisizione sta diventando sempre più prevalente anche nel campo dell'Ingegneria dell'Automazione, in cui l'apprendimento dai dati è ora considerato una necessità primaria date le sue enormi potenzialità.

Sono stati creati nel corso dei secoli delle tecnologie che sfruttano i sistemi di controllo (come circuiti logici o elaboratori) per gestire macchine e processi, riducendo la necessità dell'intervento umano, ovvero per l'esecuzione di operazioni ripetitive o complesse, ma anche dove si richieda sicurezza o certezza dell'azione o semplicemente per maggiore comodità.

Nel corso dell'evoluzione di queste tecniche però si è andati incontro a problematiche così complesse da dover sviluppare delle metodologie che non si basassero più solo sui principi fisici e su tecniche di ottimizzazione dei controlli, ma che sfruttassero a pieno le nuove capacità di raccolta dati quasi istantanee, elaborazioni e memorizzazioni performanti dovute a una rapidissima evoluzione delle tecnologie che stanno alla base di hardware e sensori.

Parlando generalmente di tecniche di controllo, sono state recentemente raggruppate in due grandi sottocategorie: il controllo basato sul modello e quello basato sui dati.

Il Model-Based Control si riferisce ai metodi che utilizzano le informazioni provenienti dall'impianto sotto forma di modello matematico o matriciale. Per esempio, le regole di controllo classiche, possono avere bisogno di un modello specifico della struttura per risolvere un certo problema di ottimizzazione o il modello può essere usato direttamente per la formulazione della legge di controllo, come ad esempio il Model Predictive Control, trattato in questa tesi.

D'altra parte, nella seconda classe, il Data-Driven Control non tenta mai di trovare il modello dell'impianto: utilizza i dati dell'impianto direttamente per trovare un controllore, che, in generale, ha lo scopo di ridurre al minimo alcuni criteri di prestazioni di controllo.

Si sta studiando negli ultimi anni un modo per ottenere il meglio di entrambe le classi per ottenere strumenti più efficienti e ottimizzati da applicare alle nuove problematiche che si stanno incontrando.

Quindi lo scopo di questa tesi è di studiare in dettaglio il legame tra le matrici dei dati misurati da un impianto deterministico e il problema del controllo predittivo tramite il Data-Driven Predictive Control. Esso è stato recentemente proposto come alternativa al tradizionale Model

Predictive Control per la sua unica caratteristica di essere efficiente a livello temporale e senza rumore nella soluzione di controllo e per l'impiego in situazioni in cui il modello non è ricavabile tramite le tecniche tradizionali, e rappresenta in un certo senso la fusione di queste due ampie tecniche sfruttandone i vantaggi.

Nel primo capitolo verranno esposti i fondamenti della teoria dei controlli, sistemi e modelli che sono la base di questi metodi di risoluzione di problemi, mentre nel secondo verranno illustrati la teoria del controllo ottimo e le caratteristiche delle tecniche MPC.

Nell'ultimo capitolo si concentrerà sul Data-Driven Predictive Control passando per il Machine learning e ricavando tramite lemmi e teoremi algebrici e ingegneristici la risoluzione del problema di controllo in un impianto deterministico e lineare, il cui modello risulta sconosciuto.

## **Aspetti fondamentali dell'Automazione**

### **Componenti dei Sistemi di Controllo**

Nella vita quotidiana, l'utilizzo di un gran numero di dispositivi della più svariata natura, ha permesso un'ottimizzazione tempo ed energie all'intera società. Si riconosce però la necessità di intervenire dall'esterno, in modo che essi si comportino nel modo desiderato, per ottenere un risultato soddisfacente.

Ad esempio, un semplice elettrodomestico, come la lavatrice, è in grado di adeguare il flusso d'acqua e il tempo di lavaggio in base al peso della biancheria inserita, però la stessa non è in grado di riconoscere i colori dei capi, il materiale di cui sono fatti, il grado dello sporco da togliere. Questi dati vengono valutati dall'uomo, il quale, sulla base del suo scopo, decide il programma adeguato da utilizzare.

Questo esempio di semplice problematica quotidiana, in ambito ingegneristico si riscontra in maniera ancora più frequente. Poiché negli ultimi anni l'automazione è diventata un elemento essenziale in tutti i campi, sorge la necessità di svincolare la funzionalità del congegno dall'intervento umano, per evitare errori e avere una maggiore produttività e continuità in tempi brevi.

Per determinare le azioni da compiere per migliorare i problemi di controllo, in campo civile e industriale, ci si avvale di un "programmatore" o controllore che ha il compito di modificare il comportamento del sistema interessato attraverso la manipolazione di opportune grandezze di ingresso.

Con il termine processo, o sistema sotto controllo, si fa riferimento all'oggetto sul quale il problema è posto: un impianto, un'apparecchiatura, una macchina o anche un fenomeno di natura fisica o di altro genere.[1] Questi sistemi evolvono nel tempo secondo una legge deterministica, detta funzione, che mette in relazione gli effetti presenti in uscita al sistema con le sollecitazioni presenti in ingresso.

Il funzionamento desiderato, cioè il compito del controllore su queste strutture, consiste nell'imporre che l'andamento nel tempo di alcune variabili del processo, cioè le variabili controllate che escono dal sistema, coincida con l'andamento delle variabili preassegnate, nominate segnale di riferimento, ed espresse in forma vettoriale.

Un esempio può essere dato dal controllo della temperatura del forno:

si imposta una soglia desiderata, 200 gradi, nel forno si attiva la resistenza che raggiunge una temperatura superiore di pochi gradi. Il flusso di calore si ferma e si riattiva in continuità per mantenere la temperatura desiderata all'interno del range prestabilito. In apparenza il forno ha

sempre 200 gradi, di fatto vi è un'oscillazione interna di pochi gradi sopra e sotto la soglia prefissata.

Per perseguire l'obiettivo, cioè ottenere la variabile controllata uguale al segnale di riferimento per tutto l'intervallo di tempo del processo di interesse, occorre avere la possibilità di condizionare la l'uscita del sistema tramite un computer o semplicemente un microprocessore che viene inserito nell'impianto.

A tale scopo si suppone di poter agire sul processo manipolando altre variabili scalari, che nell'insieme formano la variabile di controllo, i cui andamenti temporali si possono gestire in base alle necessità, e sono quindi attribuibili in maniera arbitraria da chi effettua il controllo.

Nel forno, questo corrisponde alla capacità della resistenza di produrre calore e nel tempo necessario per raggiungere l'obiettivo.

In realtà le variabili uscenti dall'impianto non dipendono solamente delle variabili di controllo: esistono altre grandezze che non sono condizionabili, e che tuttavia hanno un'influenza sul comportamento del processo. Nel forno potrebbe essere l'isolamento difettoso.

L'esistenza di queste variabili, raccolte nel vettore chiamato disturbo, complica in maniera significativa il problema di controllo, per il fatto che usualmente si manifestano in maniera ignota ed imprevedibile, rispetto ai loro andamenti nominali (cioè quelli previsti).

La determinazione dell'andamento della variabile di controllo viene compiuto da un organo detto controllore o regolatore.

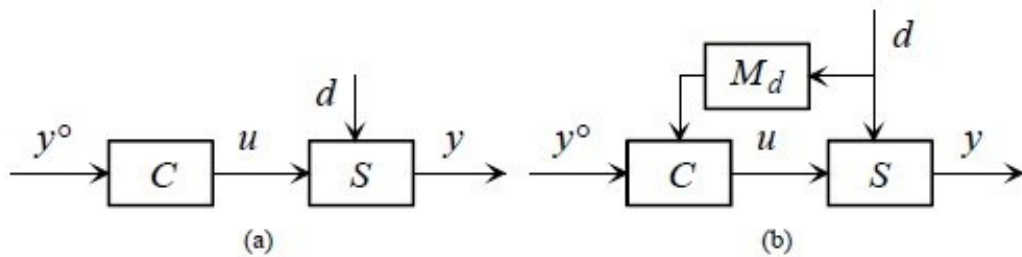
Il complesso costituito dal processo e dal controllore è denominato sistema di controllo. Può accadere che il processo e il controllore siano strettamente connessi tra loro, cioè che il processo sia dotato di un meccanismo di autoregolazione, così intrinsecamente legato al processo stesso da rendere praticamente indistinguibili i due elementi del sistema di controllo. Si parla allora di controllori e sistemi di controllo naturali, mentre in caso contrario si dicono artificiali. Questi ultimi si possono classificare in manuali e automatici, a seconda che l'azione di controllo sia esercitata dall'uomo o da un dispositivo progettato appositamente.[1]

### **Controllo in anello aperto e in anello chiuso**

I sistemi di controllo si rappresentano spesso graficamente come blocchi in cascata, uniti tramite le variabili in ingresso e in uscita degli stessi. Si possono individuare due strategie di risoluzione che fanno uso per semplicità di questa rappresentazione:

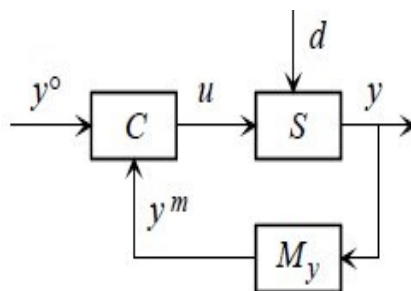


- si dice ad anello aperto o ad azione diretta, quando non viene eseguita alcuna misura sulle variabili del sistema, oppure nel momento in cui le eventuali variabili misurate, ed utilizzate nella legge di comando, non influenzano il controllo; ad esempio, il principio di funzionamento del frigorifero si basa sulla presenza di una serpentina in cui circola un fluido che, sottoposto a cicli di compressione-espansione, sottrae calore all'ambiente interno del frigorifero. Il fluido circola quando il compressore è attivato da un motore elettrico, che può essere alimentato o meno a seconda della posizione di un interruttore. Si calcola la quantità di calore che deve essere estratta per mantenere una certa temperatura desiderata e, servendosi di un timer, si accende e spegne il motore ad intervalli regolari.



**Figura 1: Sistema di controllo ad anello aperto**

- si dice ad anello chiuso se l'azione di controllo viene esercitata sulla base di misure di grandezze il cui valore dipende anche dal valore assunto della variabile di controllo; si rappresenta mediante uno schema a blocchi retroazionato. Nel caso del frigorifero, si utilizza la misura della temperatura, fornita da un termometro, e si alimenta il motore quando la differenza tra la temperatura imposta e quella reale supera una certa soglia, mentre lo si spegne quando tale differenza scende al di sotto di un'altra soglia.



**Figura 2: Sistema di controllo ad anello chiuso**

Tipicamente, sistema e controllore non utilizzano le stesse grandezze fisiche, sebbene siano due blocchi uniti assieme; ci basti pensare a un sistema fisico come un forno, la cui la variabile controllata è la temperatura, mentre quella di controllo è solitamente una tensione o una corrente fornita da un microprocessore che funge da controllore.

Quindi all'interno di questi anelli esistono degli strumenti appositi che rendono i dati utilizzabili: i trasduttori, che sono in grado di misurare la variabile controllata e ne inviano la misura al controllore in forma compatibile con la sua tecnologia, e gli attuatori, che traducono

l'azione del controllore in un'azione efficace sul sistema, anche attraverso stadi di amplificazione e conversione di potenza.

In figura uno schema completo di un sistema di controllo.

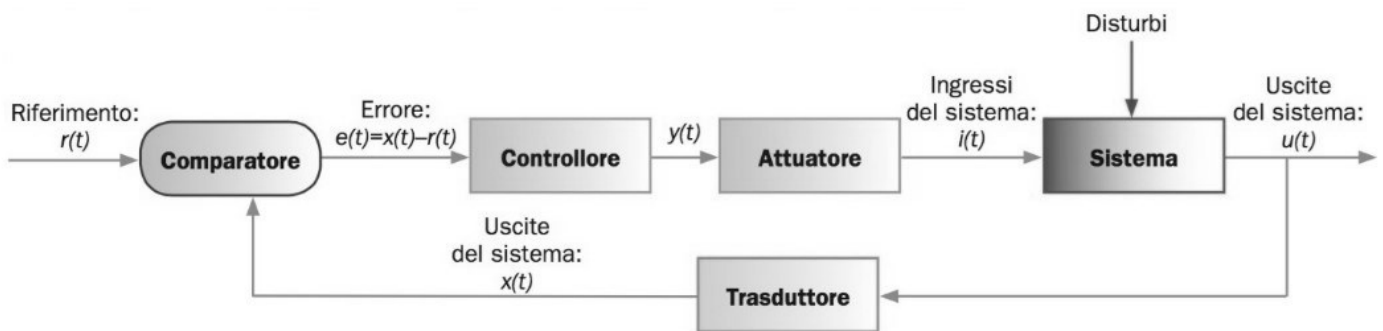


Figura 3: Sistema di controllo ad anello chiuso completo fornito di attuatori e sensori

### Requisiti di un sistema di controllo

I sistemi ad anello chiuso e ad anello aperto, per poter essere utilizzati e sostituire l'intervento umano o risolvere problemi non ancora superati, devono possedere dei requisiti fondamentali che ne permettano l'uso e portino a buone performance, che sono:

- Stabilità: il sistema in anello chiuso deve essere asintoticamente stabile, altrimenti qualsiasi perturbazione agente in qualsiasi punto dell'anello si amplificherebbe indefinitamente;
- Precisione statica: a regime, a seguito di assegnate perturbazioni (a scalino, a rampa ecc.) degli ingressi, l'errore tra riferimento e variabile controllata deve essere nullo, oppure inferiore ad una soglia prefissata;
- Precisione dinamica: la variabile controllata deve inseguire le variazioni del riferimento, e reagire a perturbazioni sui disturbi, con sufficiente rapidità e senza manifestare comportamenti oscillatori.

Inoltre, ci sono anche altri requisiti che determinano, a seconda del problema che dev'essere risolto, il migliore controllore desiderato come:

- Velocità di risposta: la rapidità con cui il controllore reagisce agli ingressi;
- Capacità di annullare l'effetto di eventuali disturbi.

Per un sistema di controllo spesso risulta difficile lo studio della stabilità, in quanto, sebbene blocchi singoli siano stabili ed efficaci, questo non implica la stabilità a priori nell'unione degli stessi nel sistema complessivo. Questo complica di molto il lavoro di progettazione, studio e produzione delle catene di controllo.

### Sistemi dinamici nel dominio del tempo e stabilità

Uno dei blocchi fondamentali all'interno dei circuiti sopraesposti è il sistema, di cui esistono due grandi classi:

- Sistema statico: dato un istante di tempo  $t$ , il valore dell'uscita  $y(t)$  dipende solo ed esclusivamente dal valore dell'ingresso allo stesso istante  $u(t)$ , quindi  $y(t) = f(u(t), t)$ ;
- Sistema dinamico: dato un istante di tempo  $t$ , il valore dell'uscita  $y(t)$  dipende dal valore istantaneo e da tutti i valori passati di  $u(t)$  e di  $y(t)$  ed è descritto da un'equazione differenziale nel tempo  $y = f(\dot{y}, \ddot{y}, \dots, u, \dot{u}, \ddot{u}, t)$ .

I sistemi dinamici quindi si interfacciano con l'esterno tramite una serie di variabili e non un'unica coppia di ingresso di uscita. Diventa di conseguenza necessario rappresentarli tramite un modello matematico, che descriva l'evoluzione del tempo di tutte le variabili in gioco: questo prende il nome di modello dinamico, che diventa fondamentale nella progettazione di controllori.

### Simbologia e rappresentazioni

Questa è una tipica rappresentazione in tempo discreto di un modello a spazio di stato:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + Du_k + v_k \end{cases} \quad (1.1)$$

Con 
$$\mathbb{E} \left[ \begin{pmatrix} w_p \\ v_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_q^T & v_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \delta_{pq} \geq 0 \quad (1.1)$$

$\delta_{pq}$  = Delta del Kronecker rappresenta una funzione di due variabili discrete, in particolare di due variabili sugli interi o sui naturali, che vale 1 se i loro valori coincidono, mentre vale 0 in caso contrario.

In questo modello abbiamo

- Vettori:  $u_k \in \mathbb{R}^m$  e  $y_k \in \mathbb{R}^l$  sono le misure negli istanti di tempo  $k$  dei rispettivi  $m$  input e  $l$  output del processo. Il vettore  $x_k \in \mathbb{R}^n$  è lo stato del vettore del processo all'istante  $k$  e contiene i valori numerici degli  $n$  stati. Questi stati non hanno necessariamente un'interpretazione fisica diretta, ma hanno una rilevanza concettuale.
- $w_k \in \mathbb{R}^n$  e  $v_k \in \mathbb{R}^l$  rappresentano i vettori dei segnali non misurabili, e si presume abbiano media nulla, siano stazionari e siano sequenze vettoriali di rumore bianco.
- Matrici:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è chiamata la matrice (dinamica) di sistema e descrive le dinamiche del sistema (come completamente caratterizzato dai suoi autovalori).  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  è la matrice di input che rappresenta la trasformazione lineare mediante la quale gli input deterministici influenzano lo stato successivo.  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$  è la matrice di uscita che descrive come lo stato interno viene trasferito al mondo esterno nelle misurazioni  $y_k$ . L'addendo con la matrice  $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$  è chiamato il termine feedthrough diretto. Nei sistemi a tempo continuo questo ultimo è più spesso 0, ma non è il caso nei sistemi a tempo discreto a causa del campionamento. Le matrici  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times l}$  e  $R \in \mathbb{R}^{l \times l}$

sono le matrici di covarianza dei vettori  $w_k$  e  $v_k$ . Si presume che la coppia di matrici  $\{A, C\}$  sia osservabile, il che implica che tutti i modi nel sistema possano essere osservati nell'output  $y_k$  e quindi essere identificati. Si ipotizza che la coppia di matrici  $\{A, [B \quad Q^{1/2}]\}$  sia controllabile, il che a sua volta implica che tutti i modi del sistema siano attivati dall'input deterministico  $u_k$  e/o dall'input stocastico  $w_k$ . [2]

Per spiegare la definizione di modi è necessario fare chiarezza sulla teoria dell'algebra lineare su cui si basa questo tipo di rappresentazione.

Con il termine autovalore si riferisce alle sole matrici quadrate, ossia a quelle aventi lo stesso numero di righe e colonne. Chiarito ciò siano  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ , si dice che lo scalare  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  è un autovalore di  $A$  se esiste un vettore colonna non nullo  $v \in \mathbb{C}^n$  tale che

$$Av = \lambda_0 v$$

Il vettore  $v$  è detto autovettore relativo all'autovalore  $\lambda_0$

Se esistono abbastanza autovalori e gli autovettori relativi ad ognuno sono linearmente indipendenti, cioè non sono una combinazione uno dell'altro, allora esiste una trasformazione per cui viene modificata la matrice  $A$  in una nuova matrice, che risulta essere diagonale e tutti gli autovalori compaiono con la loro molteplicità (cioè ripetuti tante volte quanto è il grado dell'autovalore)

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Supponendo che  $A$  sia la matrice di una rappresentazione spazio di stato di un sistema dinamico che verrà mostrato precedentemente e ottenuta  $A'$  come appena descritto, per la formula di Lagrange si possono ottenere delle funzioni, dette modi naturali o modi propri del sistema, che rappresentano l'andamento nel tempo dei singoli segnali che compongono lo stato.

Un esempio banale nella teoria dei segnali può essere  $x_1(t) = e^{\lambda_0 t} x_0$ , in cui  $x_0$  rappresenta il punto di partenza dello stato. Lo studio dell'andamento dei modi naturali in base alle caratteristiche degli autovalori si concentra sul comportamento del sistema sotto esame, quando gli ingressi sono tutti nulli e risultano particolarmente importanti per il controllo della stabilità e di alcune proprietà che permettono di fare supposizioni sulle caratteristiche del controllore.

Lo scopo della modellizzazione è individuare come variabili di ingresso quelle che influenzano il comportamento del sistema, e come variabili di uscita quelle che caratterizzano il sistema e che costituiscono gli obiettivi del controllo.

Per ottenere una funzione o equazione matematica che rappresenti il processo, non è sufficiente descrivere il comportamento dinamico mediante relazioni algebriche tra input e output, ma

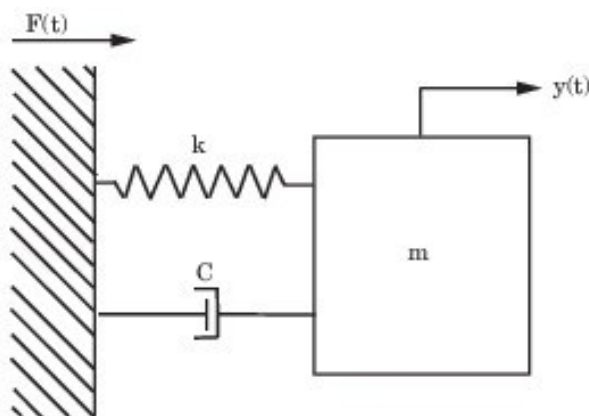
serve conoscere rispettivamente i valori degli ingressi dall'istante iniziale e una o più condizioni di ingresso, cioè lo stato di partenza.

Il numero minimo di condizioni iniziali che occorre assegnare per determinare tutte le uscite, prende il nome di ordine del sistema, mentre per descrivere l'evoluzione dinamica è sufficiente assegnare istante per istante a delle variabili, dette di stato, in numero uguale a quello dell'ordine.

Tramite la scrittura di equazioni differenziali si ottiene una formalizzazione matematica in due sistemi di equazioni: lo stato e l'uscita.

Per chiarificare quanto esposto viene illustrato un esempio di rappresentazione e modellizzazione di un sistema dinamico, quale massa- molla – smorzatore.

Come mostrato nella figura seguente, la massa si muove in risposta alla forza  $F(t)$  applicata sulla base a cui è attaccata la massa stessa. L'ingresso e l'uscita di questo sistema sono rispettivamente la forza  $F(t)$  e lo spostamento  $y(t)$ .



**Figura 4: Rappresentazione del Sistema molla-massa-smorzatore**

È possibile rappresentare lo stesso sistema fisico con diversi modelli equivalenti.

Ad esempio, è possibile rappresentare il sistema massa-molla-smorzatore in tempo continuo come equazione differenziale del secondo ordine:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky(t) = F(t)$$

Qui,  $m$  è la massa,  $k$  è la costante di rigidità della molla e  $c$  è il coefficiente di smorzamento. La soluzione di questa equazione differenziale consente di determinare lo spostamento della massa  $y(t)$ , in funzione della forza esterna  $F(t)$  in qualsiasi momento  $t$  per valori noti di costante  $m$ ,  $k$  e  $c$ .

Considerando lo spostamento  $y(t)$  e la velocità  $v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$  come variabili di stato ottengo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Si può esprimere la precedente equazione del moto anche come modello stato-spazio del

$$\text{sistema: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + BF(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Le matrici  $A, B$  e  $C$  sono correlate alle costanti  $m, k$  e  $c$  come segue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0]$$

Ed è quindi possibile ottenere un modello di funzione di trasferimento del sistema molla-massa-smorzatore utilizzando la trasformata di Laplace dell'equazione differenziale.

La trasformata di Laplace è una operazione che si esegue sulle funzioni a variabile reale per trasformarle in funzioni a variabile complessa e, contrariamente a quello che si può pensare, consente di apportare notevoli semplificazioni nei calcoli matematici, dato che per definizione le equazioni differenziali “si semplificano”.

Si ottiene quindi una funzione molto più semplice:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Qui,  $s$  è la variabile di Laplace.[3]

Questo modo di rappresentare i sistemi serve, oltre alla progettazione del controllore, anche per lo studio dei requisiti fondamentali, più in particolare la stabilità.

Dato un'equazione di stato del tipo più semplice possibile  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  e dato  $u(t) = \bar{u}$  costante, il sistema si trova all'equilibrio,  $x(t) = \bar{x}$ , e la derivata di  $x$  è nulla, cioè  $\dot{x}(t) = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ .

Questi punti sono particolarmente importanti nello studio della stabilità, in quanto rappresentano delle zone di “attrazione” in cui il segnale nel tempo tende ad avvicinarsi e portando l'uscita a un segnale costante se il punto in questione è globalmente asintoticamente stabile; altrimenti nei punti instabili dove la derivata è crescente, il segnale tende a crescere nel tempo e compromettendo l'utilizzo e la sicurezza del sistema, a volte causando situazioni catastrofiche, come l'esplosione e la perdita di controllo di una centrale nucleare.

## **Teorie di Controllo basate sui Modelli**

Alcune delle strategie più importanti utilizzate per risolvere i problemi di controllo sono quelle basate sul modello predittivo o Model Predictive Control.

Questa famiglia di algoritmi ha avuto un enorme impatto industriale negli ultimi 30 anni ed esistono diversi algoritmi che sfruttano il controllo ottimo su orizzonte finito per sistemi a tempo discreto.

### **Controllo ottimo**

Le metodologie di controllo ottimo consentono di esprimere direttamente nel dominio del tempo le specifiche sulla dinamica di un sistema anche non lineare, caratterizzando l'ingresso da applicare come quello che rende minimo (o massimo) un opportuno indice di costo (o qualità).

Una volta impostato il problema in questi termini, la teoria del controllo ottimo fornisce strumenti analitici per calcolare, direttamente o con procedimenti numerici, l'ingresso ottimo e in alcuni casi per realizzare tale ingresso come retroazione dallo stato.

Gli ingredienti di un problema di controllo ottimo sono quindi essenzialmente tre:

1. il modello del sistema;
2. i vincoli sulle variabili di stato e di ingresso;
3. l'indice da minimizzare (o da massimizzare) scegliendo una opportuna funzione di ingresso.

Più nel dettaglio si ha che:

1. la maggior parte delle tecniche di controllo disponibili fa riferimento a modelli di stato, sia lineari che non lineari;
2. per quanto riguarda i vincoli, essi possono essere di natura diversa ed esprimibili, nei casi più comuni, come limiti sulle ampiezze dei segnali di ingresso e delle variabili interne nel corso dell'evoluzione o come specifiche sul valore finale delle variabili di stato. Questi vincoli caratterizzano, per ogni problema, l'insieme degli ingressi che si considerano ammissibili, nel senso che all'interno di tale insieme ammissibile dovrà essere determinata la soluzione ottima;
3. infine, per quantificare la positività del comportamento di un sistema, si ricorre all'introduzione di un indice, rappresentato in generale da un funzionale che ad ogni ingresso ammissibile associa un numero reale. La struttura dell'indice dipende dall'obiettivo che si intende raggiungere risolvendo il problema di ottimo e tiene conto degli aspetti della dinamica del sistema che caratterizzano l'andamento delle variabili in gioco e il loro peso relativo. Esempi di indici derivano da valutazioni di tipo energetico e corrispondono alla determinazione di ingressi che consentono di raggiungere un obiettivo preassegnato utilizzando in modo ottimale la risorsa disponibile (per esempio il

combustibile). In altri casi gli indici forniscono, per ogni ingresso applicato al sistema, una valutazione dei corrispondenti costi o benefici economici e/o di altri vantaggi (biologici, ecologici, sociali, etc.) non strettamente quantificabili in termini economici. Nella gestione di risorse naturali (pesca, boschi, etc.) le equazioni di stato esprimono la dinamica delle specie sfruttate e l'indice da massimizzare tiene conto sia del profitto economico sia della sopravvivenza della specie. Altre volte l'indice è rappresentato dalla lunghezza dell'intervallo temporale necessario a raggiungere un obiettivo e l'ingresso ottimo è quello che rende minima tale lunghezza.

Si va quindi ad esaminare il caso di sistemi lineari, definendo il problema per quelli discreti e poi sviluppando la procedura computazionale per quelli continui.

In ogni caso ci si occupa di fornire una soluzione del problema della regolazione, ovvero di determinare una legge di controllo ottimo, che riporti il sistema nello stato di riferimento ogni volta che, a causa di un disturbo, lo stato subisca una perturbazione.

La legge di controllo ottimo può essere realizzata tramite una retroazione dallo stato, ottenendo così i vantaggi caratteristici di tale struttura.

Quindi considerando un modello di stato lineare a tempo discreto:

$$x(t + 1) = Ax(t) + Bu(t)$$

Supponiamo che sia assegnata una condizione iniziale, cioè un punto di partenza del processo  $x(0) = x_0$  che non vi siano vincoli sui valori delle funzioni di ingresso.

Il problema che viene posto è quello di individuare l'ingresso opportuno  $u(\cdot)$  che renda minimo l'indice di costo  $J$ . Quest'ultimo viene interpretato come un funzionale definito sull'insieme delle successioni di ingresso  $u(\cdot)$  e sull'insieme delle evoluzioni di stato  $x(\cdot)$ , e perciò ne consegue che il problema ottimo può essere visto come la minimizzazione della serie imponendo la minimizzazione di:

- l'energia dissipata del sistema rappresentato dal termine  $\sum_{t=0}^{T-1} [u^T(t)Ru(t)]$ ;
- il quadrato dell'errore di inseguimento nei punti intermedi, cioè minimizzare quanto si discosta il valore effettivo nei vari istanti di tempo con quello richiesto o desiderato, rappresentato da  $\sum_{t=0}^{T-1} [x^T(t)Qx(t)]$
- l'errore sul punto finale rappresentato dall'addendo  $x^T(T)Sx(T)$ .

L'indice quindi si presenta nella sua totalità tramite questa espressione che considera un intervallo di valori che vanno dall'istante iniziale  $t = 0$  e uno finale  $t = T_1$ :

$$J(u, x_0) = \sum_{t=0}^{T_1-1} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] + x^T(T_1)Sx(T_1)$$



Con  $Q, S$  matrici  $n \times n$  simmetriche e semidefinite positive e  $R$  matrice  $m \times m$  e definita positiva, che rappresentano le matrici di varianza dei disturbi presenti.

Per un sistema continuo invece, dato l'impianto  $\dot{x}(t) = \mathbf{f}(x(t), \mathbf{u}(t), t)$  la funzione di costo è definita come la definizione precedente, ma al posto della sommatoria viene sostituito l'integrale, in cui il primo addendo rappresenta sempre il costo finale, mentre il resto della formula rappresenta il "peso" dell'evoluzione del sistema:

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

E tenendo conto che le condizioni di contorno sono uguali alla rappresentazione precedente, cioè  $x(t_0) = x_0$ , mentre  $x(t_f)$  e  $t_f$  sono liberi.

Per semplicità si descrive la risoluzione del controllo ottimo solo per la seconda classe di sistemi, quelli continui. Il problema, in ogni caso, impone di determinare  $u^*(t), \forall t \in [t_0, t_f]$  in modo da minimizzare  $J$ .

La procedura per sistemi continui segue questi passi:

1. definire la funzione hamiltoniana, che rappresenta l'energia totale di un sistema,

$$H(x(t), u(t), \lambda, t) := f_0(x(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(t) \mathbf{f}(x(t), \mathbf{u}(t), t)$$

In cui il vettore  $\lambda$  rappresenta il vettore delle variabili aggiunte o co-stato, la cui derivata è uguale alla derivata parziale della matrice hamiltoniana trasposta con la variabile di stato  $x$

Equazione del co- stato 
$$\dot{\lambda}(t) = - \frac{\partial H^T}{\partial x}$$

2. Bisogna poi minimizzare  $H$  rispetto a  $u$  tramite l'equazione del controllo  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  e ottenendo  $u^*(t) = h(x(t), \lambda(t), t)$
3. Utilizzare quanto ottenuto per trovare il valore ottimo di

$$H^* = H(x(t), h(x(t), \lambda(t), t), \lambda, t)$$

e definire il sistema di  $2n$  equazioni differenziali costituito da equazioni di stato e co-stato.

$$\dot{x}(t) = \mathbf{f}(x(t), \mathbf{u}^*(t), t) \Leftrightarrow \dot{x}(t) = - \frac{\partial H^{*T}}{\partial \lambda}$$

$$\dot{\lambda}(t) = - \frac{\partial H^{*T}}{\partial x}$$

4. Risolvere il sistema con condizioni iniziali  $x(t_0) = x_0$  e finali

$$\left[ H + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[ \frac{\partial S}{\partial x} - \lambda^T(t) \right]_{t_f} \delta x_f = 0$$

In cui  $\delta t_f$  e  $\delta x_f$  sono variazioni arbitrarie di  $t_f$  e  $x_f$  che si possono considerare unitarie così da ottenere relazioni più semplici.

5. Sostituire la soluzione delle equazioni differenziali  $\mathbf{x}^*(t)$  e  $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$  ottenute nell'espressione del controllo ottimo ottenuto al passo 2.

Un esempio concreto di controllo ottimo può essere il seguente: sia dato un punto materiale di massa  $m$ , in moto rettilineo, e sia possibile applicare alla massa una forza  $f$  diretta come il moto. Sono note all'istante  $t_0$  la posizione  $x(t_0) = x_{10}$  e la velocità  $x_{20}$

Con le opportune posizioni, l'equazione del moto,  $m\ddot{x}(t) = f$ ,  $x(0) = x_{10}$ ,  $\dot{x}(0) = x_{20}$ , avendo assunto  $t_0 = 0$ , può essere riscritta come:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

La richiesta è di determinare l'azione di controllo ottima  $u(t) \in [t_0, t_f]$  tale per cui il punto materiale sia sufficientemente vicini all'origine all'istante finale  $t_f = 2$  e l'azione di controllo (energia di controllo) sufficientemente limitata.

Grazie a queste richieste l'indice di comportamento può essere scelto come:

$$J = c_1 x_1^2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} c_2 u^2(t) dt \quad \text{con} \quad c_1, c_2 > 0$$

Dove  $c_1, c_2$  sono le opportune costanti definite in modo da quantificare i termini "sufficientemente". Sia  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$  e  $x_{10} = 1$  m,  $x_{20} = 2 \frac{m}{s}$

Seguendo la procedura delineata precedentemente si trova che:

$$H(\mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}, t) = f_0(\mathbf{x}(t), u(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), t) = \frac{1}{2} u^2(t) + \lambda_1(t) x_2(t) + \lambda_2(t) u(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow \lambda_2(t) + u(t) = 0 \rightarrow u^*(t) = -\lambda_2(t)$$

Sostituendo nell'equazione precedente si ottiene

$$H(\mathbf{x}(t), u^*(t), \boldsymbol{\lambda}, t) = \frac{1}{2} \lambda_2^2(t) + \lambda_1(t) x_2(t) - \lambda_2^2(t) = \lambda_1(t) x_2(t) - \frac{1}{2} \lambda_2^2(t)$$

Da cui le equazioni di stato e di co-stato risultano:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = -\lambda_2(t) \\ \dot{\lambda}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t) \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema di equazioni differenziali si ottiene

$$x_1(t) = \frac{C_3}{6}t^3 - \frac{C_4}{2}t^2 + C_2t + C_1$$

$$x_2(t) = \frac{C_3}{6}t^3 - C_4t + C_2$$

$$\lambda_1(t) = C_3$$

$$\lambda_2(t) = -C_3t + C_4$$

In cui i parametri incogniti  $C_i$  devono essere trovati imponendo le condizioni iniziali fornite e le condizioni finali che si possono dedurre.

Risultano quindi  $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = \frac{15}{11}, C_4 = \frac{30}{11}$

L'espressione finale del controllo ottimo risulta pertanto  $u^*(t) = -\lambda_2(t) = \frac{15}{11}t - \frac{30}{11}$  [4]

Ovviamente questi risultati possono essere calcolati e trovati tramite specifiche funzioni di Matlab, una piattaforma di programmazione e calcolo numerico per l'analisi di dati, lo sviluppo di algoritmi e la creazione di modelli, tramite uno strumento che offre funzioni al fine di trovare parametri in grado di minimizzare o massimizzare gli obiettivi e allo stesso tempo soddisfare i vincoli.

### **Model-Predictive Control**

Il Model Predictive Control indica un'ampia varietà di metodi di controllo che usano il modello del processo per ottenere il segnale di controllo basandosi sull'ottimizzazione.

È nato nei primi anni '80 ed è stato inizialmente concepito per il controllo di impianti chimici, caratterizzati da dinamiche lente, a causa dell'elevato costo computazionale che contraddistingueva questa tecnica.

Negli anni, invece, grazie al miglioramento delle metodologie di soluzione numerica e, soprattutto, grazie all'aumento della potenza dell'hardware, si sono diffuse applicazioni di MPC anche ad altre tipologie di sistemi.

L'idea di fondo di questa tecnica è quella di trasformare il classico problema di controllo in un problema di ottimizzazione matematica, in modo da poter inserire in maniera semplice vincoli e limitazioni presenti sul sistema reale. In particolare, il modello dell'intero sistema viene utilizzato per predire, su di un orizzonte finito, l'evoluzione delle variabili di stato, a partire dal valore che quest'ultimo assume all'istante attuale e in funzione della sequenza di ingressi di controllo futuri.

In questo modo, essendo questa sequenza di ingressi un grado di libertà nel problema considerato, la predizione può essere utilizzata all'interno di una cifra di merito per far sì che lo stato segua adeguatamente un determinato obiettivo, producendo in uscita esattamente il valore ottimo degli ingressi che consente di raggiungere le prestazioni desiderate.

La strategia del MPC viene spiegata per sistemi di tempo discreto, ma è quasi del tutto equivalente per i sistemi a tempo continuo.

Si procede calcolando la sequenza di controllo ottimo  $u^*(k)$  determinata come risultato di un problema di ottimizzazione ad ogni istante di campionamento, cioè di raccolta discreta dei dati da fornire al controllore digitale. Tutte le specifiche sono quantificate tramite l'indice di costo  $J$  composto da un termine che valuta l'errore quadratico tra l'uscita futura desiderata e quella predetta all'interno di un orizzonte di predizione definito (che è una finestra di  $P$  campioni) e un secondo termine usato per pesare lo sforzo di controllo quantificato dalla sequenza degli incrementi di ingresso all'interno di un orizzonte di controllo (che è una finestra di  $M$  campioni).

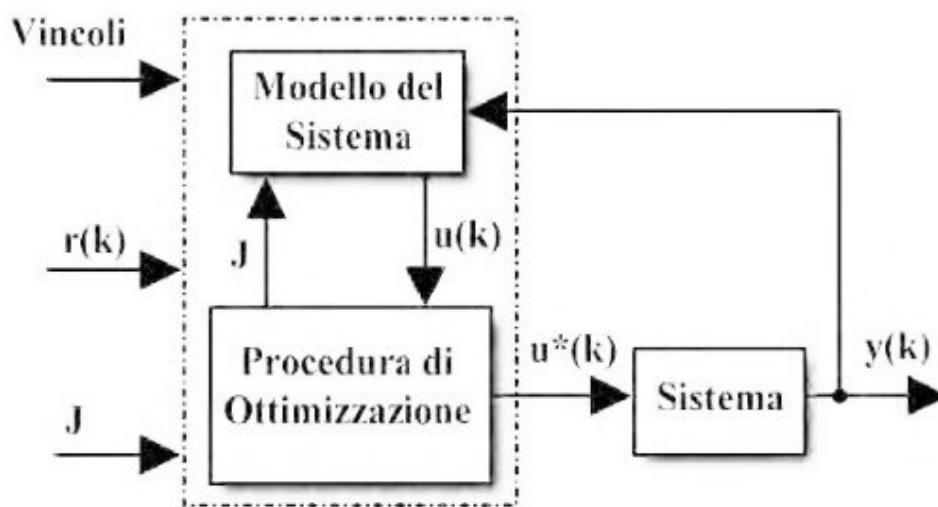


Figura 5: Rappresentazione dei blocchi delle tecniche MPC

Il controllo predittivo è usato, soprattutto, quando sono presenti dei vincoli sul processo. Questi sono legati ai valori massimo e minimo e al tasso di variazione delle variabili di ingresso (variabili manipolate o di controllo) e di uscita (variabili controllate).

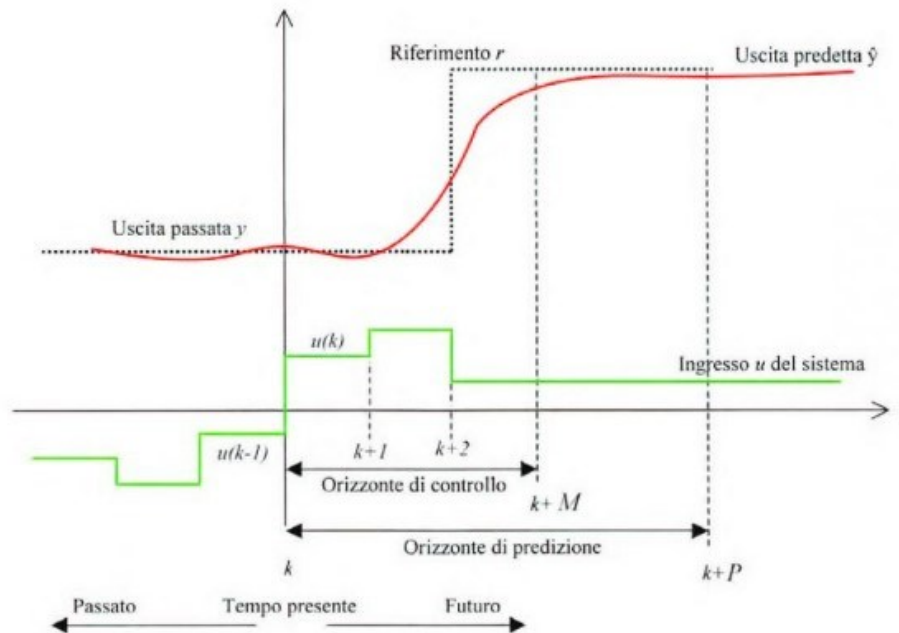
Il perfezionamento di un controllore predittivo si effettua scegliendo la lunghezza dell'orizzonte di predizione  $P$ , quella dell'orizzonte di controllo  $M$  e i coefficienti di normalizzazione che compaiono nell'espressione dell'indice di costo.

I valori di tali parametri vanno scelti seguendo delle linee guida generali e, per tentativi, fino ad ottenere una risposta ragionevole del sistema.

Un aspetto chiave nel controllo predittivo è l'applicazione della strategia dell'orizzonte mobile (Receding Horizon, RH). In questo approccio solo il primo campione della sequenza ottima calcolata  $u^*(k + j)$  è applicato al sistema, successivamente l'orizzonte è traslato un campione avanti nel futuro e l'ottimizzazione è ripetuta sulla base dell'informazione di retroazione misurata.

Le uscite future del processo sono predette all'interno di un orizzonte di predizione di lunghezza  $P$  usando il modello del processo. I valori di uscita predetti dipenderanno dall'evoluzione del processo nei vari istanti e dai segnali di controllo futuri che saranno forniti al sistema.

Con l'approccio dell'orizzonte mobile, il segnale di controllo viene manipolato solo all'interno dell'orizzonte di controllo  $M$ , successivamente viene mantenuto costante al valore assunto alla



**Figura 6: Andamenti temporali dell'uscita predetta e ingresso sistema**

fine dell'orizzonte di controllo, fino al raggiungimento dell'orizzonte di predizione  $P$ . L'approccio dell'orizzonte mobile permette di compensare disturbi futuri o errori di modello. A causa di disturbi o errori di modello l'uscita  $y(k+1)$  predetta all'istante  $t$ , può essere anche molto diversa dall'uscita  $y(k)$  misurata all'istante successivo  $t+1$ . All'istante  $t+1$  conviene, quindi, fare una predizione a partire dall'uscita misurata in quest'istante anziché da quella predetta all'istante di campionamento precedente. In tal modo è attivo un meccanismo di retroazione che consente di compensare i problemi derivanti dalla presenza di disturbi o da variazioni parametriche del modello. L'orizzonte all'interno del quale l'uscita del processo è predetta, di conseguenza, trasla di un campione nel futuro ad ogni istante di campionamento e viene effettuata una nuova ottimizzazione. [5]

I principali vantaggi di MPC sono:

- Consente di includere dei vincoli nel problema di ottimizzazione
- È applicabile a sistemi multivaribili
- Può essere usato per risolvere una grande varietà di problemi se il modello è sufficientemente preciso

Tuttavia, questo metodo presenta degli svantaggi:

- La necessità del modello che descriva adeguatamente il processo ma che al tempo stesso sia sufficientemente semplice da consentire i calcoli richiesti in tempi brevissimi
- La derivazione delle leggi di controllo risulta essere piuttosto complessa
- A volte il costo può essere estremamente elevato e comporta un rallentamento del calcolo delle soluzioni

### **Sistemi Reali Moderni**

Dalla fine degli anni '60, la teoria del controllo moderna è stata completamente migliorata e sviluppata. Gli strumenti fin ora utilizzati però non sono più stati ampiamente utilizzati nei processi industriali, aerospaziali, nei sistemi di traffico e in altre applicazioni.

Tuttavia, questo campo contiene ancora molti argomenti impegnativi sia dagli aspetti teorici che dalle prospettive pratiche [6] e che lo porta a essere in continua evoluzione in parallelo allo sviluppo delle tecnologie.

Ci basti pensare alle neuroscienze, la cui richiesta è quella di modellare e controllare il comportamento dei neuroni che compongono il nostro cervello e prevedere quindi condotte o azioni che si basano su impulsi elettrici piccolissimi, la cui fisica risulta altamente complessa; al mondo bancario e finanziario nel quale la gestione e la conoscenza del dato, della sua qualità e affidabilità sono condizioni necessarie per qualsiasi forma di investimento e proposta; al controllo di fenomeni epidemiologici; alla guida autonoma nei sistemi di trasporto o all'andamento climatico del nostro pianeta.

Questo tipo di sistemi presentano difficoltà note:

- sono sistemi estremamente non lineari;
- le dinamiche fisiche sono spesso sconosciute;
- ci sono moltissimi gradi di libertà richiesti per la descrizione del sistema a spazio di stato;
- a volte gli ingressi non riescono a controllare tutto il sistema, ma solo parte di esso.

Con l'avanzamento tecnologico però abbiamo ottenuto un enorme incremento della capacità di collezionare e memorizzare dati.

Infatti, sono migliorate:

- l'affidabilità delle simulazioni;
- le tecniche di misurazioni;
- il costo e la struttura di hard driver;
- la velocità e le prestazioni dei computer.

Questo ha portato alla nascita del Data-Driven Control, tecnica del Machine Learning, che permette di modellare i sistemi tramite l'utilizzo dei dati, progettare un controllore in grado di imparare dai dati acquisiti senza modellare il sistema o ottimizzare la posizione del sensore e scegliere quale tra le moltissime variabili disponibili controllare.

## **Data-Driven Control**

In questo capitolo, nucleo di questa tesi, oltre alla breve introduzione del Machine learning e la contestualizzazione del controllo basato sui dati, viene studiato il problema della modellizzazione in un impianto deterministico lineare tempo invariante, in cui le dinamiche non sono note.

### **Machine Learning**

Machine Learning, o apprendimento automatico, è l'abilità delle macchine (computer, microcontrollori, ecc.) di apprendere senza essere state esplicitamente e preventivamente programmate.

Il termine fu coniato nel 1959 da Arthur Lee Samuel, scienziato americano precursore nel campo dell'AI (Intelligenza Artificiale)

Ad oggi però, la definizione più accreditata dalla comunità scientifica è quella fornita da Tom Michael Mitchell, direttore del dipartimento Machine Learning della Carnegie Mellon University disse che il ML permette ai computer di imparare dall'esperienza (riferito ad un programma informatico); c'è apprendimento (esperienza) quando le prestazioni del programma migliorano dopo lo svolgimento di un compito o il completamento di un'azione.

La più famosa tecnica di apprendimento automatico del momento si basa sulle reti neurali, e talvolta il Machine Learning è equiparato alla formazione rete neurale, ma questo è incorretto, in quanto il ML è un concetto ampio che contiene sia il Deep Learning, in cui i modelli di apprendimento si basano sulla struttura e il funzionamento del cervello umani, in cui le reti neurali svolgono una funzione fondamentale, come il riconoscimento automatico della lingua parlata, l'elaborazione del linguaggio naturale, il riconoscimento audio, ecc.

Nel campo dei controlli automatici il ML è stato largamente usato e sviluppato per la sua abilità di bypassare la descrizione dei modelli dei sistemi complessi, piuttosto che tramite l'identificazione attraverso i modelli di stato e le leggi fisiche, e sta rivoluzionando ed evolvendo le tecniche già esistenti, come l'insieme del MPC, e risolvendo i problemi dovute sia alle dinamiche sconosciute che alle prestazioni temporali che la modellizzazione richiede, oltre che a una decisiva riduzione dei tempi di progettazione dei sistemi di controllo, in quanto la modellazione degli impianti nelle tecniche classiche richiede di solito il 75% del tempo del progetto e diverse competenze.[7]

Ancora più recentemente il ML si è espanso pure nella determinazione delle leggi di controllo cioè individuare una mappa efficace dall'uscita del sensore all'ingresso di attuazione.<sup>1</sup>

---

1



I settori in cui l'apprendimento automatico viene impiegato per raggiungere alcuni stimolanti obiettivi nel mondo reale sono:

- Fluidodinamica in cui l'obiettivo è spesso una combinazione tra la riduzione della resistenza e dei disturbi, l'aumento della risalita, mentre nelle applicazioni di ingegneria farmaceutica e chimica l'obiettivo può comportare il miglioramento della miscelazione.
- Nella finanza l'obiettivo è spesso quello di massimizzare il profitto a un determinato livello di tolleranza al rischio, soggetto alla legge.
- Nell'epidemiologia lo scopo può essere quello di sopprimere efficacemente una malattia con vincoli di rilevamento (ad esempio, campioni di sangue, cliniche, ecc.) e attuazione (ad esempio, vaccini, zanzariere, ecc.).
- Industria il fine di aumentare la produttività deve essere bilanciato con diversi vincoli, tra cui le leggi sul lavoro e sulla sicurezza sul lavoro, nonché l'impatto ambientale, che spesso presentano una significativa incertezza.
- Automazione: uno dei tanti propositi è quello di dotare le auto della guida autonoma e nella robotica è quello di dotare le macchine della capacità di risolvere compiti in autonomia facendoli interagire in sicurezza con un ambiente complesso, compresa la cooperazione con agenti umani.[8]

### **Il controllo basato sui dati**

I sistemi di controllo Data-Driven sono un'ampia famiglia di sistemi di controllo, in cui l'identificazione del modello di processo e/o la progettazione del controllore si basano interamente sui dati sperimentali raccolti dall'impianto. [9]

I primi tentativi in questa direzione risalgono al 1942, con i primi studi di Ziegler e Nichols sull'autotuning PID. Da allora sono stati derivati approcci più sofisticati, basati sull'ottimizzazione, per la sintonizzazione del controller di ordine fisso, portando a un "portafoglio di tecniche" adatte a diverse formulazioni di problemi.

Tuttavia, è solo di recente che, con la disponibilità di grandi quantità di dati e una potenza di calcolo senza precedenti, un tale cambiamento di paradigma nella progettazione del controllo può essere esteso ad architetture di controllo più complesse.

Per esempio, nell'ambito deterministico, facendo affidamento sul cosiddetto "lemma fondamentale" della persistenza di eccitazione dei segnali, le equazioni del modello possono essere sostituite da appropriati vincoli basati sui dati nella formulazione di schemi di Model Predictive Control (MPC).

Tale framework basato su dati può portare a prestazioni diverse rispetto ai tradizionali MPC basati su modelli in quanto mostra caratteristiche uniche. Ad esempio, la differenza di prestazioni tra il controllore DDC e quello MBC ottimo (vale a dire il controllo basato sul

modello che utilizza il modello reale del sistema) svanisce con la dimensione del numero di dati. Inoltre, un controllo predittivo privo di modelli può affrontare indirettamente il problema del bias/della varianza in modo più efficiente, cioè non incorre nel bias asintotico indotto da modelli imprecisi quando i vincoli di complessità sono imposti alla struttura del modello. Tuttavia, la sostituzione della descrizione della dinamica del sistema con i dati uguali o non della matrice è valida rigorosamente solo nel caso di sistemi puramente deterministici. Ne consegue che la presenza onnipresente di "rumore" nei sistemi stocastici porta inevitabilmente ad alcune approssimazioni, che a loro volta possono deteriorare le prestazioni a circuito chiuso.

Nel caso di studio seguente ci si occupa di derivare il legame tra il Receding Horizon del problema del controllo predittivo e le matrici dei dati di Hankel di un sistema deterministico e mostrare che il vettore parametro sintonizzabile che descrive la dinamica del sistema nella sua forma basata sui dati può essere adeguatamente scomposto in tre termini con ruoli diversi permette di mostrare che le variabili di ottimizzazione libere vivono in un sottospazio dimensionale basso, riducendo così anche la complessità del problema di ottimizzazione MPC.

### Caso di studio: il problema ottimo nel Data-Driven Predictive Control

Come è stato fatto notare precedentemente le tecniche MPC sono limitate se il modello dei sistemi o degli impianti sono sconosciuti e non noti. Per superare e risolvere questo problema è stato pensato di sostituire il blocco del modello nella tecnica ad anello chiuso con uno pseudo blocco in grado di attribuire una rappresentazione alternativa da fornire all'ottimizzazione nel controllo ottimo già studiato precedentemente.

A seguire la figura mostra l'anello in retroazione delle tecniche in esame.

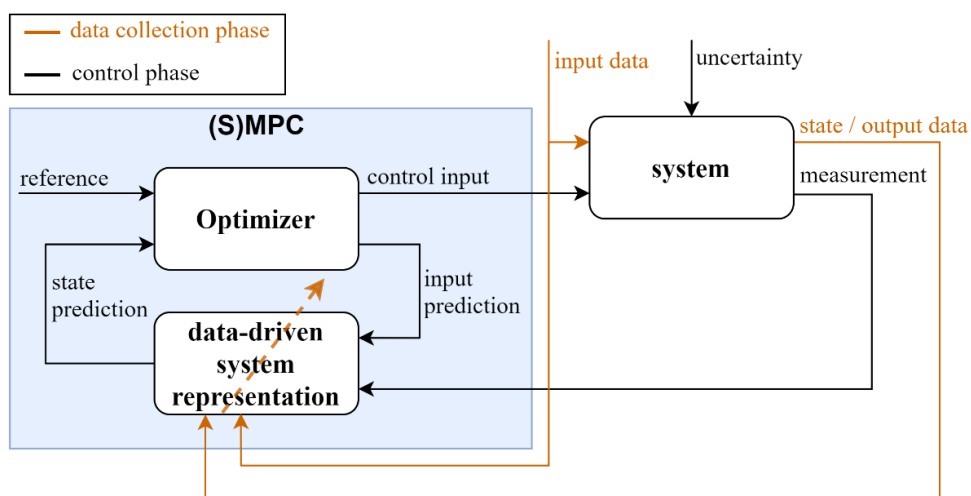


Figura 7: Rappresentazione dei blocchi del Data-Driven Predictive Control

Per poter dimostrare la potenza delle tecniche Data-Driven utilizzate, viene preso come caso di studio un impianto deterministico non noto, lineare tempo invariante (LTI).

Lo si può descrivere per definizione attraverso il modello a spazio di stato, esposto nel primo capitolo di questo elaborato e riportato per semplicità:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

In cui il vettore  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  rappresenta lo stato dell'impianto,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  gli input, cioè gli ingressi, e  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  corrisponde al segnale di uscita.

Si nota che essendo deterministico, sia gli stati che gli output non presentano alcun termine aggiuntivo dovuti ai disturbi e che se fossero presenti comparirebbero a media nulla e varianza nota, come segnali gaussiani bianchi.

Senza perdita di generalità, si suppone che (3.1) sia minimo, cioè raggiungibile e osservabile.

Per definizione un sistema si dice raggiungibile se partendo da qualunque stato iniziale  $x_0$  si può arrivare un qualunque stato finale  $x$  con un'opportuna azione di controllo; mentre si dice controllabile se a partire da un qualunque stato  $x$  esiste un'opportuna azione di controllo in grado di portare il sistema nello stato  $x_0$ .

Vengono inoltre esplicitati il segnale di riferimento  $y_r(t), t \in \mathbb{Z}$  a cui l'uscita deve tendere completata l'azione di regolazione e il controllo di orizzonte  $T$ , cioè l'istante di tempo massimo in cui si deve risolvere il problema; per semplicità e senza perdita di generalità viene considerato che il riferimento sia costante lungo l'orizzonte di previsione, cioè,  $y_r(k) = y_r(t), k \in [t, t+T)$

Come notazione si utilizza  $x^d(k)$  per identificare il valore atteso di  $x(k)$ , cioè  $x^d(k) := \mathbb{E}[x(k)]$ .

Pe quanto espresso finora è semplice vedere che il problema del controllo predittivo può essere inquadrato come segue tramite alcune formulazioni:

$$u(k), \min_{k \in [t, t+T]} \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=t}^{t+T-1} \|y^d(k) - y_r(k)\|_Q^2 + \|u(k)\|_R^2 \right] \quad (3.2a)$$

$$x^d(k+1) = Ax^d(k) + Bu(k), \quad k \in [t, t+T) \quad (3.2b)$$

$$y^d(k) = Cx^d(k) + Du(k), \quad k \in [t, t+T) \quad (3.2c)$$

$$x^d(t) = x_{init} \quad (3.2d)$$

$$u(k) \in \mathcal{U}, \quad y^d(k) \in \mathcal{Y}, \quad k \in [t, t+T) \quad (3.2e)$$

La prima equazione rappresenta l'indice di costo della legge di controllo Receding Horizon, che prevede la risoluzione ripetuta di un problema di ottimizzazione vincolata, attraverso vincoli sulle variabili in modo diretto.

In questo caso la funzione interessata si focalizza sul minimizzare la differenza tra le uscite istantanee e il riferimento, il cosiddetto "tracking error".

La seconda e la terza equazione sono la riscrittura dello spazio di stato utilizzando i valori attesi della funzione  $x(k)$  e  $y(k)$ , cioè stato e uscite.

$x_{init}$  è lo stato al tempo iniziale  $t$  e rappresenta la condizione necessaria da cui il sistema parte.

Gli insiemi  $\mathcal{U}, \mathcal{Y}$  sono i vincoli di input e output, cioè gli intervalli di valori in cui i dati dell'impianto devono essere circoscritti.

Viene utilizzata la notazione  $u_f := \{u(k), k \in [t, t + T)\}$  per descrivere il vettore che rappresenta la futura traiettoria degli ingressi

$$u_f = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t + 1) \\ \vdots \\ u(t + T - 1) \end{bmatrix}$$

L'obiettivo di questo caso è il problema di controllo sopracitato (3.2) quando le matrici  $A, B, C, D$  non sono note, in quanto il sistema, essendo sconosciuto, non può essere modellato utilizzando i principi della fisica; inoltre è disponibile solo una sequenza dati input-output misurata dai sensori posti nell'impianto, definita  $\mathcal{D}_{N_{data}} = \{u(j), y(j)\}_{j=1}^{N_{data}}$ .

Un'osservazione va fatta prima di procedere con la risoluzione: se fosse stato preso in considerazione un impianto stocastico con disturbi sconosciuti, la procedura sarebbe stata piuttosto simile, in quanto tramite semplici manipolazioni si sarebbe ottenuta la stessa formulazione del problema di controllo presente in (3.2), dato che il problema viene risolto solo per la parte determinista di ogni sistema, quando i disturbi non compaiono nella rappresentazione a spazio di stato.

Lo stato iniziale  $x_{init}$  al tempo  $t$  può essere contabilizzato con precisione arbitraria su una finestra sufficientemente lunga dalle passate osservazioni input-output, grazie alla osservabilità del sistema garantita dal fatto che è stato definito come minimo (come precedentemente detto raggiungibile e controllabile).

Infatti, questa proprietà implica che conoscendo un numero sufficiente di ingressi e uscite si possono ricavare gli stati del sistema, anche quelli che non sono direttamente accessibili.

Si può per questa ragione esprimere lo stato iniziale come una combinazione di tutti gli ingressi e le uscite misurate e grazie all'esistenza di una matrice  $\mathcal{C}_{det}$ , che rappresenta la matrice di controllabilità invertita tale che  $x(t) = \mathcal{C}_{det} \begin{bmatrix} u_t^- \\ y_t^- \end{bmatrix}$ ,

$$\text{in cui} \quad u_t^- := \begin{bmatrix} u(t-\rho) \\ \vdots \\ u(t-2) \\ u(t-1) \end{bmatrix}, y_t^- = \begin{bmatrix} y(t-\rho) \\ \vdots \\ y(t-2) \\ y(t-1) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Questi vettori così espressi sono un insieme  $\rho$  di dati rispettivamente di input e output "raccolti" nei  $\rho$  istanti precedenti e a condizione che la quantità  $\rho$ , noto anche come "orizzonte passato", sia maggiore dell'ordine del sistema  $\rho \geq n$ .

Il passo successivo consiste nel riunire i valori di ingresso e uscita di un dato istante nel vettore  $z(k) := \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$ , e definire delle abbreviazioni delle matrici di Hankel "passate" e "future", cioè contenenti i valori passati dei segnali di interesse input e output, tenendo conto della definizione di  $z(k)$ , così descritte (si esplicita per semplicità solo la prima, le altre sono simili di conseguenza):

$$U_P := U_{[0,\rho-1],N}, \quad Y_P := Y_{[0,\rho-1],N}, \quad Z_P := Z_{[0,\rho-1],N} \quad (3.4)$$

$$U_P := U_{[0,\rho-1],N} := \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \cdots & u(N-1) \\ u(1) & u(2) & \cdots & u(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(\rho-1) & u(\rho) & \cdots & u(\rho+N) \end{bmatrix}$$

$$U_F := U_{[\rho,\rho+T-1],N}, \quad Y_F := Y_{[\rho,\rho+T-1],N} \quad (3.5)$$

$$U_F := U_{[\rho,\rho+T-1],N} := \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} u(\rho) & u(\rho+1) & \cdots & u(\rho+N-1) \\ u(\rho+1) & u(\rho+2) & \cdots & u(\rho+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(\rho+T-1) & u(\rho+T) & \cdots & u(\rho+T+N) \end{bmatrix}$$

Si sottolinea che il numero di colonne  $N$  delle matrici di dati di Hankel è scelto in modo tale che tutti i dati disponibili sono sfruttati,  $N := N_{data} - T - \rho$ , una volta che le lunghezze di entrambi gli istanti di "passato"  $\rho$  e di "futuro"  $T$  sono fissati.

Vengono definite la matrice di osservabilità estesa  $\Gamma \in \mathbb{R}^{pT \times N}$  associato al sistema esplicitato al punto (3.1), vale a dire:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{T-1} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

e la matrice di Toeplitz o matrice a diagonali costanti  $\mathcal{H}_d \in \mathbb{R}^{pT \times mT}$  formato con i suoi parametri di Markov, vale a dire,

$$\mathcal{H}_d = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{T-2}B & CA^{T-3}B & CA^{T-4}B & \dots & D \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La matrice  $Y_F$  Hankel delle future uscite può essere scritta grazie al teorema formulato in [10] nello scritto di De Moor, come una combinazione tra gli stati e gli ingressi:

$$Y_F = \Gamma X_\rho + \mathcal{H}_d U_F \quad (3.8)$$

Questa equazione è spesso considerata come un inizio punto nell'identificazione Subspace, necessaria per poter bypassare la modellazione tramite l'identificazione mediante i principi fisici.

Si noti che, sulla base di  $x(t) = \mathcal{C}_{det} \begin{bmatrix} u_t^- \\ y_t^- \end{bmatrix}$  e  $\rho$  è scelto in modo Data-Driven come discusso precedentemente, cioè in modo che sia maggiore dell'ordine del sistema  $\rho \geq n$ .

$X_\rho$ , cioè gli ingressi dell'orizzonte passato, può essere scritto come

$$X_\rho = \mathcal{C}_{u\ det} U_P + \mathcal{C}_{y\ det} Y_P \doteq \mathcal{C}_{det} Z_P \quad (3.9)$$

In cui  $Z_P = [U_P^T \quad Y_P^T]$

Il *Lemma Proiezione dell'uscita* stabilisce che, data la condizione iniziale proiettata  $\hat{X}_\rho$  e l'ingresso  $U_F$ , l'uscita proiettata di  $Y_F$  è uguale all'evoluzione della parte deterministica del sistema (3.1) e quindi è possibile esprimerla come:

$$\hat{Y}_F = \Gamma \hat{X}_\rho + \mathcal{H}_d U_F = \Gamma \mathcal{C} Z_P + \mathcal{H}_d U_F \quad (3.10)$$

In cui  $\hat{X}_\rho := \Pi_{Z_P, U_F}(X_\rho) \doteq \mathcal{C} Z_P$

Un'ulteriore semplificazione viene fornita dal *Teorema* che fornisce la *relazione tra Output e Dati* che afferma che se la sequenza input-output dei passati ingressi e uscite ( $u(k)$  e  $y(k)$  per  $k \in [t + \rho, t - 1]$ ) è uguale a  $z_{init}$  (cioè le condizioni iniziali determinate dai dati passati misurati) e agli ingressi futuri  $u(k)$  nella finestra di tempo  $k \in [t, t + T - 1]$  rappresentate da

$u_f$ , la corrispondente uscita deterministica, cioè,  $y_f^d = \begin{bmatrix} y^d \\ y^d(t+1) \\ \vdots \\ y^d(t+T-1) \end{bmatrix}$  è una trasformazione

lineare degli output futuri proiettati  $\hat{Y}_F$ . Quindi dato un qualsiasi  $\alpha \in \mathbb{R}^N$ , il vettore

$$\hat{y}_f^d = \begin{bmatrix} y^d \\ y^d(t+1) \\ \vdots \\ y^d(t+T-1) \end{bmatrix} = \Gamma \hat{x}^d + \mathcal{H}_d u_f \quad (3.11)$$

Con  $\hat{x}^d(t) := \hat{X}_\rho \alpha \doteq \mathcal{C} Z_P \alpha = \mathcal{C} z_{init} \quad (3.12a)$

con 
$$u_f = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+T-1) \end{bmatrix} \quad (3.12b)$$

e  $z_{init} := Z_P \alpha$ .

Si ottiene quindi 
$$\hat{y}_f^d = \begin{bmatrix} y^d \\ y^d(t+1) \\ \vdots \\ y^d(t+T-1) \end{bmatrix} = \Gamma \mathcal{C} z_{init} + \mathcal{H}_d \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+T-1) \end{bmatrix}$$

Questo implica che per ogni coppia di condizioni iniziali e input futuri, che può essere scritta come combinazione lineare di  $Z_P$  e  $U_F$  (vedi (3.4) e (3.5)), il teorema mostra che si può calcolare l'output di (3.1) tramite solamente un set finito di dati di input-output, senza conoscere il vero sistema.

Viene garantito dai teoremi descritti da Moonen e De Moor in [11] che la matrice di Hankel

$Z_{data} := \begin{bmatrix} Z_P \\ U_F \\ Y_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+p)(\rho+T) \times N}$  e  $Z_P \in \mathbb{R}^{(m+p)\rho \times N}$  abbiano il rango (cioè il numero di righe o colonne indipendenti)

$$\begin{aligned} \text{rank}(Z_{data}) &= n + m(\rho + T) < (m + p)(\rho + T) \\ \text{rank}(Z_P) &= n + m\rho < (m + p)\rho \end{aligned}$$

con la condizione che  $\rho > n$ .

In conclusione, si può generalizzare la relazione che lega l'uscita, qualsiasi traiettoria passata (congiunta) di ingressi- uscite e gli ingressi futuri tramite un ultimo teorema che formalizza il risultato.

Infatti, il valore atteso dell'uscita deterministica  $\hat{y}_f^d$  è legato alla proiezione dell'uscita futura  $\hat{Y}_F$  tramite un fattore, che è la soluzione di norma minima del sistema di equazioni lineari che mettono in relazione i dati letti, le condizioni iniziali e gli ingressi futuri.

Questo si può esprimere in formule ricordando: traiettoria (passata) congiunta di ingressi e uscite

traiettoria congiunta di ingressi e uscite 
$$z_{init} := \begin{bmatrix} z(t-\rho) \\ \vdots \\ z(t-2) \\ z(t-1) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

scelta qualsiasi del futuro input di controllo 
$$u_f := \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+T-1) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

La corrispondente uscita deterministica  $y_f^d := \begin{bmatrix} y^d \\ y^d(t+1) \\ \vdots \\ y^d(t+T-1) \end{bmatrix}$  soddisfa:

$$y_f^d = \hat{Y}_F \alpha^* \quad (3.15)$$

In cui  $\alpha^*$  è la soluzione di norma minima del sistema di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} z_{init} \\ u_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_P \\ U_F \end{bmatrix} \alpha \quad (3.16)$$

specificato precedentemente che  $\hat{Y}_F := \Pi_{Z_P, U_F}(Y_F)$  e a condizione che lo  $z_{init}$  sia una sequenza "ammissibile" di coppie di input/output del sistema deterministico dato in quanto qualsiasi traiettoria finita  $z_{init}$  del sistema (3.1) appartiene al sottospazio delle colonne di  $Z_P$ .

Con questi passaggi è possibile riformulare il problema iniziale con tecnica Data-Driven e se ne ricava quanto segue:

$$\min_{u(k), k \in [t, t+T]} J \left( \begin{bmatrix} y_f^d \\ u_f \end{bmatrix} \right) \quad (3.17a)$$

$$\text{t.c} \quad \alpha^* = \begin{bmatrix} Z_P \\ U_F \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} z_{init} \\ u_f \end{bmatrix} \quad (3.17b)$$

$$y_f^d = \hat{Y}_F \alpha^* \quad (3.17c)$$

$$u(k) \in \mathcal{U}, \quad y^d(k) \in \mathcal{Y}, \quad k \in [t, t+T) \quad (3.17d)$$

In cui  $J$  è l'indice di costo del controllo ottimo così definito

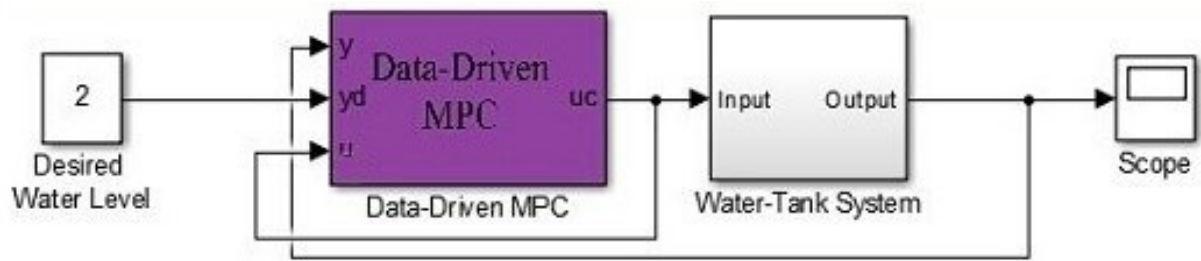
$$J \left( \begin{bmatrix} y_f^d \\ u_f \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=t}^{t+T-1} \|y^d(k) - y_r(k)\|_Q^2 + \|u(k)\|_R^2 \right] \quad (3.17e)$$

e  $\hat{Y}_F := \Pi_{Z_P, U_F}(Y_F)$ , mentre  $z_{init}$  e  $u_f$  sono definiti come in (3.13) e (3.14). [7].

Il seguito della risoluzione del problema è uguale a quanto esplicitato nel capitolo precedente e si seguono i passi sia dell'ottimizzazione che del MPC, in quanto abbiamo ottenuto un'alternativa alla modellazione fisica e che permette di controllare anche questo tipo di sistemi. Un esempio potrebbe essere quello di applicare il DDPC a un sistema di serbatoi d'acqua con lo scopo di controllarne il livello.

Quanto espresso precedentemente si potrebbe rappresentare da un blocco in grado di fornire al sistema il giusto valore per tenere sotto controllo l'altezza del liquido desiderato, contrassegnato come riferimento.





**Figura 8: Esempio di una banale applicazione DDP**

Come mostrato in figura il blocco riceve in ingresso il valore costante  $y_d = 2$  e i dati input e output rappresentati con  $u$  e  $y$  ottenuti dal sistema e calcola l'ingresso ottimo da fornire all'impianto per ottenere quando desiderato.

Si tratta ovviamente di un esempio molto semplice, che però è in grado di far comprendere quanto si può ottenere procedendo in questa direzione e concentrando la ricerca all'estensione di questi metodi anche ai sistemi non lineari, che rappresentano la maggior parte dei sistemi reali.

## Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi era fornire una formulazione rigorosa per del Data-Driven Predictive Control in casi di impianti lineari deterministici.

Nel primo capitolo ho illustrato i concetti legati al problema di controllo e alla modellazione di sistemi: definendo tutti gli elementi che formano gli anelli chiusi e aperti, come il controllore, attuatori e trasduttori, i segnali e le variabili in gioco, oltre che a esempi esplicativi relativi a semplici elettrodomestici che si trovano nella vita di tutti i giorni.

Ho inoltre delineato poi i requisiti fondamentali di queste strutture, come la stabilità e la precisione e è stata svolta un'ampia esposizione dei sistemi dinamici e i metodi di rappresentazione tramite modelli fisici e a spazio di stato che sono serviti nei capitoli successivi a risolvere il problema di controllo degli impianti

Nel secondo capitolo mi sono focalizzata sulla teoria del controllo ottimo, che è la base di molte tecniche di controllo sia basate sul modello che sui dati. Questa teoria si occupa tramite calcoli algebrici di fornire il miglior ingresso che minimizza o massimizza una funzione di costo nella quale, a seconda delle necessità, modifica il comportamento del sistema interessato.

Il gruppo che comprende il Model Predictive Control fa largo uso dell'ottimizzazione ed essendo una base del caso di studio di questa tesi, mi sono occupata di spiegarne brevemente le fondamenta e alcune caratteristiche che hanno portato alla conclusione che per alcuni tipi di sistemi e problema MPC non sia sufficiente; si tratta di sistemi troppo complessi da modellare matematicamente o addirittura sconosciuti con moltissime variabili da controllare e a volte impossibili da gestire con gli ingressi disponibili.

Sono arrivata quindi, nell'ultimo capitolo a studiare una tecnica mista che fonda la teoria del MPC e del Data-Driven control. Questa, infatti, ha permesso di superare il problema della modellazione in un sistema deterministico utilizzando i dati raccolti dai sensori negli istanti precedenti al controllo.

Dopo una breve introduzione al Machine Learning di cui il Data-Driven fa parte, ho esposto nel dettaglio l'integrazione delle tecniche sopracitate ed è stato raggiunto l'obiettivo di formulare una soluzione al caso di studio individuato, grazie all'aiuto di proprietà, lemmi e teoremi formulati da altri studi e osservando le caratteristiche di segnali e delle matrici, oltre che ad alcune assunzioni fondamentali iniziali.

È stato fatto notare, in questa sezione, che per la risoluzione di sistemi stocastici e lineari, si possono ottenere risultati analoghi a quelli precedentemente, prendendo in considerazione i valori attesi e cioè la parte deterministica di questi impianti, supponendo che il rumore presente in ingresso a queste strutture sia come definito nel primo capitolo e quindi con media nulla e varianza nota.

Mi sono resa conto, nella mia ricerca, che il lavoro della ricerca è ancora moltissimo, in quanto si ha necessità di ottenere risultati come quelli di questo metodo, anche per sistemi non lineari che rappresentano la maggior parte dei sistemi del mondo attuale e ritengo che l'impiego di queste tecniche possa portare a considerevoli sviluppi sia nell'ottimizzazione del nostro tempo e della nostra sicurezza sia nella produzione industriale che nella vita di tutti i giorni.

## Bibliografia e Sitografia

- [1] P. Bolzern, R. Scattolini e N. Schiavoni, "Fondamenti di controlli automatici" McGraw-Hill Education, 2014, Cap. 1 pp. 1-9
- [2] Van Overschee, Peter & De Moor, Bart. (1996). "Subspace identification for linear systems. Theory, implementation, applications." Incl. 1 disk. 10.1007/978-1-4613-0465-4, Cap.1 p 6-7
- [3] <https://www.mathworks.com/help/ident/gs/about-system-identification.html#:~:text=System%20identification%20is%20a%20methodology,in%20time%20or%20frequency%20domain>.
- [4] <http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/MaterialeTSC/DispensaControlloOttimo.pdf>
- [5] <https://it.emcelettronica.com/algoritmi-di-controllo-predittivo>
- [6] Z. Hou and Z. Wang, "From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective." Information Sciences. 235. 3–35. 10.1016/j.ins.2012.07.014, 2013
- [7] Breschi V., Chiuso A., and Formentin S. "The role of regularization in data-driven predictive control." arXiv preprint arXiv:2203.10846 (2022).
- [8] S. L. Brunton and J.N. Kutz "Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control ", Cambridge University Press, 2017, Cap. 10 pp 405, 414-416
- [9] Bazanella, A.S., Campestrini, L., Eckhard, D. (2012). "Data-driven controller design: the  $H_2$  approach." Springer, ISBN 978-94-007-2300-9, pp. 208
- [10] Overschee, P. V., & De Moor, B. "N4SID: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems." Automatic, 30:75-93, 1994, Cap. 2, pp 7, Theorem 1
- [11] M. Moonen, B. De Moor, L. Vandenberghe, and J. Vandewalle. "On- and off-line identification of linear state-space models." Int. J. of Control, 49(1):219{232, 1989. Cap. 1 pp 4-5

## **Ringraziamenti**

Mi è doveroso dedicare questo spazio del mio elaborato alle persone che hanno contribuito, con il loro instancabile supporto, alla realizzazione dello stesso.

In primis, un ringraziamento al mio relatore, il professor Chiuso, per la sua pazienza, per i suoi consigli e per le conoscenze trasmesse durante il percorso di stesura dell'elaborato.

Ringrazio infinitamente i miei genitori che mi hanno sempre sostenuto, appoggiando ogni mia decisione, fin dalla scelta del mio percorso di studi.

Ringrazio Ele, Pippo, Beppe e Tom per il sostegno, le risate e le giocondità nella quotidianità.

Un grazie di cuore ai miei amici che mi hanno permesso di superare i momenti più difficili. Senza i loro consigli, non ce l'avrei mai fatta.

Un grazie speciale alla zia Elena, per avermi sempre trascinato a vedere la natura e che ci ha permesso in questi tempi difficili un po' di serenità.

Ringrazio le nonne, le zie e gli zii e i miei cugini per essere la mia famiglia e per sostenermi sempre.

Ringrazio i miei colleghi e i miei alunni per avermi insegnato a essere paziente, ad ascoltare e per avermi dato la possibilità di mettermi in gioco e aiutarli in questo ultimo anno.

Infine, dedico questa tesi a me stessa, ai miei sacrifici e alla mia tenacia che mi hanno permesso di arrivare fin qui.