



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCATRONICA

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

APPLICAZIONE DELLE TECNICHE
DI MODIFICA STRUTTURALE DINAMICA
AL CONTROLLO DI SISTEMI
MECCANICI VIBRANTI

Relatore: Ch.mo Prof. ALBERTO TREVISANI

Correlatore: Ch.mo Prof. DARIO RICHIEDEI

Laureando: MICHELE TODESCHINI

Matricola 603197-IMC

ANNO ACCADEMICO 2011-2012

Sommario

Gli approcci utilizzati nel controllo dei sistemi vibranti sono in genere finalizzati al posizionamento dei poli, al fine di conferire ad essi i valori desiderati di frequenza e smorzamento, in modo da definire tempi di salita e di assestamento del sistema. Ciò che viene comunemente trascurato è la definizione della forma spaziale della vibrazione desiderata, essendo l'assegnazione di tale specifica molto restrittiva e di difficile realizzazione nei controllori in retroazione di sistemi sotto-attuati anche in presenza di sistemi interamente controllabili. A tal fine, in questa tesi è investigato teoricamente e sperimentalmente l'utilizzo delle tecniche della cosiddetta "modifica strutturale dinamica" (Dynamic Structural Modification) al fine di assegnare a sistemi vibranti controllati il desiderato comportamento dinamico, espresso in termini di modi di vibrare, ossia in termini di autovalori e autovettori. Le tecniche della modifica strutturale dinamica sono tradizionalmente state sviluppate per il controllo passivo, ossia per la modifica dei parametri fisici, tipicamente di strutture. In questo lavoro tali tecniche sono state estese al fine di contemplare con esse il simultaneo utilizzo di modifiche passive e di "modifiche attive", ossia sintesi di controllori sullo stato per l'assegnazione di modi di vibrare. L'utilizzo simultaneo di entrambe le tecniche può consentire infatti di superare i limiti congeniti che esse hanno qualora applicate singolarmente. A tal fine sono state proposte due originali metodologie di approccio di controllo "ibrido", in cui modifiche attive e passive sono sintetizzate simultaneamente, utilizzando approcci tipici della meccanica delle vibrazioni. I sistemi analizzati sono un sistema multi-masse (a tre gradi di libertà), accoppiate mediante molle, ed un braccetto robotico a due gradi di libertà sotto-attuato con giunto passivo elastico. Le differenze tra i due sistemi (il primo è una struttura, il secondo è un meccanismo) hanno richiesto di sviluppare in modo diverso le tecniche, imponendo in particolare nel secondo l'adozione di particolari accorgimenti per evitare fenomeni di spillover, ossia di spostamento incontrollato dei poli del sistema. Con riferimento al secondo sistema analizzato, è stata inoltre proposta una validazione sperimentale, che ha confermato l'efficacia e la semplicità realizzativa della teoria proposta e dei risultati ottenuti. In particolare si è potuto constatare come, eccitando il sistema con un disturbo sinusoidale, il solo controllo attivo non sia in grado di eliminare le oscillazioni del punto terminale del meccanismo. Se a questa azione si aggiunge però anche una variazione delle caratteristiche fisiche del sistema stesso, cui corrisponde la definizione di un nuovo controllore, si può notare come le vibrazioni sull'ipotetico organo terminale del sistema, vengano attenuate incisivamente. Implementando tale tecnica di controllo su di un caso reale, come potrebbe essere ad esempio un braccetto robotico utilizzato per lavorazioni con utensili di varia natura, si potrebbero evitare fastidiose oscillazioni dovute ad esempio al fatto che il meccanismo stesso risulta essere disturbato dall'azione dell'utensile montato su di esso.

Indice

Sommario	iii
Indice	v
Elenco delle tabelle	vii
Elenco delle figure	ix
1 Introduzione	1
2 Aspetti teorici e tecniche di modifica strutturale dinamica	5
2.1 Introduzione	5
2.2 Richiami teorici di vibrazioni meccaniche	7
2.3 Modifiche passive: Dynamic Structural Modification	13
2.3.1 Introduzione	13
2.3.2 Stato dell'arte	14
2.3.3 S.M. con tecniche di ottimizzazione convessa	15
2.4 Assegnabilità delle forme modali	19
2.4.1 Introduzione	19
2.4.2 Assegnabilità degli autovalori	19
2.4.3 Assegnabilità degli autovettori tramite controllo in retroazione	20
2.5 Interpretazione del controllo attivo come modifica strutturale	24
2.6 Criterio di valutazione dei risultati	27
3 Il caso teorico del sistema a tre masse	29
3.1 Introduzione	29
3.2 Sistema a tre masse: costruzione del modello	30
3.2.1 Analisi del sistema originale	32
3.2.2 Assegnazione di un modo con una forza di controllo	33
3.3 Modifiche passive	35
3.3.1 Analisi dei risultati numerici	39
3.4 Modifiche attive	42
3.4.1 Analisi dei risultati numerici	45
3.5 Modifiche passive ed attive	47
3.5.1 Analisi dei risultati numerici	51
3.6 Confronto dei tre casi	53
3.7 Attuazione doppia	57
4 Il caso applicativo del braccio robotico a 2 gradi di libertà	63
4.1 Introduzione	63
4.2 Costruzione del modello	64
4.2.1 Stima dei parametri del sistema	69
4.2.2 Rappresentazione nello spazio di stato	72
4.3 Le forme modali desiderate	74
4.4 Analisi del sistema originale	78
4.5 Modifica attiva e passiva del sistema con la Structural Modification	79
4.6 Le problematiche legate al caso in esame	83

5	Tecniche di controllo attivo	85
5.1	Introduzione	85
5.2	Tecniche di controllo attivo tradizionali o alternative	86
5.3	La tecnica tradizionale del Pole Placement	88
5.3.1	La retroazione dallo stato	88
5.3.2	Applicazione del Pole Placement al caso in esame	90
5.4	Il metodo di assegnazione dei poli basato sulla ricettanza (di Ouyang)	93
5.4.1	Introduzione	93
5.4.2	Descrizione del metodo di Ouyang	93
5.4.3	Applicazione del metodo di Ouyang al caso in esame	97
6	Controllo attivo e passivo	101
6.1	Introduzione	101
6.2	Soluzione mediante minimizzazione	102
6.3	I funzionali	104
6.3.1	Funzionale di Rayleigh	104
6.3.2	Il funzionale della Dynamic Structural Modification	107
6.3.3	Funzionale riformulato della Dynamic Structural Modification	108
6.3.4	Funzionale “alpha-beta”	109
6.3.5	Funzionale coseno	110
6.4	Minimizzazione assoluta	111
6.5	Il vincolo di posizionamento dei poli	112
6.6	Tipo di retroazione scelta	113
6.7	Implementazione risolutiva	114
6.7.1	Global Search	114
6.7.2	Soluzione enumerativa	115
6.8	Applicazione del metodo e confronto tra i vari funzionali	117
7	Simulazione e prova sperimentale	121
7.1	Introduzione	121
7.2	Implementazione in Simulink	122
7.3	Tipo di prove eseguite	124
7.4	Prima simulazione	125
7.4.1	Risposta al gradino	126
7.4.2	Reiezione al disturbo	127
7.4.3	Risposta al gradino con disturbo	130
7.5	Seconda simulazione	133
7.6	Prova sperimentale	135
	Conclusioni	143
	Ringraziamenti	145
	Bibliografia	147

Elenco delle tabelle

3.1	Parametri del sistema a tre masse.	31
4.1	Parametri del braccio robotico.	65
4.2	Stima dei parametri.	72
6.1	Confronto tra i vari funzionali.	117

Elenco delle figure

2.1	Sistema a due masse.	7
2.2	Esempio di L-curve.	18
3.1	Sistema a tre masse.	30
3.2	L-curve del secondo esempio di assegnamento.	55
4.1	Braccio robotico con giunto elastico.	64
4.2	Oscillatore semplice smorzato.	69
4.3	Risposta libera di un oscillatore semplice smorzato.	70
4.4	Andamento di θ_2	71
4.5	Rappresentazione dei due modi di vibrare desiderati.	75
4.6	Sovrapposizione dei due modi di vibrare desiderati.	76
5.1	Schema di retroazione dallo stato.	88
6.1	Generica funzione con minimo locale e globale.	111
7.1	Schema Simulink usato per la simulazione.	122
7.2	Andamento di x_p e y_p , risposta al gradino.	126
7.3	Particolare dell'andamento di x_p e y_p	127
7.4	Erogazione di coppia, risposta al gradino.	128
7.5	Andamento di θ_1 e θ_2 , risposta al gradino.	128
7.6	Andamento di x_p e y_p , reiezione al disturbo.	129
7.7	Erogazione di coppia, reiezione al disturbo.	129
7.8	Andamento di θ_1 e θ_2 , reiezione al disturbo.	130
7.9	x_p e y_p , reiezione al disturbo con frequenza variabile.	131
7.10	Ingrandimento della reiezione al disturbo con frequenza variabile.	131
7.11	x_p e y_p , risposta al gradino con disturbo.	132
7.12	x_p e y_p secondo test, reiezione al disturbo.	134
7.13	Erogazione di coppia secondo test, reiezione al disturbo.	134
7.14	Set-up utilizzato.	136
7.15	Primo particolare del giunto elastico.	136
7.16	Secondo particolare del giunto elastico.	137
7.17	Terzo particolare del giunto elastico.	137
7.18	x_p e y_p prova sperimentale.	138
7.19	Erogazione di coppia, prova sperimentale.	139
7.20	x_p e y_p prova sperimentale, disturbo con frequenza variabile.	139
7.21	x_p e y_p prima porzione, disturbo con frequenza variabile.	140
7.22	x_p e y_p seconda porzione, disturbo con frequenza variabile.	140
7.23	x_p e y_p terza porzione, disturbo con frequenza variabile.	141

Introduzione

Il controllo delle vibrazioni nei sistemi meccanici rappresenta un'azione fondamentale per garantire un corretto funzionamento ed una vita adeguata del sistema stesso. Le vibrazioni sono fenomeni dovuti a trasferimenti di energia potenziale elastica in energia cinetica, e la loro ampiezza e frequenza dipendono dalle proprietà fisiche del sistema stesso come la massa o la rigidità. Modificando tali parametri è possibile modificare anche le caratteristiche delle vibrazioni di un sistema. Le elasticità sono tipicamente legate alla presenza di comportamenti non ideali dei componenti, talvolta sottodimensionati in fasi di progetto al fine di contenerne costi, masse ed ingombri: si pensi alla presenza di elasticità nei riduttori, di deformabilità nei membri o nei supporti. Talvolta le vibrazioni possono nascere anche per errori progettuali, errori realizzativi o malfunzionamento dovuto a danneggiamento. Esempi classici di vibrazioni indesiderate sono quelle che riguardano i motori di automobili o quelle che si manifestano solitamente nel movimento di un qualsiasi organo di una macchina operatrice. Le problematiche derivanti dal verificarsi di vibrazioni nelle macchine e negli impianti possono essere riassunte nel degrado delle prestazioni in termini di velocità, accuratezza e precisione e quindi in generale impossibilità di mantenere le specifiche di progetto. Inoltre possono provocare fenomeni indesiderati come accoppiamento vibro acustico con emissione di rumore e a lungo andare si possono avere rotture per fatica e anche possibili effetti dannosi sull'uomo.

Anche se non sembrerebbe, in verità sono molto diffuse pure le applicazioni in cui si può aver a che fare con *vibrazioni desiderate*. In questi casi la vibrazione è un fenomeno voluto, e cercato a dovere per fruttarlo in un determinato modo. In alcuni ambiti infatti, spesso il funzionamento di un sistema è basato proprio sul fatto che uno o più dei suoi elementi siano posti in vibrazione al fine di ottenere un certo comportamento. Si pensi ad esempio al mondo della musica, e del suono in generale: i suoni sono onde di pressione generate da strutture vibranti (ad esempio le corde vocali) e le onde di pressione possono generare vibrazione di strutture. I microfoni e gli altoparlanti permettono di riprodurre un segnale sonoro proprio grazie al fatto che la loro membrana viene fatta vibrare opportunamente. Allo stesso modo il funzionamento del diapason è basato sulla vibrazione che si va ad imporre ad esso. Altre applicazioni in cui le vibrazioni vengono generate di proposito e sfruttate per diversi scopi, si possono trovare nell'ambito industriale. Qui, molto spesso esse sono sfruttate per la movimentazione di prodotti su nastri trasportatori che vengono eccitati in modo che la vibrazione conseguente sia tale da provocare un opportuno spostamento del corpo appoggiato sopra.

Ovviamente, in tutti questi casi, la vibrazione cercata non sarà casuale, ma per far sì che lo scopo venga raggiunto, essa dovrà presentare determinate caratteristiche quali ad esempio ampiezza o frequenza. Tali caratteristiche dipendono da ciò che si vuole fare e sono quindi determinate a partire dall'applicazione stessa.

Comunque, in entrambi i casi, indipendentemente dal fatto che le vibrazioni siano desiderate o meno, le prestazioni possono essere migliorate attraverso un loro controllo: nel primo caso attraverso un'azione opportuna si vorrà ridurre esse, o quantomeno ridurre i loro effetti, nel secondo caso invece si vorrà intervenire per assegnare al sistema la particolare vibrazione desiderata.

Gli approcci utilizzati nel controllo dei sistemi vibranti sono in genere finalizzati al posizionamento dei poli, al fine di conferire ad essi i valori desiderati di frequenza e smorzamento, in modo da definire tempi di salita e di assestamento del sistema. Ciò che viene

comunemente trascurato è la definizione della forma spaziale della vibrazione desiderata, ossia della forma modale, essendo l'assegnazione di tale specifica molto restrittiva e di difficile realizzazione nei controllori in retroazione di sistemi sotto-attuati anche in presenza di sistemi interamente controllabili. La definizione della forma modale consente infatti di definire in che modo l'energia associata alla vibrazione si distribuisce tra i diversi punti del meccanismo. Ad esempio si può volere imporre (come sarà fatto nel presente lavoro) che uno specifico punto del sistema abbia un'oscillazione trascurabile rispetto agli altri. Per capire ciò, si consideri ad esempio un sistema a due gradi di libertà, i cui modi sono $[1 \ 0.1]$ e $[1 \ -0.1]$; in questo caso l'ampiezza dell'oscillazione della seconda coordinata è piccola rispetto alla prima. In questo modo l'energia della vibrazione prevalentemente localizzata nella prima coordinata, essendo il moto del sistema ottenibile per sovrapposizione delle forme modali, opportunamente "ponderate" in relazione alla forma ed alla frequenza della forzante. Similmente, se uno dei due modi fosse stato $[1 \ 0]$, l'oscillazione della seconda coordinata nella deformazione secondo questo modo sarebbe stata nulla. Il problema quindi di localizzazione dei nodi (ossia dei punti a vibrazione nulla) dei modi di vibrare è quindi riconducibile al problema di definizione della forma modale.

Si può pensare che l'idea di base sia in qualche modo, quella di spostare la vibrazione da un punto strategico, ridistribuendola sul resto del sistema e ammettendo pure un comportamento irregolare sugli altri punti, la cui dinamica non ha alcuna importanza per l'applicazione in esame, purché come conseguenza di tale comportamento si abbia l'eliminazione della vibrazione del punto di interesse.

La particolare vibrazione che presenta le caratteristiche suddette sarà quindi quella vibrazione desiderata, che si vorrà imporre al sistema a livello di intera struttura con lo scopo di eliminarla in un unico punto (dove è da intendersi come indesiderata).

Per fare quanto descritto è stato necessario intervenire in qualche maniera sul sistema. Le strategie di controllo disponibili per poter agire sulle vibrazioni, possono essere di tipo attivo (che intervengono grazie ad una azione esterna al sistema), o di tipo passivo (che intervengono sulla natura e sulle caratteristiche del sistema stesso).

La prima tipologia di controllo viene attuata attraverso l'azione di una forza esterna che introduce o assorbe energia nel o dal sistema. In tale modo è possibile influenzare il comportamento della vibrazione incriminata: se quest'ultima è indesiderata, la forza esterna cercherà di eliminarla, se invece la vibrazione è desiderata, la forza esterna dovrà essere tale da esaltarla.

Questo effetto può essere ottenuto attraverso uno schema di controllo a retroazione negativa in cui compaia un controllore che agisca sul sistema determinando l'entità della forza esterna necessaria ad ottenere il risultato descritto.

Questa può rappresentare un'efficace strategia che prevede un intervento solo nel caso ve ne sia effettivamente bisogno, basato sul comportamento istantaneo del sistema, per ottenere effettivamente quanto desiderato. Oltretutto, con tale azione è possibile stabilizzare il sistema qualora esso risulti essere instabile.

E' necessario comunque prestare attenzione perché nel caso la progettazione del sistema di controllo fosse errata, si potrebbe avere l'esatto effetto contrario rispetto a quello desiderato, e cioè l'instabilità dell'intero sistema.

Tra l'altro oltre ad avere la necessità di utilizzare un certo numero di componenti aggiuntivi come sensori ed attuatori, è necessario tener conto che le prestazioni richieste al controllore, le quali dipendono dall'obiettivo che ci si è posti, devono essere compatibili con le sue reali potenzialità.

La tecnica del controllo passivo prevede una modifica dei parametri fisici del sistema. Come già accennato infatti, è noto che le caratteristiche delle vibrazioni del sistema dipendono dalle caratteristiche fisiologiche del sistema stesso (massa e rigidità in particolare). Modificando tali caratteristiche si modifica di conseguenza anche il comportamento vibra-

torio.

La modifica del sistema può quindi rappresentare un'alternativa per intervenire sulle sue vibrazioni in due diversi sensi: o per eliminarle, oppure per far sì che esse presentino determinate caratteristiche desiderate.

Per la sua proprietà di intervenire su questi aspetti, qualora sia possibile, tale tecnica può in realtà essere sfruttata già in fase di progettazione del sistema per determinare quali devono essere le sue caratteristiche costruttive, al fine di comportarsi in un determinato modo.

Il vantaggio principale sta nel fatto che non è necessario complicare il sistema ricorrendo a componenti aggiuntivi. Poi, il fatto che tale tecnica possa essere sfruttata già durante la progettazione, dà la possibilità di ottimizzare questa fase in funzione dell'applicazione in cui sarà utilizzato il sistema. In più di solito non insorgono problemi di stabilità visto che, a parte rari casi, se il sistema non controllato è stabile, anche il sistema controllato risulterà esserlo.

D'altro canto però, le modifiche necessarie sono spesso troppo elevate e quindi non realizzabili praticamente. Per una questione di fattibilità pratica ed economica è infatti buona norma che esse rientrino entro determinati limiti. Spesso invece risulta che le richieste fatte determinino un superamento di tali limiti rendendo così irrealizzabili le modifiche.

Visto che entrambe queste tecniche presentano vantaggi e svantaggi è possibile cercare di applicarle e sfruttarle congiuntamente secondo un *approccio ibrido* che prevede sia una parziale modifica del sistema, sia l'intervento di un'azione esterna in modo che, da un lato le modifiche passive richieste siano effettivamente realizzabili senza sforzi eccessivi, e dall'altro il sistema di controllo non debba essere troppo potente e quindi costoso.

In questo modo si può predisporre il sistema verso un certo comportamento (al limite già in fase di progettazione), il quale verrà però assunto successivamente grazie anche all'azione del controllo esterno.

Con questo lavoro si è voluto dimostrare con riferimento a due casi applicativi come, affiancando alle tecniche di controllo tradizionale anche la modifica strutturale del sistema si possano effettivamente ottenere dei vantaggi sotto alcuni punti di vista.

Dopo una breve richiamo a concetti teorici di meccanica delle vibrazioni, all'interno del primo capitolo viene fatto osservare come, qualora si voglia imporre ad un sistema un certo comportamento desiderato, sia necessario prima di tutto fare delle considerazioni sul fatto che il sistema possa realmente soddisfare le richieste, oppure se, a causa delle sue caratteristiche, esso in realtà non potrà eseguire quanto gli viene imposto, a meno di una sua modifica. Viene quindi stabilito sotto quali ipotesi ci si deve porre.

Successivamente, visto che questo elaborato inizialmente volge la sua attenzione in modo particolare ad una tecnica specifica chiamata Structural Modification che permette di intervenire su di un sistema sia con un controllo attivo sia con un'azione passiva, viene presentata la teoria su cui essa si basa. In più viene spiegata ed illustrata la procedura che permette di applicarla opportunamente.

Dopo uno studio preliminare svolto nel secondo capitolo, per testare su di un classico e semplice sistema l'efficacia del controllo attivo e passivo basato su un approccio tipico della tecnica suddetta, nel terzo capitolo si è voluto introdurre un meccanismo che potrebbe avere una rilevanza pratica maggiore rispetto a quello analizzato inizialmente. Su tale meccanismo si cercò poi di intervenire in modo attivo e passivo per imporre quella particolare vibrazione che determina l'assenza di tale fenomeno nel punto di interesse. Ci si è ben presto accorti però, che agendo unicamente secondo un approccio tipico da Structural Modification, le modifiche passive e il controllo attivo determinati in questo modo, non sono sufficienti ad ottenere quanto voluto. Infatti emerge chiaramente che, per il particolare caso in esame, la tecnica considerata presenta dei grossi limiti. È stato quindi

necessario agire sempre secondo un approccio ibrido (determinazione delle modifiche passive e del controllo attivo), che prevedesse però di affiancare alla Structural Modification, dei metodi tradizionali di controllo attivo così da garantire che il sistema controllato presenti alcune proprietà irrinunciabili e che il risultato ottenuto abbia una certa validità. Tra le tante tecniche tradizionali di controllo attivo, due sono state inizialmente presentate nel quarto capitolo e poi applicati al caso in esame o per avere un confronto con i risultati ottenibili oppure in coppia con le tecniche di intervento passivo.

Nel quinto capitolo viene quindi introdotto l'approccio ibrido basato sia sulla Structural Modification, sia sulle tecniche di puro controllo attivo. In questo caso però si è voluto agire secondo una filosofia diversa da quanto viene fatto usualmente, e grazie al modo con cui sono stati considerati i due problemi di determinazione delle modifiche passive e dell'entità del controllo attivo, si è potuto avere a disposizione un metodo per determinare il miglior risultato in assoluto. Ciò è plausibile perché il metodo utilizzato permette di avere una visione globale del sistema, in quanto, a differenza di quello che viene fatto spesso in letteratura, si basa su un unico ciclo di calcolo volto a determinare le azioni necessarie per minimizzare la differenza tra il risultato ottenuto e quello desiderato.

In realtà ciò che per la teoria sembra aver senso, a livello pratico si è rivelato affetto da una serie di problematiche non risolvibili allo stato attuale, e si è dovuto agire in un modo leggermente differente introducendo una approssimazione di calcolo che comunque può essere considerata sicuramente accettabile.

Il miglioramento ottenuto grazie all'approccio ibrido, rispetto all'impiego di un puro controllo attivo, viene documentato nel sesto capitolo, in cui grazie alla simulazione del comportamento del sistema si possono notare i vantaggi ottenibili se, qualora sia possibile, oltre a prevedere un classico controllo del sistema, si pensa di agire passivamente su di esso con le tecniche di modifica strutturale. Sebbene a prima vista sembrerebbe che tale modo di agire non porti a miglioramenti sostanziali, grazie anche ad una prova sperimentale, verrà fatto osservare come per alcuni aspetti sia comunque conveniente prevedere non solo un controllo attivo, ma anche una modifica passiva del sistema.

Prima di proseguire è utile fare una precisazione sulla terminologia che verrà utilizzata nel corso di tutto l'elaborato: tipicamente le modifiche strutturali da eseguire sul sistema vengono denominate "modifiche passive".

Per una questione di assonanza, in ambito di Structural Modification, è classico denominare anche l'entità del controllo attivo con un termine che richiami la modifica del sistema. Per questo anche in questa sede si utilizzerà la denominazione "modifiche attive" per indicare i vari termini di controllo attivo.

Il motivo di tale prassi, risulterà chiaro quando si illustrerà come l'azione fatta dal sistema di controllo possa essere in realtà assimilabile ad una modifica del sistema, e visto che essa prevede un intervento attivo, la terminologia utilizzata risulta essere perfettamente attinente.

Aspetti teorici e tecniche di modifica strutturale dinamica

2.1 Introduzione

In questo primo capitolo, dopo un breve richiamo sui concetti teorici che stanno alla base della meccanica delle vibrazioni, verranno analizzate delle tecniche che permettono di calcolare in che modo è possibile modificare un sistema, o quali sono i guadagni di un eventuale controllore che agisce su di esso, al fine di imporre una determinata forma modale.

Le vibrazioni tipiche di un sistema, ma più in generale, il suo naturale movimento, possono essere pensati come la sovrapposizione di più contributi, che si combinano insieme per dar vita all'effetto finale. Sono i così detti "modi di vibrare" del sistema. Ogni modo determinerà un certo andamento per le variabili libere del sistema legato ai suoi autovettori, ad una certa frequenza legata ai suoi autovalori, e la somma di tutti questi contributi darà vita al movimento totale percepibile dall'esterno.

Se si immagina di aver bisogno che, per qualche motivo, il sistema sia caratterizzato da un certo tipo di comportamento, è chiaro che uno o più di questi singoli contributi dovranno avere delle caratteristiche precise.

Le proprietà del sistema in termini di massa e di rigidità sono tali da far sì che esso sia più adatto a muoversi in un certo modo piuttosto che in un altro, cioè la sua fisionomia pone dei limiti alla dinamica della situazione originale e molto probabilmente ciò che si desidera sarà diverso dal reale comportamento del sistema.

Se le richieste fatte non coincidono con quelli che sono i comportamenti originali, si dovrà quindi intervenire in qualche modo per riportarsi nella situazione desiderata.

Andando ad imporre alle caratteristiche che ogni modo di vibrare deve avere, un determinato valore si influisce quindi sul movimento globale del sistema riuscendo così ad assegnargli una determinata forma.

Attraverso un opportuno metodo si deve quindi riuscire ad imporre agli autovettori ed agli autovalori del sistema di coincidere con quelli desiderati, e per farlo si può essere magari anche disposti ad utilizzare un controllore esterno e se necessario a modificare nella sua struttura il sistema fisico stesso. Ecco quindi che l'obiettivo diventa quello di calcolare le modifiche strutturali e/o i guadagni del controllore esterno utilizzato, che permettano al sistema di soddisfare quelle che sono le richieste che gli vengono fatte.

Non è detto però che, anche ammettendo un intervento esterno, il sistema possa assumere qualsiasi modo di vibrare che gli viene imposto. Anche accettando modifiche elevate può infatti esserci un limite invalicabile, e, soprattutto se ci si trova in situazioni sottoattuate, non avendo la piena capacità di influire sul sistema, non è possibile spingersi oltre una certa soglia; o meglio, se si cerca di assegnare al sistema qualcosa che esula dalle sue possibilità, semplicemente esso si fermerà al limite del suo comportamento ammissibile arrivando fino alla soglia tollerata, senza però riuscire ad oltrepassarla per soddisfare alle richieste.

Ovviamente non è detto che si possa accettare qualsiasi tipo di modifica: molto probabilmente si dovrà rimanere all'interno di un determinato range per evitare di stravolgere completamente il sistema. Se dunque le più grandi modifiche ammesse non sono ancora sufficienti al pieno raggiungimento dell'obiettivo, ci si dovrà accontentare di avvicinarsi ad esso il più possibile.

Il miglioramento che si può ottenere, e quindi lo spostamento della soglia oltre cui è consentito spingersi, è determinato dall'entità delle modifiche che si vogliono e si possono accettare. Ci si aspetta quindi che più sia lecito modificare il sistema e più si allarghino le possibilità di assegnazione. Paradossalmente, se non fosse tollerata alcuna modifica, non ci si potrebbe spingere oltre ciò che è consentito dal sistema originale (il che, come visto, può essere anche molto limitativo).

Ovviamente tutto questo discorso è vero per un determinato sistema cioè i limiti sono legati alle sue caratteristiche fisiche. Per un sistema diverso, le possibilità di assegnazione da esso offerte saranno altrettanto diverse. Ecco quindi perché si va a modificare il sistema: per renderlo diverso in modo che ciò che si desidera assegnare rientri nelle possibilità della nuova configurazione.

Una volta che sono state calcolate ed applicate le modifiche passive e/o attive è utile verificare se esse producono o meno l'effetto sperato di un avvicinamento dell'autovettore del sistema modificato all'autovettore desiderato. Un confronto diretto tra i valori assunti potrebbe non rendere bene l'idea ed essere fuorviante visto che il confronto deve essere fatto su più di un termine, per cui è preferibile utilizzare un indice che valuti la situazione nel complesso.

2.2 Richiami teorici di vibrazioni meccaniche

In questo paragrafo vengono proposti alcuni richiami teorici sulla meccanica delle vibrazioni, utili per una più facile comprensione di quanto trattato successivamente e per dare una giustificazione teorica al problema che ci si è preposti di risolvere, nonché per motivare le modalità secondo cui si è agito. Verrà inoltre presentata molto brevemente l'analisi modale la quale rappresenta uno strumento molto potente per comprendere a fondo il comportamento dei sistemi vibranti.

Tutti i sistemi tipicamente trattati nella teoria delle vibrazioni, vengono studiati rifacendosi al classico caso del sistema massa-molla-smorzatore, visto che ognuno di essi può essere ricondotto a tale forma o comunque considerato come un insieme di oscillatori semplici. L'utilizzo della notazione matriciale dà la possibilità di estendere tutte le considerazioni valide per questo sistema basilare ad un solo grado di libertà, anche ai sistemi più complessi.

Per evidenziare questo fatto viene ora, inizialmente considerato un caso a due gdl grazie al quale si fa un esempio di come sia possibile riformulare le equazioni utilizzando la forma matriciale, in modo da riportarsi nella forma tipica dell'oscillatore semplice. Tali considerazioni valgono ovviamente sia per tutti i sistemi aventi un numero arbitrario di gradi di libertà. Si consideri quindi il sistema rappresentato in figura 2.1.

Le forze elastiche che vi compaiono sono proporzionali agli spostamenti delle masse su

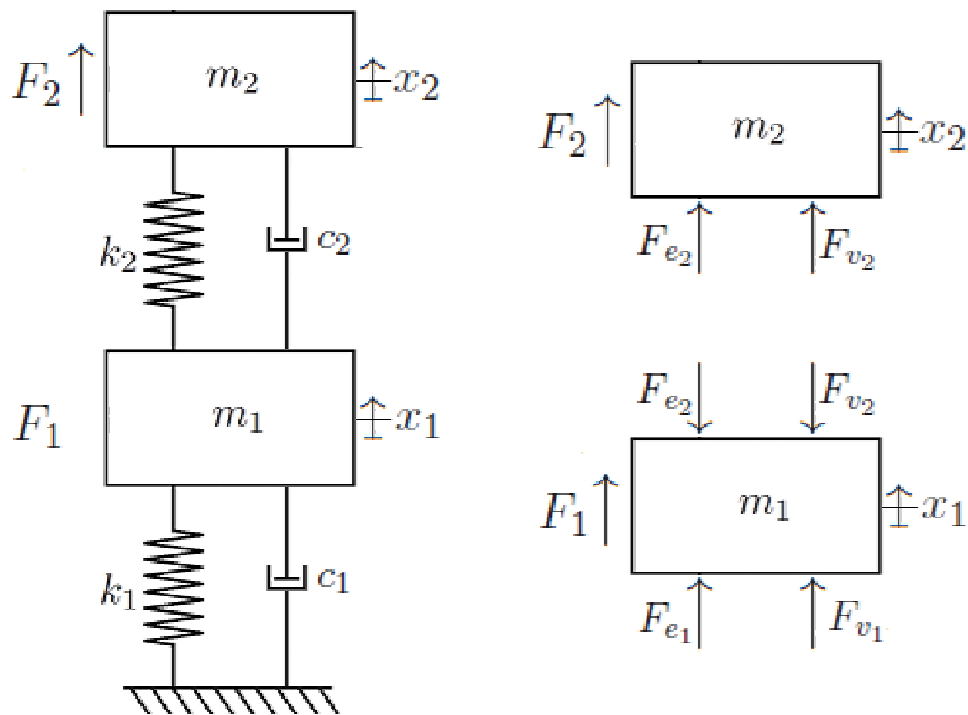


Fig. 2.1: Sistema a due masse.

cui sono applicate, le forze elastiche sono invece proporzionali alle velocità, per cui in un sistema di riferimento assoluto si ha si ha:

$$\begin{aligned} F_{e1} &= -k_1 x_1 & F_{e2} &= -k_2 (x_2 - x_1) \\ F_{v1} &= -c_1 \dot{x}_1 & F_{v2} &= -c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{aligned}$$

in cui k_1 e k_2 sono le costanti elastiche delle due molle, mentre c_1 e c_2 sono le costanti di smorzamento dei due smorzatori.

La condizione di equilibrio delle forze che agiscono sulla prima massa impone che:

$$F_1 + F_{e1} + F_{v1} - F_{e2} - F_{v2} = m_1 \ddot{x}_1$$

mentre per la seconda massa si ha:

$$F_2 + F_{e_2} + F_{v_2} = m_2 \ddot{x}_2$$

tali due equazioni possono essere raggruppate in un unico sistema la cui soluzione permette di quantificare l'entità delle variabili libere:

$$\begin{cases} F_1 - k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_1 \ddot{x}_1 \\ F_2 - k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$

Facendo ricorso alla notazione matriciale si può ricombinare e semplificare l'espressione precedente, ottenendo l'equazione differenziale che descrive il comportamento del sistema:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

la quale in forma sintetica diviene:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}$$

Tale equazione matriciale ottenuta per un sistema a due gdl, come detto è in realtà riconducibile al caso più generale possibile di n gradi di libertà. In essa \mathbf{M} rappresenta la matrice di massa del sistema, \mathbf{C} la matrice di smorzamento, \mathbf{K} la matrice di rigidità, \mathbf{F} il vettore delle forzanti esterne applicate ed infine \mathbf{x} è il vettore delle variabili libere.

Per semplicità, nel proseguo si considererà nullo l'effetto dello smorzamento per cui, eliminando anche l'azione delle forzanti esterne, si ottiene l'equazione di moto del sistema non dissipativo e scarico, alla quale si farà da ora in poi sempre riferimento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0 \quad (2.2.1)$$

La matrice di massa e la matrice di rigidità sono sempre simmetriche, invece in generale possono anche non essere necessariamente diagonali. Nel caso esse non lo siano, il sistema rappresentato in 2.2.1 è costituito da equazioni accoppiate, se invece \mathbf{M} e \mathbf{K} sono diagonali, si avrà un sistema di equazioni disaccoppiate. Quest'ultima, evidentemente, è la situazione più favorevole per descrivere correttamente e comprendere a fondo il comportamento del sistema, per cui si sente l'esigenza, anche per il primo caso, di passare ad una tale forma, che equivale a trasformare il problema espresso in 2.2.1 per ottenerne uno equivalente in cui però compaiano delle matrici diagonali.

Da un punto di vista fisico si sta cercando di vedere il sistema iniziale, il cui comportamento era descritto da un insieme di variabili libere, come la somma di più oscillatori semplici indipendenti, ognuno di essi caratterizzato da un'unica gdl indipendente dagli altri, ma che con essi contribuisce a determinare gli spostamenti totali.

Considerando quindi l'equazione 2.2.1 che si vuole disaccoppiare, è possibile ipotizzare che la risposta del sistema sia di tipo sincro, abbia cioè una forma del tipo:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}\eta(t)$$

in cui \mathbf{u} sia una grandezza vettoriale che non dipende dal tempo e possa pertanto essere pensata come una costante di proporzionalità che moltiplica il termine $\eta(t)$, il quale invece ha un'espressione armonica dipendente dal tempo. Con tale assunzione si va di fatto a considerare un nuovo tipo di coordinate attraverso le quali si vogliono descrivere gli spostamenti del sistema; si vuole cioè esprimere le coordinate iniziali, che hanno un senso fisico e sono misurabili, attraverso questo nuovo tipo di coordinate non direttamente misurabili dette "coordinate modali".

Sostituendo questa nuova espressione delle coordinate libere del sistema di partenza, all'interno dell'equazione 2.2.1 si ottiene:

$$\mathbf{M}\mathbf{u}\ddot{\eta}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}\eta(t) = 0 \quad (2.2.2)$$

visto che come detto le coordinate modali sono di tipo armonico (hanno un'espressione di tipo sinusoidale la cui pulsazione viene indicata con ω), eseguendo le derivate all'interno dell'equazione appena ottenuta si ha:

$$-\omega^2\mathbf{M}\mathbf{u}\eta(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}\eta(t) = 0$$

che equivale a:

$$(-\omega^2\mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{u})\eta(t) = 0$$

da cui deriva che:

$$-\omega^2\mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$$

o equivalentemente:

$$\omega^2\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{u}$$

Definendo la matrice

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$$

detta *Matrice della Dinamica* del sistema in esame, si ottiene:

$$\mathbf{D}\mathbf{u} = \omega^2\mathbf{u}$$

che a guardarla bene, è la classica forma di un problema agli autovalori, in cui

$$\omega^2 = \gamma$$

rappresenta un autovalore della matrice della dinamica, mentre \mathbf{u} rappresenta il corrispondente autovettore.

Si vogliono ora analizzare alcune proprietà fondamentali delle matrici \mathbf{M} e \mathbf{K} . Visto che esse per ipotesi sono simmetriche (quindi $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$ e $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$) e in più, per necessità, la matrice di massa è oltretutto definita positiva, si può dimostrare che esiste una trasformazione lineare in grado di diagonalizzarle entrambe, o in altre parole, che esiste una matrice \mathbf{U} tale che:

$$\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{\Omega} \quad (2.2.3)$$

dove \mathbf{I} è la matrice identica e $\mathbf{\Omega}$ è una matrice diagonale.

Per proseguire è utile cercare di interpretare meglio il significato delle matrici \mathbf{U} e $\mathbf{\Omega}$: dato che $\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{\Omega}$, è possibile porre:

$$\mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U}\mathbf{\Omega}$$

e poiché \mathbf{U} è non singolare (infatti $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T\mathbf{M}$) è possibile eliminare \mathbf{U}^T dalla relazione precedente, ottenendo:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{M}\mathbf{U}\mathbf{\Omega} \quad (2.2.4)$$

Indicando con γ_i gli elementi della diagonale di $\mathbf{\Omega}$ e con \mathbf{u}_i le colonne della matrice \mathbf{U} , si ha che:

$$\mathbf{U}\mathbf{\Omega} = [\gamma_1\mathbf{u}_1 | \dots | \gamma_n\mathbf{u}_n]$$

isolando l'i-esima colonna del termine di sinistra nell'equazione 2.2.4 ed eguagliandola all'i-esima colonna del termine di destra, si ha:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_i = \gamma_i\mathbf{M}\mathbf{u}_i$$

ricombinando tale equazione si ritrova il problema agli autovalori della matrice della dinamica, infatti:

$$M^{-1}K\mathbf{u}_i = \gamma_i\mathbf{u}_i$$

e quindi:

$$D\mathbf{u}_i = \gamma_i\mathbf{u}_i$$

Da qui si capisce che i termini \mathbf{u}_i che compongono la matrice \mathbf{U} , detta *matrice modale*, rappresentano gli autovettori della matrice della dinamica. Allo stesso modo, i termini γ_i sono i suoi autovalori.

Quindi ricapitolando, la matrice \mathbf{U} contiene sulle sue colonne tutti gli autovettori di \mathbf{D} , mentre la matrice $\mathbf{\Omega}$ contiene sulla sua diagonale tutti gli autovalori. Visto che $\gamma_i = \omega_i^2$, essa avrà la forma seguente:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

e questo spiega anche il senso della notazione utilizzata.

La matrice modale è di fondamentale importanza per riuscire a disaccoppiare le equazioni del problema iniziale: premoltiplicando tutti i termini dell'equazione 2.2.2 per \mathbf{U}^T si ottiene infatti:

$$\mathbf{U}^T M \mathbf{U} \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{U}^T K \mathbf{U} \boldsymbol{\eta}(t) = 0$$

e quindi sostituendo le relazioni indicate in 2.2.3 si giunge alla seguente formulazione, in cui come desiderato, compaiono solo matrici diagonali:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{\Omega} \boldsymbol{\eta}(t) = 0$$

L'espressione precedente rappresenta in realtà un sistema di equazioni disaccoppiate, ognuna delle quali si presenta nella forma tipica di quella di un oscillatore semplice.

E' possibile dimostrare che la matrice \mathbf{U} è non singolare, pertanto, essendo le sue colonne linearmente indipendenti, grazie ad essa è possibile esprimere le coordinate misurabili (\mathbf{x}) in funzione delle coordinate modali ($\boldsymbol{\eta}$), cioè:

$$\mathbf{x} = \mathbf{U} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_1 \eta_1 + \mathbf{u}_2 \eta_2 + \dots + \mathbf{u}_n \eta_n$$

Esprimendo le coordinate misurabili in questo modo, risulta chiaro che esse sono una combinazione lineare di funzioni armoniche a mezzo degli autovettori della matrice della dinamica.

Ad ogni autovettore corrisponderà un così detto "modo di vibrare", e la somma degli spostamenti parziali darà vita allo spostamento totale visibile e misurabile fisicamente. Infatti, le singole coordinate modali, che non possono essere misurate in maniera diretta, indicano di quanto il sistema è deformato secondo le forme degli autovettori della matrice della dinamica. Combinando le varie singole deformazioni si ottiene quella totale.

Visto che ogni modo di vibrare è legato ad un autovettore della matrice della dinamica, essi saranno in numero pari alla dimensione del problema e quindi al numero n di gradi di libertà del sistema.

Quest'ultimo potrà quindi essere scomposto in un numero di oscillatori semplici, ognuno dei quali ha una dinamica indipendente dagli altri e contribuirà a determinare ogni spostamento misurabile, secondo quanto espresso dall'autovettore associato; quindi il comportamento complessivo del sistema sarà una sovrapposizione dei singoli modi di vibrare.

Per convenzione, come primo modo di vibrare viene considerato quello associato all'autovalore più piccolo, il secondo modo, all'autovalore seguente e così via fino ad arrivare all' n -esimo modo che sarà quello associato all'autovalore più grande.

Ogni componente degli autovettori della matrice della dinamica si riferisce direttamente ad un grado di libertà del sistema, per cui il suo valore rispecchia l'entità dello spostamento che si avrà in tale grado di libertà dovuto al modo di vibrare considerato. La somma di tutti questi spostamenti darà vita allo spostamento totale di ogni grado di libertà. Visto che ogni autovettore è definito a meno di una costante, grazie al valore delle sue componenti, esso fornisce una visione completa di come risulta essere deformato il sistema per il particolare modo di vibrare a cui è associato.

Infine le componenti di ogni n -esimo autovettore, sono caratterizzate da $n - 1$ variazioni di segno. Come conseguenza, ogni autovettore definisce altrettanti nodi, cioè punti della struttura del sistema, che nella dinamica del particolare modo di vibrare considerato risultano essere nella posizione di equilibrio, e quindi perfettamente fermi.

Secondo quanto è stato appena affermato, lo spostamento su ogni singolo grado di libertà del sistema si può considerare come dovuto alla somma di molti termini ognuno derivante da un ben preciso modo di vibrare. Allo stesso tempo il sistema può essere visto nel suo complesso come la somma di più oscillatori semplici ognuno dei quali contribuisce allo spostamento totale.

Se si ha l'esigenza di analizzare il comportamento del sistema nel suo insieme, in realtà lo si può fare anche andando a considerare ogni singola sua componente separatamente, cioè ogni singolo contributo dovuto ai vari smorzatori semplici nei quali si può ipotizzare che sia scomposto il sistema, ovvero ogni singolo modo di vibrare. Infatti il movimento totale può essere considerato diviso in n contributi dove n è il numero di modi di vibrare pari al numero di gradi di libertà del sistema.

Il movimento del sistema può quindi essere esaminato nel suo complesso, oppure andando a considerare i singoli contributi separatamente, risalendo in questo modo al comportamento complessivo.

Ragionando al contrario, a partire dagli spostamenti misurabili, sfruttando la scomposizione fatta con l'analisi modale, è però anche possibile risalire alle singole componenti che costituiscono il movimento complessivo. Esse saranno sostanzialmente dei contributi armonici modificati secondo gli autovettori della matrice della dinamica e caratterizzati da un'oscillazione legata agli autovalori.

Visto che lo scopo che ci si è prefissati è quello di applicare opportune tecniche per assegnare al sistema un desiderato tipo di comportamento, si può pensare di sfruttare il fatto che il movimento è la somma di più componenti per agire su più fronti contemporaneamente. Dopo aver determinato lo specifico valore che deve avere ogni singola componente, si può cioè cercare di forzare ognuna di essa, in modo che l'effetto complessivo sia quello desiderato. In questo modo si va sostanzialmente ad attribuire indirettamente il comportamento globale del sistema agendo sulle singole forme modali.

In altre parole si vuole far muovere il sistema in un determinato modo agendo a dovere su ogni singolo termine del movimento ed imponendo ad esso quel determinato valore che sia tale da permettere che la dinamica totale, sia quella desiderata. Se il sistema si muove in un certo modo significa infatti che gli autovettori e gli autovalori della matrice \mathbf{D} saranno conformi ad una determinata struttura. Imponendo loro tale struttura si spera quindi di ottenere il movimento desiderato.

Siccome, imporre il movimento globale, equivale ad imporre il valore di ogni componente

che in esso compare, andando ad intervenire opportunamente su ogni singolo modo di vibrare si può far sì che il sistema si muova secondo una forma determinata. Ma i modi di vibrare sono determinati dagli autovettori della matrice della dinamica, quindi per far sì che essi assumano la forma desiderata, si dovrà intervenire proprio su questi ultimi, esprimendo le richieste in termini di valore che ognuno di essi deve assumere al fine di conferire al sistema le caratteristiche di movimento desiderate.

Siccome la matrice della dinamica è determinata solamente dalle matrici di massa e di rigidità, essa dipende dalle caratteristiche fisiche del sistema. Intervenendo su di esse si possono quindi modificare i suoi autovettori con conseguenze anche sui modi di vibrare e quindi sugli spostamenti complessivi.

Anche se in realtà per quanto riguarda gli autovalori il discorso da fare è leggermente diverso (si potrebbe infatti pensare di utilizzare le tecniche tipiche della teoria dei sistemi che, con l'utilizzo di un controllore, consentono di spostare i poli, ed assegnare loro un valore desiderato) è comunque possibile modificare anche le pulsazioni dei vari modi di vibrare seguendo la stessa filosofia di intervento sulle proprietà della matrice \mathbf{D} . Il valore delle pulsazioni dei modi, sarà infatti conseguenza di quello che verrà assegnato agli autovalori corrispondenti.

Concludendo, visto che, secondo quanto è emerso, se si vuole imporre un certo movimento ad un sistema si può in realtà equivalentemente imporre i singoli modi di vibrare e quindi i singoli autovettori e autovalori della matrice della dinamica, si capisce perché nel proseguo della tesi si tenterà, applicando diverse tecniche, di far sì che tali entità assumano un determinato valore. Agendo in questo modo si può infatti risalire alle caratteristiche fisiche che deve avere il sistema e/o a quali sono i guadagni del controllore esterno che eventualmente si sceglie di utilizzare, per soddisfare alle esigenze di movimento che si hanno, determinate dalla particolare applicazione.

2.3 Modifiche passive: Dynamic Structural Modification

2.3.1 Introduzione

La Structural Modification (indicata per brevità con S.M.) è una tecnica utilizzata per assegnare ad un sistema un comportamento dinamico desiderato, in genere espresso in termini di autovettori e autovalori della matrice della dinamica, semplicemente andando a modificare le sue caratteristiche fisiche. E' noto infatti che variando i parametri fisici di un sistema, si influisce anche sulla sua dinamica, e quindi sui suoi modi di vibrare.

In particolare questa tecnica permette di determinare una certa massa o un certo valore di rigidità (le modifiche di massa e rigidità), che aggiunte o tolte al sistema permettono di farlo vibrare in un certo modo e ad una certa frequenza. Per questo viene considerata come una tecnica di controllo passiva, molto utile in fase di progetto di nuovi sistemi o per l'ottimizzazione di dispositivi già esistenti.

La Structural Modification viene comunemente applicata per spostare le frequenze naturali del sistema. Infatti, se queste ultime coincidono, o comunque sono molto prossime alle frequenze delle vibrazioni che caratterizzano l'ambiente circostante, potrebbero insorgere dei fenomeni vibratorii indesiderati. Se non è possibile intervenire direttamente sulla fonte di tali disturbi, una soluzione efficace potrebbe essere quella di riposizionare le frequenze naturali del sistema utilizzando appunto la tecnica in questione. In alternativa, la Structural Modification può intervenire nello spostamento di un'antirisonanza così da farla coincidere con la frequenza dell'eccitazione e creare quindi un nodo in una determinata posizione del sistema. Se l'eccitazione può presentarsi con una frequenza variabile all'interno di una certa banda, la Structural Modification può essere usata in modo che nessuna frequenza naturale del sistema ricada all'interno di tale intervallo.

Formulando un problema agli autovalori e autovettori inverso e risolvendolo sfruttando le tecniche dell'ottimizzazione, è quindi possibile identificare le modifiche cercate, le quali, una volta applicate, permettono di ottenere il comportamento desiderato.

Per fare questo è necessario imporre al sistema il modo (o più modi) di vibrare e la pulsazione che si desidera che esso assuma. Si va quindi a forzare il valore degli autovalori (uno o più in base al numero di modi di vibrare che si vogliono assegnare) e degli autovettori della sua matrice della dinamica, in modo da ottenere l'informazione sull'entità delle modifiche che è necessario apportare perché esso si comporti nel modo desiderato.

Il problema della Structural Modification può essere inteso in due sensi opposti: con l'approccio *diretto* si vuole determinare quale sarà il comportamento dinamico del sistema in conseguenza alla modifica delle sue caratteristiche di massa e rigidità; tramite l'approccio *inverso* si vuole invece determinare quali siano le modifiche strutturali necessarie per ottenere una variazione delle caratteristiche dinamiche del sistema.

In altre parole, si può pensare alla Structural Modification come l'inverso del problema agli autovalori classico: con quest'ultimo, dato un certo sistema (e quindi le sue caratteristiche fisiche come matrice di massa, di smorzamento e di rigidità), è possibile calcolare il valore dei suoi autovettori. Con la Structural Modification, dati i valori di autovettori e autovalori che si desidera ottenere, vengono calcolate le caratteristiche fisiche che deve avere il sistema per far sì che i suoi autovalori e autovettori coincidano proprio con quelli desiderati.

In questa tesi, si è voluto agire secondo l'approccio inverso.

La soluzione del problema derivante dall'applicazione della Structural Modification, può non esistere o non essere unica. Per questo è necessario stabilire un insieme di valori all'interno dei quali la soluzione deve ricadere (se essa esiste), per far sì che sia realizzabile effettivamente. In più si deve formulare il problema in maniera analitica in modo che la soluzione possa essere trovata.

Come già accennato, la Structural Modification è una tecnica molto utile anche in fase

di progettazione e può essere sfruttata per determinare ancor prima che il sistema venga prodotto, le caratteristiche che esso deve presentare per poter comportarsi in un determinato modo imposto dal progettista.

Tale tecnica si è sviluppata in ambito di ottimizzazione di strutture o sistemi con vincoli elastici, mentre ha avuto scarsa applicazione in ambito di meccanismi con accoppiamenti cinematici.

2.3.2 Stato dell'arte

Nella letteratura vengono di solito considerate due classi opposte del problema relativo alla Structural Modification. La prima classe si riferisce ad un approccio diretto e consiste nel determinare la nuova autostruttura conseguente ad una modifica del sistema, la seconda considera invece un approccio inverso che permetta di determinare le modifiche strutturali appropriate, necessarie per assegnare al sistema gli autovettori e gli autovalori desiderati. Negli ultimi anni si è assistito ad un aumento dell'interesse nei confronti del problema inverso, e sono state sviluppate diverse soluzioni. Questo problema è oltretutto interessante anche dal punto di vista matematico, a causa della sua non linearità e del fatto che spesso risulti mal condizionato numericamente.

I primi lavori sul problema inverso della Structural Modification erano basati sulla modifica della matrice di Rayleigh [1] e sull'analisi dell'autostruttura, sviluppata abbondantemente negli anni seguenti [2]. lo scopo di questi studi fu di ottenere una soluzione approssimata degli autovalori e autovettori desiderati, come conseguenza di una modifica del sistema stesso in termini di parametri geometrici. Una rassegna storica è fornita in [3] e [4].

L'inconveniente principale associato alla modifica strutturale, è che il relativo problema fornisce risultati tanto più affidabili quanto più le modifiche sono "piccole". Dall'altro lato, di solito questo approccio non richiede sforzi computazionali troppo elevati.

Negli ultimi anni il problema relativo alla Structural Modification è stato spesso formulato come un problema inverso agli autovalori. Un eccellente riferimento che affronta molti aspetti del problema inverso nelle vibrazioni, tra cui il problema inverso agli autovalori, è il libro di Gladwell [5]. Gli approcci sviluppati fanno uso sia l'autostruttura del sistema sia della sua risposta in frequenza.

Ram e Braun [6], in un loro lavoro definiscono il problema della modifica strutturale come un problema di ottimizzazione di quello inverso agli autovalori, minimizzando la norma della matrice dei residui. La forma modale desiderata viene vincolata a rimanere all'interno dello *span* delle forme modali sperimentali. Gli autori affrontano anche il problema di ottenere modifiche di massa e rigidità fisicamente realizzabili. Ciononostante come essi affermano, rimane il problema di sviluppare un algoritmo efficiente per calcolare tali soluzioni.

Bucher e Braun [7] sfruttano il concetto di autovettore per risolvere il problema dell'informazione limitata fornita della risposta in frequenza ottenuta sperimentalmente. Loro applicano delle modifiche allo scopo di ottenere degli autovettori desiderati che appartengano al sottospazio dei modi del sistema, fornendo una soluzione esatta. Per un eventuale modo desiderato che non appartiene a tale sottospazio, essi propongono un metodo quadratico per trovare quel modo che, nel sottospazio originale, meglio approssima l'autovettore desiderato. In [8] viene presentato un metodo per determinare le modifiche di massa e rigidità evitando le difficoltà derivanti dalla disponibilità limitata di informazioni sui modi. Un ulteriore approccio intuitivo è proposto in [9]: esso è basato sulla soluzioni di equazioni lineari. Purtroppo, può essere applicato solo quando si debbano modificare sia

le masse che le rigidezza, e il numero di modifiche da calcolare sia uguale al numero di gradi di libertà del sistema. In aggiunta, nessuna condizione assicura la fattibilità della soluzione.

Approcci basati sulla risposta in frequenza vengono presentati ad esempio in [10] e [11] in cui viene affrontato il problema dell'assegnazione delle frequenze naturali ad un sistema non smorzato a più gradi di libertà, attraverso l'aggiunta di una massa collegata con una o più molle. Il valore della massa e delle molle aggiuntive viene calcolato servendosi della ricettanza del sistema originale. In [11] viene inoltre studiata l'esatta soluzione del problema inverso agli autovalori nel caso in cui si vogliono assegnare più frequenze. Questa soluzione riguarda il caso specifico di un egual numero di vincoli sulle forme modali e di parametri di modifica strutturale. Ciò implica che la modifica del sistema diventa l'unica soluzione di un sistema lineare. Quando il problema ammette infinite soluzioni, l'articolo indica una procedura approssimata per verificare la fattibilità delle modifiche. Nella determinazione della soluzione migliore comunque, nessun problema di ottimizzazione è esplicitamente definito.

Un elevato numero di problemi relativi alla Structural Modification, affronta anche l'aspetto dell'assorbimento di vibrazioni attraverso il posizionamento dell'anti-risonanza. Lo stato dell'arte della teoria matematica sull'assorbimento delle vibrazioni è presentato da Motterhead e Ram [12]. In [13] viene introdotto il concetto di sistema aggiuntivo per eliminare un picco di risonanza attraverso la creazione di un nodo. In [14] lo stesso concetto è presentato con lo scopo di calcolare le modifiche per assegnare gli zeri di una struttura. Questo risultato viene ottenuto assegnando la risonanza del sistema aggiuntivo.

2.3.3 S.M. con tecniche di ottimizzazione convessa

Si supponga che \mathbf{M} e \mathbf{K} rappresentino rispettivamente le matrici di massa e rigidezza di un sistema non smorzato ad n gradi di libertà rappresentato dalla seguente equazione in forma matriciale:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (2.3.1)$$

in cui \mathbf{x} rappresenta il vettore delle variabili libere e \mathbf{F} rappresenta il vettore delle forzanti esterne che agiscono sul sistema. Le matrici simmetriche $\Delta\mathbf{M}$ e $\Delta\mathbf{K}$ rappresentano le modifiche di massa e rigidezza da applicare al sistema per far sì che esso possa assumere una certa forma modale desiderata.

L'equivalente dell'equazione 2.3.1 per il sistema modificato sarà:

$$(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{x} = 0 \quad (2.3.2)$$

in cui, come di consueto, è possibile trascurare \mathbf{F} visto che si sta impostando il problema agli autovalori. In questa situazione il problema agli autovalori e autovettori dell'analisi modale, risulta essere:

$$\omega^2 (\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}) \mathbf{u} = (\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}) \mathbf{u}$$

L'obiettivo è quello di calcolare le matrici $\Delta\mathbf{M}$ e $\Delta\mathbf{K}$ che verificano l'uguaglianza. Esse si ottengono imponendo al generico autovalore ω e al corrispondente autovettore \mathbf{u} del sistema modificato, i valori desiderati.

La loro struttura è definita a priori e rispecchia quella delle corrispondenti matrici \mathbf{M} e \mathbf{K} ; pertanto risultano essere anche esse simmetriche. Tale caratteristica permette di conservare le proprietà di stabilità tipiche del sistema originale anche dopo che sono state eseguite su di esso le modifiche.

Le matrici ΔM e ΔK contengono le singole modifiche che si desidera eseguire sul sistema, posizionate e combinate tra loro a seconda della natura del sistema stesso. Tali termini possono essere raggruppati in due vettori distinti, uno per le modifiche di massa (Δm) ed uno per le modifiche di rigidità (Δk). Combinando in un'unica colonna questi due vettori, si ottiene il vettore \mathbf{x} delle incognite del problema (le modifiche strutturali necessarie ad ottenere la desiderata forma modale):

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \Delta m \\ - \\ \Delta k \end{Bmatrix}$$

A questo punto è possibile definire due matrici, U_M e U_K che dipendono entrambe esclusivamente dall'autovettore desiderato \mathbf{u} , tali che:

$$\Delta M \mathbf{u} = U_m \Delta m$$

$$\Delta K \mathbf{u} = U_k \Delta k$$

è quindi ora possibile definire la matrice

$$U = [\omega^2 U_m \mid U_k]$$

e il vettore

$$\mathbf{b} = K \mathbf{u} - \omega^2 M \mathbf{u}$$

che permettono di formulare il problema

$$U \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.3.3}$$

da cui si calcola il vettore \mathbf{x} delle modifiche da applicare al sistema.

Risolvendo il problema formulato in 2.3.3 si calcola l'entità delle modifiche da fare sul sistema per far sì che esso soddisfi alle richieste che gli sono state fatte. Essendo queste delle variazioni delle caratteristiche fisiche, che non richiedono quindi la necessità di una continua azione attiva, se non quella iniziale strettamente necessaria per realizzarle, e che una volta che sono state eseguite dovrebbero garantire l'acquisizione della forma modale desiderata senza ulteriori interventi dall'esterno, esse possono essere considerate come delle entità in un certo senso passive: le "modifiche passive".

A questo punto, per far sì che le modifiche abbiano un senso e siano quindi realizzabili, è utile imporre ad esse dei limiti superiori ed inferiori. In caso contrario, i risultati che si otterrebbero sarebbero "incontrollati", e a volte anche assurdi: si pensi ad esempio al caso in cui le modifiche da apportare al sistema sono talmente elevate da prevedere un aumento di massa o rigidità non fisicamente o economicamente realizzabile; oppure, al contrario, si immagini che la diminuzione suggerita sia maggiore degli effettivi valori di massa e/o rigidità stessi, i quali dopo le modifiche risulterebbero addirittura negativi.

E' chiaro che in questi casi i valori delle modifiche sono privi di significato.

Si va quindi a limitare la soluzione, imponendo che le modifiche rimangano sempre all'interno di un range di valori ammissibili. Matematicamente parlando si può dire che la soluzione deve appartenere ad una regione vincolata

$$\Gamma = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{max}\}$$

Oltretutto se non vengono fatte ipotesi sulle dimensioni del vettore delle incognite e sul rango della matrice U , l'equazione $U \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nel caso generale non ammette una soluzione

esatta, per cui si cerca di minimizzare la norma del residuo del sistema lineare 2.3.3 risolvendolo con un'ottimizzazione quadratica limitata:

$$\min_{\mathbf{x}} \left\{ \|\mathbf{U}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2, \mathbf{x} \in \Gamma \right\} \quad (2.3.4)$$

Il problema 2.3.4 rappresenta una efficace misura della vicinanza del risultato ottenuto a quello desiderato.

Inoltre è utile anche inserire un termine di regolarizzazione che serve a penalizzare le modifiche troppo elevate.

Il problema può quindi essere riformulato come un problema di ottimizzazione quadratica della funzione $f(\mathbf{x})$ sul dominio Γ :

$$\min_{\mathbf{x}} \left\{ f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{U}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \delta \|\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}\|_2^2, \mathbf{x} \in \Gamma \right\} \quad (2.3.5)$$

La matrice $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{x}}$ (diagonale e definita positiva) è un operatore di regolarizzazione inserito per assegnare alle singole modifiche dei diversi pesi, in modo da penalizzare alcune di esse (ad esempio quelle più difficili da realizzare) rispetto ad altre: è infatti probabile che nella realtà, all'atto pratico, alcune modifiche richiedano uno sforzo maggiore per essere implementate, rispetto invece ad altre che saranno quindi preferite; pertanto si cerca di incentivare le prime a discapito delle seconde. In un certo senso si dà quindi loro la precedenza, facendo sì che la valutazione delle modifiche da apportare avvenga a partire da quelle più semplici.

Il termine di regolarizzazione δ è invece scelto come compromesso tra il costo dovuto all'inesattezza della soluzione ed il costo dovuto all'elevato valore delle modifiche da eseguire sul sistema, i quali sono spesso dei requisiti in conflitto tra loro.

Di solito la scelta del valore di δ viene fatta graficamente utilizzando la cosiddetta L-curve: plottando infatti, al variare di δ , su di un piano i valori di $\log \|\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_{\delta}\|_2^2$ (norma della regolarizzazione) in ascissa e quelli di $\log \|\mathbf{U}\mathbf{x}_{\delta} - \mathbf{b}\|_2^2$ (norma del residuo) in ordinata (dove \mathbf{x}_{δ} è la soluzione della 2.3.5 per un dato valore di δ), si ottiene una curva la cui forma assomiglia ad una "L". Un esempio è riportato in figura 2.2.

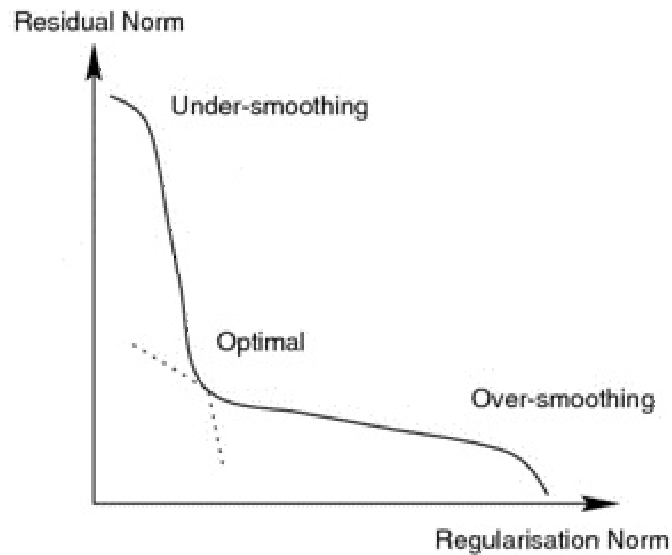


Fig. 2.2: Esempio di L-curve.

Si andrà quindi a fare un compromesso scegliendo quel valore di δ che permette di avvicinarsi il più possibile alla soluzione esatta (basso valore di $\|U\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$) facendo uso delle più piccole modifiche possibili (basso valore di $\|\Omega_x \mathbf{x}\|_2^2$). Nel caso della figura il valore scelto sarà pertanto quello che corrisponde al vertice della "L".

Si osservi che per l'utilizzo di modifiche passive non esistono delle condizioni esplicite che consentono di definire l'assegnabilità o meno. Essa è legata alle caratteristiche del sistema fisico originale, al numero dei parametri che possono essere modificati, al dominio ammissibile per tali variabili e alle dimensioni degli autovettori.

Un limite della Structural Modification sta anche nel fatto che le modifiche per la loro realizzabilità fisica preservano la simmetria delle matrici \mathbf{M} e \mathbf{K} . Questo, se da una parte permette garantisce di mantenere la stabilità del sistema, dall'altra limita l'entità dei risultati ottenuti, e non consente di stabilizzare sistemi instabili. Per questo motivo tipicamente viene sviluppata relativamente a modifiche di massa e rigidezza, mentre sono trascurati i termini di smorzamento.

2.4 Assegnabilità delle forme modali

2.4.1 Introduzione

Prima di analizzare le tecniche grazie alle quali è possibile assegnare ad un sistema la specifica forma modale desiderata, è utile fare alcune considerazioni sul fatto che essa possa effettivamente essere assegnata o meno mediante i metodi di modifica (controllo attivo o passivo).

Per dare un'idea di cosa si intende quando si parla di assegnabilità di una forma modale si può affermare che con tale espressione ci si riferisce alla reale possibilità che gli autovalori e gli autovettori di un sistema hanno, di assumere valori imposti. Non è detto infatti che, una volta determinata con i metodi che poi si vedranno, la forma modale desiderata, il sistema in esame riesca sicuramente a rispettarla; quindi, come presentato in [15], nella progettazione di un sistema, l'assegnabilità di una coppia autovettore autovalore non deve essere data per scontata.

E' intuibile che non si possa avere a priori la certezza che il sistema sia sicuramente in grado di comportarsi secondo quanto specificato da un autovettore desiderato alla frequenza dell'autovalore associato, e ci si deve quindi aspettare di non riuscire ad assegnare ad esso qualsiasi modo di vibrare.

Ecco perché è necessario andare ad investigare su quali sono i fattori che intervengono su questo aspetto e lo influenzano. In generale questo dipenderà dalle caratteristiche del sistema stesso a causa delle quali esso sarà più propenso a modificarsi in un certo modo rispetto che un altro.

Le possibilità che il sistema offre in termini di assegnabilità delle forme modali dipendono quindi dal sistema stesso. Ciò è dovuto al fatto che intervengono i suoi limiti fisici: il modo in cui esso può comportarsi è determinato dalle sue caratteristiche fisiche che evidentemente non saranno tali da potergli permettere di assumere qualsiasi configurazione. E' chiaro quindi che un determinato sistema potrà assumere per effetto del controllo, un limitato numero di modi di vibrare. Pertanto i modi realmente assegnabili, offerti dalla struttura originale, devono essere scelti tra un ristretto numero di casi.

L'assegnabilità di una determinata forma modale dipende però anche dal numero di forze di controllo esterne che agiscono: maggiore esso è, e più risulterà semplice influire sul comportamento del sistema; al contrario invece, più le possibilità di agire sono limitate, più sarà complicato far sì che esso rispetti ciò che gli viene richiesto.

Parlando di assegnabilità delle forme modali, è necessario fare una distinzione tra assegnabilità degli autovalori e assegnabilità degli autovettori che in esse compaiono. Tali proprietà sono infatti influenzate da fattori differenti.

2.4.2 Assegnabilità degli autovalori

Gli autovalori del sistema (in rappresentazione di stato) coincidono con i suoi poli, pertanto quando si parla di assegnabilità degli autovalori ci si riferisce al fatto che i poli possano essere posizionati opportunamente sul piano complesso.

Dalla teoria dei sistemi è noto che se la posizione del polo di un sistema è diversa da quella desiderata, è possibile intervenire opportunamente, ad esempio con un controllore, in modo che chiudendo un anello di retroazione, i poli del sistema complessivo risultante assumano il valore desiderato.

Non per tutti i sistemi però questo è sempre possibile: ciò dipenderà dalle specifiche carat-

teristiche che ognuno presenta. Infatti per far sì che un intervento come quello descritto sopra sia lecito, il sistema deve manifestare alcune proprietà che possono essere raggruppate nel concetto generale di controllabilità.

Il concetto di controllabilità riguarda la determinazione degli stati iniziali, a partire dai quali si può far sì che il sistema evolva verso uno finale predeterminato. Se un singolo stato può evolvere verso quello finale si dice che tale stato è controllabile, se tutti gli stati risultano controllabili, si dice che il sistema è controllabile.

Quindi nel caso in esame, per poter assegnare ad un autovalore un determinato valore è sufficiente che tutti gli stati del sistema possano evolvere verso lo stato corrispondente. Come detto basta cioè che il sistema sia controllabile.

Se un sistema presenta tale caratteristica è quindi possibile posizionare i suoi poli e assegnare così dei determinati valori agli autovalori della matrice della dinamica. Appurando la reale controllabilità del sistema, è quindi possibile stabilire la possibilità di ottenere quanto desiderato in termini di pulsazioni dei modi di vibrare.

Da notare che la controllabilità del sistema non dipende da quella che è la richiesta.

2.4.3 Assegnabilità degli autovettori tramite controllo in retroazione

Per quanto riguarda l'assegnabilità degli autovettori il discorso è invece più complicato, infatti, perché un autovettore possa essere assegnato, non è sufficiente che il sistema sia controllabile, ma è necessario che vengano rispettate anche altre condizioni.

Consideriamo inizialmente l'equazione differenziale che descrive il comportamento di un sistema vibrante nel caso più generale possibile:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = B\mathbf{F}$$

in cui M è la matrice di massa del sistema in esame, C è la matrice di smorzamento, K quella di rigidità, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ è il vettore delle variabili libere (ad esempio gli spostamenti di alcuni punti significativi del sistema), $B \in \mathbb{R}^{N \times r}$ è la matrice che distribuzione delle forze esterne sul sistema in modo che il modello rispecchi fedelmente lo schema con cui esse sono applicate nella realtà, ed infine $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^r$ rappresenta il vettore delle forze esterne. Si consideri la forza di controllo ottenuta secondo la seguente relazione:

$$\mathbf{F}(t) = [K_A]\ddot{\mathbf{x}} + [K_D]\dot{\mathbf{x}} + [K_P]\mathbf{x}$$

in cui K_A , K_D e K_P sono i guadagni di, rispettivamente, accelerazione, velocità e posizione.

Supponendo che λ_i e \mathbf{v}_i siano un generico autovalore del sistema ed il corrispondente autovettore, è possibile formulare il problema quadratico agli autovalori:

$$[M\lambda_i^2 + C\lambda_i + K]\mathbf{v}_i = B[K_A\lambda_i^2 \mid K_D\lambda_i \mid K_P]\mathbf{v}_i \quad (2.4.1)$$

La matrice $[M\lambda_i^2 + C\lambda_i + K]$ è l'inverso della matrice $H(\lambda_i) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ delle ricettanze alle frequenze λ_i (ossia la funzione di trasferimento con ingresso forza e uscita spostamento):

$$H_W(\lambda_i) := [M\lambda_i^2 + C\lambda_i + K]^{-1}$$

Il generico autovettore \mathbf{v}_i , ammesso che $H_W(\lambda_i)$ esista, si può esprimere nel seguente modo:

$$\mathbf{v}_i = [M(\lambda_i)^2 + C\lambda_i + K]^{-1} B[K_A(\lambda_i)^2 \mid K_D\lambda_i \mid K_P]\mathbf{v}_i \quad (2.4.2)$$

L'obiettivo che ci si è posti è quello di imporre al sistema un certo autovettore con il corrispondente autovalore, dipendenti dalle esigenze che si hanno per la specifica applicazione.

Si supponga allora che \mathbf{v}_i^D sia tale autovettore che si desidera assegnare al sistema, e che λ_i^D sia il corrispondente autovalore desiderato: anche per esso deve valere l'equazione 2.4.2, con degli opportuni \mathbf{K}_A , \mathbf{K}_D e \mathbf{K}_P . A questo punto per poter semplificare l'espressione di \mathbf{v}_i^D appena indicata, e capire quindi in che modo è possibile determinare se per il sistema in esame esso sia assegnabile o meno e da che cosa dipende questa eventuale sua caratteristica, è utile fare un'analisi delle dimensioni dei vari termini che compaiono nella 2.4.2:

$$\mathbf{v}_i^D \in \mathbb{C}^{N \times 1}$$

dovendo essere un autovettore del sistema, ovviamente dovrà avere le dimensioni caratteristiche del sistema stesso.

Per semplicità si definiscono poi le matrici

$$\mathbf{L}(\lambda_i^D) := \mathbf{H}_W(\lambda_i^D)\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N \times r}$$

$$\mathbf{K}_U := [\mathbf{K}_A(\lambda_i^D)^2 \mid \mathbf{K}_D\lambda_i^D \mid \mathbf{K}_P] \in \mathbb{C}^{r \times N}$$

con \mathbf{K}_A , \mathbf{K}_D e \mathbf{K}_P reali, ed il vettore

$$\mathbf{z} := \mathbf{K}_U\mathbf{v}_i^D \in \mathbb{C}^{r \times 1}$$

che vengono sfruttati per riscrivere in modo decisamente più conciso la 2.4.2. Sempre con le ipotesi indicate all'inizio si ha quindi che deve essere:

$$\mathbf{v}_i^D = \mathbf{L}(\lambda_i^D)\mathbf{z}$$

e ciò implica che:

$$\mathbf{v}_i^D \in \text{span}\{\mathbf{L}(\lambda_i^D)\} := \text{span}\{[\mathbf{M}(\lambda_i^D)^2 + \mathbf{C}\lambda_i^D + \mathbf{K}]^{-1}\mathbf{B}\}$$

e cioè che un autovettore, per essere assegnabile, deve appartenere all'insieme di vettori generato da $\mathbf{L}(\lambda_i^D)$. Tale insieme determina quindi univocamente quali sono gli autovettori che possono essere assegnati ad un determinato sistema: essi saranno tutti e soli quei vettori che possono essere espressi come combinazione lineare di $\mathbf{L}(\lambda_i^D)$. Osservando l'espressione della matrice $\mathbf{L}(\lambda_i^D)$ si nota che all'interno vi compaiono le matrici di massa, di smorzamento e di rigidezza del sistema, a prova che, come accennato precedentemente l'assegnabilità di una forma modale è determinata dalle caratteristiche fisiche del sistema e dalla frequenza alla quale si vuole assegnare. In più, sempre nella stesa matrice compare anche la matrice \mathbf{B} , il che sta a significare che la possibilità di assegnare una coppia autovettore autovalore ad un sistema dipende anche dall'efficacia e dalla completezza del sistema di attuazione (più le possibilità di agire sul sistema sono elevate, e più sarà ampia l'offerta di forme modali assegnabili).

Si osservi che per sistemi ad un ingresso, $\mathbf{L}(\lambda_i^D)$ è un vettore colonna. Quindi possono essere assegnati autovettori pari al prodotto tra \mathbf{L} ed uno scalare non nullo. Ossia, visto che gli autovettori sono definiti a meno di una costante, può in realtà essere assegnato un solo autovettore. All'atto pratico vuol dire che non vi è alcun grado di libertà per assegnare \mathbf{v}^D .

In sintesi quindi, questo significa che ciò che si può assegnare, e quindi il comportamento che il sistema può assumere, è determinato da questo insieme, e la coppia autovettore autovalore che si vuole assegnare al sistema dovrà pertanto essere scelta all'interno di tale spazio vettoriale.

Dal canto suo il sistema potrà spingersi fino ai limiti di questo insieme riuscendo a comportarsi in tutti i modi da esso definiti. Se le richieste fatte ne fanno parte, si ha la certezza di poter riscontrare correttamente nel suo comportamento quanto richiesto tramite le tecniche di assegnazione di autovettori proposte in letteratura. Quindi per essere sicuri che il sistema faccia quanto desiderato è necessario assegnargli qualcosa che rientri in tale insieme e sia conforme alle caratteristiche da esso definite.

Nella realtà dei fatti però, può capitare che per le esigenze che si hanno, l'autovettore che si desidera assegnare al sistema, non sia in realtà tre quelli assegnabili:

$$\mathbf{v}_i^D \notin \text{span}\{\mathbf{L}(\lambda_i^D)\}$$

L'appartenenza o meno all'insieme sopra definito, dà la possibilità di capire se si è nella condizione di assegnabilità o meno. Come verifica è sufficiente determinare se l'autovettore desiderato si può esprimere come combinazione lineare delle colonne di $\mathbf{L}(\lambda_i^D)$ o se invece esso sia linearmente indipendente da queste ultime. In tal caso, non essendo \mathbf{v}_i^D generabile tramite i vettori di $\mathbf{L}(\lambda_i^D)$, il rango della matrice che si ottiene affiancando questi due ultimi termini, sarà diverso dal rango della sola matrice $\mathbf{L}(\lambda_i^D)$:

$$\text{se } \mathbf{v}_i^D \notin \text{span}\{\mathbf{L}(\lambda_i^D)\} \iff \text{rank}[\mathbf{L}(\lambda_i^D) \mid \mathbf{v}_i^D] \neq \text{rank}[\mathbf{L}(\lambda_i^D)]$$

Il calcolo del rango di queste due matrici costituisce pertanto un metodo semplice e veloce per stabilire se con il sistema a disposizione sia possibile ottenere il comportamento voluto.

Se capita che l'autovettore desiderato \mathbf{v}_i^D non è assegnabile, ci si deve accontentare di avvicinarsi ad esso il più possibile, richiedendo un autovettore che, tra quelli all'interno dell'insieme di assegnabilità, si avvicini maggiormente alla situazione desiderata, accettando un errore più o meno grande ma inevitabile perché dovuto alle caratteristiche fisiche del sistema. Si dovrà quindi andare a ricercare la situazione migliore minimizzando la distanza Euclidea tra ciò che si può, e ciò che si vorrebbe assegnare.

Per trovare quale sia l'autovettore che più si avvicina a quello desiderato, rimanendo comunque all'interno delle possibilità del sistema, si deve ricercare quello che rende minima la differenza tra di essi. Si andrà poi quindi ad assegnare non più \mathbf{v}_i^D , ma \mathbf{v}_i^A tale che $\|\mathbf{v}_i^D - \mathbf{v}_i^A\|_2^2$ sia minima.

Assumendo che:

$$\mathbf{v}_i^A = \mathbf{L}(\lambda_i^D)\mathbf{z}^A$$

con \mathbf{z}^A vettore dei coefficienti che minimizza la distanza, ossia che realizza la proiezione ortogonale di \mathbf{V}_i^D in $\text{span}\{\mathbf{L}(\lambda_i^D)\}$:

$$\mathbf{z}^A = (\mathbf{L}_i^T \mathbf{L}_i)^{-1} \mathbf{L}_i^T \mathbf{v}_i^D$$

Ne deriva che il miglior autovettore che è possibile assegnare si può calcolare tramite:

$$\mathbf{v}_i^A = \mathbf{L}_i(\mathbf{L}_i^T \mathbf{L}_i)^{-1} \mathbf{L}_i^T \mathbf{v}_i^D$$

In alternativa si può anche ponderare con $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{v}_i^A = \mathbf{L}_i(\mathbf{L}_i^T \mathbf{\Omega} \mathbf{L}_i)^{-1} \mathbf{L}_i^T \mathbf{\Omega} \mathbf{v}_i^D$$

A questo punto \mathbf{v}_i^A rappresenta la miglior situazione che è possibile ottenere e che più assomiglia alle richieste iniziali. A differenza però di queste ultime che non potevano essere soddisfatte, \mathbf{v}_i^A rappresenta un autovettore secondo cui sicuramente il sistema potrà muoversi, proprio perché è stato calcolato imponendo la sua assegnabilità. Dovrà pertanto valere:

$$\text{rank}[\mathbf{L}(\lambda_i^D) \mid \mathbf{v}_i^A] = \text{rank}[\mathbf{L}(\lambda_i^D)]$$

Da quanto è stato ora spiegato si può quindi concludere affermando che nel scegliere il comportamento che si vuole imporre al sistema, ci si deve sempre scontrare con i limiti fisici della struttura stessa. Solo un piccolo insieme di richieste, dipendente dalle sue caratteristiche (fisiche ma anche di attuazione) potrà in realtà essere soddisfatto; e nel proseguo, ci si renderà conto, che soprattutto se si hanno a disposizione pochi mezzi e magari, limitati sarà molto difficile modificare il comportamento del sistema originale.

Secondo quanto illustrato finora, ci si può già rendere conto che per assegnare gli autovalori si hanno a disposizione due diverse possibilità: utilizzare un controllore esterno dimensionato con le classiche tecniche della teoria dei sistemi, il quale vada ad agire sul sistema per spostare i suoi poli, oppure modificare le proprietà del sistema in modo che gli autovalori risultanti siano quelli desiderati. Per assegnare gli autovettori è invece possibile agire in una sola direzione: l'unico modo che si ha è quello di intervenire modificando le caratteristiche fisiche del sistema in modo che cambi la sua matrice della dinamica, e con essa risultino diversi anche gli autovettori risultanti. Infatti le normali tecniche della teoria dei sistemi non tengono conto delle richieste sugli autovettori.

Tra l'altro il fatto di poter intervenire in un unico modo, fa capire quanto sia difficile ottenere buoni risultati e quanto siano limitati i margini di miglioramento effettivamente disponibili. Ci si deve quindi aspettare che i miglioramenti ottenibili siano in realtà di lieve entità, essendo di fatto le possibilità del sistema molto limitate. Chiedendo ad esso di cambiare in modo radicale il suo comportamento, difficilmente si riuscirà ad ottenere quanto desiderato. Molto più probabilmente invece, nella migliore delle ipotesi, al limite il sistema riuscirà ad assumere un comportamento più prossimo a quello atteso, ma comunque diverso.

2.5 Interpretazione del controllo attivo come modifica strutturale

Con la Structural Modification vengono valutate esclusivamente delle modifiche fisiche da fare sul sistema (modifiche passive). Si può però pensare di affiancare a questa tecnica il calcolo dei guadagni di un controllore attivo che dovranno essere tali da permettere di ottenere le prestazioni desiderate. Ai fini pratici, l'effetto che tale controllore avrà sul sistema è quindi assimilabile a quello che hanno le modifiche strutturali determinate con la Structural Modification; esso agisce infatti nello stesso modo in cui agiscono le variazioni strutturali, per cui i valori dei guadagni possono essere trattati come modifiche, e verranno indicate con il termine "modifiche attive", in quanto non fisiche, bensì ottenute tramite retroazione.

Nella letteratura sono presentati molti lavori in cui il controllo attivo è determinato tramite l'assegnazione degli autovalori e autovettori: ad esempio in [16], viene illustrato come un tale modo di agire dia la possibilità di ridistribuire l'energia di vibrazione. In [17], con tale approccio viene determinato un controllo in retroazione e viene fatto un esempio di applicazione in ambito aeronautico. Proprio in quest'ultimo ambito sono infatti particolarmente utilizzate le tecniche di controllo basate sull'assegnazione dell'autostruttura di un sistema. In [18] viene spiegato come sia possibile influire sul comportamento di un velivolo attraverso l'assegnazione delle sue forme modali.

Nel caso delle strutture, si può pensare che il controllore vada in un certo senso a compensare la differenza che c'è tra il sistema fisico reale e quello caratterizzato invece dalla forma modale desiderata: le differenze fisiche esistenti tra questi due, che prima venivano calcolate grazie alla Structural Modification ed eseguite materialmente, vengono ora colmate dall'azione attiva. I guadagni del controllore calcolati, dovranno quindi essere tali da permettere tale azione e potranno quindi essere visti e considerati come delle masse, rigidità e smorzamenti attivi aggiunti o tolti al sistema di partenza. Ecco perché vengono definite con il nome sopra indicato: esse si comportano a tutti gli effetti come se fossero delle modifiche da fare sul sistema, del tipo di quelle calcolate con la Structural Modification. Il loro effetto finale visibile dall'esterno sarà quindi uguale; la loro natura è invece totalmente differente. Da qui l'origine del loro nome.

Si parte anche questa volta come nel caso della Structural Modification dall'equazione differenziale che regola il comportamento del sistema:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (2.5.1)$$

Si immagini quindi che la forzante esterna abbia un'espressione del tipo:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_A\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_P\mathbf{x} \quad (2.5.2)$$

in cui \mathbf{K}_A e \mathbf{K}_P sono i guadagni del controllore rispettivamente di accelerazione e posizione, mentre \mathbf{x} rappresenta il grado di libertà del sistema. Ipotizzando come prima che nel modello, per semplicità, lo smorzamento sia nullo, è ragionevole non considerare nemmeno il guadagno di velocità.

Si osservi che è stata considerata anche la retroazione di accelerazione, come è spesso prassi in ambito di controllo attivo di strutture. Infatti spesso le variabili misurate sono delle oscillazioni (tramite accelerometri posizionati opportunamente) anziché spostamenti. Inoltre per strutture (sistemi privi di gradi di libertà di moto rigido) la condizione di controllabilità con retroazione di posizione e velocità è equivalente a quella con retroazione di accelerazione e velocità.

Con un cambio di notazione, si può anche esprimere la 2.5.2 nel modo seguente:

$$\mathbf{F} = -(\Delta\mathbf{M}_A\ddot{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{K}_A\mathbf{x})$$

in cui si può pensare che rispetto a prima siano solamente cambiati i simboli con cui si è deciso di indicare i guadagni di accelerazione e posizione. Sostituendo la nuova espressione della forzante esterna all'interno della 2.5.1 l'equazione in catena chiusa del sistema diviene:

$$M\ddot{x} + Kx = -(\Delta M_A \ddot{x} + \Delta K_A x)$$

si possono quindi portare a sinistra dell'uguale i guadagni del controllore e vedere che essi possono essere raggruppati insieme alla matrice di massa e a quella di rigidità e quindi considerati proprio come le modifiche calcolate con la Structural Modification:

$$(M + \Delta M_A) \ddot{x} + (K + \Delta K_A) x = 0 \quad (2.5.3)$$

I guadagni K_A e K_P che compaiono nella 2.5.2 possono essere pensati a meno di un segno, come masse e rigidità "attive" da aggiungere o togliere ai parametri strutturali del sistema reale.

Per convincersi maggiormente di questo fatto e averne una prova anche dal punto di vista matematico si confronti l'equazione 2.3.2 di pagina 15 ricavata per la Structural Modification, con l'equazione 2.5.3, ricavata qui, nel caso di modifiche attive: la struttura è identica e ciò sta a significare che anche i termini corrispondenti avranno il medesimo ruolo.

Un'altro vantaggio di questo tipo di modifiche sta proprio nella flessibilità che offrono: mantenendo sempre il sistema nella configurazione originale è possibile soddisfare anche a molte esigenze diverse e mutabili, semplicemente calcolando dei guadagni differenti, cosa che ovviamente le modifiche passive non danno la possibilità di fare prevedendo esse un cambiamento definitivo delle caratteristiche del sistema.

Inoltre esse dipendono da tipo di retroazione che si decide di fare (di posizione di velocità o di accelerazione) e quindi dalla disponibilità di tali grandezze derivante da una loro misura o da una stima.

Da notare che questo tipo di modifiche dipendono oltretutto dalle variabili attuate, per cui il loro numero è legato al numero di forze esterne che agiscono sul sistema. Questo determina una sostanziale differenza: ΔM_A e ΔK_A sono matrici asimmetriche, aventi solo alcune entrate non nulle. Nella fattispecie solo i termini legati alle variabili attuate (o misurate) sono diversi da zero.

Questo, se da una parte "rilassa" il vincolo di simmetria delle modifiche passive, consentendo di ottenere risultati molto rilevanti (ad esempio se il sistema è controllabile, è teoricamente possibile ottenere qualunque insieme di poli), dall'altra può portare all'instabilità.

Queste differenze tra i due approcci, rendono quindi interessante l'idea di utilizzarle in modo sinergico, secondo un approccio di Structural Modification in cui i guadagni del controllo attivo sono pensati e trattati come delle vere e proprie modifiche. Si può quindi parlare di controllo ibrido attivo/passivo.

L'idea di controllo ibrido è stata recentemente investigata dal Prof. Ouyang (Liverpool). Un approccio di questo tipo offre la possibilità di calcolare due tipi di modifiche, una dovuta alla reale manomissione del sistema fisico, ed una derivante dall'azione esterna di un controllore, le quali al limite possono anche agire contemporaneamente.

Un'ulteriore differenza tra questi due tipi di modifiche risiede nel fatto che mentre quelle passive per essere realizzabili devono rimanere entro certi limiti, quelle attive, essendo di fatto dei guadagni che possono teoricamente assumere qualsiasi valore, non devono rispettare alcun vincolo e sono pertanto molto più libere. Nella realtà dei fatti però, anche le modifiche attive potrebbero in verità essere soggette a dei vincoli, puramente pratici come ad esempio i limiti che derivano dall'eventuale saturazione dell'azione di controllo, oppure legati al fatto che all'aumentare dei guadagni, in genere si assiste ad una diminuzione della robustezza del sistema controllato.

Grazie a questa combinazione di modifiche passive ed attive è oltretutto possibile agire seguendo diverse filosofie: si può ad esempio cercare di ottenere il massimo delle prestazioni dalle modifiche passive, lasciando poi il compito alle modifiche attive di intervenire compensando quanto non ancora ottenuto.

In alternativa si può però anche procedere in un modo per certi versi contrario: siccome le modifiche attive sono libere da vincoli e sicuramente più facilmente implementabili e flessibili rispetto a quelle passive, si può pensare di dar loro un peso numericamente inferiore (e quindi un'importanza maggiore), introducendo anche in questo caso un operatore di regolarizzazione che abbia lo stesso ruolo della matrice $\mathbf{\Omega}_x$ descritta nel paragrafo 2.3, e che permetta di fatto di preferirle alle modifiche passive. In questo modo, se proprio è necessario modificare fisicamente il sistema lo si fa, altrimenti si cerca di ottenere le prestazioni desiderate esclusivamente dall'azione del controllore cercando di sfruttare al massimo le sue potenzialità.

2.6 Criterio di valutazione dei risultati

A conclusione di questo capitolo, dopo aver illustrato alcune tecniche che possono essere utilizzate per modificare gli autovalori e gli autovettori della matrice della dinamica di un sistema, è doveroso fornire anche uno strumento necessario a valutare l'efficacia di tali soluzioni. Visto che lo scopo è quello di far sì che autovettori ed autovalori assomiglino il più possibile a quelli desiderati, o in altre parole, che vi sia un avvicinamento delle forme modali a quelle imposte, per valutare se effettivamente i metodi di modifica strutturale che si è deciso di implementare hanno portato buoni frutti, è necessario un indice che quantifichi la distanza tra l'autovettore desiderato e l'autovettore del sistema, così da poter fare un confronto tra la situazione precedente e quella successiva alle modifiche. Una volta che il sistema è stato modificato, si vorrebbe infatti che gli autovettori del nuovo sistema coincidano con quelli desiderati o, se non altro, si avvicinino ad essi, più di quanto non lo facessero prima.

Per valutare quanto le modifiche calcolate abbiano prodotto un avvicinamento agli obiettivi, è possibile utilizzare un metodo geometrico basato sulla formula del prodotto scalare tra due vettori.

Se infatti sono dati due vettori, \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , il loro prodotto scalare è definito come segue:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \cos(\widehat{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2})$$

Attraverso la formula inversa si può quindi risalire al coseno dell'angolo tra i due vettori:

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}) = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|} \quad (2.6.1)$$

Come detto, il metodo appena illustrato è stato utilizzato per quantificare la differenza tra autovettori. Infatti, essendo essi definiti a meno di una costante moltiplicativa, è possibile calcolare il coseno dell'angolo (si supponga θ) tra l'autovettore desiderato \mathbf{v}^D e l'autovettore del sistema \mathbf{v} prima delle modifiche applicando ad essi la formula introdotta in 6.3.7:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v}^D \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}^D\| \|\mathbf{v}\|}$$

e confrontarlo con il coseno tra lo stesso autovettore desiderato e l'autovettore dopo le modifiche \mathbf{v}_{mod} , calcolato ancora una volta nello stesso modo:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v}^D \cdot \mathbf{v}_{mod}}{\|\mathbf{v}^D\| \|\mathbf{v}_{mod}\|}$$

Da questo confronto è possibile determinare se le cose sono migliorate e di quanto. Se l'obiettivo è stato raggiunto (cosa probabilmente molto difficile) l'autovettore del sistema modificato coinciderà con l'autovettore desiderato e quindi il coseno tra di essi sarà unitario.

Molto più probabilmente invece, anche se non si riuscirà ad ottenere esattamente quanto richiesto, si avrà comunque un miglioramento della situazione, apprezzabile da un aumento del coseno tra l'autovettore desiderato e l'autovettore dopo le modifiche rispetto allo stesso coseno calcolato prima delle modifiche.

Quindi valutando l'aumento del coseno si può capire se le modifiche sono state utili o meno.

Un indice di valutazione di questo tipo viene spesso chiamato MAC (modal assurance criteria) e permette di dare un'idea immediata e globale sull'effetto che le modifiche hanno avuto sulle forme modali del sistema. Si noti come non sia corretto calcolare semplicemente la differenza $\|\mathbf{v}^D - \mathbf{v}_{mod}\|$ visto che gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa arbitraria.

Quello appena introdotto rappresenta il criterio che è stato utilizzato per determinare se le modifiche fatte al sistema sono state utili o meno, ma potrebbe essere applicato anche per calcolare il coseno tra il miglior autovettore ottenibile con e senza modifiche e l'autovettore desiderato. Questo sarebbe utile per capire se almeno nella situazione ottimale, ci si avvicina a quella desiderata o se invece si rimane comunque abbastanza lontani da ciò che si vorrebbe ottenere.

Per valutare invece se anche l'obiettivo riguardante l'autovalore è stato raggiunto è sufficiente fare un semplice confronto tra numeri equiparano i valori assunti prima e dopo le modifiche. Essendo infatti gli autovalori di un sistema delle quantità scalari non è necessario ricorrere a metodi geometrici o di qualche altra natura.

In questo caso è quindi lecito calcolare la differenza $\|\lambda^D - \lambda_{mod}\|$, o in alternativa $\|f^D - f_{mod}\|$

Il caso teorico del sistema a tre masse

3.1 Introduzione

In questo capitolo verranno applicate ad un sistema di prova le tecniche di modifica strutturale attiva e passiva già introdotte nel capitolo precedente così da illustrare, con tale esempio, la procedura e i vari passaggi da seguire per impostare e risolvere il relativo problema. Ci si potrà così rendere conto dell'effettiva efficacia di questi metodi nell'assegnare ad un sistema una determinata forma modale desiderata.

Visto che il metodo della Structural Modification permette di calcolare sia modifiche passive ma anche modifiche attive, verrà fatto un confronto tra le due tipologie e, applicandole separatamente, si potrà stabilire su quali aspetti le une abbiano più influenza rispetto alle altre e decretare quindi quale sia in base al caso, la miglior strategia con cui intervenire. In realtà comunque, ci si renderà subito conto che utilizzandole congiuntamente è possibile ottenere il miglior risultato in quanto si possono sfruttare i punti di forza di entrambe.

Il sistema considerato non ha grande rilevanza applicativa, ma data la sua struttura abbastanza semplice, ma comunque completa, viene molto spesso utilizzato nella letteratura per testare e validare i metodi proposti in ambito di Structural Modification. Il fatto che le sue matrici di massa e rigidezza siano simmetriche, garantisce che non intervengano problematiche di natura differente da quella che si sta analizzando, e quindi esso può rappresentare una buona base su cui lavorare per avere un primo approccio con la tecnica che si desidera analizzare.

L'utilizzo iniziale di un sistema semplice è consigliato anche per evitare di ottenere risultati inaspettati, visto che sviluppando la Structural Modification si andrà di fatto a fare un controllo attivo del sistema, in un modo inusuale rispetto a quanto si fa normalmente applicando le classiche tecniche della teoria dei sistemi. Infatti, anche le modifiche attive (che di fatto sono i guadagni del controllore, i quali di solito vengono calcolati con altri metodi a partire dal valore che si vuole che i poli del sistema assumano) vengono calcolate riformulando a dovere la teoria della Structural Modification.

Una volta che il problema viene impostato, per risolverlo sono disponibili diversi modi tra cui quelli tradizionali che fanno ricorso alle regole del calcolo matriciale, o con tecniche di ottimizzazione convessa attraverso le quali è possibile ricercare il minimo di una funzione.

E' necessario quindi esprimere il problema della Structural Modification in funzione delle modifiche che si vogliono via via calcolare (attive, passive o attive più passive) e poi ricercare il minimo valore di tali modifiche che permetta di verificare il problema impostato. In questa operazione, l'utilizzo di un software di calcolo come Matlab può essere ovviamente molto comodo, e sfruttando i comandi da esso messi a disposizione è possibile anche fare alcune ipotesi sul valore che la soluzione deve assumere.

Anche se l'efficacia verrà comunque provata, si vedrà che è molto difficile riuscire ad ottenere quanto desiderato soprattutto in situazioni fortemente sottoattuate. Infatti, se come in questo caso ci si pone in una situazione fortemente vincolante e da ritenersi quindi molto particolare, con tali tecniche si riesce ad ottenere solo un vantaggio minimo, visto che si ha modo di intervenire solo su alcuni tra tutti gradi di libertà che si vogliono invece controllare, e che sono ammesse modifiche molto limitate. Rilassando questi vincoli si potrebbero ottenere risultati molto migliori soprattutto utilizzando un maggior numero di forze esterne.

3.2 Sistema a tre masse: costruzione del modello

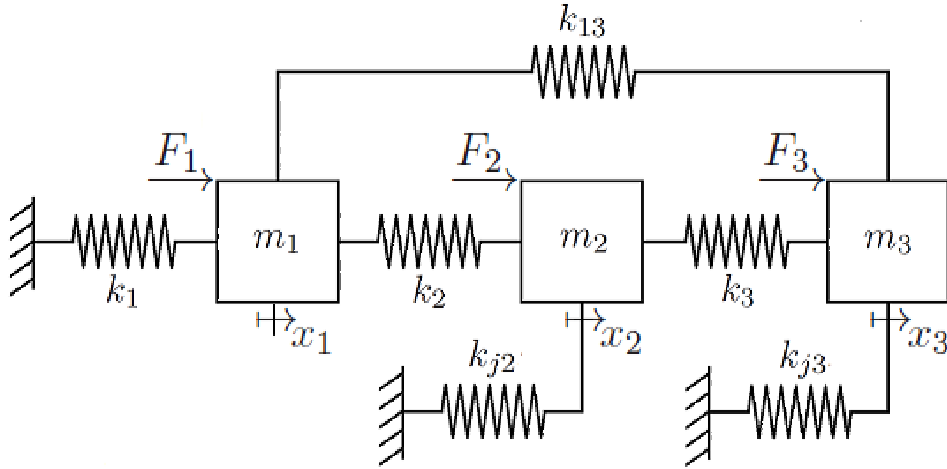


Fig. 3.1: Sistema a tre masse.

Il primo sistema che è stato analizzato è quello rappresentato in 3.1, costituito da tre masse collegate tra di loro ed a telaio attraverso sei molle i cui valori sono riportati nella tabella 3.1.

Si suppongano nulli gli smorzamenti.

Essendo abbastanza classico e relativamente semplice, tale sistema è stato utilizzato come strumento di prova per sviluppare la teoria e prendere confidenza con le varie tecniche dalle quali si è partiti per svilupparne delle altre. Per questo motivo non sono state fatte né simulazioni né prove sperimentali ma solamente uno studio teorico che permettesse di fare delle considerazioni sulla validità dell'applicazione dei metodi di modifica strutturale. Tutta la teoria sviluppata in questa prima parte è stata poi ripresa, ampliata e applicata ad un secondo sistema più interessante dal punto di vista applicativo.

Si indichino con x_1 , x_2 e x_3 gli spostamenti orizzontali delle tre masse. Su ognuna di esse agirà un sistema di forze proporzionali allo spostamento, dovute all'azione elastica esercitata dalle molle e determinate quindi dalla legge di Hooke. Ipotizzando inoltre che su ognuna delle tre masse agisca una forza esterna (F_i), le corrispondenti equazioni di equilibrio saranno:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) - k_{13} (x_3 - x_1) - F_1 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + k_{j2} x_2 - k_3 (x_3 - x_2) - F_2 = 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_3 (x_3 - x_2) + k_{j3} x_3 + k_{13} (x_3 - x_1) - F_3 = 0 \end{cases}$$

le quali indicano appunto che per l'equilibrio delle tre masse, la somma algebrica delle forze che agiscono su ognuna di esse deve essere nulla.

Per evitare il fastidio di manipolare tre equazioni distinte, è possibile raggrupparle insieme ed esprimerle in forma matriciale dopo aver portato a destra dell'uguale le tre forze che agiscono sulle masse dall'esterno:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_{13} & -k_2 & -k_{13} \\ -k_2 & k_2 + k_{j2} + k_3 & -k_3 \\ -k_{13} & -k_3 & k_3 + k_{j3} + k_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (3.2.1)$$

m_1	2kg
m_2	5kg
m_3	8kg
k_1	500kN/m
k_2	65kN/m
k_3	50kN/m
k_{j2}	500kN/m
k_{j3}	100kN/m
k_{13}	20kN/m

Tab. 3.1: Parametri del sistema a tre masse.

In questa equazione si identifica il vettore degli spostamenti $\mathbf{x}(t)$ e quello delle accelerazioni $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ delle tre masse:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}$$

Le matrici che premoltiplicano tali vettori sono rispettivamente le matrici di massa \mathbf{M} e di rigidità \mathbf{K} del sistema:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_{13} & -k_2 & -k_{13} \\ -k_2 & k_2 + k_{j2} + k_3 & -k_3 \\ -k_{13} & -k_3 & k_3 + k_{j3} + k_{13} \end{bmatrix}$$

Il vettore alla destra del simbolo di uguaglianza raggruppa invece le tre forzanti esterne che si è ipotizzato agire su ognuna delle tre masse distinte.

Ragionando in termini più generali, spesso nella 3.2.1 si introduce una matrice (di solito indicata con la lettera “ \mathbf{B} ”), che premoltiplica il vettore delle forze esterne, ed ha lo scopo di tener conto del modo in cui esse agiscono.

Nella fattispecie essa sarà costituita da una serie di “1” posizionati opportunamente secondo la configurazione del sistema e quindi secondo i punti di applicazione delle forze: in base al grado di libertà su cui agisce la forza, nella riga della matrice ad esso corrispondente sarà posizionato l’elemento unitario.

Nella costruzione del modello del caso in esame si è ipotizzato che su ognuna delle tre masse agisca una forza distinta, per cui volendo inserire anche la matrice \mathbf{B} , essa dovrà essere pari alla matrice identica:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecco quindi che la 3.2.1 può essere riscritta più elegantemente come segue:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_{13} & -k_2 & -k_{13} \\ -k_2 & k_2 + k_{j2} + k_3 & -k_3 \\ -k_{13} & -k_3 & k_3 + k_{j3} + k_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (3.2.2)$$

Normalmente la struttura delle forze esterne che agiscono sul sistema è quella tipica di una combinazione lineare delle variabili libere e delle loro derivate a mezzo di costanti che rappresentano sostanzialmente i guadagni del sistema di attuazione utilizzato. Ognuna delle tre forze può quindi essere espressa nella forma seguente:

$$F_i = K_{i1}^A \ddot{x}_1 + K_{i2}^A \ddot{x}_2 + K_{i3}^A \ddot{x}_3 + K_{i1}^D \dot{x}_1 + K_{i2}^D \dot{x}_2 + K_{i3}^D \dot{x}_3 + K_{i1}^P x_1 + K_{i2}^P x_2 + K_{i3}^P x_3$$

Con K_{i1}^A , K_{i2}^A e K_{i3}^A vengono indicati i guadagni di accelerazione; con K_{i1}^D , K_{i2}^D e K_{i3}^D quelli di velocità, mentre con K_{i1}^P , K_{i2}^P e K_{i3}^P quelli di posizione.

Ovviamente non tutti e tre questi tipi di guadagni sono necessariamente sempre presenti nell'espressione delle forze esterne; questo dipende in realtà dal tipo di controllore utilizzato (P, piuttosto che PD, ecc) e ciò determina la presenza di uno piuttosto che dell'altro. Ad esempio nel caso in esame si è ipotizzato che la forza esterna fosse proporzionale solamente ai tre spostamenti ed alle relative accelerazioni, non alla velocità, essendo interessati alle frequenze naturali di un sistema non smorzato.

$$F_i = K_{i1}^A \ddot{x}_1 + K_{i2}^A \ddot{x}_2 + K_{i3}^A \ddot{x}_3 + K_{i1}^P x_1 + K_{i2}^P x_2 + K_{i3}^P x_3$$

Tra le diverse analisi proposte è stata anche ipotizzata la presenza di un'unica forzante esterna agente sulla massa m_1 ed avente la forma sopra riportata. La matrice \mathbf{B} considerata in tali esempi avrà quindi la forma:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tutte le considerazioni in un primo momento sono quindi state fatte su questo caso. Successivamente, grazie ad opportune modifiche della matrice \mathbf{B} è stato però anche sviluppato il caso in cui ci sia la possibilità di poter applicare più forze, ed in diversi modi.

3.2.1 Analisi del sistema originale

L'equazione 3.2.2 di pagina 31, rappresenta il modello definitivo del sistema a cui si vuole imporre una determinata forma modale, e permette di fare diverse considerazioni su di esso, tra le quali a questo punto la più significativa riguarda i valori degli autovettori e autovalori della matrice della dinamica. Ora, per prima cosa si può controllare se il sistema originale offre già le caratteristiche di comportamento richieste.

Si deve quindi innanzitutto calcolare la matrice della dinamica

$$\mathbf{D} = (\mathbf{M}^{-1})\mathbf{K}$$

e di essa calcolare poi autovettori e autovalori per stabilire se questi coincidono già con quelli richiesti.

Il software Matlab mette a disposizione la funzione *eig* che può aiutare in questa operazione.

Nel caso qui presentato i tre autovettori sono rispettivamente:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} 0.0488 \\ 0.1031 \\ 0.9935 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} -0.1823 \\ -0.9810 \\ 0.0659 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{Bmatrix} 0.9972 \\ -0.0749 \\ -0.0074 \end{Bmatrix}$$

per comodità di rappresentazione, e ciò sarà anche utile più avanti per rendersi conto meglio di quello che sta succedendo ai valori di tali grandezze, è conveniente normalizzare gli autovettori rispetto alla loro componente di valore assoluto maggiore. Dopo questa operazione i tre precedenti diventano:

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \begin{Bmatrix} 0.0492 \\ 0.1038 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{v}}_2 = \begin{Bmatrix} 0.1859 \\ 1.0000 \\ -0.0671 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{v}}_3 = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -0.0751 \\ -0.0074 \end{Bmatrix}$$

in cui il fatto che l'autovettore sia normalizzato viene evidenziato sovrapponendo al simbolo corrispondente una linea. I tre autovalori associati sono invece:

$$\lambda_1 = 20479 \quad \lambda_2 = 121260 \quad \lambda_3 = 295020$$

corrispondenti alle tre frequenze:

$$f_1 = 22.7756Hz \quad f_2 = 55.4205Hz \quad f_3 = 86.4457Hz$$

3.2.2 Assegnazione di un modo con una forza di controllo

L'obiettivo che si ha, è quello di imporre un ben determinato valore agli autovettori e autovalori della matrice della dinamica, stabilito dalle esigenze del caso.

Per una prima verifica della validità dei metodi, si è deciso inizialmente di utilizzare il test-case più semplice possibile imponendo al sistema una sola forma modale attraverso la richiesta di un determinato valore per il primo autovettore cioè quello associato all'autovalore più piccolo. Si supponga ad esempio che l'autovettore desiderato sia:

$$\mathbf{v}_1^D = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Esso rappresenta un modo in cui tutte le masse si muovono della stessa ampiezza ed in fase.

Siccome in questo caso si sta facendo una richiesta su una sola forma modale del sistema, nessuna assunzione viene fatta sui valori che devono assumere gli altri due autovettori. Allo stesso modo, anche per gli autovalori è stata fatta un'ipotesi solamente sul primo; mentre gli altri due non devono soddisfare alcuna richiesta specifica. La richiesta che è stata fatta sul primo autovalore è quella di mantenere la situazione originale, cioè viene stabilito che il primo autovalore desiderato rimanga uguale a quello della situazione di partenza: $f_1^D = 22.7756Hz$

Una volta accertato che le caratteristiche del sistema originale sono diverse da quelle desiderate, può essere utile farsi anche una prima idea di quale sia a grandi linee l'entità della differenza, e, a seconda che questa sia grande o piccola, si può cercare di "indovinare" se l'autovettore desiderato sarà assegnabile o meno.

Per averne comunque la certezza assoluta, si può sfruttare il metodo del confronto tra il rango della matrice $[\mathbf{L}(\lambda_i^D)]$ e quello della stessa matrice a cui viene affiancato l'autovettore desiderato $[\mathbf{L}(\lambda_i^D) \mid \mathbf{v}_i^D]$, descritto nel paragrafo 2.4.3 a pagina 20. Per il caso in

esame, in cui come detto inizialmente si considera una sola forza agente sulla massa m_1 , risulta proprio che i due valori del rango sono diversi, a conferma che comunque, per il sistema che si ha a disposizione, l'autovettore desiderato non è assegnabile.

Questo di solito capita di frequente nel caso in cui si voglia che il sistema assuma un comportamento molto diverso da quello naturale: infatti essendo molto limitato nelle sue possibilità (soprattutto se viene utilizzata un'unica forzante esterna) è logico che se la differenza è grande, esso non riuscirà mai a colmarla da solo. E' utile ricordare infatti che di solito il sistema che si ha a disposizione offre un range abbastanza limitato di comportamenti che può assumere. Le sue caratteristiche fisiche impongono dei limiti contro cui ci si deve continuamente scontrare, e che generalmente sono tali da determinare un insieme di autovettori assegnabili assai limitato.

Visto che l'autovettore non è assegnabile, sarà necessario intervenire attivamente o passivamente sul sistema applicando i due metodi visti nel precedente capitolo: Structural Modification e calcolo delle modifiche attive.

Anche per il caso in studio, una volta che è stata stabilita la necessità di intervenire sul sistema per cercare di far coincidere le sue forme modali con quelle desiderate, basandosi sul modello appena ricavato (equazione 3.2.2 a pagina 31) si sono applicati i metodi di modifica strutturale e calcolo dei guadagni del controllore.

Per tale sistema si è cercato di imporre l'autovettore desiderato e il relativo autovalore associato sfruttando la possibilità di modificarlo sia attivamente sia passivamente. Per completezza, in primo luogo si sono considerate solo modifiche passive, poi solo modifiche attive e come terzo caso sono state considerate entrambe, agenti contemporaneamente valutando l'efficacia di ogni singola soluzione. Si è poi fatto un confronto tra i tre diversi casi (imponendo lo stesso autovettore) per vedere quale dei tre approcci sia il migliore. Infine è stata fatta una verifica per vedere se intervenendo sul sistema con più di una forza esterna, si riesce ad ottenere una soluzione soddisfacente.

3.3 Modifiche passive

Viene ora qui di seguito applicato il metodo della Structural Modification (passiva) al sistema considerato, per calcolare le modifiche fisiche necessarie a ricondurre il suo comportamento al caso desiderato. A partire dal modello del sistema (equazione 3.2.2 di pagina 31) siccome in questo caso si stanno considerando solo modifiche passive, i guadagni del controllore non saranno presenti nella formulazione del sistema modificato.

Ripercorrendo la teoria della Structural Modification si avranno quindi due matrici $\Delta\mathbf{M}$ e $\Delta\mathbf{K}$ che aggiunte rispettivamente alle matrici di massa e di rigidità del sistema, permettono di esprimere il problema agli autovalori del sistema modificato come segue:

$$(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}) \ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

ed anche il corrispondente problema agli autovalori e autovettori dell'analisi modale:

$$\omega^2 (\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}) \mathbf{u} = (\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}) \mathbf{u}$$

Si osservi come la definizione di \mathbf{B} ed \mathbf{F} non intervenga nella modifica passiva.

La struttura delle matrici $\Delta\mathbf{M}$ e $\Delta\mathbf{K}$, riprende in tutto e per tutto quella delle matrici di massa \mathbf{M} e di rigidità \mathbf{K} del sistema, per cui le modifiche passive occupano nelle prime gli stessi posti che i valori originali occupano nelle seconde.

Nelle due precedenti equazioni, la matrice $\Delta\mathbf{M}$ sarà quindi:

$$\Delta\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \Delta m_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_3 \end{bmatrix}$$

mentre la matrice $\Delta\mathbf{K}$ sarà:

$$\Delta\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_{13} & -\Delta k_2 & -\Delta k_{13} \\ -\Delta k_2 & \Delta k_2 + \Delta k_{j2} + \Delta k_3 & -\Delta k_3 \\ -\Delta k_{13} & -\Delta k_3 & \Delta k_3 + \Delta k_{j3} + \Delta k_{13} \end{bmatrix}$$

Volendo imporre il generico autovettore

$$\mathbf{v}^D = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

si possono calcolare le matrici \mathbf{U}_m ed \mathbf{U}_k tali che $\Delta\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{U}_m\Delta\mathbf{m}$ e

$\Delta\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{U}_k\Delta\mathbf{k}$ (in cui \mathbf{u} corrisponde al generico autovettore che si vuole imporre \mathbf{v}^D , appena introdotto):

$$\begin{bmatrix} \Delta m_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta m_1 U_1 \\ \Delta m_2 U_2 \\ \Delta m_3 U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \end{Bmatrix}$$

da cui risulta che:

$$\mathbf{U}_m = \begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 \end{bmatrix}$$

e il vettore $\Delta\mathbf{m}$ che contiene le modifiche di massa da applicare al sistema è:

$$\Delta\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \end{Bmatrix}$$

Per quanto riguarda \mathbf{U}_k si ha:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_{13} & -\Delta k_2 & -\Delta k_{13} \\ -\Delta k_2 & \Delta k_2 + \Delta k_{j2} + \Delta k_3 & -\Delta k_3 \\ -\Delta k_{13} & -\Delta k_3 & \Delta k_3 + \Delta k_{j3} + \Delta k_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{Bmatrix} \Delta k_1 U_1 + \Delta k_2 U_1 + \Delta k_{13} U_1 - \Delta k_2 U_2 - \Delta k_{13} U_3 \\ -\Delta k_2 U_1 + \Delta k_2 U_2 + \Delta k_{j2} U_2 + \Delta k_3 U_2 - \Delta k_3 U_3 \\ -\Delta k_{13} U_1 - \Delta k_3 U_2 + \Delta k_3 U_3 + \Delta k_{j3} U_3 + \Delta k_{13} U_3 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} U_1 & U_1 - U_2 & 0 & 0 & 0 & U_1 - U_3 \\ 0 & U_2 - U_1 & U_2 - U_3 & U_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 - U_2 & 0 & U_3 & U_3 - U_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_3 \\ \Delta k_{j2} \\ \Delta k_{j3} \\ \Delta k_{13} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

da cui si deduce che la matrice \mathbf{U}_k è:

$$\mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} U_1 & U_1 - U_2 & 0 & 0 & 0 & U_1 - U_3 \\ 0 & U_2 - U_1 & U_2 - U_3 & U_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 - U_2 & 0 & U_3 & U_3 - U_1 \end{bmatrix}$$

mentre il vettore $\Delta \mathbf{k}$ che contiene le modifiche di rigidità è:

$$\Delta \mathbf{k} = \begin{Bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_3 \\ \Delta k_{j2} \\ \Delta k_{j3} \\ \Delta k_{13} \end{Bmatrix}$$

Con le matrici \mathbf{U}_m ed \mathbf{U}_k è ora possibile calcolare la matrice $\mathbf{U} = [\omega^2 \mathbf{U}_m \mid \mathbf{U}_K]$, ed il vettore $\mathbf{b} = [\mathbf{K}\mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{u}]$ che sostituiti nell'equazione:

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.3.1)$$

permettono di ottenere il vettore delle incognite \mathbf{x} , il quale esprime le modifiche passive da apportare al sistema per ottenere l'autovettore desiderato:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \\ \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_3 \\ \Delta k_{j2} \\ \Delta k_{j3} \\ \Delta k_{13} \end{Bmatrix}$$

Il sistema lineare espresso nell'equazione 3.3.1 rappresenta il problema di interesse. La sua soluzione permette infatti di calcolare le modifiche da fare sul sistema e che sperabilmente permettono di ottenere gli autovettori e gli autovalori desiderati.

I primi tre termini sono le quantità fisiche di massa (in kg) che è necessario aggiungere o

togliere alle tre rispettive masse del sistema rappresentate nella figura 3.1 di pagina 30. Gli altri sei elementi portano invece l'informazione su quanto è necessario modificare la rigidità delle molle raffigurate nella medesima figura.

Come già introdotto nel paragrafo 3.2.1 nel primo esempio analizzato si è deciso di testare il metodo della Structural Modification per assegnare alla prima forma modale del sistema l'autovettore

$$\mathbf{v}^D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e l'autovalore

$$\lambda^D = \lambda_1 = 20479$$

nessuna valore viene invece imposto alle altre due coppie autovalore autovettore. Con questa ipotesi, un primo modo per calcolare il vettore delle incognite consiste nell'invertire semplicemente l'equazione 3.3.1 ed ottenere quindi:

$$\mathbf{x} = \text{pinv}(\mathbf{U})\mathbf{b}$$

dove $\text{pinv}(\mathbf{U})$ indica la pseudoinversa della matrice \mathbf{U} .

Come spiegato nel paragrafo 2.3.3 a pagina 15 questo modo di agire non è però il migliore in quanto non viene fatta alcuna ipotesi riguardo la fattibilità delle modifiche così calcolate. E in effetti così facendo risultano proprio delle modifiche che possono essere considerate troppo elevate, a conferma di quanto appena detto.

Come riportato di seguito, si vede infatti che per m_1 ed m_2 , gli aumenti di massa suggeriti sono eccessivi rispetto ai reali valori (la soluzione stabilisce che si debba aggiungere una massa di circa venti kg alle due già esistenti che sono dell'ordine di qualche kg).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 22.4158 \\ 19.4158 \\ -3.1168 \\ 0.0011 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0008 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questa soluzione rende bene l'idea su quanto la situazione iniziale fosse lontana da quella desiderata: se per ottenere \mathbf{v}^D è necessario modificare così abbondantemente il sistema, significa che le caratteristiche originali erano tutt'altro che adatte alle esigenze che si hanno.

Si capisce che, anche se teoricamente questa operazione potrebbe essere lecita, nella realtà potrebbe comportare grosse problematiche.

La rigidità invece, secondo quanto stabilito dalla soluzione, non deve pressochè essere toccata. Si può affermare tra l'altro che queste modifiche sono anche "scomode" da un punto di vista realizzativo: esse suggeriscono di intervenire prevalentemente sulla massa, che a conti fatti dal punto di vista pratico, è spesso la cosa più difficile da modificare soprattutto quando si tratta di diminuirla. Tale risultato non può quindi essere considerato accettabile.

Molto più elegante è andare ad imporre dei limiti superiori e inferiori in modo che i valori calcolati rientrino sempre in un range che garantisca la fattibilità delle modifiche. Si andrà

pertanto a minimizzare il problema quadratico presentato nella 2.3.4.

Per risolvere tale problema (e tenere quindi conto anche dei limiti di fattibilità delle modifiche) si è utilizzata la funzione *lsqlin* di Matlab la quale ricerca il minimo della funzione specificata tenendo presente anche dei limiti superiori ed inferiori che si vogliono imporre alla soluzione. In questo caso calcola i valori delle modifiche che permettono di approssimare il più possibile l'equazione:

$$Ux - b = 0 \quad (3.3.2)$$

Per la definizione di un test case ragionevole, si è imposto che l'aumento massimo delle rigidezze sia pari al loro valore nominale (massimo aumento ammissibile pari al 100%). Per i limiti inferiori invece, si è deciso che le massime diminuzioni ammissibili siano pari a metà dei valori di partenza. Ciò renderebbe molto semplice la realizzazione delle modifiche: ammesso che il sistema reale abbia una struttura simile a quello rappresentato in figura 3.1 a pagina 30, ponendo in serie alla molla già esistente un'altra di uguale valore (molto probabilmente già disponibile a magazzino), la rigidezza complessiva risulterebbe essere proprio la metà di quella iniziale.

Per quanto riguarda i limiti imposti alle modifiche di massa, è possibile fare un discorso differente: come già accennato, da un punto di vista pratico una modifica di massa troppo elevata (soprattutto in senso negativo) potrebbe risultare anche molto problematica. In più resta comunque vero che non è possibile togliere più massa al sistema di quanta esso stesso ne abbia effettivamente, per cui teoricamente i valori massimi dei limiti inferiori devono essere pari al 100% dei valori iniziali.

Comunque in questo caso i limiti sono stati scelti più che altro per far sì che le eventuali variazioni da eseguire siano in ogni caso abbastanza piccole. Valori accettabili potrebbero essere ad esempio $1kg$ per la prima massa, $2kg$ per la seconda e $3kg$ per la terza.

Tenendo conto dei reali valori di masse e rigidezze, e dell'intervallo entro cui si deve rimanere, la soluzione x deve essere tale che:

$$\left\{ \begin{array}{c} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -250e3 \\ -32.5e3 \\ -25e3 \\ -250e3 \\ -50e3 \\ -10e3 \end{array} \right\} \leq \left\{ \begin{array}{c} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \\ \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_3 \\ \Delta k_{j2} \\ \Delta k_{j3} \\ \Delta k_{13} \end{array} \right\} \leq \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 500e3 \\ 65e3 \\ 50e3 \\ 500e3 \\ 100e3 \\ 20e3 \end{array} \right\}$$

Tali limiti risultano molto restrittivi in relazione alla soluzione esatta del problema e per questo è da attendersi che il risultato ottenuto non possa avvicinarsi molto a quello desiderato. Con questi limiti, i risultati numerici che si sono ottenuti sono i seguenti:

$$x = \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 500000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100000 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Si nota che le modifiche di massa così calcolate sono uguali ai valori massimi ammessi (nel primo e nel terzo caso si dovrà togliere la massima massa consentita, nel secondo invece

si dovrà aggiungere). Siccome neanche una diminuzione o un aumento pari alla maggior quantità ammessa dai limiti è evidentemente sufficiente ad ottenere il risultato voluto, e non essendo possibile allo stesso tempo eseguire una modifica ancor più elevata, questa seconda soluzione stabilisce finalmente, di intervenire anche sulla rigidezza. Anche questo secondo metodo, comunque, può in realtà essere migliorato con l'aggiunta del termine di regolarizzazione introdotto nella 2.3.5.

Senza togliere di generalità in questo ultimo caso si assume che la matrice Ω_x (usata per ponderare in diverso modo le varie modifiche) nel caso in esame sia pari alla matrice identica (uguale peso per tutte le modifiche).

Anche questa terza versione (regolarizzata) del problema viene risolta con la funzione *lsqlin*. E' necessario però, prima di tutto operare una rielaborazione in modo che il problema, prima espresso nella forma dell'eq.2.3.5, venga ora espresso nella forma riportata in 2.3.4.

Per fare ciò basta raggruppare le matrici U ed Ω_x come suggerito nell'uguaglianza seguente:

$$\|Ux - b\|_2^2 + \delta \|\Omega_x x\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} U \\ \sqrt{\delta} \Omega_x \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|U_{prim} x - b_{prim}\|_2^2$$

in cui si vede che l'ultimo termine è proprio nella forma più adatta ad essere risolto con la funzione *lsqlin*.

Ovviamente valgono:

$$U_{prim} = \begin{bmatrix} U \\ \sqrt{\delta} \Omega_x \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b_{prim} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il risultato ottenuto con quest'ultimo metodo è il seguente:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 219282 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alla luce di quanto detto è chiaro che la strada più corretta e completa da seguire per garantire un senso ai risultati è la terza. In questo modo infatti, si ha sempre la sicurezza che le modifiche suggerite siano effettivamente realizzabili, e che i risultati sono sensati.

3.3.1 Analisi dei risultati numerici

Una volta che sono state calcolate, è possibile applicare al sistema le modifiche per vedere se esse gli consentono di comportarsi come desiderato. Da un punto di vista matematico si devono quindi ricalcolare le matrici di massa e rigidezza considerando le nuove specifiche del sistema ottenute aggiungendo algebricamente ai parametri fisici originali le modifiche corrispondenti:

$$M_{mod} = \begin{bmatrix} m_1 + \Delta m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + \Delta m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 + \Delta m_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{mod} = \begin{bmatrix} k_1 + \Delta k_1 + k_2 + \Delta k_2 + k_{13} + \Delta k_{13} & \dots & \dots \\ & -k_2 - \Delta k_2 & \dots \\ & -k_{13} - \Delta - k_{13} & \dots \\ \dots & -k_2 - \Delta k_2 & -k_{13} - \Delta k_{13} \\ \dots & k_2 + \Delta k_2 + k_{j_2} + \Delta k_{j_2} + k_3 + \Delta k_3 & -k_3 - \Delta k_3 \\ \dots & -k_3 - \Delta k_3 & k_3 + \Delta k_3 + k_{j_3} + \Delta k_{j_3} + k_{13} + \Delta k_{13} \end{bmatrix}$$

che equivale a sommare algebricamente le matrici originali con le matrici contenenti le modifiche calcolate ($\Delta \mathbf{M}$ e $\Delta \mathbf{K}$):

$$\mathbf{M}_{mod} = \mathbf{M} + \Delta \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta m_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{mod} = \mathbf{K} + \Delta \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_{13} & -k_2 & -k_{13} \\ -k_2 & k_2 + k_{j_2} + k_3 & -k_3 \\ -k_{13} & -k_3 & k_3 + k_{j_3} + k_{13} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_{13} & -\Delta k_2 & -\Delta k_{13} \\ -\Delta k_2 & \Delta k_2 + \Delta k_{j_2} + \Delta k_3 & -\Delta k_3 \\ -\Delta k_{13} & -\Delta k_3 & \Delta k_3 + \Delta k_{j_3} + \Delta k_{13} \end{bmatrix}$$

Con le nuove matrici di massa e rigidezza del sistema modificato si calcola poi come fatto all'inizio, la matrice della dinamica e i suoi autovettori e autovalori. Tenendo conto dei risultati ottenuti con l'ultimo dei tre metodi analizzati nel paragrafo precedente, per il sistema in esame si ha:

$$\mathbf{D}_{mod} = (\mathbf{M}_{mod}^{-1})\mathbf{K}_{mod}$$

i cui autovettori e autovalori calcolati sempre con la funzione *eig* di Matlab sono:

$$\mathbf{v}_{1mod} = \begin{Bmatrix} 0.0507 \\ 0.2060 \\ 0.9772 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v}_{2mod} = \begin{Bmatrix} -0.1047 \\ -0.9529 \\ 0.2845 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v}_{3mod} = \begin{Bmatrix} 0.9986 \\ -0.0505 \\ -0.0162 \end{Bmatrix}$$

che normalizzati divengono:

$$\bar{\mathbf{v}}_{1mod} = \begin{Bmatrix} 0.0519 \\ 0.2108 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{v}}_{2mod} = \begin{Bmatrix} 0.1098 \\ 1.0000 \\ -0.2985 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{v}}_{3mod} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -0.0505 \\ -0.0162 \end{Bmatrix}$$

e i tre autovalori associati sono:

$$\lambda_{1mod} = 51684 \quad \lambda_{2mod} = 88969 \quad \lambda_{3mod} = 269300$$

Già a prima vista, confrontando i valori riportati di seguito, ci si accorge subito che in realtà il primo autovettore non è cambiato poi di così tanto nelle due situazioni prima e dopo le modifiche:

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \begin{Bmatrix} 0.0492 \\ 0.1038 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{v}}_{1mod} = \begin{Bmatrix} 0.0519 \\ 0.2108 \\ 1.0000 \end{Bmatrix}$$

questo significa che visto che inizialmente il comportamento del sistema era molto diverso da quello desiderato, molto probabilmente sarà rimasto tale anche dopo le modifiche. Per

una conferma di ciò è possibile fare ricorso al metodo del coseno introdotto nel paragrafo 2.6, che consente di stabilire se dopo le modifiche vi è stato un miglioramento, quantificabile da un avvicinamento del primo autovettore a quello desiderato. Si calcola quindi il coseno dell'angolo tra l'autovettore desiderato e il primo autovettore del sistema prima delle modifiche:

$$\cos \theta_1 = \frac{\bar{v}_1 \cdot v^D}{\|\bar{v}_1\| \|v^D\|} = 0.6613$$

e lo si confronta con il coseno dell'angolo tra lo stesso autovettore desiderato e il primo autovettore del sistema dopo le modifiche:

$$\cos \theta_{1_{mod}} = \frac{\bar{v}_{1_{mod}} \cdot v^D}{\|\bar{v}_{1_{mod}}\| \|v^D\|} = 0.7124$$

Da questi dati si può vedere che effettivamente un piccolo miglioramento c'è stato, anche se dopo le modifiche l'autovettore rimane comunque ancora molto diverso da v^D (il coseno è ancora molto lontano dal valore unitario). Questo è dovuto sicuramente alle forte limitazioni che sono state fatte, le quali determinano delle modifiche non sufficienti a soddisfare le richieste; oltre ovviamente al fatto che, essendo quello desiderato un comportamento molto diverso da ciò che è la prassi per il sistema originale, a meno che non si accettino modifiche molto elevate, sarà comunque sempre difficile farlo muovere in quel determinato modo.

A conferma di ciò può essere interessante analizzare anche i risultati che si erano ottenuti con la soluzione non vincolata, e confrontarli con quest'ultimo. Infatti, come già osservato, la soluzione stabiliva una modifica delle masse del sistema molto elevata. Bisogna riconoscere però che un tale intervento permetterebbe di ottenere esattamente quanto richiesto: dopo le modifiche infatti, il coseno tra $\bar{v}_{1_{mod}}$ e v^D risulta essere esattamente unitario (e ciò significa che i due vettori coincidono e l'obiettivo è stato pertanto raggiunto), e ugualmente il primo autovalore del sistema modificato rimane inalterato proprio come era stato richiesto.

Si può quindi affermare che questa soluzione sarebbe la migliore da un punto di vista teorico; non però per quello pratico.

Un breve commento, a questo punto, lo meritano anche i risultati ottenuti con la seconda soluzione: in questo caso avendo imposto dei limiti, risulta più complicato riuscire a raggiungere l'obiettivo: si ottiene infatti che il nuovo primo autovettore si avvicina meno a quello desiderato rispetto a quanto facesse nel caso precedente (il coseno tra di essi non è più unitario) pur essendo comunque migliore rispetto a quello originale. In più anche le specifiche sul valore dell'autovalore non vengono più rispettate esattamente, come invece accadeva prima.

Lo stesso accade nell'ultima soluzione: il primo autovalore risulta abbastanza diverso da quello desiderato a causa proprio delle limitazioni che sono state fatte. Di conseguenza anche la differenza di frequenza che ne deriva è considerevole ($f_1 = 22.7756Hz$, mentre $f_{1_{mod}} = 36.1826Hz$):

$$\lambda_1 = 20479 \quad \lambda_{1_{mod}} = 51684$$

3.4 Modifiche attive

Con questo secondo metodo si vuole affrontare il problema della sintesi del controllore facendo riferimento a come potrebbe essere affrontato un problema di Structural Modification (cioè riformulandolo, così da poterlo risolvere secondo la filosofia della S.M. proprio come è stato introdotto nel paragrafo 3.4). Questo è il motivo per cui viene utilizzato il termine “modifiche attive”. Si assuma pertanto che i guadagni del controllore esterno vengano considerati come delle masse o delle rigidzze, le quali vadano quindi ad agire sul sistema come delle quantità fisiche aggiunte o tolte ad esso. L'effetto dell'azione del controllore coinciderà con l'effetto che le modifiche passive hanno sul sistema. A differenza del caso precedente però i parametri strutturali non verranno cambiati.

Si faccia inizialmente ancora riferimento al modello del sistema riportato nell'equazione 3.2.2 di pagina 31 e si ripercorra quanto introdotto nel paragrafo 3.4

Considerando un'unica forzante esterna agente sulla prima massa, la matrice \mathbf{B} sarà:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre l'espressione della forzante esterna è:

$$F_1 = K_{11}^A \ddot{x}_1 + K_{12}^A \ddot{x}_2 + K_{13}^A \ddot{x}_3 + K_{11}^P x_1 + K_{12}^P x_2 + K_{13}^P x_3$$

pertanto, l'equazione in catena chiusa del sistema diviene:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} K_{11}^A \ddot{x}_1 + K_{12}^A \ddot{x}_2 + K_{13}^A \ddot{x}_3 + K_{11}^P x_1 + K_{12}^P x_2 + K_{13}^P x_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

esprimibile anche come:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A & K_{13}^A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P & K_{13}^P \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (3.4.1)$$

Si noti come, vista anche la presenza di un unico termine unitario all'interno della matrice \mathbf{B} , quello che si sta analizzando sia il caso più critico per l'assegnabilità dell'autovettore, visto che, essendo presente un'unica forza esterna che agisce sul sistema, esso risulta essere fortemente sottoattuato.

Facendo riferimento all'equazione 3.4.1, portando tutto a sinistra dell'uguale, le matrici $\Delta\mathbf{M}$ e $\Delta\mathbf{K}$ saranno sostanzialmente costituite dai guadagni di, rispettivamente, accelerazione e velocità del controllore:

$$\left(\mathbf{M} - \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A & K_{13}^A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \left(\mathbf{K} - \begin{bmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P & K_{13}^P \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = 0$$

e quindi ovviamente:

$$\Delta\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -K_{11}^A & -K_{12}^A & -K_{13}^A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -K_{11}^P & -K_{12}^P & -K_{13}^P \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siccome in questo caso le modifiche hanno una natura diversa rispetto al caso precedente, è ovvio che la struttura delle matrici $\Delta\mathbf{M}$ e $\Delta\mathbf{K}$ non rispecchia quella delle corrispondenti matrici \mathbf{M} e \mathbf{K} , per cui le singole modifiche attive occupano delle posizioni che

nulla hanno a che vedere con la conformazione del sistema ma che invece dipendono dal sistema di attuazione esterno. In questo caso infatti, visto che la forza agisce solamente sulla prima massa, i termini di modifica attiva occupano l'intera prima riga delle matrici corrispondenti.

Questo porta come risultato ad avere delle matrici asimmetriche che come si vedrà soprattutto nei capitoli successivi possono provocare dei problemi di stabilità.

A questo punto si procede come nel caso di sole modifiche passive: volendo imporre l'autovettore

$$\mathbf{v}^D = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

si calcola la matrice \mathbf{U}_m tale che (ancora \mathbf{u} coincide con \mathbf{v}^D):

$$\Delta \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{U}_m \Delta \mathbf{m}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -K_{11}^A & -K_{12}^A & -K_{13}^A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} &= \\ &= \begin{Bmatrix} -K_{11}^A U_1 - K_{12}^A U_2 - K_{13}^A U_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -U_1 & -U_2 & -U_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{11}^A \\ K_{12}^A \\ K_{13}^A \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

e la matrice \mathbf{U}_k tale che:

$$\Delta \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{U}_k \Delta \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -K_{11}^P & -K_{12}^P & -K_{13}^P \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} &= \\ &= \begin{Bmatrix} -K_{11}^P U_1 - K_{12}^P U_2 - K_{13}^P U_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -U_1 & -U_2 & -U_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{11}^P \\ K_{12}^P \\ K_{13}^P \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

dalle espressioni precedenti si evince che:

$$\mathbf{U}_m = \mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} -U_1 & -U_2 & -U_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre:

$$\Delta \mathbf{m} = \begin{Bmatrix} K_{11}^A \\ K_{12}^A \\ K_{13}^A \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta \mathbf{k} = \begin{Bmatrix} K_{11}^P \\ K_{12}^P \\ K_{13}^P \end{Bmatrix}$$

Con \mathbf{U}_m e \mathbf{U}_k calcoliamo ancora la matrice $\mathbf{U} = [\omega^2 \mathbf{U}_m \mid \mathbf{U}_k]$, ed il vettore $\mathbf{b} = [\mathbf{K} \mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u}]$ che sostituiti nell'equazione:

$$\mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.4.2}$$

permettono di ottenere il vettore delle incognite \mathbf{x} che contiene i guadagni del controllore:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} K_{11}^A \\ K_{12}^A \\ K_{13}^A \\ K_{11}^P \\ K_{12}^P \\ K_{13}^P \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema 3.4.2 come nel caso equivalente (equazione 3.3.1) di pagina 36 si calcolano i guadagni del controllore che fungono da modifiche fisiche fatte sul sistema. I primi tre sono i guadagni di accelerazione, mentre gli ultimi tre quelli di posizione.

Considerando ancora valide le richieste sulla sola prima forma modale, fatte per il caso precedente in cui si sono calcolate le modifiche passive:

$$\mathbf{v}^D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda^D = \lambda_1 = 20479$$

è ancora possibile risolvere il problema seguendo i tre diversi modi introdotti nel paragrafo 3.3. Ricorrendo alla semplice pseudoinversione della matrice \mathbf{U} si ottengono i seguenti risultati:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7.4719 \\ -7.4719 \\ -7.4719 \\ -0.0004 \\ -0.0004 \\ -0.0004 \end{pmatrix}$$

Anche se tale soluzione potrebbe già essere accettata (trattandosi di modifiche attive non insorgono i problemi di fattibilità visti per le modifiche passive), per evitare problemi di condizionamento numerico, si può anche risolvere il sistema con il secondo metodo visto, il quale fa uso della funzione *lsqlin*. In questo caso però le cose si semplificano non di poco, infatti non è necessario imporre alcun limite essendo le modifiche attive sostanzialmente i guadagni di un controllore che possono quindi assumere qualsiasi valore (le modifiche attive sono legate ad un concetto più astratto e quindi non sono vincolate da limiti pratici di realizzazione). Pertanto nell'impostazione del metodo, i valori dei limiti superiori ed inferiori sono stati lasciati liberi in modo che la soluzione non debba necessariamente rimanere entro una fascia di valori prestabiliti.

Infine si può regolarizzare il problema con il relativo termine ricavabile dalla L-curve del caso che si sta considerando, ottenendo i seguenti risultati:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7.4719 \\ -7.4719 \\ -7.4719 \\ -0.0004 \\ -0.0004 \\ -0.0004 \end{pmatrix}$$

Come si può notare questi ultimi risultati sono identici a quelli ottenuti tramite la pseudoinversione. Evidentemente essi rappresentano la soluzione migliore.

3.4.1 Analisi dei risultati numerici

Come è già stato ribadito più volte, visto che anche le modifiche attive sono considerate di fatto come delle variazioni delle caratteristiche del sistema, una volta che sono state calcolate, esse vengono sommate alle matrici \mathbf{M} e \mathbf{K} , dopo essere state inserite opportunamente all'interno delle corrispondenti matrici $\Delta\mathbf{M}$ e $\Delta\mathbf{K}$. In particolare, i guadagni di accelerazione andranno a formare la prima di queste due ultime matrici e quindi essi costituiscono di fatto le modifiche attive di massa, mentre i guadagni di posizione, contenuti nella matrice $\Delta\mathbf{K}$, rappresentano quelle di rigidità. Per testare la loro efficacia è quindi prima di tutto necessario andare a calcolare le nuove matrici \mathbf{M}_{mod} e \mathbf{K}_{mod} del sistema modificato:

$$\mathbf{M}_{mod} = \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_{11}^A & -K_{12}^A & -K_{13}^A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{mod} &= \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K} = \\ &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_{13} & -k_2 & -k_{13} \\ -k_2 & k_2 + k_{j2} + k_3 & -k_3 \\ -k_{13} & -k_3 & k_3 + k_{j3} + k_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_{11}^P & -K_{12}^P & -K_{13}^P \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Successivamente si calcola la nuova matrice della dinamica di questa seconda versione del sistema modificato:

$$\mathbf{D}_{mod} = (\mathbf{M}_{mod}^{-1})\mathbf{K}_{mod}$$

Considerando per le modifiche attive i valori calcolati con l'ultimo dei tre metodi analizzati sopra, essa ha autovettori normalizzati e autovalori che valgono:

$$\bar{\mathbf{v}}_{1mod} = \begin{Bmatrix} 0.4820 \\ 0.1565 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{v}}_{2mod} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.1819 \\ -0.1014 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{v}}_{3mod} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -0.6896 \\ 0.0150 \end{Bmatrix}$$

e i tre autovalori associati sono:

$$\lambda_{1mod} = 19067 \quad \lambda_{2mod} = 57103 \quad \lambda_{3mod} = 142070$$

Come è possibile notare dal seguente confronto sulle frequenze, i guadagni del controllore calcolati con questo terzo metodo permettono di rispettare in maniera molto buona la richiesta di mantenere inalterato il primo autovalore:

$$f_1 = 22.7756Hz \quad f_{1mod} = 21.9765Hz$$

Per quanto riguarda l'autovettore si può dire invece che le modifiche attive consentono di ottenere un lievissimo miglioramento rispetto alla situazione originale, che però, come si può vedere da un confronto diretto riguarda esclusivamente la prima componente:

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \begin{Bmatrix} 0.0492 \\ 0.1038 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{v}}_{1mod} = \begin{Bmatrix} 0.4820 \\ 0.1565 \\ 1.0000 \end{Bmatrix}$$

Comunque il calcolo del coseno tra l'autovettore ottenuto e quello desiderato, mostra che vi è stato un miglioramento rispetto alle sole modifiche passive:

$$\cos \theta_1 = 0.6613 \quad \cos \theta_{1mod} = 0.8438$$

Questo effetto benefico è sicuramente dovuto al fatto che le modifiche attive non sono soggette a vincoli e quindi è facile determinare quella combinazione che permette di avvicinarsi al massimo al caso desiderato. Ancora non sono sufficienti però ad ottenere quanto voluto perché, siccome si sta richiedendo al sistema qualcosa che è veramente al di fuori della sua portata, neanche un intervento dall'esterno riesce a dargli la possibilità di raggiungerlo.

Si osservi che avendo rilassato implicitamente il vincolo della frequenza, come di fatto fa il metodo della Structural Modification che consente delle variazioni di tale grandezza intorno al valore desiderato, si è andati verso una soluzione con coseno maggiore di quella teoricamente ottenibile tramite la proiezione (la quale è basata sulla frequenza esatta).

3.5 Modifiche passive ed attive

L'ultima possibilità analizzata è quella in cui modifiche attive e passive vengano applicate contemporaneamente al sistema in modo che tutto ciò che non si può ottenere con le prime, sia ottenibile grazie all'azione delle seconde, e viceversa. Ancora una volta si parte dal modello del sistema riportato nell'equazione 3.2.2 di pagina 31.

Per arrivare al risultato è utile considerare entrambi i procedimenti introdotti nei paragrafi 3.3 e 3.4 per rispettivamente modifiche passive e attive ed agire considerandoli contemporaneamente ed integrando l'uno con l'altro.

In questo caso quindi le matrici ΔM e ΔK saranno costituite dalla somma di due contributi: uno dovuto alle modifiche passive (ΔM_{pass} e ΔK_{pass}) calcolate con la Structural Modification e l'altro costituito dalle modifiche attive derivanti dal calcolo dei guadagni del controllore (ΔM_{att} e ΔK_{att}).

Considerando ancora un'unica forzante esterna agente sulla prima massa avremo quindi:

$$(M + \Delta M_{pass}) \ddot{x} + (K + \Delta K_{pass}) x = \begin{pmatrix} K_{11}^A \ddot{x}_1 + K_{12}^A \ddot{x}_2 + K_{13}^A \ddot{x}_3 + K_{11}^P x_1 + K_{12}^P x_2 + K_{13}^P x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esprimibile anche come:

$$(M + \Delta M_{pass}) \ddot{x} + (K + \Delta K_{pass}) x = \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A & K_{13}^A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P & K_{13}^P \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e quindi, se le due matrici del termine a destra dell'uguale sono le matrici che contengono le modifiche attive, si ha:

$$(M + \Delta M_{pass}) \ddot{x} + (K + \Delta K_{pass}) x = \Delta M_{att} \ddot{x} + \Delta K_{att} x$$

portando tutto a sinistra del simbolo di uguaglianza, si ha:

$$(M + \Delta M_{pass} - \Delta M_{att}) \ddot{x} + (K + \Delta K_{pass} - \Delta K_{att}) x = 0$$

che, specificando le varie matrici al suo interno, diventa:

$$\left(\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta m_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A & K_{13}^A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_{13} & -k_2 & -k_{13} \\ -k_2 & k_2 + k_{j2} + k_3 & -k_3 \\ -k_{13} & -k_3 & k_3 + k_{j3} + k_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_{13} & -\Delta k_2 & -\Delta k_{13} \\ -\Delta k_2 & \Delta k_2 + \Delta k_{j2} + \Delta k_3 & -\Delta k_3 \\ -\Delta k_{13} & -\Delta k_3 & \Delta k_3 + \Delta k_{j3} + \Delta k_{13} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P & K_{13}^P \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Essendo questa, la riformulazione contemporanea dei due problemi presentati singolarmente prima per le modifiche passive e poi per le modifiche attive, le matrici che vi compaiono conservano le medesime proprietà e su di loro è possibile fare le stesse osservazioni

viste in quelle sedi. Pertanto ΔM_{pass} e ΔK_{pass} hanno una struttura che rispecchia le matrici M e K rispettivamente, e al loro interno, i termini che nelle prime portano l'informazione sull'entità delle variazioni da eseguire sul sistema, occupano esattamente lo stesso posto che i corrispondenti termini caratteristici occupano nelle seconde, mentre le matrici ΔM_{att} e ΔK_{att} presentano una struttura non simmetrica dovuta al modo in cui agiscono le forze esterne sul sistema. Le matrici ΔM e ΔK complessive saranno quindi:

$$\begin{aligned}\Delta M &= \Delta M_{pass} - \Delta M_{att} = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta m_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A & K_{13}^A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta m_1 - K_{11}^A & -K_{12}^A & -K_{13}^A \\ 0 & \Delta m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Delta K &= \Delta K_{pass} - \Delta K_{att} = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_{13} & -\Delta k_2 & -\Delta k_{13} \\ -\Delta k_2 & \Delta k_2 + \Delta k_{j2} + \Delta k_3 & -\Delta k_3 \\ -\Delta k_{13} & -\Delta k_3 & \Delta k_3 + \Delta k_{j3} + \Delta k_{13} \end{bmatrix} + \\ &\quad - \begin{bmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P & K_{13}^P \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_{13} - K_{11}^P & -\Delta k_2 - K_{12}^P & -\Delta k_{13} - K_{13}^P \\ -\Delta k_2 & \Delta k_2 + \Delta k_{j2} + \Delta k_3 & -\Delta k_3 \\ -\Delta k_{13} & -\Delta k_3 & \Delta k_3 + \Delta k_{j3} + \Delta k_{13} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Visto che in esse si combinano insieme sia le modifiche passive che quelle attive, da queste due formulazioni si può ben vedere come, anche dal punto di vista matematico, le variazioni di massa e rigidezza complessive percepibili dall'esterno siano imputabili in parte ad una effettiva modifica fatta al sistema, in parte all'azione di un controllore che agisce sul sistema rinnovato.

Come è stato fatto anche nei casi precedenti, si prosegue con il calcolo di U_m ed U_k a seguito dell'assegnazione del generico autovettore v^D (indicato in seguito con u):

$$\Delta M u = U_m \Delta m$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \Delta m_1 - K_{11}^A & -K_{12}^A & -K_{13}^A \\ 0 & \Delta m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} &= \\ &= \begin{Bmatrix} \Delta m_1 U_1 - K_{11}^A U_1 - K_{12}^A U_2 - K_{13}^A U_3 \\ \Delta m_2 U_2 \\ \Delta m_3 U_3 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 & -U_1 & -U_2 & -U_3 \\ 0 & U_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \\ K_{11}^A \\ K_{12}^A \\ K_{13}^A \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

da cui:

$$\mathbf{U}_m = \begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 & -U_1 & -U_2 & -U_3 \\ 0 & U_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre per \mathbf{U}_k si ha:

$$\Delta \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{U}_k \Delta \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_{13} - K_{11}^P & -\Delta k_2 - K_{12}^P & -\Delta k_{13} - K_{13}^P \\ -\Delta k_2 & \Delta k_2 + \Delta k_{j2} + \Delta k_3 & -\Delta k_3 \\ -\Delta k_{13} & -\Delta k_3 & \Delta k_3 + \Delta k_{j3} + \Delta k_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{Bmatrix} \Delta k_1 U_1 + \Delta k_2 U_1 + \Delta k_{13} U_1 - K_{11}^P U_1 - \Delta k_2 U_2 - K_{12}^P U_2 - \Delta k_{13} U_3 - K_{13}^P U_3 \\ -\Delta k_2 U_1 + \Delta k_2 U_2 + \Delta k_{j2} U_2 + \Delta k_3 U_2 - \Delta k_3 U_3 \\ -\Delta k_{13} U_1 - \Delta k_3 U_2 + \Delta k_3 U_3 + \Delta k_{j3} U_3 + \Delta k_{13} U_3 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} U_1 & U_1 - U_2 & 0 & 0 & 0 & U_1 - U_3 & -U_1 & -U_2 & -U_3 \\ 0 & U_2 - U_1 & U_2 - U_3 & U_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 - U_2 & 0 & U_3 & U_3 - U_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_3 \\ \Delta k_{j2} \\ \Delta k_{j3} \\ \Delta k_{13} \\ K_{11}^P \\ K_{12}^P \\ K_{13}^P \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

da cui:

$$\mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} U_1 & U_1 - U_2 & 0 & 0 & 0 & U_1 - U_3 & -U_1 & -U_2 & -U_3 \\ 0 & U_2 - U_1 & U_2 - U_3 & U_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 - U_2 & 0 & U_3 & U_3 - U_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ancora una volta, con le matrici \mathbf{U}_m ed \mathbf{U}_k si calcolano la matrice $\mathbf{U} = [\omega^2 \mathbf{U}_m \mid \mathbf{U}_k]$, ed il vettore $\mathbf{b} = [\mathbf{K} \mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u}]$ che sostituiti nell'equazione:

$$\mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.5.1)$$

permettono di conoscere i valori da assegnare ai guadagni del controllore, e in che modo è necessario modificare il sistema al fine di ottenere l'autovettore desiderato.

Anche in quest'ultimo caso, quello riportato nell'equazione 3.5.1 è il problema equivalente ai due riportati nelle equazioni 3.3.1 di pagina 36 e 3.4.2 di pagina 43, dove però qui il

vettore delle incognite è:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \\ K_{11}^A \\ K_{12}^A \\ K_{13}^A \\ \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_3 \\ \Delta k_{j2} \\ \Delta k_{j3} \\ \Delta k_{13} \\ K_{11}^P \\ K_{12}^P \\ K_{13}^P \end{pmatrix}$$

che contiene al suo interno sia le entità delle modifiche da eseguire sulle masse e sugli elementi elastici del solito sistema rappresentato in figura 3.1 a pagina 30, sia i valori che devono avere i guadagni di accelerazione e posizione del controllore utilizzato in accoppiamento al sistema.

Per comodità, vengono riportate di seguito le richieste fatte, che ovviamente sono sempre le stesse:

$$\mathbf{v}^D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda^D = \lambda_1 = 20479$$

Anche in questo caso è possibile utilizzare le tre diverse strategie introdotte precedentemente, anche se è sempre vero che il terzo metodo resta comunque il migliore. ci si concentra quindi direttamente su questo caso.

In questa situazione, visto che intervengono due diverse tipologie di modifiche, si è deciso di sfruttare la possibilità prevista dal termine di regolarizzazione per assegnare loro dei diversi pesi, andando quindi a privilegiare le modifiche attive rispetto a quelle passive.

Grazie alla matrice $\mathbf{\Omega}_x$ è infatti possibile ponderare in diverso modo i risultati della funzione *lsqlin* orientando la soluzione più verso gli uni che verso gli altri.

Nel caso in esame, considerato che modificare passivamente il sistema (e quindi andare a variare la massa o la rigidità dei suoi membri) è molto più oneroso che non cambiare il valore dei guadagni del controllore, si è deciso di assegnare alle modifiche passive un peso dieci volte maggiore rispetto alle modifiche attive. Pertanto la matrice $\mathbf{\Omega}_x$ è:

$$\mathbf{\Omega}_x = \text{diag} [10, 10, 10, 1, 1, 1, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 1, 1, 1]$$

I risultati così ottenuti sono i seguenti:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.0001 \\ 2.0000 \\ -3.0000 \\ -18.2217 \\ -2.3705 \\ -1.8234 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2378 \\ -0.0016 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.5.1 Analisi dei risultati numerici

Si procede ora con l'analisi dei risultati che si sono ottenuti con quest'ultima soluzione in cui sono state calcolate sia le modifiche passive (quantità di massa e/o rigidità da aggiungere o togliere a quella propria del sistema e quindi già presente) che quelle attive (guadagni del controllore esterno). Si devono quindi ricalcolare le nuove matrici di massa e rigidità del sistema dopo che esso ha subito le modifiche strutturali, considerando in esse opportunamente anche le modifiche attive. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{mod} &= \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}_{pass} + \Delta\mathbf{M}_{att} = \\ &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta m_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_{11}^A & -K_{12}^A & -K_{13}^A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{mod} &= \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}_{pass} + \Delta\mathbf{K}_{att} = \\ &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_{13} & -k_2 & -k_{13} \\ -k_2 & k_2 + k_{j2} + k_3 & -k_3 \\ -k_{13} & -k_3 & k_3 + k_{j3} + k_{13} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_{13} & -\Delta k_2 & -\Delta k_{13} \\ -\Delta k_2 & \Delta k_2 + \Delta k_{j2} + \Delta k_3 & -\Delta k_3 \\ -\Delta k_{13} & -\Delta k_3 & \Delta k_3 + \Delta k_{j3} + \Delta k_{13} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -K_{11}^P & -K_{12}^P & -K_{13}^P \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con le quali si ricalcola la matrice della dinamica D_{mod} e i suoi autovettori e autovalori che, usando per le modifiche i risultati calcolati con l'ultima soluzione, risultano:

$$\bar{v}_{1mod} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.2296 \\ 0.7142 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_{2mod} = \begin{pmatrix} -0.6148 \\ 0.0278 \\ 1.0000 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_{3mod} = \begin{pmatrix} -0.1999 \\ 1.0000 \\ -0.1618 \end{pmatrix}$$

mentre per i tre autovalori associati si ottiene:

$$\lambda_{1mod} = 25185 \quad \lambda_{2mod} = 36181 \quad \lambda_{3mod} = 90869$$

Da un confronto diretto sulla situazione che si presenta prima e dopo le modifiche

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.0492 \\ 0.1038 \\ 1.0000 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_{1mod} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.2296 \\ 0.7142 \end{pmatrix}$$

è evidente che grazie alla combinazione di modifiche attive e passive, vi è un sensibile miglioramento del primo autovettore il quale, pur rimanendo ancora molto lontano dalla situazione desiderata presenta comunque un avvicinamento ad essa, percepibile da un aumento non indifferente del coseno dell'angolo tra \bar{v}_1 e v^D prima e dopo le modifiche, calcolato con la solita formula inversa del prodotto scalare:

$$\cos \theta_1 = 0.6613 \quad \cos \theta_{1mod} = 0.8977$$

Anche se leggermente peggiori rispetto al caso di sole modifiche attive, i risultati sull'autovettore rimangono comunque soddisfacenti in quanto il suo valore dopo le modifiche è di poco differente da quello richiesto:

$$\lambda_1 = 20479 \quad \lambda_{1mod} = 25185$$

il che si rispecchia in una differenza di frequenza sicuramente accettabile.

$$f_1 = 22.7756Hz \quad f_{1mod} = 25.2577Hz$$

In più, anche se ciò non era richiesto, l'esagerata differenza tra il secondo e il terzo autovalore ottenuti dopo le modifiche rispetto alla situazione di partenza, che risultava con gli altri due metodi di calcolo, non si presenta più e ciò sta a significare che si è riusciti ad avvicinarsi sensibilmente alle richieste fatte, senza per ciò aver necessariamente stravolto il sistema. Vero è comunque, che senza imporre alcun vincolo alle modifiche e senza utilizzare alcuna regolarizzazione, con il primo metodo di calcolo si otterrebbe esattamente quanto desiderato sia in termini di autovettore che di autovalore. Quest'ultima rimane però una soluzione sicuramente ottima ma puramente teorica.

3.6 Confronto dei tre casi

Dopo aver ottenuto per lo stesso problema le tre soluzioni diverse presentate nei precedenti paragrafi, è utile a questo punto fare un confronto tra di esse per vedere se, al fine di ottenere una determinata forma modale, sia preferibile modificare la struttura del sistema piuttosto che affiancare ad esso un controllore esterno, o se invece l'utilizzo contemporaneo di entrambi i metodi sia in realtà la soluzione migliore che permette di ottenere dei vantaggi sia rispetto all'uno che all'altro.

Visto che in quest'ultimo caso si sfruttano sia modifiche attive che modifiche passive (mentre precedentemente venivano sfruttate individualmente), è intuibile che le prestazioni ottenibili siano migliori dei due considerati singolarmente ma per averne una conferma è necessario fare dei confronti sfruttando ancora una volta il metodo del coseno. Da un'analisi dei risultati ottenuti, è evidente che le modifiche passive si focalizzano maggiormente sull'obiettivo riguardante l'autovettore, mentre le modifiche attive si focalizzano maggiormente su quel che riguarda l'autovalore. Infatti, sempre sotto le ipotesi che il primo autovettore richiesto sia:

$$\mathbf{v}^D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed il relativo autovalore desiderato sia:

$$\lambda^D = \lambda_1 = 20479$$

corrispondente alla frequenza:

$$f_1 = 22.7756Hz$$

i risultati che si ottengono dopo le sole modifiche passive sono:

$$\bar{\mathbf{v}}_{1pass} = \begin{pmatrix} 0.0519 \\ 0.2108 \\ 1.0000 \end{pmatrix} \quad \cos \theta_{1pass} = 0.7124 \quad f_{1pass} = 36.1826Hz$$

dopo le sole modifiche attive:

$$\bar{\mathbf{v}}_{1att} = \begin{pmatrix} 0.4820 \\ 0.1565 \\ 1.0000 \end{pmatrix} \quad \cos \theta_{1att} = 0.8438 \quad f_{1att} = 21.9765Hz$$

ed infine con modifiche sia passive che attive, si ottiene:

$$\bar{\mathbf{v}}_{1pass-att} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.2296 \\ 0.7142 \end{pmatrix} \quad \cos \theta_{1pass-att} = 0.8977 \quad f_{1pass-att} = 25.2577Hz$$

si può notare come le modifiche passive, nel limite delle loro capacità, influiscano più che altro sull'autovettore facendo quindi aumentare sicuramente il coseno (che, si ricorda, prima delle modifiche era pari a: $\cos \theta_1 = 0.6613$) mentre la richiesta sull'autovalore non riesce ad essere soddisfatta. Le modifiche attive influenzano invece più che altro l'autovalore facendo sì che la frequenza ottenuta sia più vicina a quella desiderata rispetto al caso di modifiche passive.

Sembra quindi che la prima tipologia di modifiche incida prevalentemente su di un aspetto, la seconda sull'altro.

Implementando insieme le due tipologie di modifiche in precedenza prese singolarmente, si assiste invece ad un sostanziale miglioramento rispetto alla situazione originale su entrambi i fronti: soprattutto per quanto riguarda l'autovettore si ha un miglioramento

notevolmente, più di quanto si fosse ottenuto nel caso di sole modifiche passive, a discapito invece dell'autovalore che rispetto alle sole modifiche attive si allontana leggermente dal valore desiderato, pur rimanendo comunque molto buono. Evidentemente tale modo di agire permette di fare un compromesso tra le due richieste. Il contributo sostanziale sembra però essere dato dalle modifiche attive.

Quindi il fatto di agire con due interventi contemporanei rappresenta un'ottima soluzione per esaltare i punti di forza di entrambi ed ottenere così delle prestazioni ottimali. Si può quindi affermare che con la soluzione doppia si riesce ad ottenere il meglio sia in termini di autovettore che di autovalore.

Per avere una conferma di quanto appena affermato, è utile applicare le stesse tre tipologie di modifiche calcolate al fine di ottenere una forma modale diversa dalla precedente, e fare quindi un ulteriore confronto. In questo modo è anche possibile testare l'universalità dei risultati precedentemente ottenuti.

Si immagini allora di voler imporre ancora alla prima forma modale, la struttura:

$$\mathbf{v}^D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^D = 8882.6$$

Tale forma modale potrebbe ad esempio essere ricondotta ad un caso applicativo in cui non si voglia che il movimento del primo corpo di un meccanismo (quello su cui agisce la forzante esterna) venga trasmesso ai successivi due corpi. Inoltre in questo secondo esempio si desidera che anche il primo autovalore sia diverso da quello del sistema originale. Questo potrebbe derivare da una particolare esigenza pratica, e nel caso considerato, secondo quanto stabilito dalle richieste fatte, ciò significa che la corrispondente frequenza del primo modo di vibrare che si desidera ottenere è $f_1 = 15Hz$. Con tali ipotesi, il coseno dell'angolo tra \mathbf{v}^D e il primo autovettore nella situazione originale risulta essere:

$$\cos \theta_1 = 0.0488$$

e questo indica che tale richiesta è ancora più lontana da quello che è il naturale comportamento del sistema di quanto lo fosse prima, per cui in linea di massima ci si aspetta che sarà ancor più difficile soddisfare le esigenze che si hanno.

Il miglior autovettore ottenibile in queste condizioni che più si avvicina a \mathbf{v}^D è infatti:

$$\bar{\mathbf{v}}^A = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.1065 \\ 0.1051 \end{pmatrix}$$

I risultati che si sono ottenuti utilizzando ancora una volta un metodo risolutivo che prevede il termine di regolarizzazione δ ricavato per ognuno dei tre tipi di modifiche considerate, dalla L-curve associata, sono, con sole modifiche passive:

$$\bar{\mathbf{v}}_{1pass} = \begin{pmatrix} 0.0511 \\ 0.1040 \\ 1.0000 \end{pmatrix} \quad \cos \theta_{1pass} = 0.0508 \quad f_{1pass} = 22.7727Hz$$

con sole modifiche attive:

$$\bar{\mathbf{v}}_{1att} = \begin{pmatrix} 0.0505 \\ 0.1039 \\ 1.0000 \end{pmatrix} \quad \cos \theta_{1att} = 0.0501 \quad f_{1att} = 22.7732Hz$$

ed infine con entrambi i tipi di modifiche sopra citati:

$$\bar{v}_{1_{pass-att}} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.1370 \\ 0.2668 \end{pmatrix} \quad \cos \theta_{1_{pass-att}} = 0.9579 \quad f_{1_{pass-att}} = 14.8177 Hz$$

Per quest'ultimo caso, la L-curve è riportata in figura 3.2 A differenza delle curve analizzate

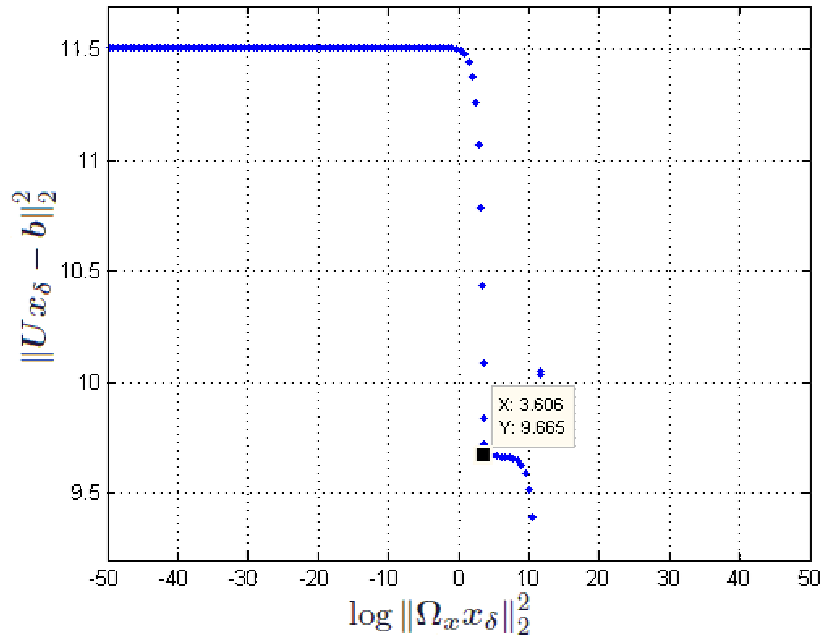


Fig. 3.2: L-curve del secondo esempio di assegnamento.

per i casi precedenti, ora è molto più evidente la tipica forma ad “L”, per cui è risultato immediato scegliere $\delta = 14073.7488355329$, valore che si ha in corrispondenza del punto evidenziato in figura.

Analizzando i risultati ottenuti, come ci si aspettava, il primo tipo di modifiche agisce prevalentemente sull'autovettore, mentre le modifiche attive hanno su di esso un effetto minore. Purtroppo però bisogna riconoscere che in entrambi i casi anche dopo aver applicato le modifiche ci si trova comunque ad essere ancora molto lontani dalla situazione desiderata: entrambe le modifiche portano a dei risultati simili tra loro e in entrambi i casi lasciano praticamente quasi inalterato il sistema. Esse risultano poco incisive e, probabilmente a causa della grande diversità esistente tra la forma modale richiesta e quella originale, non hanno grande effetto sul sistema, tant'è che dopo le modifiche il comportamento è ancora molto simile a quello originale e di conseguenza molto diverso da quello desiderato.

Sorprendentemente invece, nel momento in cui si va ad intervenire sia attivamente che passivamente, si ottiene un consistente miglioramento su entrambi gli aspetti, che, soprattutto se confrontato con i miglioramenti irrisori ottenuti nei due casi singoli precedenti, permette tranquillamente di affermare che in questo modo l'obiettivo è stato praticamente raggiunto. Il valore del coseno è infatti prossimo all'unità e ciò significa che l'autovettore del sistema modificato per poco non coincide con quello desiderato, mentre la differenza sulle frequenze è sicuramente accettabile da un punto di vista pratico. Del resto anche da un semplice confronto visivo, è chiaro che dopo le modifiche i termini dell'autovettore ottenuto sono di poco diversi da quelli desiderati.

Questo secondo esempio è quindi molto utile per evidenziare l'efficacia ed i vantaggi che si possono ottenere con l'utilizzo congiunto di modifiche passive ed attive. In questo

modo si riesce infatti a soddisfare entrambe le esigenze, cosa impensabile se si utilizza un solo tipo di modifiche visto che, data la loro natura, esse si concentrano solamente su di una o sull'altra richiesta. In più, considerando le singole esigenze sull'autovettore e sull'autovalore, si riesce perfino ad ottenere su entrambe un risultato migliore rispetto ai casi in cui si faccia utilizzo delle sole modifiche passive per le prime o delle sole modifiche attive per le seconde; questo perché evidentemente, lavorando insieme esse riescono a compensarsi una con l'altra sfruttando i rispettivi vantaggi per far sì che il risultato sia migliore non solo da un punto di vista globale, ma anche per le singole richieste.

E' infine interessante far notare come la possibilità di ponderare in diverso modo i due tipi di modifiche, permetta di sbilanciare la soluzione più verso una richiesta che verso l'altra. In questo modo, in base alle esigenze che si hanno, visto che, da quanto emerso dai risultati ottenuti, è chiaro che una agisce in un senso e l'altra in un altro, semplicemente intervenendo su tali pesi si può deviare il risultato più su una soluzione che prediliga lo spostamento dell'autovettore piuttosto che su una che prediliga il soddisfacimento della richiesta sull'autovalore.

In conclusione quindi, alla luce di quanto visto anche nei paragrafi precedenti, si può affermare che siccome le modifiche attive non riescono mai a farci ottenere ciò che vogliamo in termini di autovettore, al limite solo in termini di autovalore, e le modifiche passive invece permettono di ottenere ciò che vogliamo sia sull'autovettore che sull'autovalore, solo a patto che non venga imposto loro dei vincoli, il che non è accettabile dal punto di vista pratico, per ottenere il meglio ed avvicinarsi il più possibile alle richieste non si è possibile utilizzare solo una di queste due tecniche ma è buona norma utilizzarle insieme e quindi, dopo aver modificato il sistema, affiancare ad esso un controllore che agisca attivamente.

3.7 Attuazione doppia

Per evidenziare l'importanza che ha il numero di forze esterne e il modo in cui esse agiscono, nel permettere di ottenere, dopo le modifiche, l'autovettore desiderato, e per far capire quindi che più il sistema risulta sottoattuato e più sarà difficile agire su di esso per fargli fare quello che si vuole, mentre nel caso intervengano molte forze questa operazione diventi molto più semplice, viene analizzato il caso in cui oltre alla forza sulla massa m_1 considerata in tutti i casi precedentemente descritti, ora agisca sul sistema anche una seconda forza sulla massa m_3 .

Nell'analisi di questo caso, la matrice \mathbf{B} avrà un ruolo fondamentale e risulterà diversa dai casi precedenti, essendo diverso il sistema di attuazione considerato. Come detto essa dovrà rispecchiare il nuovo schema di distribuzione delle forze ed essere conforme ad esso, pertanto presenterà un "1" in più rispetto a prima, il quale terrà conto della forza aggiuntiva applicata sul solo terzo grado di libertà. Questo elemento unitario si troverà pertanto nella posizione (3,3) della matrice, che diventerà quindi:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7.1)$$

La nuova forza considerata avrà invece una struttura del tutto analoga all'altra:

$$F_3 = K_{31}^A \ddot{x}_1 + K_{32}^A \ddot{x}_2 + K_{33}^A \ddot{x}_3 + K_{31}^P x_1 + K_{32}^P x_2 + K_{33}^P x_3$$

Per brevità si è deciso di analizzare direttamente il caso in cui vengano calcolate sia modifiche attive che passive con il metodo che prevede la regolarizzazione e che utilizza quindi la funzione *lsqlin*, per assegnare ancora una volta alla prima forma modale l'autovettore

$$\mathbf{v}^D = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e l'autovalore:

$$\lambda^D = 8882.6$$

così da poter fare un confronto diretto con l'assegnazione della stessa forma modale attraverso una sola forza di controllo, analizzata nel paragrafo 3.6.

Ovviamente gli autovettori e gli autovalori del sistema originale non vengono modificati, in quanto essi dipendono solamente dalle caratteristiche del sistema stesso e non dal numero e dal modo in cui le forze esterne agiscono su di esso.

Riprendendo i loro valori già calcolati precedentemente, ci si accorge che anche in questo caso si dovrà intervenire sul sistema in quanto esso non presenta le caratteristiche desiderate.

E' noto però che la matrice $[\mathbf{L}(\lambda_i^D)]$ dipende dalla matrice \mathbf{B} tant'è che quest'ultima interviene nel suo calcolo, per cui si può pensare che le caratteristiche di assegnabilità di \mathbf{v}^D ora, che si utilizza una forza in più, possano essere cambiate.

In realtà confrontando il rango di $[\mathbf{L}(\lambda_i^D)]$ con quello di $[\mathbf{L}(\lambda_i^D) | \mathbf{v}^D]$ ci si rende ben presto conto che, anche se il sistema di attuazione potrebbe sembrare più efficace, esso non è ancora sufficiente a garantire l'ottenimento dell'obiettivo: anche in questa situazione, pur essendo presenti due forze che agiscono sul sistema, la richiesta che viene fatta si discosta di molto da quelle che sono le reali possibilità.

Vero è che nella situazione migliore, si riesce comunque ad avvicinarsi maggiormente a \mathbf{v}^D rispetto al caso in cui agisce un'unica forza. Infatti ora risulta che:

$$\bar{\mathbf{v}}^A = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.0980 \\ -0.0074 \end{Bmatrix}$$

Anche a prima vista si nota subito come la seconda e la terza componente siano ora più prossime al valore nullo rispetto a prima. Ciò significa che l'azione della seconda forza, nelle migliori delle ipotesi, ha un'influenza benevola e riesce comunque a far sì che il primo autovettore coincida maggiormente con quello desiderato.

Per calcolare sia le modifiche attive che quelle passive in questa nuova situazione bisogna riformulare correttamente il problema corrispondente, in quanto ora sono presenti sei incognite in più (i tre guadagni di accelerazione e i tre guadagni di posizione della nuova forza che agisce sulla terza massa). Questo lo si fa ripercorrendo quanto già introdotto nel paragrafo 3.5.

Considerando quindi entrambe le forze si ha:

$$(M + \Delta M_{pass}) \ddot{x} + (K + \Delta K_{pass}) x = B \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

in cui, visto che ora è presente anche la seconda forza, B è espressa nella nuova forma indicata in 3.7.1.

Esplicitando le tre forze, ed eseguendo la moltiplicazione a destra dell'uguale si ottiene:

$$\begin{aligned} (M + \Delta M_{pass}) \ddot{x} + (K + \Delta K_{pass}) x &= \\ &= \begin{Bmatrix} K_{11}^A \ddot{x}_1 + K_{12}^A \ddot{x}_2 + K_{13}^A \ddot{x}_3 + K_{11}^P x_1 + K_{12}^P x_2 + K_{13}^P x_3 \\ 0 \\ K_{31}^A \ddot{x}_1 + K_{32}^A \ddot{x}_2 + K_{33}^A \ddot{x}_3 + K_{31}^P x_1 + K_{32}^P x_2 + K_{33}^P x_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

esprimibile anche come:

$$\begin{aligned} (M + \Delta M_{pass}) \ddot{x} + (K + \Delta K_{pass}) x &= \\ &= \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A & K_{13}^A \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^A & K_{32}^A & K_{33}^A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P & K_{13}^P \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^P & K_{32}^P & K_{33}^P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

e portando tutto a sinistra del simbolo di uguaglianza:

$$\begin{aligned} \left(M + \Delta M_{pass} - \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A & K_{13}^A \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^A & K_{32}^A & K_{33}^A \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \\ + \left(K + \Delta K_{pass} - \begin{bmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P & K_{13}^P \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^P & K_{32}^P & K_{33}^P \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Perciò le nuove matrici ΔM e ΔK divengono:

$$\Delta M = \Delta M_{pass} - \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A & K_{13}^A \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^A & K_{32}^A & K_{33}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta m_1 - K_{11}^A & -K_{12}^A & -K_{13}^A \\ 0 & \Delta m_2 & 0 \\ -K_{31}^A & -K_{32}^A & \Delta m_3 - K_{33}^A \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta K &= \Delta K_{pass} - \begin{bmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P & K_{13}^P \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^P & K_{32}^P & K_{33}^P \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_{13} - K_{11}^P & -\Delta k_2 - K_{12}^P & -\Delta k_{13} - K_{13}^P \\ -\Delta k_2 & \Delta k_2 + \Delta k_{j2} + \Delta k_3 & -\Delta k_3 \\ -\Delta k_{13} - K_{31}^P & -\Delta k_3 - K_{32}^P & \Delta k_3 + \Delta k_{j3} + \Delta k_{13} - K_{33}^P \end{bmatrix} \end{aligned}$$

nelle quali vengono a combinarsi assieme sia le modifiche passive che tutte le modifiche attive, compresi i nuovi guadagni relativi alla seconda forza inserita, dando vita ad una struttura asimmetrica.

Anche le nuove matrici \mathbf{U}_m ed \mathbf{U}_k avranno una struttura più complessa rispetto al caso precedente. Dal solito calcolo già eseguito più volte precedentemente risulta che:

$$\mathbf{U}_m = \begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 & -U_1 & -U_2 & -U_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 & 0 & 0 & 0 & -U_1 & -U_2 & -U_3 \end{bmatrix}$$

mentre

$$\mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} U_1 & U_1 - U_2 & 0 & 0 & 0 & U_1 - U_3 & -U_1 & -U_2 & -U_3 & \dots \\ 0 & U_2 - U_1 & U_2 - U_3 & U_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & U_3 - U_2 & 0 & U_3 & U_3 - U_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & & & & & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \dots & -U_1 & -U_2 & -U_3 \end{bmatrix}$$

calcolando la matrice $\mathbf{U} = [\omega^2 \mathbf{U}_m \mid \mathbf{U}_k]$, ed il vettore $\mathbf{b} = [\mathbf{K}\mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{u}]$ si può risolvere il problema

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

in cui ora il vettore delle incognite è:

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \\ K_{11}^A \\ K_{12}^A \\ K_{13}^A \\ K_{31}^A \\ K_{32}^A \\ K_{33}^A \\ \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_3 \\ \Delta k_{j2} \\ \Delta k_{j3} \\ \Delta k_{13} \\ K_{11}^P \\ K_{12}^P \\ K_{13}^P \\ K_{31}^P \\ K_{32}^P \\ K_{33}^P \end{array} \right\}$$

Con le richieste che si desidera fare, imponendo alle modifiche gli stessi limiti del caso precedente, inserendo il termine di regolarizzazione per pesare le modifiche passive dieci volte in più rispetto a quelle attive così da preferire le seconde alle prime, utilizzando δ (valore ricavato dalla L-curve ottenuta per questo caso), e risolvendo infine ancora una

volta con la funzione *lsqlin* si è ottenuta la soluzione riportata di seguito:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0,5102 \\ 0 \\ 0 \\ -63,3032 \\ 0 \\ 0 \\ 2,2500 \\ 0 \\ 0 \\ 7,4815e-05 \\ 0,0111 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7,3009e-05 \\ -0,0106 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0028 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Modificando il sistema secondo quanto stabilito dalla soluzione appena ottenuta, il primo autovettore ed il primo autovalore diventano:

$$\bar{\mathbf{v}}_{1pass-att} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.1193 \\ 0.0627 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1pass-att} = 8751.9$$

la cui corrispondente frequenza è:

$$f_{1pass-att} = 14.8892Hz$$

Confrontando questi risultati con quelli ottenuti nel caso di utilizzo di un'unica forza, riportati a pagina 55 si osserva che effettivamente con l'impiego di una seconda forza la situazione ottenuta sia migliore rispetto a prima. Soprattutto per quanto riguarda la terza componente dell'autovettore ottenuto, si nota come essa ora sia molto più prossima a zero. Questo è dovuto sicuramente al fatto che tale termine corrisponde al grado di libertà in cui è stata applicata la nuova forza (spostamento della massa m_3), ed avendo quindi ora la possibilità di intervenire direttamente su questa grandezza risulta molto più semplice far sì che la componente dell'autovettore a cui si riferisce, assuma il valore desiderato.

Per una verifica del miglioramento ottenuto è possibile confrontare i coseni tra il primo autovettore dopo le modifiche e l'autovettore desiderato, ottenuto in quella sede, con il coseno tra gli stassi autovettori ottenuto ora, che è:

$$\cos \theta_{1pass-att} = 0.9910$$

Nella nuova situazione il coseno è aumentato e risulta più prossimo al valore unitario, praticamente quasi coincidente con esso, segno che vi è stato un avvicinamento maggiore alla situazione desiderata. Daltronde di questo ci si può rendere conto anche osservando direttamente $\bar{\mathbf{v}}_{1pass-att}$: se si accetta una piccola approssimazione, si può ritenere che esso coincida con \mathbf{v}^D (e non a caso anche il coseno dell'angolo tra questi due, risulta essere

quasi unitario).

Anche per quanto riguarda il valore dell'autovettore e quindi della frequenza del primo modo di vibrare si nota un leggero miglioramento, segno che, come già detto, maggiore è il numero di gradi di libertà attuati del sistema, e più facile risulta soddisfare le richieste su tutte e tre le componenti dell'autovettore. Paradossalmente infatti se su ogni massa agisse una forza distinta, avendo la possibilità di controllare i tre corpi direttamente ed indipendentemente, si riuscirebbe a farli muovere come si vuole ottenendo quindi qualsiasi forma modale.

Daltronde questo è anche intuibile, perché se si pensa che ognuna delle tre masse venga mossa da una forza distinta, viene quasi spontaneo credere che possano essere considerate come tre sistemi a sé, o quantomeno, che ognuna di esse si muoverà secondo quanto stabilito dalla forza corrispondente. Basterà quindi determinare l'opportuna forza necessaria far fare alla singola massa ciò che si vuole e quindi all'intero sistema quanto era desiderato.

Il caso applicativo del braccio robotico a 2 gradi di libertà sottoattuato, con giunto elastico

4.1 Introduzione

In questo capitolo si cercherà di applicare la teoria della Structural Modification e del controllo ibrido ad un secondo sistema, il quale può avere una rilevanza anche dal punto di vista pratico. Esso infatti potrebbe rappresentare un braccio robotico deformabile, in cui l'elasticità distribuita del membro viene approssimata mediante un'elasticità concentrata. Un modello di questo tipo è ad esempio utilizzabile nel software multiody “working Model” per rappresentare in modo semplice (e molto approssimato) membri flessibili. In ogni caso la teoria qui sviluppata può essere applicata a sistemi sottoattuati con accoppiamento elastico, con un numero arbitrario di gradi di libertà. Esempi rilevanti possono essere accoppiamenti motore carico con riduttore non perfettamente rigido. I risultati vanno quindi visti con una rilevanza più generale.

Data la verosimiglianza del sistema, il comportamento che si cercherà di imporre ad esso sarà legato ad una particolare applicazione e tutti i ragionamenti saranno fatti in funzione di un ben preciso obiettivo che si vorrà ottenere.

Apparentemente, dato il minor numero di elementi e componenti che lo costituiscono, ma soprattutto dato che esso sarà un sistema a due soli gradi di libertà, si potrebbe pensare che l'applicazione della teoria già analizzata nei capitoli precedenti risulti molto più immediata e generi meno problematiche rispetto ad esempio al caso a tre gradi di libertà analizzato nel capitolo 3.

Purtroppo ci si renderà presto conto che l'apparente semplicità del problema non si tradurrà in un ottenimento immediato di risultati validi e corretti. La natura del sistema, il fatto che ci si porrà in una condizione fortemente sottoattuata, e le richieste abbastanza azzardate che verranno fatte inizialmente, determineranno l'insorgere di una serie di problemi che verranno risolti efficacemente solo nei capitoli successivi.

4.2 Costruzione del modello

Si consideri il sistema rappresentato in figura 4.1 costituito da due aste accoppiate tramite un giunto rotoidale elastico, la prima delle quali abbia massa m_1 e lunghezza l_1 , e sia calettata ad una estremità su un motore da considerarsi come telaio. La massa e la lunghezza della seconda asta siano rispettivamente m_2 ed l_2 . Inoltre all'estremità della prima asta sia presente una massa concentrata m_E che schematizza la presenza di un encoder utilizzato per misurare lo spostamento angolare della seconda asta.

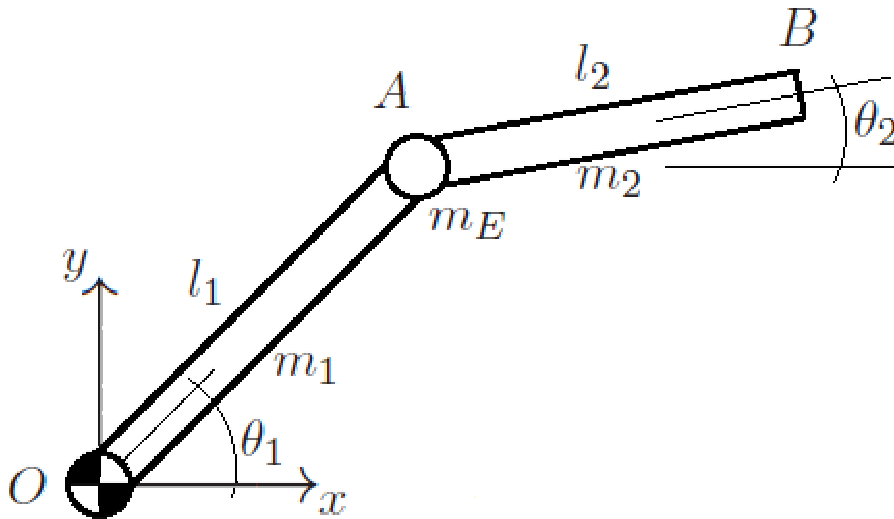


Fig. 4.1: Braccio robotico con giunto elastico.

L'elasticità del giunto rotoidale, che potrebbe essere schematizzata con una molla che collega le due aste, ma che per semplicità non è stata rappresentata in figura 4.1 per alcuni impieghi potrebbe essere considerata come un parametro parassita, non desiderato ma dovuto all'effetto dell'inevitabile flessione che caratterizza le due aste. Per altre applicazioni potrebbe essere invece previsto un elemento elastico in corrispondenza della giunzione tra le due. Di fatto quindi, in questa sede verrà considerato anche questo effetto e si assumerà che la costante elastica di tale elemento sia k . Inoltre si ipotizza che nel giunto avvenga anche un fenomeno dissipativo rappresentabile con la relativa costante di smorzamento c .

I valori delle specifiche del sistema sono riportati nella tabella 4.1.

Si supponga che tutto il meccanismo giaccia nel piano orizzontale, e non sia soggetto quindi alla forza di gravità. Si consideri infine un sistema di riferimento assoluto posizionato in corrispondenza del telaio, rispetto a cui con θ_1 venga indicata la rotazione della prima asta e con θ_2 quella della seconda.

Per ricavare il modello di tale meccanismo si esprimono prima di tutto le energie cinetiche T_1 e T_2 delle due aste.

Nel primo caso, visto che la massa dell'encoder viene considerata come facente parte dell'asta con cui è solidale, e ipotizzandola concentrata nel punto A, l'energia cinetica della prima asta sarà calcolabile sommando l'energia cinetica dell'asta vera e propria con l'energia cinetica della massa m_E determinata con il teorema di König:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_E (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) \quad (4.2.1)$$

in cui $J_1 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + J_M$ è il momento d'inerzia della prima asta considerato come la somma del momento d'inerzia vero e proprio calcolato rispetto al suo asse di rotazione che

m_1	$0.3kg$
m_2	$0.021kg$
m_E	$0.1kg$
k	$0.1765N/m$
c	$2.214 * 10^{-4}(Ns)/m$

Tab. 4.1: Parametri del braccio robotico.

passa per l'estremità in cui essa è collegata al motore (tale punto coincide con l'origine del sistema di riferimento scelto) e all'inerzia stessa del motore pari a $0.000027kgm^2$. Con \dot{x}_A e \dot{y}_A si indicano le velocità del punto A espresse rispetto al sistema di riferimento considerato:

$$\dot{x}_A = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1$$

$$\dot{y}_A = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1$$

che elevate al quadrato divengono:

$$\dot{x}_A^2 = l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2$$

$$\dot{y}_A^2 = l_1^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2$$

Sostituendo quindi nell'equazione 4.2.1, e tenendo conto che $\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 = 1$ si ottiene l'espressione definitiva dell'energia cinetica della prima asta:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_E (l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2) = \\ &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_E l_1^2 \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} (J_1 + m_E l_1^2) \dot{\theta}_1^2 \end{aligned}$$

L'energia cinetica della seconda asta è la somma dell'energia cinetica rispetto al baricentro e dell'energia cinetica di traslazione del suo centro di massa:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{G_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_{G_2}^2 + \dot{y}_{G_2}^2) \quad (4.2.2)$$

in cui J_{G_2} è il momento d'inerzia rispetto al baricentro, le cui coordinate sono x_{G_2} e y_{G_2} , e quindi il termine $(\dot{x}_{G_2}^2 + \dot{y}_{G_2}^2)$ ne rappresenta la velocità:

$$J_{G_2} = \frac{1}{12} m_2 l_2^2$$

$$\dot{x}_{G_2} = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \dot{\theta}_2$$

$$\dot{y}_{G_2} = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \dot{\theta}_2$$

vale quindi che:

$$\dot{x}_{G_2}^2 = l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 l_2 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{l_2^2}{4} \sin^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$\dot{y}_{G_2}^2 = l_1^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 l_2 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{l_2^2}{4} \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2$$

Sostituendo nella 4.2.2 si ha:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 \sin^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + m_2 l_1^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \right) \quad (4.2.3) \end{aligned}$$

tenendo conto che $\sin^2 \theta_i + \cos^2 \theta_i = 1$, la 4.2.3 diventa:

$$T_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2) \right) \quad (4.2.4)$$

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti si può pensare che $\theta_1 \simeq \theta_2$, per cui è anche lecito assumere:

$$(\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2) = 1$$

e quindi l'eq. 4.2.4 diventa:

$$T_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right)$$

In definitiva, l'energia cinetica della seconda asta risulta essere:

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

in cui, nel primo termine a destra dell'uguale, è evidente la presenza del suo momento d'inerzia calcolato rispetto all'estremità in cui essa è accoppiata alla prima asta ($J_2 = \frac{1}{3} m_2 l_2^2$). Quindi sostituendo si ha:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

Per il principio di conservazione dell'energia, il lavoro è uguale alla somma algebrica dell'energia cinetica delle due aste e dell'energia accumulata per la presenza dell'accoppiamento elastico:

$$L = T_1 + T_2 - U \quad (4.2.5)$$

in cui $U = \frac{1}{2} k (\theta_1 - \theta_2)^2$ è l'energia accumulata nell'elasticità del giunto, avente rigidezza k . Sostituendo quindi nella 4.2.5, il lavoro sarà:

$$L = \frac{1}{2} (J_1 + m_E l_1^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} k \theta_1^2 + k \theta_1 \theta_2 - \frac{1}{2} k \theta_2^2$$

A tal punto è possibile applicare l'equazione di Lagrange, che nel caso generale è:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \quad \text{con} \quad i = 1, 2 \quad (4.2.6)$$

Per proseguire è quindi necessario prima calcolare le varie derivate parziali che compaiono nella 4.2.6:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (J_1 + m_E l_1^2) \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2$$

che derivata nel tempo diventa:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (J_1 + m_E l_1^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2$$

L'altra derivata parziale è invece:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -k \theta_1 + k \theta_2$$

per cui sostituendo le due derivate parziali nella 4.2.6 risulta che il Lagrangiano calcolato per θ_1 sarà:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = (J_1 + m_E l_1^2 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + k \theta_1 - k \theta_2$$

Ripetendo gli ultimi calcoli anche per θ_2 si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = J_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1$$

derivando:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = J_2 \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1$$

e poi:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = k\theta_1 - k\theta_2$$

per finire sostituendo ancora in 4.2.6 per calcolare il Lagrangiano nel caso di θ_2 :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = J_2 \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 - k\theta_1 + k\theta_2$$

Conviene a questo punto riscrivere in forma matriciale le espressioni dei due Lagrangiani appena calcolati in modo da esprimerli in un'unica equazione:

$$\begin{bmatrix} J_1 + m_E l_1^2 + m_2 l_1^2 & \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \\ \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 & J_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.2.7)$$

Da ultimo è necessario sostituire l'espressioni di $\mathbf{0}$ che rappresenta la componente lagrangiana della coppia applicata dall'esterno al sistema in esame. Considerando che solo il primo membro del meccanismo sia attuato, si avrà che:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\xi_2 = c(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = c\dot{\theta}_1 - c\dot{\theta}_2$$

in cui τ rappresenta la coppia motrice che l'attuatore applica alla prima asta.

Si può inoltre inserire anche la funzione di dissipazione, per considerare lo smorzamento del giunto ed ottenere l'espressione definitiva in forma matriciale dell'equazione differenziale che regola in comportamento del sistema considerato:

$$\begin{bmatrix} J_1 + (m_E + m_2) l_1^2 & \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \\ \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 & J_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.2.8)$$

in cui compare il coefficiente viscoso del giunto c .

Tale espressione rappresenta il modello del sistema rappresentato in figura 4.1 nel caso più generale possibile in cui venga considerato anche il contributo dello smorzamento.

In forma più concisa, l'equazione precedente può anche essere espressa come segue:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tau$$

in cui \mathbf{M} è la matrice di massa del sistema, \mathbf{C} è la matrice di smorzamento, \mathbf{K} quella di rigidità e τ è la forza che agisce dall'esterno, che in questo caso è la coppia motrice.

In presenza di controllo attivo, l'espressione della forzante esterna τ sarà una combinazione lineare degli spostamenti angolari θ_1 e θ_2 e delle loro derivate prime e seconde a mezzo dei guadagni di rispettivamente posizione K_{ij}^P , velocità K_{ij}^V ed accelerazione K_{ij}^A :

$$\tau = K_{11}^A \ddot{\theta}_1 + K_{12}^A \ddot{\theta}_2 + K_{11}^V \dot{\theta}_1 + K_{12}^V \dot{\theta}_2 + K_{11}^P \theta_1 + K_{12}^P \theta_2 \quad (4.2.9)$$

Nel definire 5.4.11 si sono omessi i riferimenti. L'estensione è tuttavia ovvia. Il modello sopra riportato è stato utilizzato nel proseguo della trattazione, inizialmente senza considerare l'effetto dello smorzamento e quindi considerando nulla la matrice \mathbf{C} . Tale approssimazione potrebbe sembrare inaccettabile, ma visto il valore molto piccolo dello smorzamento in quel tipo di accoppiamenti, in realtà essa è sicuramente lecita. Successivamente, per motivi che risulteranno chiari più avanti, esso è stato considerato anche nella sua forma completa.

Se si volesse, sarebbe anche possibile inserire la matrice \mathbf{B} , utile a regolare in che modo agiscono le forzanti esterne. Essendo però in questo caso in presenza di un'unica azione esterna, per comodità si è deciso di tralasciarla, sottintendendola.

Ad ogni modo essa per il caso in esame sarebbe semplicemente:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in cui compare un unico termine unitario nella posizione (1,1) proprio perché vi è un'unica forzante che agisce dall'esterno, applicata alla prima massa.

Nell'applicazione della Structural Modification, analizzata più avanti nel capitolo, oltre alla variazione della massa delle due aste si ipotizzerà di poter applicare una massa puntiforme anch'essa variabile in un punto qualsiasi della seconda asta, che per comodità diventerà in un secondo momento l'estremo punto B .

E' utile quindi ricavare anche il modello del sistema in cui sia presente una massa che chiameremo m_3 posizionata nel caso generale tra i punti A e B , ad una distanza l_3 dal primo. Anche se in verità tale massa sarà considerata nulla (perché essa viene considerata solo in termini di modifica di massa e non di quantità realmente esistente), il modello così ricavato sarà utile per poter costruire le matrici necessarie a formulare il problema della Structural Modification con il quale determinare l'entità di una eventuale modifica del suo valore che equivarrebbe ad aggiungere o togliere massa in tale punto.

Considerando allora anche il contributo di m_3 , l'energia cinetica della seconda asta diventa:

$$T_2 = \frac{1}{2}J_{G_2}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_{G_2}^2 + \dot{y}_{G_2}^2) + \frac{1}{3}m_3(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2)$$

in cui

$$\dot{x}_3 = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - l_3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2$$

$$\dot{y}_3 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_3 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2$$

sviluppando tutti i calcoli e riprendendo le ipotesi fatte precedentemente nel caso in cui non si è considerata la massa m_3 si ottiene:

$$T_2 = \frac{1}{2}(J_2 + m_3 l_3^2)\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2 l_1 l_2 + 2m_3 l_1 l_3)\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

Ricalcolando poi le derivate parziali e raggruppando il tutto in forma matriciale si arriva alla nuova espressione della matrice della dinamica, e quindi (sia omessa la matrice \mathbf{C}):

$$\begin{bmatrix} J_1 + (m_E + m_2 + m_3)l_1^2 & \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 + m_3 l_1 l_3 \\ \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 + m_3 l_1 l_3 & J_2 + m_3 l_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tau$$

4.2.1 Stima dei parametri del sistema

La stima dei parametri del sistema, in particolare della rigidità della molla che simula l'elasticità del giunto, e del suo coefficiente di smorzamento, è stata fatta sperimentalmente sfruttando il metodo del decremento logaritmico. Tale metodo, per un sistema ad un grado di libertà riconducibile al classico sistema massa-molla-smorzatore come quello rappresentato in figura 4.2, permette di ricavare le grandezze sopra citate a partire dalla sua risposta libera, conseguente allo sbilanciamento rispetto ad una condizione di equilibrio.

Un sistema del genere, in assenza di forze esterne che agiscono su di esso può essere

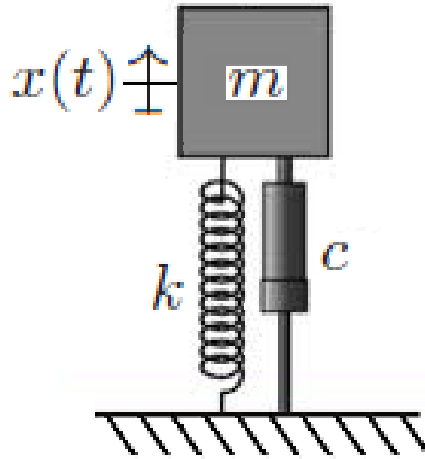


Fig. 4.2: Oscillatore semplice smorzato.

descritto dall'equazione differenziale

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (4.2.10)$$

In cui m rappresenta il valore della massa, c il coefficiente di smorzamento dello smorzatore viscoso, k la costante di rigidità della molla e $x(t)$ l'andamento dello spostamento della massa in direzione verticale.

Dividendo l'equazione precedente per m la si può esprimere in forma canonica:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0 \quad (4.2.11)$$

con

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

L'equazione omogenea associata all'equazione differenziale 4.2.11 è:

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (4.2.12)$$

In assenza di forze esterne, la soluzione della 4.2.10 sarà nella forma:

$$x(t) = A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t}$$

in cui A_1 e A_2 sono costanti, mentre λ_1 e λ_2 sono le soluzioni dell'equazione 4.2.12 di secondo grado. Se come nel caso considerato $0 < \xi < 1$ tali soluzioni valgono:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_d$$

dove

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

Con vari passaggi che per brevità non verranno qui riportati si giunge all'espressione finale dello spostamento $x(t)$:

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

Lo spostamento della massa m ha quindi un andamento caratterizzato da una cosinusoide la cui ampiezza dipende dalla condizione iniziale A , involupata da un esponenziale decrescente, simile a quello riportato in figura 4.3

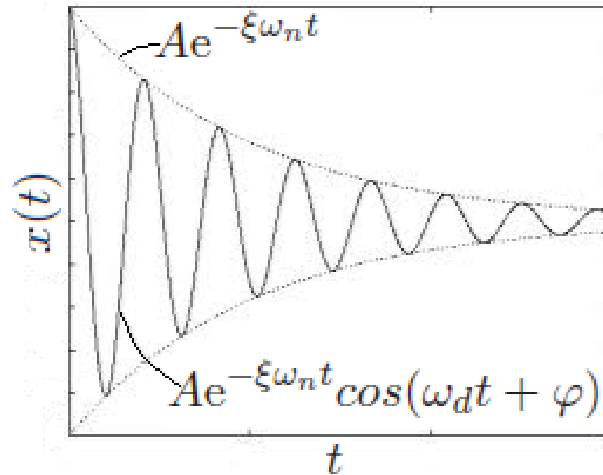


Fig. 4.3: Risposta libera di un oscillatore semplice smorzato.

Dalla figura 4.3 si può osservare come il moto libero della massa sia un moto oscillatorio smorzato nell'intorno della posizione di equilibrio, per il quale l'ampiezza delle oscillazioni è decrescente con il tempo e dipende dalla massa e dallo smorzamento del sistema. La pulsazione ω_d del moto libero è una costante dipendente unicamente dalle caratteristiche del sistema.

Quindi, a partire dalla risposta allo sbilanciamento è possibile ricavare ω_d e ξ , e successivamente calcolare i valori di k e c nell'ipotesi che $\omega_d \simeq \omega_n$, ovvero per smorzamenti bassi. Perturbando il sistema con una condizione iniziale $X_0 \neq 0$ si avrà:

$$x(t) = X_0 e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

Si supponga che il periodo dell'oscillazione di moto libero sia $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ e si considerino due massimi relativi consecutivi x_1 e x_2 corrispondenti agli istanti $t_1 = t$ e $t_2 = t + T$ le cui espressioni sono:

$$x_1 = X_0 e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t)$$

e

$$x_2 = X_0 e^{-\xi\omega_n(t+T)} \cos(\omega_d(t+T))$$

Il loro rapporto sarà pari a:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{X_0 e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t)}{X_0 e^{-\xi\omega_n(t+T)} \cos(\omega_d(t+T))}$$

e, visto che i valori che l'espressione armonica assume ad inizio e fine periodo sono uguali, l'equazione precedente può essere semplificata come segue:

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\xi\omega_n T}$$

definendo con δ il logaritmo naturale di tale rapporto:

$$\delta := \ln \frac{x_1}{x_2} = \xi\omega_n T$$

si ha che:

$$\delta = \xi \omega_n \frac{2\pi}{\omega_d} \simeq 2\pi\xi$$

derivante dal fatto che come si è ipotizzato, lo smorzamento è piccolo e quindi vale $\omega_d \simeq \omega_n$. Andando quindi a misurare i valori che lo spostamento assume in due picchi consecutivi x_1 e x_2 è possibile risalire al valore dello smorzamento

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x_1}{x_2}$$

E' quindi poi possibile risalire al valore della pulsazione naturale:

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{2\pi}{T\sqrt{1 - \xi^2}}$$

e quindi al valore di c e di k :

$$k = m\omega_n^2 \quad c = \frac{m\omega_n\delta}{\pi}$$

Per applicare tale metodo al meccanismo di figura 4.1 di pagina 64 ci si è dovuti riportate in una condizione in cui il sistema possa essere considerato ad un grado di libertà, e ciò lo si è fatto fissando la prima asta al banco di lavoro ed andando a considerare lo spostamento angolare della seconda asta (l'andamento di θ_2 misurato con un encoder). Ovviamente, per applicare il metodo del decremento logaritmico sopra descritto, la massa sarà rappresentata dal momento d'inerzia della seconda asta, calcolato rispetto l'estremo di rotazione:

$$J_2 = \frac{1}{3}m_2l_2^2$$

Sono state fatte tre diverse prove, e i valori di smorzamento e di rigidezza sono stati determinati come media aritmetica dei risultati ottenuti per ognuna di esse.

L'andamento di θ_2 per una delle diverse prove è rappresentato nella figura ??, con l'indicazione delle rispettive misure di ampiezza da considerare. Nella tabella 4.2 sono invece

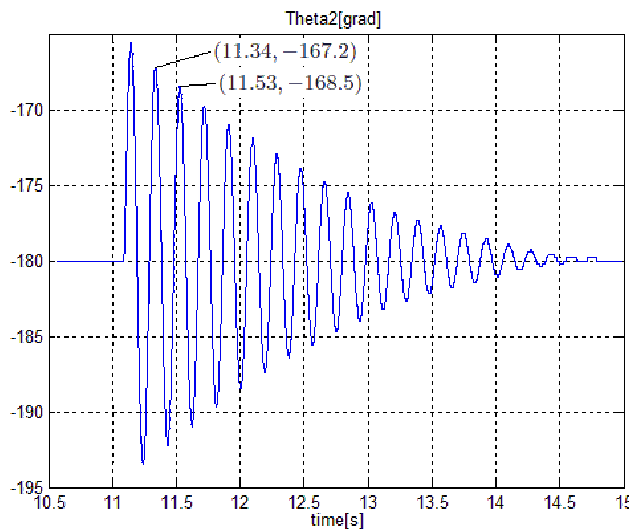


Fig. 4.4: Andamento di θ_2 .

riportati i singoli risultati di ognuna delle tre prove e la media di essi.

Per ogni prova si è applicato il metodo del decremento logaritmico descritto sopra per ricavare i valori del fattore di smorzamento ξ , del coefficiente di smorzamento c e della

	<i>prova1</i>	<i>prova2</i>	<i>prova3</i>	<i>MEDIA</i>
ξ	0.02	0.02587	0.017	0.021
c	$2.104 * 10^{-4}$	$2.767 * 10^{-4}$	$1.776 * 10^{-4}$	$2.214 * 10^{-4} Ns/m$
k	0.1757	0.1816	0.1722	$0.1765 N/m$

Tab. 4.2: Stima dei parametri.

costante di rigidezza elastica k . Si è poi fatta la media dei tre risultati parziali per ottenere quello definitivo. Tale valore è quello riportato nell'ultima colonna della tabella e sarà utilizzato nel proseguo.

4.2.2 Rappresentazione nello spazio di stato

Un modo alternativo al classico modello (come ad esempio quello appena ricavato nel paragrafo precedente), per descrivere un sistema lineare tempo invariante, consiste nella rappresentazione nello spazio di stato. Tale metodo fornisce un modo compatto e conveniente di modellare e analizzare sistemi con più ingressi ed uscite (MIMO) e, data la sua comodità, verrà talvolta utilizzato nei capitoli successivi per proporre alcuni ragionamenti. All'atto pratico tuttavia non è stato usato nei metodi proposti.

Conviene quindi a questo punto ricavare tale tipo di rappresentazione anche per il sistema di interesse, considerato ad inizio capitolo.

Tale rappresentazione permette di esprimere l'evoluzione dello stato di un sistema e della sua uscita, in funzione dello stato stesso e del suo ingresso. Lo stato di un sistema è costituito da un insieme di variabili con le quali è possibile descrivere completamente il sistema in un dato istante. Esso sarà quindi rappresentabile tramite un vettore. La sua evoluzione nel tempo può essere determinata attraverso delle equazioni matriciali che tengano conto anche dell'ingresso. Insieme a quest'ultimo, esso influisce pure nella determinazione dell'uscita.

In generale quindi, dato un sistema con m ingressi, p uscite ed n variabili di stato, esso potrà essere rappresentato come segue:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

in cui $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ è il *vettore di stato*, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ è il *vettore degli ingressi* del sistema, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ è il *vettore delle uscite*. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ viene detta *matrice di stato*, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ viene detta *matrice ingresso stato*, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ viene detta *matrice stato uscita* ed infine $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ è la cosiddetta *matrice ingresso uscita* del sistema.

Nel caso che si sta considerando, lo stato del sistema è costituito dalle velocità e dalle posizioni angolari delle aste che lo costituiscono:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

L'ingresso è costituito dall'unica coppia motrice τ che agisce sul primo grado di libertà del sistema:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} \tau \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tau$$

Si ipotizza inoltre di poter misurare gli spostamenti angolari di entrambe le aste, ad esempio con degli encoder, e di poter risalire anche all'informazione sulla velocità angolare corrispondente. Pertanto si può pensare che l'uscita del sistema coincida con lo stato.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Riprendendo il modello completo del sistema smorzato riportato in 4.2.8, in cui cioè venga considerato anche il contributo della matrice degli smorzamenti, è possibile scrivere:

$$\mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tau$$

riscrivibile anche come:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \mathbf{M}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tau$$

Raddoppiando di dimensione e sfruttando le proprietà di prodotto tra matrici a blocchi, è possibile scrivere l'equazione precedente anche nella forma che segue:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I}_{(2 \times 2)} & \mathbf{0}_{(2 \times 2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{0}_{(2 \times 1)} \end{Bmatrix} \tau$$

in cui possono essere evidenziate le matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I}_{(2 \times 2)} & \mathbf{0}_{(2 \times 2)} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{0}_{(2 \times 1)} \end{Bmatrix}$$

che in questo caso sarà in realtà un vettore.

Infine, sulla base delle considerazioni già fatte, per le quali l'uscita del sistema è uguale al suo ingresso, è possibile stabilire:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_{(4 \times 4)} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{(4 \times 1)}$$

4.3 Le forme modali desiderate

Come è già stato affermato, nella pratica potrebbe capitare di avere a che fare con un meccanismo simile o riconducibile a quello rappresentato in figura 4.1, o con uno simile e quindi riconducibile ad esso. Si pensi ad esempio a dei manipolatori che operano in una catena di montaggio per movimentare prodotti da una posizione all'altra, oppure si immagini di avere un braccio robotizzato utilizzato per eseguire qualche lavorazione con degli utensili montati alla sua estremità. In entrambi questi due semplici esempi di applicazione è comprensibile che se le vibrazioni dell'organo terminale, eccedono una certa soglia esse, non possano essere accettate.

Si consideri in particolare il primo esempio e come detto si assuma che il meccanismo in questione schematizzi la struttura di un apparato che, dopo aver prelevato un oggetto da una posizione, attraverso un movimento rotatorio della prima asta lo debba rilasciare in un'altra. Ovviamente per minimizzare il tempo di ciclo e per far sì che il posizionamento avvenga con la maggior precisione possibile è desiderabile che la seconda asta non compia movimenti relativi rispetto alla prima, ma la segua nel movimento come se tutto il sistema fosse rigido e le due aste formino un unico corpo, ovvero che il membro non si deformi.

A causa dell'elasticità del giunto e del fatto che è presente un'unico attuatore sulla prima asta e non si ha quindi la possibilità di intervenire direttamente sulla seconda, ovviamente il naturale movimento del sistema non sarà come quello descritto, ma la seconda asta avrà un comportamento indesiderato che si tradurrà in piccoli movimenti oscillatori non voluti della sua estremità, i quali si sovrapporranno al grande movimento principale utile per eseguire il posizionamento.

Dalla teoria della meccanica delle vibrazioni si sa che grazie all'analisi modale il movimento di un sistema può essere scomposto in più componenti, i modi, i quali si combinano linearmente secondo gli autovettori della matrice della dinamica. Inoltre si sa che le componenti di ogni autovettore si riferiscono direttamente ai gradi di libertà del sistema (a meno di una costante moltiplicativa) e quindi il loro valore rispecchia l'entità relativa dello spostamento dei punti considerati per ogni modo di vibrare.

Si potrebbe quindi pensare di imporre al sistema, ad esempio sfruttando i metodi visti nel capitolo 2, le forme modali adatte a far sì che il punto in cui è posizionato l'utensile si muova secondo quanto desiderato, e cioè, esegua una rotazione rigida senza vibrazione sovrapposta.

Essendo il sistema a due soli gradi di libertà, esso sarà caratterizzato da altrettante forme modali, ognuna legata ad un autovettore della matrice della dinamica. Verrà quindi imposto che la prima forma modale, quella a frequenza minore, sia quella che determina il movimento "rigido", la seconda quella che impedisce le vibrazioni del punto terminale della seconda asta.

Si osservi che tale strategia differisce da quella di smorzare i poli: consiste nel fare in modo che l'energia dell'oscillazione non coinvolga il punto nel quale è posizionato l'utensile. Essa si può quindi integrare al tradizionale approccio di smorzare i poli.

Perché il sistema si muova di movimento rigido, le aste si devono comportare come se fossero solidali. Visto che il sistema di riferimento è assoluto, ad una rotazione della prima asta, deve corrispondere una rotazione della seconda, della stessa quantità. Se infatti i due angoli θ_1 e θ_2 risultano essere uguali, si ottiene un movimento rigido di tutto il meccanismo nella sua prima componente.

Per limitare al minimo le vibrazioni si può pensare invece di assegnare alla seconda forma modale una struttura tale da far sì che i movimenti delle due aste a tale frequenza, si compensino a vicenda: nell'ipotesi di piccole deformazioni, se le due aste hanno la stessa lunghezza, per determinare un movimento nullo del punto finale, esse dovranno ruotare rispetto al sistema di riferimento assoluto di una quantità uguale e contraria. Infatti così

facendo il movimento del punto B , nella direzione trasversale all'asse del meccanismo, sarà nullo, mentre al limite vi sarà un movimento lungo la direzione dell'asse stesso. Tuttavia nell'ipotesi di spostamenti piccoli, tale movimento longitudinale sarà trascurabile.

Quindi a fronte di una rotazione della prima asta, se la seconda si muove di una quantità uguale e contraria, l'effetto che il primo movimento avrebbe sullo spostamento in direzione trasversale dell'estremità della seconda asta, verrà neutralizzato dal movimento di quest'ultima.

Sempre nell'ipotesi di piccoli spostamenti potrà essere considerata trascurabile anche la rotazione indesiderata della quale risentirà l'organo terminale, attorno al suo asse perpendicolare al piano.

Visto che, come già detto, le forme modali si rispecchiano nei valori che assumono gli autovettori della matrice della dinamica, e che, nel senso della meccanica delle vibrazioni, le componenti di ogni autovettore, sono strettamente legate al valore degli spostamenti (più in generale delle variabili libere, e quindi in questo caso ai due angoli θ_1 e θ_2), il valore che esse dovranno assumere viene determinato a partire dalle rotazioni che si vogliono imprimere al sistema per ogni modo di vibrare. Siccome è stato stabilito che la prima forma modale sia caratterizzata da due uguali rotazioni, tali saranno anche le componenti del primo autovettore cioè quello legato all'autovalore più piccolo:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Invece, volendo che nella seconda forma modale le rotazioni siano uguali e contrarie, anche le componenti del secondo autovettore dovranno avere la stessa caratteristica, e pertanto esso sarà:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (4.3.1)$$

con questa seconda supposizione infatti, se il movimento della prima asta tenderebbe a spostare l'organo terminale dalla sua posizione iniziale, il movimento della seconda tende a riportarlo in essa.

Ovviamente essendo gli autovettori definiti a meno di una costante moltiplicativa, questo fenomeno vale per qualsiasi valore di rotazione e quindi anche nel caso in cui la prima asta ruoti di una quantità negativa.

Per capire meglio il concetto può essere conveniente osservare la figura 4.5 in cui vengono rappresentati i due contributi modali separatamente. Per comodità le due aste vengono schematizzate con una linea priva di dimensioni.

Nella parte sinistra della figura 4.5 viene rappresentato il primo modo di vibrare che si

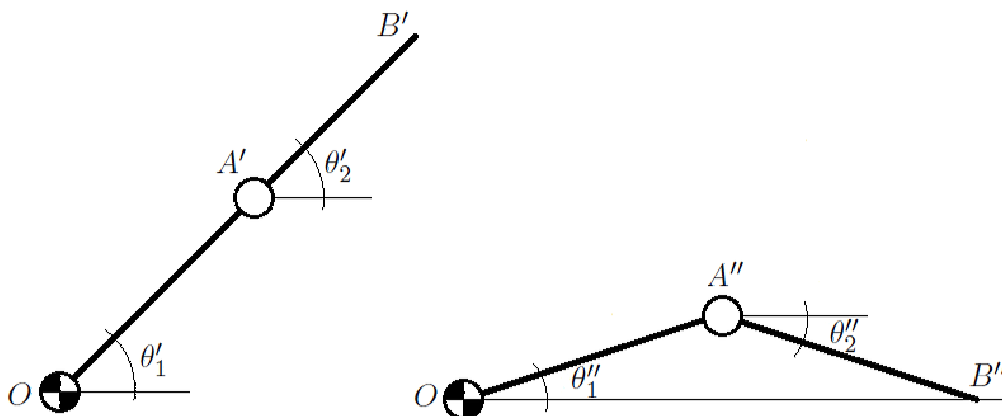


Fig. 4.5: Rappresentazione dei due modi di vibrare desiderati.

vuole imporre al sistema. Si può notare come il movimento in questo caso sia perfettamente rigido e quindi adatto ad eseguire ad esempio un posizionamento. Sempre riferendosi alla figura, θ_1' e θ_2' sono gli angoli di rotazione delle due aste dovuti al primo modo di vibrare. Essendo essi legati al valore delle componenti del primo autovettore che sono state imposte essere uguali, anche tali angoli lo saranno.

Nella parte destra della figura viene invece rappresentato il secondo modo di vibrare nel caso in cui venga imposto al sistema l'autovettore riportato in 4.3.1. Ipotizzando che le rotazioni sino piccole si può notare come la posizione del punto estremo della seconda asta coincida con quella di riposo, a conferma che con questa strategia è possibile annullare gli spostamenti. Gli angoli θ_1'' e θ_2'' rappresentano l'entità delle due rotazioni dovute al secondo modo di vibrare, e sono pertanto legati ai valori delle componenti del secondo autovettore, e quindi sono uguali e contrari.

Se ora si immagina di sovrapporre al primo movimento, il secondo come viene schematizzato nella figura 4.6, si vede come si riesca ad ottenere la rotazione dell'intero meccanismo senza che il punto B risenta di alcuna oscillazione.

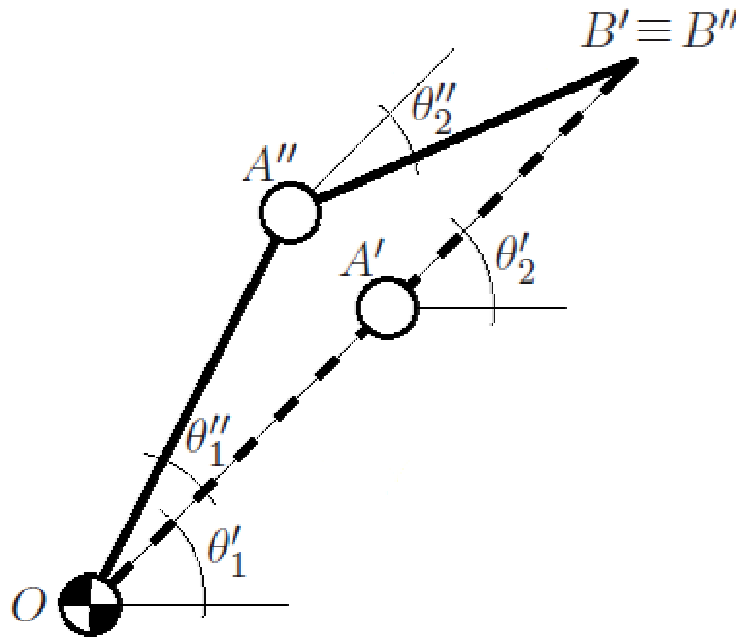


Fig. 4.6: Sovrapposizione dei due modi di vibrare desiderati.

Tutto il ragionamento è valido se come in questo caso non si considera la dinamica interna del sistema, nel senso che non ci si preoccupa di quello che avviene tra il telaio (punto O) e l'estremità (punto B) perché non si è interessati allo spostamento dei singoli punti che formano le due aste, ma solamente al punto finale.

Sempre riferendosi all'analisi modale, un tale modo di agire corrisponde a spostare il nodo del secondo modo di vibrare all'estremità della seconda asta, in corrispondenza del punto B che non risentirà quindi di alcuna vibrazione ma solamente del movimento rigido impresso al meccanismo. In corrispondenza di tale punto potrà quindi essere montato l'organo terminale, ed ottenere così un funzionamento corretto di tutto il sistema.

I due autovettori considerati genereranno delle forme modali che combinandosi insieme permetteranno di ottenere il comportamento voluto. Essi saranno quindi gli autovettori desiderati che si cercherà di assegnare al sistema. Applicando la Structural Modification si calcoleranno quindi le modifiche passive ed attive necessarie, per far sì che i due autovettori del sistema assumano tale struttura in modo da garantire un movimento rigido del meccanismo, privo di vibrazioni.

Come detto il ragionamento è valido nell'ipotesi che le due aste abbiano uguale lunghezza. Nel caso considerato invece, si può notare che la lunghezza delle due aste differisce leggermente. Comunque il principio di annullamento dell'oscillazione sul punto B resta valido purché venga rispettata la seguente relazione:

$$l_1 U_1 + l_2 U_2 = 0$$

Tale relazione è ottenibile da semplici considerazioni geometriche ed assumendo che per piccole rotazioni valga: $\sin \theta_1 \simeq \theta_1$; così come: $\sin \theta_2 \simeq \theta_2$. In essa U_1 e U_2 sono le componenti dell'autovettore. Dalla precedente si ottiene quindi che:

$$\frac{U_1}{U_2} = -\frac{l_2}{l_1} = -0.9375$$

In definitiva, il secondo autovettore che realmente si vorrà assegnare sarà:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} -0.9375 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.3.2)$$

Ovviamente esso è molto simile a quello definito prima ¹ vista la minima differenza tra le lunghezze delle due aste.

Per chiarezza e per semplicità espositiva, nel proseguo, si farà sempre riferimento all'espressione riportata in 4.3.2 per il secondo autovettore, indicandolo con la forma

$$\mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} -l_2/l_1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Per quel che riguarda le specifiche sugli autovalori, visto che per lo scopo che ci si è posti esse non sono di fondamentale importanza dal momento che si focalizzerà l'attenzione più che altro sulla struttura degli autovettori, si è preferito lasciare un pò più di libertà. Comunque, si è ipotizzato che venga fatta una richiesta in termini un tempo di salita, la quale determini una pulsazione desiderata per il primo modo pari a $\omega_1^D = 6rad/s$.

La pulsazione desiderata per il secondo modo di vibrare è stata imposta così da essere circa otto volte più grande della prima, comunque diversa da quella del sistema nella configurazione originale allo scopo di dimostrare che essa può essere spostata intervenendo sul sistema come si vedrà più avanti. Si è scelto quindi $\omega_2^D = 50rad/s$.

Si ribadisce che tali scelte sono state fatte perché, per il caso in esame, si è voluto dar più importanza all'assegnazione dei modi di virare in termini di entità del movimento dei membri e non in termini di velocità di movimento. Pur essendo compatibili con l'apparato sperimentale a disposizione, nulla si modifica all'atto pratico se si considerano diverse scelte di autovalori.

¹Si ricorda che gli autovettori sono definiti a meno di una costante, quindi nel caso specifico i segni delle due componenti possono tranquillamente essere invertiti.

4.4 Analisi del sistema originale

Dal calcolo della matrice della dinamica del sistema originale e non controllato, in cui le matrici di massa e di rigidità sono quelle del modello del sistema ricavato nel paragrafo 4.2, si ottiene che i suoi due autovettori sono:

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{v}}_2 = \begin{Bmatrix} -0.0689 \\ 1.0000 \end{Bmatrix}$$

mentre i corrispondenti autovalori associati risultano essere:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1346.1$$

Le pulsazioni naturali dei due modi del sistema originale sono quindi:

$$\omega_{n_1} = \sqrt{\lambda_1} = 0 \text{ rad/s} \quad \omega_{n_2} = \sqrt{\lambda_2} = 36.7 \text{ rad/s}$$

Come è evidente dai risultati sopra riportati, il primo autovettore coincide già con quello desiderato, il secondo invece risulta essere molto diverso. Questo fatto potrebbe a prima vista far pensare che il raggiungimento dell'obiettivo possa essere abbastanza semplice, vista l'uguaglianza su uno dei due autovettori. Proseguendo, ci si renderà conto invece che ciò non corrisponde alla realtà dei fatti.

Si supponga di indicare la prima componente del secondo autovettore desiderato in modo letterale:

$$\bar{\mathbf{v}}_2^D = \begin{Bmatrix} \alpha \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Tale componente α dipende dalle caratteristiche del sistema attraverso una determinata relazione che stabilisce che essa sarà pari a -1 solo nel caso in cui si ammettano modifiche elevate.

Visto che per il caso in esame le modifiche sono molto limitate, con il solo intervento passivo non è possibile ottenere le forme modali desiderate.

Per quanto riguarda le modifiche attive, rifacendosi a quanto introdotto nel paragrafo 2.4 è possibile dimostrare che l'autovettore

$$\bar{\mathbf{v}}_2^D = \begin{Bmatrix} -l_2/l_1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

risulta essere non assegnabile per il sistema in esame. Infatti da una verifica numerica risulta che

$$\text{rank}[\mathbf{L}(\lambda_2^D) \mid \bar{\mathbf{v}}_2^D] \neq \text{rank}[\mathbf{L}(\lambda_2^D)]$$

in cui λ_2^D è il secondo autovalore, determinato nel paragrafo precedente. Per questo neanche con le sole modifiche attive è possibile ottenere il risultato voluto.

Nei capitoli successivi, dai risultati numerici si vedrà come applicando in un determinato modo sia modifiche attive che passive secondo un approccio ibrido, anche se non si riuscirà ad ottenere esattamente le forme modali desiderate (in quanto vi sono dei vincoli su $\Delta \mathbf{M}$ e $\Delta \mathbf{K}$ che pregiudicano tale possibilità), si arriverà comunque ad ottenere una loro approssimazione abbastanza buona.

4.5 Modifica attiva e passiva del sistema con la Structural Modification

Questo paragrafo è propedeutico ai capitoli successivi e serve solo per ricavare le varie matrici necessarie e i termini utilizzati in seguito per calcolare modifiche attive e passive secondo un approccio tipico della Structural Modification ma più elaborato.

La tecnica sarà sviluppata considerando come specifiche per le forme modali desiderate quelle introdotte nel paragrafo 4.3. Si consideri il caso in cui si vogliono calcolare sia le modifiche attive, ovvero i guadagni del controllore che genera il comando per l'attuatore, sia le modifiche passive da eseguire sul sistema, includendo tra queste anche la massa concentrata m_3 posizionata in punta al meccanismo, già introdotta alla fine del paragrafo 4.2. Verrà considerato il sistema non smorzato.

Ripercorrendo la teoria di questo metodo, introdotta nel paragrafo 2.3, integrata con il calcolo delle modifiche attive, a partire dal modello del sistema riportato nell'equazione 4.2.8 di pagina 67 è possibile formulare il problema finale in linea con quanto è stato fatto per il sistema a tre massa.

Anche in questo caso quindi le matrici ΔM e ΔK saranno costituite dalla somma di due contributi: uno dovuto alle modifiche passive (ΔM_{pass} e ΔK_{pass}) calcolate con la Structural Modification e l'altro costituito dalle modifiche attive derivanti dal calcolo dei guadagni del controllore sempre secondo un approccio riconducibile alla stessa tecnica (ΔM_{att} e ΔK_{att}), nell'ipotesi di retroazione di posizione ed accelerazione, avendo esse effetti sulle forme modali.

Riprendendo l'espressione della coppia motrice applicata alla prima asta, riportata in 5.4.11 con le ipotesi fatte è quindi possibile modellizzare il sistema qui considerato con la seguente equazione differenziale espressa in forma matriciale:

$$(M + \Delta M_{pass}) \ddot{\theta} + (K + \Delta K_{pass}) \theta = \begin{Bmatrix} K_{11}^A \ddot{\theta}_1 + K_{12}^A \ddot{\theta}_2 + K_{11}^P \theta_1 + K_{12}^P \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

esprimibile anche come:

$$\begin{aligned} (M + \Delta M_{pass}) \ddot{\theta} + (K + \Delta K_{pass}) \theta &= \\ &= \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

visto che le due matrici del termine a destra dell'uguale contengono i guadagni del controllore, cioè le modifiche attive, si ha:

$$(M + \Delta M_{pass}) \ddot{\theta} + (K + \Delta K_{pass}) \theta = \Delta M_{att} \ddot{\theta} + \Delta K_{att} \theta$$

portando tutto a sinistra del simbolo di uguaglianza, si ha:

$$(M + \Delta M_{pass} - \Delta M_{att}) \ddot{\theta} + (K + \Delta K_{pass} - \Delta K_{att}) \theta = 0$$

o in forma esplicita, considerando anche il contributo Δm_3 :

$$\begin{aligned} &\left(\begin{bmatrix} J_1 + (m_E + m_2)l_1^2 & \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \\ \frac{1}{2}m_2l_1l_2 & J_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{1_{mod}} + (\Delta m_2 + \Delta m_3)l_1^2 & \frac{1}{2}\Delta m_2l_1l_2 + \Delta m_3l_1l_3 \\ \frac{1}{2}\Delta m_2l_1l_2 + \Delta m_3l_1l_3 & J_{2_{mod}} + \Delta m_3l_3^2 \end{bmatrix} \right) + \\ &\quad - \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \\ &\quad + \left(\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta k & -\Delta k \\ -\Delta k & \Delta k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

In cui:

$$J_{1_{mod}} = \frac{1}{3}\Delta m_1 l_1^2 \quad e \quad J_{2_{mod}} = \frac{1}{3}\Delta m_2 l_2^2 \quad (4.5.1)$$

sono i momenti d'inerzia dovuti alle eventuali modifiche di massa da eseguire sul sistema. Anche in questo caso si vede come la struttura delle matrici che contengono i termini di modifica strutturale ($\Delta \mathbf{M}_{pass}$ e $\Delta \mathbf{K}_{pass}$) rispecchi quella delle corrispondenti matrici di massa \mathbf{M} (a parte per il termine Δm_3) e di rigidezza \mathbf{K} , mentre le matrici che contengono le modifiche attive ($\Delta \mathbf{M}_{att}$ e $\Delta \mathbf{K}_{att}$) siano invece non simmetriche e contengano termini diversi da zero nell'unica prima riga, visto che la forza esterna è applicata al solo primo grado di libertà del sistema.

Sommando insieme i contributi di modifica passiva con quelli di modifica attiva si ottengono le matrici $\Delta \mathbf{M}$ e $\Delta \mathbf{K}$ complessive, che saranno:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{M} &= \Delta \mathbf{M}_{pass} - \Delta \mathbf{M}_{att} = \\ &= \begin{bmatrix} J_{1_{mod}} + (\Delta m_2 + \Delta m_3)l_1^2 & \frac{1}{2}\Delta m_2 l_1 l_2 + \Delta m_3 l_1 l_3 \\ \frac{1}{2}\Delta m_2 l_1 l_2 + \Delta m_3 l_1 l_3 & J_{2_{mod}} + \Delta m_3 l_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} J_{1_{mod}} + (\Delta m_2 + \Delta m_3)l_1^2 - K_{11}^A & \frac{1}{2}\Delta m_2 l_1 l_2 + \Delta m_3 l_1 l_3 - K_{12}^A \\ \frac{1}{2}\Delta m_2 l_1 l_2 + \Delta m_3 l_1 l_3 & J_{2_{mod}} + \Delta m_3 l_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{K} &= \Delta \mathbf{K}_{pass} - \Delta \mathbf{K}_{att} = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta k & -\Delta k \\ -\Delta k & \Delta k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta k - K_{11}^P & -\Delta k - K_{12}^P \\ -\Delta k & \Delta k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Anche in questo caso, dopo aver calcolato i termini che compongono queste due matrici si interverrà sul sistema in parte modificando le sue caratteristiche ed in parte controllandolo attivamente. Per ottenere le informazioni necessarie ad operare in questi due modi si deve proseguire con il calcolo di \mathbf{U}_m ed \mathbf{U}_k a seguito dell'assegnazione del generico autovettore \mathbf{v}^D , tali che:

$$\Delta \mathbf{M} \mathbf{v}^D = \mathbf{U}_m \Delta \mathbf{m}$$

e

$$\Delta \mathbf{K} \mathbf{v}^D = \mathbf{U}_k \Delta \mathbf{k}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} J_{1_{mod}} + (\Delta m_2 + \Delta m_3)l_1^2 - K_{11}^A & \frac{1}{2}\Delta m_2 l_1 l_2 + \Delta m_3 l_1 l_3 - K_{12}^A \\ \frac{1}{2}\Delta m_2 l_1 l_2 + \Delta m_3 l_1 l_3 & J_{2_{mod}} + \Delta m_3 l_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}\Delta m_1 l_1^2 V_1 + \Delta m_2 l_1^2 V_1 + \Delta m_3 l_1^2 V_1 - K_{11}^A V_1 + \frac{1}{2}\Delta m_2 l_1 l_2 V_2 + \Delta m_3 l_1 l_3 V_2 - K_{12}^A V_2 \\ \frac{1}{2}\Delta m_2 l_1 l_2 V_1 + \Delta m_3 l_1 l_3 V_1 + \frac{1}{3}\Delta m_2 l_2^2 V_2 + \Delta m_3 l_3^2 V_2 \end{array} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}l_1^2 V_1 & l_1^2 V_1 + \frac{1}{2}l_1 l_2 V_2 & l_1^2 V_1 + l_1 l_3 V_2 & -V_1 & -V_2 \\ 0 & \frac{1}{2}l_1 l_2 V_1 + \frac{1}{3}l_2^2 V_2 & l_1 l_3 V_1 + l_3^2 V_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \\ K_{11}^A \\ K_{12}^A \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

in cui l'autovettore desiderato è stato espresso secondo le sue componenti che sono V_1 e V_2 mentre nella seconda parte, $J_{1_{mod}}$ e $J_{2_{mod}}$ sono stati esplicitati secondo le loro espressioni riportate in 4.5.1. Si ottiene quindi che:

$$\mathbf{U}_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}l_1^2 V_1 & l_1^2 V_1 + \frac{1}{2}l_1 l_2 V_2 & l_1^2 V_1 + l_1 l_3 V_2 & -V_1 & -V_2 \\ 0 & \frac{1}{2}l_1 l_2 V_1 + \frac{1}{3}l_2^2 V_2 & l_1 l_3 V_1 + l_3^2 V_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda U_k si ha:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta k - K_{11}^P & -\Delta k - K_{12}^P \\ -\Delta k & \Delta k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} &= \\ &= \begin{Bmatrix} \Delta k V_1 - K_{11}^P V_1 - \Delta k V_2 - K_{12}^P V_2 \\ -\Delta k V_1 + \Delta k V_2 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} V_1 - V_2 & -V_1 & -V_2 \\ V_2 - V_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta k \\ K_{11}^P \\ K_{12}^P \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

da cui:

$$U_k = \begin{bmatrix} V_1 - V_2 & -V_1 & -V_2 \\ V_2 - V_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In realtà, a differenza di quanto è sempre stato fatto per il sistema a tre masse, visto che in questo caso si vogliono assegnare due forme modali e quindi due autovettori distinti, si dovranno calcolare due matrici U_m e due matrici U_k , le quali avranno la stessa forma ma valori differenti, visto che dipendono da due autovettori diversi.

Si avrà quindi una prima coppia (U_{m_1}, U_{k_1}) per il primo autovettore

$$v_1^D = \begin{Bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{Bmatrix}$$

ed una seconda coppia (U_{m_2}, U_{k_2}) per il secondo autovettore

$$v_2^D = \begin{Bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{Bmatrix}$$

I due autovettori desiderati v_1^D e v_2^D saranno quelli considerati nel paragrafo 4.3.

Da queste quattro matrici prendono forma due matrici $U_i = [\omega_i^2 U_{m_i} \mid U_{k_i}]$, rispettivamente:

$$U_1 = [\omega_1^2 U_{m_1} \mid U_{k_1}] \quad \text{e} \quad U_2 = [\omega_2^2 U_{m_2} \mid U_{k_2}]$$

in cui le pulsazioni ω_i sono quelle desiderate, quindi $\omega_1 = \omega_1^D$ e $\omega_2 = \omega_2^D$. Analogamente si devono calcolare anche due vettori $b_i = [K v_i^D - \omega_i^2 M v_i^D]$:

$$b_1 = [K v_1^D - \omega_1^2 M v_1^D] \quad \text{e} \quad b_2 = [K v_2^D - \omega_2^2 M v_2^D]$$

Per poter poi risolvere con i metodi già visti si deve ricondurre il problema alla solita forma:

$$Ux = b \tag{4.5.2}$$

e si devono quindi ricombinare le due matrici U_1 e U_2 all'interno dell'unica matrice U , e i due vettori b_1 e b_2 all'interno dell'unico vettore b . Questo può essere fatto posizionando le due matrici U_1 e U_2 e i corrispondenti vettori b_1 e b_2 gli uni sopra agli altri all'interno di U e quindi anche di b rispettivamente. Si ottiene quindi:

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ - \\ U_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ - \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

Anche se così facendo il numero delle righe di U e di b raddoppia, comunque il numero delle colonne di U rimane invariato, e quindi significa che semplicemente si sta impostando

un numero di equazioni maggiori per risolvere sempre lo stesso problema che consiste nel calcolare il vettore delle modifiche attive e passive

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \\ K_{11}^A \\ K_{12}^A \\ \Delta k \\ K_{11}^P \\ K_{12}^P \end{array} \right\}$$

in cui compaiono sia le indicazioni di quanto deve variare la massa e la rigidezza del sistema, sia l'indicazione sull'eventuale massa concentrata da aggiungere sulla seconda asta, sia i guadagni del controllore.

4.6 Le problematiche legate al caso in esame

Dopo aver sviluppato la Structural Modification per il caso in esame applicando gli autovettori e gli autovalori introdotti nel paragrafo 4.3, ed aver quindi calcolato le varie matrici che permettono di formulare il problema finale riportato in 4.5.2 a pagina 81 che consente di calcolare il vettore \mathbf{x} delle modifiche passive ed attive, si è cercato di risolverlo con i metodi visti anche per il caso del sistema a tre masse.

Purtroppo però ci si è ben presto resi conto che, come già accennato, il metodo della Structural Modification non è efficace, in quanto, per una serie di motivi, esso non è applicabile al caso in questione.

I risultati ottenuti sono insensati dal momento che, sebbene per quanto riguarda gli autovettori si riesca a fare un'assegnazione accettabile, non appena si cerca di spostare gli autovalori del sistema chiedendo delle pulsazioni diverse da quelle originali (come stabilito per il caso in esame), le modifiche ed i guadagni calcolati rendono il sistema risultante instabile. Alcune delle cause di questo fallimento possono essere legate al particolare sistema che si è analizzato, altre invece alle caratteristiche della Structural Modification stessa. Esse possono essere brevemente riassunte nei seguenti punti:

1. In primo luogo, un grosso limite deriva dalle richieste fatte che senza alcun dubbio possono essere considerate abbastanza onerose per il sistema in esame. Come è stato verificato nel paragrafo 4.4, non solo entrambi gli autovettori risultano essere non esattamente assegnabili simultaneamente, ma soprattutto per il secondo di essi e per i due autovalori, ciò che viene richiesto è molto diverso dalla corrispondente situazione del sistema originale. Ci si può quindi subito rendere conto come possa essere molto difficile soddisfare le richieste.
2. La Structural modification viene in genere applicata per fare un'assegnamento parziale dei poli del sistema. Raramente viene invece utilizzata per fare un'assegnazione completa di tutte le forme modali, allocando tutti gli autovettori e gli autovalori, come si è tentato di fare in questa sede. Per cui si può affermare che ci si è posti in realtà in una condizione molto critica, per la quale è già di per sé molto difficile ottenere un sensibile avvicinamento alle prestazioni richieste. Oltre al fatto che le singole esigenze risultano essere abbastanza impegnative, si ha infatti la necessità di soddisfare più condizioni contemporaneamente, il che richiede inequivocabilmente che venga fatto un compromesso. E' quindi impossibile riuscire ad ottenere il meglio per ognuna esse.
3. Il calcolo delle modifiche attive da applicare con il particolare sistema di attuazione di cui si dispone, richiede che alcune delle matrici che compaiono nel sistema abbiano una struttura asimmetrica. Questo può generare problemi di instabilità. Per contro la tecnica della structural modification è stata genericamente sviluppata su sistemi simmetrici, e quindi per produrre termini di modifica strutturale con tale caratteristica: può cioè intervenire il fenomeno dello spill-over: le modifiche strutturali calcolate per assegnare alcuni poli instabili, rendono positiva la parte reale di altri, senza riuscire così in definitiva ad ottenere un sistema stabile. Questo è legato all'assenza di un vincolo stringente sui poli:
4. L'ambito dei meccanismi che si sta qui considerando non sarebbe il più adatto per applicare tale tecnica, visto che essa in origine è stata sviluppata come metodo per determinare le caratteristiche di massa e rigidità che devono avere i componenti di una struttura. Il meccanismo considerato infatti, ha modi di moto rigido (associati a frequenze nulle), ossia la matrice \mathbf{K} semidefinita positiva. Le condizioni ottimali sono quindi quelle in cui si abbiano più corpi collegati tra loro ed a telaio con degli

elementi elastici come accadeva per il caso esaminato nel capitolo 3, le quali non sono di certo proprie anche del meccanismo studiato.

5. Le possibilità di agire direttamente sul sistema sono assai limitate visto che si ha un solo grado di libertà attuato e poche grandezze da modificare passivamente.

Quanto appena discusso evidenzia che se la Structural modification viene applicata a sistemi particolari come quello che si considera in questa tesi, affiorano alcuni suoi limiti intrinseci.

Si può pensare quindi di agire affiancando al calcolando delle modifiche passive con la Structural Modification, il calcolo di quelle attive con uno dei metodi tradizionali di controllo, in modo da imporre esattamente i poli ossia vincolarli per evitare l'instabilità. Daltronde anche in letteratura è stato recentemente evidenziato come la sola Structural Modification non sia sufficiente ad ottenere il risultato sperato, e sia quindi necessario adottare un approccio doppio che permetta di integrare i vantaggi portati da tale tecnica, con un controllo attivo realizzato tramite tecniche tradizionali [19].

L'implementazione della Structural Modification congiunta a tecniche di controllo attivo dà quindi anche la possibilità di calcolare una retroazione di velocità e di ottenere quindi anche uno smorzamento per far sì che le inevitabili oscillazioni residue che si avranno sull'estremità della seconda asta in risposta ad un ingresso vengano limitate nel tempo da questo fenomeno. Quest'ultimo effetto desiderato sarebbe altrimenti improponibile usando solo in termini di accelerazione e posizione, considerando che non potendo assegnare esattamente gli autovettori ci potrà essere oscillazione residua.

Per il sistema in esame si agirà nei capitoli successivi in un modo leggermente differente rispetto a quanto è stato fatto nel caso del sistema a tre masse. Dopo aver visto che quanto già testato con successo in quella sede non è sufficiente per il nuovo caso in esame, pur mantenendo valide le considerazioni fatte, e sfruttando parte delle tecniche già viste, si è dovuto affiancare ad esse ulteriori metodi di controllo che diventeranno vincoli sui poli, ossia sulla stabilità.

Si può affermare quindi che tutto ciò che è stato fatto con il primo sistema è stato sfruttato anche in questo nuovo caso, in cui però si è introdotto un ulteriore step di sviluppo nel quale l'approccio tipico da progetto, e quello tipico da controllo sono stati fusi insieme.

Tecniche di controllo attivo

5.1 Introduzione

Da quanto è emerso nel capitolo precedente risulta chiaro che per poter ottenere risultati validi è necessario calcolare modifiche attive e passive, affiancando all'approccio tipico della Structural Modification anche altre tecniche di controllo attivo che consentono di evitare fenomeni di spill-over ottenendoesattamente i poli desiderati.

Il primo motivo di questa necessità deriva dal fatto che come visto, l'applicazione della sola Structural Modification al caso in esame, non è sufficiente ad ottenere quanto desiderato, anzi essa genera dei problemi di instabilità che non possono ovviamente essere tollerati.

Con l'introduzione di altre tecniche di controllo attivo si può quindi pensare di formulare un problema il quale rappresenti una condizione che deve essere rispettata al fine di avere stabilità. Se nella formulazione del problema che porta alla determinazione delle modifiche attive e passive si impone come vincolo tale condizione, si ha la sicurezza che il sistema controllato non sia instabile. Quindi la seconda motivazione che ha portato alla decisione di introdurre anche i metodi di controllo attivo, risiede nel fatto che essi permettono di imporre sempre la condizione di stabilità, e quindi di far sì che essa venga tassativamente rispettata.

Nel proseguo del capitolo saranno discusse alcune tecniche di controllo attivo utili ai fini dell'approccio ibrido che sarà sviluppato.

5.2 Tecniche di controllo attivo tradizionali o alternative

Esistono in letteratura molte possibilità per fare un controllo attivo di un sistema che conducono al calcolo dei guadagni di un controllore esterno che inserito in una catena di retroazione costruita sul sistema stesso, permetta di governarne il comportamento.

Anche il tipo di retroazione che viene fatto, può di per sè essere di diversa natura a seconda del caso. Quella più diffusa è sicuramente la retroazione dall'uscita (*output feedback*), ma capita spesso che venga fatta anche una retroazione dallo stato (*state feedback*) con la quale l'ingresso di controllo del sistema viene stabilito sulla base dell'informazione dello stato del sistema, misurabile direttamente quando possibile, o determinabile matematicamente attraverso opportune tecniche di stima.

Alcuni dei metodi disponibili sono tra i più tradizionali e si basano su concetti tipici della teoria dei sistemi; sono state sviluppate però anche molte tecniche meno tradizionali che a partire da considerazioni teoriche di diversa natura permettono comunque di progettare un controllore adatto alle esigenze del caso.

Della prima categoria fa parte il cosiddetto metodo del "Pole Placement", che come dice il nome, sfruttando la retroazione dallo stato, e sotto determinate ipotesi, permette di posizionare i poli di un sistema arbitrariamente nel piano reale. Data la sua caratteristica, tale metodo consente di stabilizzare il sistema o di modificarne il suo comportamento dinamico.

La tecnica del Pole Placement rappresenta un metodo classico e diffuso nella teoria dei sistemi per calcolare una legge di controllo che a partire dall'informazione sullo stato del sistema, permetta di allocare i suoi autovalori al fine di renderlo stabile, portare un suo stato in una condizione di equilibrio o di modificarne le caratteristiche di movimento, visto che esse dipendono appunto dagli autovalori. Applicandola si possono quindi calcolare i guadagni della catena di retroazione che permettano di ottenere l'effetto voluto.

Anche se per la maggior parte delle applicazioni questa tecnica viene sfruttata per la sua capacità di garantire che i poli del sistema in catena chiusa, sotto determinate ipotesi, giacciono esattamente nel punto desiderato del piano reale, e quindi per la possibilità di ricorrere ad essa al fine di stabilizzare il sistema, l'ultima funzionalità indicata sopra si può ritenere in linea con il principio che sta alla base della Structural Modification (modifica di autovettori e/o autovalori del sistema al fine di imporre ad esso un certo comportamento desiderato), e pertanto essendo la più interessante per gli obiettivi che si hanno, sarà quella sfruttata in questa sede.

In ogni caso, nell'ipotesi che il sistema sia controllabile, tutti i suoi autovalori possono essere assegnati a piacere, e quindi a seconda che si voglia stabilizzare il sistema, o modificare la sua dinamica, si potrà comunque sicuramente raggiungere l'obiettivo.

Nel caso in cui il sistema non sia completamente controllabile sarà indispensabile fare delle considerazioni preliminari sulla sua parte non controllabile visto che non sarà possibile intervenire sugli autovalori relativi ad essa. Se l'obiettivo è la stabilizzazione, tutti i poli corrispondenti agli autovalori del sottosistema non controllabile dovranno necessariamente essere già a parte reale negativa; se invece l'obiettivo è l'assegnazione diretta del loro valore, si dovrà tener conto che quelli relativi alla parte incriminata, non sono in realtà da considerarsi modificabili.

Il numero di autovalori che possono essere assegnati arbitrariamente è determinabile a partire dalla matrice di controllabilità del sistema, mediante il calcolo del suo rango. Tale valore è uguale al numero n di autovalori effettivamente posizionabili a piacere.

Il Pole Placement è in genere formulato mediante la formula di Ackermann, o mediante altri approcci basati sulla formulazione del problema nello spazio degli stati. Un metodo meno tradizionale per realizzare il Pole Placement è quello sviluppato invece da Ouyang e basato sull'uso delle ricettanze che utilizza quindi un approccio riconducibile alla tecnica

della Structural Modification fondando le sue origini nella teoria della meccanica delle vibrazioni. Esso deriva infatti dal classico problema agli autovalori per un sistema vibrante, e a differenza del Pole Placement permette di scegliere il tipo di guadagni da calcolare, includendo tra questi anche quelli di accelerazione.

Oltre a rappresentare una formulazione più coerente con l'approccio utilizzato nella presente tesi, in cui si sono utilizzate le teorie tipiche della meccanica delle vibrazioni, questa tecnica consente di gestire il problema di assegnazione dei poli come un vincolo in un problema di minimizzazione di un funzionale.

In questo capitolo verranno illustrate dal punto di vista teorico entrambe queste due tecniche di controllo attivo e saranno poi applicate al caso del braccio robotico sottoattuato a due g.d.l. con giunto elastico. Il metodo di Ouyang verrà applicato all'interno del problema di determinazione delle modifiche attive e passive presentato nel capitolo successivo, come vincolo da soddisfare per garantire la stabilità. La tecnica del Pole Placement verrà invece applicata singolarmente con lo scopo di poter confrontare i risultati ottenuti con solo controllo attivo e quelli ottenuti invece con l'approccio ibrido, al fine di stabilire se anche per un caso particolare come quello che si sta considerando, la seconda strategia possa effettivamente portare dei vantaggi.

Entrambe le tecniche non hanno possibilità di definire gli autovettori nei casi in cui venga applicata una tecnica di puro controllo attivo. Ciò dipende dal numero di forze di controllo: in presenza di una sola forza (come nel caso qui considerato) non si ha alcun grado di libertà per assegnare gli autovettori se non quello di cambiare il meccanismo con modifiche passive visto che la matrice $\mathbf{L}(\lambda_i^D)$ è praticamente un vettore e quindi tale è anche $\text{span}\mathbf{L}(\lambda_i^D)$. Con più forze di controllo invece, la matrice $\mathbf{L}(\lambda_i^D)$ non è più un vettore e quindi essa genera più possibilità di assegnamento. Per intervenire anche su questo fronte è quindi necessario integrare con metodi di modifica strutturale come verrà illustrato nel capitolo successivo. Si può dire quindi che per il caso in esame, le tecniche di controllo attivo qui presentate e la Structural Modification risultano essere in qualche modo complementari e l'applicazione di una non può pregiudicare l'utilizzo dell'altra.

5.3 La tecnica tradizionale del Pole Placement

5.3.1 La retroazione dallo stato

Sia dato un sistema LTI di dimensione n , espresso nella forma di stato:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (5.3.1)$$

Si supponga inizialmente che il sistema sia ad $m = 1$ ingressi.

Si vuole progettare un dispositivo che connesso al sistema da controllare, permetta di posizionare arbitrariamente i poli del sistema complessivo risultante mediante una retroazione dallo stato, secondo lo schema di controllo riportato in figura 5.1

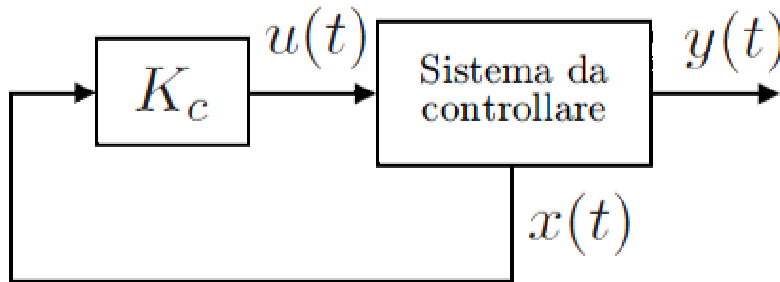


Fig. 5.1: Schema di retroazione dallo stato.

La retroazione dallo stato permette di calcolare l'ingresso di controllo $\mathbf{u}(t)$ a partire dall'informazione sullo stato del sistema $\mathbf{x}(t)$, semplicemente moltiplicando quest'ultimo per un guadagno statico \mathbf{K}_c opportunamente determinato a seconda di quello che è l'obiettivo.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_c \mathbf{x}(t)$$

La possibilità di agire in tal modo è garantita da un teorema:

Teorema 1 (Assegnazione mediante retroazione dallo stato) *Dato un sistema nella forma riportata in 5.3.1, se la coppia (\mathbf{A}, \mathbf{B}) è raggiungibile, allora comunque si scelga un polinomio di grado n*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

esiste una matrice \mathbf{K}_c di dimensioni $m \times n$ tale che

$$p_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_c}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c) = p(\lambda)$$

E' inoltre possibile dimostrare che la condizione di raggiungibilità è necessaria e sufficiente per consentire di retroazionare il sistema originale con un controllore, i cui guadagni siano gli elementi della matrice \mathbf{K}_c .

La forma di stato del sistema complessivo risultante sarà:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c)\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= (\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{K}_c)\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

e quindi, visto che secondo il teorema, il polinomio caratteristico della matrice di stato del nuovo sistema $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c)$ può essere eguagliato ad un polinomio arbitrario, significa che gli autovalori del sistema retroazionato potranno essere posizionati a piacere. Ammettendo che siano disponibili tutte le misure dello stato del sistema, l'ingresso di controllo $u(t)$ viene generato moltiplicandole per i coefficienti k_i della matrice di retroazione \mathbf{K}_c :

$$u(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t) + \dots + k_nx_n(t)$$

Siccome nel caso considerato si vogliono assegnare tutti gli autovalori così da influire globalmente sul comportamento del sistema, quest'ultimo dovrà essere completamente controllabile, e quindi la sua matrice di controllabilità:

$$\mathbf{C}_R = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

dovrà essere a rango pieno:

$$\text{rank}(\mathbf{C}_R) = n$$

Nel caso in cui il sistema non risulti completamente raggiungibile, la legge di controllo può modificare solo gli r autovalori corrispondenti alla sua parte raggiungibile.

La procedura per determinare il controllore \mathbf{K}_c consiste nel verificare prima di tutto le caratteristiche di controllabilità del sistema. Dopo di che, dato l'insieme degli autovalori che si vogliono assegnare $\{\lambda_{1_{des}}, \lambda_{2_{des}}, \dots, \lambda_{n_{des}}\}$, si calcola il polinomio caratteristica desiderato:

$$p_{des}(\lambda) = (\lambda - \lambda_{1_{des}})(\lambda - \lambda_{2_{des}}) \cdots (\lambda - \lambda_{n_{des}})$$

e il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c$ ($p_{\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c}(\lambda)$) in funzione degli elementi incogniti di \mathbf{K}_c , ed eguagliandoli

$$p_{\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c}(\lambda) = p_{des}(\lambda)$$

secondo il principio di identità dei polinomi, si calcolano i coefficienti k_i .

L'applicazione della tecnica sopra descritta ad un sistema espresso in forma di stato, risulta molto agevole con l'utilizzo di Matlab. Vengono infatti forniti una serie di comandi molto comodi per eseguire i vari calcoli.

Il comando $\text{ctrb}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ permette ad esempio di ricavare direttamente la matrice di controllabilità di un dato sistema, e quindi calcolandone il rango con la funzione rank , è poi immediato determinare se sia verificata o meno l'ipotesi di completa controllabilità. In più esiste il comando acker che implementa al suo interno la tecnica del Pole Placement secondo l'algoritmo descritto sopra.

E' anche disponibile un'ulteriore funzione (place) che per sistemi di questo tipo fornisce lo stesso risultato. La linea di comando

$$\mathbf{K}_c = \text{place}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P})$$

permette di calcolare la matrice di retroazione dallo stato \mathbf{K}_c tale che gli autovalori di $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c)$ siano quelli specificati nel vettore \mathbf{P} . All'interno di tale vettore essi devono essere inseriti in forma complessa e coniugata.

Tale comando è stato utilizzato per eseguire una retroazione dallo stato sul sistema in esame, ed ha quindi permesso di calcolare comodamente i guadagni di posizione e velocità del controllore, che rappresentano le modifiche attive di, rispettivamente, rigidità e smorzamento utili ad assegnare gli autovalori come desiderato.

Da qui è chiaro quindi che in questi casi le modifiche attive non sono state inglobate assieme alle modifiche passive nella risoluzione del problema impostato con la Structural Modification, ma il loro calcolo ha seguito una strada diversa.

5.3.2 Applicazione del Pole Placement al caso in esame

L'applicazione pratica del Pole Placement risulta molto agevole se si ha la possibilità di sfruttare le funzioni indicate nel paragrafo 5.3.1, messe a disposizione da Matlab. Disponendo della forma di stato del sistema considerato, ricavata nel paragrafo 4.2.2, è necessario prima di tutto stabilire se il sistema sia completamente controllabile e si possano quindi allocare i suoi due autovalori arbitrariamente. La matrice di controllabilità del meccanismo considerato è:

$$\mathbf{C}_R = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B}]$$

calcolabile più semplicemente con il comando:

$$\mathbf{C}_R = \text{ctrb}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

Essa ha rango uguale a 4 e quindi si può affermare con sicurezza che il sistema risulta completamente controllabile. Di conseguenza si è autorizzati ad allocare i due autovalori così che diventino uguali ai due desiderati. nel seguito si suppone di fare la seguente scelta già discussa nel paragrafo 4.3. Tale scelta tuttavia non toglie nessuna generalità al metodo, e i risultati ottenuti confermano ciò. Per evitare problemi, soprattutto nella fase sperimentale, si richiede un piccolo smorzamento pari a 0.3.

$$\lambda_1^D = (\omega_1^D)^2 = 36 \quad \text{e} \quad \lambda_2^D = (\omega_2^D)^2 = 2500$$

e lo smorzamento

$$\xi^D = 0.3$$

a cui corrisponderanno i quattro poli complessi e coniugati

$$\begin{aligned} s_1 &= -\xi^D \omega_1^D + i \omega_1^D \sqrt{1 - \xi^{D2}} = -1.8 + i 5.7236 \\ s_2 &= -\xi^D \omega_1^D - i \omega_1^D \sqrt{1 - \xi^{D2}} = -1.8 - i 5.7236 \\ s_3 &= -\xi^D \omega_2^D + i \omega_2^D \sqrt{1 - \xi^{D2}} = -15 + i 47.6970 \\ s_4 &= -\xi^D \omega_2^D - i \omega_2^D \sqrt{1 - \xi^{D2}} = -15 - i 47.6970 \end{aligned}$$

Dopo aver costruito la matrice:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{bmatrix}$$

con il comando *place*:

$$\mathbf{K}_c = \text{place}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P})$$

si ottiene il vettore \mathbf{K}_c ¹ di quattro elementi, dei quali i primi due rappresentano i guadagni di velocità del controllore da utilizzare in una catena di retroazione in modo che pulsazioni e smorzamenti dei due modi del sistema complessivo siano uguali a quelli assegnati; gli ultimi due guadagni sono invece quelli di posizione. Per il caso in esame si è ottenuto il seguente risultato:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^V \\ K_{12}^V \\ K_{11}^P \\ K_{12}^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0939 \\ -0.0468 \\ 2.8775 \\ -2.4525 \end{pmatrix}$$

in cui, la notazione è stata scelta in linea con quanto fatto nei capitoli precedenti.

¹Data la dimensione del problema in esame ($m = 1$), la matrice $\mathbf{K}_c \in \mathbb{R}^{m \times n}$ diventa in questo caso un vettore.

La matrice di stato del nuovo sistema controllato sarà:

$$\mathbf{A}_{mod} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}_c$$

Attraverso il comando *damp* si possono poi ricavare i quattro poli, i relativi smorzamenti e le pulsazioni del sistema complessivo, che nel caso considerato sono risultati perfettamente coincidenti con quelli richiesti, a prova che tale metodo consente di posizionare i poli del sistema in maniera esatta.

E' anche possibile ricalcolare completamente la forma di stato del sistema, considerando le nuove matrici di smorzamento e rigidezza del sistema complessivo che, secondo l'approccio tipico della Structural Modification, sono calcolabili aggiungendo a quelle del sistema originale le matrici $\Delta\mathbf{C}_{att}$ e $\Delta\mathbf{K}_{att}$ contenenti i guadagni del controllore considerati in questa occasione come smorzamenti e rigidezze attivi.

Le ultime due matrici citate possono essere ricavate secondo il principio che ha permesso di calcolare le modifiche attive con la Structural Modification, introdotto nel paragrafo 3.4. Tenendo conto del modo in cui è applicata l'unica forzante esterna e della sua espressione che nel caso considerato, visto che si sta facendo solo retroazione di velocità e di posizione è:

$$\tau = K_{11}^V \dot{\theta}_1 + K_{12}^V \dot{\theta}_2 + K_{11}^P \theta_1 + K_{12}^P \theta_2$$

considerando entrambi i gradi di libertà si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \tau \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11}^V \dot{\theta}_1 + K_{12}^V \dot{\theta}_2 + K_{11}^P \theta_1 + K_{12}^P \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

equivalente a:

$$\begin{Bmatrix} \tau \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^V & K_{12}^V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

ovvero a:

$$\begin{Bmatrix} \tau \\ 0 \end{Bmatrix} = \Delta\mathbf{C}_{att} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \Delta\mathbf{K}_{att} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Le matrici di smorzamento e rigidezza del sistema modificato saranno quindi:

$$\mathbf{C}_{mod} = \mathbf{C} - \Delta\mathbf{C}_{att} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_{mod} = \mathbf{K} - \Delta\mathbf{K}_{att}$$

Con esse si ricalcolano le matrici della nuova rappresentazione di stato \mathbf{A}_{mod} , \mathbf{B}_{mod} , \mathbf{C}_{mod} e \mathbf{D}_{mod} , anche se in realtà, visto che la matrice di massa rimane invariata, l'unica tra le quattro che cambierà rispetto alla situazione originale, sarà la matrice di stato \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}_{mod} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_{mod} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_{mod} \\ \mathbf{I}_{(2 \times 2)} & \mathbf{0}_{(2 \times 2)} \end{bmatrix}$$

Se si vuole invece fare una verifica sugli autovettori del sistema risultante, l'unico modo possibile è quello di rifarsi alla matrice della dinamica ricalcolata con le nuove matrici di massa e rigidezza:

$$\mathbf{D}_{mod} = \mathbf{M}_{mod}^{-1}\mathbf{K}_{mod}$$

in cui in realtà $\mathbf{M}_{mod} = \mathbf{M}$. Calcolandone autovalori e autovettori con la funzione *eig*, si può ottenere l'informazione desiderata. Per il caso in esame, gli autovettori normalizzati sulla seconda entrata, ottenuti sono:

$$\bar{\mathbf{v}}_{1mod} = \begin{Bmatrix} 0.9234 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{v}}_{2mod} = \begin{Bmatrix} -0.2798 \\ 1.0000 \end{Bmatrix}$$

Come si può osservare, soprattutto il secondo autovettore risulta essere abbastanza diverso da quello desiderato, ma visto che questo metodo di controllo non prevede la possibilità di agire sugli autovettori ma bensì solo sugli autovalori si deve accettare quanto ottenuto. E' chiaro quindi che tale metodo non può essere considerato valido per l'obiettivo che ci si è posti e quindi, come già detto, per l'applicazione in esame risulta indispensabile implementare anche la tecnica di modifica strutturale.

Oltretutto si può notare che anche la richiesta sul primo autovettore (che veniva soddisfatta pienamente dal sistema originale) dopo le modifiche risulta non essere più verificata, probabilmente perché, visto che per esigenze applicative si è voluto assegnare al primo modo di vibrare una pulsazione diversa dal valore nullo, si è dovuto fare un compromesso tra tutte le richieste fatte. In particolare i coseni dei due autovettori rispetto ai desiderati sono, per il sistema controllato:

$$\cos \theta_{1mod} = 0.9992 \quad \text{e} \quad \cos \theta_{2mod} = 0.8887$$

mentre per il sistema privo di controllo erano:

$$\cos \theta_1 = 1 \quad \text{e} \quad \cos \theta_2 = 0.7773$$

5.4 Il metodo di assegnazione dei poli basato sulla ricettanza (di Ouyang)

5.4.1 Introduzione

Il metodo di assegnazione dei poli basato sulla ricettanza (d'ora in avanti denominato per brevità metodo di Ouyang) si basa sulle classiche teorie della meccanica delle vibrazioni per eseguire il posizionamento dei poli.

Esso è stato proposto dal Prof. Ouyang della Liverpool University [20], per assegnare i poli di sistemi vibranti instabili per effetto di fenomeni di attrito, e aventi una singola forza di controllo. Caratteristica essenziale è che tale metodo perviene alla soluzione di un sistema lineare avente come incognite i guadagni che possono essere di retroazione di posizione, velocità ed accelerazione. Esso inoltre utilizza la formulazione del secondo ordine tipica delle equazioni differenziali della meccanica delle vibrazioni, senza richiedere la trasformazione nello spazio degli stati, come i metodi tradizionali fanno.

Il metodo è stato poi esteso in [21] da Ouyang, Richiedei e Trevisani, per l'assegnazione di poli in meccanismi a membri deformabili. La formulazione proposta infatti è facilmente estendibile anche ad azioni di controllo integrale, ed è in grado di gestire anche eventuali asimmetrie nei modelli dinamici, fornendo soluzioni affidabili dal punto di vista numerico. Per questi motivi si è ritenuto opportuno utilizzarlo nel seguente lavoro.

Per certi versi può essere considerato un metodo più flessibile e più completo rispetto al primo già analizzato nel paragrafo 5.3, in quanto, a seconda delle esigenze che si hanno, esso permette sostanzialmente di scrivere un certo numero di equazioni grazie alle quali vengono poi calcolati i guadagni cercati. Come evidenziato, a differenza del del Pole Placement tradizionale che consente di eseguire una retroazione di sola posizione e velocità (state feedback), il metodo di Ouyang dà la possibilità di attuare anche una retroazione di accelerazione, qualora serva. Tale potenzialità può essere sfruttata nella sua applicazione al caso in esame nel caso in cui si decida di agire sul sistema con tutti e tre i tipi di retroazione considerati. Ciò sarà comunque discusso nel seguito, per valutare l'effettiva utilità di tale azione.

5.4.2 Descrizione del metodo di Ouyang

In questo paragrafo è descritto il metodo di Ouyang nella sua versione estesa, proposta in [21]. Data l'innovatività del metodo esso sarà discusso dettagliatamente nel capitolo, conservando la sua formulazione integrale. Per un generico sistema, sia data l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che ne descrive il comportamento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{d}(t) + \mathbf{b}v_A(t) \quad (5.4.1)$$

dove $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ sono le matrici di massa, smorzamento e rigidità, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ è il vettore degli spostamenti N -dimensionale, $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ è la forza di disturbo esterna, $v_A(t)$ è la forzante esterna (scalare) ed infine $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ è il vettore che determina in che modo sono applicate e distribuite le forzanti esterne sul sistema.

Le tre matrici di massa, smorzamento e rigidità, possono, in linea di massima, anche avere una struttura asimmetrica. Se ciò accade, per poter applicare il metodo descritto, è necessario riscrivere l'equazione 5.4.1 separando parti simmetriche delle tre (indicate con $\mathbf{M}_s, \mathbf{C}_s, \mathbf{K}_s \in \mathbb{R}^{N \times N}$), e parti asimmetriche (indicate con $\mathbf{M}_a, \mathbf{C}_a, \mathbf{K}_a \in \mathbb{R}^{N \times N}$), ed

ottenere quindi:

$$(\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_a)\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_a)\dot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_a)\mathbf{x}(t) = \mathbf{d}(t) + \mathbf{b}v_A(t) \quad (5.4.2)$$

Inoltre, per agevolare lo sviluppo dei calcoli successivi e quindi l'applicazione del metodo, si dimostra che è conveniente rielaborarle se necessario, in modo che il termine di asimmetria sia collocato nella posizione in alto a destra della corrispondente matrice (prima riga, ultima colonna). Anche per la validità di questo metodo, è inoltre necessario che il sistema sia controllabile e che quindi $\text{rank}([\mathbf{M}\lambda_i^2 + \mathbf{C}\lambda_i + \mathbf{K}|\mathbf{b}]) = N$ per tutti gli autovalori λ_i con $i = 1, \dots, 2N$, o equivalentemente, considerando l'espressione in forma di stato del sistema, che la matrice di controllabilità $\mathbf{C}_R = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ sia a rango pieno. Nell'ipotesi che questo accada, allora, applicando il metodo qui descritto, tutti i poli del sistema possono essere assegnati arbitrariamente.

La forza esterna di controllo è definita nel dominio del tempo come:

$$\begin{aligned} v_A(t) &= -(\mathbf{a}^T(\ddot{\mathbf{x}}(t) - \ddot{\mathbf{x}}_{ref}(t)) + \mathbf{f}^T(\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{ref}(t)) + \mathbf{k}^T(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{ref}(t))) = \\ &= -(\mathbf{a}^T\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{f}^T\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{k}^T\mathbf{x}(t)) + v_{ref} \end{aligned}$$

in cui $v_{ref} = (\mathbf{a}^T\ddot{\mathbf{x}}_{ref}(t) + \mathbf{f}^T\dot{\mathbf{x}}_{ref}(t) + \mathbf{k}^T\mathbf{x}_{ref}(t))$, evidenzia la possibile presenza di un riferimento per lo stato $\mathbf{x}_{ref}(t)$, che però d'ora in poi sarà trascurato. I vettori \mathbf{a} , \mathbf{f} e $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ sono i guadagni del controllore che si vogliono calcolare, e quindi quelli che sono stati considerati come massa, smorzamento e rigidità attive.

Sostituendo nell'equazione 5.4.2 l'espressione di $v_A(t)$, raggruppando i vari termini in modo ordinato e passando infine nel dominio delle trasformate di Laplace, il sistema a catena chiusa può essere rappresentato anche attraverso:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) &= [(\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_a + \mathbf{b}\mathbf{a}^T)s^2 + (\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_a + \mathbf{b}\mathbf{f}^T)s + (\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_a + \mathbf{b}\mathbf{k}^T)]^{-1} \mathbf{d}(s) = \\ &= \mathbf{H}(s)\mathbf{d}(s) \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

con $\mathbf{H}(s)$ matrice di ricettanza del sistema asimmetrico a catena chiusa, la quale ingloba anche essa al suo interno parte simmetrica e parte asimmetrica.

La matrice di ricettanza della parte simmetrica del sistema a catena aperta $\mathbf{H}_s(s)$ (cioè quella sottoparte relativa al sistema a catena aperta, della parte simmetrica di $\mathbf{H}(s)$) è definita come segue:

$$\mathbf{H}_s(s) := [\mathbf{M}_s s^2 + \mathbf{C}_s s + \mathbf{K}_s]^{-1}$$

mentre la matrice di ricettanza della parte simmetrica del sistema a catena chiusa $\widehat{\mathbf{H}}_s(s)$ (cioè l'equivalente di $\mathbf{H}_s(s)$ ma relativa al sistema a catena chiusa) è:

$$\widehat{\mathbf{H}}_s(s) = [(\mathbf{M}_s + \mathbf{b}\mathbf{a}^T)s^2 + (\mathbf{C}_s + \mathbf{b}\mathbf{f}^T)s + (\mathbf{K}_s + \mathbf{b}\mathbf{k}^T)]^{-1}$$

E' possibile dimostrare che $\mathbf{H}_s(s)$ e $\widehat{\mathbf{H}}_s(s)$ sono legate tramite la seguente equazione:

$$\widehat{\mathbf{H}}_s(s) = \mathbf{H}_s(s) - \frac{\mathbf{H}_s(s)\mathbf{b}(\mathbf{a}s^2 + \mathbf{f}s + \mathbf{k})^T \mathbf{H}_s(s)}{1 + (\mathbf{a}s^2 + \mathbf{f}s + \mathbf{k})^T \mathbf{H}_s(s)} \mathbf{b} \quad (5.4.4)$$

Inoltre si può dimostrare anche che moltiplicando ambo i membri dell'equazione 5.4.3 per $\widehat{\mathbf{H}}_s(s)$ si ottiene:

$$\left[\mathbf{I}_{N \times N} + \widehat{\mathbf{H}}_s(s)(\mathbf{M}_a s^2 + \mathbf{C}_a s + \mathbf{K}_a) \right] \mathbf{x}(s) = \widehat{\mathbf{H}}_s(s)\mathbf{d}(s)$$

I poli s_n del sistema asimmetrico a catena chiusa devono quindi soddisfare l'equazione:

$$\det \left(\left[\mathbf{I}_{N \times N} + \widehat{\mathbf{H}}_s(s)(\mathbf{M}_a s^2 + \mathbf{C}_a s + \mathbf{K}_a) \right] \right) = 0 \quad (5.4.5)$$

Ora per proseguire è necessario prima definire alcune grandezze:

- $\widehat{h}_{ij}(s)$ sia l'elemento di riga i e colonna j della matrice $\widehat{\mathbf{H}}_s(s)$;
- k_{a_i} sia l'elemento di riga i e colonna N della parte asimmetrica della matrice di rigidità \mathbf{K}_a ;
- c_{a_i} sia l'elemento di riga i e colonna N della parte asimmetrica della matrice di smorzamento \mathbf{C}_a ;
- m_{a_i} sia l'elemento di riga i e colonna N della parte asimmetrica della matrice di massa \mathbf{M}_a ;

Per il modo in cui sono state definite \mathbf{K}_s , \mathbf{C}_s e \mathbf{M}_s si può star sicuri che solamente una colonna di \mathbf{K}_a , \mathbf{C}_a e \mathbf{M}_a sarà non nulla. Pertanto si ha che:

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{I}_{N \times N} + \widehat{\mathbf{H}}_s(s)(\mathbf{M}_a s^2 + \mathbf{C}_a s + \mathbf{K}_a) \right] = \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(N-1) \times (N-1)} & \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j} s^2 + c_{a_j} s + k_{a_j}) \widehat{h}_{1j}(s) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j} s^2 + c_{a_j} s + k_{a_j}) \widehat{h}_{(N-1)j}(s) \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{1 \times (N-1)} & 1 + \sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j} s^2 + c_{a_j} s + k_{a_j}) \widehat{h}_{Nj}(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Tenendo conto delle equazioni 5.4.5 e 5.4.6, i poli del sistema asimmetrico a catena chiusa devono soddisfare:

$$1 + \sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j} s^2 + c_{a_j} s + k_{a_j}) \widehat{h}_{Nj}(s) = 0 \quad (5.4.7)$$

I termini $\widehat{h}_{Nj}(s)$ (i quali, visto che j varia da 1 ad $N-1$, sono tutti i termini dell'ultima riga di $\widehat{\mathbf{H}}_s(s)$ tranne l'ultimo) utili per risolvere l'equazione 5.4.7, possono essere espressi sfruttando l'equazione 5.4.4:

$$\widehat{h}_{Nj}(s) = h_{Nj}^s(s) - \frac{\mathbf{e}_N^T \mathbf{H}_s(s) \mathbf{b} (\mathbf{a} s^2 + \mathbf{f} s + \mathbf{k})^T \mathbf{H}_s(s) \mathbf{e}_j}{1 + (\mathbf{a} s^2 + \mathbf{f} s + \mathbf{k})^T \mathbf{H}_s(s) \mathbf{b}}$$

dove $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ è un vettore i cui elementi sono tutti nulli a parte il j -esimo che è pari ad 1; $h_{Nj}^s(s)$ è invece l'elemento della N -esima riga e j -esima colonna di $\mathbf{H}_s(s)$.

Ecco quindi che l'equazione 5.4.7 può ora essere riscritta come:

$$\begin{aligned} & (1 + (\mathbf{a} s^2 + \mathbf{f} s + \mathbf{k})^T \mathbf{H}_s(s) \mathbf{b}) \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j} s^2 + c_{a_j} s + k_{a_j}) h_{Nj}^s(s) \right) - \\ & \quad - \mathbf{e}_N^T \mathbf{H}_s(s) \mathbf{b} (\mathbf{a} s^2 + \mathbf{f} s + \mathbf{k})^T \mathbf{H}_s(s) \bar{\mathbf{e}}_N = 0 \end{aligned}$$

in cui

$$\bar{\mathbf{e}}_N := \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{e}_j (m_{a_j} s^2 + c_{a_j} s + k_{a_j})$$

è il vettore il cui termine nella posizione j -esima è $(m_{a_j} s^2 + c_{a_j} s + k_{a_j})$.

Definendo ora il vettore $\mathbf{t}(s) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ come:

$$\mathbf{t}(s)^T := \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j} s^2 + c_{a_j} s + k_{a_j}) h_{Nj}^s(s) \right) \mathbf{b}^T \mathbf{H}_s(s) - \mathbf{e}_N^T \mathbf{H}_s(s) \mathbf{b} \bar{\mathbf{e}}_N^T \mathbf{H}_s(s) \quad (5.4.8)$$

I guadagni del controllore \mathbf{k} , \mathbf{f} ed \mathbf{a} (cioè le incognite) possono essere isolate, e il problema formulato in 5.4.7 può essere riscritto in funzione delle incognite stesse:

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{t}(s)^T & s\mathbf{t}(s)^T & s^2\mathbf{t}(s)^T \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{a} \end{matrix} \right\} = - \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j}s^2 + c_{a_j}s + k_{a_j}) h_{Nj}^s(s) \right) \quad (5.4.9)$$

L'equazione 5.4.9 rappresenta il caso generale dell'equazione che permette di assegnare un singolo polo attraverso retroazione di accelerazione, velocità e posizione.

Come detto anche in precedenza, il metodo di Ouyang è molto più generico e soprattutto flessibile rispetto alle tecniche tradizionali che permettono di calcolare i soli guadagni di velocità e posizione.

Anche per quanto riguarda il numero di poli che dà la possibilità di assegnare, il metodo di Ouyang offre possibilità assai vaste: se, ad esempio, si avesse la necessità di assegnare N coppie di poli complessi coniugati (e quindi $2N$ richieste), è possibile scrivere $2N$ equazioni come quella in 5.4.9 e calcolare quindi $2N$ guadagni per il controllore.

Tali $2N$ equazioni possono anche essere raggruppate insieme e scritte in forma matriciale:

$$\left[\begin{matrix} \mathbf{t}(s_1)^T & s_1\mathbf{t}(s_1)^T & s_1^2\mathbf{t}(s_1)^T \\ \mathbf{t}(s_2)^T & s_2\mathbf{t}(s_2)^T & s_2^2\mathbf{t}(s_2)^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{t}(s_{2N})^T & s_{2N}\mathbf{t}(s_{2N})^T & s_{2N}^2\mathbf{t}(s_{2N})^T \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{a} \end{matrix} \right\} = - \left\{ \begin{matrix} \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j}s_1^2 + c_{a_j}s_1 + k_{a_j}) h_{Nj}^s(s_1) \right) \\ \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j}s_2^2 + c_{a_j}s_2 + k_{a_j}) h_{Nj}^s(s_2) \right) \\ \vdots \\ \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j}s_{2N}^2 + c_{a_j}s_{2N} + k_{a_j}) h_{Nj}^s(s_{2N}) \right) \end{matrix} \right\} \quad (5.4.10)$$

Ritornando al discorso della maggiore flessibilità del metodo di Ouyang, osservando l'equazione 5.4.10, si può notare che essa ha una struttura in un certo senso "modulare": come detto in precedenza, in base alle esigenze che abbiamo si possono scrivere più o meno equazione e calcolare più o meno incognite.

Il numero di poli che si vogliono assegnare determina infatti il numero di righe che si hanno nell'equazione matriciale 5.4.10, e quindi il numero di equazioni che sostanzialmente si vanno a scrivere.

Ogni polo viene assegnato in forma complessa coniugata, quindi per ognuno si dovranno scrivere due equazioni (2 righe per ogni polo nell'equazione 5.4.10). Togliendo o aggiungendo righe si aumentano o si diminuiscono i poli che si vanno ad imporre, aumentando o diminuendo di conseguenza anche le specifiche che devono essere rispettate.

Anche il numero di guadagni che si vogliono calcolare può dipendere dalle esigenze che si hanno per la specifica applicazione di interesse: non è detto che sia sempre necessario calcolare tutti e tre i tipi di guadagno (accelerazione, velocità e posizione). Se non si ha la necessità di fare una retroazione totale, perché ad esempio si utilizza un controllore P o PD, è sufficiente calcolare un numero di guadagni inferiore rispetto a quanto il metodo darebbe la possibilità di fare teoricamente.

Nel caso sia richiesto un numero minore di guadagni, gli elementi all'interno del vettore che compare a sinistra dell'uguale nell'equazione 5.4.10 (le incognite del nostro problema)

saranno in numero minore (diminuiscono le dimensioni di questo vettore). Quindi perché la premoltiplicazione con la matrice che compare alla sua sinistra nella stessa equazione sia ancora possibile, è necessario che cambino anche le dimensioni di quest'ultima. In altre parole, agendo sul numero di colonne della matrice in questione si determina quanti siano i guadagni che si vogliono calcolare. Viceversa, in base al numero di guadagni di cui si necessita si andranno a cambiare le dimensioni della matrice aggiungendo o togliendo colonne opportunamente.

Per rimanere quindi coerenti con questo schema, in base al tipo di guadagni di cui si necessita, nel scrivere l'equazione matriciale, si dovranno tenere solo i blocchi della matrice incriminata ad essi corrispondenti. Così, se ad esempio non serve calcolare i guadagni di accelerazione, si eliminerà dalla matrice il blocco di colonne di sinistra, se invece si avesse bisogno dei soli guadagni di velocità, si dovranno mantenere solo le colonne del blocco centrale, oppure se per qualche motivo non si facesse retroazione di velocità ma solo di accelerazione e posizione, questi ultimi termini menzionati sarebbero gli unici da non considerare; e così via.

Chiaramente nel caso in esame non vi sono termini asimmetrici. Tuttavia qualora si volesse gestire la sintesi del controllore in stadi successivi, determinando matrici asimmetriche per effetto del controllo, con tale soluzione è possibile ottenere una soluzione.

5.4.3 Applicazione del metodo di Ouyang al caso in esame

Vengono ora sviluppate le equazioni e calcolati i termini utili per applicare il metodo di Ouyang al caso del sistema riportato in figura 4.1 a pagina 64. In verità tale metodo non è stato applicato individualmente, ma è stato implementato nella formulazione del problema che ha portato al calcolo delle modifiche attive e passive, secondo quanto verrà illustrato nel prossimo capitolo. Comunque è utile sviluppare tale metodo per rendersi conto di come esso funzioni effettivamente. Per questo ora verrà applicato al sistema in esame, come se si volesse utilizzarlo in qualità di metodo di puro controllo attivo. Tutti i termini qui calcolati in forma letterale, verranno poi utilizzati nella sede successiva.

Ovviamente, essendo il sistema relativamente semplice e di dimensioni limitate ($N = 2$) i vari passaggi fortunatamente risulteranno molto più semplici di quanto appaiano nella trattazione fatta per il caso generale. In più avendo inizialmente considerato il sistema nella sua configurazione originale che non presenta asimmetrie, tutte le matrici relative alla parte asimmetrica saranno nulle, semplificando così notevolmente i passaggi.

E' utile inoltre chiarire fin da subito che in questa prima applicazione del metodo si è voluti fare una retroazione completa, per cui i guadagni richiesti sono quelli di posizione, velocità ed accelerazione. Avendo la possibilità di imporre due soli poli (data la dimensione del sistema) si andranno quindi a scrivere quattro equazioni per calcolare sei incognite.

Si consideri il modello del sistema ricavato nel paragrafo 4.2, in cui sono state calcolate le matrici di massa \mathbf{M} , smorzamento \mathbf{C} e rigidità \mathbf{K} . Se esse presentassero delle asimmetrie, sarebbe necessario operare una divisione come quella descritta nel paragrafo precedente; ma visto che in questo caso le matrici sono perfettamente simmetriche è possibile porre:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s &= \mathbf{M} \\ \mathbf{C}_s &= \mathbf{C} \\ \mathbf{K}_s &= \mathbf{K} \\ \mathbf{M}_a &= \mathbf{C}_a = \mathbf{K}_a = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Come nel caso in cui è stato applicato il Pole Placement (paragrafo 5.3.2), si vogliono assegnare i due autovalori

$$\lambda_1^D = (\omega_1^D)^2 \quad \text{e} \quad \lambda_2^D = (\omega_2^D)^2$$

e lo smorzamento ξ^D , secondo cui corrisponderanno i quattro poli complessi e coniugati desiderati:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\xi^D \omega_1^D + i \omega_1^D \sqrt{1 - \xi^{D^2}} \\ s_2 &= -\xi^D \omega_1^D - i \omega_1^D \sqrt{1 - \xi^{D^2}} \\ s_3 &= -\xi^D \omega_2^D + i \omega_2^D \sqrt{1 - \xi^{D^2}} \\ s_4 &= -\xi^D \omega_2^D - i \omega_2^D \sqrt{1 - \xi^{D^2}} \end{aligned}$$

Per ognuno dei quattro poli s_i sopra indicati con $i = 1, \dots, 4$ si dovrà calcolare la corrispondente matrice

$$\mathbf{H}_s(s_i) := [\mathbf{M}_s s_i^2 + \mathbf{C}_s s_i + \mathbf{K}_s]^{-1}$$

e i termini necessari a scrivere l'equazione matriciale 5.4.10.

Secondo la definizione di $\mathbf{t}(s)^T$ riportata nell'equazione 5.4.8, per tutti e quattro i casi è necessario quindi determinare:

- $\sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j} s_i^2 + c_{a_j} s_i + k_{a_j}) h_{Nj}^s(s_i)$: essendo $N = 2$, questa sommatoria è costituita in realtà da un solo elemento, quello per $j = 1$. Al suo interno sono presenti:

- m_{a_j} è l'elemento di riga j e colonna N della parte asimmetrica della matrice di massa, quindi l'elemento $(1, 2)$ di \mathbf{M}_a , cioè $\mathbf{M}_a(1, 2)$;
- c_{a_j} è l'elemento di riga 1 e colonna 2 della parte asimmetrica della matrice \mathbf{C} , quindi è l'elemento $\mathbf{C}_a(1, 2)$;
- k_{a_j} è l'elemento $\mathbf{K}_a(1, 2)$;
- $h_{Nj}^s(s_i)$ è l'elemento di riga N e colonna j dalla matrice $\mathbf{H}_s(s_i)$ e quindi in questo caso esso è l'elemento di riga 2 e colonna 1, e cioè $\mathbf{H}_s(s_i)(2, 1)$.

Visto che come già osservato la parte asimmetrica del sistema in esame è nulla, varrà che $m_{a_j} = c_{a_j} = k_{a_j} = 0$, per cui in realtà,

le sommatorie $\sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j} s_i^2 + c_{a_j} s_i + k_{a_j}) h_{Nj}^s(s_i)$ calcolate per i quattro poli saranno tutte nulle. Oltre a questi, altri termini necessari sono:

- avendo un'unica forzante esterna che agisce sul primo grado di libertà, il vettore \mathbf{b} che determina in che modo sono applicate le forze sul sistema, avrà un unico 1 nella prima posizione. Di conseguenza $\mathbf{b}^T = \{1, 0\}$;
- \mathbf{e}_N^T è il trasposto di un vettore $\in \mathbb{R}^{N \times 1}$ il cui solo l' N -esimo termine è unitario, gli altri sono nulli. In questo caso si ha quindi $\mathbf{e}_N^T = \{0, 1\}$;

- $\bar{e}_N = \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{e}_j (m_{a_j} s_i^2 + c_{a_j} s_i + k_{a_j})$, ma essendo $N = 2$ anche questa sommatoria è costituita da un solo elemento: quello per $j = 1$. In più si ha che $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_1$, mentre gli altri elementi che compaiono (m_{a_j} , c_{a_j} e k_{a_j}) coincidono quelli già ricavati prima, e per i quali si è osservato che il loro valore è sempre nullo data la simmetria del sistema. In definitiva quindi, anche tutti i termini \bar{e}_N saranno in realtà nulli.

Come era già stato anticipato, si può vedere che grazie alla struttura simmetrica del sistema e grazie alle sue dimensioni ridotte, tutti i calcoli e i termini che intervengono sono molto più semplici e snelli di quanto potesse sembrare dalla trattazione teorica del caso generale. La maggior parte di essi è inutile e si può osservare che per il caso in esame l'espressione di $\mathbf{t}(s_i)^T$ si semplifica come segue:

$$\mathbf{t}(s_i)^T = \mathbf{b}^T \mathbf{H}_s(s_i)$$

in cui ovviamente compare solo il contributo della parte simmetrica del sistema, dovuto alla matrice $\mathbf{H}_s(s_i)$, e viste le dimensioni di $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ e di $\mathbf{H}_s(s_i) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, per il caso che si sta considerando, esso sarà un vettore di dimensione $\in \mathbb{R}^{1 \times 2}$.

Si avranno quindi quattro vettori di questo tipo, ognuno associato ad un differente polo s_i . Essi poi dovranno anche essere moltiplicati per s_i ed s_i^2 in modo che con i risultati ottenuti si possa costruire la matrice che moltiplica il vettore delle incognite a sinistra dell'equazione 5.4.10. Tale matrice per il caso in esame $\in \mathbb{R}^{4 \times 6}$.

Per il calcolo dei termini che compongono il vettore che sta a destra del simbolo di uguaglianza nell'equazione 5.4.10 è utile far notare che la sommatoria che compare al loro interno coincide con il primo dei termini calcolati precedentemente, quindi essa è in realtà ancora costituita da un unico termine, quello per $j = 1$. Tale termine sarà comunque nullo per le osservazioni già fatte, e ciò significa che il vettore considerato sarà costituito essenzialmente da termini unitari. Nel caso in esame, visto che i poli che si vanno ad imporre sono quattro, esso sarà:

$$\left[\begin{array}{c} \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j} s_1^2 + c_{a_j} s_1 + k_{a_j}) h_{Nj}^s(s_1) \right) \\ \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j} s_2^2 + c_{a_j} s_2 + k_{a_j}) h_{Nj}^s(s_2) \right) \\ \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j} s_3^2 + c_{a_j} s_3 + k_{a_j}) h_{Nj}^s(s_3) \right) \\ \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} (m_{a_j} s_4^2 + c_{a_j} s_4 + k_{a_j}) h_{Nj}^s(s_4) \right) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right]$$

A questo punto la risoluzione del problema può avvenire ricavando il vettore delle incognite direttamente dall'equazione 5.4.10 opportunamente costruita per il caso in esame con i termini appena ricavati, semplicemente invertendola ed ottenendo quindi il vettore che contiene nell'ordine dall'alto verso il basso i guadagni di posizione, velocità ed accelerazione.

Nel caso in cui si vogliono assegnare i quattro poli con sei guadagni, la soluzione della 5.4.10 si calcola tramite pseudo-inversione della matrice dei coefficienti. In tal modo si ottiene il vettore dei guadagni a norma minima.

il metodo di Ouyang venga applicato individualmente come strategia di puro controllo attivo, se si volesse fare una verifica dei risultati si dovrebbe ricalcolare la rappresentazione

della forma di stato del nuovo sistema in cui viene considerato anche il controllore. Come è già stato fatto nel caso del Pole Placement, si devono quindi considerare i guadagni come modifiche attive di massa, smorzamento e rigidità, e con essi costruire le matrici ΔM_{att} , ΔC_{att} e ΔK_{att} a partire dall'espressione del sistema di forze esterne, che nel caso sia presente anche la retroazione di accelerazione, sarà:

$$\begin{Bmatrix} \tau \\ o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11}^A \ddot{\theta}_1 + K_{12}^A \ddot{\theta}_2 + K_{11}^V \dot{\theta}_1 + K_{12}^V \dot{\theta}_2 + K_{11}^P \theta_1 + K_{12}^P \theta_2 \\ o \end{Bmatrix}$$

equivalente a:

$$\begin{Bmatrix} \tau \\ o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}^V & K_{12}^V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

in cui si possono identificare le matrici cercate:

$$\begin{Bmatrix} \tau \\ o \end{Bmatrix} = \Delta M_{att} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \Delta C_{att} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \Delta K_{att} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Per il sistema modificato si avrà quindi:

$$\begin{aligned} M_{mod} &= M - \Delta M_{att} \\ C_{mod} &= C - \Delta C_{att} \\ K_{mod} &= K - \Delta K_{att} \end{aligned}$$

Con le quali è possibile risalire alle quattro matrici della nuova forma di stato A_{mod} , B_{mod} , C_{mod} e D_{mod} .

Sempre con la funzione *damp* si possono poi calcolare i poli, gli smorzamenti e le pulsazioni, relativi ai modi di vibrare della nuova configurazione del sistema.

La verifica degli autovettori può invece essere fatta come di consueto, ricalcolando la matrice della dinamica.

Controllo attivo e passivo

6.1 Introduzione

Come già accennato più volte, per avere dei risultati ottimali e riuscire così ad imporre al sistema di figura 4.1 le forme modali desiderate, è necessario sia modificare passivamente il sistema, sia controllarlo attivamente, così da sfruttare i vantaggi dell'uno e dell'altro approccio.

E' provato infatti che l'esclusiva modifica passiva determinata con la Structural Modification spesso non può essere sufficiente ad assegnare al sistema gli autovettori e/o gli autovalori desiderati. D'altronde, anche se con il solo controllo attivo si riuscirebbe in realtà a fare quanto detto, i guadagni richiesti potrebbero essere talmente elevati da determinare un'azione necessaria non riproducibile a livello pratico.

Per questo di solito è preferibile agire in modo ibrido applicando contemporaneamente entrambe le strategie di intervento così da esaltarne i loro punti di forza.

Tali approcci di solito riguardano due fasi successive della progettazione, nel senso che le tecniche di modifica passiva e quelle di controllo attivo vengono applicate in due momenti differenti: in primo luogo si determinano le modifiche strutturali, e poi, in un secondo momento vengono applicate le tecniche di controllo attivo sul sistema modificato, così da determinare i guadagni necessari a controllare il nuovo sistema, ottenuto applicando a quello originale le modifiche determinate nella prima fase. Ad esempio si può citare il metodo proposto da Ouyang [19] per assegnare solamente i poli, tramite una prima fase di modifica passiva ed il successivo calcolo dei guadagni del controllore. Tale approccio non è tuttavia ottimale poichè non si considerano i mutui effetti delle due modifiche. Ad esempio si osservi come la modifica dei parametri del sistema (M e K) modifichi gli autovettori assegnabili (ossia quelli calcolati tramite proiezione ortogonale nel sottospazio ammissibile).

In questa sede si cercherà invece di calcolare modifiche passive ed attive contemporaneamente inglobando in un'unica procedura sia varie strategie di calcolo riconducibili alla tecnica della Structural Modification, sia il metodo di controllo attivo opportunamente espresso, andando così a formulare un problema generale che permetta di stabilire l'ammontare delle modifiche passive ottime e l'entità dei guadagni della catena di retroazione. Per ottenere l'esatta allocazione dei poli e degli autovettori "simili a quelli desiderati".

6.2 Soluzione mediante minimizzazione

Per poter calcolare contemporaneamente sia le modifiche passive che quelle attive secondo un approccio ibrido, è necessario che esse compaiano all'interno di un'unico problema di minimizzazione.

Quello che si vuole fare è risolvere tale problema e calcolare un set di modifiche comprendente sia l'indicazione su come deve essere modificato il sistema, sia i guadagni di posizione, velocità ed accelerazione del controllore, tali da permettere di avvicinarsi il più possibile all'obiettivo che ci si è posti (che nella pratica consiste nell'ottenimento delle forme modali stabilite come specifiche nel paragrafo 4.3 a pagina 74) e quello ottenuto. Per fare questo è necessario esprimere l'obiettivo in funzione delle modifiche, ed andare a vedere dove esso è massimizzato, o ancora in modo complementare, formulare un problema che permetta di calcolare l'errore tra risultato voluto e risultato ottenuto come una funzione delle modifiche attive e passive, ed andare ad individuare il minimo di tale funzione, come usualmente si fa nei problemi di ottimizzazione.

L'operazione preliminare da fare, è quella ottimizzare, e allo stesso tempo il più semplice possibile.

Tale funzione dipenderà da molte variabili (tante quante sono le modifiche che si vogliono calcolare), per cui l'operazione di ricerca del minimo potrà essere anche molto complessa e richiederà quindi il supporto di un calcolatore per l'esecuzione di opportuni algoritmi matematici.

Il suo dominio sarà definito come l'insieme delle modifiche ammissibili e realizzabili praticamente. Esso quindi dipenderà da condizioni pratiche legate alla natura e alle caratteristiche del meccanismo stesso. L'intervallo di variazione delle modifiche passive sarà quindi limitato per far sì che esse siano realmente applicabili, mentre le modifiche attive potranno teoricamente spaziare su un insieme infinito di valori. Nell'applicazione pratica si dovrà poi in realtà far sì che anche queste ultime ricadano all'interno di un insieme finito, i cui limiti sono legati alla potenzialità del sistema di attuazione utilizzato (coppia del motore).

Unitamente ai vincoli sulle modifiche passive, al fine di evitare problemi di spill-over (e quindi garantire la stabilità), sarà utilizzata l'equazione di assegnazione dei poli con il metodo di Ouyang (equazione 5.4.10) come vincolo al problema di ottimizzazione. Le modifiche attive e passive, non saranno quindi calcolate indipendentemente.

Il set di modifiche ottenuto rappresenterà quindi la miglior combinazione per far sì che da un lato ci si avvicini il più possibile all'obiettivo, e dall'altro tale avvicinamento avvenga sempre in condizioni di stabilità del sistema. Con la Structural Modification si cerca quindi di far convergere la soluzione verso quella migliore dal punto di vista degli autovettori, con il metodo di Ouyang si impone invece che il sistema sia sempre stabile (questo grazie all'imposizione sui valori dei poli del sistema).

Il problema si può quindi formulare in questo modo:

$$\chi = \{K_P, K_V, K_A, \Delta M, \Delta K\} \quad \text{t.c.} \quad \min f(\chi)$$

e con i vincoli:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{t}(s_1)^T & s_1 \mathbf{t}(s_1)^T & s_1^2 \mathbf{t}(s_1)^T \\ \mathbf{t}(s_2)^T & s_2 \mathbf{t}(s_2)^T & s_2^2 \mathbf{t}(s_2)^T \\ \mathbf{t}(s_3)^T & s_3 \mathbf{t}(s_3)^T & s_3^2 \mathbf{t}(s_3)^T \\ \mathbf{t}(s_4)^T & s_4 \mathbf{t}(s_4)^T & s_4^2 \mathbf{t}(s_4)^T \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} K_P \\ K_V \\ K_A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \\ \Delta M, \Delta K \in \Gamma \end{array} \right.$$

in cui Γ è il dominio delle modifiche ammissibili, χ è il valore delle incognite (modifiche attive e passive) ed f è il funzionale della Structural Modification. La determinazione delle

due tipologie di modifiche non viene affidata separatamente ad un metodo piuttosto che all'altro, ma ad essa ci si arriva stabilendo quale sia la miglior combinazione che soddisfa entrambi i metodi a livello globale.

Questo modo di operare è chiaramente diverso dall'approccio ibrido classico in cui in una prima fase, con la Structural Modification vengono calcolate le modifiche da eseguire sul sistema, dopo di che, in una seconda fase si esegue un controllo attivo sul sistema già modificato, con una delle solite tecniche quale potrebbe essere ad esempio il metodo di Ouyang, così da calcolare anche i guadagni del controllore.

6.3 I funzionali

Prima di risolvere il problema della ricerca del miglior set di modifiche applicabili, come detto è necessario esprimere l'obiettivo come una funzione delle modifiche stesse. Per il caso in esame, visto che si vogliono assegnare entrambe le forme modali del sistema, si ha in realtà più di un obiettivo: si vorrebbe infatti che entrambi gli autovettori ed entrambi gli autovalori risultanti, fossero uguali a quelli desiderati. In più, l'uguaglianza, soprattutto per gli autovettori, può essere espressa in vario modo, nel senso che vi sono più parametri che permettono di stabilire se ciò che si è ottenuto è uguale a quanto desiderato, o in caso contrario di stabilire l'ammontare della differenza.

Per cui, siccome gli obiettivi possono essere definiti in vario modo, si avranno più funzioni diverse dipendenti dalle modifiche attive e passive, il cui andamento riprodurrà quello dei vari obiettivi considerati. Si cercherà poi di minimizzare tali funzioni, e questo equivarrà a cercare di ottenere obiettivi diversi ed in diverso modo. Confrontando i risultati si potrà quindi stabilire quale sia la miglior funzione da minimizzare per ottenere quanto desiderato. Vengono ora definiti cinque funzionali che rappresentano le altrettante funzioni che poi si cercherà di minimizzare nei paragrafi successivi. Essi sono tipici in ambiente di Structural Modification e si basano sulla teoria classica della meccanica delle vibrazioni.

6.3.1 Funzionale di Rayleigh

Questo primo funzionale, che nel proseguo verrà chiamato "funzionale di Rayleigh", si basa sulla definizione di *quoziente di Rayleigh* di un vettore, applicata agli autovettori di una matrice: se \mathbf{A} è una matrice quadrata d'ordine n , noto il valore di un suo autovettore \mathbf{v} è possibile risalire a quello del corrispondente autovalore λ tramite il quoziente di Rayleigh:

$$\lambda = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}$$

Considerando il problema dell'analisi modale si ottiene quindi:

$$\lambda = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}}$$

In realtà tale relazione è esatta solo per sistemi conservativi (con matrici \mathbf{M} e \mathbf{K} simmetriche, \mathbf{M} definita positiva, \mathbf{K} semidefinita positiva). Per il caso in esame, normalizzando il primo autovettore rispetto alla sua componente più grande così da avere:

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \begin{Bmatrix} \alpha \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ed ipotizzando che ω_1 sia la pulsazione legata all'autovalore corrispondente ($\lambda_1 = \omega_1^2$) è possibile scrivere:

$$\omega_1^2 = \frac{\begin{Bmatrix} \alpha & 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ 1 \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} \alpha & 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 + (m_2 + m_E)l_1^2 & \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \\ \frac{1}{2}m_2l_1l_2 & J_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

Considerando anche le matrici che contengono modifiche attive e passive sia di massa che rigidità in linea con quanto già fatto per la Structural Modification si ha:

$$\omega_1^2 = \frac{\{ \alpha \ 1 \} (\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}_{pass} + \Delta \mathbf{K}_{att}) \begin{Bmatrix} \alpha \\ 1 \end{Bmatrix}}{\{ \alpha \ 1 \} (\mathbf{M} + \Delta \mathbf{M}_{pass} + \Delta \mathbf{M}_{att}) \begin{Bmatrix} \alpha \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

e quindi, sostituendo le loro espressioni già ricavate nel paragrafo 4.5, si ha la formulazione estesa:

$$\omega_1^2 = \frac{\{ \alpha \ 1 \} \left(\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} + \dots \right)}{\{ \alpha \ 1 \} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1l_1^2 + (m_2 + m_E)l_1^2 & \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \\ \frac{1}{2}m_2l_1l_2 & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{bmatrix} + \dots \right. \\ \left. \dots + \begin{bmatrix} \Delta k & -\Delta k \\ -\Delta k & \Delta k \end{bmatrix} + \dots \right. \\ \left. \dots + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\Delta m_1l_1^2 + (\Delta m_2 + \Delta m_3)l_1^2 & \frac{1}{2}\Delta m_2l_1l_2 + \Delta m_3l_1l_3 \\ \frac{1}{2}\Delta m_2l_1l_2 + \Delta m_3l_1l_3 & \frac{1}{3}\Delta m_2l_2^2 + \Delta m_3l_3^2 \end{bmatrix} + \dots \right)}{\dots - \begin{bmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} \alpha \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \dots - \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} \alpha \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Eseguendo le singole moltiplicazioni matriciali sopra e sotto la linea di frazione e portando poi a destra dell'uguale il denominatore così ottenuto, si ha la seguente equazione:

$$\omega_1^2 \left(\frac{1}{3}\alpha^2 m_1 l_1^2 + \alpha^2 (m_2 + m_E) l_1^2 + \frac{1}{3}\alpha^2 \Delta m_1 l_1^2 + \alpha^2 \Delta m_2 l_1^2 + \alpha^2 \Delta m_3 l_1^2 - \alpha^2 K_{11}^A + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{2}\alpha m_2 l_1 l_2 + \frac{1}{2}\alpha \Delta m_2 l_1 l_2 + \alpha \Delta m_3 l_1 l_3 - \alpha K_{12}^A + \frac{1}{2}\alpha m_2 l_1 l_2 + \frac{1}{2}\alpha \Delta m_2 l_1 l_2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \alpha \Delta m_3 l_1 l_3 + \frac{1}{3}m_2 l_2^2 + \frac{1}{3}\Delta m_2 l_2^2 + \Delta m_3 l_3^2 \right) = \\ = \alpha^2 k + \alpha^2 \Delta k - \alpha^2 K_{11}^P - \alpha k - \alpha \Delta k - \alpha K_{12}^P - \alpha k - \alpha \Delta k + k + \Delta k$$

eseguendo le moltiplicazioni a sinistra dell'uguale ed isolando le incognite (i termini di modifica attiva e passive) in un unico vettore per esprimere tutto in forma matriciale, si

ottiene:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{cccccc} \frac{1}{3}\omega_1^2\alpha^2l_1^2 & \omega_1^2\alpha^2l_1^2 + \omega_1^2\alpha l_1l_2 + \frac{1}{3}\omega_1^2l_2^2 & \omega_1^2\alpha^2l_1^2 + 2\omega_1^2\alpha l_1l_3 + \omega_1^2l_3^2 & \dots & & \\ \dots & -\omega_1^2\alpha^2 & -\omega_1^2\alpha & -\alpha^2 + 2\alpha - 1 & \alpha^2 & \alpha \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \\ K_{11}^A \\ K_{12}^A \\ \Delta k \\ K_{11}^P \\ K_{12}^P \end{array} \right\} = \\
 & = \left\{ -\frac{1}{3}\omega_1^2\alpha^2m_1l_1^2 - \omega_1^2\alpha^2(m_2 + m_E)l_1^2 - \omega_1^2\alpha m_2l_1l_2 - \frac{1}{3}\omega_1^2m_2l_2^2 + \alpha^2k - 2\alpha k + k \right\} \quad (6.3.1)
 \end{aligned}$$

E' possibile poi formulare lo stesso problema anche per l'altra coppia autovettore autovalore, ed ottenere l'equivalente dell'equazione 6.3.1: normalizzando anche in questo caso rispetto alla componente più grande così da ottenere

$$\bar{v}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ 1 \end{array} \right\}$$

ed ipotizzando che ω_2 sia la pulsazione legata all'autovalore corrispondente ($\lambda_2 = \omega_2^2$), senza riportare tutti i passaggi per brevità, in definitiva si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{cccccc} \frac{1}{3}\omega_2^2\beta^2l_1^2 & \omega_2^2\beta^2l_1^2 + \omega_2^2\beta l_1l_2 + \frac{1}{3}\omega_2^2l_2^2 & \omega_2^2\beta^2l_1^2 + 2\omega_2^2\beta l_1l_3 + \omega_2^2l_3^2 & \dots & & \\ \dots & -\omega_2^2\beta^2 & -\omega_2^2\beta & -\beta^2 + 2\beta - 1 & \beta^2 & \beta \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \\ K_{11}^A \\ K_{12}^A \\ \Delta k \\ K_{11}^P \\ K_{12}^P \end{array} \right\} = \\
 & = \left\{ -\frac{1}{3}\omega_2^2\beta^2m_1l_1^2 - \omega_2^2\beta^2(m_2 + m_E)l_1^2 - \omega_2^2\beta m_2l_1l_2 - \frac{1}{3}\omega_2^2m_2l_2^2 + \beta^2k - 2\beta k + k \right\} \quad (6.3.2)
 \end{aligned}$$

Data la struttura delle equazioni 6.3.1 e 6.3.2 è possibile raggrupparle in un'unica equazione matriciale del tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\omega_1^2\alpha^2l_1^2 & \omega_1^2\alpha^2l_1^2 + \omega_1^2\alpha l_1l_2 + \frac{1}{3}\omega_1^2l_2^2 & \omega_1^2\alpha^2l_1^2 + 2\omega_1^2\alpha l_1l_3 + \omega_1^2l_3^2 & \dots \\ \frac{1}{3}\omega_2^2\beta^2l_1^2 & \omega_2^2\beta^2l_1^2 + \omega_2^2\beta l_1l_2 + \frac{1}{3}\omega_2^2l_2^2 & \omega_2^2\beta^2l_1^2 + 2\omega_2^2\beta l_1l_3 + \omega_2^2l_3^2 & \dots \\ \dots & -\omega_1^2\alpha^2 & -\omega_1^2\alpha & -\alpha^2 + 2\alpha - 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \dots & -\omega_2^2\beta^2 & -\omega_2^2\beta & -\beta^2 + 2\beta - 1 & \beta^2 & \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \\ K_{11}^A \\ K_{12}^A \\ \Delta k \\ K_{11}^P \\ K_{12}^P \end{Bmatrix} = \\
 & = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3}\omega_1^2\alpha^2m_1l_1^2 - \omega_1^2\alpha^2(m_2 + m_E)l_1^2 - \omega_1^2\alpha m_2l_1l_2 - \frac{1}{3}\omega_1^2m_2l_2^2 + \alpha^2k - 2\alpha k + k \\ -\frac{1}{3}\omega_2^2\beta^2m_1l_1^2 - \omega_2^2\beta^2(m_2 + m_E)l_1^2 - \omega_2^2\beta m_2l_1l_2 - \frac{1}{3}\omega_2^2m_2l_2^2 + \beta^2k - 2\beta k + k \end{array} \right\} \quad (6.3.3)
 \end{aligned}$$

in cui ovviamente con \mathbf{A} viene identificata la matrice che a sinistra dell'uguale moltiplica il vettore delle incognite \mathbf{x} che contiene modifiche passive e guadagni del controllore, mentre con \mathbf{b} viene identificato il vettore a destra dell'uguale. Il funzionale di Rayleigh che si vuole minimizzare è quindi rappresentato dall'equazione:

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = 0$$

sostituendo nel problema appena ricavato l'espressione dei generici autovettori $\bar{\mathbf{v}}_1$ e $\bar{\mathbf{v}}_2$ e dei corrispondenti autovalori λ_1 e λ_2 con quella delle corrispondenti grandezze desiderate $\bar{\mathbf{v}}_1^D$, $\bar{\mathbf{v}}_2^D$, λ_1^D e λ_2^D , si deve quindi ricavare quel valore di \mathbf{x} che rende minima $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$:

$$x \quad \text{t.c.} \quad \min \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$$

cioè quel set di modifiche che rispetta maggiormente l'equazione 6.3.3, ovvero fanno sì che la grandezza $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ (da intendere come norma) sia il più possibile prossima al valore nullo. Grazie al fatto che il problema viene formulato con le grandezze desiderate, le modifiche che si trovano minimizzando la funzione sono infatti quelle che più permettono di avvicinarsi alla situazione ideale.

6.3.2 Il funzionale della Dynamic Structural Modification

Il secondo funzionale che viene definito coincide con il problema che viene formulato applicando la tecnica della Structural Modification presentata nel paragrafo ???. Esso verrà da ora indicato con il termine "primo funzionale della Structural Modification". Come si è visto nel paragrafo 2.3, a partire dalle matrici

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{M} &= \Delta \mathbf{M}_{pass} - \Delta \mathbf{M}_{att} = \\
 &= \begin{bmatrix} J_{1_{mod}} + (\Delta m_2 + \Delta m_3)l_1^2 - K_{11}^A & \frac{1}{2}\Delta m_2l_1l_2 + \Delta m_3l_1l_3 - K_{12}^A \\ \frac{1}{2}\Delta m_2l_1l_2 + \Delta m_3l_1l_3 & J_{2_{mod}} + \Delta m_3l_3^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

e

$$\Delta \mathbf{K} = \Delta \mathbf{K}_{pass} - \Delta \mathbf{K}_{att} = \begin{bmatrix} \Delta k - K_{11}^P & -\Delta k - K_{12}^P \\ -\Delta k & \Delta k \end{bmatrix}$$

è possibile calcolare due matrici U_m e U_k per ogni autovettore che si vuole assegnare \bar{v}_1^D e \bar{v}_2^D , le quali, in base anche alle specifiche sugli autovalori associati λ_1^D e λ_2^D , permettono di formulare il problema

$$Ux = b$$

in cui, come sempre, x è il vettore delle incognite. Portando tutto a sinistra dell'uguale si ha:

$$Ux - b = 0 \quad (6.3.4)$$

L'equazione 6.3.4 esprime l'andamento di una funzione definita a partire dal problema della Structural Modification al variare delle modifiche che si vogliono calcolare. Essa può quindi rappresentare il secondo funzionale da minimizzare.

Il valore di x che si sta cercando (quello che permette di verificare il più possibile il problema della Structural Modification calcolato per le forme modali desiderate), sarà quindi quello che rende minima $\|Ux - b\|_2^2$:

$$x \quad \text{t.c.} \quad \min \|Ux - b\|_2^2$$

6.3.3 Funzionale riformulato della Dynamic Structural Modification

Anche il terzo funzionale viene definito come il secondo sulla base del principio che sottostà alla Structural Modification, per questo esso verrà indicato con il termine "secondo funzionale della Structural Modification". La formulazione considerata in questo caso è però leggermente diversa e non utilizzata di consueto, visto che non evidenzia il vettore delle incognite x come invece si vuole fare di solito quando si va a risolvere tale problema. Tale funzionale è quindi meno idoneo alla soluzione numerica. Può in alcuni casi, tuttavia, presentare un diverso condizionamento numerico.

Essa prende origine dal problema agli autovalori della matrice della dinamica, il quale per le forme modali desiderate sarà:

$$Dv_i^D = \lambda_i v_i^D$$

esprimibile anche come

$$Kv_i^D = \omega_i^2 Mv_i^D$$

visto che come si sa $D = M^{-1}K$ e $\lambda_i = \omega_i^2$.

Riformulando il problema come segue:

$$\omega_i^2 Mv_i^D - Kv_i^D = 0$$

si ottiene l'espressione del terzo funzionale che si vuole minimizzare. Come si può notare in tale espressione non compaiono esplicitamente come nei casi precedenti il vettore x delle incognite che si desidera calcolare. Per far sì che esse siano presenti implicitamente nella formulazione del problema è necessario considerare in essa anche le matrici ΔM e ΔK intese allo stesso modo di quanto fatto per la Structural Modification.

Si avrà quindi:

$$\omega_i^2 (M + \Delta M_{pass} + \Delta M_{att})v_i^D - (K + \Delta K_{pass} + \Delta K_{att})v_i^D = 0 \quad (6.3.5)$$

in cui appunto nelle espressioni di ΔM_{pass} , ΔM_{att} , ΔK_{pass} e ΔK_{att} che sono le stesse ricavate in quella sede, compaiono i termini di modifica attiva e passiva. Il problema è

quindi ora formulato in funzione delle modifiche che si vogliono calcolare, e per determinare quelle che permettono di verificare il più possibile l'uguaglianza 6.3.5 si dovrà prima replicarlo per entrambe le forme modali desiderate ed ottenere quindi

$$\omega_1^2(M + \Delta M_{pass} + \Delta M_{att})\bar{v}_1^D - (K + \Delta K_{pass} + \Delta K_{att})\bar{v}_1^D = 0$$

e

$$\omega_2^2(M + \Delta M_{pass} + \Delta M_{att})\bar{v}_2^D - (K + \Delta K_{pass} + \Delta K_{att})\bar{v}_2^D = 0$$

e poi minimizzare entrambe le espressioni precedenti contemporaneamente, ovvero minimizzare $\|\omega_1^2(M + \Delta M)\bar{v}_1^D - (K + \Delta K)\bar{v}_1^D\|_2^2 + \|\omega_2^2(M + \Delta M)\bar{v}_2^D - (K + \Delta K)\bar{v}_2^D\|_2^2$:

$$\Delta M, \Delta K \quad \text{t.c.} \quad \min \|Ux - b\|_2^2$$

6.3.4 Funzionale “alpha-beta”

Il quarto funzionale che viene definito rappresenta la differenza tra le componenti degli autovettori desiderati e quelle degli autovettori ottenuti dopo le modifiche. Proseguendo ci si riferirà ad esso con il termine “funzionale alpha-beta”. esso rappresenta in modo intuitivo il vettore nel caso in cui sia assunta una specifica normalizzazione.

Per ogni possibile set di modifiche si devono quindi calcolare le caratteristiche del nuovo sistema modificato e scegliere poi quel set che garantisce la minor differenza sulle componenti degli autovettori, tra la situazione originale e quella ottenuta. Con il comando *eig* di Matlab si calcolano quindi gli autovettori di $D_{mod} = M_{mod}^{-1}K_{mod}$ e si normalizzano rispetto alla loro componente più grande. Si ipotizzi di ottenere ad esempio:

$$\bar{v}_{1mod} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{mod} \\ 1 \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad \bar{v}_{2mod} = \left\{ \begin{array}{c} \beta_{mod} \\ 1 \end{array} \right\}$$

mentre gli autovettori desiderati siano sempre

$$\bar{v}_1^D = \left\{ \begin{array}{c} \alpha^D \\ 1 \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad \bar{v}_2^D = \left\{ \begin{array}{c} \beta^D \\ 1 \end{array} \right\}$$

l'obiettivo sarà quello di minimizzare la differenza tra le componenti α^D e α_{mod} così come la differenza tra β^D e β_{mod} .

Il funzionale che rappresenta l'errore ottenuto al variare delle modifiche considerate dovrà quindi considerare entrambe le differenze contemporaneamente e perciò si andrà a minimizzare la grandezza $(\alpha_{mod} - \alpha^D)^2 + (\beta_{mod} - \beta^D)^2$.

E' chiaro che tale funzionale non tiene conto in alcun modo delle richieste sugli autovalori che però è automaticamente soddisfatta dal vincolo. Questo funzionale non si presta molto bene alla soluzione con algoritmi numerici. E' tuttavia intuitivo e di facile comprensione.

6.3.5 Funzionale coseno

L'ultimo funzionale definito (denominato "funzionale coseno") si può considerare simile al precedente, in quanto anche esso si basa su un confronto tra gli autovettori desiderati e quelli che si possono ottenere applicando un certo set di modifiche. Con questo confronto fatto a valle dell'applicazione delle modifiche al sistema, si può quindi stabilire esattamente quali siano quelle che determinano la più piccola differenza tra la situazione antecedente e quella conseguente la loro applicazione.

Il confronto si basa sulla determinazione della distanza geometrica esistente tra i due autovettori che si vogliono confrontare, i quali nelle migliori delle ipotesi si vorrebbe che fossero coincidenti.

La distanza tra i due autovettori viene quantificata attraverso il coseno dell'angolo da essi formato che dovrà pertanto essere pari a $+1$ o a -1 , indifferentemente. Si ricordi infatti che gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa arbitraria (diversa da zero). Due autovettori paralleli sono associati alla medesima dinamica, e avranno coseno ± 1 .

A partire dalla formula del prodotto scalare, si calcolerà quindi il coseno dell'angolo formato dall'autovettore desiderato e dall'autovettore ottenuto. Ipotizzando che $\bar{\mathbf{v}}_{1mod}$ e $\bar{\mathbf{v}}_{2mod}$ siano gli autovettori (con normalizzazione arbitraria), ottenuti dopo le modifiche si avrà:

$$\cos(\theta_1) = \frac{\bar{\mathbf{v}}_1^D \cdot \bar{\mathbf{v}}_{1mod}}{\|\bar{\mathbf{v}}_1^D\| \|\bar{\mathbf{v}}_{1mod}\|} \quad (6.3.6)$$

e

$$\cos(\theta_2) = \frac{\bar{\mathbf{v}}_2^D \cdot \bar{\mathbf{v}}_{2mod}}{\|\bar{\mathbf{v}}_2^D\| \|\bar{\mathbf{v}}_{2mod}\|} \quad (6.3.7)$$

Per poter tenere conto di entrambe queste specifiche contemporaneamente, si dovrà poi massimizzare la grandezza $(\cos(\theta_1))^2 + (\cos(\theta_2))^2$ così da determinare quale sia il set di modifiche che consente agli autovettori ottenuti di coincidere il più possibile con quelli desiderati.

Equivalentemente invece di massimizzare la grandezza sopra riportata è possibile minimizzare il funzionale considerato che sarà $(2 - [(\cos(\theta_1))^2 + (\cos(\theta_2))^2])$, in modo da riportarsi alla formulazione standard dei problemi di minimizzazione.

In alternativa si può ponderare il soddisfacimento delle due specifiche tramite coefficienti γ_1 e γ_2 e quindi minimizzare $\gamma_1(\cos(\theta_1))^2 + \gamma_2(\cos(\theta_2))^2$, in modo da dare più importanza a una delle due specifiche.

Il funzionale coseno presenta maggiori problemi di soluzione non essendo convesso. Infatti è necessario osservare che esso presenta molti minimi locali, e quindi in certi casi la sua minimizzazione potrebbe anche essere problematica; per questo tale funzionale è poco usato direttamente nell'ambito della Structural Modification.

E' quindi necessario discutere brevemente le problematiche di soluzione.

6.4 Minimizzazione assoluta

Dopo aver definito i funzionali che si vorrà minimizzare, visto che in generale, non si sa a priori se essi siano convessi, si può ipotizzare che presentino più minimi locali ed abbiano quindi un andamento casuale come riportato ad esempio in figura 6.1 in cui viene rappresentato l'andamento di una generica funzione $f(x)$, al variare di un'unica grandezza x da cui dipende.

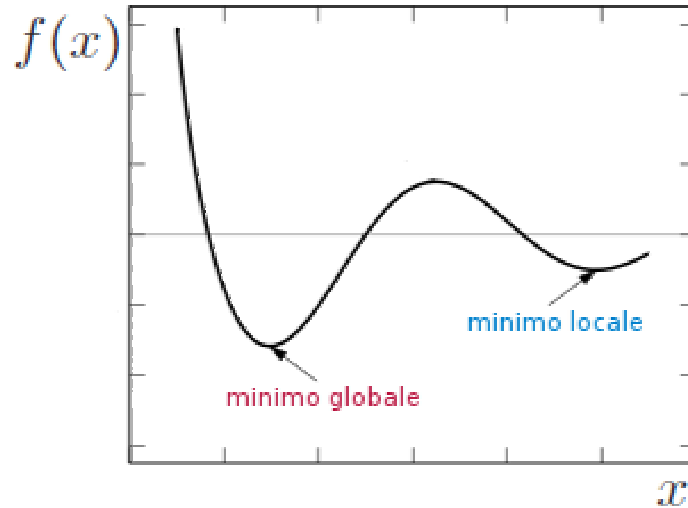


Fig. 6.1: Generica funzione con minimo locale e globale.

Una funzione presenta un minimo locale in corrispondenza del punto in cui il suo valore è minore o uguale a quelli che assume in un intorno del punto considerato. Il minimo globale o assoluto corrisponderà invece al più piccolo tra i minimi locali. Con riferimento al caso in esame, siccome si vuole minimizzare al massimo la funzione definita, si dovrà ricercare, con qualche metodo, il suo minimo assoluto che corrisponderà all'insieme di valori con cui modificare passivamente ed attivamente il sistema, in corrispondenza dei quali la funzione considerata assumerà appunto il valore minore e di conseguenza ci si avvicinerà il più possibile alla richiesta fatta. Applicando tali modifiche si avrà così il miglior risultato ottenibile. Per problemi convessi invece esiste un unico minimo.

Nel caso di problemi non convessi è quindi necessario adottare strategie che consentono di esplorare più minimi, come sarà evidenziato nel paragrafo 6.7.

6.5 Il vincolo di posizionamento dei poli

Come è stato già accennato nel paragrafo 6.2 al fine di evitare problemi di instabilità si è voluto imporre che nella minimizzazione dei funzionali la soluzione trovata garantisca sempre che il sistema risultante sia stabile. Ciò viene fatto ponendo come vincolo per la soluzione una relazione che garantisca tale caratteristica. Questa relazione viene determinata grazie al metodo di Ouyang che definisce un vincolo.

Come è stato evidenziato nel paragrafo 5.4 tale metodo permette infatti di assegnare i poli del sistema in maniera esatta. Implementandolo si può quindi garantire la stabilità del sistema andando a posizionare i suoi poli in una zona appropriata del piano reale. E' altresì possibile formulare un problema in funzione delle modifiche attive che si vogliono calcolare. Imponendo che il soddisfacimento di questo problema debba essere tassativo, si ha la sicurezza che la soluzione cercata determinerà la caratteristica di stabilità del sistema.

Ciò che è stato fatto rispecchia proprio questo concetto: nella procedura di minimizzazione si è imposto come vincolo che venga sempre rispettato il problema di assegnazione descritto dall'equazione 5.4.10 così da garantire la stabilità del sistema, caratteristica molto critica per il meccanismo che si sta considerando.

Si è voluto considerare in modo particolare il metodo di Ouyang per una serie di questioni di attinenza con quello che si è svolto e per facilitare la soluzione numerica. Le caratteristiche vantaggiose di questo metodo che lo hanno fatto preferire agli altri sono già state evidenziate. In aggiunta si vuole anche considerare i seguenti aspetti:

- il metodo di Ouyang risulta essere ben condizionato numericamente e ciò permette di evitare problemi di calcolo; data la natura complessa del problema da risolvere si è quindi preferito fare affidamento a tale metodo per non rischiare di incorrere in problemi numerici, che in verità, come si vedrà più avanti, sono comunque sorti per altri motivi. Il fatto di aver voluto precauzionarsi almeno su questo fronte, è stato senza dubbio un vantaggio;
- esso è nato in ambito di Structural Modification ed è stato sviluppato per i casi tipici di impiego di tale tecnica. Per questo, si è deciso di applicarlo anche in tale lavoro che volge maggiormente lo sguardo proprio ad essa;
- come detto, essendo nato in ambito di Structural Modification esso si presta bene ad essere trattato anche in fase sperimentale in quanto prevede l'utilizzo della Ricettanza H del sistema, ovvero della funzione di trasferimento con ingresso forza e uscita spostamento. Tale grandezza è definita a partire dalle informazioni sulla massa e sulla rigidità del sistema, ma nel caso in cui, per motivi pratici non siano note tali proprietà, essa può essere determinata anche sperimentalmente, con grande vantaggio rispetto ai metodi tradizionali visto che grazie a questo aspetto si riesce a progettare il controllore senza dover necessariamente conoscere le caratteristiche fisiche del sistema (situazione che può capitare frequentemente in ambito applicativo).

6.6 Tipo di retroazione scelta

Osservando l'espressione con cui si può calcolare la pulsazione naturale di un sistema:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

si può osservare che l'effetto ottenibile aumentando la massa lo si può ottenere anche diminuendo la rigidità e viceversa. Trasferendo questo concetto sulla retroazione, effettivamente, per il sistema in esame si è potuto osservare come la retroazione di accelerazione non portasse alcun beneficio aggiuntivo, in quanto l'effetto ottenibile con essa è ottenibile anche con la retroazione di posizione.

Dal punto di vista della modifica passiva, considerando la presenza di vincoli su ΔM e ΔK , ciò non è vero: non è detto che il valore di ΔK equivalente ad una modifica di ΔM sia ammissibile, e viceversa.

Per quello che riguarda il controllo attivo sono da osservare due aspetti importanti:

1. dall'equazione 2.4.2, che definisce gli autovettori assegnabili

$$\mathbf{v}_i = [\mathbf{M}(\lambda_i)^2 + \mathbf{C}\lambda_i + \mathbf{K}]^{-1} \mathbf{B}[\mathbf{K}_A(\lambda_i)^2 \mid \mathbf{K}_V\lambda_i \mid \mathbf{K}_P] \mathbf{v}_i \quad (6.6.1)$$

si osserva che nulla cambia se si considerano i guadagni $[\mathbf{K}_A, \mathbf{K}_V, \mathbf{K}_P]$, oppure $[\mathbf{K}_V, \mathbf{K}_P]$, oppure $[\mathbf{K}_A, \mathbf{K}_V]$. Ciò che importa è che vi sia il \mathbf{K}_V in quanto moltiplica un numero complesso. Questo risultato è conforme alle prove numeriche.

2. In realtà l'uso della retroazione di accelerazione in sostituzione di quella di posizione è equivalente per strutture in cui non vi sono modi di moto rigido. Ciò è di grande utilità nel controllo di strutture poichè le misure fatte sono in genere misure accelerometriche. Tale tipo di retroazione unita a quella di velocità è detta "State derivative feedback".

Esiste una teoria che regola e giustifica tale tipo di retroazione in cui si stabilisce che essa è applicabile a sistemi che siano completamente controllabili e che non abbiano poli a catena aperta in $s = 0$. Purtroppo come si è visto, il sistema in esame rispetterebbe la prima ipotesi ma non la seconda essendo l'autovettore del primo modo di vibrare nullo. Questo ribadisce ancora una volta che la situazione considerata è un caso particolarmente critico per l'applicazione rispetto alla classica Structural Modification in quanto le sue caratteristiche non sono conformi a quelle dei sistemi a cui viene solitamente applicata.

I due aspetti sopra esposti hanno fatto convergere la scelta del tipo di retroazione da utilizzare verso quella di posizione e velocità. In questo modo si è quindi eseguita una classica retroazione dallo stato.

6.7 Implementazione risolutiva

Nella soluzione del problema sono stati utilizzati due metodi diversi per superare i problemi di non convessità. In primo luogo si è fatto ricorso agli algoritmi di Matlab di “Global Search”. In un secondo momento invece è stata implementata una enumerazione sulle modifiche passive.

6.7.1 Global Search

L’ambiente Matlab dispone di molti metodi che possono essere utilizzati per ricercare il minimo di una funzione sul dominio di interesse il quale, nel caso che si sta considerando, non è altro che l’insieme di modifiche ammissibili.

In realtà, la maggior parte dei comandi disponibili per attuare una minimizzazione consente di rintracciare solo minimi locali, e quindi non sono adatti al caso in esame, visto che è richiesto di fare una minimizzazione globale: funzioni come *fmincon* permettono di ricercare il minimo di relazioni anche non lineari a più variabili, e forniscono l’informazione sul valore delle variabili che rendono minima la funzione specificata, dando anche la possibilità di imporre dei limiti e delle condizioni da rispettare così da vincolare il dominio sul quale viene eseguita la ricerca.

Alcune versioni di Matlab rendono disponibile anche un ToolBox molto potente denominato “Global Optimization Toolbox” che permette di fare una minimizzazione globale, e che quindi si presta bene ad essere applicato al caso in esame.

Questo pacchetto software fornisce al suo interno diversi metodi risolutivi per risalire ai valori delle variabili libere in corrispondenza dei quali una certa funzione specificata assume il più piccolo valore possibile. Il vantaggio derivante dall’utilizzo di tali metodi sta nel fatto che essi non si limitano a fornire l’indicazione sul primo minimo trovato, ma eseguono una ricerca su tutto il dominio della funzione andando a rintracciare i vari minimi locali per poi stabilire quale tra essi sia quello assoluto.

Le strategie utilizzate per fare ciò sono svariate ma comunque il concetto è sempre quello di generare un certo numero di punti di partenza, e a partire da questi eseguire una minimizzazione locale¹. Nel caso vengano trovati più minimi locali differenti viene poi stabilito quale sia quello assoluto.

Tra le alternative messe a disposizione dal Global Optimization Toolbox, quella più adatta al caso in esame, che si è utilizzata, consiste nella funzione “GlobalSearch”.

Visto che tale metodo permette di minimizzare una funzione tenendo anche conto di un eventuale vincolo che si vuole imporre si è pensato di sfruttare questa possibilità per minimizzare i funzionali definiti nel paragrafo precedente facendo sì che vengano sempre rispettate le condizioni derivanti dal problema ottenuto applicando il metodo di Ouyang, introdotto nel paragrafo 5.4.

Facendo riferimento a quanto ricavato in quella sede, si consideri l’equazione 5.4.10 di pagina 96 come la formulazione conclusiva del problema inerente, che per brevità viene ora riscritta in modo conciso come segue:

$$\mathbf{T}(s)\mathbf{x} = -\mathbf{y}(s)$$

equivalente a:

$$\mathbf{T}(s)\mathbf{x} + \mathbf{y}(s) = \mathbf{0}$$

¹Non a caso tali strategie, di solito al loro interno fanno ricorso proprio alla funzione *fmincon* presentata prima.

Ovviamente $T(s)$ è la matrice che nell'equazione 5.4.10 a sinistra del simbolo di uguaglianza moltiplica il vettore delle incognite \mathbf{x} il quale in questo caso, sarà costituito dai guadagni di posizione e velocità. Il vettore $\mathbf{y}(s)$ è invece quello che nell'equazione 5.4.10 sta a destra dell'uguale e che contiene i termini della parte asimmetrica del sistema, che in questo caso saranno quindi nulli.

Da notare che sia la matrice T , sia il vettore \mathbf{y} sono definiti in funzione dei poli che si vogliono imporre al sistema. Quest'ultima dipendenza determina il fatto che il metodo di Ouyang permetta di calcolare i guadagni necessari a far sì che frequenze e smorzamenti vengano assegnati esattamente. Questo è il motivo per cui si è pensato di porre come vincolo nell'operazione di minimizzazione il problema da esso definito. In questo modo il metodo di minimizzazione ricercherà i valori di modifiche passive ed attive che minimizzano il funzionale considerato in modo che comunque venga sempre rispettata anche la condizione derivante dal problema di Ouyang. Così facendo si ha la sicurezza che i poli che si otterranno saranno esattamente uguali a quelli imposti e quindi ci si potrà precautelare dall'instabilità.

A livello pratico, per applicare il GlobalSearch oltre a definire la funzione obiettivo da minimizzare è possibile anche indicare l'eventuale vincolo che si vuole venga rispettato, la condizione iniziale, da considerare come punto di partenza per eseguire la minimizzazione, eventuali limiti superiori ed inferiori entro cui deve rimanere la soluzione (che definiscono il dominio sul quale viene ricercato il minimo) e una serie di altre opzioni utilizzabili a piacere.

Anche se questo metodo sembrerebbe la soluzione ideale per il problema in esame, applicandolo per minimizzare alcuni dei funzionali definiti, esso ha dato problemi in alcuni casi, per la presenza dei termini complessi.

Probabilmente la condizione in cui ci si è posti, non è la migliore per applicare il GlobalSearch e, come è accaduto nel caso in esame, ci si può imbattere in problemi di tipo numerico che data la loro natura non possono essere evitati in alcun modo.

6.7.2 Soluzione enumerativa

La soluzione finale che si è deciso di utilizzare consiste in una minimizzazione dei funzionali enumerando (con un opportuno passo di discretizzazione) le modifiche passive ammissibili. Ciò è reso possibile dal dominio limitato di tali variabili.

Ovviamente anche il risultato che si otterrà sarà una approssimazione che al limite potrebbe anche coincidere con la soluzione migliore, ma nella maggior parte dei casi si avvicinerà ad essa per effetto della discretizzazione. La differenza tra il miglior risultato in assoluto e il risultato ottenuto in questo modo sarà determinata dal livello di risoluzione che si deciderà di adottare. I tempi di calcolo contenuti hanno tuttavia consentito di discretizzare in modo fino.

A livello pratico questo metodo è stato realizzato facendo variare ognuna delle quattro modifiche passive di massa e rigidità (Δm_1 , Δm_2 , Δm_3 e Δk) su un intervallo finito di valori, considerando poi ogni combinazione possibile, viene applicato il metodo di Ouyang al sistema modificato passivamente così da calcolare le modifiche attive di posizione e velocità e definendo così un set completo di modifiche. Per ognuno di questi insiemi di modifiche che rappresenta un punto del dominio, viene poi calcolato il valore che il funzionale assume; si ricostruisce cioè l'andamento del funzionale in modo discreto (per punti) valutandolo in ogni punto del dominio considerato. Il valore più piccolo del funzionale definisce il punto in cui esso risulta minimizzato. A partire ad tale punto si può poi risalire al set di modifiche che corrisponde ad esso, il quale sarà quindi quello che

minimizza il funzionale cioè quello cercato.

Ovviamente siccome le modifiche passive non vengono fatte variare in modo continuo ma discreto, nella calcolo dei valori che assume il funzionale è presente una certa risoluzione che si ripercuote in un errore sulla soluzione ottenuta che sarà leggermente diversa da quella che realmente minimizza in modo assoluto in funzionale. Tale risoluzione dipende dal passo con cui vengono fatte variare le modifiche passive: maggiore è tale passo e più sarà elevata la risoluzione; al diminuire di tale passo si avrà un aumento della precisione ma anche un aumento delle combinazioni possibili e quindi di set per i quali calcolare il valore del funzionale, con conseguente aumento del tempo di calcolo.

La variazione discreta sul dominio che comporta la generazione di tutte le combinazioni da considerare viene realizzata in Matlab con dei cicli “for” annidati. Il metodo è esatto, a meno di discretizzazione, e il risultato fornito coincide con quello della “GlobalSearch” nei casi in cui essa è andata a convergenza. Il tempo di calcolo inoltre, nei due casi è comparabile.

	<i>Ray</i>	<i>SM1</i>	<i>SM2</i>	$\alpha - \beta$	<i>cos</i>	α_{mod}	β_{mod}
<i>PP</i>	242	51	51	0.4286	1.7882	0.9234	-0.2798
<i>Ouy</i>	242	51	51	0.4286	1.7882	0.9234	-0.2798
<i>Ray</i>	154	107	99.6	0.6219	1.6738	0.9503	-0.1429
<i>SM1</i>	418	7.2	6.32	0.1145	1.9617	0.7105	-0.7548
<i>SM2</i>	418	7.2	6.32	0.1145	1.9617	0.7105	-0.7548
$\alpha - \beta$	495	8	7.13	0.1145	1.9617	0.7105	-0.7548
<i>cos</i>	418	7.2	6.32	0.1145	1.9617	0.7105	-0.7548

Tab. 6.1: Confronto tra i vari funzionali.

6.8 Applicazione del metodo e confronto tra i vari funzionali

Il metodo sopra descritto è stato implementato per tutti e cinque i funzionali definiti nel paragrafo 6.3 per determinare quale sia tra di essi quello che permette di ottenere il risultato migliore in termini di avvicinamento delle prestazioni ottenute a quelle desiderate.

Per ognuno dei cinque casi, dopo aver eseguito la minimizzazione avvalendosi della tecnica discreta, e aver quindi calcolato il miglior set di modifiche relativamente al particolare funzionale considerato, con il risultato ottenuto si sono calcolati anche gli altri quattro funzionali, così da avere un'idea del modo in cui il set di modifiche che si è stabilito essere il migliore per un particolare caso, vada a minimizzare anche gli altri e per valutare la bontà dei funzionali con retroazione di posizione, velocità ed accelerazione.

Oltretutto, è stato calcolato il valore di tutti e cinque i funzionali anche con la soluzione ottenuta applicando singolarmente il metodo del Pole Placement e il metodo di Ouyang, per poter poi fare un confronto con le tecniche di puro controllo attivo e stabilire se l'introduzione della Structural Modification possa realmente portare dei vantaggi.

Infine, per ognuno dei sette casi sopra considerati sono state determinate anche le caratteristiche del sistema risultante, a cui cioè venga applicato il controllo attivo e/o quello passivo. In questo modo si possono analizzare i risultati ottenuti in maniera più diretta e farsi un'idea immediata dell'eventuale miglioramento che ha portato la modifica passiva. Tutto questo è stato fatto al fine di stabilire quale sia il miglior funzionale da minimizzare, e quindi determinare quale sia il funzionale che, tramite la sua minimizzazione, permetta di avere il risultato migliore, cioè il set di modifiche da applicare al sistema per avvicinarsi il più possibile al risultato desiderato in condizioni di stabilità.

La determinazione del miglior funzionale da minimizzare è stata fatta testando la procedura per diverse richieste fatte. Nella tabella 6.1 sono riportati i risultati ottenuti richiedendo le specifiche stabilite nel paragrafo 4.3, che sono: autovettori desiderati

$$\mathbf{v}_1^D = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2^D = \begin{Bmatrix} -l_2/l_1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

pulsazioni desiderate

$$\omega_1^D = 6\text{rad/s} \quad \text{e} \quad \omega_2^D = 50\text{rad/s}$$

smorzamento desiderato $\xi = 0.3$

Nella prima riga della tabella 6.1 sono riportati i valori dei funzionali ricalcolati con i risultati delle modifiche attive ottenute applicando il puro Pole Placement, nella seconda quelli ottenuti dall'applicazione del metodo di Ouyang. Le righe che vanno invece dalla terza alla settima sono invece relative ai risultati ottenuti minimizzando rispettivamente nell'ordine: funzionale di Rayleigh, primo funzionale della Structural Modification, secondo funzionale della Structural Modification, funzionale alpha-beta ed infine funzionale coseno. Nelle prime cinque colonne sono invece riportati i valori dei funzionali calcolati con i risultati di ognuno dei sette casi considerati nelle righe della tabella, anche in questo

caso nello stesso ordine riportato sopra: funzionale di Rayleigh, primo funzionale della Structural Modification, secondo funzionale della Structural Modification, funzionale alpha-beta ed infine funzionale coseno. La sesta e la settima colonna riportano invece le informazioni utili per rendersi conto dei valori che le componenti dei due autovettori assumono dopo le modifiche. In particolare la sesta colonna si riferisce alla componente α del primo autovettore del sistema, modificato con ognuno dei risultati ottenuti applicando i metodi di puro controllo attivo (Pole Placement e Ouyang) oppure la minimizzazione dei funzionali; la settima colonna si riferisce invece alla componente β del secondo autovettore del sistema modificato.

Già a prima vista, da un'analisi grossolana sul valore delle componenti degli autovettori del sistema modificato (sesta e settima colonna) risulta chiaro come l'introduzione delle modifiche passive, permetta un avvicinamento sostanziale agli autovettori desiderati, cosa che invece non accade con il puro controllo attivo visto che esso non ha alcuna possibilità di intervenire in tal senso. Questo risulta chiaro anche osservando il valore del funzionale coseno che nei casi di approccio ibrido risulta essere molto più grande ² rispetto ai casi di puro controllo attivo. Questo significa che implementando anche le modifiche passive, i due autovettori del sistema modificato vanno a coincidere maggiormente con i due autovettori desiderati.

Come ci si aspettava, viene quindi confermato che, affiancando al controllo attivo la modifica strutturale del sistema, si possono ottenere dei vantaggi in termini di sagomatura delle forme modali.

A livello di autovalori, avendo imposto il vincolo di Ouyang nella minimizzazione dei funzionali, si ha la certezza di ottenere sempre il risultato voluto in termini di pulsazioni e smorzamenti desiderati, come accade daltronde, per loro natura, anche applicando i puri metodi di controllo attivo.

Quindi ricapitolando si può affermare che, grazie al metodo implementato il quale prevede che in ogni caso le richieste sugli autovalori vengano sempre rispettate, l'approccio ibrido garantisce lo stesso risultato ottenibile anche con i metodi di puro controllo attivo in termini di pulsazioni desiderate, in più, il fatto che il sistema possa essere modificato passivamente permette di ottenere un vantaggio in termini di autovettori, consentendo di intervenire anche su questo fronte, dove invece le sole modifiche attive risultano essere impotenti.

Ovviamente gli autovettori ottenuti con l'approccio ibrido, non coincidono ancora perfettamente con quelli richiesti ma sicuramente si ottiene un sostanziale miglioramento.

Questo certifica che il metodo con cui si è deciso di intervenire sul sistema consente di ottenere dei vantaggi anche per sistemi del tipo di quello considerato, che sono inusuali in ambito di Structural Modification.

Osservando le prime due righe della tabella si vede come entrambi i metodi di puro controllo attivo convergano verso lo stesso risultato. In questo, per il metodo di Ouyang è stata considerata una retroazione posizione, velocità ed accelerazione. Ciò conferma il fatto che, in linea con quanto già riportato nel paragrafo 6.6, quest'ultima non porta alcun vantaggio.

Confrontando ora i risultati ottenuti con la minimizzazione dei cinque funzionali a prima vista sembrerebbe che, a parte per il caso del funzionale di Rayleigh, gli altri quattro diano più o meno lo stesso risultato. In realtà, in altri casi si è potuto osservare come ovviamente ognuno di essi minimizzi maggiormente se stesso rispetto agli altri. In più, i risultati ottenuti con i due funzionali relativi alla Structural Modification e con il funzionale coseno sono identici. In realtà l'uguaglianza di questi tre casi è legata alla

²Visto che i due vettori coincidono quando il coseno dell'angolo da essi formato è pari ad uno, per come è stato definito il funzionale coseno, il miglioramento della situazione si rispecchia in un aumento del suo valore, fino, al limite pari a due, nel caso in cui i due vettori coincidano.

particolare situazione riportata. In quasi tutti gli altri casi testati il risultato migliore si è ottenuto minimizzando il funzionale coseno. Resta comunque il fatto che il primo funzionale della Structural Modification fornisce risultati molto simili, con tempi di calcolo inferiori.

Si potrebbe obiettare che con le tre migliori minimizzazioni considerate, anche se in effetti globalmente si ottiene un miglioramento più marcato rispetto agli altri casi, se da un lato si ha effettivamente un elevato avvicinamento del secondo autovettore alla situazione desiderata, dall'altro si assiste ad un allontanamento del primo. A tale inconveniente è possibile ovviare semplicemente introducendo nel metodo di calcolo dei pesi diversi sui due autovettori così da poter preferire il rispetto della specifica su di uno piuttosto che sull'altro, andando in questo modo a bilanciare il risultato.

Un'ultima osservazione riguarda il risultato relativo al funzionale di Rayleigh: esso risulta essere il peggiore rispetto sia ai metodi di controllo ibrido e sia anche addirittura ai metodi di puro controllo attivo. In alcuni casi è risultato addirittura che le componenti del secondo autovettore non fossero nemmeno soggette alla variazione di segno che dovrebbe invece caratterizzarle. Per questo tale metodo non può essere considerato valido. Ciò è legato al fatto che per sistemi asimmetrici le equazioni di Rayleigh non sono da considerarsi come un'uguaglianza esatta, ma approssimata, e questo determina probabilmente il fallimento del metodo che non può quindi essere considerato accettabile. Per concludere è doveroso fare un commento sui valori ottenuti: anche se la miglior minimizzazione consente di ottenere un avvicinamento sensibile alle richieste fatte (il valore del funzionale coseno aumenta considerevolmente), l'introduzione delle modifiche passive non è ancora sufficiente ad ottenere quanto voluto e le componenti α_{mod} e β_{mod} dei due autovettori dopo le modifiche non sono ancora pari a quelle richieste.

Simulazione e prova sperimentale

7.1 Introduzione

Per avere una prova pratica della validità dei risultati ottenuti nel precedente capitolo, in cui secondo un approccio ibrido basato sulla minimizzazione si sono calcolate le modifiche passive ed attive necessarie affinché i modi di vibrare del braccio robotico a due gradi di libertà assumano la forma imposta secondo le considerazioni fatte, è utile, non solo andare ad analizzare gli autovettori e gli autovalori della matrice della dinamica del nuovo sistema risultante dopo l'applicazione delle modifiche, ma anche simulare il comportamento del sistema stesso. Se accanto all'analisi dei risultati numerici si cerca anche di riprodurre il vero funzionamento del sistema reale, ci si può infatti fare un'idea più precisa dei riscontri ottenuti anche dal punto di vista applicativo.

Il Toolbox "Simulink" messo a disposizione da Matlab permette di simulare il comportamento del sistema ed è quindi utilizzabile per verificare l'efficacia dei risultati ottenuti, dando quindi la possibilità di determinare anche la loro validità pratica.

Visto che nel capitolo precedente è stato stabilito che i risultati più performanti si ottengono minimizzando il metodo del coseno, da ora in avanti verrà considerato unicamente questo caso e si andrà quindi a confrontare la simulazione del comportamento del sistema modificato nel caso di modifiche attive e passive calcolate nel modo sopra citato con il comportamento ottenuto nel caso essa venga esclusivamente controllato attivamente attraverso la tecnica del Pole Placement.

L'analisi riguarda quindi solo i risultati ottenuti con quest'ultimo metodo di controllo attivo e quelli ottenuti tramite la minimizzazione del coseno secondo un approccio ibrido.

Dopo una breve descrizione dello schema che rappresenta il sistema originale, verrà quindi testato il comportamento in diverse configurazioni che riproducono delle tipiche situazioni di lavoro in cui potrebbe trovarsi il meccanismo reale. In questo modo si avrà un'idea non solo dell'efficacia del metodo di controllo sviluppato ma anche della sua effettiva utilità.

Dopodichè verranno anche riportati i risultati sperimentali che si sono ottenuti testando i due metodi di controllo su un prototipo presente in laboratorio.

7.2 Implementazione in Simulink

Lo schema dell'intero sistema di controllo risulta essere abbastanza semplice visto che il sistema vero e proprio può essere definito a partire dalla sua forma di stato, e vi compare un solo anello di retroazione. Esso viene riportato nella figura 7.1

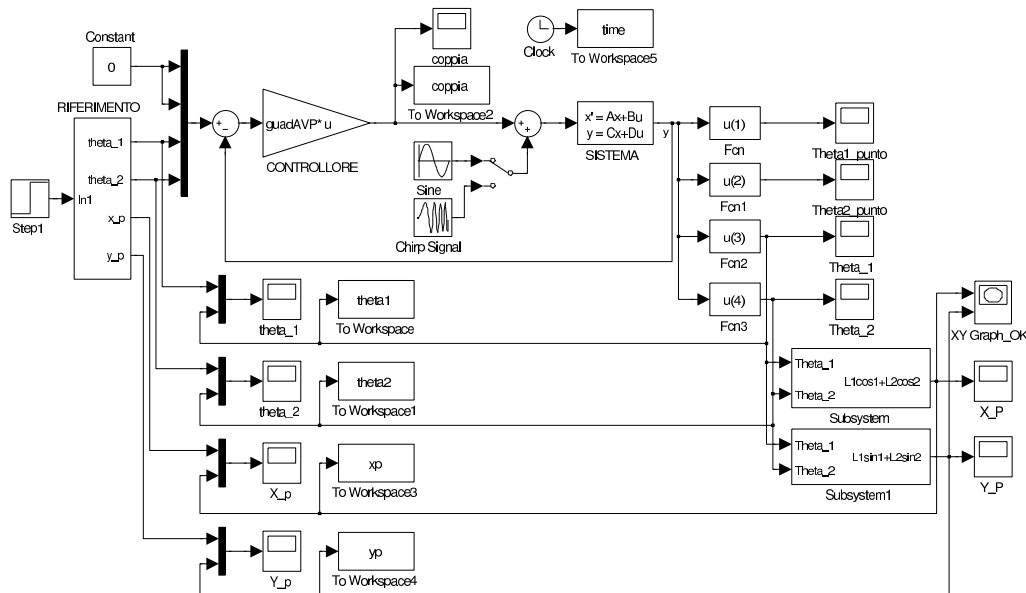


Fig. 7.1: Schema Simulink usato per la simulazione.

Come detto, il meccanismo vero e proprio su cui si vuole agire è rappresentato dal blocco denominato “SISTEMA” quindi nel caso di voglia simulare il comportamento ottenibile grazie al controllo determinato con la minimizzazione del coseno, una volta determinate le modifiche, quelle passive dovranno essere applicate al sistema. Si dovrà cioè calcolare le caratteristiche del nuovo sistema e di questo calcolarne la forma di stato. Visto che il controllo attivo viene fatto sul sistema modificato passivamente, le matrici di stato da inserire nello schema Simulink saranno quindi quelle della nuova configurazione.

Nel caso di simulazione con solo controllo attivo, lo schema Simulink dovrà invece contenere le matrici della forma di stato del sistema originale.

Le modifiche attive rappresentano invece i guadagni del controllore, e pertanto dovranno essere assegnate opportunamente alle variabili del blocco denominato “CONTROLLORE” nello schema, che lo rappresenta.

La generazione del riferimento viene eseguita dal sottosistema denominato “RIFERIMENTO”. Visto che si vuole simulare il comportamento del sistema utilizzato in una situazione reale come ad esempio manipolatore, si dovrà analizzare la sua risposta ad un gradino. Il riferimento sarà quindi assegnato in termini di un angolo fittizio chiamato “theta equivalente” che rappresenta l’angolo tra l’asse delle ordinate del sistema di riferimento scelto e la retta che congiunge l’origine del riferimento stesso con il punto terminale del meccanismo (punto B). Imponendo che tale angolo debba variare secondo un segnale a gradino si va sostanzialmente a comandare il sistema in modo che esso compia una rotazione rigida di una quantità pari all’ampiezza del gradino stesso.

A partire da tale informazione vengono poi stabilite le entità dei due angoli θ_1 e θ_2 necessari a permettere al sistema di eseguire il movimento voluto, e anche il valore delle coordinate del punto in cui si deve posizionare l’estremità del meccanismo.

Infine nello schema sono presenti vari elementi di visualizzazione di risultati e un blocco che permette di risalire al valore delle coordinate del punto in cui si posiziona realmente l'estremità del meccanismo così da poter verificare se il sistema si comporta esattamente come desiderato.

7.3 Tipo di prove eseguite

Quando viene simulato il comportamento di un sistema, è buona norma che le condizioni in cui ci si pone siano attinenti con la realtà. Anche le prove che vengono fatte devono quindi riprodurre un tipico impiego caratteristico del sistema che si sta analizzando.

Come già introdotto nel precedente paragrafo, se si ipotizza che il sistema rappresenti un manipolatore si dovrà simularne il comportamento per capire come esse si comporta in risposta ad un riferimento a gradino.

Un'altra applicazione tipica in cui potrebbe essere impiegato un meccanismo simile a quello considerato potrebbe essere la lavorazione meccanica con l'utilizzo di utensili.

Si supponga che in corrispondenza del punto estremo della seconda asta (quello che si è cercato di non far vibrare attraverso l'imposizione dei particolari forme modali desiderate) sia montato un trapano o una fresatrice caratterizzati da velocità di lavoro variabili. Il funzionamento dell'organo terminale rappresenta un disturbo per l'intera struttura del meccanismo visto che quest'ultima risulterà essere eccitata da una forzante esterna alla frequenza di lavoro dell'utensile stesso.

Nelle inevitabili accelerazioni e decelerazioni che caratterizzano la lavorazione, la forzante di disturbo potrebbe attraversare la risonanza del sistema andandolo quindi ad eccitare in corrispondenza delle sue pulsazioni naturali. In questa condizione le vibrazioni verrebbero amplificate e ciò potrebbe rappresentare una fenomeno dannoso per la buona riuscita della lavorazione. Per questo è utile andare ad osservare il comportamento del sistema anche in presenza di un disturbo alla frequenza di risonanza del sistema o più in generale di un disturbo a frequenza variabile come potrebbe essere quello dovuto alla variazione di velocità di lavorazione.

Con questa verifica è possibile analizzare le proprietà di reiezione al disturbo del sistema controllato, e in particolare in che modo aumentano tali proprietà se si sceglie di agire sul sistema con modifiche passive ed attive piuttosto che esclusivamente con un controllo attivo. In altre parole si è voluto verificare se l'applicazione della Structural Modification al caso in esame abbia determinato dei miglioramenti nei confronti della reiezione al disturbo. La tipologia di disturbo considerata viene simulata con una coppia aggiuntiva al comando dell'attuatore la quale abbia andamento sinusoidale ad una frequenza pari a quella imposta per il secondo modo di vibrare ω_2^D o a frequenza variabile tra due valori che comprendano anche quella appena menzionata. Quest'ultimo caso permette di simulare una cosiddetta "spazzolata in frequenza" della coppia di disturbo così da avere un'idea relativa non ad un unico valore ma ad un range di valori tipici di una normale applicazione.

Infine si è voluto analizzare anche il caso in cui oltre ad un gradino del riferimento, il sistema debba anche rispondere al disturbo di coppia a frequenza costante pari alla sua seconda risonanza.

Tutti questi casi sono stati testati per diverse richieste fatte al sistema. In primo luogo si è ipotizzato come è sempre stato fatto durante tutto questo elaborato che le richieste coincidessero con quelle stabilite nel paragrafo 4.3

In secondo luogo, visto che quelle richieste non sono di fatto ottenibili si è preferito rilassare le richieste e simulare il comportamento del sistema in un caso intermedio.

Per ogni test fatto sono stati analizzati gli andamenti di θ_1 , θ_2 , x_p (prima coordinata del punto terminale), y_p (seconda coordinata del punto terminale) e della coppia erogata dal motore sia nel caso in cui venga implementato un puro controllo attivo determinato con il metodo del Pole Placement, sia nel caso in cui le modifiche attive e quelle passive vengano determinate attraverso la minimizzazione del funzionale coseno. Nei paragrafi successivi verranno riportati i risultati più significativi.

7.4 Prima simulazione

Come già accennato, in questa fase è stato simulato il comportamento del sistema in risposta ad un gradino del riferimanto qualora le richieste sugli autovettori siano le seguenti:

$$\mathbf{v}_1^D = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2^D = \begin{Bmatrix} -l_2/l_1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

e i le pulsazioni desiderate dei due modi di vibrare

$$\omega_1^D = 6rad/s \quad \text{e} \quad \omega_2^D = 50rad/s$$

Lo smorzamento richiesto in questa prima fase è stato $\xi = 0.3$. Prima di passare alla simulazione del comportamento del sistema è utile analizzare i risultati ottenuti in termini di autovettori e autovalori del sistema modificato. Nel caso in cui venga eseguito il solo controllo attivo, ovviamente gli autovalori della matrice della dinamica del sistema risultante ($\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$) risultano perfettamente coincidenti con quelli desiderati. Di conseguenza, visto che anche lo smorzamento risulta essere uguale a quello imposto, pure i poli del sistema risultante saranno posizionati correttamente. Si ottiene infatti:

$$\begin{aligned} s_{1_{mod}} &= -1.8 + i 5.7236 \\ s_{2_{mod}} &= -1.8 - i 5.7236 \\ s_{3_{mod}} &= -15 + i 47.6970 \\ s_{4_{mod}} &= -15 - i 47.6970 \end{aligned}$$

Gli autovettori normalizzati, dopo le modifiche risultano essere:

$$\mathbf{v}_{1_{mod}} = \begin{Bmatrix} 0.9234 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{2_{mod}} = \begin{Bmatrix} -0.2798 \\ 1.0000 \end{Bmatrix}$$

Soprattutto nel secondo caso si nota come esso sia ancora molto diverso dalla situazione desiderata, e ciò è testimoniato anche dal valore assunto dal funzionale coseno $funz_{cos} = 1.7882$.

I guadagni di velocità e posizione calcolati per il controllore sono:

$$\begin{Bmatrix} K_{11}^V \\ K_{12}^V \\ K_{11}^P \\ K_{12}^P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0939 \\ -0.0468 \\ 2.8775 \\ -2.4525 \end{Bmatrix}$$

Se ora si analizzano i risultati ottenuti con l'approccio ibrido si osserva un rilevante miglioramento. Per quel che riguarda gli autovalori, le richieste vengono perfettamente rispettate grazie all'imposizione del vincolo di Ouyang, per cui pulsazioni, smorzamenti e di conseguenza poli del sistema modificato risultano essere uguali al caso precedente.

Un notevole miglioramento lo si ha invece sul fronte degli autovettori del sistema modificato. essi risultano essere:

$$\mathbf{v}_{1_{mod}} = \begin{Bmatrix} 0.7105 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{2_{mod}} = \begin{Bmatrix} -0.7548 \\ 1.0000 \end{Bmatrix}$$

molto più simili a quelli desiderati che non nel caso precedente. Il miglioramento lo si nota anche osservando il valore del funzionale coseno che grazie alle modifiche passive ora risulta essere $funz_{cos} = 1.9617$, molto più prossimo al valore ideale (due) rispetto a prima.

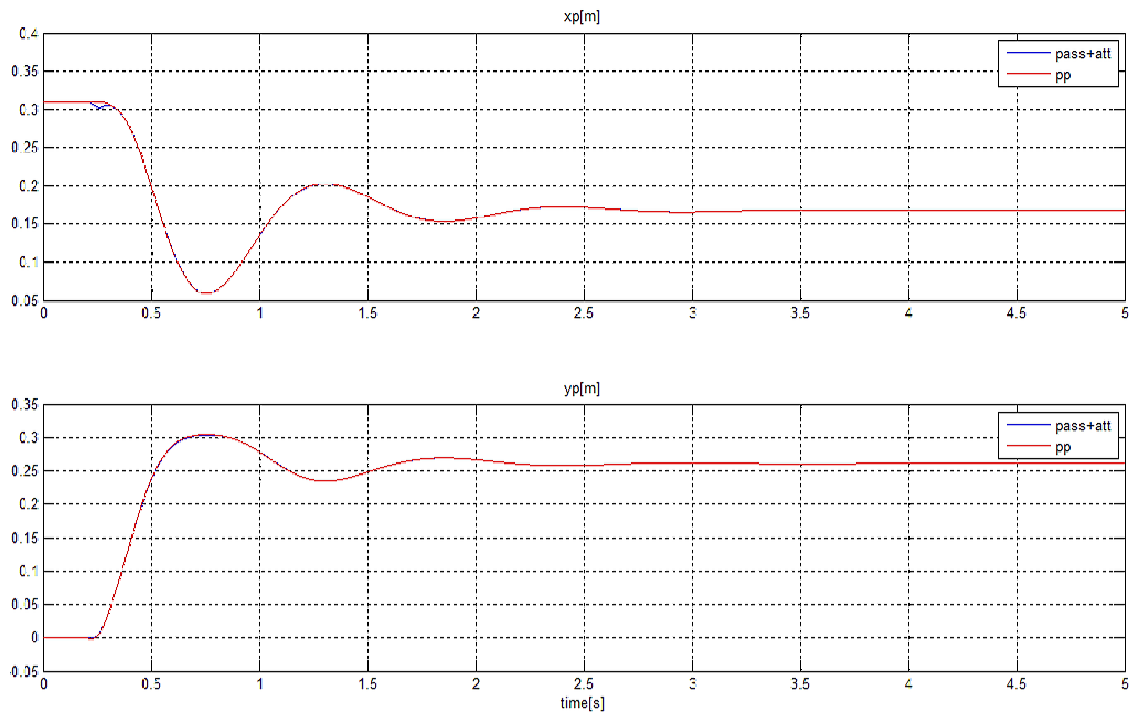


Fig. 7.2: Andamento di x_p e y_p , risposta al gradino.

Il miglior set di modifiche determinato per questo caso risulta essere:

$$\begin{pmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \\ \Delta k \\ K_{11}^P \\ K_{12}^P \\ K_{11}^V \\ K_{12}^V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0500 \\ 0.1000 \\ 6.6434 \\ -4.4181 \\ 0.2145 \\ 0.0330 \end{pmatrix}$$

Tale soluzione stabilisce che per avvicinarsi al risultato voluto sia necessario aggiungere una massa di 50g all'estremità del meccanismo e aumentare di poco la rigidezza del giunto elastico. Daltronde tali azioni sono anche intuitive.

7.4.1 Risposta al gradino

L'andamento delle variabili x_p e y_p in risposta ad un gradino di ingresso è riportato in figura 7.2. Osservando tale figura sembra che l'introduzione delle modifiche passive non abbia portato alcun beneficio infatti le oscillazioni che si hanno in risposta al gradino sono praticamente uguali sia nel caso di solo controllo attivo, sia nel caso di controllo ibrido. In realtà, come si può notare dalle figure 7.3 che rappresenta un particolare di quella precedente, le modifiche passive permettono di limitare leggerissimamente le sovraelongazioni su entrambi gli spostamenti. Tale risultato non può comunque essere considerato soddisfacente, soprattutto se si osserva l'erogazione di coppia del motore riportata in figura 7.4. Si osserva che avendo aumentato la massa dell'intero sistema la coppia necessaria per

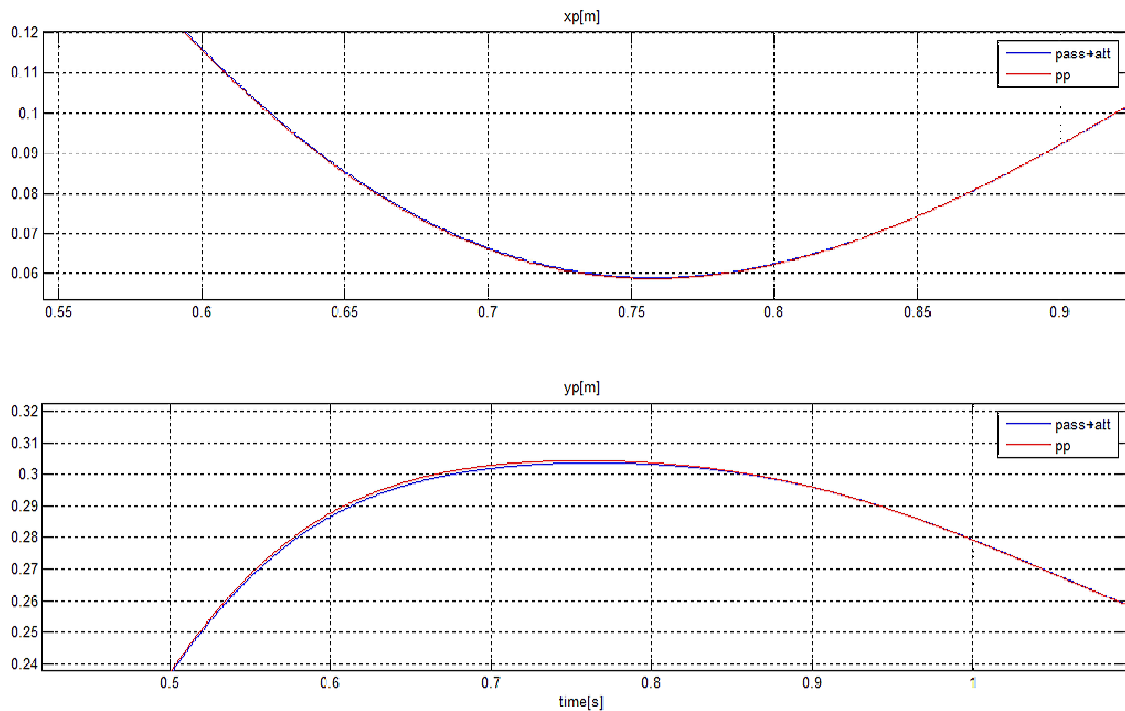


Fig. 7.3: Particolare dell'andamento di x_p e y_p .

movimentarlo risulta ora più elevata. L'andamento dei due angoli θ_1 e θ_2 è riportato in figura 7.5.

Tale test non risulta essere interessante ai fini della validazione del metodo.

7.4.2 Reiezione al disturbo

L'analisi della reiezione del sistema al disturbo risulta essere sicuramente la più interessante. Eccitando il sistema con una coppia di ampiezza $0.2Nm$ e pulsazione pari a $\omega_2^D = 50rad/s$ si ottengono gli andamenti per x_p e y_p riportati in figura 7.6.

Come è evidente da tale figura, le oscillazioni in presenza di un disturbo di coppia sono molto minori nel caso di controllo ibrido rispetto al solo controllo attivo. Soprattutto in direzione trasversale all'asse del meccanismo risultano essere ridotte in maniera considerevole, quasi annullate del tutto. In direzione longitudinale invece la loro ampiezza è diminuita più della metà, ma se si tiene conto che comunque il movimento lungo l'asse delle ascisse è già di per sé quasi nullo per l'ipotesi di piccoli spostamenti, mentre ciò non vale per quello lungo l'asse delle ordinate, si può affermare che il miglioramento più marcato lo si è ottenuto proprio dove più se ne aveva bisogno. Anche in questo caso la coppia necessaria (figura 7.7) risulta essere maggiore rispetto al caso di puro controllo attivo, se non altro però, in questo caso si può accettare il prezzo che si deve pagare in termini di consumo di energia, visto che come effetto si ottiene un comportamento molto conveniente, anche perché comunque tale aumento è contenuto. E' interessante notare anche l'andamento delle variabili libere del sistema, riportato in figura 7.8. Tale andamento rispecchia il concetto di redistribuzione dell'energia di vibrazione dal punto estremo del meccanismo su tutti gli altri punti.

Soprattutto dall'andamento di θ_1 risulta evidente come, per far sì che il punto finale non vibri, i punti intermedi sono soggetti ad una vibrazione maggiore. Visto però che tali

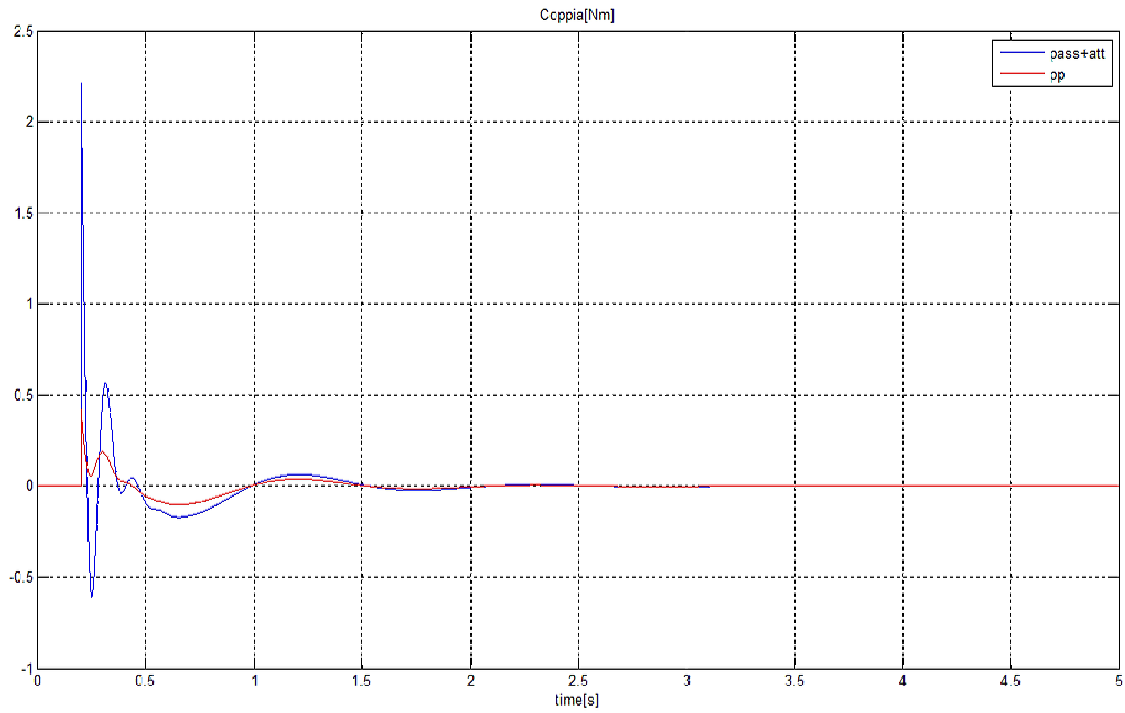
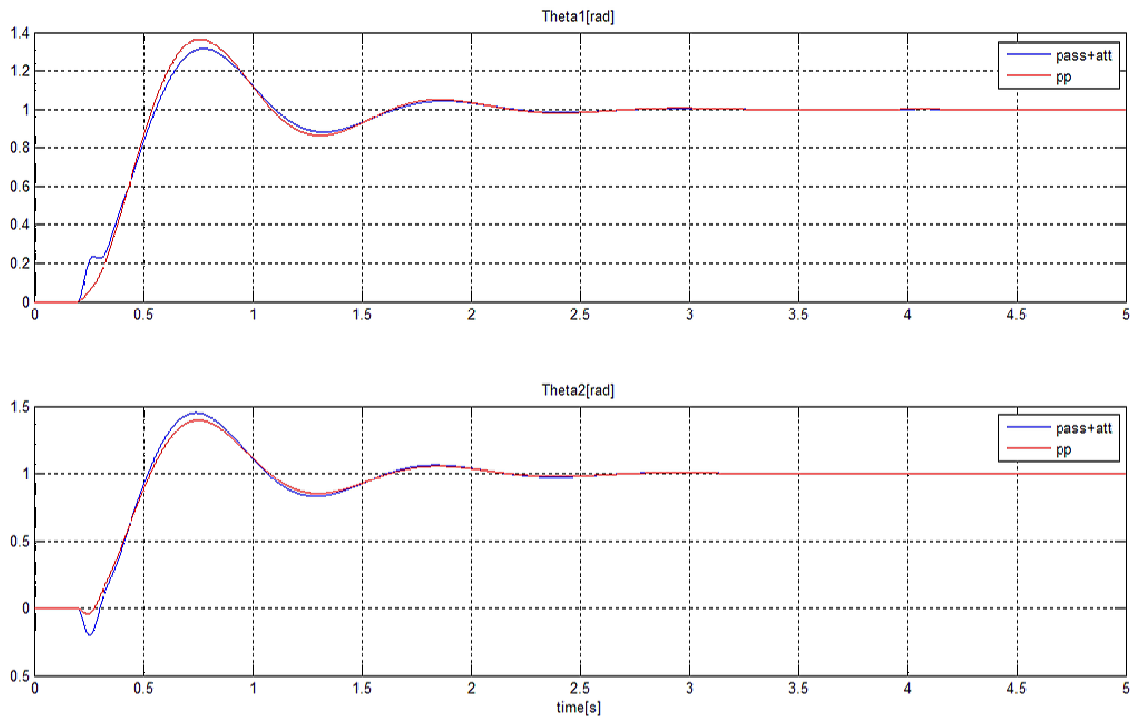


Fig. 7.4: Erogazione di coppia, risposta al gradino.

Fig. 7.5: Andamento di θ_1 e θ_2 , risposta al gradino.

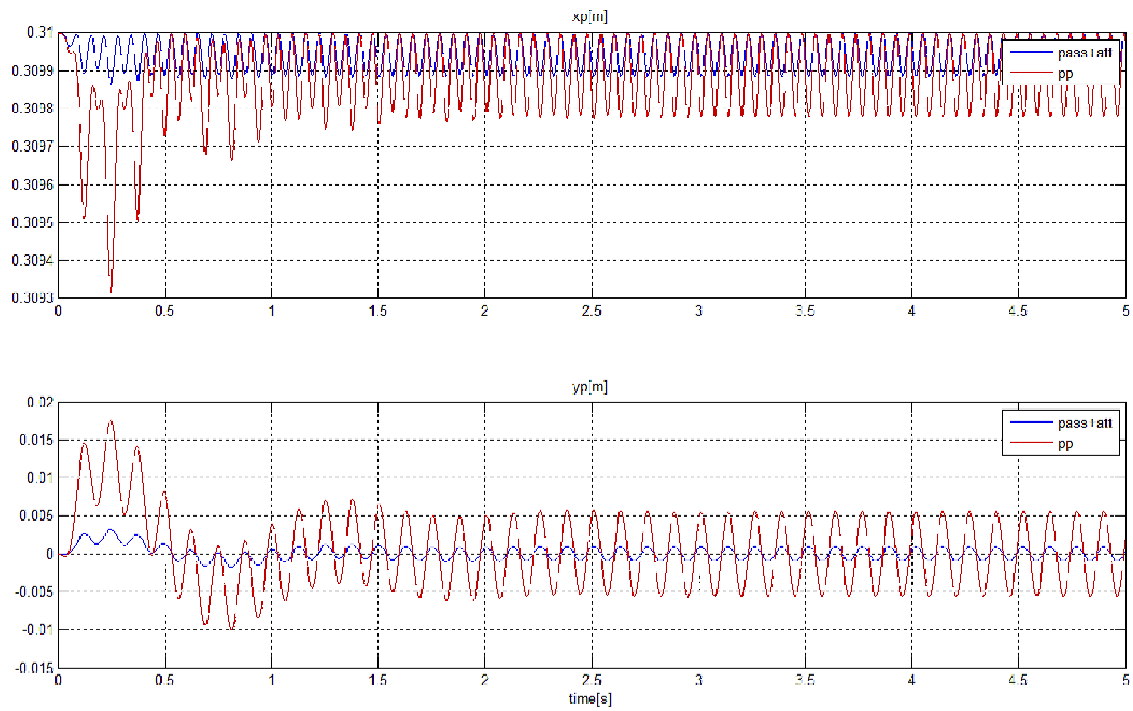
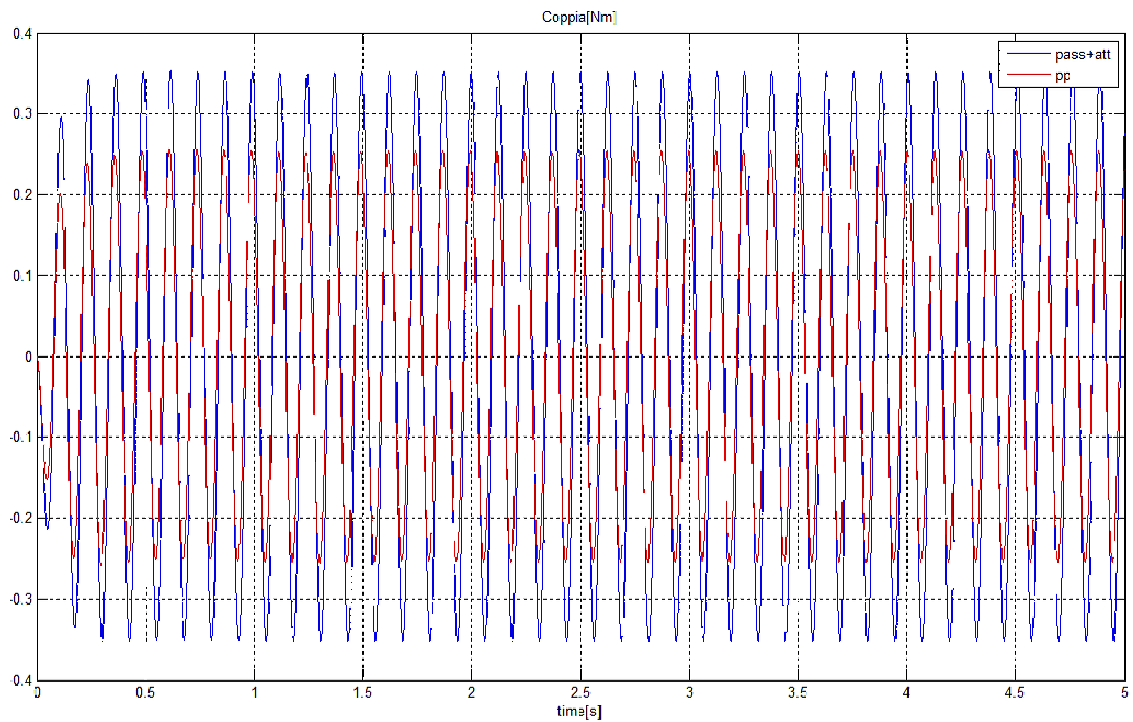
Fig. 7.6: Andamento di x_p e y_p , reiezione al disturbo.

Fig. 7.7: Erogazione di coppia, reiezione al disturbo.

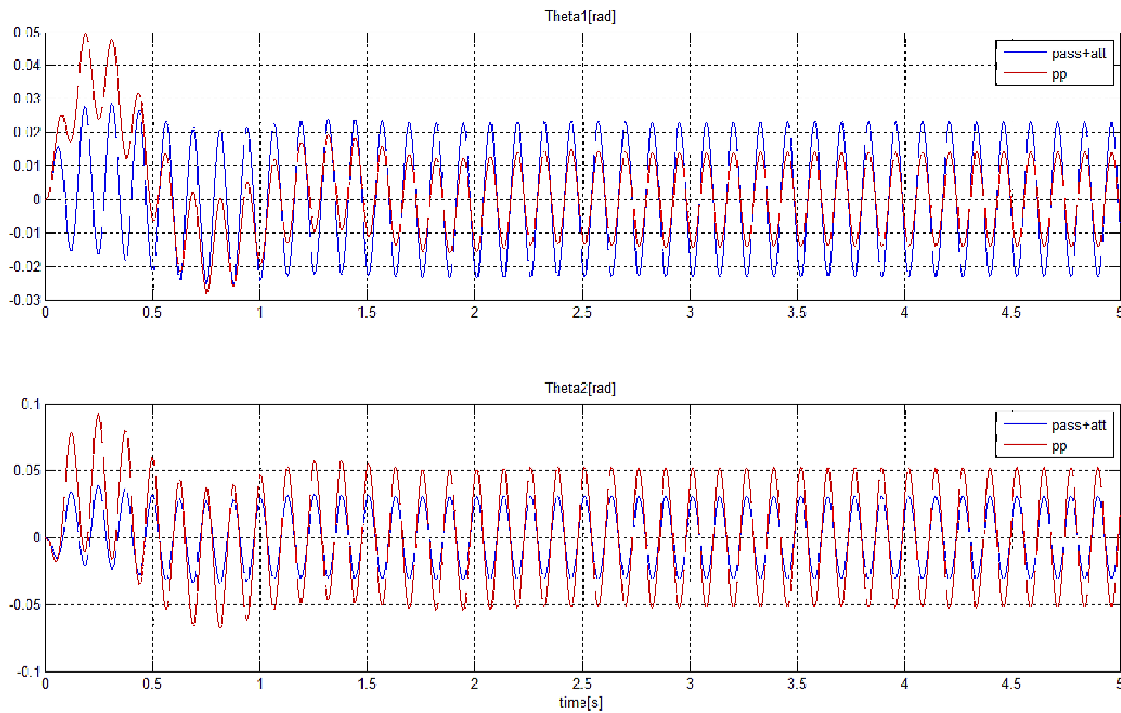


Fig. 7.8: Andamento di θ_1 e θ_2 , reiezione al disturbo.

punti non sono di interesse per l'applicazione in esame, siccome si può tranquillamente trascurare la dinamica interna del meccanismo, tali oscillazioni non comportano alcuna problematica.

Come accennato precedentemente, si è voluto testare anche il caso in cui la frequenza del disturbo sia variabile secondo una cosiddetta spazzolata che includa anche la seconda risonanza del sistema, così da riprodurre il caso applicativo della lavorazione con utensili a velocità variabile. A tal proposito, la frequenza del segnale di disturbo è stata fatta variare tra 2 e $10Hz$.

L'andamento delle coordinate del punto finale in questo caso è riportato in figura 7.9 soprattutto dall'ingrandimento riportato in figura 7.10 risulta chiaro come grazie alle modifiche passive, sia possibile limitare disturbi in un'ampia gamma di frequenze.

7.4.3 Risposta al gradino con disturbo

Nell'ultima simulazione fatta si è voluto osservare la risposta del sistema ad un gradino con disturbo a frequenza costante sovrapposto. Tale condizione può riprodurre il caso in cui si stia facendo una lavorazione e contemporaneamente sia richiesto al sistema di spostarsi. L'andamento delle coordinate del punto B è riportato in figura 7.11

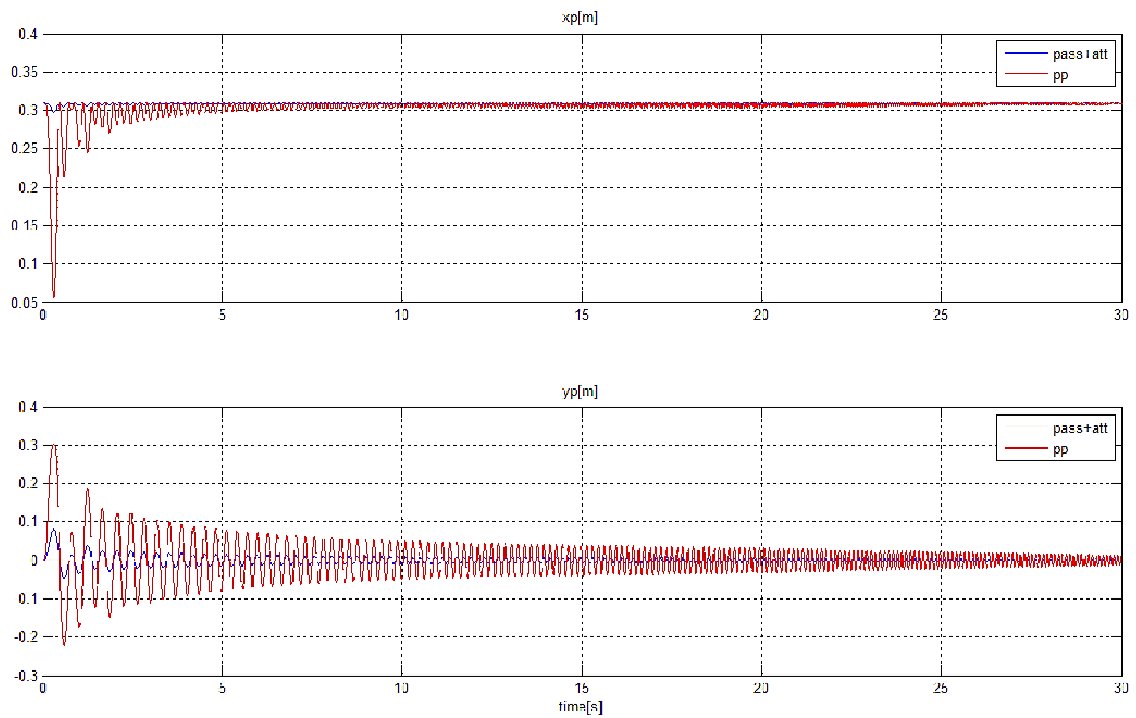
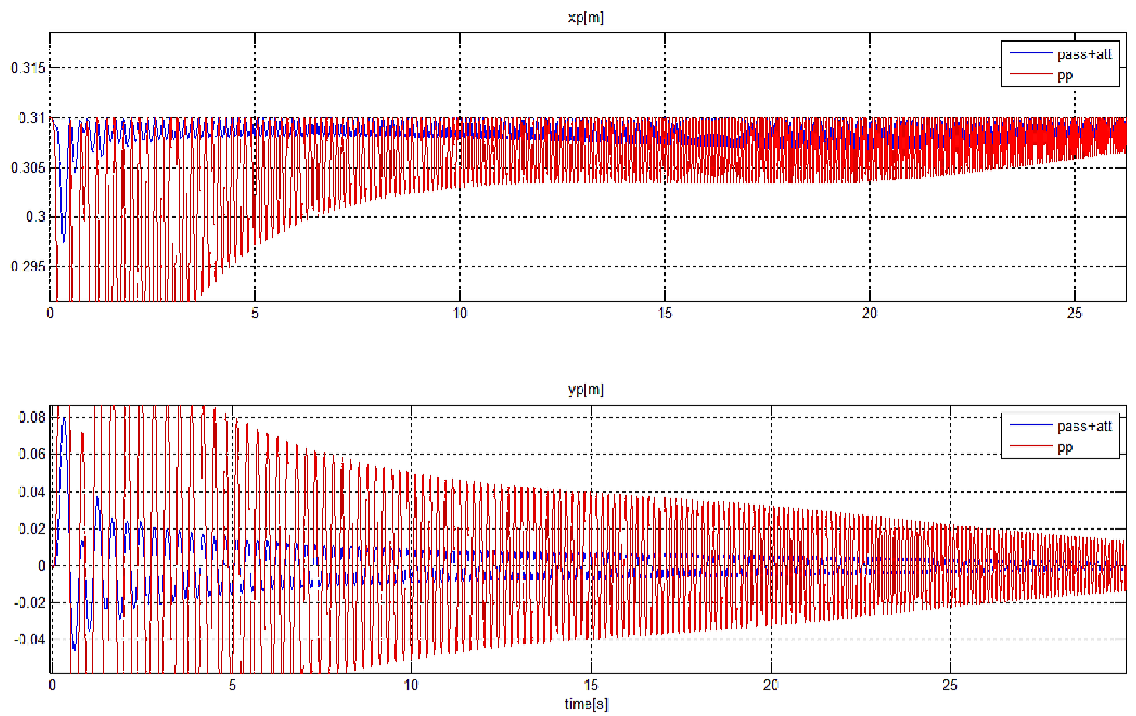
Fig. 7.9: x_p e y_p , reiezione al disturbo con frequenza variabile.

Fig. 7.10: Ingrandimento della reiezione al disturbo con frequenza variabile.

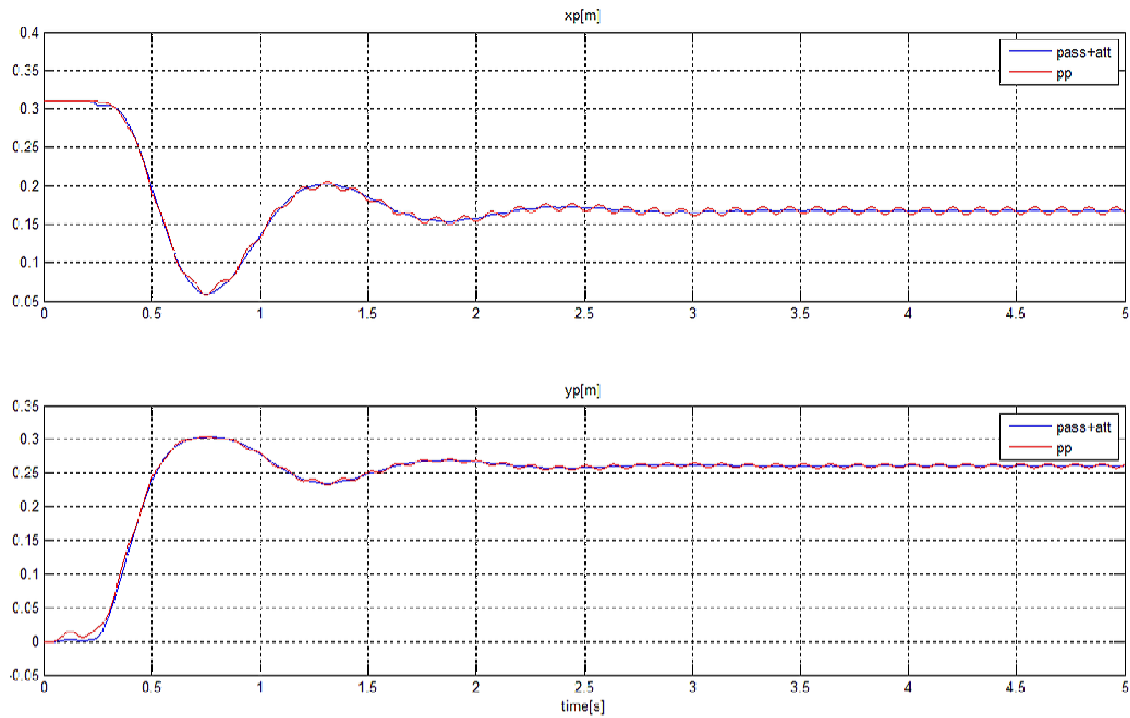


Fig. 7.11: x_p e y_p , risposta al gradino con disturbo.

La frequenza del segnale di disturbo è stata posta uguale alla frequenza imposta al secondo modo di vibrare. La figura rappresenta in qualche modo un riassunto di quanto stabilito ai punti precedenti: le oscillazioni conseguenti all'applicazione di un segnale a gradino del riferimento rimangono inalterate sia che si intervenga attivamente e sia che si intervenga passivamente. L'effetto del disturbo viene invece fortemente inibito se, oltre a controllare il sistema lo si va anche a modificare nelle sue caratteristiche.

7.5 Seconda simulazione

Come già introdotto sono state fatte delle simulazioni nel caso in cui vengano rilassate le specifiche richiedendo un autovettore “intermedio” tra quello ottenibile con il Pole Placement e quello ideale. A tal proposito le richieste sui due autovettori sono state:

$$\mathbf{v}_1^D = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2^D = \begin{Bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Le specifiche sugli autovalori e sulla smorzamento non sono state invece modificate. Visto che la modifica delle richieste sull'autovettore non influisce sui risultati del puro controllo attivo, tutte le caratteristiche del sistema modificato con l'applicazione del solo Pole Placement sono risultate uguali al caso precedente. Nel caso in cui si è applicato il controllo ibrido si è ottenuto invece:

$$\mathbf{v}_{1_{mod}} = \begin{Bmatrix} 0.8403 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{2_{mod}} = \begin{Bmatrix} -0.4476 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ovviamente le specifiche meno stringenti hanno fatto sì che il primo autovettore dovesse essere sacrificato meno rispetto al caso precedente. Ad ogni modo ancora le richieste non risultano essere soddisfatte anche se, a giudicare dal valore del funzionale coseno ($f_{unz_{cos}} = 1.9907$), sembra che ci si sia avvicinati parecchio. Pulsazioni e smorzamenti risultano come sempre assegnati esattamente. Il set di modifiche risultante è:

$$\begin{Bmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \\ \Delta k \\ K_{11}^P \\ K_{12}^P \\ K_{11}^V \\ K_{12}^V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0200 \\ 0 \\ -0.0200 \\ 4.6038 \\ -3.6454 \\ 0.1332 \\ -0.0272 \end{Bmatrix}$$

Curiosamente tale soluzione suggerisce di aumentare la massa della seconda asta e di diminuire la rigidità della molla.

Per questa prova verranno riportati esclusivamente i risultati ottenuti per la reiezione al disturbo di frequenza costante, visto che per gli altri casi sono in linea con quelli ottenuti precedentemente.

In figura 7.12 vengono riportati gli andamenti delle coordinate del punto terminale della seconda asta. Ovviamente, essendo l'autovettore richiesto molto diverso da quello ideale per eliminare l'effetto vibratorio, si ha sì una lieve diminuzione degli spostamenti, che non può però essere considerata accettabile. Per contro, come si può vedere dalla figura 7.13 la coppia necessaria con un controllo ibrido risulta pressoché uguale a quella necessaria con un puro controllo attivo.

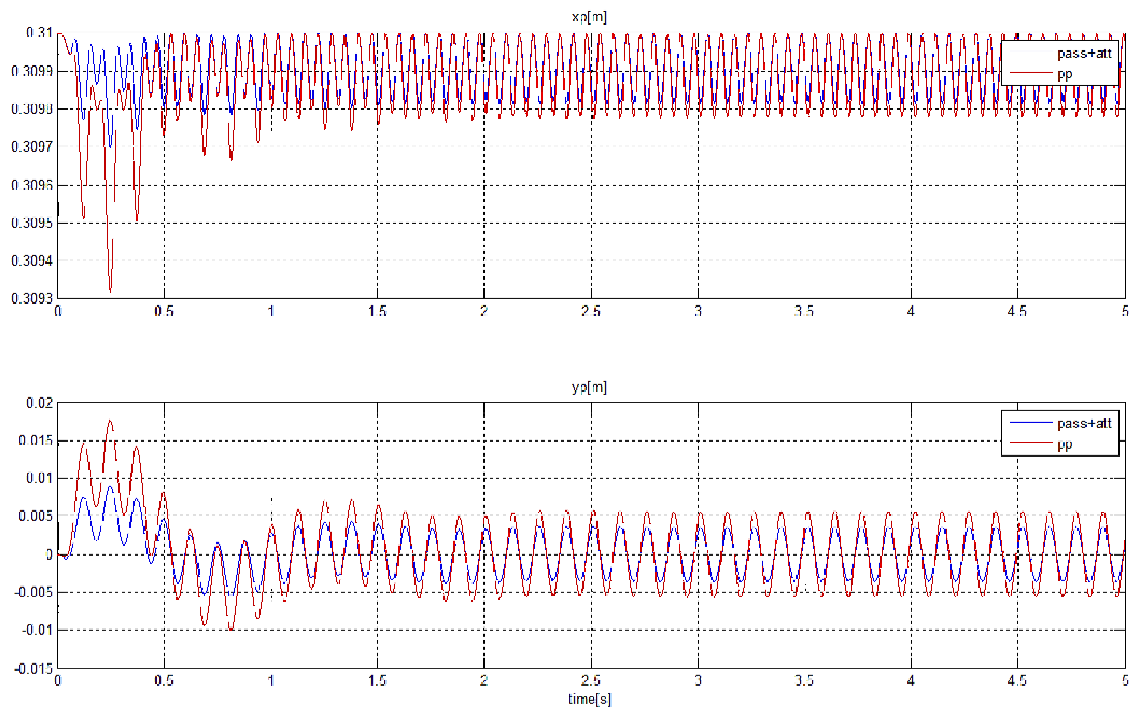


Fig. 7.12: x_p e y_p secondo test, reiezione al disturbo.

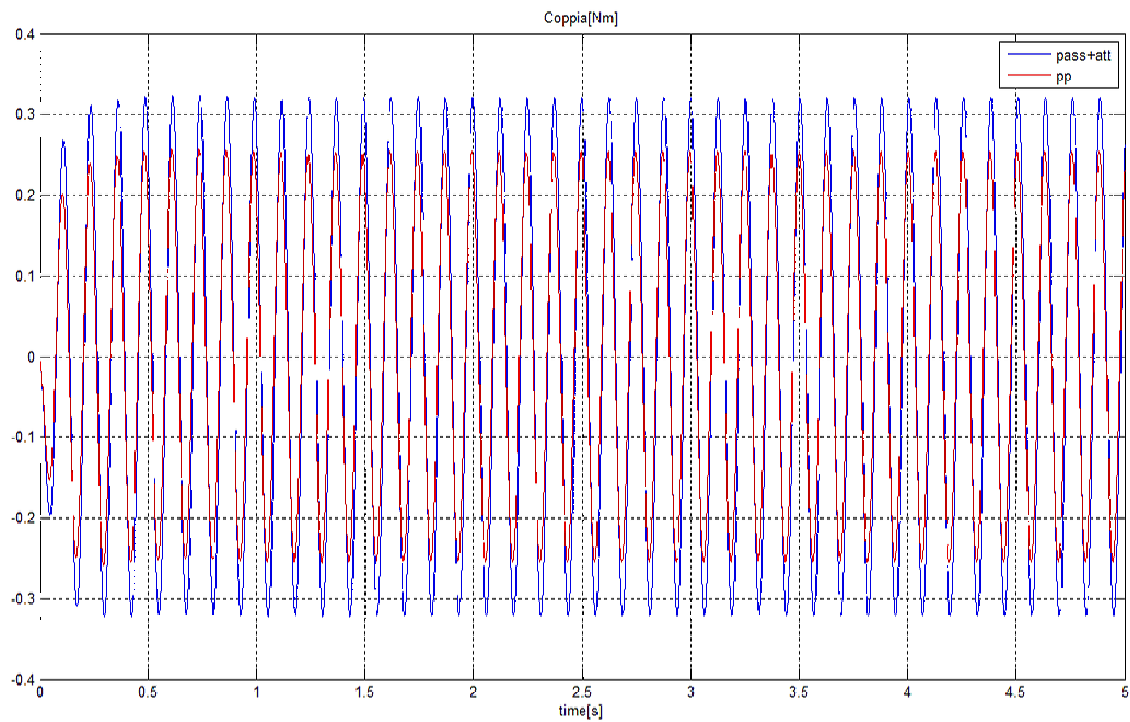


Fig. 7.13: Erogazione di coppia secondo test, reiezione al disturbo.

7.6 Prova sperimentale

Dopo aver simulato il comportamento del sistema è stato possibile collaudarne le prestazioni su di un prototipo presente in laboratorio. Il sistema, costituito da un motore a corrente continua su cui sono state calettate le due aste accoppiate secondo lo schema considerato in figura 4.1 a pagina 64, viene alimentato da un opportuna circuito che gestisce anche l'acquisizione del segnale dei due encoder utilizzati per misurare gli spostamenti angolari delle due aste. Il primo di questi è solidale al motore, il secondo risulta essere posizionato in corrispondenza dell'accoppiamento rotoidale del meccanismo.

Il tutto è interfacciato con un calcolatore e gestito tramite Real Time Windows Target, un'applicazione che permette di eseguire modelli Simulink in real time. Grazie a questo apparato si è potuto simulare il controllore via software tramite Simulink, andando ad agire direttamente sul sistema reale. L'interfacciamento ha consentito di chiedere l'anello di retroazione: a partire dalle informazioni fornite dagli encoder, è stata stimata la velocità di rotazione delle due aste, così da poter implementare correttamente la retroazione dallo stato richiesta.

In figura 7.14 è riportata un'immagine del meccanismo che è stato utilizzato in laboratorio. Nella figura 7.15 si può apprezzare un ingrandimento che ritrae l'encoder usato per la misura degli spostamenti angolari della seconda asta. La figura 7.16 mostra invece il sistema di ancoraggio delle molle, ed infine nella figura 7.17 si può notare l'accoppiamento cinematico.

Dopo aver determinato i guadagni del controllore e le modifiche passive da eseguire sul sistema, si è proceduto trasferendo la prima informazione numerica nel modello Simulink e modificando direttamente il sistema reale.

Visto che quest'ultima operazione, anche se non sembrerebbe, potrebbe essere molto impegnativa si è deciso di mettersi nella condizione più favorevole possibile. Per questo si è ipotizzato che le uniche modifiche passive ammissibili fossero quelle sulla massa della prima asta e sulla massa puntiforme all'estremo della seconda. Si è stabilito inoltre di consentire solo aggiunte di massa e non diminuzioni. La massa della seconda asta e la rigidità della molla, per comodità non si è consentito di modificarle.

Anche in questo caso le richieste fatte in termini di autovettori, autovalori e smorzamento sono state:

$$\mathbf{v}_1^D = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2^D = \begin{Bmatrix} -l_2/l_1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_1^D = 6rad/s \quad \text{e} \quad \omega_2^D = 50rad/s$$

e $\xi = 0.3$. La determinazione delle modifiche passive ha stabilito che l'unico intervento da fare sul sistema consistesse nell'aggiunta di una massa di 50g all'estremità della seconda asta.

Visto che non è stato considerato di interesse testare il comportamento in risposta ad un gradino di ingresso, il primo test eseguito riguarda la reiezione al disturbo: eccitando il sistema con una coppia sinusoidale di comando alla pulsazione di 50rad/s lo spostamento misurato all'estremità dell'asta è risultato quello rappresentato in figura 7.18. Come si può osservare, anche nell'applicazione reale le vibrazioni del punto finale risultano essere ridotte considerevolmente (circa 1/3). In realtà da un confronto con i risultati della simulazione (figura 7.6 di pagina 129) sembra che in questo caso il controllo sia meno efficace. Questa discrepanza può essere dovuta a quattro motivi in particolare:

1. inevitabili imperfezioni sull'accoppiamento della massa che hanno comportato sicuramente l'insorgere di fenomeni indesiderati che hanno determinato un leggero sbilanciamento del sistema;
2. la massa aggiuntiva non era realmente concentrata;

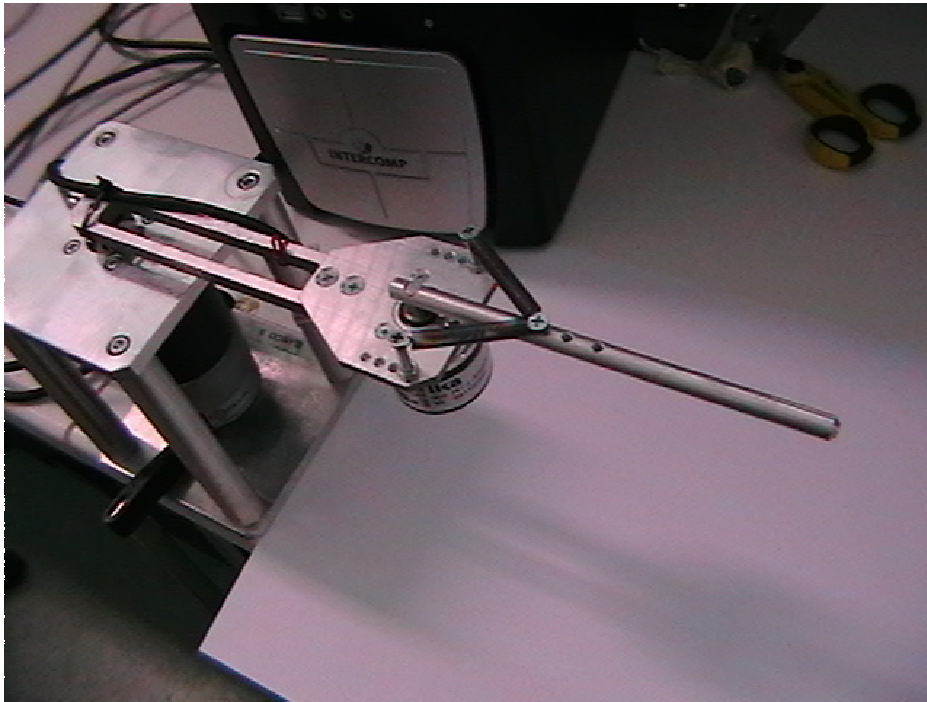


Fig. 7.14: Set-up utilizzato.

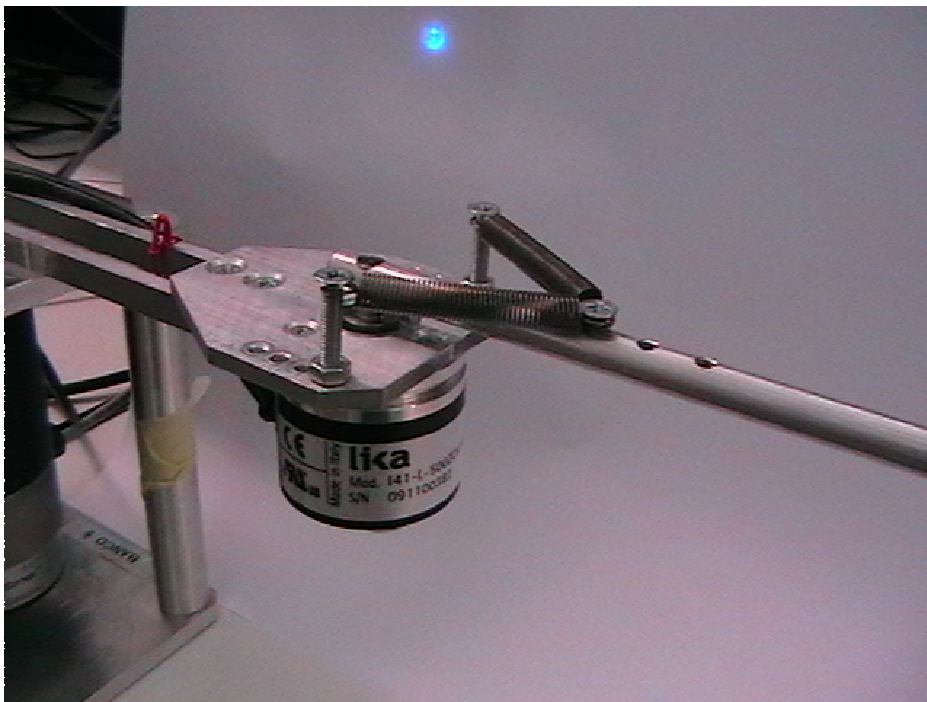


Fig. 7.15: Primo particolare del giunto elastico.



Fig. 7.16: Secondo particolare del giunto elastico.

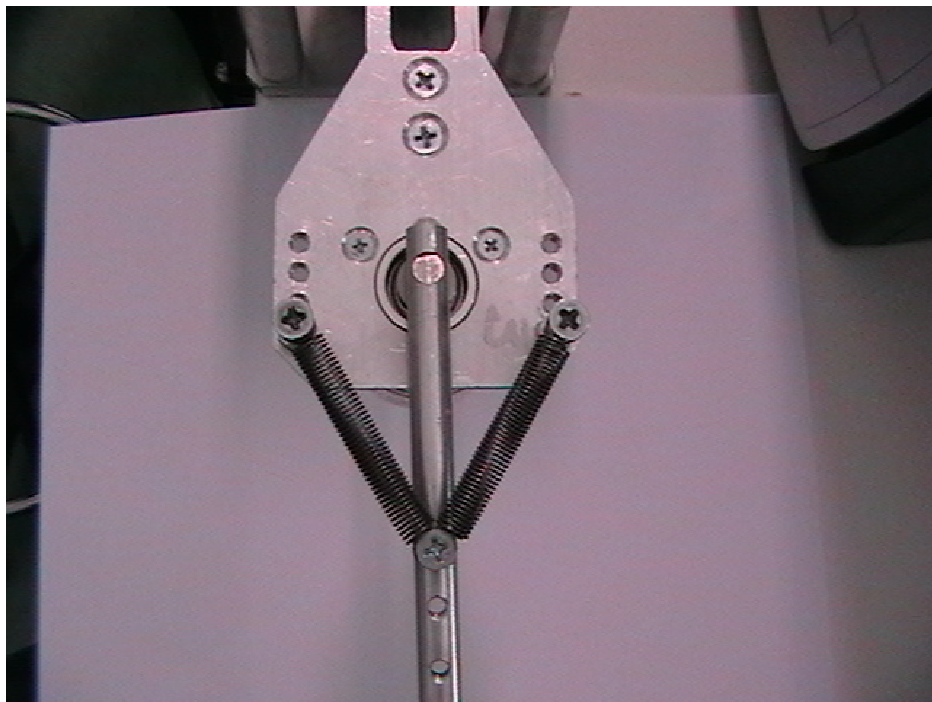


Fig. 7.17: Terzo particolare del giunto elastico.

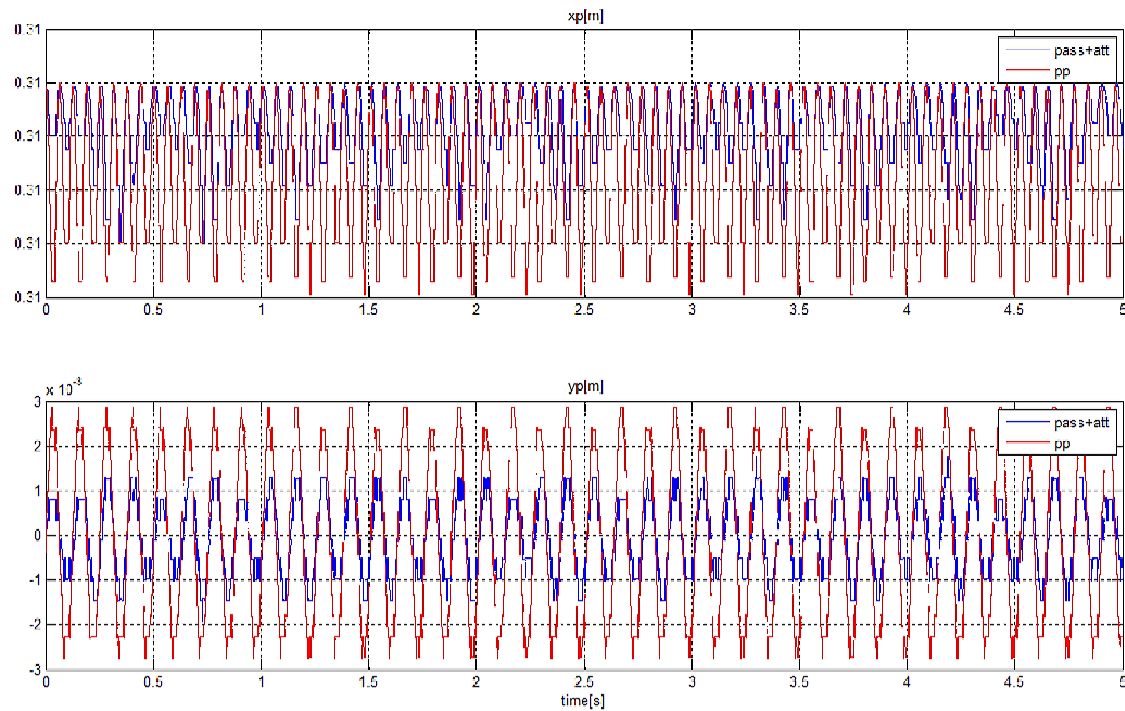


Fig. 7.18: x_p e y_p prova sperimentale.

3. per la necessità di rimanere nell'ambito di piccoli spostamenti si è dovuto lavorare con segnali deboli, confrontabili con la risoluzione dell'encoder ha fatto sì che la retroazione non fosse efficace al massimo e la stima della velocità non precisissima;
4. il sistema reale è pur sempre non lineare, anche per la presenza di dinamiche incerte.

Osservando la figura 7.19 si può vedere come, in linea con il risultato della simulazione, anche nella prova sperimentale la coppia necessaria sia ovviamente maggiore. Il risultato ottenuto è comunque estremamente positivo e valida pienamente il metodo proposto e i risultati ottenuti.

Per finire si è voluto testare anche il comportamento con un disturbo di coppia a frequenza variabile tra un massimo di $10Hz$ ed un minimo di $3Hz$. L'andamento delle coordinate del punto B in questo caso è riportato in figura 7.20. Anche se dalla figura non è molto evidente, soprattutto osservando l'andamento di $x - p$ risulta chiaro che anche nel caso sperimentale, la modifica delle caratteristiche strutturali ha permesso di limitare le oscillazioni conseguenti all'applicazione di un disturbo per un discreto range di frequenza in cui si potrebbe trovare a lavorare un ipotetico utensile montato all'estremità del meccanismo. Per chiarezza, vengono di seguito riportate tre porzioni della figura 7.20: nella figura 7.21 si considera la porzione tra $0s$ e $15s$, nella figura 7.22 si considera la seconda porzione che va da $15s$ a $30s$, ed infine nella figura 7.23 viene riportata l'ultima porzione. Dall'osservazione di queste tre figure ora risulta chiaro molto più di prima, che le modifiche strutturali consentono di limitare abbondantemente le vibrazioni del punto terminale del meccanismo, in risposta ad un disturbo di frequenza variabili attorno alla seconda pulsazione di risonanza del sistema. Inoltre dall'ultima figura si può notare come mentre con il solo controllo attivo l'ampiezza delle oscillazioni dipende dalla frequenza a cui viene eccitato il sistema, con un controllo ibrido non vi è una variazione dell'ampiezza delle pulsazioni residue. Questo permette di affermare che con la tecnica implementata

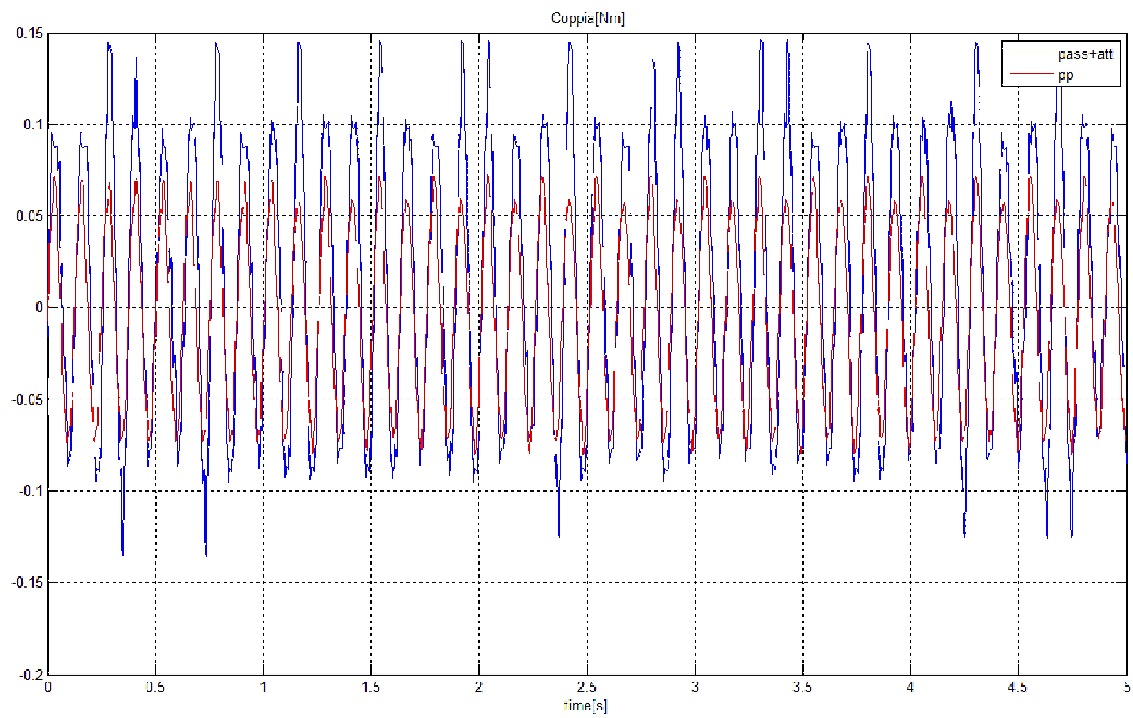
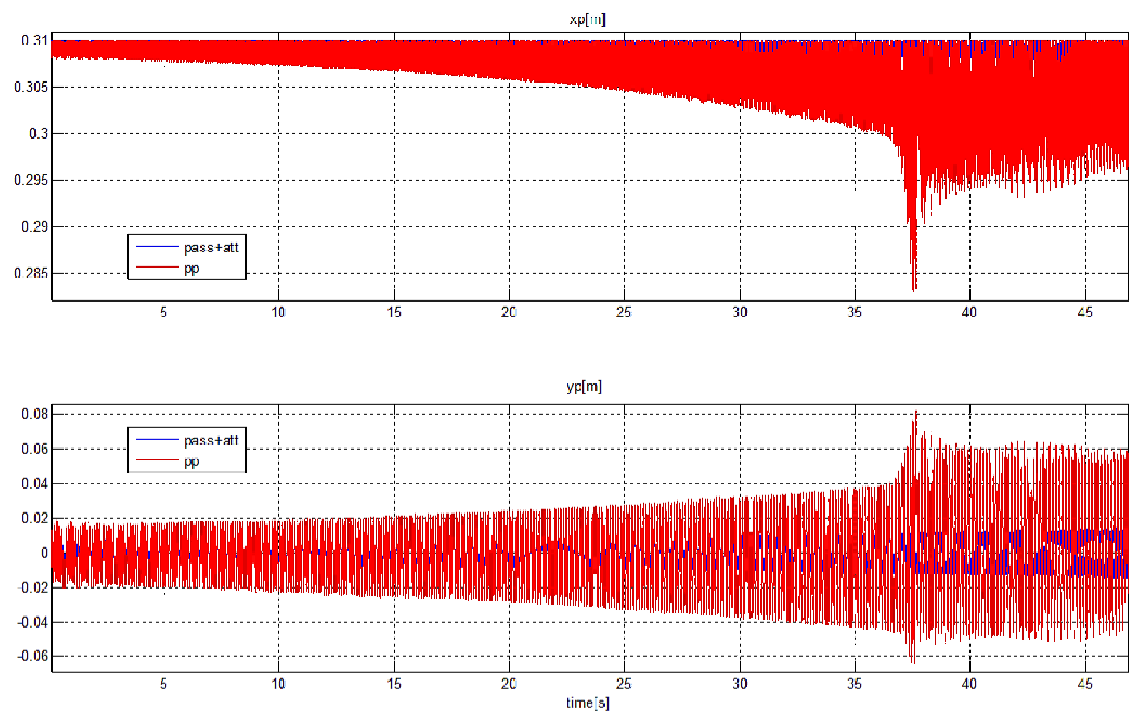


Fig. 7.19: Erogazione di coppia, prova sperimentale.

Fig. 7.20: x_p e y_p prova sperimentale, disturbo con frequenza variabile.

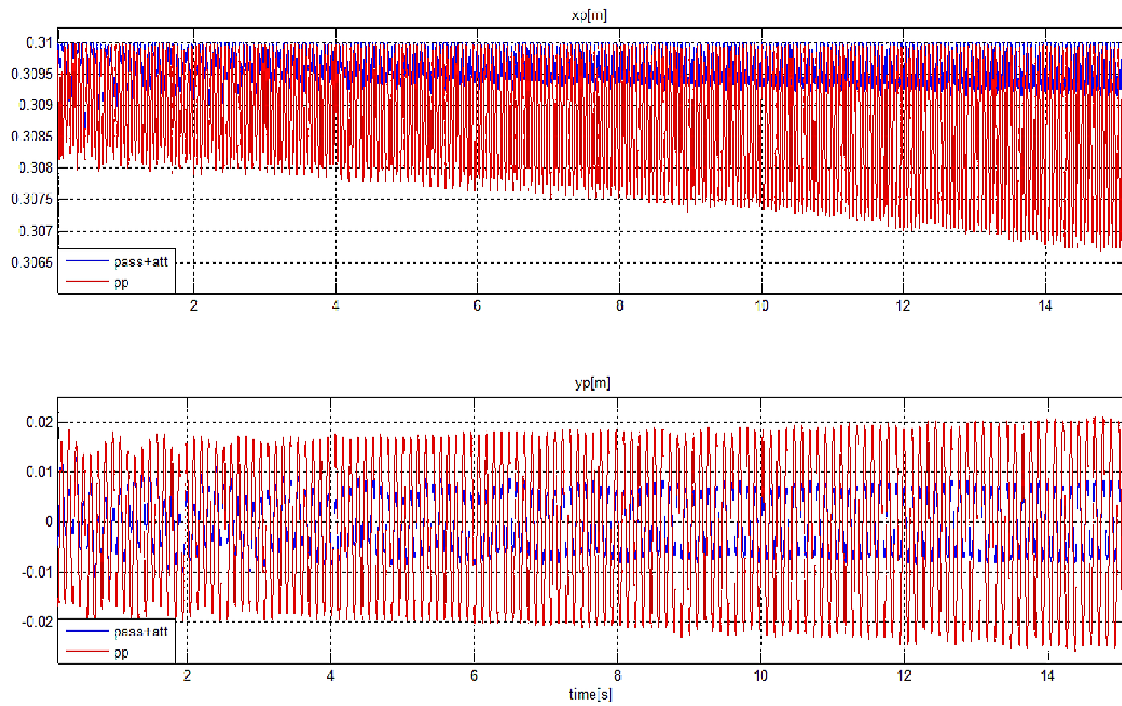


Fig. 7.21: x_p e y_p prima porzione, disturbo con frequenza variabile.

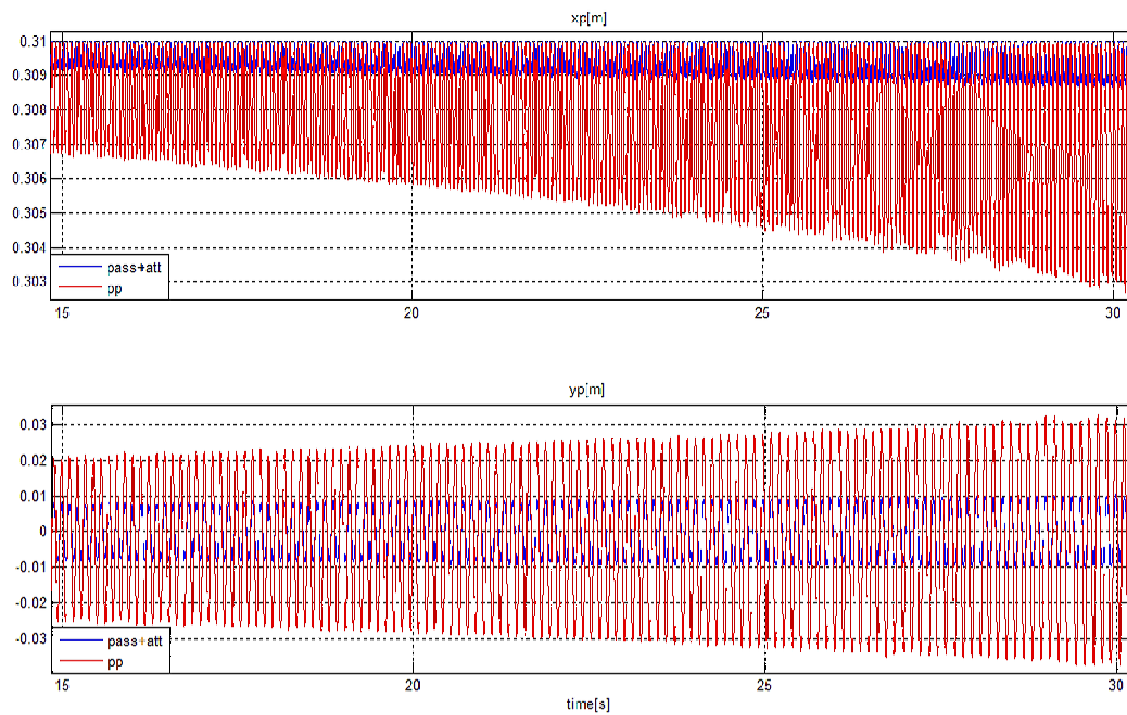


Fig. 7.22: x_p e y_p seconda porzione, disturbo con frequenza variabile.

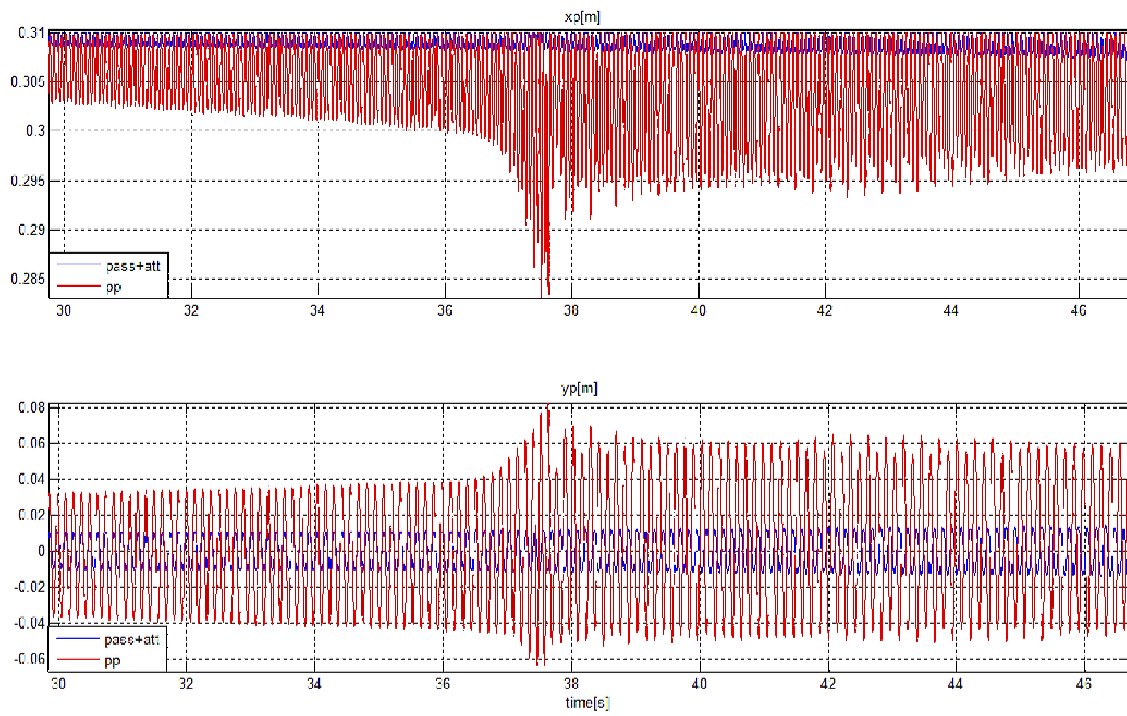


Fig. 7.23: x_p e y_p terza porzione, disturbo con frequenza variabile.

è possibile attenuare le vibrazioni ad una ampiezza sempre uguale al variare della loro frequenza.

Conclusioni

Con il presente lavoro, a differenza degli approcci comunemente utilizzati in letteratura per il controllo di sistemi meccanici, è stato proposto l'utilizzo delle tecniche della "modifica strutturale dinamica" (Dynamic Structural Modification, DSM) per il controllo del moto e delle vibrazioni indesiderate. Tali tecniche sono usualmente applicate singolarmente nell'ottimizzazione e nel design di strutture e componenti meccanici al fine di garantirne il desiderato comportamento dinamico mediante assegnazione delle frequenze e delle forme spaziali della vibrazione, ossia di assegnarne i modi in termini di autovalore e autovettore. Tale approccio rappresenta per le strutture (ossia per sistemi meccanici privi di gradi di libertà di moto rigido) certamente una soluzione più completa rispetto alla semplice assegnazione dei poli, tipicamente proposta nell'ambito del controllo attivo. Perseguire strategie di assegnazione sia dei poli che della forma modale mediante solo controllo attivo è, per contro, difficilmente realizzabile per effetto delle molte restrizioni sui possibili autovettori assegnabili, i quali sono anche legati al numero di forze di controllo. Come conseguenza, per sistemi aventi una singola forza di controllo il set di guadagni del controllore in grado di assegnare i poli è unico, e pertanto non vi è nessuna possibilità di imporre l'autovettore. L'unica possibilità risiede quindi nel simultaneo uso di modifiche passive e controllo attivo (modifiche attive), al fine di estendere le limitate possibilità del solo controllo attivo. In tale ottica nella presente tesi sono state proposte e validate due diverse tecniche di simultanea sintesi delle modifiche passive e attive, basate sull'estensione della teoria della DSM. In particolare, una prima tecnica è stata applicata ad una struttura a tre gradi di libertà, realizzata tramite tre masse vincolate da molle. Essendo questo l'ambito naturale in cui si sono sviluppate le teorie della DSM, si è potuto estendere in modo efficace e abbastanza immediato un metodo di DSM per il controllo ibrido, attivo più passivo. Secondariamente è stato valutato un caso più complicato ed inusuale per l'ambito della DSM: un braccio robotico sotto-attuato a due gradi di libertà, con giunto passivo elastico. Tale sistema è un meccanismo, avente in catena aperta una coppia di poli nell'origine associata al grado di libertà di moto rigido. L'applicazione diretta delle tecniche di DSM al controllo ibrido di tale sistema può portare a fenomeni di spillover, ossia spostamento incontrollato dei poli. D'altra parte le tecniche di DSM sono state sviluppate per modifiche passive le quali, preservando la simmetria della matrici (per la realizzabilità fisica), preservano la stabilità del sistema. Dato tale presupposto, le tecniche di DSM inoltre cercano di approssimare il conseguimento degli obiettivi espressi in termini di autovalore ed autovettore mediante minimizzazione di un certo funzionale, senza imporre in genere vincoli stringenti sulla frequenza (ciò considerando che con le sole modifiche passive non è garantito di poter ottenere esattamente la frequenza desiderata, per effetto dei vincoli sulle modifiche realizzabili tecnicamente). Ciò quindi non garantisce per qualunque scelta di autovalore-autovettore, che il problema converga verso una soluzione stabile, dato che i termini asimmetrici dovuti al controllo attivo nelle matrici di massa e rigidezza non garantiscono stabilità incondizionata. Al fine di superare tale limite, al funzionale di ottimizzazione del problema agli autovettori (per il quale sono state valutate diverse formulazioni) è stato affiancato un vincolo sul posizionamento dei poli. Tale vincolo è stato espresso adottando una tecnica recentemente proposta dal Prof. Ouyang per l'assegnazione dei poli mediante retroazione dello stato: tale formulazione, basato interamente su rappresentazioni tipiche della meccanica delle vibrazioni, consente di esprimere il problema di assegnazione dei poli in termini di un sistema lineare avente come incognite i guadagni del controllo attivo; esso si è perciò prestato molto facilmente all'impiego come vincolo di uguaglianza, nella minimizzazione del funzionale della DSM. Il metodo di controllo ibrido proposto pertanto consente di determinare il set di modifiche

fisiche e di guadagni del controllore in grado di approssimare al meglio le richieste sugli autovettori, garantendo i poli desiderati. Il metodo proposto ed i risultati ottenuti sono stati validati sperimentalmente con riferimento ad un prototipo del suddetto braccio robotico. I risultati ottenuti evidenziano come piccole modifiche del sistema opportunamente sintetizzate consentono un netto miglioramento delle prestazioni in termini di conseguimento della desiderata forma modale: ciò in particolare si traduce nel posizionamento di nodi della vibrazione in presenza di disturbi a determinate frequenze. L'impatto pratico di una tale strategia di controllo potrà essere significativo in applicazioni reali, e fornisce uno strumento utile già in fase di progettazione del sistema: un design del sistema finalizzato al controllo non può che migliorare le prestazioni ottenibili. Sviluppo naturale di questa attività è l'investigazione di altre strategie di soluzione del problema matematico formulato, al fine di ridurre alcune problematiche di tipo numerico che sono state incontrate al fine di ottenere una soluzione ancora più accurata ed efficace. Si vuole infine citare la possibilità di investigare vincoli meno stringenti sulla frequenza, ad esempio definendo delle aree ove il polo può collocarsi: in questo modo si potrà ottenere un ulteriore miglioramento in termini di trade off tra specifiche sulle frequenze, sullo smorzamento e sulle forme modali.

Ringraziamenti

A conclusione di questo lavoro di tesi, desidero ringraziare alcune persone così importanti per la buona riuscita di questo elaborato ed in generale per l'esperienza accademica che sto per concludere. Spero di non dimenticare nessuno; ad ogni modo, chiunque abbia avuto un ruolo anche minimo, sarà sempre presente nei miei pensieri.

In particolare il mio sentito ringraziamento va:

al Prof. Alberto Trevisani, per la disponibilità e la fiducia dimostrata, nell'accettare di farmi da relatore in questa tesi;

al Prof. Dario Richiedei per la costanza con cui mi ha seguito e per la perseveranza e la determinazione con cui mi ha aiutato a ricercare il risultato voluto;

a tutti i professori del corso di laurea e al professor Alarico Macor per la professionalità dimostrata nel mettere a disposizione le loro conoscenze;

a mamma Graziella e papà Sergio per avermi dato questa importante e magnifica possibilità che ha richiesto non pochi sacrifici economici da parte loro; per aver sempre avuto fiducia in me anche se, onestamente, a volte non l'avrei meritato del tutto; per avermi sempre incoraggiato a proseguire sicuri che sarei riuscito ad ottenere buoni risultati; in generale per avermi sempre sostenuto in tutti i sensi ed in ogni modo durante questi lunghi anni di studio. Vorrei che si sentissero protagonisti di questo importante traguardo per la mia vita, il cui raggiungimento è sicuramente anche merito loro. Spero di essere riuscito a ricambiare un pò di tutto il bene che mi hanno sempre voluto, con la soddisfazione per avermi accompagnato fin qui. In particolare con loro vorrei scusarmi per quelle volte in cui non mi sono impegnato al massimo, rischiando di perdere tempo prezioso;

a Silvia che con insolita e straordinaria pazienza ha accettato di condividere con me tutti i sacrifici necessari, dando sempre la priorità alle mie esigenze, piuttosto che ai suoi desideri. Vorrei ringraziarla per la serenità con cui mi è sempre stata accanto, per aver sempre appoggiato le mie scelte, e per avermi sempre capito, sostenuto e confortato nei momenti di difficoltà.

a tutti i miei familiari, per avermi sempre incoraggiato e in particolare a Isacco per aver portato in questi ultimi tempi, così tanta allegria nelle pause dei pomeriggi di studio;

a tutti gli amici più cari, per la stima che hanno sempre dimostrato nei miei confronti e per aver reso unici ed indimenticabili, i momenti di svago passati in compagnia;

ai compagni di corso per il supporto reciproco, i consigli e la disponibilità sempre dimostrata.

Vorrei inoltre condividere la gioia di questi momenti, anche con tutti coloro che in questi anni hanno avuto a che fare, in qualche modo, con il gruppo di carnevale "I butei del Palù". Ho sempre pensato che, quando nel 2004 questa avventura cominciò a coinvolgerci, fu l'esperienza giusta, capitata al momento giusto, che insieme ad altri fattori mi diede l'impulso determinante, per decidere di intraprendere il cammino dell'Università.

Infine vorrei concludere raccomandando a me stesso di considerare sempre ogni traguardo raggiunto non come un punto di arrivo ma di partenza, e soprattutto di far tesoro dell'esperienza di questa tesi per ricordare di agire in ogni ambito della vita, con dei margini di sicurezza, in modo da evitare gli imprevisti e avere la tranquillità che quanto fatto sia sempre ottimale.

Considero questo il più importante insegnamento umano e professionale che l'Università mi abbia lasciato.

Un grazie di cuore a tutti!

Michele Todeschini

Bibliografia

- [1] J. W. S. Rayleigh, *Theory of Sound, 2nd edn.*, New York, Dover, 1945.
- [2] K. Farahani, H. Bahai. An inverse strategy for relocation of eigenfrequencies in structural design. Part I: first order approximate solution. *Journal of Sound and Vibration*, **274**, 481-505, 2004.
- [3] J.F. Baldwin, S.G. Hutton. Natural modes of modified structures. *AIAA Journal*, **23**, 1737-1734, 1985.
- [4] J. He. Structural Modification. *Philosophical Transaction: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **359(1778)**, Experimental Modal Analysis, 187-204, 2001.
- [5] G. M. L Gladwell. *Inverse Problems in Vibration*. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [6] Y.M. Ram, S.G. Braun, An inverse problem associated with modification of incomplete dynamic system. *ASME J. Appl. Mech.*, **58**, 233-237, 1991.
- [7] I. Bucher, S. Braun. The structural modification inverse problem: an exact solution. *Mech. System Signal Proc.*, **7(3)**, 217-238, 1992.
- [8] D. D. Sivan, Y. M. Ram. Mass and stiffness modification to achieve desired natural frequencies. *Communications in numerical methods in engineering*, **12**, 531-542, 1996.
- [9] T. Li, J. He. Local Structural Modification using mass and stiffness changes. *Engineering Structures*, **21**, 1028-1037, 1999.
- [10] A. Kyprianou, J. E. Mottershead. H Ouyang. Assignment of natural frequencies by an added mass and one or more springs. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **18**, 263-289, 2004.
- [11] Y.-H. Park, Y.-s Park. Structural modification based on measured frequency response functions: an exact eigenproperties reallocation. *Journal of Sound and Vibration*, **237(3)**, 411-426, 2000.
- [12] J. E. Mottershead, Y. M. Ram. Inverse eigenvalue problems in vibration absorption: Passive modification and active control, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **20**, 5-44, 2006.
- [13] Y. Li, J. He, G. Lleonart. Relocation of resonances and anti-resonances via local structural modification. Proceedings of the Asia-Pacific Vibration Conference, 1300-1307, 1993.
- [14] J. E. Mottershead. Structural modification for the assignment of zeros using measured receptances, *ASME J. Appl. Mech.*, **68**, 791-798, 2001.
- [15] J. Ensor, T. Clarke. Analysis and design using the allowable eigenvector subspace, *Journal of Aerospace Engineering*, 2002.
- [16] B.K. Song, S. Jayasuriya. Active vibration control using eigenvector assignment for mode localization *Proceedings of the American Control Conference, San Francisco*, 1020-1024, 1983.
- [17] A.N. Andry, E.Y. Shapiro, J.C Chung Eigenstructure Assignment for Linear System *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, vol.AES-19, No 5, 1983.

-
- [18] K.M Sobel, E.Y. Shapiro. Dynamic Output Feedback Flight Control Laws Using Bigenstructure Assignment.
- [19] H. Ouyang. A hybrid approach for pole assignment to second-order asymmetric systems *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011.
- [20] H. Ouyang. Pole assignment of friction-induced vibration for stabilisation through state-feedback control, *Journal of sound and Vibration*, **329**, 1985-1991, 2010.
- [21] H. Ouyang, D. Richiedei, A. Trevisani. Pole assignment in flexible link multibody mechanism: a receptance based approach, *Proceedings of the 2ND joint international conference on Multibody dynamics*, 2012.