



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

---

***TESI DI LAUREA***

**STUDIO TEORICO E NUMERICO SULLE DISTRIBUZIONI DI  
TENSIONE IN TUBI CON INTAGLI INTERNI ED ESTERNI  
SOGGETTI A TORSIONE**

*Relatore:* Prof. Ing. MICHELE ZAPPALORTO

*Laureando:* ALESSANDRO NOT

Matricola 592055-IMM

ANNO ACCADEMICO 2010-2011



# Sommario

0.1. Introduzione .....	5
0.2. Potenziali complessi fondamentali per l'elasticità in anti-plane.....	7
0.3. Intagli iperbolici e parabolici sottoposti a torsione .....	7
<b>1. Intagli a U e a V in componenti pieni .....</b>	<b>8</b>
1.1.1. Introduzione al problema .....	8
1.1.2. Descrizione del profilo d'intaglio reale.....	9
1.1.3. Struttura analitica .....	10
1.1.4. Espressione del modulo del vettore di tensione di taglio $\tau$ .....	14
1.1.5. Valutazione delle tensioni lungo il bordo d'intaglio .....	14
1.2. Confronto con le analisi a elementi finiti.....	15
1.2.1. Tensioni lungo la linea bisettrice d'intaglio .....	16
1.2.2. Componenti di tensione lungo il bordo dell'intaglio .....	18
1.2.3. Valore medio della tensione di taglio su un volume di controllo .....	19
1.2.4. Valutazione delle tensioni sull'intera sezione .....	20
1.3. Conclusioni .....	22
<b>2. Intagli a U e a V in componenti tubolari .....</b>	<b>23</b>
2.1. Analisi teorica e numerica di tubi con intaglio esterno.....	24
2.2. Analisi teorica e numerica di tubi con intaglio interno .....	33
2.3. Conclusioni .....	41
Bibliografia .....	43



## 0.1. Introduzione

È ben noto che, al diminuire del raggio d'intaglio, la fatica ad alti numeri di cicli, così come la rottura fragile, non sono più controllate dal valore del picco di tensione ma dai campi di tensione presenti nelle zone più sollecitate. Per questo motivo, nella letteratura precedente è stata dedicata notevole attenzione ai problemi di intaglio con carichi di trazione o flessione. Invece, ci sono solo un numero limitato di lavori relativi alla distribuzione di tensione in componenti intagliati soggetti a torsione. Il fattore teorico di concentrazione delle tensioni  $K_t$  per intagli 'profondi iperbolici' e 'superficiali semiellittici' è stato determinato da Neuber (1958). Alcuni anni più tardi Neuber mise a punto una procedura generale per determinare la distribuzione delle tensioni per qualsiasi legame tensioni-deformazioni, incluso il comportamento elastico lineare. Utilizzando la trasformata di Tschaplign-Molembroek ha fornito le soluzioni per la distribuzione di tensione lineare e non lineare dovuta a intagli acuti (Neuber 1961) o a intagli con fianchi paralleli e un arco di cicloide (Neuber 1968). Un approccio simile è stato proposto da Rice (1967), che ha usato una trasformata di Legendre invece che quella di Tschaplign-Molembroek. L'analisi di Rice è stata successivamente estesa dai presenti autori a intagli raccordati soggetti a torsione (Zappalorto e Lazzarin 2007, 2009, 2010; Lazzarin e Zappalorto 2008). Neuber (1958) ha anche dimostrato che, a causa della particolare forma delle equazioni che regolano il problema, la torsione in un provino cilindrico intagliato è un caso tridimensionale particolare, per il quale le componenti di tensione non variano con le coordinate del piano di uscita. Questo fatto rende la soluzione per le componenti della sollecitazione dovute a torsione indipendenti dalle proprietà elastiche del materiale. Limitando l'analisi al caso lineare elastico, Creager e Paris (1967) fornirono i campi di tensione in prossimità dell'apice di una "blunt crack" (intaglio parabolico) soggetta a modo I, II, e III di carico, mentre il problema della distribuzione di tensione per intagli a V acuti soggetti a taglio antiplanare è stato risolto da Seweryn e Molski (1996), Dunn e al. (1997), Qian e Hasebe (1997), che hanno anche trattato il problema della singolarità di interfaccia di un bi-materiale. Utilizzando la funzione di Airy, Kullmer (1992), Kullmer e Richard (2006) hanno determinato le equazioni dei campi di tensione valide per una fessura che termina in un foro (key-hole) in modo I, II, III. La presenza di diversi esponenti applicati alla distanza radiale  $r$  differenzia la soluzione di Kullmer da quella di Creager e Paris, dove appare solamente  $r^{-0,5}$ . Con riferimento alle distribuzioni di tensione indotte da intagli raccordati a U e a V soggetti a modo I e II, Lazzarin, Tovo (1996) e Filippi et al. (2002) hanno chiarito analiticamente l'influenza dell'angolo di apertura sui campi di tensione e sull'origine del sistema di coordinate polari adottato e hanno fornito delle espressioni in forma chiusa per i campi di tensione anche per intagli a V raccordati con angoli di apertura diversi da zero. Utilizzando lo stesso frame analitico gli stessi autori hanno chiarito la definizione degli NSIF di Modo I e II per intagli a V raccordati e fornirono alcune espressioni in forma chiusa che collegano i modi I N-SIF con intagli a V raccordati e non (Lazzarin e Filippi 2006). Limitando l'analisi ai carichi di modo I, una recensione completa degli argomenti menzionati è presentato anche in alcuni contributi di Savruk e Kazberuk (2006, 2010) che hanno utilizzato il metodo di equazioni integrali singolari a determinare il legame che collega i fattori di intensità di tensione in intagli a V e i fattori di concentrazione di tensione del corrispondente intaglio raccordato, in funzione del raggio di raccordo. Hanno inoltre evidenziato che questa relazione non è unica, ma, per lo stesso raccordo di apice, dipende dalla geometria utilizzata per l'intaglio (paraboliche, iperboliche o U e smussato a forma di V). Recentemente i campi di tensione elastica davanti a intagli circolari semi-ellittici, parabolici o iperbolici in barre circolari di dimensioni finite e infinite sottoposte a torsione sono stati riportati da (Lazzarin et al. 2007.; Zappalorto et al. 2008) che hanno anche trattato alcune espressioni analitiche dei fattori di intensità di tensione per intagli elastici in barre circolari sottoposte a torsione (Zappalorto et al. 2009). Mentre tutti i suddetti documenti sono stati sviluppati all'interno della "classica" teoria dell'elasticità, l'effetto dell'apertura dell'apice di cricca è stato recentemente discusso da Fu et al. (2008) nell'ambito della teoria dell'elasticità superficiale. In presenza di corpi infiniti, le distribuzioni di tensione non sono influenzate dai bordi esterni e dipendono solo dalle condizioni al contorno date dalla forma dell'intaglio; al contrario, al diminuire delle dimensioni, i bordi esterni cominciano a esercitare una forte influenza (Zappalorto et al. 2008). Le soluzioni analitiche complete e esatte per corpi finiti non sono impossibili, ma in genere comportano una serie di approssimazioni che portano a risultati meno gestibili rispetto ai corrispondenti di un corpo di dimensioni infinite (Howland 1930; Ling 1947; Bowie 1966). Tale approccio può essere utile anche quando il profilo dell'intaglio non può essere descritto per mezzo di

un'unica funzione continua, come nel caso di un intaglio a U (Seika 1960). L'obiettivo principale del presente lavoro è di fornire una serie di espressioni in forma chiusa per i campi di tensione indotti da intagli a U e a V in alberi assialsimmetrici di dimensioni finite sottoposti a torsione con un valore finito del raggio di raccordo. Diversamente dai contributi sopra menzionati, in questo lavoro viene utilizzato un approccio sperimentale e le espressioni per i campi di tensione sono ottenute utilizzando l'approccio dei potenziali complessi e il bordo reale dell'intaglio. Una funzione potenziale a due termini viene utilizzata per descrivere i campi di tensione locali e le necessarie condizioni di bordo libero vengono applicate su posizioni prescritte lungo il profilo dell'intaglio. Viene anche considerato l'effetto di dimensione finita traendo vantaggio da una condizione di equilibrio globale, come fatto in precedenza con i componenti sottoposti a tensione o a carichi di flessione (Filippi e Lazzarin 2004; Atzori et al. 2005). In questo modo, le espressioni delle tensioni di taglio saranno accurate non solamente nell'intorno dell'apice ma sull'intera sezione dell'albero. La precisione delle nuove relazioni viene controllata da una serie di analisi effettuate sugli EF ottenute su componenti di dimensione finita soggetti a carichi di torsione.

Come detto, tutto questo è valido per componenti cilindrici intagliati. Resta dunque da ricavare le relazioni anche per i componenti tubolari intagliati sottoposti a torsione. Per quest'ultimo ambito però gli studi sono ancora sottoforma di ricerca per cui le assunzioni e le relazioni che si andranno ad utilizzare sono del tutto sperimentali. L'argomento inoltre è possibile affrontarlo solamente dopo aver consolidato la prima parte, quella relativa ai componenti pieni. Si andranno quindi a spiegare dapprima le relazioni esistenti per i componenti pieni intagliati, per poi passare a quelle relative ai componenti tubolari. Infine si andranno a confrontare queste relazioni sperimentali trovate per i tubi con i risultati numerici ottenuti agli elementi finiti.

Questa trattazione consiste quindi di tre parti fondamentali: la prima legata ai componenti pieni tradizionali, la seconda che si occupa delle leggi sperimentali per componenti tubolari e la terza che descrive ed espone i confronti fatti tra la parte analitica e quella numerica.

## 0.2. Potenziali complessi fondamentali per l'elasticità in anti-plane

Si inizia dunque introducendo le caratteristiche dei principali intagli e quindi le relazioni che regolano le tensioni all'interno di essi.

Si consideri un corpo assialsimmetrico indebolito da un intaglio circolare di forma generica, e realizzato con un materiale isotropo, omogeneo e lineare elastico. Si consideri inoltre un sistema di riferimento cartesiano  $(x, y, z)$  con l'origine ad un'opportuna distanza dall'apice di intaglio. Supponiamo ora che il corpo venga caricato da una sollecitazione di taglio  $\tau$ , che dà luogo solamente a spostamenti  $w$  in direzione  $z$ , normali al piano dell'intaglio caratterizzato dalle assi  $X$  e  $Y$ . In queste condizioni sono valide le seguenti relazioni per tensioni e le deformazioni (Sokolnikoff 1956; Lazzarin et al. 2007):

$$\tau_{zx} - i\tau_{zy} = H'(z) \quad (1.1)$$

$$\gamma_{zx} - i\gamma_{zy} = \frac{H'(z)}{G} \quad (1.2)$$

in coordinate cartesiane e:

$$\tau_{zr} - i\tau_{z\varphi} = e^{i\varphi} \cdot H'(z) \quad (1.3)$$

$$\gamma_{z\varphi} - i\gamma_{z\varphi} = \frac{e^{i\varphi} \cdot H'(z)}{G} \quad (1.4)$$

in coordinate polari.

Inoltre lo spostamento  $w$  in direzione  $z$  può essere determinato come (Lazzarin e al. 2007):

$$w = \frac{Re\{H(z)\}}{G} \quad (1.5)$$

La funzione  $H(z)$  è una funzione olomorfa, che varierà da caso a caso a seconda delle condizioni al contorno.

## 0.3. Intagli iperbolici e parabolici sottoposti a torsione

Le distribuzioni di tensione per intagli iperbolici e parabolici soggetti a carichi di torsione sono state recentemente fornite da Zappalorto et al. (2008) utilizzando, in combinazione, il sistema di coordinate curvilinee di Neuber mostrato in Fig. 1.1 (Neuber 1958) e un approccio ai potenziali complessi che lega le tensioni di taglio a una funzione olomorfa,  $H(z) = A \cdot z^\lambda$ .

Imponendo adeguate condizioni al contorno, le sollecitazioni sono state scritte in funzione della massima tensione di taglio sull'apice d'intaglio secondo la seguente espressione (Zappalorto et al. 2008):

$$\begin{Bmatrix} \tau_{zr}(r, \varphi) \\ \tau_{z\varphi}(r, \varphi) \end{Bmatrix} = \tau_{max} \cdot \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_3-1} \times \begin{Bmatrix} \sin \lambda_3 \varphi \\ \cos \lambda_3 \varphi \end{Bmatrix} \left(1 - \frac{(r-r') \cdot \cos \varphi}{R'}\right) \quad (1.6)$$

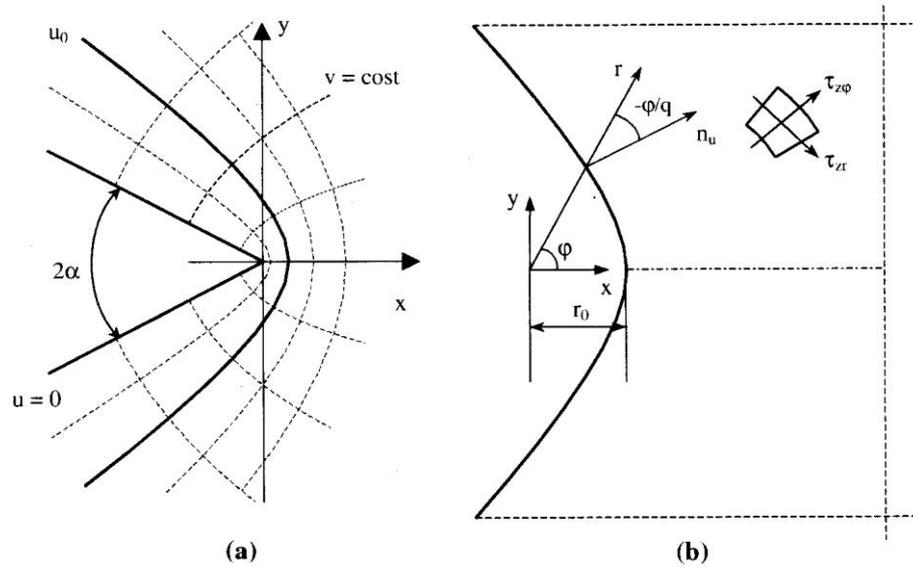
I parametri geometrici  $q$ ,  $r_0$ ,  $r'$  e  $R'$  sono dati da (Zappalorto et al. 2008):

$$q = \frac{2\pi - 2\alpha}{\pi} = \frac{1}{\lambda_3} \quad ; \quad r_0 = \frac{q-1}{q} \rho \quad (1.7)$$

$$r' = \frac{r_0}{\left(\cos\left(\frac{\varphi}{q}\right)\right)^q} \quad ; \quad R' = R + (r_0 - r' \cdot \cos \varphi)$$

Dove  $R$  è il raggio della sezione netta dell'albero.

**Fig. 1.1** Sistema di Neuber con coordinate curvilinee  $(u,v)$  (a); sistema di riferimento usato nella soluzione analitica (b)



Lungo la linea bisettrice dell'intaglio le equazioni si semplificano in:

$$\tau_{z\varphi} = \tau_{max} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_3-1} \left(1 - \frac{r-r_0}{R}\right) \quad (1.8)$$

Le Eq. 1.6 sono generali e mettono in relazione in alcuni casi particolari dei risultati ben conosciuti della frattura con la meccanica dell'intaglio riportata in letteratura, come mostrato da Zappalorto et al. 2008.

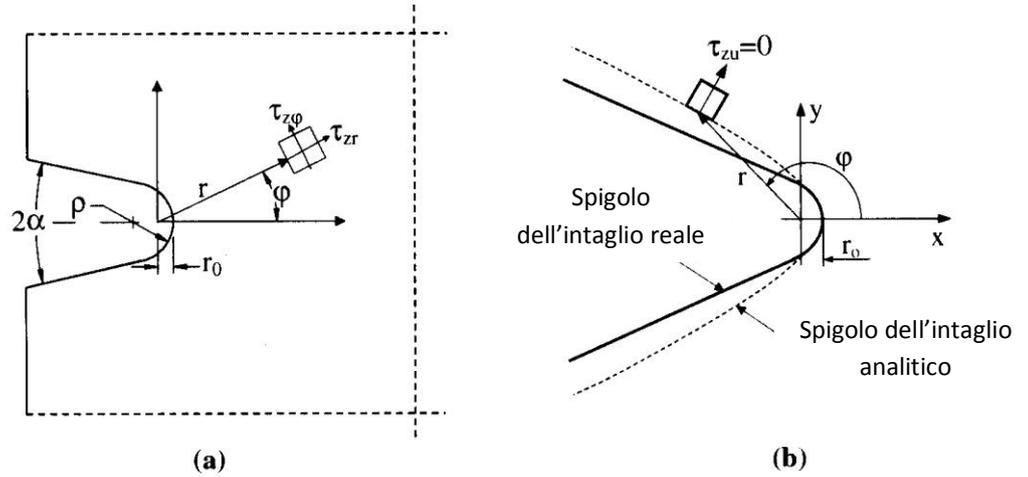
## 1. Intagli a U e a V in componenti pieni

### 1.1.1. Introduzione al problema

Data la forma molto semplice delle Eq. 1.6, 1.8 e la stretta somiglianza tra un intaglio a V raccordato e un intaglio iperbolico con lo stesso raggio, uno può pensare di applicare le equazioni a entrambi gli intagli, senza alcuna distinzione.

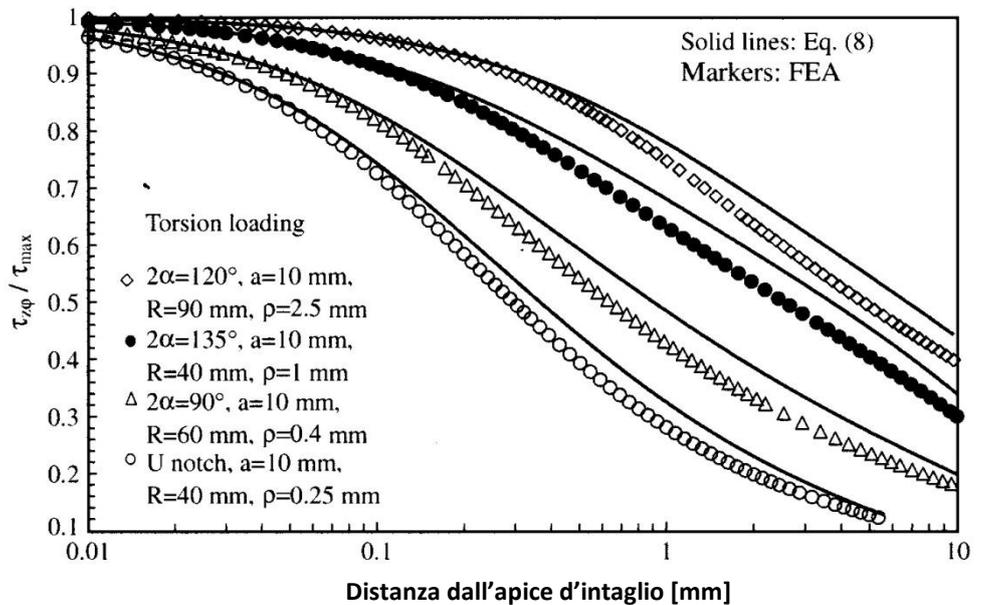
Tuttavia, le distribuzioni di tensione dovute ai carichi di torsione sono molto sensibili alla forma dell'intaglio, e differenze geometriche nel profilo d'intaglio possono causare una deviazione del flusso delle tensioni all'interno del corpo, anche molto vicino all'apice d'intaglio (Smith 2004; Lazzarin et al. 2007). In particolare, la soluzione analitica ottenuta per l'intaglio iperbolico è in grado di garantire la necessaria condizione di intaglio a bordo libero solamente quando il profilo d'intaglio in realtà è iperbolico o a V con un raggio di raccordo piccolo, ma genera delle tensioni residue di taglio diverse da zero sul bordo nel caso di un intaglio a V con un raggio di raccordo significativo o a U; in questi casi la condizione al contorno prescritta sul bordo è in realtà soddisfatta solamente all'apice d'intaglio, dove  $\varphi = 0$ , o, approssimativamente, lontano dall'apice d'intaglio, dove  $\varphi \rightarrow \pi - \alpha$ , come mostrato in Fig. 1.2.

**Fig. 1.2** Sistema di riferimento per un intaglio a U o a V raccordato (a); differenze geometriche tra un intaglio iperbolico e un intaglio a V raccordato (b)



Per questo motivo, le Eq. 1.6, 1.8 sono approssimate quando vengono applicate a intagli a V con raggi di raccordo diversi da 0 o a intagli a U, e il grado di precisione dipende sia dall'angolo di apertura dell'intaglio, sia dal raggio dell'apice di intaglio, andando dal 2% fino al 12% (vedi Fig. 1.3). Ciò significa che in tutti i casi dove sia richiesto un maggior grado di precisione, le Eq. 1.6, 1.8 non possono essere applicate tali e quali.

**Fig. 1.3** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli a U e a V raccordati e confrontati con l'Eq. (1.8). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



### 1.1.2. Descrizione del profilo d'intaglio reale

Nel caso di un intaglio a U o a V raccordato, il profilo d'intaglio è discontinuo, essendo rappresentato da un apice raccordato di raggio  $\rho$  e da due fianchi rettilinei.

Con riferimento alla Fig. 1.4, la parte circolare dell'intaglio termina in corrispondenza di un angolo limite indicato qui come  $\varphi^*$ , oltre a questo angolo il profilo d'intaglio diventa lineare. Il profilo d'intaglio può allora essere descritto grazie la seguente equazione (Berto e Lazzarin 2007):

$$z = x + iy = R(\varphi)e^{i\varphi} \quad (1.9)$$

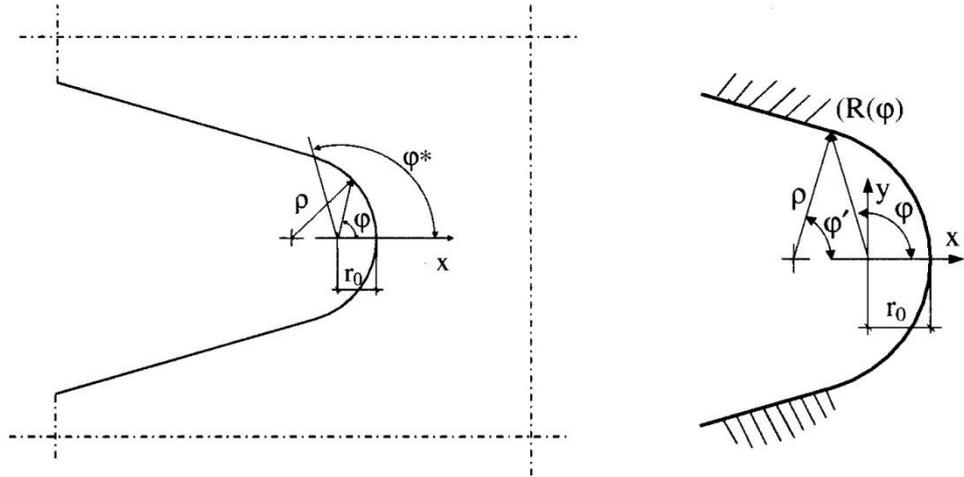
dove:

$$R(\varphi) = \begin{cases} \frac{\rho}{q} [\sqrt{\cos^2(\varphi) + q^2 - 1} - \cos(\varphi)] & \text{se } \varphi < \varphi^* \\ \frac{\rho \times f(\varphi^*)}{\sin(\varphi) + \tan(\alpha) \cdot \cos(\varphi)} & \text{se } \varphi > \varphi^* \end{cases} \quad (1.10)$$

e

$$f(\varphi^*) = \lambda_3 \times \left[ \sqrt{\cos^2(\varphi^*) + q^2 - 1} - \cos(\varphi^*) \right] \times [\sin(\varphi^*) + \tan(\alpha) \cdot \cos(\varphi^*)] \quad (1.11)$$

**Fig. 1.4** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli a U e a V raccordati e confrontati con l'Eq. (1.8). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



Il valore dell'angolo limite  $\varphi^*$  può essere determinato come:

$$\varphi^* = \begin{cases} \arctan \left[ \frac{q \cdot \cos(\alpha)}{q \cdot \sin(\alpha) - 1} \right] & \text{se } \left[ \frac{q \cdot \cos(\alpha)}{q \cdot \sin(\alpha) - 1} \right] \geq 0 \\ \pi - \arctan \left[ -\frac{q \cdot \cos(\alpha)}{q \cdot \sin(\alpha) - 1} \right] & \text{se } \left[ \frac{q \cdot \cos(\alpha)}{q \cdot \sin(\alpha) - 1} \right] < 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Diversamente, l'angolo  $\varphi'$  compreso tra la direzione  $x$  e la direzione  $u$ , normale al bordo d'intaglio, può essere determinato sulla base di semplici considerazioni trigonometriche e si traduce in:

$$\varphi' = \begin{cases} \arcsin \left( \lambda_3 \times \sin \varphi \times \left[ \sqrt{\cos^2(\varphi) + q^2 - 1} - \cos(\varphi) \right] \right) & \text{se } \varphi < \varphi^* \\ \frac{\pi}{\alpha} - \alpha & \text{se } \varphi > \varphi^* \end{cases} \quad (1.13)$$

Si noti che l'origine del sistema di coordinate usato per la soluzione non è cambiata rispetto a quella di Neuber, ma continua ad essere situata alla stessa distanza  $r_0$  dall'apice d'intaglio, essendo:

$$r_0 = \frac{q-1}{q} \rho \quad (1.14)$$

### 1.1.3. Struttura analitica

Si consideri la seguente funzione olomorfa  $H(z)$ :

$$H(z) = iaz^\lambda + ibz^\mu \quad (1.15)$$

Dove  $a$  e  $b$  sono coefficienti reali. Questa forma assicura la necessaria simmetria del problema. Quindi:

$$H'(z) = ia\lambda z^{\lambda-1} + ib\mu z^{\mu-1} \quad (1.16)$$

Essendo  $\lambda$  e  $\mu$  numeri reali tali che  $\mu < \lambda < 1$  per ipotesi.

Grazie all'equazione di Eulero, l'Eq. 1.16 può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} H'(z) &= ia\lambda r^{\lambda-1} e^{i(\lambda-1)\varphi} + ib\mu r^{\mu-1} e^{i(\mu-1)\varphi} = \\ &= ia\lambda r^{\lambda-1} (\cos(\lambda-1)\varphi + i \sin(\lambda-1)\varphi) + ib\mu r^{\mu-1} (\cos(\mu-1)\varphi + i \sin(\mu-1)\varphi) = \\ &= a\lambda r^{\lambda-1} (i \cos(\lambda-1)\varphi - \sin(\lambda-1)\varphi) + b\mu r^{\mu-1} (i \cos(\mu-1)\varphi - \sin(\mu-1)\varphi) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Quindi in accordo con l'Eq. 1.1:

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \text{Re}\{H'(z)\} = -Ar^{\lambda-1} \sin(1-\lambda)\varphi - Br^{\mu-1} \sin(1-\mu)\varphi \\ \tau_{zy} &= -\text{Im}\{H'(z)\} = Ar^{\lambda-1} \cos(1-\lambda)\varphi + Br^{\mu-1} \cos(1-\mu)\varphi \end{aligned} \quad (1.18)$$

Le condizioni al contorno possono essere formulate in forma sintetica come:

$$(\tau_{zu})_{u=u_0} = 0 \quad (1.19)$$

dove  $(\tau_{zu})_{u=u_0}$  è la tensione di taglio normale al bordo d'intaglio.

In generale, l'Eq. 1.19 può essere riscritta coinvolgendo le componenti cartesiane dello sforzo di taglio:

$$\tau_{zu} = \tau_{zx} \cos \varphi' + \tau_{zy} \sin \varphi' \quad (1.20)$$

dove l'angolo  $\varphi'$  è dato dall'Eq. 1.13.

Ricombinando quindi le equazioni:

$$\tau_{zu} = Ar^{\lambda-1} \sin[\varphi' - (1-\lambda)\varphi] + Br^{\mu-1} \sin[\varphi' - (1-\mu)\varphi] \quad (1.21)$$

Sostituendo  $r = R(\phi)$ , la condizione da verificare è:

$$AR^{\lambda-1}(\varphi) \sin[\varphi' - (1-\lambda)\varphi] + BR^{\mu-1}(\varphi) \sin[\varphi' - (1-\mu)\varphi] = 0 \quad (1.22)$$

Come prima cosa, si può applicare tale condizione al fianco dell'intaglio, distante dall'apice, considerando che per grandi valori di  $r$  il termine caratterizzato dall'esponente  $\mu$  non è significativo,  $\varphi \cong \pm\gamma = \pm(\pi - \alpha)$  e  $\varphi' = \pm(\pi/2 - \alpha)$  (vedi Eq. 1.13).

Semplificando quindi l'espressione precedente risulta che:

$$AR^{\lambda-1}(\varphi) \sin \left[ \frac{\pi}{2} - \alpha - (1-\lambda)(\pi - \alpha) \right] = 0 \quad (1.23)$$

Per poter essere che sia indipendente dal valore reale di  $R(\phi)$  e  $A$ :

$$\sin \left[ \frac{\pi}{2} - \alpha - (1-\lambda)(\pi - \alpha) \right] = 0 \quad (1.24)$$

ovvero:

$$\lambda = \lambda_3 = \frac{\pi}{2\gamma} = \frac{1}{q} \quad (1.25)$$

dove il pedice  $_3$  è stato ora introdotto per distinguere l'attuale analisi dai carichi sul piano.

Comunque, in generale, l'Eq. 1.22 richiede:

$$B = -AR^{\lambda_3 - \mu_3}(\varphi) \frac{\sin[\varphi' - (1 - \lambda_3)\varphi]}{\sin[\varphi' - (1 - \mu_3)\varphi]} \quad (1.26)$$

Rigorosamente, l'Eq. 1.26 dovrebbe essere verificata per ogni punto del profilo d'intaglio, ma in realtà, possiamo imporlo solamente in un specifico punto, che dovrebbe essere attentamente individuato. Per individuare il punto più appropriato si impone la seguente condizione:

$$\frac{\sin[\varphi' - (1 - \lambda_3)\varphi]}{\sin[\varphi' - (1 - \mu_3)\varphi]} = -1 \quad (1.27)$$

L'Eq. 1.27 stabilisce che i termini caratterizzati da  $\lambda_3$  e  $\mu_3$  hanno lo stesso peso angolare, quindi le distribuzioni di tensione sono controllate dai termini radiali e non da quelli angolari.

Dal momento che la condizione di bordo libero è ancora verificata lontano dall'apice, grazie a quanto stabilito per  $\lambda_3$ , si ha ora la necessità che la seconda condizione al contorno sia completamente controllata da  $\mu_3$ . Questo avviene quando l'Eq. 1.27 viene valutata per  $\varphi = \mu_3 \times \varphi^*$ , cioè in un punto della parte circolare del bordo d'intaglio controllata da  $\mu_3$ . L'equazione da risolvere è dunque:

$$\frac{\sin[\varphi'(\mu_3 \times \varphi^*) - (1 - \lambda_3) \times \mu_3 \times \varphi^*]}{\sin[\varphi'(\mu_3 \times \varphi^*) - (1 - \mu_3) \times \mu_3 \times \varphi^*]} = -1 \quad (1.28)$$

L'Eq. 1.28 è un'equazione trascendente la cui soluzione può essere ricavata facilmente grazie al metodo di Newton, fornendo  $\mu_3$ .

Quindi, il parametro  $B$  dell'Eq. 1.26 risulta:

$$B = A \times R^{\lambda_3 - \mu_3}(\mu_3 \cdot \varphi^*) \quad (1.29)$$

E quindi:

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -Ar^{\lambda_3 - 1}(\sin(1 - \lambda_3)\varphi + R^{\lambda_3 - \mu_3}(\mu_3 \cdot \varphi^*)r^{\mu_3 - \lambda_3}(\sin(1 - \mu_3)\varphi)) \\ \tau_{zy} &= Ar^{\lambda_3 - 1}(\cos(1 - \lambda_3)\varphi + R^{\lambda_3 - \mu_3}(\mu_3 \cdot \varphi^*)r^{\mu_3 - \lambda_3}(\cos(1 - \mu_3)\varphi)) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Alla fine il parametro  $A$  può essere determinato come una funzione della massima tensione di taglio all'apice d'intaglio:

$$A = \frac{\tau_{max}}{r_0^{\lambda_3 - 1}(1 + R^{\lambda_3 - \mu_3}(\mu_3 \cdot \varphi^*)r_0^{\mu_3 - \lambda_3})} \quad (1.31)$$

Le distribuzioni delle tensioni di taglio risultano quindi:

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -\frac{\tau_{max}}{1 + \left(\frac{R(\mu_3 \cdot \varphi^*)}{r_0}\right)^{\lambda_3 - \mu_3}} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_3 - 1} \left(\sin(1 - \lambda_3)\varphi + \left(\frac{r}{R(\mu_3 \cdot \varphi^*)}\right)^{\mu_3 - \lambda_3} (\sin(1 - \mu_3)\varphi)\right) \\ \tau_{zy} &= \frac{\tau_{max}}{1 + \left(\frac{R(\mu_3 \cdot \varphi^*)}{r_0}\right)^{\lambda_3 - \mu_3}} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_3 - 1} \left(\cos(1 - \lambda_3)\varphi + \left(\frac{r}{R(\mu_3 \cdot \varphi^*)}\right)^{\mu_3 - \lambda_3} (\cos(1 - \mu_3)\varphi)\right) \end{aligned} \quad (1.32)$$

L'Eq. 1.32 può essere semplificata come:

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= -\frac{\tau_{max}}{\omega_3} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_3-1} \left( \sin(1-\lambda_3)\varphi + \left(\frac{r}{r_3}\right)^{\mu_3-\lambda_3} (\sin(1-\mu_3)\varphi) \right) \\ \tau_{zy} &= \frac{\tau_{max}}{\omega_3} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_3-1} \left( \cos(1-\lambda_3)\varphi + \left(\frac{r}{r_3}\right)^{\mu_3-\lambda_3} (\cos(1-\mu_3)\varphi) \right)\end{aligned}\quad (1.33)$$

dove i nuovi parametri  $\omega_3$  e  $r_3$  sono dati dalle Eq. 1.34 e 1.35:

$$\begin{aligned}r_3 &= R(\mu_3 \cdot \varphi^*) \\ &= \frac{\rho}{q} \left[ \sqrt{\cos^2(\mu_3 \cdot \varphi^*) + q^2 - 1} - \cos(\mu_3 \cdot \varphi^*) \right] = \chi_3 \times \rho\end{aligned}\quad (1.34)$$

$$\begin{aligned}\omega_3 &= 1 + \left(\frac{R(\mu_3 \cdot \varphi^*)}{r_0}\right)^{\lambda_3-\mu_3} \\ &= 1 + \left(\frac{= \frac{\rho}{q} \left[ \sqrt{\cos^2(\mu_3 \cdot \varphi^*) + q^2 - 1} - \cos(\mu_3 \cdot \varphi^*) \right]}{(1-\lambda_3)\rho}\right)^{\lambda_3-\mu_3} \\ &= 1 + \left(\frac{\lambda_3}{1-\lambda_3} \left[ \sqrt{\cos^2(\mu_3 \cdot \varphi^*) + q^2 - 1} - \cos(\mu_3 \cdot \varphi^*) \right]\right)^{\lambda_3-\mu_3}\end{aligned}\quad (1.35)$$

I parametri presenti nell'Eq. 1.33 sono elencati nella Tab. 1.1:

**Tab. 1.1** Valori dei coefficienti delle Eq. 1.11, 1.33, 1.37

$2\alpha/\pi$	$\gamma/\varpi$	q	$\varphi^* [^\circ]$	$f(\varphi^*)$	$\lambda_3$	$\mu_3$	$\chi_3$	$\omega_3$
0	1	2.0000	116.56	1.0000	0.5000	0.40978	0.5929	2.0155
1/6	11/12	1.8333	106.52	0.8891	0.5454	0.45082	0.5493	2.0181
1/4	7/8	1.7500	101.54	0.8457	0.5714	0.47473	0.5239	2.0196
1/3	5/6	1.6667	96.58	0.8083	0.6000	0.50146	0.4955	2.0213
5/12	19/24	1.5833	91.64	0.7758	0.6315	0.53160	0.4635	2.0232
1/2	3/4	1.5000	86.72	0.7475	0.6667	0.56594	0.4272	2.0253
7/12	17/24	1.4167	81.82	0.7228	0.7058	0.60554	0.3855	2.0275
2/3	2/3	1.3333	76.93	0.7010	0.7500	0.65196	0.3370	2.0297
3/4	5/8	1.2500	72.06	0.6818	0.8000	0.70756	0.2797	2.0315
5/6	7/12	1.1667	67.20	0.6648	0.8571	0.77634	0.2103	2.0317

Gli esponenti della tensione,  $1 - \lambda_3$  e  $1 - \mu_3$  sono diagrammati nella Fig. 1.5 in funzione dell'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$ .

La Fig. 1.5 mostra inoltre che  $\chi_3$  è ben approssimato a  $1 - \mu_3$ . Questo garantisce un interessante parallelismo:

$$r_0 = (1 - \lambda_3) \times \rho \quad r_3 \cong (1 - \mu_3) \times \rho \quad (1.36)$$

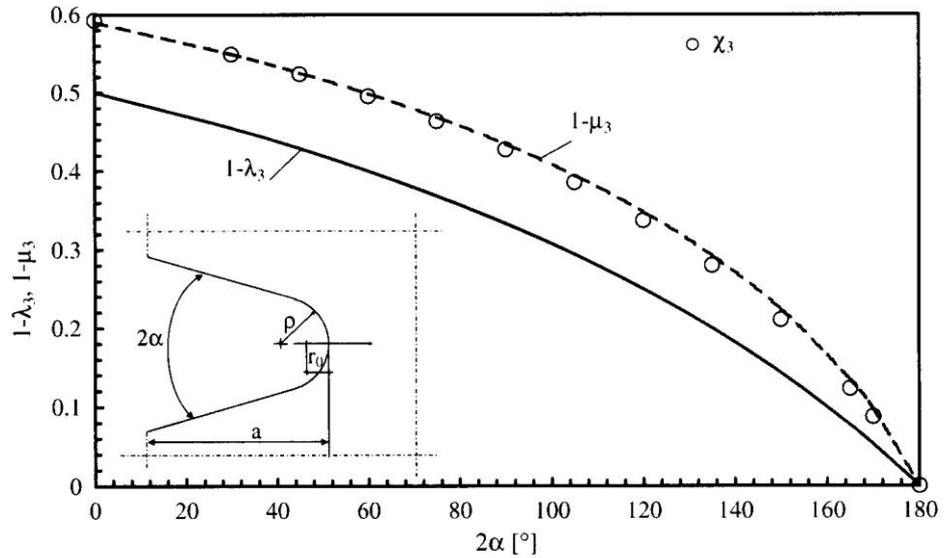
Infine, lungo la linea bisettrice dell'intaglio l'Eq. 1.33 si semplifica come:

$$\tau_{zy} = \frac{\tau_{max}}{\omega_3} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_3-1} \left(1 + \left(\frac{r}{r_3}\right)^{\mu_3-\lambda_3}\right) \left(1 - \frac{r-r_0}{R}\right) \quad (1.37)$$

dove  $R$  è il raggio della sezione netta.

Come fatto in Lazzarin et al. (2007) e Zappalorto et al. (2008), l'ultimo termine sulla destra è stato introdotto per tener conto della diminuzione lineare della tensione di taglio nominale, in accordo alla soluzione di tensione dovuta a Coulomb,  $\tau_n = \frac{16T}{\pi R^3} \times \left(1 - \frac{r-r_0}{R}\right)$ , dove  $T$  è la coppia applicata.

**Fig. 1.5** Diagrammi degli esponenti dei campi di tensione  $1-\lambda_3$  e  $1-\mu_3$



La stessa scelta è stata fatta da Neuber (1958) nel caso di torsione anche da Glinka e Newport (1987) e Atzori et al. (1997) nel caso di sollecitazioni di flessione.

Le Eq. 1.33 e 1.37 evidenziano anche che le distribuzioni delle tensioni di taglio dipendono da due esponenti, i quali possono essere determinati analiticamente in funzione dell'angolo di apertura dell'intaglio; nonostante questo, l'origine del sistema di coordinate, per entrambe le componenti di tensione, è stata lasciata invariata rispettando la soluzione dell'intaglio iperbolico/parabolico. L'origine è a una distanza  $r_0$  dall'apice d'intaglio, sulla linea bisettrice, come mostrato in Fig. 1.4.

#### 1.1.4. Espressione del modulo del vettore di tensione di taglio $\tau$

Il modulo del vettore della tensione di taglio è definito come (Zappalorto e Lazzarin 2007):

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \quad (1.38)$$

Sostituendo l'Eq. 1.33 nella 1.38 si ottiene:

$$\tau = \frac{\tau_{max}}{\omega_3} \left(\frac{r}{r_3}\right)^{\lambda_3-1} \times \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_3}\right)^{2(\mu_3-\lambda_3)} + 2 \left(\frac{r}{r_3}\right)^{(\mu_3-\lambda_3)} \cos(\mu_3 - \lambda_3) \varphi} \quad (1.39)$$

#### 1.1.5. Valutazione delle tensioni lungo il bordo d'intaglio

Una volta determinato il modulo del vettore della tensione di taglio, è altrettanto facile determinare l'espressione per le tensioni di taglio lungo il bordo d'intaglio, secondo le espressioni:

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -\tau \sin \varphi' \\ \tau_{zy} &= \tau \cos \varphi' \end{aligned} \quad (1.40)$$

Dove l'angolo  $\phi'$  è definito secondo l'Eq. 1.13.

Quindi:

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -\frac{\tau_{max}}{\omega_3} \left(\frac{R(\phi)}{r_0}\right)^{\lambda_3-1} \sin \phi' \sqrt{1 + \left(\frac{R(\phi)}{r_3}\right)^{2(\mu_3-\lambda_3)} + 2 \left(\frac{R(\phi)}{r_3}\right)^{(\mu_3-\lambda_3)} \cos(\mu_3 - \lambda_3)\phi} \\ \tau_{zy} &= \frac{\tau_{max}}{\omega_3} \left(\frac{R(\phi)}{r_0}\right)^{\lambda_3-1} \cos \phi' \sqrt{1 + \left(\frac{R(\phi)}{r_3}\right)^{2(\mu_3-\lambda_3)} + 2 \left(\frac{R(\phi)}{r_3}\right)^{(\mu_3-\lambda_3)} \cos(\mu_3 - \lambda_3)\phi} \end{aligned} \quad (1.41)$$

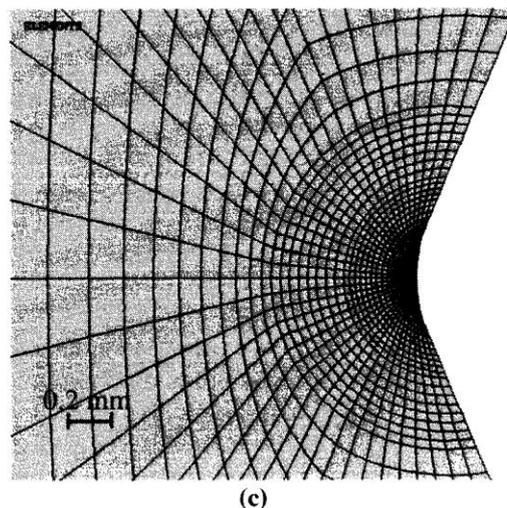
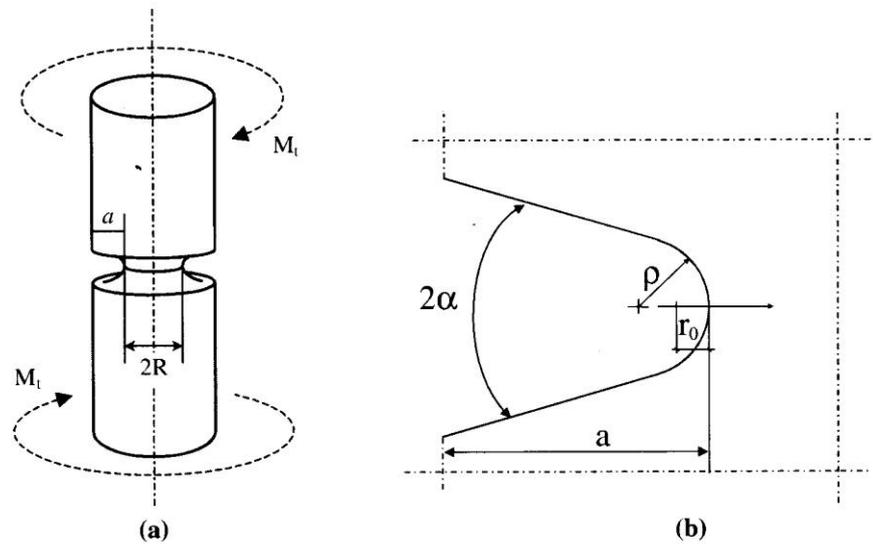
Dove  $R(\phi)$  è definito secondo l'Eq. 1.10.

## 1.2. Confronto con le analisi ad elementi finiti

Una grande quantità di analisi ad elementi finiti è stata effettuata con l'obiettivo di confrontare la previsione teorica per i campi di tensione con i risultati numerici.

Una rappresentazione schematica dei parametri geometrici utili per descrivere i modelli a EF sono mostrati in Fig. 1.6, mentre tutti i parametri geometrici sono dati in Tab. 1.2.

**Fig. 1.6** Rappresentazione schematica dei parametri geometrici utili a descrivere i modelli EF (geometria globale (a) e geometria locale (b)). Meshatura nell'intorno dell'apice per il modello 18 nella Tab. 1.2 (intaglio a V raccordato con  $2\alpha=135^\circ$ ,  $\rho=1$  mm,  $a=10$  mm e  $R=100$  mm) (c)



**Tab. 1.2** Dettagli geometrici e fattori di concentrazione di tensione teorici valutati sulla sezione netta,  $K_{tn}$ , dei modelli EF

Model	Type	Notch opening angle, $2\alpha$ [°]	Notch root radius, $\rho$ [mm]	Notch depth, $a$ [mm]	Net radius, $R$ [mm]	$K_{tn}$
1	U	0	0.25	10	100	7.12
2	U	0	1	10	100	3.78
3	U	0	2.5	10	100	2.60
4	blunt-V	45	0.25	10	50	5.51
5	blunt-V	45	1	10	50	3.15
6	blunt-V	45	3	10	50	2.11
7	blunt-V	60	0.25	10	100	6.02
8	blunt-V	60	1	10	100	3.53
9	blunt-V	60	3	10	100	2.39
10	blunt-V	90	0.1	10	100	6.92
11	blunt-V	90	1	10	50	2.85
12	blunt-V	90	5	10	100	1.99
13	blunt-V	120	0.1	10	100	4.91
14	blunt-V	120	1	10	50	2.46
15	blunt-V	120	5	10	100	1.89
16	blunt-V	135	0.1	10	100	3.86
17	blunt-V	135	0.5	10	100	2.80
18	blunt-V	135	1	10	100	2.44
19	blunt-V	135	5	10	100	1.78

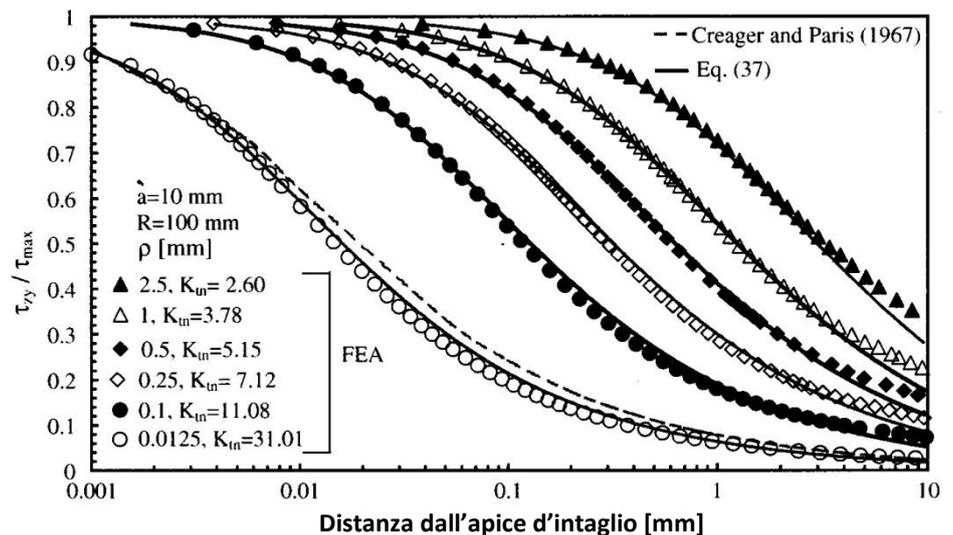
L'elemento armonico assialsimmetrico (PLANE 83 in ANSYS) è stato utilizzato per effettuare analisi ad elementi finiti sulle basi di modelli bi-dimensionali. È stata utilizzata una mesh molto fitta, così da assicurare la correttezza dei risultati numerici nella regione maggiormente sollecitata al fine di verificare la soluzione analitica. La dimensione degli elementi nell'intorno dell'apice d'intaglio è circa di  $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ . Per esempio la Fig. 1.6c mostra la mesh dell'intorno dell'apice d'intaglio del provino 18 nella Tab. 1.2 (intaglio a V con raggio di raccordo significativo con  $2\alpha = 135^\circ$ ,  $\rho = 1 \text{ mm}$ ,  $a = 10 \text{ mm}$  e  $R = 100 \text{ mm}$ ).

### 1.2.1. Tensioni lungo la linea bisettrice d'intaglio

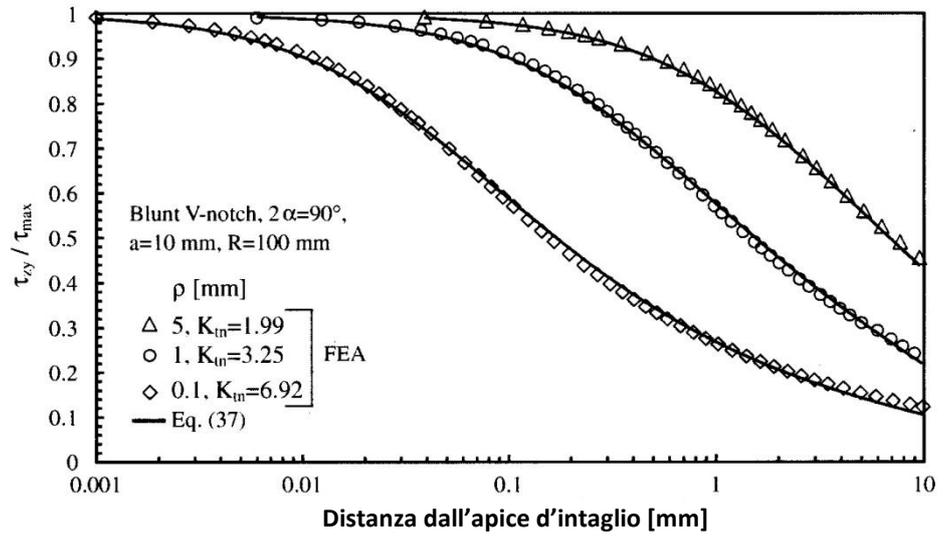
Le distribuzioni di tensione lungo la linea bisettrice dell'intaglio sono comunemente considerate le più importanti componenti di tensione per l'analisi a fatica. I risultati delle analisi agli EF sono stati poi ampiamente confrontati con le previsioni teoriche lungo tale direzione.

Le Fig. 1.7, 1.8 e 1.9 mostrano alcuni diagrammi di distribuzioni di tensione lungo la linea bisettrice dell'intaglio e un confronto fra la previsione teorica basata sull'Eq. 1.37 e i risultati numerici.

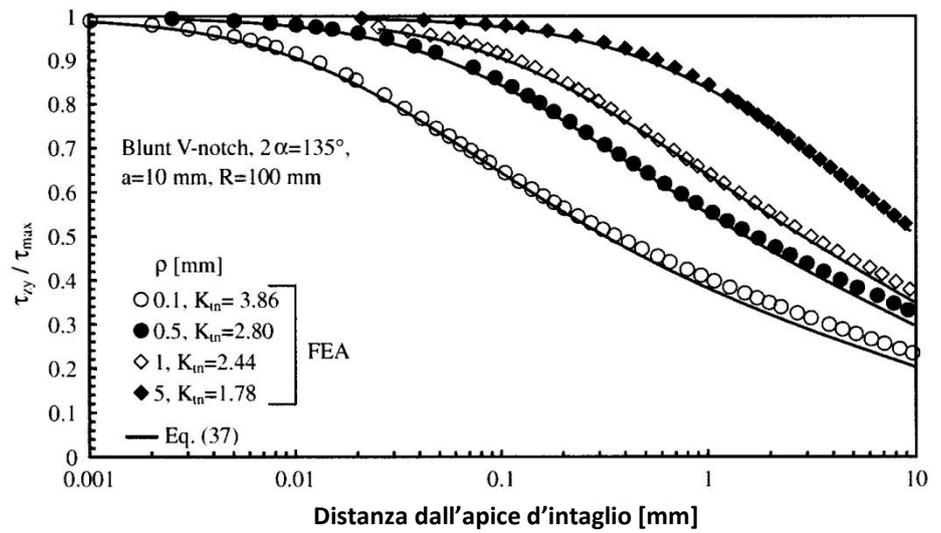
**Fig. 1.7** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli a U e confrontati con l'Eq. (1.37). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 1.8** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=90^\circ$  e confrontati con l'Eq. (1.37). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 1.9** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=135^\circ$  e confrontati con l'Eq. (1.37). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



La Tab. 1.3, invece, elenca la differenza percentuale tra le previsioni teoriche e i risultati numerici a differenti distanze dall'apice d'intaglio  $(r - r_0)/\rho$ .

**Tab. 1.3** Differenza percentuale tra le previsioni teoriche e i risultati numerici a differenti distanze normalizzate dall'apice di intaglio,  $(r-r_0)/\rho$

Model	$\Delta[\%]^a$								
$(r - r_0)/\rho$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	1	2	3
1	-0.59	-0.65	-0.45	-0.2	-0.2	0.9	1.9	4	4.5
2	-0.6	-0.7	-0.7	-0.6	-0.4	-0.2	0.1	-0.6	-3
3	-0.7	-0.9	-1.1	-1.2	-1.4	-1.8	-2.6	b	b
4	-0.6	-0.7	-0.5	-0.2	0.2	1	2	4.3	5
5	-0.7	-0.8	-0.6	-0.4	-0.1	0.5	1.3	2	1.1
6	-0.7	-1	-1	-0.9	-0.9	-0.8	-1	b	b
7	-0.7	-0.8	-0.6	-0.2	-0.2	1	2	3.9	4.4
8	-0.7	-0.8	-0.7	-0.5	0	0.6	1.1	1.8	0.9
9	-0.7	-1	-1	-0.9	-0.7	-0.7	-0.9	3	b
10	-0.8	-0.9	-0.7	-0.3	0	0.7	1.5	2.6	2.8
11	-0.9	-0.9	-0.7	-0.3	0	0.7	0.14	2.4	2.1
12	-0.8	-1.1	-1	-0.9	-0.8	-0.8	-1.2	b	b
13	-1	-1.1	-0.9	-0.6	-0.3	-0.1	0.3	0.1	-0.4
14	-1	-1	-0.8	-0.6	-0.3	0.1	0.5	0.6	0.3
15	-1	-1	-0.9	-0.7	-0.5	-0.3	-0.2	-1.8	b
16	-1.1	-1.1	-0.8	-1	-0.7	-0.8	-0.9	-1.7	-2.4
17	-1.1	-1.2	-1.1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.8	-1.6	-2.2
18	-1.1	-1.2	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.7	-1.4	-2.2
19	-1.1	-1.1	-1	-0.7	-0.6	-0.5	-0.7	-1.8	b

<sup>a</sup>  $\Delta = 100 \cdot (\tau_{zy}^{teorico} - \tau_{zy}^{FEM}) / \tau_{zy}^{FEM}$

<sup>b</sup> Zone governate dalla tensione nominale

Come si può vedere, la corrispondenza è molto soddisfacente.

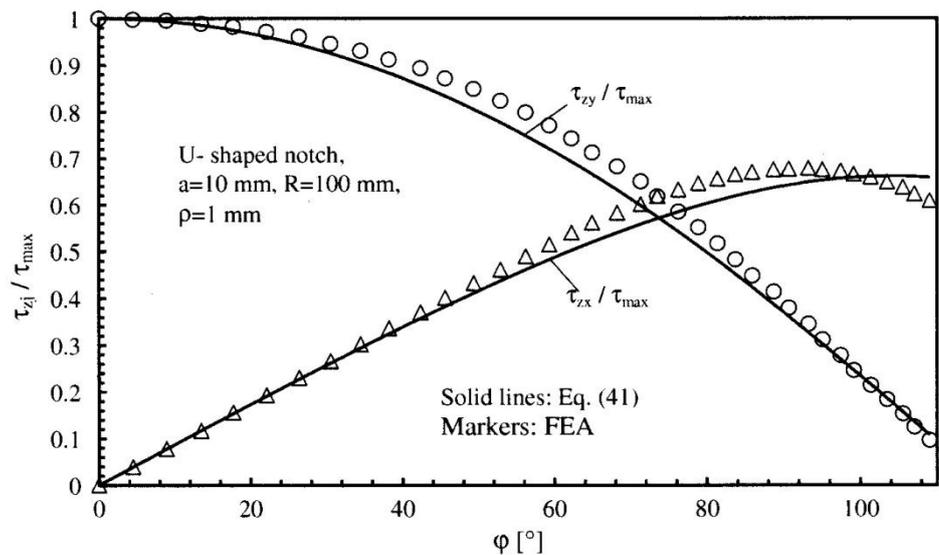
Possono essere aggiunti i seguenti commenti:

- Nel caso di intagli a U, le equazioni proposte lavorano bene per rapporti  $a/\rho$  fino a 4. Per rapporti minori di 4, cioè quando l'acutezza dell'intaglio è molto bassa, l'equazione per intagli parabolici risulta migliore. In Fig. 1.7, è presentato inoltre un confronto con la soluzione data da Creager e Paris per modo III con  $\rho = 0,0125 \text{ mm}$ , così da enfatizzare l'elevato grado di accuratezza fornito dalla nuova procedura analitica qui sviluppata.
- Per intagli con angoli di apertura maggiori di  $90^\circ$ , le nuove equazioni proposte funzionano bene per rapporti  $a/\rho$  che vanno da 2 a 100.

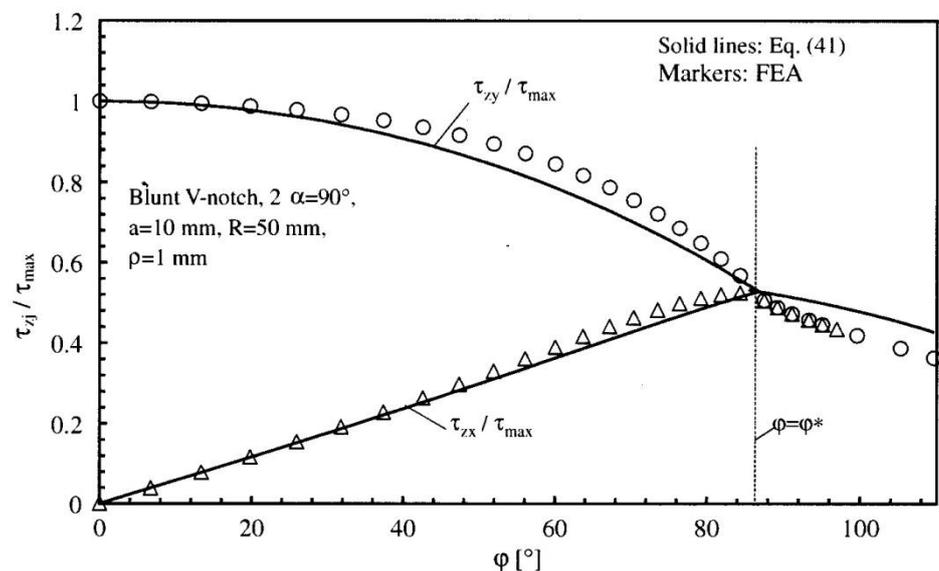
### 1.2.2. Componenti di tensione lungo il bordo dell'intaglio

Le Fig. 1.10, 1.11 e 1.12 mostrano un confronto fra la previsione teorica e i risultati agli EF per componenti di sollecitazione di taglio valutate sul bordo dell'intaglio. È evidente che, per tutti i casi, l'accordo è soddisfacente fino ad angoli circa uguali a  $110^\circ$ .

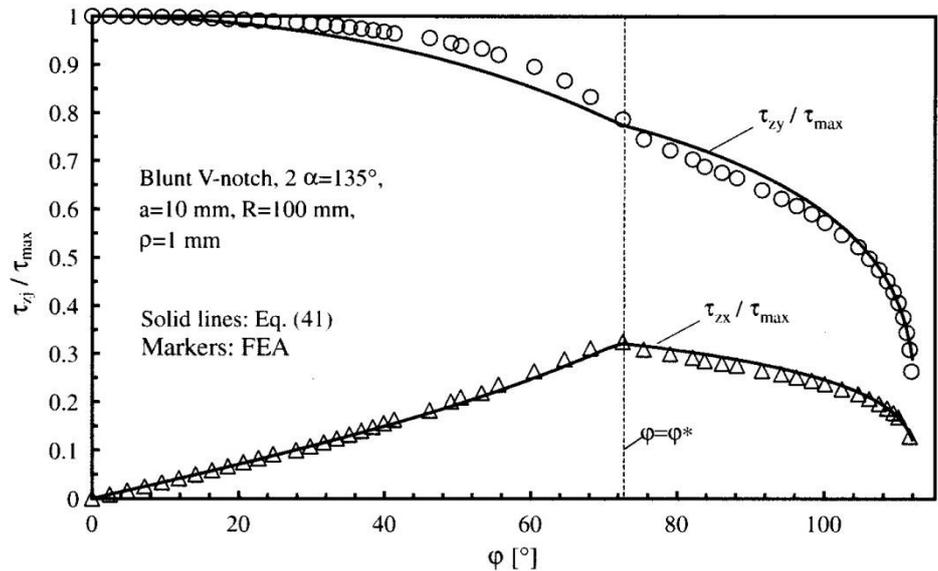
**Fig. 1.10** Diagrammi delle componenti di tensione  $\tau_{zy}$  e  $\tau_{zx}$  lungo il bordo di intagli a U e confrontati con l'Eq. (1.41). Le componenti di tensione sono normalizzate rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 1.11** Diagrammi delle componenti di tensione  $\tau_{zy}$  e  $\tau_{zx}$  lungo il bordo di intagli a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=90^\circ$  e confrontati con l'Eq. (1.41). Le componenti di tensione sono normalizzate rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 1.12** Diagrammi delle componenti di tensione  $\tau_{zy}$  e  $\tau_{zx}$  lungo il bordo di intagli a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=90^\circ$  e confrontati con l'Eq. (1.41). Le componenti di tensione sono normalizzate rispetto al massimo valore di tensione di taglio

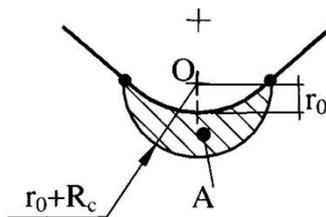


### 1.2.3. Valore medio della tensione di taglio su un volume di controllo

Per meglio investigare l'accuratezza delle equazioni proposte al di fuori della linea bisettrice nell'intorno dell'apice dell'intaglio è possibile confrontare il valore del modulo della tensione di taglio mediato in un volume di controllo in maniera simile a quanto proposto da Lazzarin e Berto (2005) e mostrato in Fig. 1.13:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{A} \int_A \tau(r, \phi) dA \quad (1.42)$$

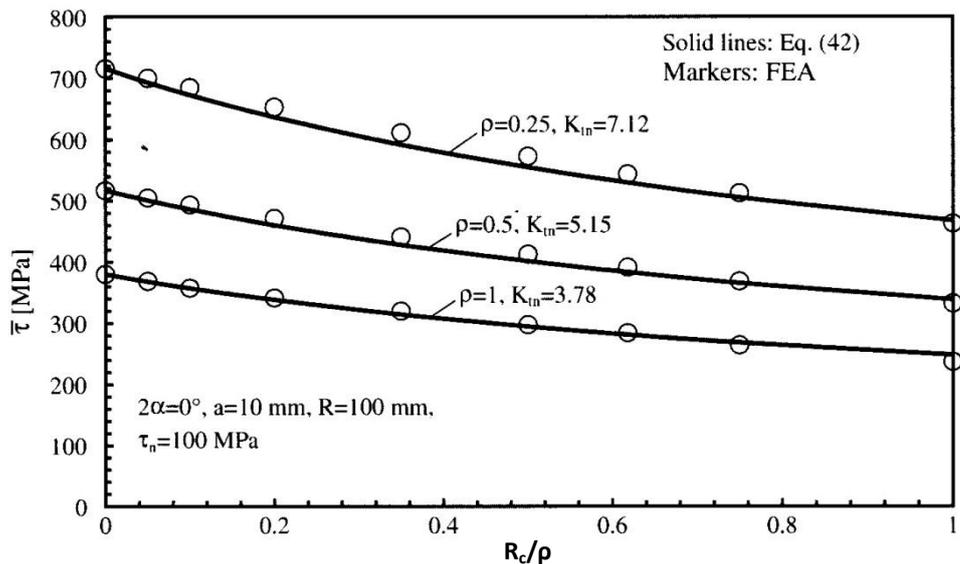
**Fig. 1.13** Volume di controllo (area) per la valutazione della tensione media per un intaglio raccordato



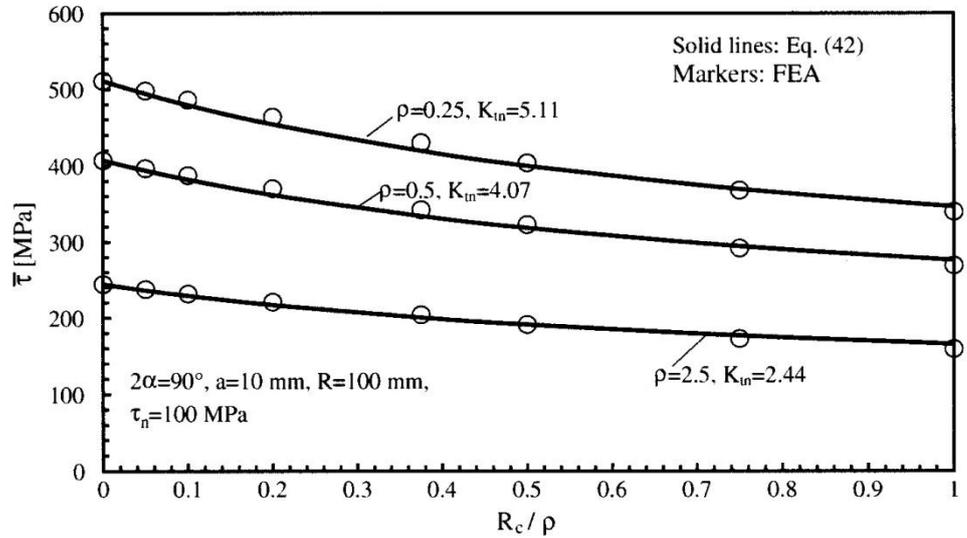
L'Eq. 1.42 è stata valutata grazie a un programma di calcolo commerciale e confrontata con i risultati ottenuti dal FEA.

Come mostrato dalle Fig. 1.14, 1.15 e 1.16 le previsioni teoriche basate sulle Eq. 1.42 e 1.39 mostrano un buon accordo con i risultati numerici.

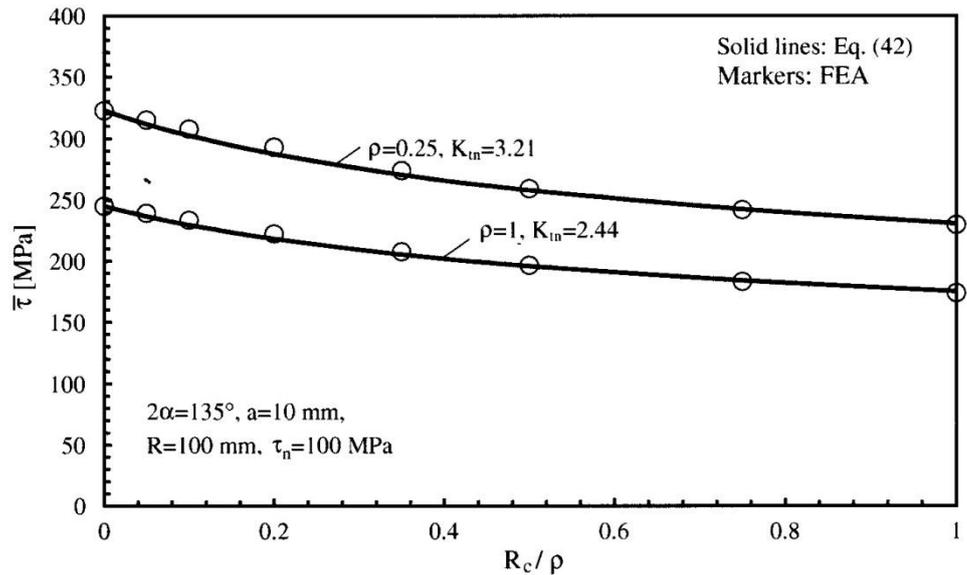
**Fig. 1.14** Diagramma della tensione di taglio media  $\tau$  di intagli a U e confrontata con l'Eq. (1.42).



**Fig. 1.15** Diagramma della tensione di taglio media  $\tau$  di intagli a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=90^\circ$  e confrontata con l'Eq. (1.42).



**Fig. 1.16** Diagramma della tensione di taglio media  $\tau$  di intagli a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=135^\circ$  e confrontata con l'Eq. (1.42).



#### 1.2.4. Valutazione delle tensioni sull'intera sezione

L'Eq. 1.37 è valida solamente per le zone maggiormente sollecitate, nell'intorno dell'apice dell'intaglio e non nelle zone nominali, dove l'influenza dell'intaglio può essere trascurata. Comunque, il campo di applicazione della soluzione può essere largamente estesa sostituendo la variabile  $r$  con la seguente funzione:

$$f(r) = r_0 + \frac{\text{Arctan}[(r - r_0) \cdot m]}{m} \quad (1.43)$$

Questa legge è stata già proposta per componenti intagliati caricati in modo uni-assiale di dimensioni finite (Filippi e Lazzarin 2004).

Inserendo  $f(r)$  nell'Eq. 1.37 si ottiene:

$$\tau_{zy} = \frac{\tau_{max}}{\omega_3} \left( 1 + \frac{\text{Arctan}[(r - r_0) \cdot m]}{m \cdot r_0} \right)^{\lambda_3 - 1} \left( 1 + \left( \frac{r}{r_3} \right)^{\mu_3 - \lambda_3} \right) \left( 1 - \frac{r - r_0}{R} \right) \quad (1.44)$$

Il valore di  $m$  da utilizzare nell'Eq. 1.44, può essere facilmente determinato ponendo una semplice equazione di equilibrio sulla sezione netta:

$$\int_0^R \left( 1 + \frac{\text{Arctan}[(R - t) \cdot m]}{m \cdot r_0} \right)^{\lambda_3 - 1} \left( 1 + \left( \frac{R + r_0 - t}{r_3} \right)^{\mu_3 - \lambda_3} \right) t^3 dt = \frac{\omega_3 \cdot R^4}{4K_{tn}} \quad (1.45)$$

Dove è stato effettuato il cambiamento di variabile  $t = R - (r - r_0)$ . Qui  $K_{tn}$  è il fattore teorico di concentrazione di tensione riferito alla sezione netta della barra circolare.

Vale la pena notare che il parametro  $m$  non è illimitato, ma delimitato tra due condizioni limite:  
 1. La prima è data dal caso di intaglio molto profondo, per la quale l'Eq. 1.37 è sufficiente da sola a descrivere la distribuzione di tensione sull'intera sezione. Questo caso è associato ad un valore limite di  $m$  tendente a zero, poiché  $\lim_{m \rightarrow 0} f(r) = r$  (Filippi e Lazzarin 2004).

2. Il valore superiore del limite è dato dalla condizione fisica di un intaglio infinitamente piccolo rispetto alla dimensione del componente. Il valore di  $m$  corrispondente a questa condizione può essere approssimativamente trovato imponendo che ad una certa distanza dall'apice dell'intaglio, la tensione tende verso il valore nominale (a causa della redistribuzione delle tensioni molto bassa), e cioè:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\tau_{max}}{\omega_3} \left( 1 + \frac{\text{Arctan}[(r - r_0) \cdot m]}{m \cdot r_0} \right)^{\lambda_3 - 1} \left( 1 + \left( \frac{r}{r_3} \right)^{\mu_3 - \lambda_3} \right) \right\} = \tau_{nom} \quad (1.46)$$

L'Eq. 46 può essere risolta in  $m$ , ottenendo:

$$m = \frac{\pi}{2r_0} \frac{1}{\left( \frac{K_{tn}}{\omega_3} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_3}} - 1} \quad (1.47)$$

Per un dato intaglio, il valore di  $m$  soddisfa la seguente condizione:

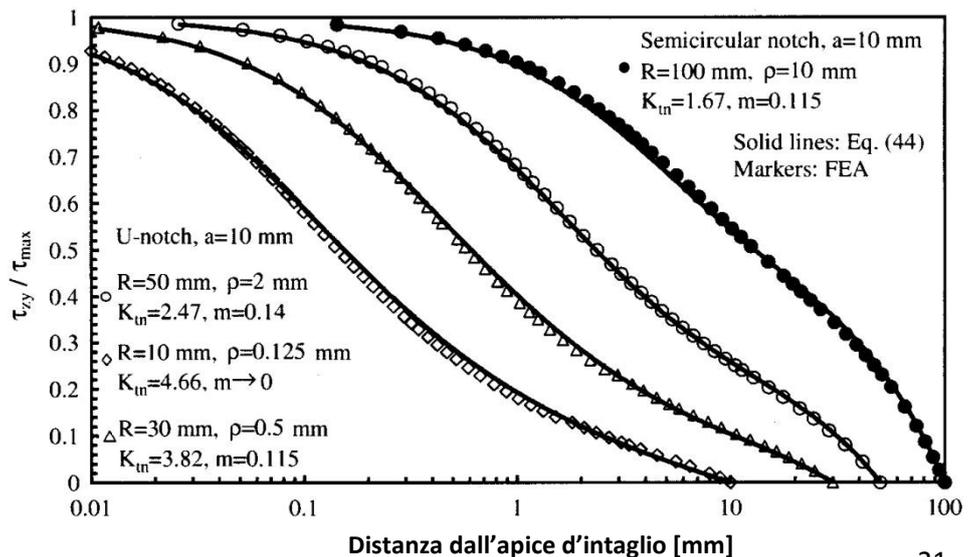
$$0 \leq m \leq \frac{\pi}{2r_0} \frac{1}{\left( \frac{K_{tn}}{\omega_3} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_3}} - 1} \quad (1.48)$$

Tanto più  $R$  aumenta, tanto più aumenta  $m$  fino al massimo valore e viceversa.

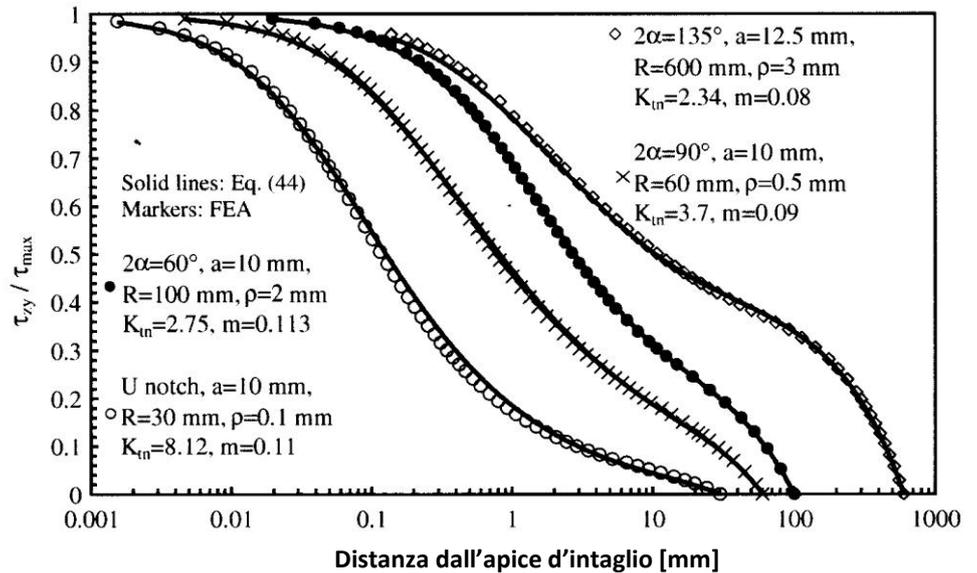
Le Fig. 1.17 e 1.18 mostrano un confronto tra l'Eq. 1.44 e alcuni risultati di analisi agli elementi finiti ottenuti con intagli a U e a V con differenti angoli di apertura, raggi di raccordo e dimensione della sezione. È evidente che, la mancata accuratezza della soluzione distante dall'apice scompare grazie all'Eq. 1.44.

Infine, è importante notare che l'intaglio semicircolare nella Fig. 1.17 è stato confrontato con la procedura analitica valida per un intaglio a U, mostrando un'ottima corrispondenza.

**Fig. 1.17** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli a U e confrontati con l'Eq. (1.44). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 1.18** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{xy}$  lungo la bisettrice di intagli a V raccordati con differenti angoli di apertura e confrontati con l'Eq. (1.37). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



### 1.3. Conclusioni

In questa prima parte sono state sviluppate delle espressioni in forma chiusa per i campi di tensione indotti da intagli, a U e a V con raggio di raccordo significativo, circolarmente in alberi assialsimmetrici sottoposti a torsione con un valore finito del raggio di raccordo dell'intaglio.

Il problema al contorno è stato formulato utilizzando i potenziali complessi e il contorno reale della forma dell'intaglio.

È stata utilizzata una funzione esponenziale a due termini per descrivere i campi di tensione locale e sono state applicate le necessarie condizioni al contorno di bordo libero sui punti prescritti lungo il profilo dell'intaglio.

Poi, l'effetto dimensione finita è stato contabilizzato, approfittando di una condizione di equilibrio globale, per rendere le espressioni delle sollecitazioni di taglio precise, non solo in prossimità della radice dell'intaglio, ma anche sull'intera sezione netta dell'albero.

Considerando diverse geometrie globali e locali le equazioni ottenute sono state confrontate con un gran numero di risultati a elementi finiti, mostrando una buona corrispondenza.

Dati questi buoni risultati si può dunque passare alla trattazione dei tubi intagliati i quali, come poi si vedrà, adottano delle relazioni molto simili a quelle presentate per questa prima sezione.

## 2. Intagli a U e a V in componenti tubolari

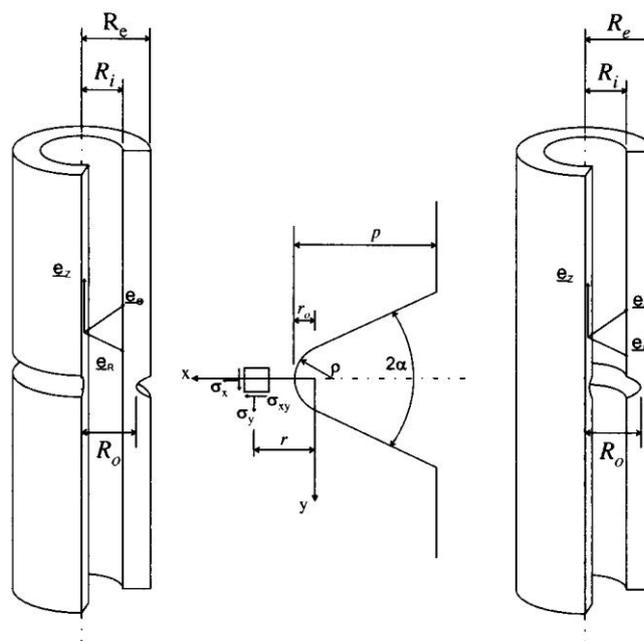
Per presentare il caso dei componenti tubolari, si devono considerare due sistemi di coordinate: il primo è un sistema globale di coordinate  $\{\underline{e}_R, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z\}$  con l'asse  $z$  lungo l'asse del tubo, il secondo è un sistema locale di coordinate  $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$  nell'intorno dell'intaglio. Il tubo è definito da un raggio interno e un raggio esterno,  $R_i$  e  $R_e$ . L'intaglio ha il proprio apice ad una distanza  $R_0$  dall'asse del tubo e la sua profondità  $p$  è uguale a:

$$p = \begin{cases} R_e - R_0 & \text{per intagli esterni} \\ R_0 - R_i & \text{per intagli interni} \end{cases} \quad (2.1)$$

L'intaglio ha una geometria a V raccordato con un angolo di apertura  $2\alpha$  e un raggio di raccordo  $\rho$ .

Schematicamente quindi un componente tubolare intagliato può essere rappresentato come:

**Fig. 2.1** Geometria di un componente tubolare con un intaglio interno (destra) e esterno (sinistra), geometria dell'intaglio (al centro).



Si nota quindi come la nomenclatura, a parte le grandezze caratteristiche del tubo, sia la stessa di quella utilizzata nel semplice caso di un componente pieno.

Lo studio delle distribuzioni di tensione presenti all'interno del tubo intagliato ha un'importanza rilevante nei casi in cui ho a che fare, con opportune assunzioni e semplificazioni, con dei tubi filettati. Le valli presenti tra due creste infatti, possono essere considerate come appunto un intaglio, a V ad esempio nel caso di una filettatura metrica.

Il calcolo delle tensioni presenti in una filettatura soggetta a trazione e flessione è già stato effettuato e presentato in precedenti pubblicazioni, mentre non è ancora stato molto approfondito il caso della torsione. Resta quindi da analizzare e risolvere quest'ultimo caso e lo si farà utilizzando delle relazioni già ricavate dal prof. Zappalorto.

Esse sono presentate a seconda che l'intaglio sia esterno o interno.

## 2.1. Analisi teorica e numerica di tubi con intaglio esterno

In modo schematico viene quindi inizialmente presentato il caso di un intaglio esterno. Le notazioni, a parte la definizione di raggio interno, rimangono del tutto identiche a quelle del semplice componente pieno.

$$R = R_0 - R_i$$

$$J = R_{\text{interno}}$$

H = semi-altezza del tubo

a = profondità d'intaglio

$\rho$  = raggio di raccordo d'intaglio

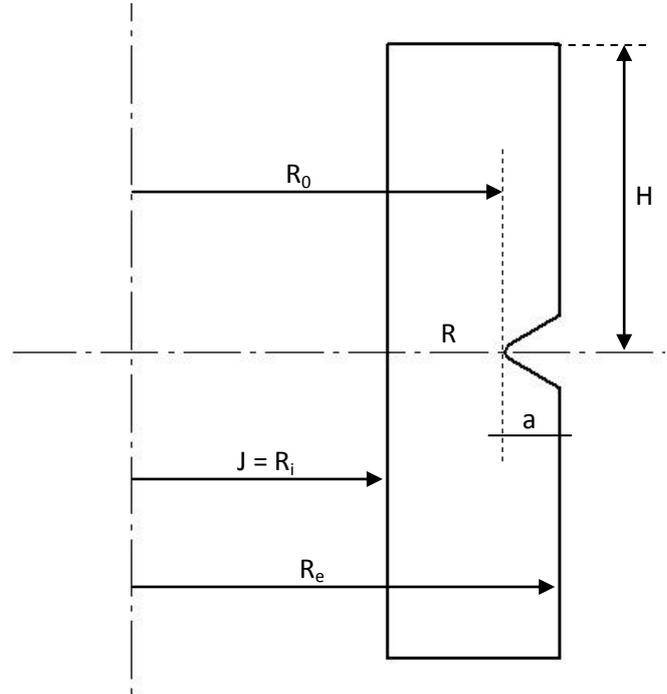


Fig. 2.2 Rappresentazione schematica di un tubo con un intaglio esterno

Lungo la bisettrice si ha che:

$$\tau_{zy} = \frac{\tau_{tip}}{\omega_3} \left( 1 + \frac{\text{atan}[(r - r_0)m]}{mr_0} \right)^{\lambda_3} \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_3} \right)^{\mu_3 - \lambda_3} \right] \left( 1 - \frac{r - r_0}{R_0} \right) \quad (2.2)$$

Dove:

$$r_3 = \chi_3 \cdot \rho \quad (2.3)$$

$$r_0 = \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi - 2\alpha} \quad (2.4)$$

$\tau_{tip}$  = tensione all'apice d'intaglio

Tutti gli altri valori sono riportati in apposite tabelle e dipendono dalla geometria. Per risolvere però l'espressione precedente si deve calcolare il parametro  $m$ , il quale dipende dalla geometria, e per farlo si applica una condizione di equilibrio globale del momento torcente sulla sezione netta:

$$\frac{\tau_{tip}}{\omega_3} \int_{R_i}^{R_0} \left\{ 1 + \frac{\text{atan}[(R_0 - t)m]}{m \cdot r_0} \right\}^{\lambda_3 - 1} \cdot \left( 1 + \frac{R_0 + r_0 - t}{r_3} \right)^{\mu_3 - \lambda_3} \cdot \frac{t^3}{R_0} dt = \int_{R_i}^{R_0} \tau_{nom} \cdot \frac{t^3}{R_0} dt \quad (2.5)$$

Dove:

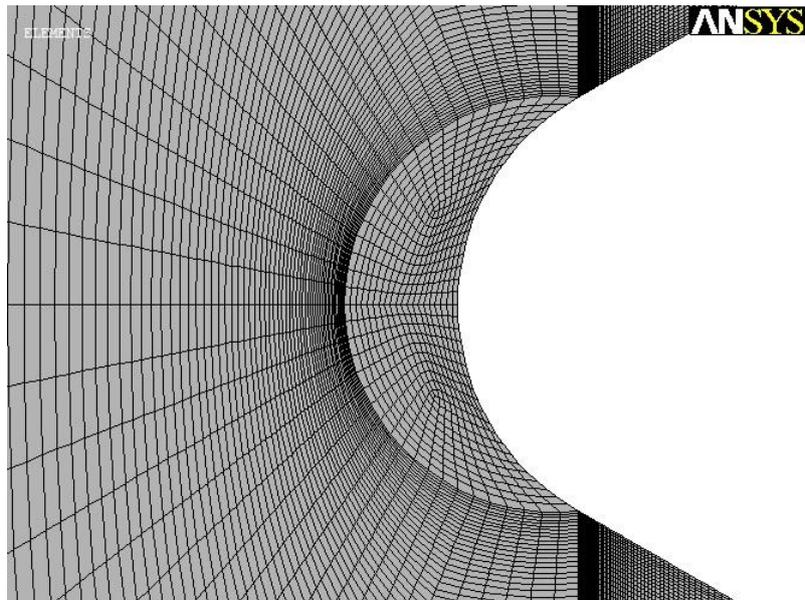
$$\tau_{nom} = \frac{2 \cdot M_t \cdot R_0}{\pi(R_0^4 - R_i^4)} = 100 \text{ MPa} \quad (2.6)$$

L'equazione 2.2 definisce dunque la curva teorica dei risultati. Essa viene quindi confrontata con i risultati numerici derivanti da Ansys.

In ambiente Ansys, per effettuare l'analisi, è stato utilizzato l'elemento PLANE 83, il quale è un elemento armonico che mi consente di studiare parti assialsimmetriche disegnando semplicemente una semi-sezione. Per il disegno della semi-sezione e successivamente per la definizione della mesh è stato utilizzato un listato di istruzioni per ridurre i tempi di compilazione e per evitare di definire ogni volta i parametri caratteristici della geometria in esame.

Caricato dunque il listato, Ansys esegue automaticamente il disegno della geometria, la sua meshatura e infine risolve anche il caso. Non resta quindi che salvare il listato delle soluzioni costituite dalla distanza  $s$  dall'intaglio e dalla relativa tensione di taglio in MPa.

Un esempio di meshatura di un intaglio esterno può essere il seguente:



**Fig. 2.3** Meshatura nell'intorno dell'apice di un intaglio esterno ( $2\alpha=60^\circ$ ,  $\rho=1$  mm)

Si vede dunque come nella zona vicina all'apice sia stata impostata una mesh molto fitta, così da poter apprezzare al meglio le tensioni immediatamente vicine all'apice dell'intaglio. In particolare, per questo tipo di analisi i nodi in esame sono 313.

Ricavando dunque i listati delle soluzioni per ciascuna tipologia di intaglio esterno si può quindi procedere con il confronto, fra risultati teorici e risultati numerici. In Excel vengono quindi caricati i listati e svolte le equazioni teoriche e successivamente graficati i risultati.

In particolare sono state effettuate due tipologie di analisi per gli intagli esterni: una effettuata per ogni angolo di apertura notevole al variare del raggio di raccordo  $\rho$ , mentre l'altra effettuata per ogni angolo di apertura notevole al variare di  $R_0$ .

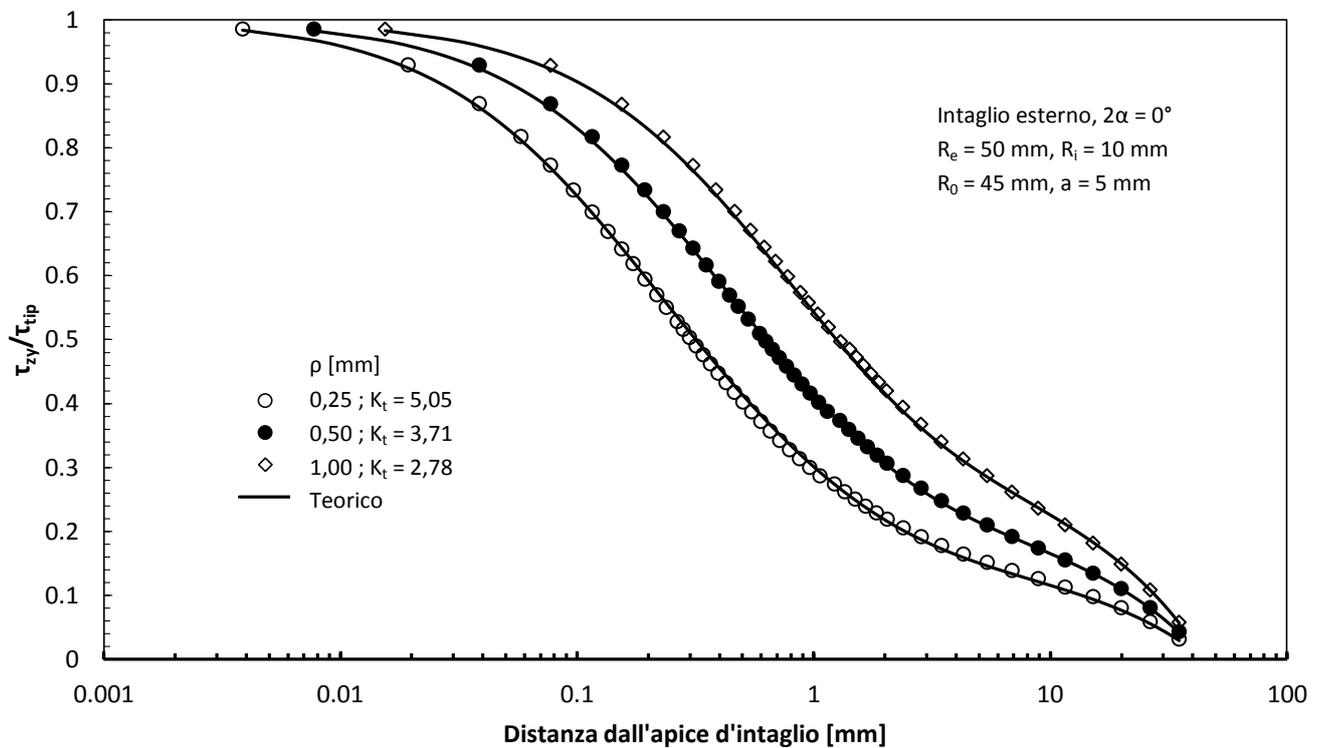
Si va quindi a esaminare la prima analisi.

La prima delle quattro analisi totali sui tubi intagliati è stata effettuata, come detto, per ogni angolo notevole e per uno stesso angolo si è andati a variare il valore del raggio di raccordo all'apice. I parametri delle varie geometrie analizzate sono riassunti nella seguente tabella:

**Tab. 2.1** Caratteristiche delle varie geometrie utilizzate per la prima analisi.

$R_e = 50 \text{ mm}$	$\rho \text{ [mm]}$	$2\alpha$
$R_0 = 45 \text{ mm}$	0,25	$0^\circ$
$R_i = 10 \text{ mm}$	0,5	$30^\circ$
$a = 5 \text{ mm}$	1	$60^\circ$
	1,5	$90^\circ$
	2	$120^\circ$
		$150^\circ$

I risultati ottenuti per questa prima analisi sono rappresentati nei seguenti diagrammi:



**Fig. 2.4** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli esterni a U e confrontati con l'Eq. (2.2). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio

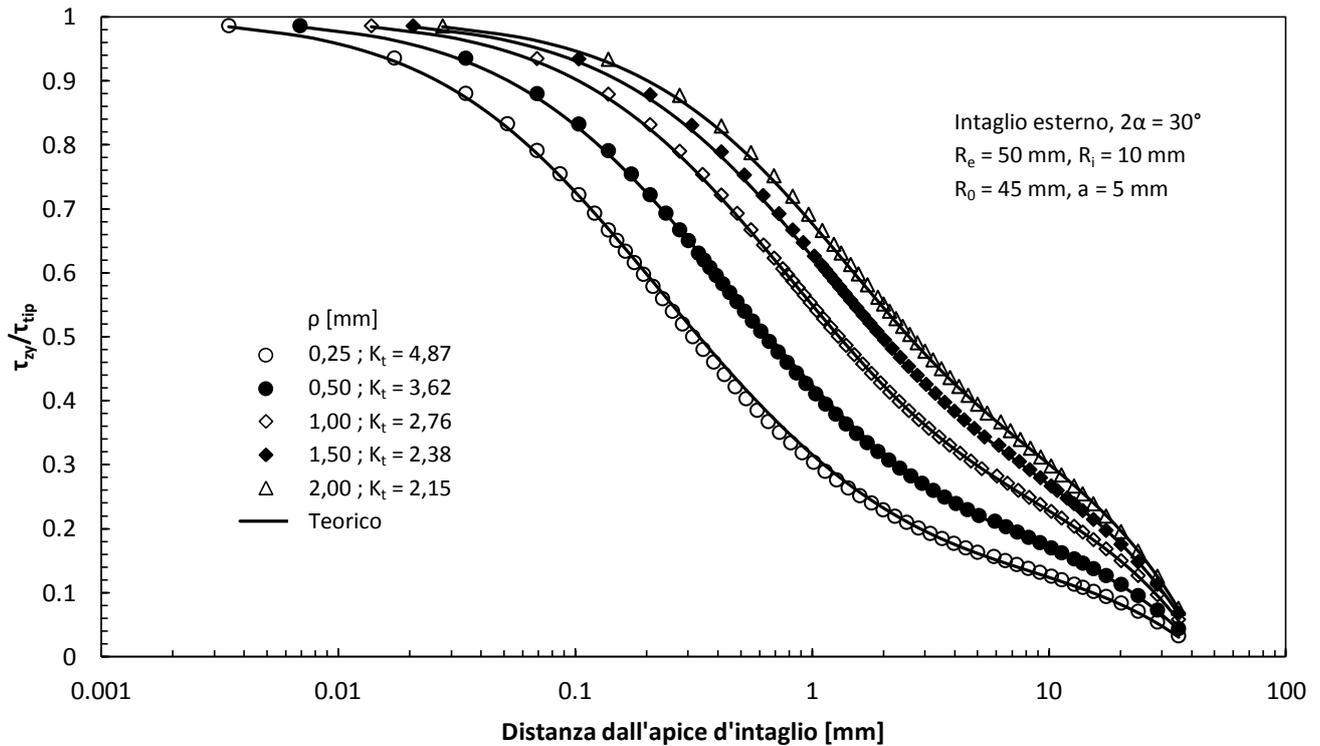


Fig. 2.5 Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli esterni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=30^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.2). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio

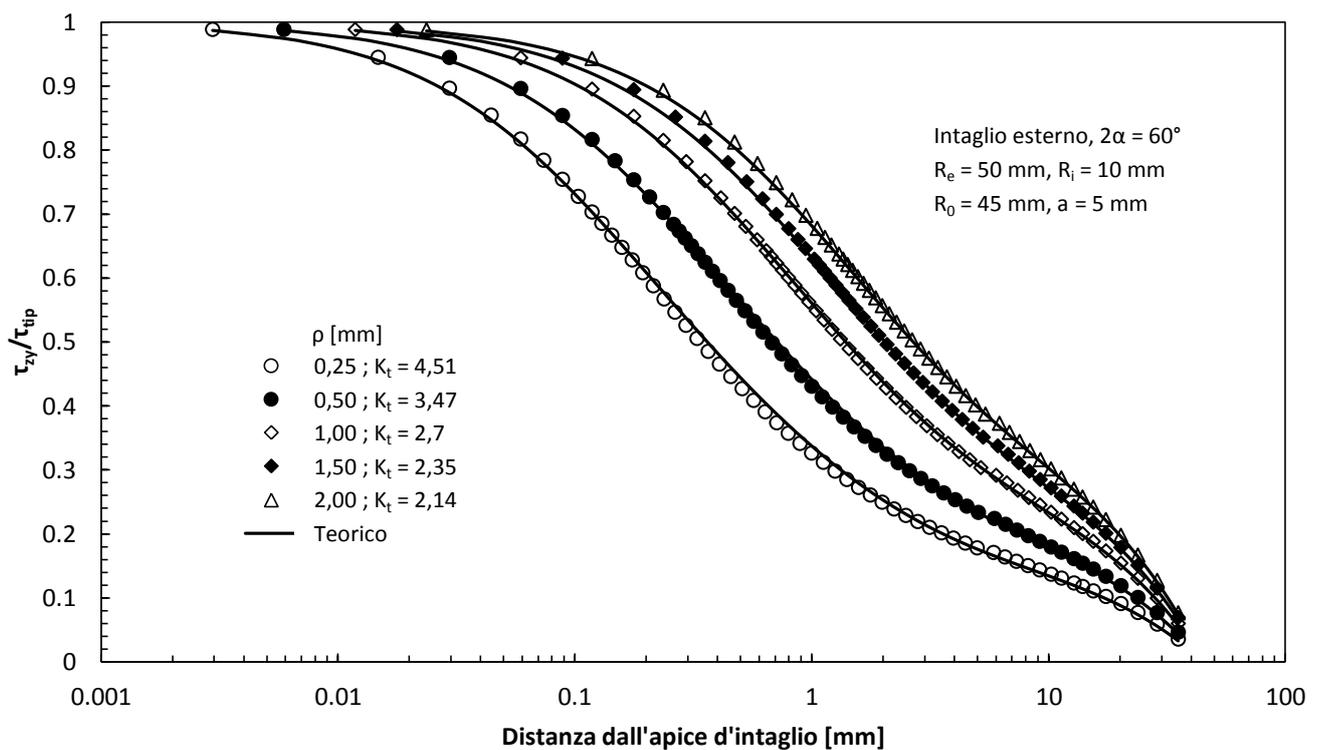
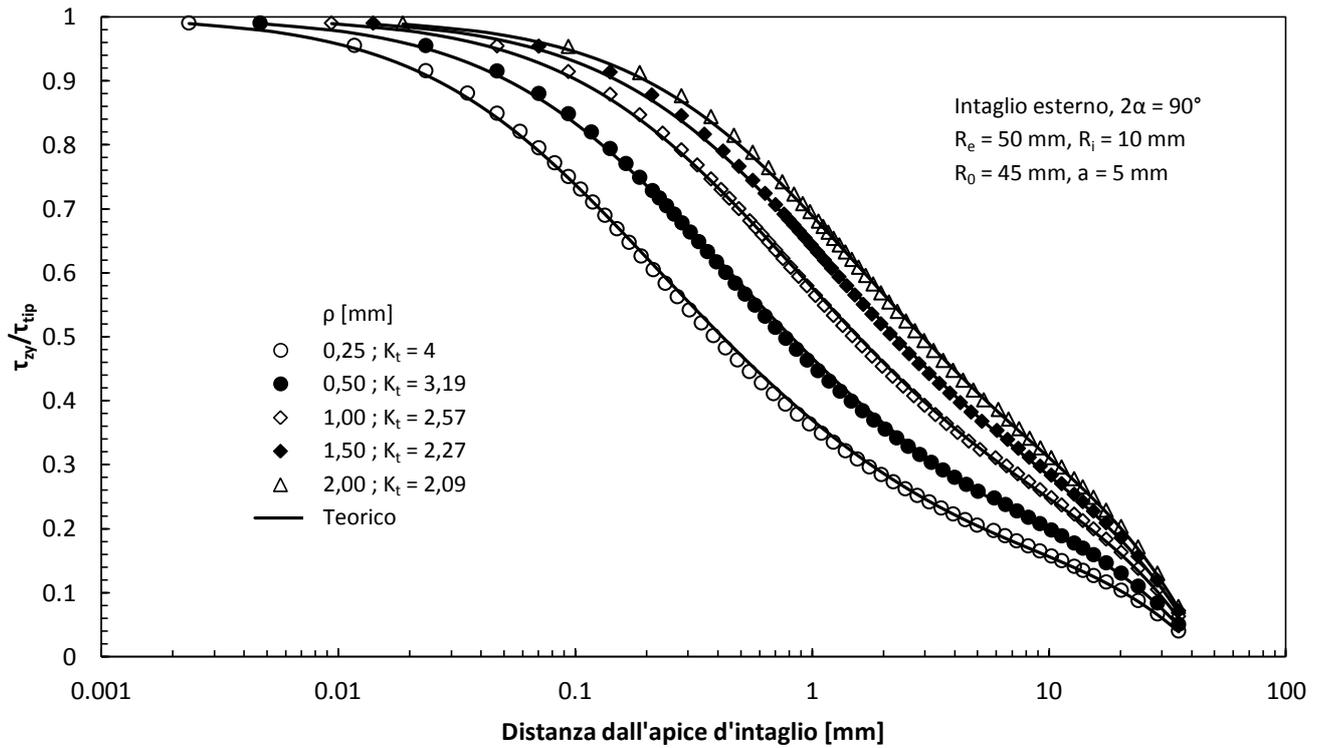
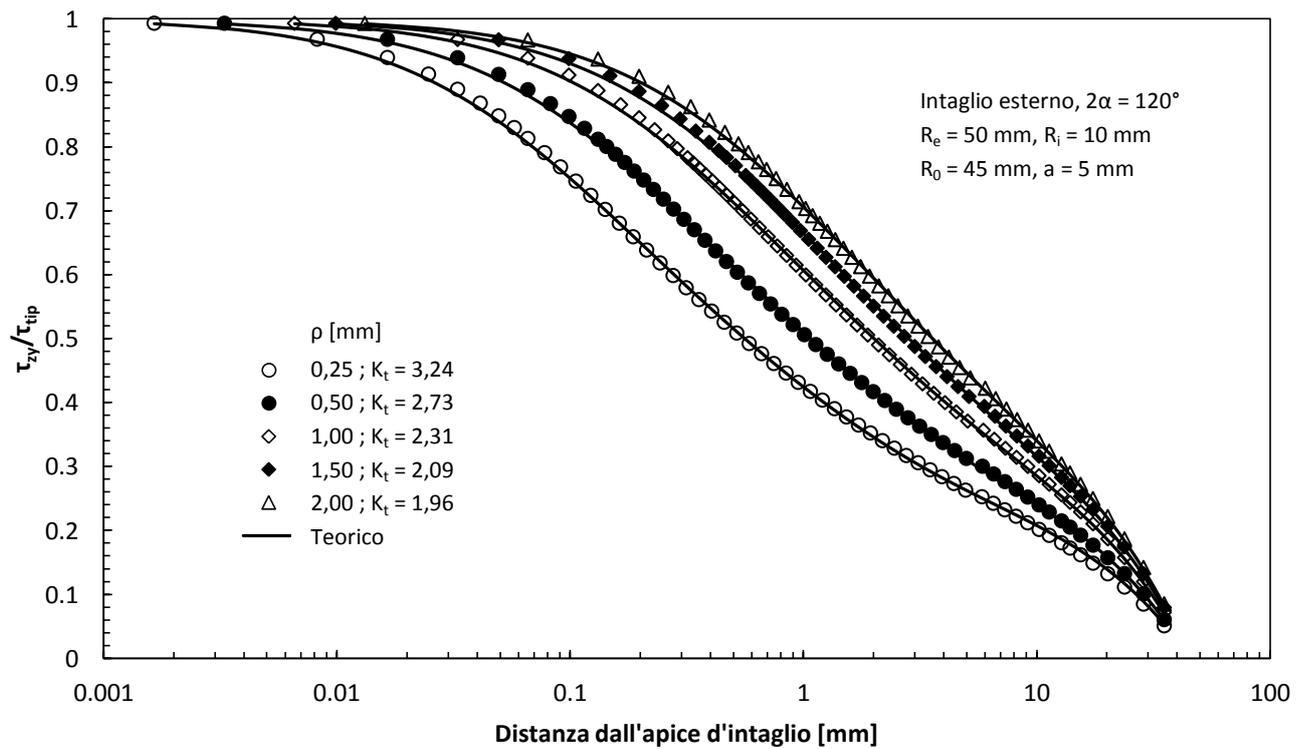


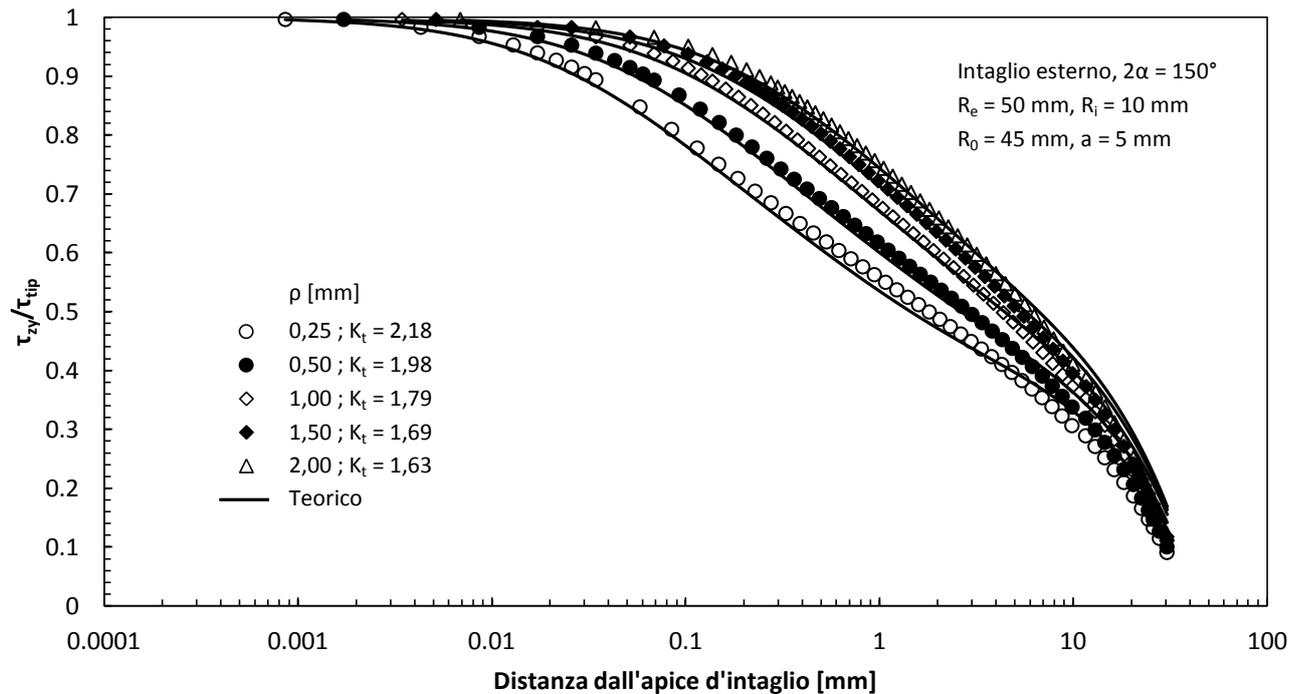
Fig. 2.6 Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli esterni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=60^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.2). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 2.7** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{xy}$  lungo la bisettrice di intagli esterni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=90^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.2). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 2.8** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{xy}$  lungo la bisettrice di intagli esterni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=120^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.2). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 2.9** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli esterni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=150^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.2). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio

Ultimata questa prima analisi si effettua la seconda sempre su intagli di tipo esterno, sempre per gli angoli di apertura considerati in precedenza ma questa volta si va a variare il parametro  $R_0$ .

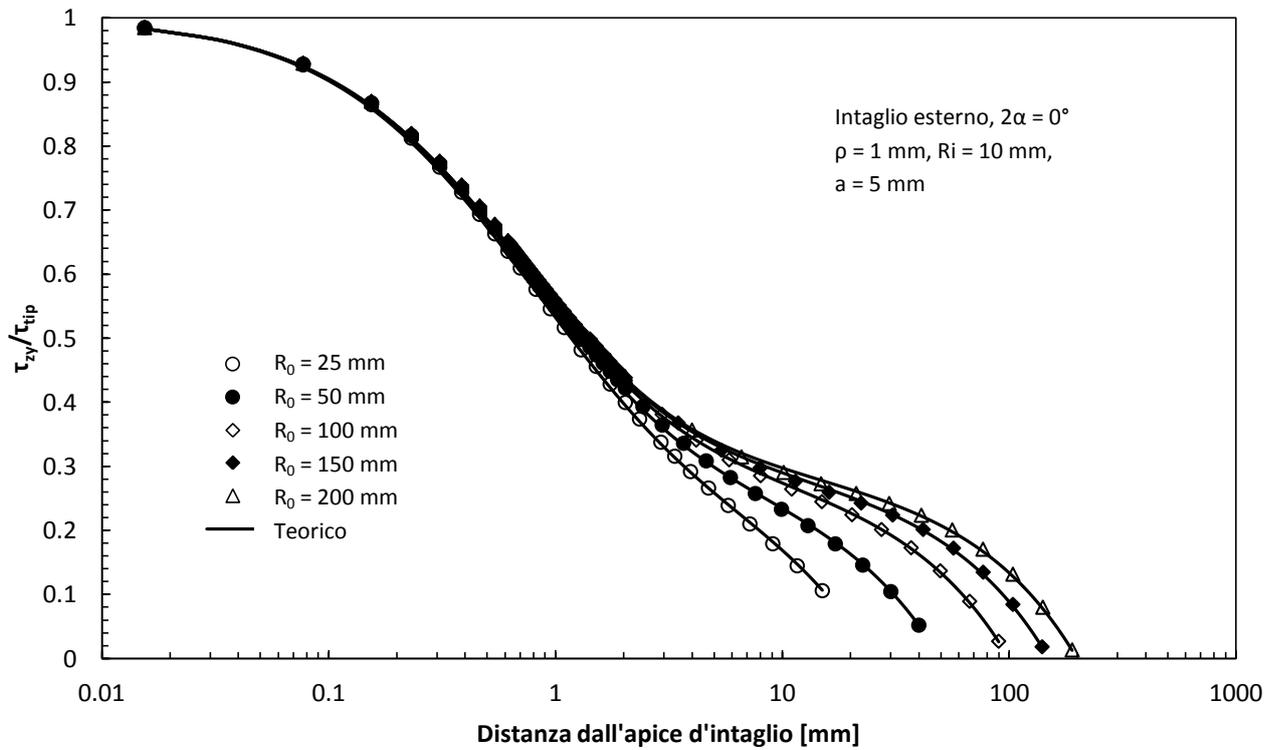
I dati della seguente analisi sono i seguenti:

**Tab. 2.2** Caratteristiche delle varie geometrie utilizzate per la seconda analisi.

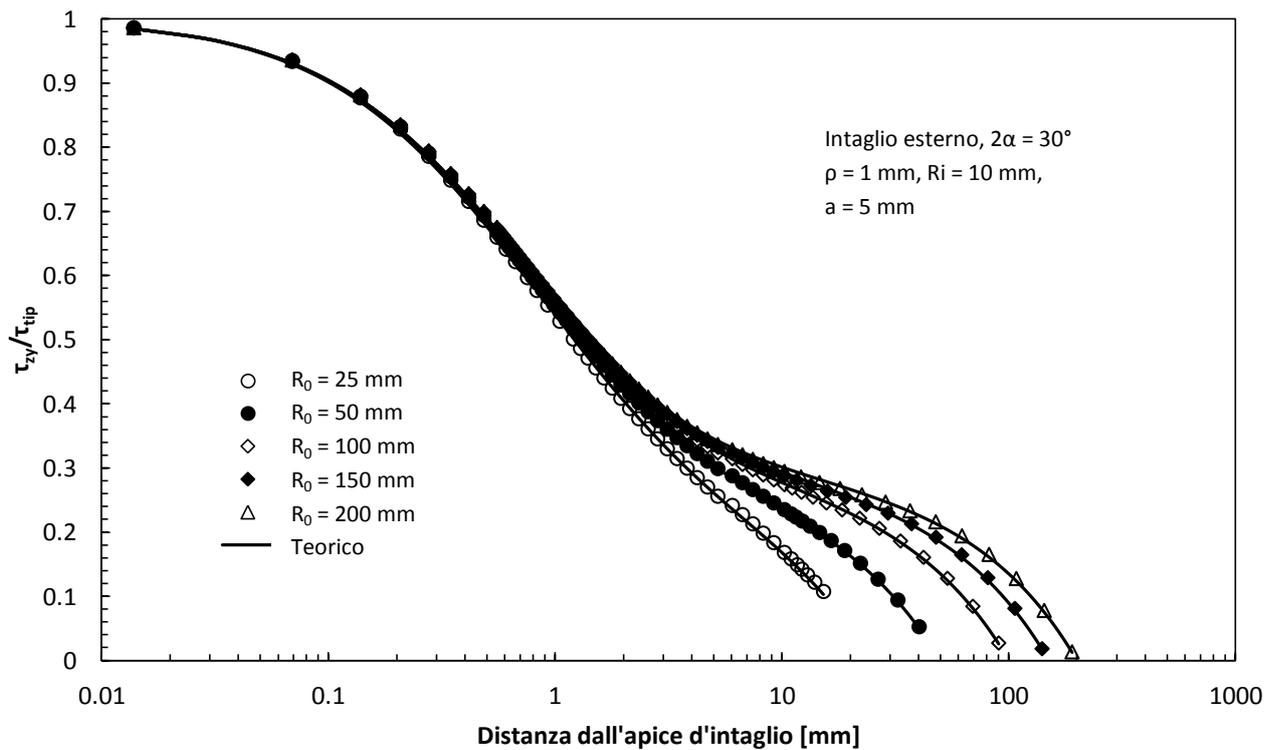
$R_i = 10 \text{ mm}$	$R_0$ [mm]	$2\alpha$
$a = 5 \text{ mm}$	25	$0^\circ$
$\rho = 1 \text{ mm}$	50	$30^\circ$
	100	$60^\circ$
	150	$90^\circ$
	200	$120^\circ$
		$150^\circ$

Per questo tipo di analisi, avendo la dimensione  $R_0$  variabile e a sua volta quindi anche  $R_e$ , bisogna avere la cortezza di verificare sempre l'ipotesi di Saint Venant, mantenere quindi la dimensione longitudinale prevalente su quella trasversale e dunque evitare di avere un tubo di geometria tozza. Seguendo questo concetto si sono assunti dei valori di  $H$  (semi-altezza del tubo) che variano da  $10R$  a  $1,5R$  a seconda che  $R_0$  valga rispettivamente 25 mm oppure 200 mm.

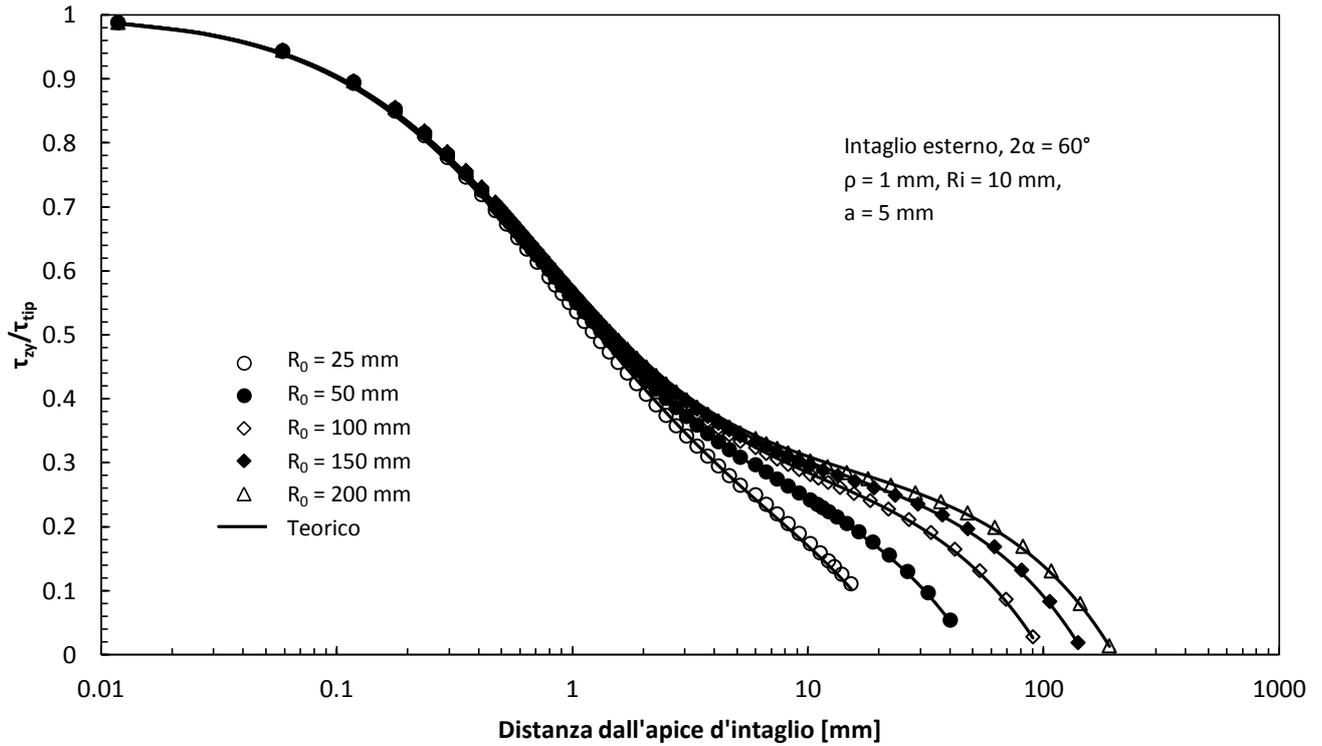
Si presentano quindi i risultati di quest'ultima analisi per i tubi aventi intaglio esterno:



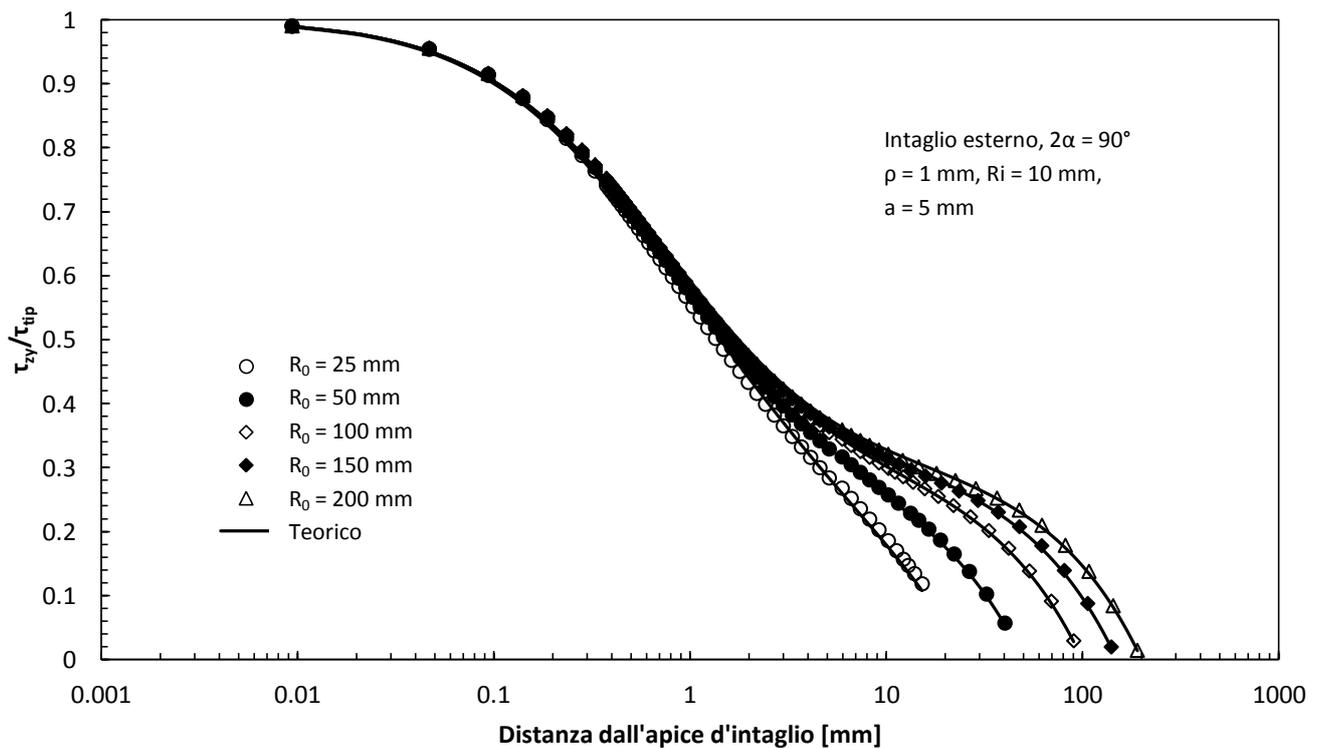
**Fig. 2.10** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{xy}$  lungo la bisettrice di intagli esterni a U e confrontati con l'Eq. (2.2). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



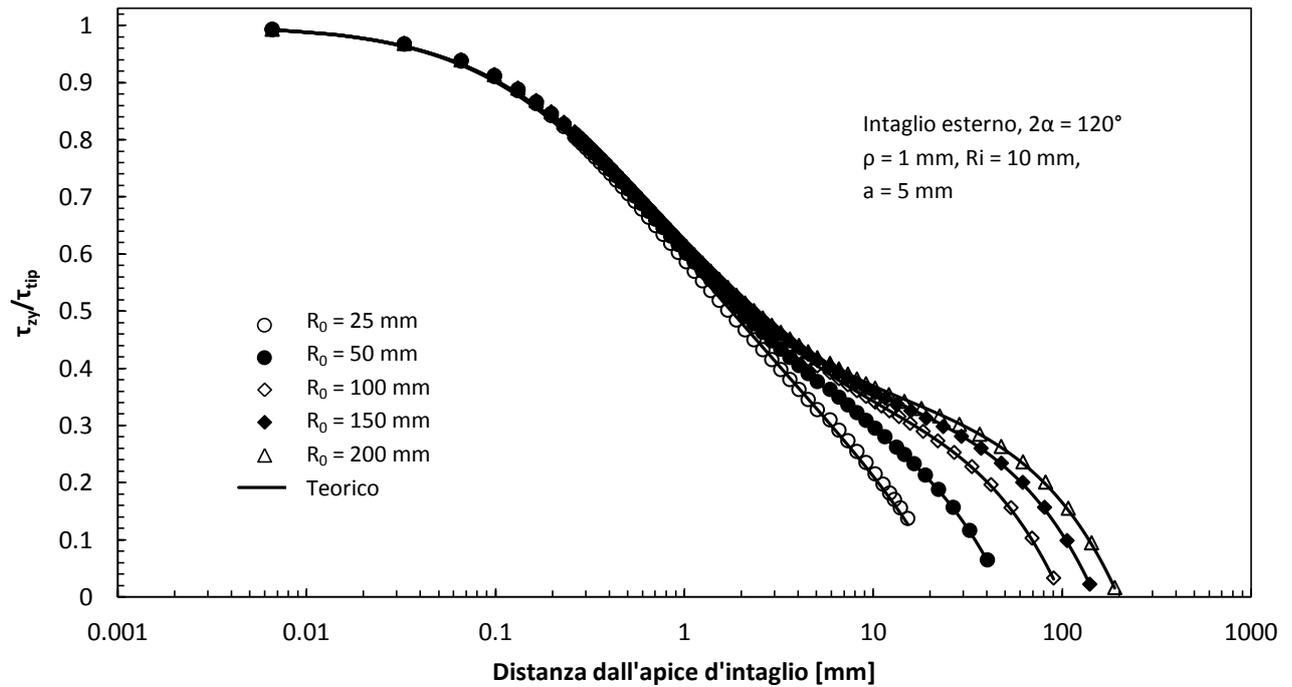
**Fig. 2.11** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{xy}$  lungo la bisettrice di intagli esterni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=30^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.2). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



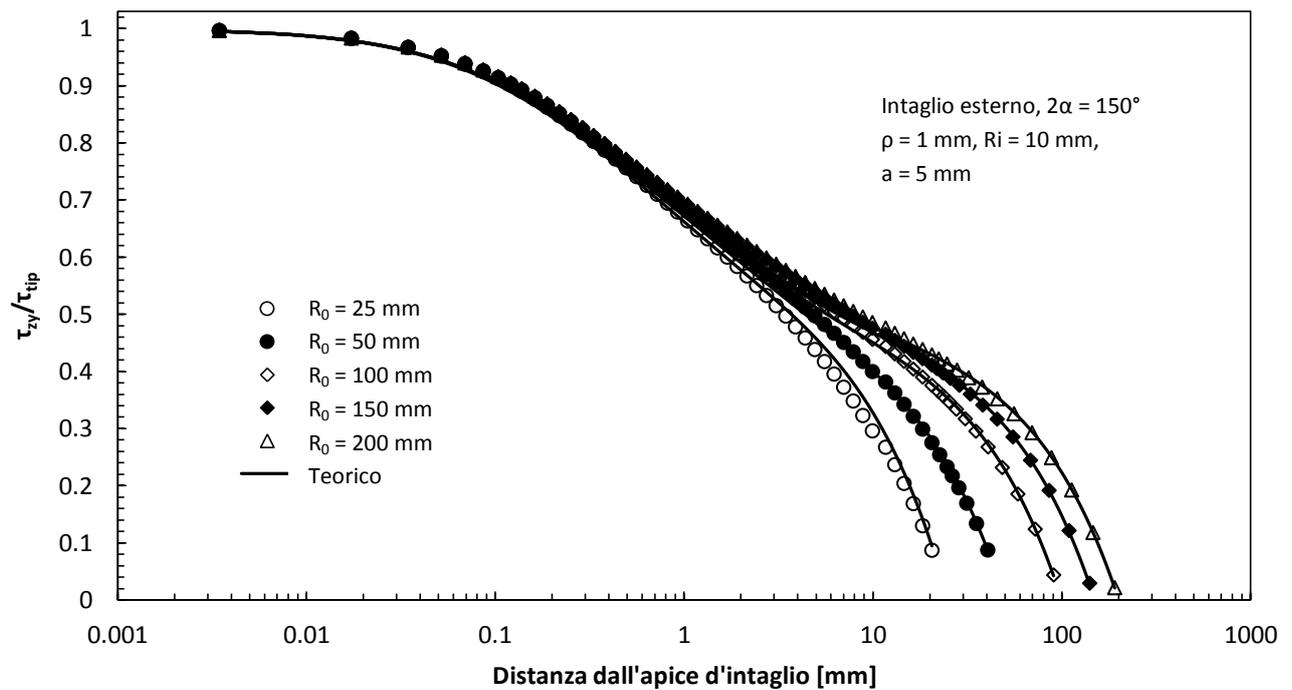
**Fig. 2.12** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli esterni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=60^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.2). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 2.13** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli esterni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=90^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.2). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 2.14** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli esterni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=120^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.2). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 2.15** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli esterni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=150^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.2). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio

## 2.2. Analisi teorica e numerica di tubi con intaglio interno

Come per il caso dell'intaglio esterno, lo stesso si può dire riguardo quello interno e quindi:

$$R = R_e - R_0$$

$$J = R_0$$

H = semi-altezza del tubo

a = profondità d'intaglio

$\rho$  = raggio di raccordo d'intaglio

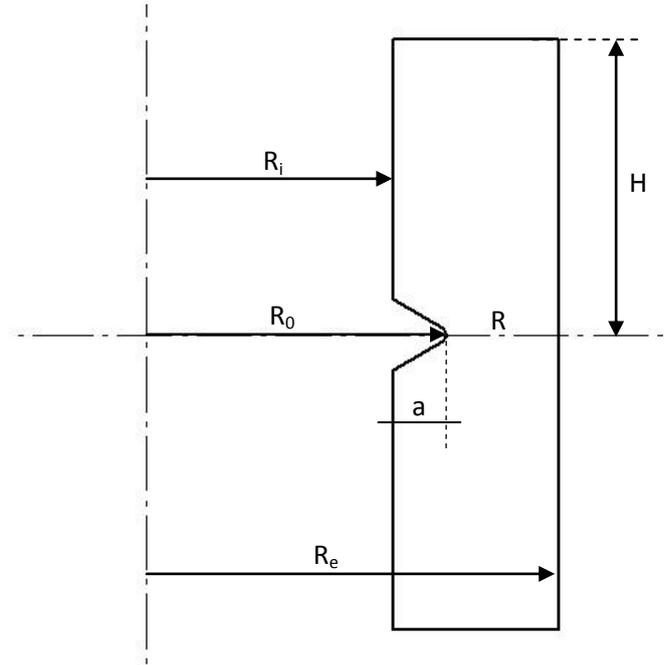


Fig. 2.16 Rappresentazione schematica di un tubo con intaglio interno

Lungo la bisettrice:

$$\tau_{zy} = \frac{\tau_{tip}}{\omega_3} \left( 1 + \frac{\text{atan}[(r - r_0)m]}{m \cdot r_0} \right)^{\lambda_3} \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_3} \right)^{\mu_3 - \lambda_3} \right] \left( 1 - \frac{r - r_0}{R_0} \right) \quad (2.7)$$

Dove:

$$r_3 = \chi_3 \cdot \rho \quad (2.8)$$

$$r_0 = \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi - 2\alpha} \quad (2.9)$$

$\tau_{tip}$  = tensione all'apice d'intaglio

Tutti gli altri valori sono tabellati e dipendono dalla geometria.

$$\frac{\tau_{tip}}{\omega_3} \int_{R_0}^{R_e} \left\{ 1 + \frac{\text{atan}[(t - R_0)m]}{m \cdot r_0} \right\}^{\lambda_3 - 1} \cdot \left( 1 + \frac{r_0 + t - R_0}{r_3} \right)^{\mu_3 - \lambda_3} \cdot \frac{t^3}{R_0} dt = \int_{R_0}^{R_e} \tau_{nom} \cdot \frac{t^3}{R_e} dt \quad (2.10)$$

Dove:

$$\tau_{nom} = \frac{2 \cdot M_t \cdot R_e}{\pi(R_e^4 - R_0^4)} = 100 \text{ MPa} \quad (2.11)$$

Come detto per gli intagli di tipo esterno, anche per gli intagli interni si è andato a confrontare la legge teorica, definita questa volta dall'equazione 2.7, e i risultati dati dagli elementi finiti.

Per effettuare l'analisi agli elementi finiti, è stato utilizzato ancora l'elemento PLANE 83. Inoltre, come nel caso di un intaglio esterno, per il disegno e per la meshatura si è eseguito un listato di istruzioni, sempre per diminuire i tempi di analisi. Un esempio di meshatura di un intaglio interno può essere il seguente:

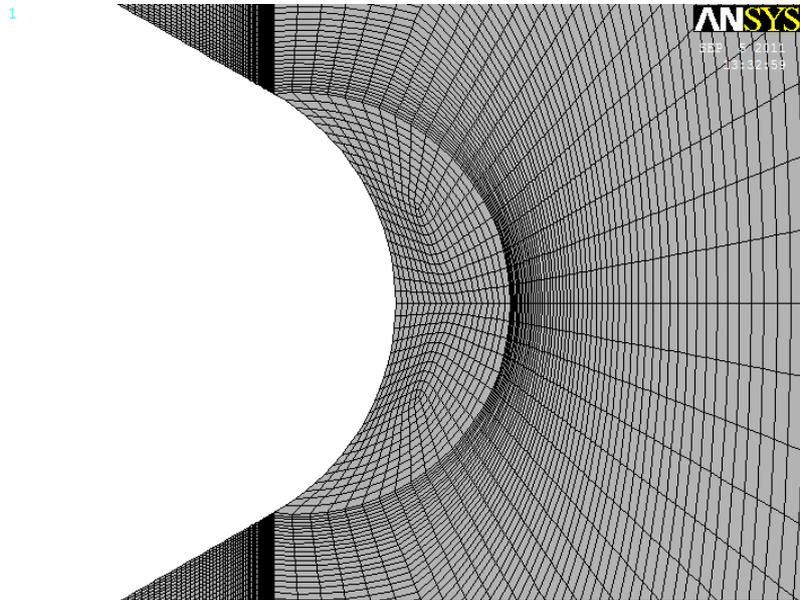


Fig. 2.17 Meshatura nell'intorno dell'apice di un intaglio interno ( $2\alpha=60^\circ$ ,  $\rho=1$  mm)

Nell'intorno dell'apice dell'intaglio si è sempre impostata una mesh molto fitta, per ottenere dei risultati abbastanza accurati. Anche in questo caso i nodi risultano essere 313.

Si ricavano poi i listati dei risultati e sempre in Excel si diagrammano assieme a quelli teorici per poter effettuare il confronto.

Anche per l'intaglio di tipo interno sono state effettuate due tipologie di analisi: una sempre effettuata per ogni angolo di apertura notevole al variare del raggio di raccordo  $\rho$ , mentre l'altra effettuata per ogni angolo di apertura notevole al variare di  $R_e$ .

La terza delle quattro analisi totali effettuate per tubi intagliati è stata effettuata, come detto, per ogni angolo notevole e per uno stesso angolo si è andati a variare il valore del raggio di raccordo all'apice. I parametri delle varie geometrie analizzate sono riassunti nella seguente tabella:

Tab. 2.3 Caratteristiche delle varie geometrie utilizzate per la terza analisi.

$R_i = 10$ mm	$\rho$ [mm]	$2\alpha$
$R_0 = 15$ mm	0,25	$0^\circ$
$R_e = 40$ mm	0,5	$30^\circ$
$a = 5$ mm	1	$60^\circ$
	1,5	$90^\circ$
	2	$120^\circ$
		$150^\circ$

I risultati ottenuti per questa prima analisi sono rappresentati nei seguenti diagrammi:

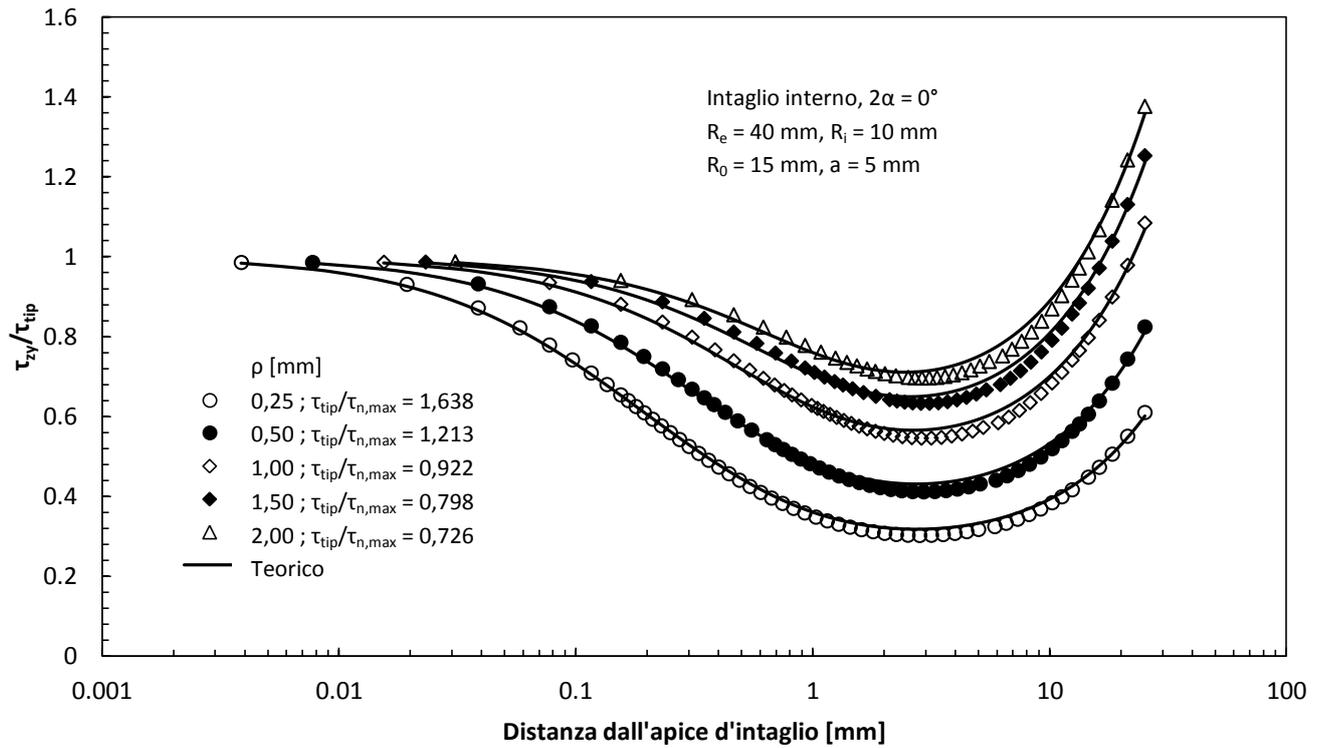


Fig. 2.18 Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{z\gamma}$  lungo la bisettrice di intagli interni a U e confrontati con l'Eq. (2.7). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio

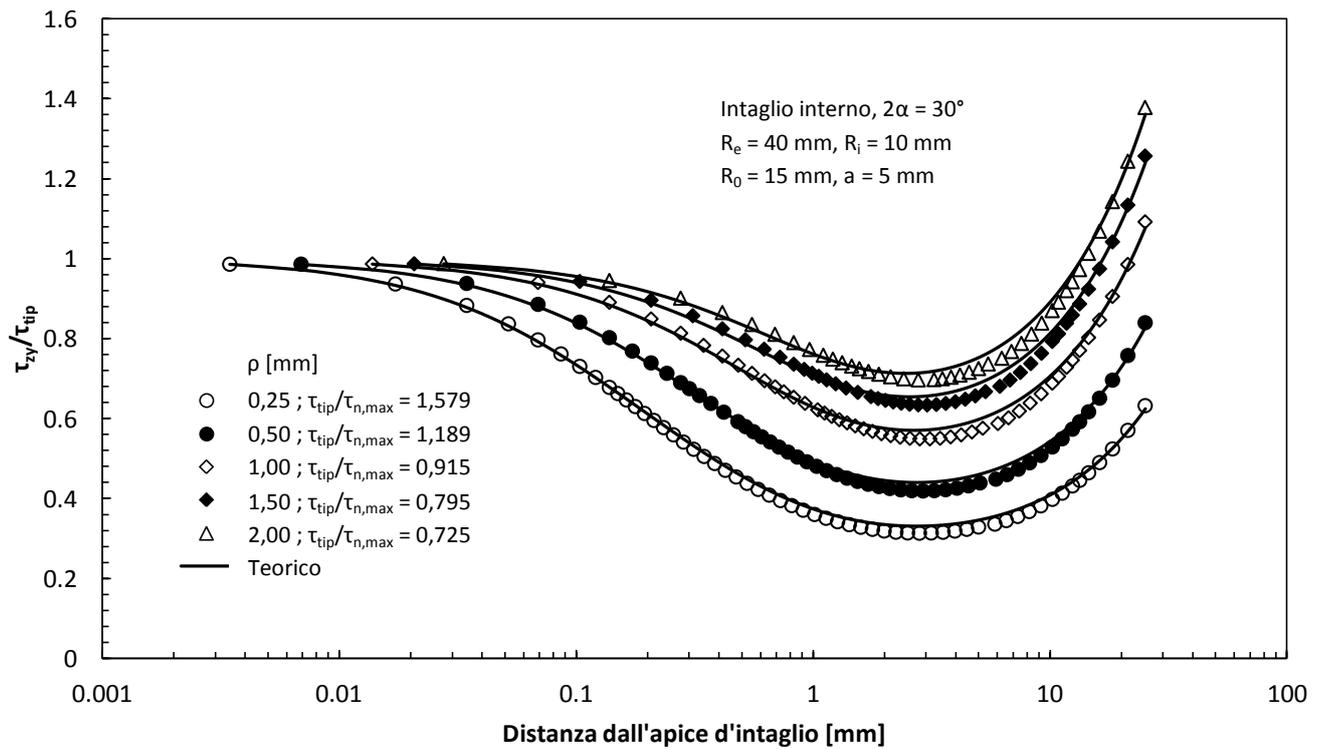
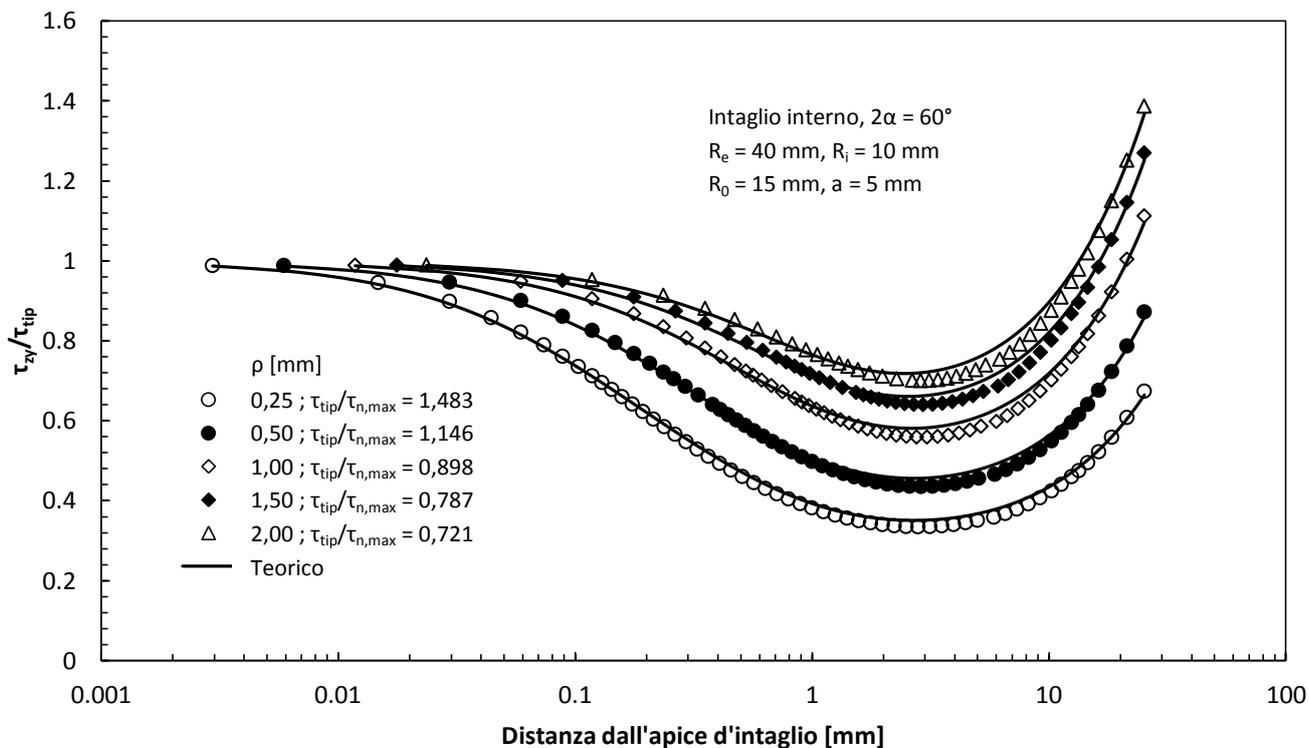
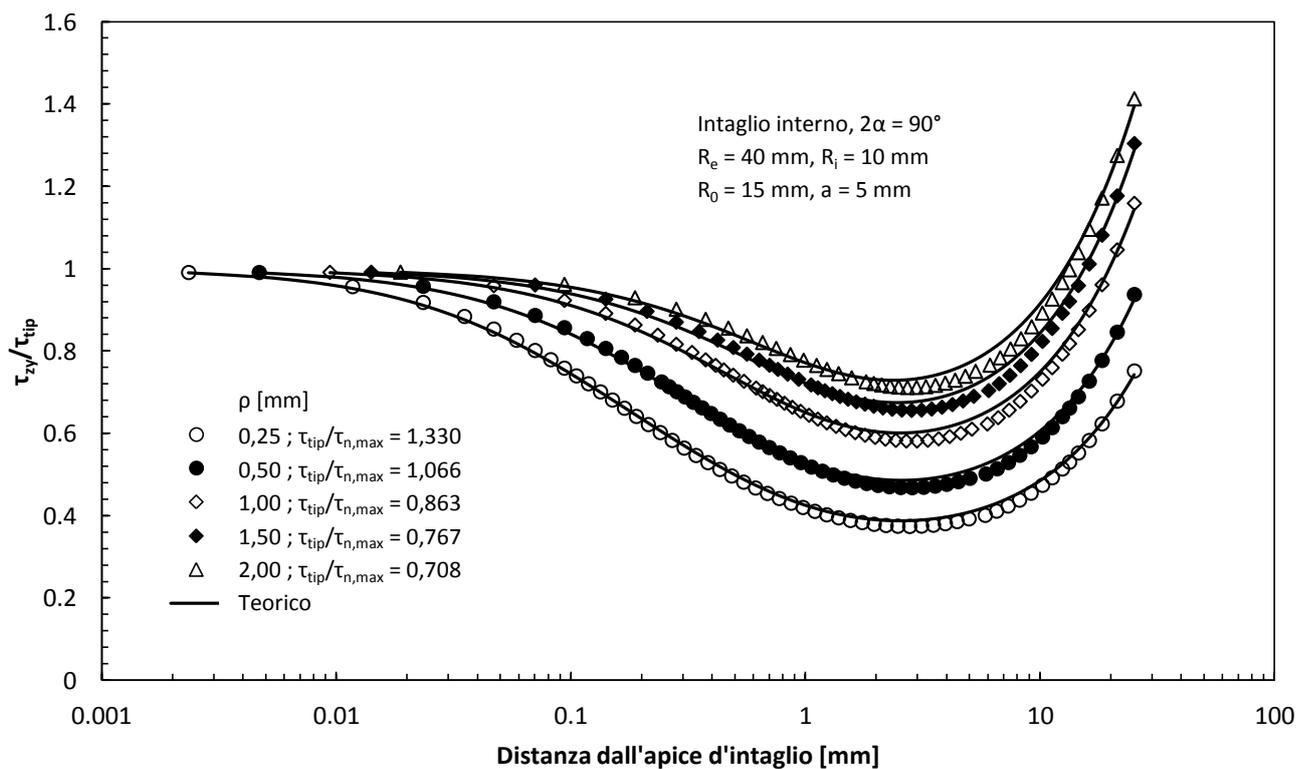


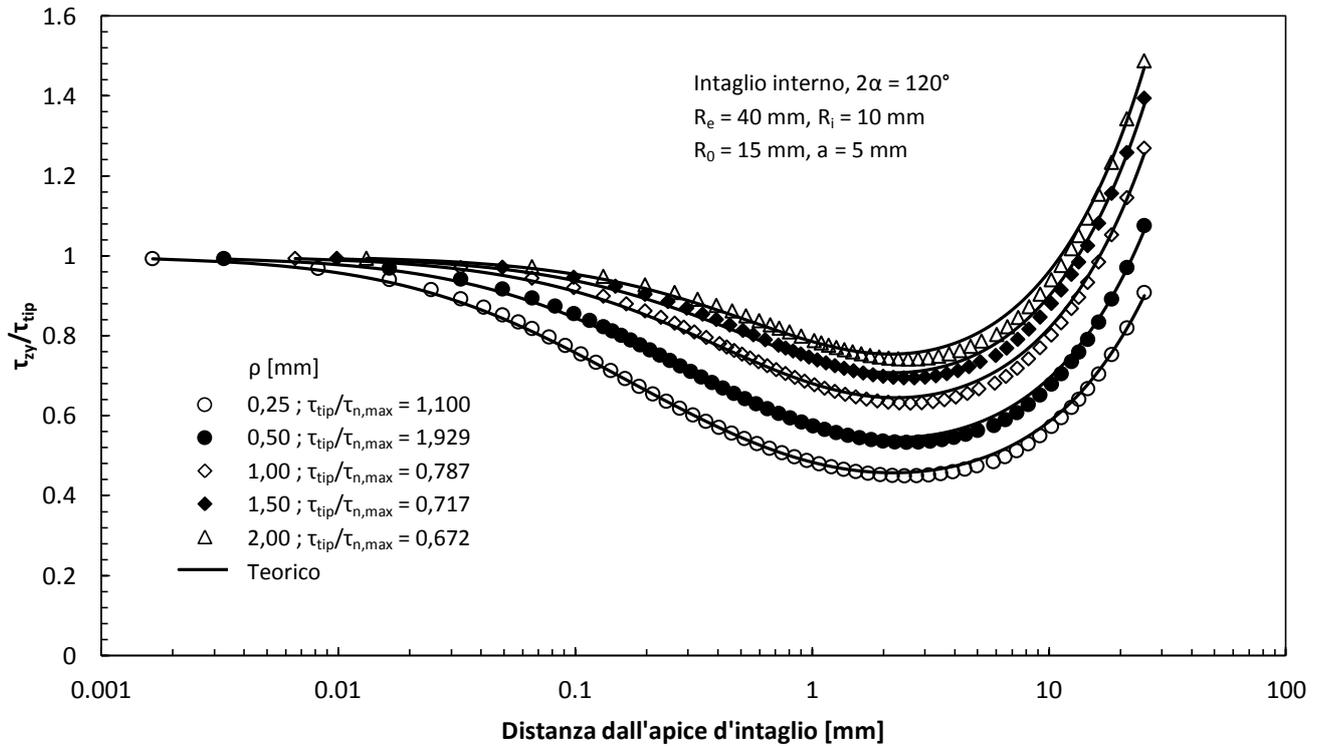
Fig. 2.19 Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{z\gamma}$  lungo la bisettrice di intagli interni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=30^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.7). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



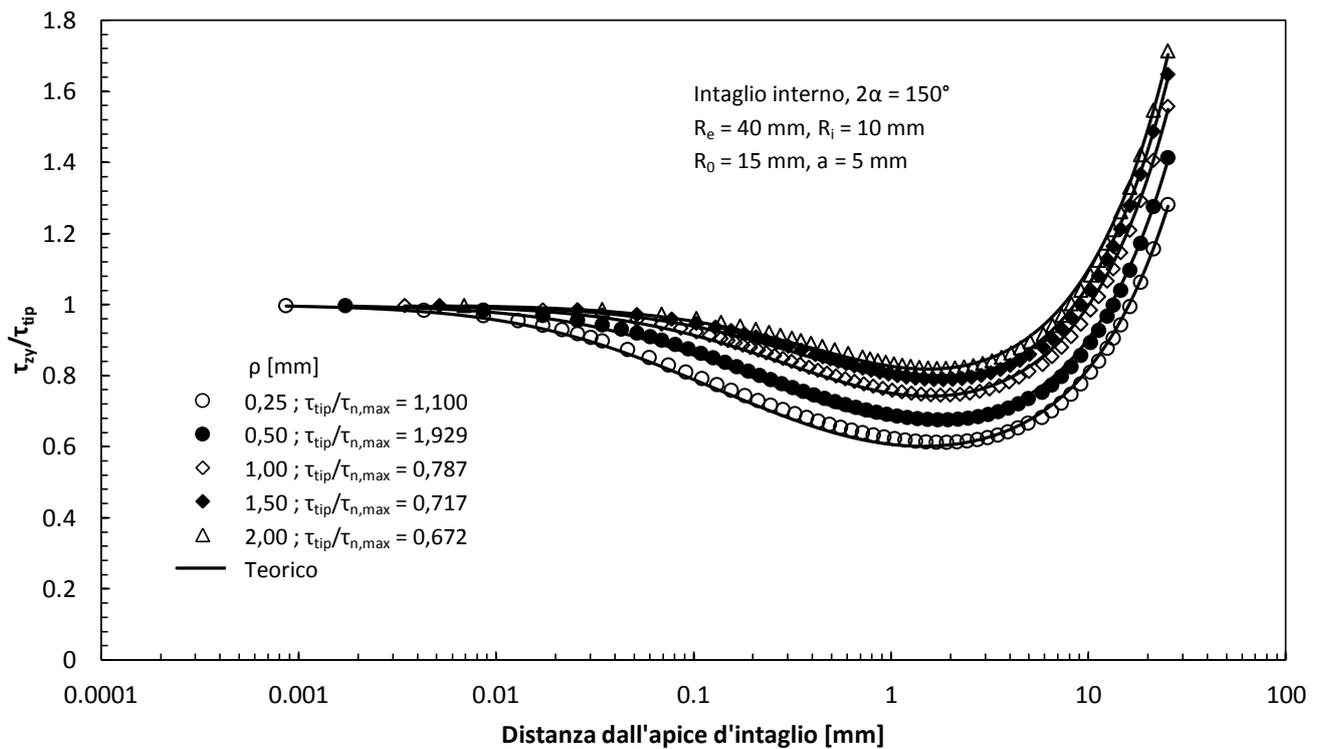
**Fig. 2.20** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli interni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=60^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.7). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 2.21** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli interni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=90^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.7). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 2.22** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli interni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=120^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.7). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 2.23** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli interni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=150^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.7). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio

Ultimata questa prima analisi sugli intagli interni si effettua la seconda, sempre per gli angoli di apertura considerati in precedenza ma questa volta si va a variare il parametro  $R_e$ .

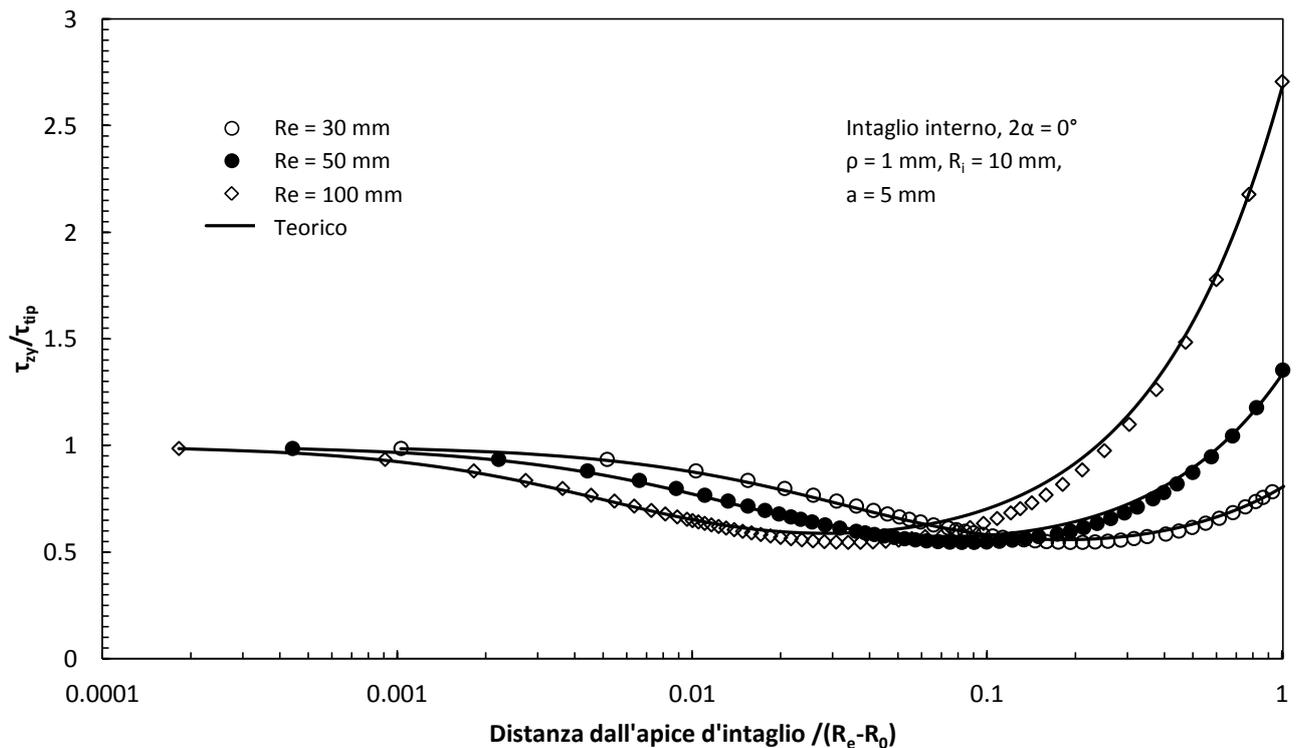
I dati della seguente analisi sono i seguenti:

**Tab. 2.4** Caratteristiche delle varie geometrie utilizzate per la quarta analisi.

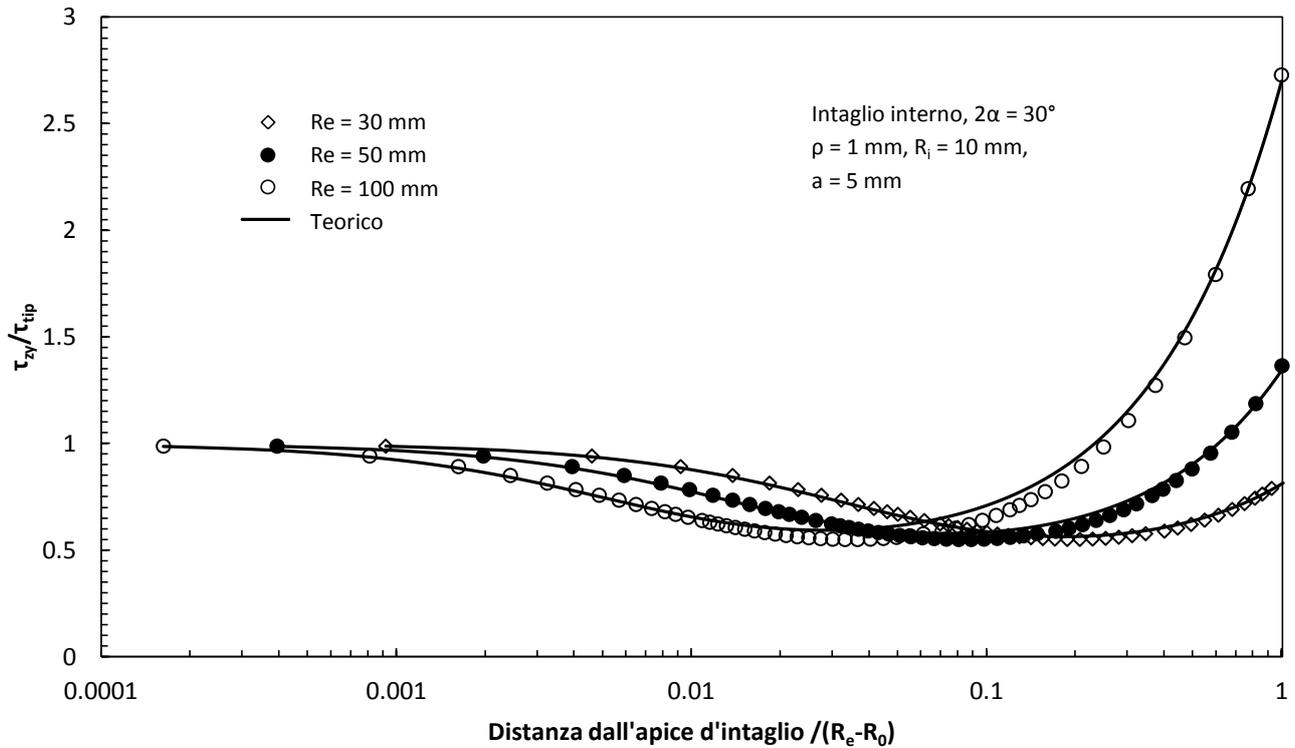
$R_i = 10 \text{ mm}$	$R_e \text{ [mm]}$	$2\alpha$
$a = 5 \text{ mm}$	30	$0^\circ$
$\rho = 1 \text{ mm}$	50	$30^\circ$
	100	$60^\circ$
	200	$90^\circ$
	400	$120^\circ$
		$150^\circ$

Anche per questo tipo di analisi, avendo la dimensione  $R_e$  variabile, bisogna avere ancora la cortezza di verificare sempre l'ipotesi di Saint Venant, mantenere quindi la dimensione longitudinale prevalente su quella trasversale e dunque evitare di avere un tubo di una geometria tozza. Seguendo questo concetto si sono assunti dei valori di  $H$  (semi-altezza del tubo) che variano da  $10R$  a  $2R$  a seconda che  $R_e$  valga rispettivamente 30 mm oppure 400 mm.

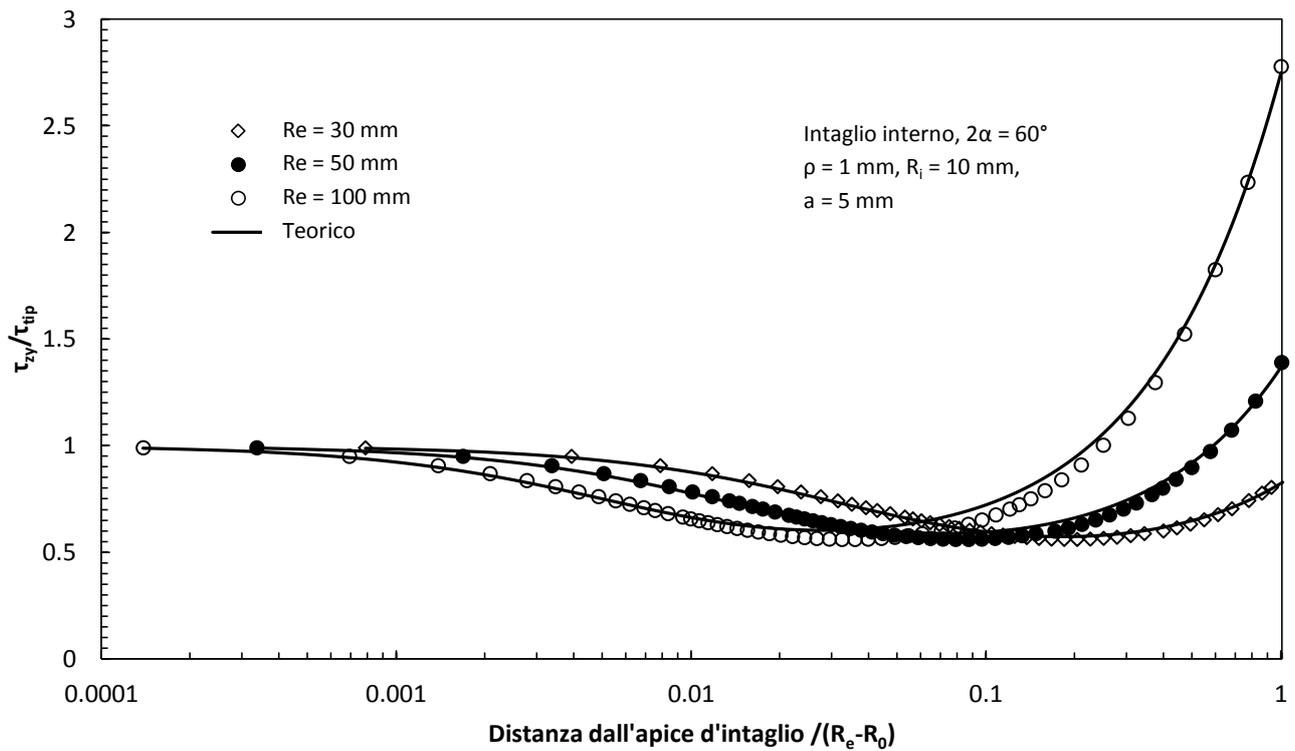
Si presentano quindi i risultati di quest'ultima analisi per i tubi aventi intaglio interno:



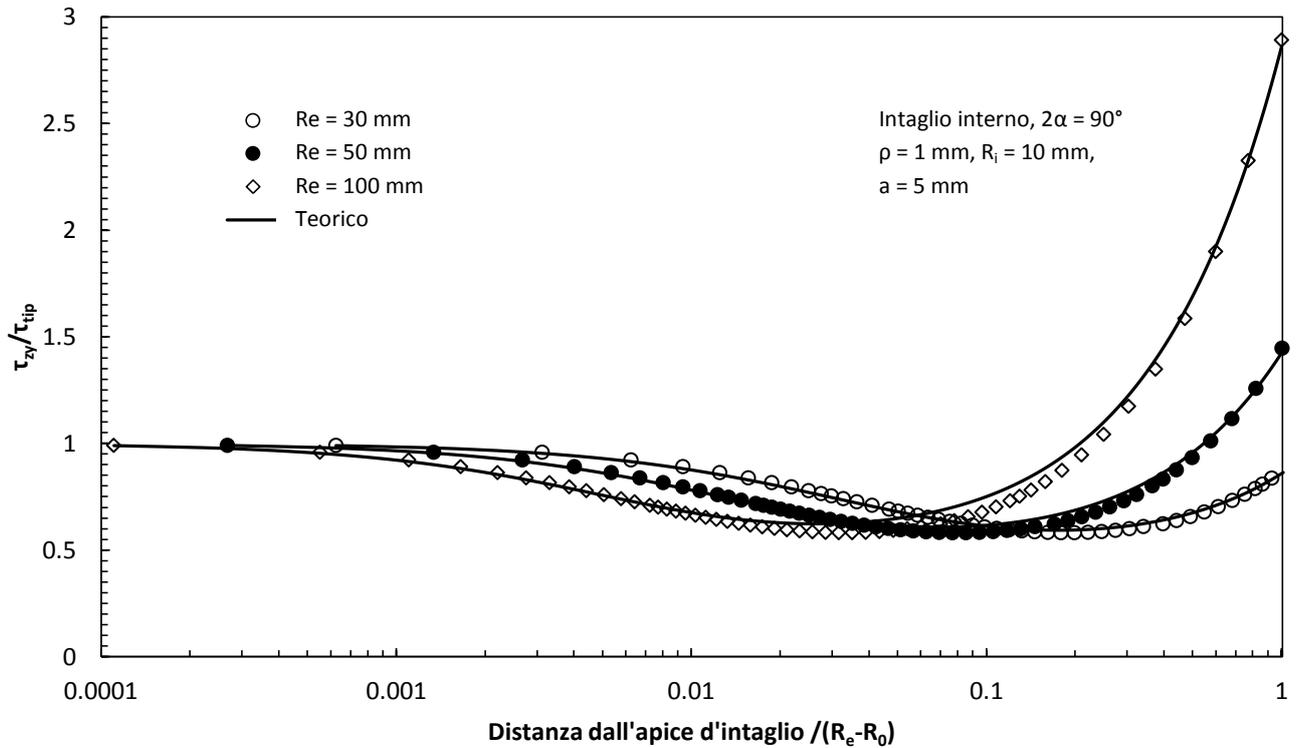
**Fig. 2.24** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli interni a U e confrontati con l'Eq. (2.7). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



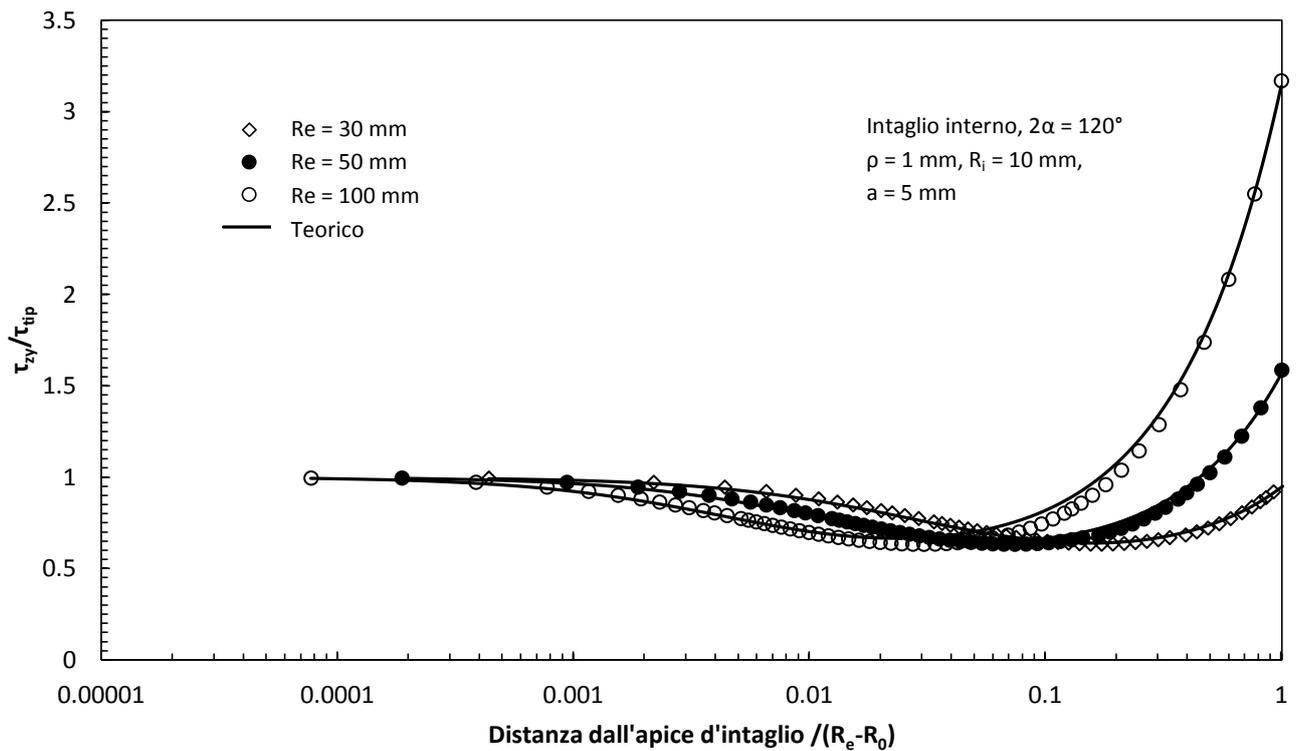
**Fig. 2.25** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli interni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=30^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.7). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



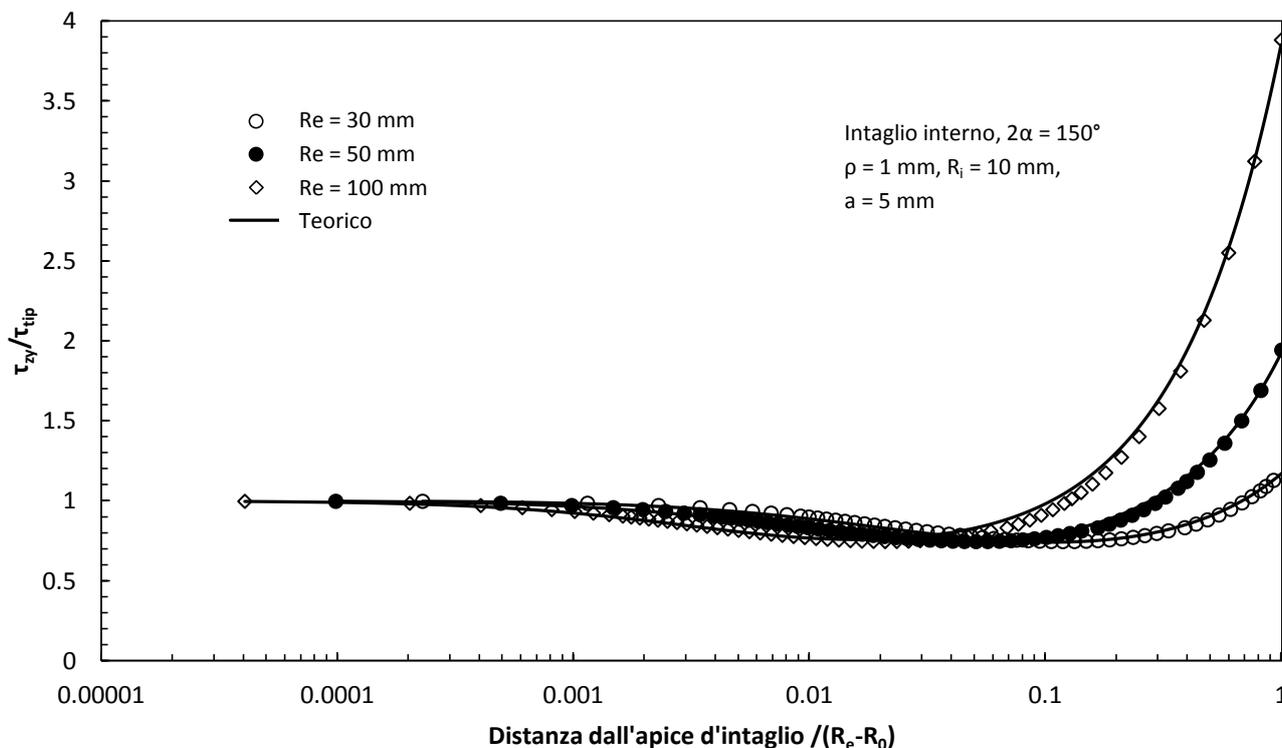
**Fig. 2.26** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli interni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=60^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.7). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 2.27** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli interni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=90^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.7). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 2.28** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli interni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=120^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.7). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio



**Fig. 2.29** Diagrammi della componente di tensione  $\tau_{zy}$  lungo la bisettrice di intagli interni a V raccordati con angolo di apertura  $2\alpha=150^\circ$  e confrontati con l'Eq. (2.7). La componente di tensione è normalizzata rispetto al massimo valore di tensione di taglio

### 2.3. Conclusioni

In questo lavoro è stata proposta una soluzione semi-analitica di tensione adatta per tubi intagliati sottoposti a sollecitazioni di torsione. La soluzione in forma chiusa è una generalizzazione della soluzione di tensione delle barre intagliate (Eq. 1.44), ed è basata su una soluzione di tensione elastica dove la condizione di equilibrio locale è sempre soddisfatta grazie all'utilizzo di una funzione bi-armonica, anche se le condizioni al contorno sono soddisfatte solamente in punti specifici.

La soluzione è stata adattata alle geometrie tubolari semplicemente sostituendo al parametro  $R$  il parametro  $R_0$  e ricalcolando il parametro  $m$  in modo tale che l'equilibrio globale sia soddisfatto sulla semi-sezione del tubo anziché della barra.

La soluzione semi-analitica proposta ha mostrato una buonissima corrispondenza con la rispettiva soluzione numerica nel caso di un intaglio esterno. Nel caso di un intaglio interno invece la corrispondenza è un po' meno accurata ma resta comunque buona, in particolare essa diminuisce con l'aumentare del raggio di raccordo  $\rho$  o con l'aumentare del raggio esterno  $R_e$ . Per quest'ultima osservazione dai risultati dell'ultima analisi sono stati eliminati i casi con  $R_e$  maggiori di 100 mm appunto perché l'errore diventava molto grande e comunque rimanevano dei casi strettamente teorici con nessuna corrispondenza pratica. Il caso di un tubo intagliato sottoposto a torsione si collega soprattutto ai collegamenti filettati, dove il raggio esterno ha delle dimensioni ragionevoli.



## **Bibliografia**

Zappalorto Michele, Lazzarin Paolo, Filippi Stefano (2010). Stress field equations for U and blunt V-shaped notches in axisymmetric shafts under torsion.

*International Journal of Fracture*, vol.164, issue: 2, pp. 253-269.

Ferjani Mohamed, Averbuch Daniel, Constantinescu Andrei (2010). Semianalytical solution for the stress distribution in notched tubes.

*International Journal of Fatigue* 33 (2011), pp. 557-567.