

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE STATISTICHE

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE



TESI DI LAUREA

Valutazione di opzioni europee in presenza  
di eteroschedasticità condizionale ed analisi della "*volatility smile*"

RELATORE: CH.MO PROF. NUNZIO CAPPUCCIO

LAUREANDO: ALESSANDRO GALLO

ANNO ACCADEMICO 2003 – 2004

Alla mia famiglia

# Indice

	Pag.
<b>Introduzione</b>	III
<b>Capitolo I – Concetti generali</b>	
1.1 Azioni	1
1.2 Gli indici di Borsa italiani	2
1.3 Mib30	5
1.3.1 Composizione	6
1.3.2 Revisione	9
1.4 Opzioni	11
1.5 Mibo30	14
1.5.1 Effetto dei dividendi	18
<b>Capitolo II – Un approccio per la valutazione dei Derivati</b>	
2.1 Analisi Black & Scholes	23
2.2 Assunzione di log-normalità dei prezzi delle azioni	25
2.3 Distribuzione del tasso di rendimento	26
2.4 Stima della volatilità in base ai dati storici	27
2.5 Equazione differenziale di Black & Scholes	29
2.6 Valutazione neutrale verso il rischio	31
2.7 Formule di valutazione di Black & Scholes	32
2.8 Proprietà delle formule di Black & Scholes	34
2.9 Implicazioni del modello Black & Scholes	36
2.10 Cause della volatilità	41
2.11 Volatilità implicita	44
2.12 Ricerche empiriche sulla volatilità implicita	46
<b>Capitolo III – Modello GARCH</b>	
3.1 Dai processi ARCH ai processi GARCH	50
3.2 Il modello GARCH per la determinazione del prezzo dell'opzione	51
3.3 Procedure numeriche	57
3.3.1 Procedure per la riduzione della varianza	65

	Pag.
3.4 Confronto del modello GARCH (1,1) per la determinazione del prezzo con il modello Black & Scholes	70
<b>Capitolo IV – Applicazioni</b>	
4.1 Dati	73
4.2 Stime dei Modelli	75
4.3 Disegno della simulazione Monte Carlo	82
4.4 Volatilità implicita e rapporto IVR	84
4.5 Scelta dei dati simulati da utilizzare	85
4.6 Risultati della simulazione GARCH	88
4.7 Risultati della simulazione TARCH	93
4.8 Risultati della simulazione EGARCH	97
<b>Appendice A – Listato della simulazione in codice Matlab per il modello GARCH</b>	105
<b>Bibliografia</b>	115

## Introduzione

La volatilità ha un'importante ruolo nella valutazione del prezzo di un'opzione. La nota formula di Black & Scholes è frequentemente usata per la valutazione di opzioni di tipo europeo, ma ha il difetto di considerare la volatilità costante nel tempo. Tale formula è anche usata per calcolare la volatilità del sottostante osservando il prezzo dell'opzione (volatilità implicita); se si effettua il calcolo della volatilità implicita in diversi istanti, si vede che essa varia sensibilmente con il variare del tempo. Da qui l'esigenza di verificare il comportamento della volatilità nel tempo assumendo che i prezzi del sottostante seguano diversi modelli econometrici.

La tesi, pertanto, si propone di confrontare la volatilità implicita risultante dai tre modelli considerati GARCH, TARARCH ed EGARCH rispetto al modello Black & Scholes. Dal punto di vista strutturale il lavoro si compone di quattro capitoli.

Il primo capitolo ha l'obiettivo di offrire nozioni circa: i più frequenti sottostanti tipici delle opzioni (azioni e indici azionari) e sulle diverse tipologie delle opzioni; soffermandoci in particolare sull'indice Mib30 e sui contratti Mibo30 (contratto d'opzione di tipo europeo scritto sull'indice Mib30).

Nel secondo capitolo si analizza l'approccio Black & Scholes per la valutazione di un derivato; in particolare, la valutazione di un'opzione *call* di tipo europeo. Black & Scholes sono riusciti a risolvere la loro equazione differenziale al fine di ottenere le formule chiuse di valutazione delle *calls* e *puts* europee scritte su titoli che non pagano

dividendi. Nel far ciò, hanno dovuto porre alcune assunzioni più o meno forti, tra cui il vincolo della volatilità costante nel tempo.

Molte ricerche empiriche hanno dimostrato, in realtà, che questo vincolo viene violato.

Il terzo capitolo si propone di offrire un'alternativa al modello Black & Scholes. Il modello GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) considerato in questo lavoro è stato sviluppato per accogliere la *locally risk-neutral valuation relationship* (LRNVR): versione generalizzata della *risk-neutral valuation relationship* (RNVR). Questo strumento consente di valutare un derivato in maniera semplificata rendendo ininfluenza il tipo di propensione al rischio degli investitori nella soluzione finale.

Nel quarto capitolo si analizzano le evidenze empiriche dell'indice Mib30 al fine di ottenere le "stime" dei parametri per i modelli GARCH, TARCH (Threshold AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) ed EGARCH (Exponential GARCH).

In questa parte del lavoro si descrive, inoltre, il disegno di simulazione (necessario per valutare le opzioni in un contesto di volatilità stocastica) che verrà adottato; assumendo alcuni vincoli e decidendo le diverse combinazioni dei parametri per i differenti modelli.

Infine, ci soffermeremo sull'analisi dei risultati delle diverse simulazioni per i differenti modelli.

Tali simulazioni cercheranno di catturare le diverse tipologie di volatilità implicita (*smile* o *skew*) tipiche dei modelli considerati. Le analisi, inoltre, evidenzieranno gli effetti che scaturiscono nella volatilità implicita modificando particolari parametri dei modelli o aumentando la vita residua dell'opzione.

# Capitolo I

Un “derivato” (*derivative o derivative security*) è uno strumento finanziario il cui valore dipende da quello di altre più fondamentali variabili sottostanti. Negli anni recenti, il mercato dei derivati è divenuto sempre più importante nel mondo della finanza. Sono tre i principali tipi di operatori che operano in questo mercato: gli *hedgers*, gli *speculatori* e gli *arbitraggisti*. Gli *hedgers* si trovano a dover fronteggiare il rischio associato ad un’attività finanziaria e, per ridurre o eliminare questo rischio, ricorrono ai derivati; gli speculatori desiderano scommettere sui futuri movimenti del prezzo di un’attività, mentre gli *arbitraggisti* cercano di trarre vantaggio da discrepanze dei prezzi in due diversi mercati. Se, per esempio, si accorgono che il prezzo *futures* di un’attività derivata sta andando fuori linea rispetto al prezzo *spot*, assumono posizioni di segno opposto nei due mercati per ottenere un profitto.

Come si è detto un derivato è collegato ad un sottostante. Le principali attività sottostanti sono le azioni e gli indici azionari. Qui di seguito si considereranno le caratteristiche di queste attività con particolare riferimento al mercato italiano.

## 1.1 Azioni

Un’azione è un documento che attesta la proprietà di una quota del capitale sociale di una società per azioni (S.p.A.). L’azionista usufruisce dei profitti dell’azienda per una quota proporzionale degli utili qualora essi siano distribuiti e del patrimonio in caso di liquidazione; nel contempo egli acquisisce il diritto a prendere parte alla politica

decisionale della società, partecipando all'assemblea degli azionisti. Le azioni cosiddette ordinarie (*common stocks*) garantiscono la possibilità di partecipazione attiva alla vita della società.

Possiamo distinguere varie tipologie di azioni sulla base di diversi criteri di classificazione. In base ai diritti che l'azionista acquisisce distinguiamo: azioni ordinarie, azioni di risparmio, azioni privilegiate e azioni a voto limitato. In base al regime di circolazione possiamo avere azioni nominative o azioni al portatore. In base al livello di capitalizzazione della società che emette si è soliti distinguere tra *blue chips*, *mid* e *small caps*. Queste distinzioni sono rilevanti dal punto di vista dell'analisi quantitativa dato che a ciascun tipo corrispondono caratteristiche che sono diversamente valutate dal mercato. Una classificazione particolarmente rilevante è quella che consente di distinguere, all'interno di una stessa categoria di azioni, titoli ad alta e bassa capitalizzazione (intendendo per valore di capitalizzazione di una società il prodotto tra il numero di azioni quotate in Borsa ed il loro valore di mercato). Con il termine *blue chips* (mutuato dal gioco d'azzardo, dove le *fiches* di colore blu sono quelle che valgono di più) si è soliti indicare azioni relative a titoli ad elevata capitalizzazione.

Le azioni sono scambiate su mercati specializzati: durante i periodi di apertura ufficiale si concentra la maggior parte degli scambi che vengono finalizzati per un prezzo ed un quantitativo (*volume*). Durante il periodo di chiusura dei mercati esiste il modo di procedere a compravendita di azioni: ciascun mercato è organizzato seguendo regole proprie. Un recente fenomeno è quello del *trading on-line* con la possibilità di compravendita tramite intermediario su Internet.

## 1.2 Gli indici di Borsa italiani

Gli indici rappresentano panieri più o meno ampi di titoli azionari e possono essere tanto grandi da comprendere tutte le azioni quotate su un mercato (indici globali), oppure soltanto alcune (indici parziali) selezionate in base a specifici criteri.

La funzione primaria degli indici di Borsa è quella di fornire una rappresentazione sintetica dell'andamento di prezzo dei titoli che compongono il paniere. Una seconda funzione molto importante è quella di costruire l'attività sottostante di strumenti

derivati: gli operatori possono così eseguire operazioni di copertura del rischio in maniera poco costosa ed efficiente, e al tempo stesso utilizzare i contratti derivati<sup>1</sup> sugli indici per offrire allo speculatore una leva finanziaria, *leverage*, che non gli è offerta dal mercato *spot*. L'effetto leva è la facoltà di controllare un elevato ammontare di risorse finanziarie, attraverso il possesso di una piccola parte di tali risorse, con un basso impiego di capitale. La leva finanziaria è espressa dal rapporto tra il valore delle posizioni aperte ed il capitale investito.

Gli indici azionari maggiormente conosciuti sono calcolati ufficialmente dalla Borsa italiana<sup>2</sup> per i diversi mercati: Mercato Ufficiale, Nuovo Mercato, Mercato Ristretto e Trading After Hours.

### **Gli indici del mercato ufficiale**

Tra gli indici forniti ufficialmente dalla Borsa italiana al Mercato Telematico Azionario (MTA) l'indice Mibtel (acronimo di Mercato Italiano della Borsa Telematica) costituisce una misura sintetica dell'andamento del mercato nel suo complesso. Viene calcolato giornalmente durante la fase della negoziazione continua (dalle 9.30 alle 17:30 dopo una fase di pre-apertura dalle 8:15 alle 9:15) con frequenza di un minuto sulla base dei prezzi degli ultimi contratti conclusi su ciascuna azione. Il Mibtel (calcolato su base 03.01.1994=10000) viene rivisto annualmente, con l'aggiornamento del numero base delle azioni e del prezzo base (prezzo degli ultimi contratti conclusi alla data di revisione) di tutti i componenti. Al contempo, è un indice cosiddetto a base "aperta" avendo la possibilità di includere, in qualsiasi momento dell'anno, nuovi titoli o eliminarne altri, che non rispondano più ai requisiti.

L'indice Mib (Mib storico, base 02.01.1975=1000) è anche esso relativo a tutte le azioni quotate nella Borsa italiana<sup>3</sup> tale indice è calcolato una sola volta al giorno al termine della seduta di Borsa utilizzando i prezzi ufficiali di tutti i componenti. Mentre il Mibtel registra valori di minuto in minuto, il Mib rileva un solo valore esclusivamente alla fine della giornata. Tale differenza caratterizza i due indici, che

---

<sup>1</sup> Un tipo di contratto sui derivati è trattato nel paragrafo 1.4.

<sup>2</sup> Dal cui sito [www.borsaitalia.it](http://www.borsaitalia.it) ho assunto varie informazioni.

<sup>3</sup> Indici Mib settoriali vengono calcolati su panieri che riflettono la suddivisione settoriale del listino ufficiale. Vengono calcolati alla chiusura di ogni seduta, utilizzando i prezzi ufficiali delle rispettive componenti. Esistono 3 macrosettori: Industriale, Servizi e Finanziario. Al loro interno si distinguono 20 microsettori, per un totale di 23 indici.

offrono evidentemente informazioni diverse e complementari. Come il Mibtel anche il Mib è soggetto a revisione annuale (aggiornamento del numero base delle azioni e del prezzo base al prezzo ufficiale alla data di revisione), tuttavia, l'inserimento di nuove azioni quotate e l'esclusione di quelle revocate può avvenire in qualunque momento dell'anno.

Le 30 società che hanno il maggior peso in termini di liquidità e capitalizzazione vanno a costruire l'indice Mib30. In seguito, tale indice, verrà approfondito poiché come base di partenza per le analisi successive verranno utilizzati dati giornalieri del Mib30.

Il Midex raccoglie, invece, le cosiddette società a media capitalizzazione (le 25 successive in ordine di importanza a quelle che entrano nella composizione del Mib30).

Altri indici azionari vengono diffusi da istituzioni diverse da Borsa Italia, tra questi ricordiamo quelli prodotti dal Servizio analisi della Banca Commerciale Italiana, tra cui l'indice Comit globale ed il Comit30, composto dai 30 titoli più rappresentativi del mercato.

### **Il Numtel ed il Numex**

Il nuovo mercato è un mercato azionario telematico specializzato in società di dimensione relativamente ridotte ma ad alto potenziale di crescita. La borsa italiana calcola e diffonde giornalmente indici informatici dell'andamento del nuovo mercato: ricordiamo, in particolare, il Numtel (base 17.06.99=1000) relativo a tutte le azioni quotate sul nuovo mercato, calcolato giornalmente durante la fase della negoziazione continua con frequenza di un minuto sulla base dei prezzi degli ultimi contratti conclusi su ciascuna azione. Il Numex è anch'esso relativo a tutte le azioni quotate sul nuovo mercato, ma viene calcolato giornalmente al termine della seduta di negoziazione. La metodologia di calcolo rispecchia quella del calcolo dell'indice Mibtel.

### **L'IMR**

Sul mercato ristretto vengono negoziati titoli non ammessi alla quotazione ufficiale di Borsa. L'indice IMR (base 03.01.1979=1000) è una misura sintetica dell'andamento di tutte le azioni ammesse alle negoziazioni nel mercato ristretto. Viene calcolato

sulla base dei prezzi ufficiali e diffuso una sola volta al giorno al termine delle negoziazioni su tale mercato.

### **Il Trading After Hours**

Alla chiusura del mercato telematico ordinario, viene aperto un mercato, detto Trading After Hours, in cui le negoziazioni si svolgono dalle 18:00 alle 20:30 con una fase di pre-apertura dalle 17:50 alle 18:00. In corrispondenza agli indici del mercato ordinario, la Borsa italiana fornisce specifici indici (Mibtel-s, Mib30-s e Midex-s) che vengono calcolati in modo analogo a Mibtel, Mib30 e Midex partendo dai valori delle 17:30, orario di chiusura del mercato. Il valore di questi indici, diffusi nella sessione *after hours*, ha una funzione solo informativa; nel giorno successivo, infatti, le variazioni degli indici continui andranno riferite ai valori di chiusura della sessione diurna.

### **1.3 Mib30**

L'indice azionario Mib30 è un indice sintetico costituito dalle 30 azioni a più elevata capitalizzazione ed a maggiore liquidità quotate sul Mercato Telematico Azionario; tale indice presenta una forte correlazione con lo sviluppo complessivo del mercato azionario italiano. Assieme al Mibtel, il Mib30 è l'indice più rappresentativo dell'andamento della Borsa Italiana: infatti, benché costituito da un numero limitato di azioni, rappresenta correttamente l'andamento dell'intero mercato azionario.

Il Mib30 rappresenta uno sviluppo dell'indice azionario Bci30 (Comit30) messo a punto dalla Banca Commerciale Italiana (BCI). Nel luglio del 1994, la Borsa Italiana S.p.A. e la BCI hanno concordato il passaggio del Bci30 al controllo diretto della Borsa Italiana S.p.A. e la trasformazione del nome in Mib30. L'unica differenza fra i due sta nel numero delle cifre decimali: i valori del Mib30 sono infatti moltiplicati per 100 rispetto a quelli del Bci30. La serie temporale di valori del Mib30 per il periodo precedente il 3 ottobre 1994 viene quindi calcolata prendendo come riferimento la serie storica Bci30.

I valori del Mib30 vengono calcolati con cadenza regolare in base all'ultima quotazione di scambio dei vari titoli che lo compongono, e resi noti (dal 3 Ottobre 1994) in tempo reale attraverso sistemi informativi elettronici.

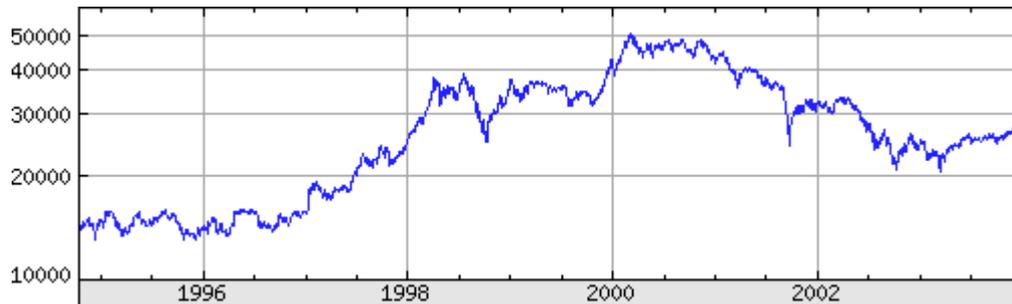


Figura 1.1: Andamento dell'indice Mib30

Su tale indice è stato costruito il primo contratto *future* della Borsa italiana, il Fib30; più recentemente è stato affiancato al Fib30 un altro *future*, il Mini Fib30. Inoltre il Mib30 costituisce anche l'attività sottostante (*underlying*) ad uno specifico contratto di opzioni, il Mibo30.

### 1.3.1 Composizione

La composizione dell'indice e la scelta dei pesi dei titoli che lo compongono, vengono effettuate dalla Borsa Italiana S.p.A, attraverso il calcolo dell'indice di liquidità e capitalizzazione (ILC).

Per ogni azione quotata (con riferimento ai dati aggiornati a 15 giorni di Borsa aperta antecedenti la data di efficacia del provvedimento) si determina:

- La capitalizzazione media giornaliera ( $CampMg_t$ ), risultante dal prodotto del numero di azioni in circolazione per la media dei prezzi ufficiali nei sei mesi precedenti (eventualmente rettificati in seguito ad operazioni sul capitale), ovvero:

$$CampMg_t = \text{Numero di azioni emesse} \times \text{media dei prezzi su sei mesi.}$$

- Il volume (controvalore) medio giornaliero degli scambi ( $VolMg_i$ ) relativo allo stesso semestre.
- Il coefficiente  $\alpha_i$  definito come:

$$\alpha_i = \frac{CapMg_i}{VolMg_i}.$$

Si procede poi ad un calcolo analogo per un indice  $\alpha_M$  di mercato.

$$\alpha_M = \frac{\sum_{i=1}^N CapMg_i}{\sum_{i=1}^N VolMg_i}$$

dove  $N$  è il numero di azioni presenti nel mercato.

Infine, si calcola un *Indicatore di Liquidità e Capitalizzazione* ( $ILC_i$ ) per l' $i$ -esimo titolo come segue:

$$ILC_i = CapMg_i + \alpha_M VolMg_i$$

In base all'indicatore  $ILC$  viene stilata una graduatoria delle azioni e vengono incluse nel paniere le azioni con  $ILC$  più elevato. . Dalla graduatoria sono escluse:

1. Tra le diverse categorie di azioni di una stessa emittente, le azioni con  $ILC$  più basso, considerando la categoria con  $ILC$  più alto;
2. I titoli il cui  $\alpha_i$  azionario superi il valore di 10.000, al fine di evitare che azioni caratterizzate da uno scarso livello di liquidità nonostante un'elevata capitalizzazione entrino a far parte dell'indice;
3. Le azioni il cui periodo di contrattazione ufficiale presso la Borsa non sia ritenuto sufficientemente significativo;
4. Le azioni per le quali esiste, al momento della selezione, la ragionevole certezza che i requisiti fondamentali necessari alla loro inclusione nell'indice

(liquidità, elevata capitalizzazione di mercato, contrattazione ufficiale) verranno a mancare nei sei mesi successivi;

I titoli non inclusi nell'indice vengono ordinati in base ai relativi valori ILC e tenuti di riserva.

Titoli	Numero azioni	Prezzo base	Capitalizzazione	Pesi(%)
Autogrill	254.400.000	11,650	2.963.760.000	0,781331
Alleanza Assicurazioni	846.342.325	8,720	7.380.105.074	1,945605
Autostrade	571.686.857	13,350	7.632.019.541	2,012017
Banca Fideuram	980.290.564	4,660	4.568.154.028	1,204295
Banca Intesa ord	5.915.707.226	3,050	18.042.907.039	4,756622
Banca Monte Paschi Siena	2.448.491.901	2,500	6.121.229.753	1,613730
Banca Nazionale Lavoro ord	2.188.465.312	1,870	4.092.430.133	1,078881
Banche Popolari Unite	318.775.785	14,450	4.606.310.093	1,214354
Banco Popolare di Verona e Novara	370.180.985	13,320	4.930.810.720	1,299902
Capitalia	2.206.881.000	2,195	4.844.103.795	1,277043
Edison ord	4.079.478.581	1,480	6.037.628.300	1,591690
ENEL	6.063.075.189	5,390	32.679.975.269	8,615368
ENI	4.002.883.876	14,980	59.963.200.462	15,808000
Fiat ord	800.417.598	5,990	4.794.501.412	1,263967
Finmeccanica	8.434.481.004	0,619	5.220.943.741	1,376389
Generali	1.275.999.458	20,860	26.617.348.694	7,017088
Luxottica Group	454.444.133	13,910	6.321.317.890	1,666479
Mediobanca	778.550.415	8,440	6.570.965.503	1,732293
Mediolanum	725.668.610	6,200	4.499.145.382	1,186102
Mediaset	1.181.227.564	9,450	11.162.600.480	2,942778
Banca Antonveneta	288.263.646	14,900	4.295.128.325	1,132318
Seat Pagine Gialle ord	8.115.215.696	0,740	6.005.259.615	1,583157
Ras ord	670.886.994	13,270	8.902.670.410	2,346996
San Paolo – IMI	1.448.831.982	10,130	14.676.667.978	3,869186
Saipem ord	440.499.432	6,350	2.797.171.393	0,737414
Snam Rete Gas	1.955.000.000	3,380	6.607.900.000	1,742030
STMicroelectronics	901.232.190	21,000	18.925.875.990	4,989398
TIM ord	8.434.004.716	4,320	36.434.900.373	9,605273
Telecom Italia ord	10.297.660.759	2,385	24.559.920.910	6,474692
UniCredito Italiano ord	6.294.629.600	4,300	27.066.907.280	7,135604

Tabella 1.1: Titoli componenti l'indice Mib30 in vigore dal 23 dicembre 2003

La formula utilizzata per il calcolo dell'indice Mib30 con base fissata pari a 10.000 alla data del 31 Dicembre 1992 è la seguente

$$Mib30(t) = 10.000 \sum_{i=1}^{30} \frac{p(t, i)}{p(0, i)} w(i)$$

dove

$$w(i) = \frac{p(0,i)q(0,i)}{\sum_{i=1}^{30} p(0,i)q(0,i)}$$

Nelle formule precedenti (caratteristiche di un indice di Laspeyres),  $p(0,i)$  e  $q(0,i)$  sono rispettivamente il *prezzo-base* e il *numero-base* di azioni in circolazione della *i-esima* azione e  $p(t,i)$  è l'ultimo prezzo fatto registrare da ciascuna azione inclusa nel paniere alla scadenza di un intervallo di tempo prestabilito.

Il valore dell'indice viene aggiornato di minuto in minuto durante la seduta di Borsa (procedura di *fixing*) in base al prezzo dell'ultimo contratto concluso su ciascun titolo del paniere. Ogni minuto si rileva: il valore dell'indice, la sua variazione percentuale, il numero di titoli in fase di negoziazione, la percentuale dei titoli negoziabili rapportata al peso del paniere, la tendenza dell'ultimo valore calcolato rispetto al precedente e l'ora di rilevazione. Se nel corso della seduta di Borsa un titolo del paniere non è negoziato, per il calcolo dell'indice si utilizza il prezzo dell'ultimo contratto concluso nella seduta di Borsa precedente. A fine giornata il Mib30 è calcolato in base al prezzo di chiusura delle *Blue chips*<sup>4</sup>.

Ogni giorno, al termine delle contrattazioni, viene calcolato il valore del Mib30 utilizzando i prezzi di riferimento<sup>5</sup> di ciascun titolo (Mib30-r), valido per la generazione delle basi negoziabili delle opzioni sull'indice stesso.

### 1.3.2 Revisione

La composizione del Mib30 viene rivista ed eventualmente modificata due volte l'anno, nei mesi di marzo e settembre (revisioni ordinarie). Tali aggiornamenti hanno sempre efficacia a partire dal primo giorno di Borsa aperta successivo alla scadenza degli strumenti derivati collegati all'indice, salvo che nel caso di scissione di società. Le revisioni ordinarie essere tuttavia anticipate o posticipate, previa tempestiva comunicazione al mercato, in considerazione di eventi eccezionali; ad esempio, la

---

<sup>4</sup> In Italia sono dette *blue chips* le azioni appartenenti all'indice Mib30. Rispetto alle altre azioni, offrono, a parità di rendimento atteso, un rischio generalmente più basso.

<sup>5</sup> Il prezzo di riferimento è pari alla media ponderata dell'ultimo 10% delle quantità negoziate, al netto delle quantità scambiate mediante la funzione *cross-order*. E' utilizzato come parametro di inizio delle negoziazioni della giornata successiva.

revisione viene posticipata se si ritiene che effettuare interventi troppo ravvicinati possano generare situazioni di elevata volatilità: se l'indice è già stato aggiornato a gennaio (revisione straordinaria), in genere, non si procede all'aggiornamento di marzo.

Si procede, invece, ad una modifica anticipata del paniere del Mib30 se una società emittente di un titolo del paniere si scinde, dando vita a due società che presentino requisiti di capitalizzazione e liquidità tali che le loro azioni possano essere incluse nell'indice. Qualora solo una delle due società presenti i requisiti di immissione nel MIB 30, non si procede alla revisione anticipata, ma la composizione dell'indice viene modificata nella successiva revisione regolare.

La composizione dell'indice è modificata anticipatamente anche quando viene quotata una nuova società la cui capitalizzazione è almeno il 3% di quella del mercato, incluso il nuovo titolo. E' stato il caso della quotazione dell'ENI, le cui azioni sono state incluse nel Mib30 in anticipo rispetto alla revisione ufficiale. Nel periodo intercorrente tra una revisione e la successiva, avvenimenti eccezionali quali, ad esempio, la cancellazione dalle quotazioni ufficiali di un titolo, la sospensione delle contrattazioni per più di dieci giorni consecutivi di Borsa aperta, la perdita rilevante ed accertata di liquidità o capitalizzazione in seguito ai quali il Mib30 verrebbe presumibilmente a perdere la propria efficacia come indicatore di liquidità e capitalizzazione di mercato, possono portare all'esclusione di una azione dal paniere. In questi casi, le azioni escluse vengono sostituite da quelle successive nella graduatoria stilata in base all'indicatore *ILC* dell'ultima revisione, e viene effettuato il ricalcolo dei pesi dell'intero paniere utilizzando come *prezzo-base* per tutte le azioni quello di apertura del giorno successivo in cui diviene efficace l'aggiornamento, e come *numero-base* delle azioni quello presente sul listino tre giorni di borsa aperta antecedenti tale intervento.

Il Mib30 non prevede alcun aggiornamento per il pagamento di regolari dividendi per le azioni componenti il paniere. Per superare ogni errata percezione di discontinuità da parte del mercato viene calcolata l'incidenza in termini sia assoluti (punti-indice) sia percentuali e se ne diffonde la risultanza attraverso i canali informativi abitualmente utilizzati dagli operatori. Al fine di dare continuità all'indice, in caso di stacco di dividendi straordinari dalle azioni componenti il paniere, si applica un

coefficiente di rettifica  $k$ , sia al *prezzo-base* che al numero delle azioni, calcolato nel seguente modo

$$k = \frac{P_{t-1} - D}{P_{t-1}}$$

In occasione di ogni intervento di modifica della composizione del paniere, la continuità della serie storica dell'indice viene ristabilita raccordando, all'ultimo valore rivelato prima della revisione, quello calcolato secondo il paniere revisionato. Più precisamente, si assume come base per l'indice il suo ultimo valore con il vecchio paniere.

## 1.4 Opzioni

I contratti di opzione su azioni sono stati trattati in Borsa per la prima volta nel 1973. Le opzioni vengono ora trattate in diverse Borse sparse per tutto il mondo. Volumi enormi di opzioni vengono negoziati anche nei mercati *over the counter* da banche e altre istituzioni finanziarie. Le attività sottostanti includono le azioni, gli indici azionari, le valute, le obbligazioni, le merci e i contratti *futures*.

Le opzioni sono contratti che conferiscono il diritto di acquistare (*call option*) o vendere (*put option*) una certa quantità di un'attività sottostante (*underlying*) ad una certa data futura e ad un prezzo predeterminato al momento della stipula. La data indicata nel contratto è detta “data di estinzione” (*expiration date*), “data d'esercizio” (*exercise date*) o “scadenza” (*maturity*). Il prezzo specificato nel contratto è chiamato “prezzo di esercizio” (*exercise price*) o “prezzo base” (*strike price*).

Le opzioni si distinguono in due tipologie: europee o americane<sup>6</sup>. Le prime riservano l'esercizio del diritto solo alla scadenza del contratto, le seconde permettono l'esercizio del diritto in ogni momento della vita. Una differenza sostanziale tra le opzioni e gli altri contratti derivati detti anche “diritti contingenti” (*contingent claims*) è determinata dal fatto che si acquisisce un diritto (*facoltà*) a compiere una certa

---

<sup>6</sup> Si noti che il termine “europea” ed “americana” non si riferiscono alla localizzazione dell'opzione o della borsa.

operazione in un determinato periodo, e non un obbligo come quello che compete ad una controparte che ha negoziato un qualsiasi altro contratto (basti pensare ad un *contratto futures* o ad un *contratto forward*). Il diritto alla prestazione è concesso dal venditore dell'opzione (*writer*) all'acquirente (*buyer*) e, per questo, il venditore riceve una somma monetaria chiamata premio o costo dell'opzione: questa caratteristica, come rappresentato nelle figure 1.2 e 1.3, è alla base dell'asimmetria del *payoff*<sup>7</sup> che spetta al detentore dell'opzione.

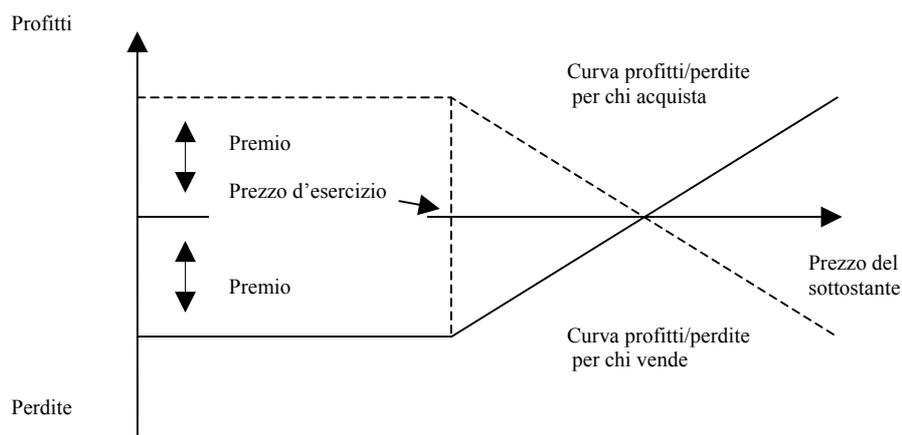


Figura 1.2: Payoff di un'opzione *call*

Una particolare terminologia viene adottata per indicare la posizione su un'opzione: chi vende assume una posizione corta (*short position*), chi invece acquista assume una posizione lunga (*long position*).

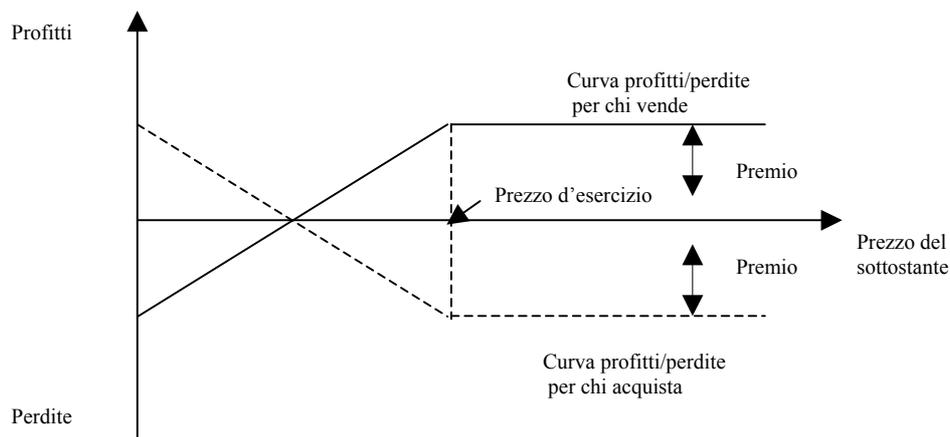


Figura 1.3: Payoff di un'opzione *put*

<sup>7</sup> Il tempo necessario affinché il reddito monetario di un investimento eguali il costo iniziale dell'investimento stesso.

Il cosiddetto valore intrinseco di un'opzione è rappresentato dal differenziale positivo, per il titolare dell'opzione, tra il prezzo di mercato e lo strike price. Nell'opzione *call* è rappresentato dalla differenza tra il prezzo *spot* di mercato dell'attività sottostante,  $S$ , e lo strike price,  $X$ . Viceversa, per l'opzione *put* il valore intrinseco è pari alla differenza tra lo strike ed il prezzo *spot* di mercato.

$$Call = \max(0, S - X)$$

$$Put = \max(0, X - S)$$

Non può avere un valore negativo perché il titolare dell'opzione, non avendo un obbligo, non la eserciterebbe lasciandola decadere. In base al valore intrinseco (*intrinsic value*) l'opzione può essere *in-the-money* (ITM), *at-the-money* (ATM) o *out-of-the-money* (OTM).

Stato	Call	Put
In-the-money	$S > X$	$S < X$
At-the-money	$S = X$	$S = X$
Out-of-the-money	$S < X$	$S > X$

Se un'opzione ha valore intrinseco positivo è detta *in-the-money* ed è quindi conveniente per il titolare esercitarla. Più precisamente, quando:

- in una opzione *call*, il prezzo dell'attività sottostante sul mercato è maggiore del prezzo di esercizio;
- in una opzione *put*, il prezzo di esercizio è maggiore del prezzo di mercato dell'attività sottostante.

L'opzione è *at-the-money* quando ha valore intrinseco pari a zero ed è indifferente per il titolare esercitarla oppure no. Questo è il caso in cui il prezzo d'esercizio è uguale al prezzo dell'attività sottostante. Potrebbe comunque risultare conveniente esercitare l'opzione se si considerano le commissioni di intermediazione, dovute

all'intermediario, per gli eventuali acquisti sullo stesso sottostante e le aspettative sull'andamento futuro del sottostante medesimo.

L'opzione è *out-of-the-money* quando ha valore intrinseco pari a zero ed è quindi non conveniente per il titolare esercitarla. Più precisamente, quando:

- in una opzione *call*, il prezzo di esercizio supera il prezzo dell'attività sottostante sul mercato;
- in una opzione *put*, il prezzo di mercato dell'attività sottostante supera il prezzo di esercizio.

Le attività sottostanti su cui può essere scritta un'opzione sono diverse. Possono essere scritte opzioni su valute (*currency options*), che danno diritto di acquistare o vendere una determinata quantità di valuta estera: risultano molto utili a istituzioni finanziarie e investitori che desiderano coprirsi dal rischio di cambio.

Diffuse e importanti sono anche le opzioni su indici (*index options*), volte ad esempio all'assicurazione di grossi portafogli azionari ben diversificati, e le opzioni su futures (*futures options*).

Le più note comunque, in Italia, rimangono le opzioni su azioni, come le opzioni ISO- $\alpha$ , che danno diritto al detentore di acquistare o vendere un lotto prefissato di azioni di un certo titolo.

## 1.5 Mibo30

Mibo30 è la sigla che individua il contratto d'opzione di tipo europeo scritto sull'indice Mib30. E' stato introdotto dal Consiglio di Borsa il 15 Novembre 1995, ed è negoziato sull'*IDEM* (*Italian Derivatives Equità Market*).

Il Mibo30 è un contratto d'opzione standardizzato con caratteristiche predefinite. Pagando un premio, pari al prodotto tra il prezzo di negoziazione dell'opzione e il moltiplicatore del contratto (pari a 2.5 Euro, importo attribuito ad ogni punto indice), il contratto attribuisce all'acquirente il diritto a riscuotere a scadenza un importo pari al prodotto tra il moltiplicatore e la differenza tra il valore dell'indice stabilito al momento della stipula del contratto (*strike price*) e il valore alla scadenza (prezzo *spot*). I contratti *future*, come il Fib30 e il MiniFib30, sono contratti simmetrici in cui entrambe le controparti si impegnano ad eseguire a scadenza le condizioni

definite nel contratto stesso; mentre il contratto Mibo30 offre una facoltà (un'opzione appunto) al *buyer* e comporta un obbligo al *writer*. Questo implica che, se si acquista un *future* si rischia una perdita tanto maggiore quanto più elevata è la variazione negativa del prezzo mentre se si acquista un'opzione, la massima perdita in cui si può incorrere è pari al premio pagato. Quindi, nel caso di andamento sfavorevole del mercato, il pagamento del premio da parte del *buyer* svolge una funzione assicurativa<sup>8</sup>, costituendo un limite alla perdita; viceversa, nel caso di un andamento favorevole nei prezzi dell'*underlying*, il premio comporta una riduzione dei guadagni. Per il venditore dell'opzione, invece, i rischi sono alti dal momento che le perdite sono potenzialmente illimitate.

Riportiamo un esempio, chiarificatore di quanto affermato in precedenza, basato sulla tabella 1.2:

Un investitore decide di acquistare un'opzione *call* sul Mib30 con scadenza febbraio 2004 e con lo *strike price* pari a 28.000 punti indice. Il premio è pari a 445.

L'investitore versa un importo pari al premio moltiplicato per il moltiplicatore del contratto (2,5€):  $445 \times 2,5\text{€} = 1112,5\text{€}$

Alla scadenza l'indice vale 28.550 punti indice.

L'opzione è *in-the-money* di 550 punti indice: l'investitore esercita l'opzione e dunque gli viene accreditato un importo pari a:  $(28.550 - 28.000) \times 2,5\text{€} = 1.375\text{€}$ .

Se alla scadenza l'opzione fosse stata *at-the-money* (*strike price* = valore dell'indice), o *out of-the-money* (*strike price* < valore dell'indice), non avrebbe avuto alcun valore e sarebbe scaduta senza essere esercitata, avendo così una perdita solo del valore del contratto (1112,5€.)

Lo scostamento minimo di prezzo (*tick*), inizialmente fissato ad 1 punto indice, varia a seconda del prezzo dell'opzione: se il prezzo dell'opzione è inferiore a 100 punti indice, il *tick* è pari a 1 punto indice; se è compreso tra 102 e 500 punti indice, il *tick* vale 2 punti indice; se invece supera i 505 punti indice, il *tick* è pari a 5 punti indice.

Le negoziazioni si svolgono dalle 9:15 alle 17:40, in cui si può procedere alla stipula di contratti con scadenze mensili e trimestrali (marzo, giugno, settembre e dicembre).

---

<sup>8</sup> Per maggiori dettagli Leland H., "L'assicurazione di portafoglio – Elementi teorici e applicativi?", Il Mulino, 1999, Bologna. Edizione originale: *Portfolio Insurance*.

Strike	Scadenza	Tipo	Prezzo	Tipo	Prezzo
23.000	Febbraio	C	-	P	-
23.500	Febbraio	C	-	P	-
24.000	Febbraio	C	-	P	-
24.500	Febbraio	C	3699	P	11
25.000	Febbraio	C	3220	P	14
25.500	Febbraio	C	-	P	17
26.000	Febbraio	C	2320	P	31
26.500	Febbraio	C	1646	P	51
27.000	Febbraio	C	1314	P	88
27.500	Febbraio	C	804	P	172
28.000	Febbraio	C	445	P	330
28.500	Febbraio	C	193	P	591
29.000	Febbraio	C	76	P	948
29.500	Febbraio	C	-	P	1281
30.000	Febbraio	C	-	P	2200
30.500	Febbraio	C	-	P	-
31.000	Febbraio	C	-	P	-
31.500	Febbraio	C	-	P	-

Tabella 1.2: Alcune Opzioni sull'indice Mib30 quotate al 26 gennaio 2004

In ogni seduta di Borsa sono quotate contemporaneamente sei scadenze: le due scadenze mensili più ravvicinate e le quattro scadenze trimestrali. Per ogni mese di scadenza, l'ultimo giorno di contrattazione coincide con il terzo venerdì del mese alle 9:30. Se si tratta di un giorno di Borsa chiuso, la scadenza si ha nel primo giorno di Borsa aperta precedente. Dal primo giorno di Borsa aperta successivo è quotata la nuova scadenza. Per ogni scadenza *call* e *put* sono quotati almeno 9 prezzi di esercizio (1 *at-the-money*, 4 *in-the-money* e 4 *out-of-the-money*), fissati con intervalli di 500 punti indice. Quotidianamente si introducono nuovi strike price, qualora il Mib30-r (calcolato sui prezzi di riferimento e non sui prezzi ufficiali<sup>9</sup>) subisca variazioni superiori a 500 punti indice.

Un investitore che vuole operare sugli strumenti finanziari negoziati sull'IDEM, ad esempio stipulando un'opzione Mibo30, deve rivolgersi ad un intermediario (*Market maker*) che attesti la propria adesione come *Clearing member* alla *Cassa di Compensazione e Garanzia* (CCG).

<sup>9</sup>Nel MTA e nel Nuovo Mercato il prezzo ufficiale è il prezzo medio, ponderato per le relative quantità, di tutti i contratti conclusi durante la seduta di Borsa, esclusi i contratti eseguiti con la funzione cross-order. Questa definizione differisce per ogni mercato (Mercato Telematico dei covered warrant, Mercato Telematico delle obbligazioni e Titoli di Stato, Euromot, IDEM).

La CCG è una società per azioni, costituita il 31 marzo 1992, i cui azionisti sono la Borsa Italiana S.p.A., 6 banche ed una società di intermediazione mobiliare (SIM). La sua attività, vigilata dalla CONSOB e dalla Banca d'Italia, consiste nell'assicurare la compensazione e la conclusione dei contratti stipulati sia sui mercati dei titoli azionari che sui mercati dei derivati. In particolare funge da *Clearing House* per i derivati negoziati sull'IDEM e sul MIF,<sup>10</sup> ponendosi come controparte negoziale sia dall'acquirente, sia dal venditore dei contratti, in modo che le due parti non entrino mai in contatto. La CCG garantisce la chiusura delle posizioni aperte, attraverso la consegna fisica dell'attività sottostante al contratto, o la compensazione con posizioni di segno opposto. Attraverso un sistema di margini assicura alle parti l'adempimento delle condizioni contrattuali, e in caso di inadempienza di una controparte provvede a regolare quanto dovuto eliminando così il rischio di insolvenza.

Il venditore di un Mibo30 deve versare alla CCG un margine iniziale di garanzia, che può essere corrisposto in contante o in Titoli di Stato. Quando si vendono opzioni, infatti, occorre costituire un deposito di garanzia che tuteli l'intermediario e la *Clearing House* dall'eventualità che l'investitore si possa trovare in uno stato di insolvenza al momento dell'esercizio dell'opzione. I margini richiesti dalla CCG sono esclusivamente margini iniziali; non si richiedono margini di variazione. Nel caso delle opzioni ISO- $\alpha$  il *writer* della *call* può depositare a garanzia i titoli sottostanti: tali posizioni non sono soggette a margini. Alla scadenza del contratto, le posizioni *in-the-money* sono liquidate in contanti, attraverso il versamento alla CCG da parte del venditore della differenza tra lo strike price e il prezzo di liquidazione dell'indice, e attraverso l'accredito del medesimo importo all'acquirente. L'accredito è effettuato dalla CCG il primo giorno di Borsa aperto successivo a quello di scadenza.

Le proposte di negoziazione sono inserite in un *book* e sono caratterizzate da informazioni relative allo strumento, alla quantità, al tipo di operazione e alle condizioni imposte. Gli operatori possono immettere varie proposte, tra cui quella singola (*single orders*), relativa ad una sola opzione; combinata standard (*standard combination orders*), relativa a due opzioni simultaneamente e combinata non standard (*non standard combination orders*) relativa a più opzioni in relazioni non predefinite. Le

---

<sup>10</sup> Mercato regolamentato sul quale si negoziano i futures e le opzioni aventi come attività sottostante Titoli di Stato e tassi d'interesse (future sul BTP a 10 anni, future sul BTP a 30 anni, future sul tasso EURIBOR a 1 mese e opzione sul BTP future).

proposte sono distinte tra acquisto/vendita e ordinate in base al prezzo (assume priorità quella con prezzo migliore) e, a parità di prezzo, in base all'ordine temporale di immissione.

Le opzioni, come ad esempio le Mibo30, sono quindi, strumenti finanziari attraverso i quali gli investitori possono costituire un'esposizione, o coprirsi da un'esposizione sul mercato, con un esborso contenuto di capitale. Consentono inoltre di assumere posizioni sul mercato azionario senza, per questo, dover acquistare i titoli dell'indice.

### 1.5.1 Effetto dei dividendi

L'azionista usufruisce della possibilità di partecipare ai profitti dell'azienda, qualora essi siano distribuiti sotto forma di dividendo, come titolo di remunerazione del capitale investito.

Affinché sia possibile comprendere la valutare di opzioni scritte su titoli che pagano dividendi<sup>11</sup> si procede ad una breve trattazione dell'argomento.

Per quanto riguarda il trattamento dei dividendi, la maggior parte degli indici azionari (tra cui il Mib30) è calcolato in base ai corsi *tel quel*<sup>12</sup> dei titoli, cosicché nei giorni di stacco dei dividendi si verifica, a parità di altre condizioni, una riduzione dell'indice causata dalla riduzione del valore di mercato dei titoli che lo compongono.

Una minoranza di indici tiene invece conto dello stacco dei dividendi, o con l'aggiunta del dividendo già pagato al valore dei titoli inclusi, o con la valutazione dei titoli a *corso secco*<sup>13</sup> presunto.

Se l'indice è sufficientemente ampio e le distribuzioni di dividendi sono ripartite regolarmente durante l'anno, è allora legittimo supporre in prima approssimazione che i dividendi delle azioni che lo compongono siano versati in continuo ad un tasso costante  $q$ , detto *dividend yield*. Tuttavia questo approccio può tradursi in errori nella

---

<sup>11</sup> Questa parte del lavoro viene inserita solo a titolo nozionistico; in quanto il lavoro seguente verterà su opzioni europee scritte su titoli che non pagano dividendi.

<sup>12</sup> Prezzo di negoziazione comprensivo del rateo di interesse/dividendo maturato dal giorno dell'ultimo godimento al giorno della negoziazione. Se un titolo è negoziato a corso *tel quel* la parte di interesse/dividendo maturati spettano a chi vende il titolo e non al suo acquirente. Le azioni e le obbligazioni zero coupon sono quotate con questa modalità.

<sup>13</sup> Prezzo al quale è negoziato il solo capitale del titolo. Sul mercato di Borsa italiano sono negoziati a *corso secco* i BTP, i CCT e le obbligazioni ad eccezione di alcuni casi particolari. Per questi titoli il prezzo pagato all'atto della negoziazione è pari alla somma del corso secco e degli interessi maturati dall'ultimo godimento fino al giorno in cui si liquida l'operazione di compravendita.

valutazione, perché i dividendi possono avere un'influenza negativa (positiva) sul prezzo delle *calls* (*puts*) quanto più le opzioni siano prossime alla scadenza, quanto più gli stacchi siano concentrati durante la vita residua dell'opzione e quanto più le azioni che distribuiscono i dividendi abbiano un grosso peso nell'indice; quindi, sarebbe preferibile tenere conto dei dividendi che saranno realmente versati dalle società durante la vita residua dell'opzione. Tuttavia questo implica che si conosca l'ammontare e la data di stacco dei dividendi con certezza. Ciò non crea grossi problemi quando l'opzione ha una vita residua breve, in quanto le società solitamente annunciano la data di stacco e l'ammontare del dividendo con largo anticipo. I maggiori rischi si hanno, anche su scadenze brevi, in possibili riduzioni dell'ammontare del dividendo fino alla sua completa sospensione, mentre possibili aumenti dell'ammontare sono meno frequenti e più prevedibili. Un ulteriore rischio sorge quando si prevede che azioni componenti l'indice stacchino un dividendo di ammontare significativo in prossimità della data di scadenza dell'opzione: in questo caso non si è sicuri se considerarlo o meno, poiché non si conosce con esattezza se la data di stacco cadrà prima o dopo la data di scadenza dell'opzione.

Il Mib30 non è soggetto ad una "erosione" continua e costante del suo valore a causa dei dividendi staccati dalle azioni dell'indice stesso. La quasi totalità delle società componenti l'indice staccano il proprio dividendo una volta l'anno nei mesi di aprile, maggio o giugno.

Poiché, come abbiamo detto, le società annunciano con un certo anticipo lo stacco del dividendo, questo implica che le date di stacco e gli importi siano prevedibili. Pertanto, si dovrà apportare un aggiustamento del valore dell'indice nel caso in cui vengano distribuiti dividendi durante la vita delle singole opzioni esaminate.

Nel caso di distribuzione continua dei dividendi si tratta in sostanza di rettificare il prezzo dell'indice  $S_T$  attraverso il fattore di sconto in regime continuo al valore del *dividend yield*,  $q$ , e per il tempo residuo alla scadenza  $(T - t)$ .

$$S_t^* = S_t e^{-q(T-t)}$$

Nel caso di distribuzione reale dei dividendi, l'aggiustamento si ottiene in pratica sottraendo dal prezzo dell'indice il valore dei dividendi attualizzando per il tempo intercorrente fino alla data di stacco.

Nel caso del Mib30 si ha

$$S_t^* = S_t - \sum_{i=1}^{30} D_i e^{-rt_i}$$

dove  $D_i$  è l'importo del dividendo della società  $i$ -esima e  $t_i$  il tempo che manca allo stacco.

Vediamo, nel caso del Mib30, come si possono effettuare i calcoli necessari. Riprendiamo la formula dell'indice e la modifichiamo in modo da evidenziare  $p(t, i)$  ottenendo

$$Mib30(t) = \sum_{i=1}^{30} p(t, i) \left( \frac{q(0, i)}{\sum_{i=1}^{30} p(0, i) q(0, i)} 10.000 \right) = \sum_{i=1}^{30} p(t, i) g(t, i)$$

avendo definito

$$g(i) = \frac{q(0, i)}{\sum_{i=1}^{30} p(0, i) q(0, i)} 10.000$$

Notiamo che  $g(i)$  non sono veri e propri pesi, in quanto la loro somma non è necessariamente pari a 1. Infatti

$$\sum_{i=1}^{30} g(i) = \frac{\sum_{i=1}^{30} q(0, i)}{\sum_{i=1}^{30} p(0, i) q(0, i)} 10.000$$

cioè otteniamo una frazione, moltiplicata per 10.000, con il denominatore pari alla capitalizzazione base del paniere e il numeratore pari alla somma di tutte le azioni nel periodo base. I “pseudo-pesi” sono i veri moltiplicatori dei prezzi delle azioni nel calcolo del valore dell'indice, che devono essere utilizzati per pesare i dividendi in modo da tener conto della capitalizzazione borsistica delle azioni che li distribuiscono, e da trasformare il valore del dividendo pesato da unità monetaria in

un valore in punti indice, che quindi può essere detratto (dopo essere stato attualizzato) dal valore dell'indice.

Ad ogni modo, nel corso di lavori empirici che prevedono simulazioni è necessario disporre del valore del *dividend yield*; alcuni concetti che verranno espressi in questa parte conclusiva del paragrafo saranno di maggior comprensione al lettore solo dopo aver preso visione del capitolo successivo. Seguendo similmente la metodologia adottata da Engle, Noh e Kane<sup>14</sup> è possibile costruire la serie mensile del *dividend yield* implicito grazie alla *put-call parity*. La relazione che lega il prezzo della *put* con quello della *call*; nel caso di opzioni scritte su indici è la seguente

$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + S_t e^{-q(T-t)}$$

dove  $c$  e  $p$  sono rispettivamente i prezzi della *call* e della *put*,  $r$  il *risk-free*,  $q$  il *dividend yield*,  $S_t$  il valore corrente del sottostante,  $X$  lo strike price,  $T-t$  la vita residua dell'opzione. Esplicitando  $q$  otteniamo il *dividend yield* implicito.

$$q = -\frac{1}{(T-t)} \ln\left(\frac{c + Xe^{-r(T-t)} - p}{S_t}\right)$$

Tramite l'equazione precedente si stima giornalmente il valore del *dividend yield* eliminando le osservazioni che rendono nullo o negativo il numeratore del logaritmo. Forzando la *put-call parity* è naturale aspettarsi molti casi in cui il valore risulta negativo. Si calcola infine una media mensile, e nel caso risulti negativa il *dividend yield* è posto a zero.

---

<sup>14</sup> Engle R. F., Noh J., Kane A., "A Test of Efficiency for the S&P500 Index Option Market Using Variance Forecasts", Journal of Derivatives, 2, (1994), 17-30.



## Capitolo II

L'obiettivo di questo capitolo è quello di ricavare una espressione esplicita del prezzo di equilibrio di un'opzione *call* di tipo europeo scritta su titoli che non pagano dividendi.

L'equazione differenziale di Black & Scholes rappresenta un punto concettuale di primaria importanza nel modello di determinazione del prezzo delle opzioni “*option pricing model*”. La comprensione di questo approccio, quindi, rappresenta il primo passo per comprendere la valutazione delle opzioni e di altri derivati più complessi. Il modello Black & Scholes offre una descrizione meno che perfetta del mondo reale; gli operatori però ricorrono, nella pratica, molto frequente a tale modello sia perché è di facile utilizzo sia perché richiede la stima di un solo parametro: la volatilità.

Nel capitolo, oltre ad analizzare le assunzioni che determinano la soluzione proposta da Black & Scholes, si introduce un concetto chiave per ovviare il problema della stima della volatilità: la *volatility smile*.

### 2.1 Analisi Black & Scholes

All'inizio degli anni '70, Fischer Black e Myron Scholes hanno scritto un lavoro fondamentale nel quale hanno ricavato l'equazione differenziale che deve essere soddisfatta dal prezzo,  $c$ , di ogni derivato che dipende da un titolo che non paga

dividendi.<sup>1</sup> L'equazione venne usata da questi autori per ricavare le formule di valutazione delle *calls* e delle *puts* scritte su azioni. Il loro lavoro, ancora oggi, ha un'enorme influenza sul modo in cui gli operatori valutano le opzioni e su come costruiscono le operazioni di copertura.

Black e Scholes scoprirono che sotto le loro assunzioni è possibile formare un portafoglio privo di rischio acquistando azioni e vedendo una *call* europea scritta sullo stesso. (Teoricamente, resta privo di rischio solo per un periodo istantaneamente breve).

Il motivo per cui è possibile formare un portafoglio privo di rischio dipende dal fatto che sia il prezzo dell'azione sia il prezzo dell'opzione sono influenzati dalla stessa fonte di incertezza: le variazioni del prezzo dell'azione. In ogni breve intervallo di tempo, il prezzo di una *call* è perfettamente correlato, in modo positivo, con il prezzo del titolo sottostante mentre il prezzo di una *put* è perfettamente correlato in modo negativo. In entrambi i casi, quando si forma un appropriato portafoglio di azioni e opzioni, il profitto o la perdita sulla posizione in titoli viene sempre compensato dalla perdita o dal profitto sulla posizione in opzioni cosicché il valore complessivo del portafoglio alla fine del breve intervallo di tempo risulta sempre noto con certezza.

Si supponga, ad esempio, che in un particolare istante di tempo la relazione tra una piccola variazione del prezzo dell'azione,  $\Delta S$ , e la conseguente piccola variazione del prezzo di una *call* europea,  $\Delta c$ , sia la seguente:

$$\Delta c = 0,6\Delta S .$$

Data questa relazione, che nel breve periodo può essere considerata come deterministica, un portafoglio con, una posizione lunga su 0,6 azioni ed una posizione corta su 1 *call* è privo di rischio.

Questo vale solo per un breve periodo di tempo; per restare privo di rischio il portafoglio deve essere aggiustato o “ribilanciato” spesso<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Si veda Black F. e Scholes M., “ *The pricing of Options and colorate Liabilities* ”, Journal of Political Economy, 81 (maggio-giugno 1973), 637-54.

<sup>2</sup> Si veda paragrafo 2.9.

Le assunzioni fatte per ricavare l'equazione differenziale di Black e Scholes sono le seguenti:

1. Il prezzo dell'azione segue una distribuzione log-normale con media e varianza costanti.
2. Le vendite allo scoperto sono consentite e non esistono restrizioni all'utilizzo dei relativi proventi.
3. Non esistono costi di transizione o tasse. I titoli sono perfettamente divisibili.
4. L'azione non paga dividendi durante la vita del derivato.
5. Non esistono opportunità di arbitraggio prive di rischio.
6. I titoli vengono negoziati continuamente.
7. Il tasso d'interesse a breve privo di rischio,  $r$ , è uguale per tutte le scadenze.

## 2.2 Assunzione di log-normalità dei prezzi delle azioni

Una variabile è distribuita in modo log-normale se il logaritmo naturale della variabile ha una distribuzione normale. Se il prezzo,  $S$ , di un'azione segue un moto geometrico Browniano

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{2.1}$$

e per il "lemma di Ito"<sup>3</sup> si ha:

$$d \ln(S) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \tag{2.2}$$

Di conseguenza  $\ln(S_T)$  segue un processo di Wiener generalizzato e  $\ln(S_T)$  ha la seguente distribuzione.

---

<sup>3</sup> Si veda Ito K., "On Stochastic differential Equations", Memoirs, American Mathematical Society, 4 (1951), 1-51.

$$\ln(S_T) - \ln(S_t) \approx N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{(T-t)}\right] \quad (2.3)$$

dove  $S_T$  è il prezzo dell'azione nel futuro istante di tempo  $T$ ,  $S$  è il prezzo dell'azione al tempo corrente  $t$  e  $N(m, s)$  sta ad indicare una distribuzione normale con media  $m$  e deviazione standard  $s$ .

La deviazione standard di  $\ln(S_T)$  è proporzionale a  $\sqrt{T-t}$ . Ciò vuol dire che la nostra incertezza circa il logaritmo del prezzo dell'azione, così com'è misurata dalla sua deviazione standard, è proporzionale alla radice quadrata di quanto lontano guardiamo in avanti nel tempo.

Il valore atteso di  $S_T$  e la sua varianza sono:

$$E(S_T) = S e^{\mu(T-t)}$$

$$VAR(S_T) = S^2 e^{2\mu(T-t)} [e^{2\sigma^2(T-t)} - 1] \quad (2.4)$$

### 2.3 Distribuzione del tasso di rendimento

Le proprietà di log-normalità dei prezzi delle azioni possono essere usate per avere informazioni sulla distribuzione probabilistica del tasso di rendimento dell'azione (composto continuamente) relativo al periodo tra  $t$  e  $T$ . Sia  $\eta$  il tasso di rendimento annuo (composto continuamente) relativo al periodo tra  $t$  e  $T$ .<sup>4</sup> Se

$$S_T = S e^{\eta(T-t)}$$

applicando il  $\ln()$  si ha

---

<sup>4</sup> E' importante distinguere tra il tasso di rendimento annuo composto continuamente,  $\eta$ , e il tasso di rendimento annuo non composto. Quest'ultimo pari a

$$\frac{1}{T-t} \left( \frac{S_T - S}{S} \right)$$

il quale è sempre maggiore di  $\eta$ .

$$\eta = \frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{S_T}{S}\right) \quad (2.5)$$

in base alle proprietà delle distribuzioni normali, sostituendo l'equazione (2.3) nell'equazione (2.5) si ha che il tasso di rendimento annuo composto dell'azione (composto continuamente) è distribuito in modo normale con media  $\mu - \sigma^2/2$  e deviazione standard  $\sigma/\sqrt{(T-t)}$ . Ovvero

$$\eta \approx N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}\right) \quad (2.6)$$

## 2.4 Stima della volatilità in base ai dati storici

Per stimare la volatilità del prezzo di un'azione si può utilizzare la serie storica dei suoi tassi di variazione<sup>5</sup>. Di solito, il prezzo di un'azione viene rilevato ad intervalli di tempo fissi (ad esempio, ogni giorno, ogni settimana od ogni mese).

Sia :

$n + 1$ : il numero di osservazioni

$S_i$ : il prezzo dell'azione alla fine  $i$ -esimo intervallo ( $i = 0, 1, \dots, n$ )

$\tau$ : la lunghezza dell'intervallo in anni

e sia

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Dato che  $S_i = S_{i-1}e^{u_i}$ ,  $u_i$  è il tasso di rendimento composto continuamente (non annualizzato) relativo all'intervallo. Una stima,  $s$ , della deviazione standard delle  $u_i$  è data da

---

<sup>5</sup> Nel proseguo della tesi spiegheremo un altro metodo per determinare la volatilità del prezzo di un'azione basato sulla volatilità implicita.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$$

dove  $\bar{u}$  è la media delle  $u_i$ .

In base all'equazione (2.3), la deviazione standard delle  $u_i$  è pari a  $\sigma\sqrt{\tau}$ . Pertanto, la variabile  $s$  è una stima di  $\sigma\sqrt{\tau}$ . Ne segue che lo stesso  $\sigma$  può essere stimato da  $s^*$ , dove

$$s^* = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

L'errore standard di questa stima è approssimativamente pari a  $s^* / \sqrt{2n}$ .

Scegliere un valore appropriato per  $n$  non è facile. A parità di condizioni, più dati si usano maggiore è l'accuratezza. Tuttavia,  $\sigma$  cambia nel tempo e i dati troppo vecchi possono non essere rilevanti per prevedere il futuro. Un compromesso che sembra funzionare abbastanza bene è quello di usare i prezzi di chiusura giornalieri degli ultimi 90 -180 giorni. Una regola pratica che viene spesso usata è quella di far corrispondere il periodo di tempo nel quale si misura la volatilità con il periodo di tempo al quale va applicata. Pertanto, se si tratta di valutare un'opzione a 12 mesi si useranno 12 mesi di dati storici.

Una questione importante è poi quella dell'unità di misura del tempo: dovendo stimare, ed usare, i parametri di volatilità occorre decidere se il tempo vada misurato in giorni di calendario o in giorni lavorativi. Ricerche empiriche condotte finora suggeriscono l'adozione dei giorni lavorativi. In altri termini, ai fini del calcolo della volatilità, si dovrebbero ignorare i giorni in cui le borse sono chiuse.

Le formule precedenti assumono che il titolo non paghi dividendi ma possono essere adattate al caso in cui il titolo paghi dividendi. Il tasso di rendimento,  $u_i$ , relativo ad un intervallo di tempo che include una data di stacco dei dividendi è dato da

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i + D}{S_{i-1}}\right)$$

dove  $D$  è l'importo del dividendo. Il tasso di rendimento relativo agli altri intervalli resta uguale. Tuttavia, dato che i fattori fiscali giocano un ruolo di rilievo nel

determinare i tassi di rendimento in prossimità di una data di stacco dei dividendi, probabilmente è meglio scartare tutte le osservazioni relative ad intervalli che includono una data di stacco.

## 2.5 Equazione differenziale di Black & Scholes

Assumiamo che il prezzo *spot*,  $S$ , dell'azione segua il processo presentato nell'equazione (2.1).

Sia  $c$  il prezzo di una *call* o di un altro derivato che dipende da  $S$ . La variabile  $c$  deve essere una certa funzione di  $S$  e  $t$ . Pertanto in base al lemma di Ito<sup>6</sup> nelle versioni discrete si ha:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \quad (2.7)$$

e

$$\Delta c = \left( \frac{\partial c}{\partial t} \mu S + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial c}{\partial S} \sigma S \Delta z \quad (2.8)$$

dove  $\Delta S$  e  $\Delta c$  sono le variazioni di  $S$  e  $c$  in un piccolo intervallo di tempo,  $\Delta t$ . In riferimento al lemma di Ito, i processi di Wiener da cui è influenzata la dinamica di  $S$  e  $c$  sono gli stessi; in altri termini, nelle equazioni (2.7) e (2.8), i  $\Delta z$  equivalgono a  $\varepsilon \sqrt{\Delta t}$ <sup>7</sup>. Ne segue che, scegliendo un portafoglio composto dall'azione e dal derivato, il processo di Wiener può essere eliminato.

Il portafoglio appropriato è così composto:

$$\begin{aligned} & -1: \text{derivato} \\ & + \frac{\partial c}{\partial S} : \text{azione.} \end{aligned}$$

<sup>6</sup> Si veda Ito K., (1951).

<sup>7</sup> Due sono le proprietà fondamentali affinché  $z$  segua un processo di Wiener:

Proprietà 1:  $\Delta z$  è legata a  $\Delta t$  dall'equazione

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

dove  $\varepsilon$  è un'estrazione casuale da una distribuzione normale standardizzata.

Proprietà 2: I valori di  $\Delta z$  in due qualsiasi intervalli di tempo  $\Delta t$ , diversi tra loro, sono indipendenti.

Il detentore di questo portafoglio è corto di un derivato e lungo di una quantità di azioni pari a  $\partial c / \partial S$ . Sia  $V$  il valore del portafoglio; e quindi per definizione si ha:

$$V = -c + \frac{\partial c}{\partial S} S \quad (2.9)$$

La variazione,  $\Delta V$ , del valore del portafoglio nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  è data da

$$\Delta V = -\Delta c + \frac{\partial c}{\partial S} \Delta S \quad (2.10)$$

Sostituendo le equazioni (2.7) e (2.8) nell'equazione (2.10) si ottiene

$$\Delta c = \left( -\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (2.11)$$

Dato che in quest'equazione non figura il termine  $\Delta z$ , il portafoglio è privo di rischio durante l'intervallo di tempo  $\Delta t$ . Le assunzioni elencate nel paragrafo 2.1 implicano che il portafoglio deve rendere nel prossimo istante di tempo lo stesso tasso di rendimento dei titoli a breve privi di rischio. Se rendessero di più, gli arbitraggisti potrebbero far profitti vendendo titoli privi di rischio per finanziare l'acquisto del portafoglio; se rendessero di meno, essi potrebbero far profitti vendendo il portafoglio per finanziare l'acquisto di titoli privi di rischio. Ne segue

$$\Delta V = rV\Delta t$$

dove  $r$  è il tasso d'interesse privo di rischio. Sostituendo in base alle equazioni (2.9) e (2.11) e dopo alcuni passaggi algebrici si ha

$$rc = \left( \frac{\partial c}{\partial t} + rS \frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right) \quad (2.12)$$

L'equazione (2.12) è l'equazione differenziale di Black e Scholes. Ha molte soluzioni, una per ogni derivato che dipende da  $S$ . La soluzione particolare che si ottiene risolvendo l'equazione dipende dalle "condizioni al contorno" (*boundary conditions*).

Queste condizioni definiscono il valore del derivato per valori estremi di  $S$  e  $t$ . Nel caso di una *call* europea, la principale condizione al contorno è

$$c = \max(S - X, 0) \text{ quando } t = T.$$

Nel caso di una *put* europea è

$$c = \max(X - S, 0) \text{ quando } t = T.$$

Il portafoglio con valore corrente  $V$  resta privo di rischio solo per un periodo di tempo infinitesimo. Quando  $S$  e  $t$  cambiano anche  $\partial c / \partial S$  cambia. Pertanto, per mantenere il portafoglio privo di rischio, è necessario aggiustare frequentemente le proporzioni relative del derivato e dell'azione in portafoglio.

## 2.6 Valutazione neutrale verso il rischio

La valutazione neutrale verso il rischio (RNVR) è senza dubbio lo strumento più importante per l'analisi dei derivati. Trae origine da una proprietà fondamentale dell'equazione (2.12), cioè dall'equazione differenziale di Black e Scholes: in quest'equazione non figurano variabili che sono influenzate dalla propensione al rischio degli investitori. Le variabili che appaiono nell'equazione sono il prezzo corrente dell'azione, il tempo, la volatilità dell'azione e il tasso d'interesse privo di rischio. Tutte queste variabili non dipendono dalla propensione al rischio degli investitori.

L'equazione di Black e Scholes non sarebbe indipendente dalla propensione al rischio degli investitori se contenesse il tasso di rendimento atteso dell'azione,  $\mu$ . Il livello di  $\mu$  dipende dalla propensione al rischio: più elevata è l'avversione al rischio degli investitori, più elevato sarà il  $\mu$  relativo ad ogni titolo.

Fortunatamente, nel ricavare l'equazione, i termini in  $\mu$  si elidono tra di loro.

Il fatto che l'equazione differenziale di Black e Scholes sia indipendente dalla propensione al rischio degli investitori ci consente di utilizzare un'ingegnosa argomentazione. Se è vero che la propensione al rischio non figura nell'equazione differenziale, ne segue che essa non può influenzare la soluzione. Pertanto, al fine di determinare il valore corrente,  $c$ , del derivato possiamo fare qualsiasi assunzione circa la propensione al rischio degli investitori. In particolare, possiamo semplicemente assumere che siano tutti neutrali verso il rischio.

In un mondo in cui gli investitori sono neutrali verso il rischio, il tasso di rendimento atteso di tutti i titoli è uguale al tasso privo di rischio,  $r$ . Ciò perché gli investitori non richiedono alcun premio per assumersi dei rischi. E' anche vero che, in un mondo neutrale verso il rischio, il valore attuale di ogni futuro pagamento può essere ottenuto attualizzando il valore atteso al tasso privo di rischio. Pertanto, l'assunzione che il mondo sia neutrale verso il rischio semplifica notevolmente l'analisi dei derivati. Si ricordi ad esempio un'opzione europea che paghi alla scadenza una certa funzione del prezzo, al tempo  $T$ , dell'azione sottostante. Innanzitutto si calcola il valore atteso, al tempo  $T$ , di questo derivato assumendo che il tasso di rendimento atteso dell'azione sia  $r$  piuttosto che  $\mu$ ; poi, questo valore atteso viene attualizzato al tempo corrente usando  $r$  come tasso per l'attualizzazione.

Va tenuto presente che l'assunzione di neutralità verso il rischio rappresenta solo un espediente tecnico per ottenere le soluzioni dell'equazione differenziale di Black e Scholes. Le soluzioni ottenute sono valide comunque e non solo nel caso in cui gli investitori siano neutrali verso il rischio. Quando passiamo da un mondo neutrale verso il rischio ad un mondo di avversione al rischio, due sono le cose che succedono; cambia il tasso di rendimento atteso dell'azione e cambia il tasso d'interesse da usare per attualizzare il valore finale dei derivati. Questi due effetti però, si compensano esattamente tra di loro.

## 2.7 Formule di valutazione di Black & Scholes

Black e Scholes sono riusciti a risolvere la loro equazione differenziale al fine di ottenere le formule chiuse di valutazione delle *calls* e *puts* europee scritte su titoli che

non pagano dividendi. Queste formule sono rappresentate dalle equazioni (2.14) e (2.15).

In un mondo neutrale verso il rischio, il valore atteso alla scadenza di una *call* europea è

$$\hat{E}[\max(S_T - X, 0)]$$

dove il simbolo  $\hat{E}$  sta ad indicare l'operatore valore atteso in un mondo neutrale verso il rischio. In base all'argomentazione della valutazione neutrale verso il rischio, il valore  $c$  di una *call* europea si ottiene attualizzando quest'espressione in base al tasso d'interesse privo di rischio:

$$c = e^{-r(T-t)} \hat{E}[\max(S_T - X, 0)] \quad (2.13)$$

in un modo neutrale verso il rischio, la variabile  $\ln(S_T)$  ha la distribuzione probabilistica riportata nell'equazione (2.4) con  $\mu$  sostituito da  $r$ .

La valutazione del lato destro dell'equazione (2.13) rappresenta un'applicazione del calcolo integrale<sup>8</sup>.

Il risultato è

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (2.14)$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

---

<sup>8</sup> Se  $g$  è la funzione di densità di  $S_T$  in un mondo neutrale verso il rischio, data dall'equazione (2.4) con  $r$  al posto di  $\mu$ , l'equazione (2.13) diventa  $c = e^{-r(T-t)} \int_X^\infty (S_T - X)g(S_T)dS_T$ .

Sostituendo  $S_T$  con  $e^w$ , quest'integrale viene trasformato in un altro che dipende dalla distribuzione normale piuttosto che log-normale.

$N(x)$  è la funzione di distribuzione cumulata di una variabile che si distribuisce in modo normale con media nulla e deviazione standard pari a 1 (ossia è la probabilità che tale variabile assuma un valore inferiore ad  $x$ ).

L'equazione (2.14) può anche essere scritta nel modo seguente:

$$c = e^{-r(T-t)} [SN(d_1)e^{r(T-t)} - XN(d_2)]$$

L'espressione  $N(d_2)$  è la probabilità (in mondo neutrale verso il rischio) che l'opzione venga esercitata, cosicché  $XN(d_2)$  è il prezzo d'esercizio moltiplicato per la probabilità che il prezzo d'esercizio verrà pagato. L'espressione  $SN(d_1)e^{r(T-t)}$  è il valore atteso (in un mondo neutrale al rischio) di una variabile che è pari a  $S_T$  se  $S_T > X$  ed è pari a zero altrimenti. Il valore di una *put* europea può essere determinato in modo analogo a quello visto per la *call* europea. In alternativa, si può usare la *put-call parity*.

Si ha quindi

$$p = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{2.15}$$

Si noti che, per ricavare le equazioni (2.14) e (2.15), si è assunto che il tasso d'interesse privo di rischio,  $r$ , sia costante. In pratica, quando si usano queste equazioni, il tasso di interesse,  $r$ , viene posto uguale a quello relativo ad un investimento privo di rischio di durata  $T - t$ , ossia di durata pari alla vita residua dell'opzione.

## 2.8 Proprietà delle formule di Black e Scholes

Quando il prezzo dell'azione,  $S$ , diventa molto elevato, la *call* verrà quasi certamente esercitata. Diventa quindi simile ad un contratto *forward*<sup>9</sup> con prezzo di consegna  $X$ . Pertanto il prezzo della *call* dovrebbe essere

$$S - Xe^{-r(T-t)}.$$

---

<sup>9</sup> I contratti forward sono derivati particolarmente semplici. Sono accordi per comprare o vendere un'attività ad una certa data futura, per un certo prezzo. Di solito vengono stipulati tra due istituzioni finanziarie o tra un'istituzione finanziaria ed uno dei suoi clienti societari.

In effetti, questo è il prezzo della *call* fornito dall'equazione (2.14), dato che, quando  $S$  diventa molto elevato,  $d_1$  e  $d_2$  assumono valori molto grandi e  $N(d_1)$  e  $N(d_2)$  sono prossimi ad 1; mentre il prezzo di una *put* europea,  $p$ , tende a zero. Questo è infatti il prezzo della *put* fornito dall'equazione (2.15), dato che  $N(-d_1)$  e  $N(-d_2)$  sono entrambi prossimi a 0.

Si consideri ora cosa succede quando la volatilità,  $\sigma$ , tende a zero. Dato che l'azione diventa priva di rischio, il suo prezzo crescerà al tasso  $r$ , portandosi a  $Se^{r(T-t)}$  al tempo  $T$  ed il valore finale della *call* sarà

$$\max[Se^{r(T-t)} - X, 0]$$

Attualizzando al tasso  $r$ , il valore corrente della *call* sarà pari a

$$e^{-r(T-t)} \max[Se^{r(T-t)} - X, 0] = \max[S - Xe^{-r(T-t)}, 0]$$

Per verificare che questo risultato sia coerente con l'equazione (2.14), si consideri innanzitutto il caso in cui risulti  $S > Xe^{-r(T-t)}$ . Questa disuguaglianza implica che  $\ln(S/X) + rT > 0$ . Al tendere di  $\sigma$  a zero,  $d_1$  e  $d_2$  tendono a  $+\infty$  cosicché  $N(d_1)$  e  $N(d_2)$  tendono ad 1 e l'equazione (2.14) diventa

$$c = S - Xe^{-r(T-t)}.$$

Nel caso in cui sia  $S < Xe^{-r(T-t)}$  si ha invece che  $\ln(S/X) + rT < 0$ . Al tendere di  $\sigma$  a zero,  $d_1$  e  $d_2$  tendono a  $-\infty$  cosicché  $N(d_1)$  e  $N(d_2)$  tendono ad 0 e l'equazione (2.14) fornisce un prezzo *call* pari a zero. Pertanto, il prezzo *call*, al tendere di  $\sigma$  a zero, è sempre uguale a  $\max[S - Xe^{-r(T-t)}, 0]$ . Analogamente, si può dimostrare che il prezzo della *put* è sempre uguale a  $\max[Xe^{-r(T-t)} - S, 0]$  al tendere di  $\sigma$  a zero.

## 2.9 Implicazioni del modello Black & Scholes

Il modello Black & Scholes può essere utilizzato per stabilire alcune importanti caratteristiche dell'andamento dei prezzi delle opzioni.

Per esprimere la variazione di prezzo di un'opzione (variabile dipendente) è importante individuare rispetto a cosa varia (variabile indipendente), la direzione della variazione (il segno) e di quanto varia (coefficiente di variazione).

Sono sei i fattori che influenzano il prezzo di un'opzione scritta su un'azione:

- 1 Il prezzo corrente dell'azione.
- 2 Il prezzo d'esercizio.
- 3 La vita residua.
- 4 La volatilità del prezzo dell'azione.
- 5 Il tasso d'interesse privo di rischio.
- 6 I dividendi attesi durante la vita dell'opzione.

In questo paragrafo vedremo cosa succede ai prezzi delle opzioni quando uno di questi fattori cambia mentre tutti gli altri restano invariati. I risultati sono stati riassunti nella Tabella 2.1.

### Prezzo dell'Azione e Prezzo d'Esercizio

Il valore finale di una *call* che viene esercitata è pari alla differenza tra il prezzo dell'azione ed il prezzo d'esercizio. Pertanto, le *calls* valgono di più al crescere del prezzo dell'azione e valgono di meno al crescere del prezzo d'esercizio. Per una *put* che viene esercitata, il valore finale è pari alla differenza tra il prezzo d'esercizio e il prezzo dell'azione. Pertanto le *puts* si comportano in modo opposto a quello delle *calls*. Valgono di meno al crescere del prezzo dell'azione e valgono di più al crescere del prezzo d'esercizio.

### Vita Residua

Si consideri ora l'effetto della data di scadenza. Sia le *calls* che le *puts* americane valgono di più al crescere della vita residua. Per capire perché, si considerino due opzioni che differiscono tra loro solo per la data di scadenza. Chi possiede l'opzione con la vita residua maggiore ha tutte le opportunità di esercizio del possessore

dell'opzione con la vita residua minore – e altre ancora. Pertanto, l'opzione con la vita più lunga deve valere almeno quanto l'opzione con la vita più breve.

Le *calls* e le *puts* europee non valgono necessariamente di più al crescere della vita residua. Ciò perché non è vero che il possessore dell'opzione europea con vita residua maggiore abbia tutte le opportunità di esercizio del possessore dell'opzione europea con vita residua minore. Chi possiede l'opzione europea con la vita più lunga può esercitarla solo alla scadenza. Si considerino due *calls* europee scritte sulla stessa azione, una con scadenza tra 1 mese e l'altra con scadenza tra 2 mesi. Si supponga che tra 6 settimane verrà pagato un cospicuo dividendo. Lo stacco del dividendo farà scendere il prezzo dell'azione. Ciò può comportare che l'opzione con la vita più lunga valga meno dell'opzione con la vita più breve.

### **Volatilità**

In prima approssimazione si può dire che la “*volatilità*” del prezzo di un titolo misura quanta incertezza esiste circa i futuri movimenti del prezzo del titolo. Al crescere della volatilità cresce la probabilità che la *performance* del titolo risulti molto brillante o molto modesta. Per chi possiede il titolo, questi due risultati tendono a compensarsi l'uno con l'altro. Non è invece così per chi possiede una *call* o una *put*. Chi possiede una *call* trae beneficio dagli aumenti di prezzo dell'azione ma ha un rischio inferiore (*downside risk*) limitato, perché nel caso di una riduzione del prezzo dell'azione il massimo che può perdere è il prezzo dell'opzione. Analogamente, chi possiede una *put* trae beneficio dalle riduzioni del prezzo dell'azione ma ha un *downside risk* limitato nel caso di un aumento del prezzo dell'azione. Pertanto, il valore delle *calls* e delle *puts* aumentano al crescere della volatilità.

### **Tasso d'Interesse Privo di Rischio**

Il tasso di interesse privo di rischio influenza il prezzo di un'opzione in modo meno chiaro. All'aumentare dei tassi di interesse nell'economia, il tasso di crescita atteso del prezzo dell'azione tende ad aumentare. Tuttavia, per chi detiene un'opzione, il valore attuale di ogni futuro flusso di cassa diminuisce. Entrambi questi effetti tendono a deprimere il valore di una *put*. Pertanto, il prezzo di una *put* diminuisce all'aumentare del tasso d'interesse privo di rischio. Nel caso delle *calls*, il primo effetto tende a far

crescere il prezzo dell'opzione mentre il secondo tende a deprimerlo. Si può dimostrare che il primo effetto domina sempre il secondo; in altri termini, il prezzo di una *call* aumenta sempre all'aumentare del tasso d'interesse privo di rischio.

Queste argomentazioni ipotizzano che le altre variabili restino invariate. In pratica, quando i tassi di interesse aumentano (diminuiscono), i prezzi azionari, tendono a scendere (aumentare). Pertanto, l'effetto netto di una variazione dei tassi di interesse e della conseguente variazione dei prezzi azionari può essere opposto a quello che è stato appena descritto.

### Dividendi

I dividendi fanno diminuire il prezzo delle azioni nel giorno di stacco. Si tratta di una cattiva notizia per il valore delle *calls* e di una buona notizia per il valore delle *puts*. Pertanto, la relazione tra il valore di una *call* e l'importo dei dividendi attesi è negativa mentre la relazione tra il valore di una *put* e l'importo dei dividendi attesi è positiva.

Nella tabella 2.1 si indicherà con il segno “ + ” correlazioni dirette (prezzo dell'opzione aumenta all'aumentare della variabile indipendente) e con il segno “ - ” correlazioni inverse (prezzo dell'opzione diminuisce all'aumentare della variabile indipendente).

Variabile	<i>Call</i> europea	<i>Put</i> europea	<i>Call</i> americana	<i>Put</i> americana
Prezzo dell'azione	+	-	+	-
Prezzo d'esercizio	-	+	-	+
Vita residua	?	?	+	+
Volatilità	+	+	+	+
Tasso d'interesse	+	-	+	-
Dividendi	-	+	-	+

Tabella 2.1: Sintesi degli effetti sul prezzo delle opzioni su azioni derivanti dall'aumento di valore di ciascuna variabile, ferme restando tutte le altre.

Gli operatori cercano di immunizzare i propri portafogli di opzioni da piccole variazioni di prezzo dell'attività sottostante che possono verificarsi in un breve periodo di tempo. Questa strategia è nota come “*delta hedging*”. Quindi passano a considerare due misure chiamate “*gamma*” e “*vega*”. Il *gamma* è la derivata del valore

del portafoglio rispetto al delta. Sia il Gamma che il Delta sono importanti perché rilevano il rischio di una posizione in termini rispettivamente di opzioni e di sottostante. Avere una posizione Gamma elevata, sia essa positiva che negativa, implica un elevato rischio-opzioni. Avere una posizione Delta elevata, implica un elevato rischio-sottostante, rialzista se positiva e ribassista se negativa.

Il *vega* è la derivata del valore del portafoglio rispetto alla volatilità dell'attività sottostante. Annullando il gamma, il portafoglio può essere immunizzato dalle variazioni relativamente grandi del prezzo dell'attività sottostante. Annullando il *vega*, il portafoglio può essere reso insensibile alle variazioni di volatilità. Vengono esaminati anche il “*theta*” ed il “*rho*”. Il *theta* è la derivata del valore del portafoglio rispetto al tempo; il *rho* è la derivata del valore del portafoglio rispetto al tasso d'interesse privo di rischio. Infine, gli operatori effettuano a volte delle “*analisi degli scenari*” per conoscere il valore delle loro posizioni in diverse possibili simulazioni.

Un importante uso del modello per la determinazione del prezzo dell'opzione serve per ribilanciare il portafoglio affinché resti privo di rischio.

Nel proseguo si presentano le “*greche*” nel caso di opzioni *calls* o *puts* europee scritte su titoli che non pagano dividendi che seguono il modello Black & Scholes.

$\Delta$  (**Delta**):<sup>10</sup> quanto varia il prezzo dell'opzione a fronte di una variazione del sottostante  $S$ . Tale rapporto indica il numero di unità dell'azione che dovremmo detenere (assumiamo un posizione lunga) per ogni opzione venduta (assumiamo una posizione corta) al fine di creare una strategia di “*delta hedging*”. In prima approssimazione:

$$\Delta = \frac{\Delta c}{\Delta S}$$

in particolare

$$\Delta^{call} = N(d_1)$$

$$\Delta^{put} = N(d_1) - 1$$

---

<sup>10</sup> Più formalmente,  $\Delta = \partial c / \partial S$ , dove  $c$  è il prezzo dell'opzione *call* e  $S$  quello del sottostante.

$\Gamma$  (**Gamma**):<sup>11</sup> è equivale alla derivata del delta del portafoglio rispetto al prezzo dell'attività sottostante. Se il gamma è piccolo, il delta cambia molto lentamente e gli aggiustamenti per mantenere il portafoglio neutrale rispetto al delta non vanno fatti di frequente. Al contrario, se il gamma è grande in termini assoluti, il delta è molto sensibile alle variazioni del prezzo dell'attività sottostante. In prima approssimazione:

$$\Gamma = \frac{\Delta^2 V}{\Delta S^2}$$

in particolare

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$\Lambda$  (**Vega**):<sup>12</sup> è la derivata del valore del portafoglio rispetto alla volatilità dell'attività sottostante,  $\sigma$ . Finora abbiamo assunto che la volatilità dell'attività sottostante il derivato sia costante; in realtà, la volatilità cambia nel tempo. Ciò vuol dire che il valore del derivato può cambiare, oltre che per una variazione del prezzo dell'attività sottostante o per il passare del tempo, anche perché cambia la volatilità. Se il Vega è elevato in termini assoluti, il valore del portafoglio è molto sensibile a piccole variazioni della volatilità; se al contrario, il Vega è basso, le variazioni di volatilità hanno poca influenza sul valore del portafoglio. In prima approssimazione:

$$\Lambda = \frac{\Delta V}{\Delta \sigma}$$

in particolare

$$\Lambda = S\sqrt{(T-t)}N'(d_1)$$

---

<sup>11</sup> Più formalmente,  $\Gamma = \partial^2 V / \partial S^2$ , dove  $V$  è il valore corrente del portafoglio e  $S$  quello del sottostante

<sup>12</sup> Più formalmente,  $\Lambda = \partial V / \partial \sigma$ , dove  $V$  è il valore corrente del portafoglio e  $\sigma$  la volatilità del sottostante

$\theta$  (**Theta**):<sup>13</sup> è la derivata del valore del portafoglio rispetto alla vita residua dell'opzione  $T-t$  (cioè al diminuire di  $T$ ). A volte è anche detto “declino temporale” (*time decay*) del portafoglio. In prima approssimazione:

$$\Theta = \frac{\Delta V}{\Delta(T-t)}$$

in particolare

$$\Theta^{call} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} - rXe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\Theta^{put} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} + rXe^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

$\rho$  (**Rho**):<sup>14</sup> è la derivata del valore del portafoglio rispetto al tasso di interesse,  $r$ .

$$\rho = \frac{\Delta V}{\Delta r}$$

in particolare

$$\rho^{call} = X(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\rho^{put} = -X(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

dove  $d_1$  e  $d_2$  sono definiti dall'equazione (2.14),  $N'(x)$  è la distribuzione di probabilità di una normale standardizzata e  $N(x)$  la sua cumulata, mentre  $V$  è espresso nell'equazione 2.9.

## 2.10 Cause della volatilità

Alcuni analisti hanno sostenuto che la volatilità del prezzo di un'azione è causata solo dall'arrivo casuale di nuove informazioni sui futuri tassi di rendimento dell'azione. Altri ritengono che gran parte della volatilità sia causata dagli stessi scambi di titoli.

---

<sup>13</sup> Più formalmente,  $\Theta = \partial V / \partial(T-t)$ , dove  $V$  è il valore corrente del portafoglio e  $T-t$  la vita residua dell'opzione

<sup>14</sup> Più formalmente,  $\rho = \partial V / \partial r$ , dove  $V$  è il valore corrente del portafoglio e  $r$  il tasso d'interesse.

Pertanto, un problema interessante è se la volatilità dei titoli trattati in Borsa rimane invariata quando le Borse sono chiuse.

Fama e French<sup>15</sup> hanno condotto una verifica empirica su quest'argomento. Questi autori hanno esaminato i prezzi di chiusura giornalieri delle azioni per un lungo periodo di tempo ed hanno calcolato:

- 1 La varianza dei tassi di rendimento delle azioni relativi all'intervallo tra la chiusura di un giorno e quella del giorno successivo, limitatamente alle osservazioni non separate da giorno festivi;
- 2 La varianza dei tassi di rendimento delle azioni tra la chiusura del venerdì e la chiusura del lunedì.

Se i giorni lavorativi equivalgono ai festivi, la varianza *sub 2* dovrebbe essere tre volte più grande della varianza *sub 1*. Fama trovò che era maggiore solo del 22 per cento. I risultati di French sono simili. La varianza *sub 2* era maggiore solo del 19 per cento. Questi risultati suggeriscono che la volatilità è molto maggiore quando le borse sono aperte rispetto a quando sono chiuse. I sostenitori dell'opinione secondo cui la volatilità è causata solo dalle nuove informazioni potrebbero sostenere che le nuove informazioni arrivano soprattutto durante le ore di contrattazione<sup>16</sup>. Tuttavia, alcuni studi sui prezzi *futures* di prodotti agricoli, che dipendono ampiamente dalle condizioni atmosferiche, hanno dimostrato che questi prezzi si comportano in modo simile ai prezzi delle azioni; sono cioè molto più volatili durante le ore di contrattazione. Presumibilmente, le notizie sulle condizioni atmosferiche sono equamente distribuite nei vari giorni. L'unica conclusione ragionevole sembra essere quella che la volatilità è in una certa misura causata dalle stesse contrattazioni.<sup>17</sup>

Quali sono le implicazioni per la stima della volatilità e per il modello Black & Scholes? Se si usano dati giornalieri, i risultati esposti suggeriscono che, per misurare

---

<sup>15</sup> Si veda Fama E. E., "The Behavior of Stock Market Prices", Journal of Business, No. 38, (1965), 34-105. French K. R., "Stock Returns and the Weekend Effect", Journal of Financial Economics, No. 8 (1980), 55-69.

<sup>16</sup> In realtà, quest'affermazione è discutibile. Spesso, gli annunci importanti (ad es., quelli relativi al fatturato e agli utili) vengono fatti quando le borse sono chiuse.

<sup>17</sup> Per una discussione di questo punto si veda French K., Roll R., "Stock Return Variances: the Arrival of Information and the Reaction of Traders?", Journal of Financial Economics, No. 17, (1986), 5-26.

la volatilità, si possono ignorare i giorni in cui le Borse sono chiuse. La volatilità annua va ricavata dalla volatilità giornaliera in base alla seguente formula:

$$\text{volatilità annua} = \text{volatilità giornaliera} \times \sqrt{\text{numero di giorni lavorativi in un anno}}$$

E' questo l'approccio che viene in genere usato dagli operatori. Di solito si assume che i giorno lavorativi in un anno siano 252. Anche se, come sembra, la volatilità è in gran parte causata dalle stesse contrattazioni, gli interessi vengono pagati in base al calendario civile. Sulla base di questa considerazione, si possono utilizzare due diverse misure temporali quando si valutano le opzioni:<sup>18</sup>

$\tau_1$  = giorni lavorativi mancanti alla scadenza / giorni lavorativi in un anno

$\tau_2$  = giorni di calendario mancanti alla scadenza / giorni di calendario in un anno

e aggiustare così le formule Black & Scholes presentate nel paragrafo 2.7 nel modo seguente

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r\tau_2} N(d_2)$$

e

$$p = Xe^{-r\tau_2} N(-d_2) - SN(-d_1)$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r\tau_2 + \sigma^2\tau_1/2)}{\sigma\sqrt{\tau_1}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r\tau_2 - \sigma^2\tau_1/2)}{\sigma\sqrt{\tau_1}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau_1}$$

In pratica, quest'aggiustamento non fa molta differenza tranne nel caso delle opzioni di durata molto breve.

---

<sup>18</sup> French D. W., "The Weekend Effect on the Distribution of Stock Prices: Implications for Option Pricing", Journal of Financial economics, 13 (1984), 547-559.

## 2.11 Volatilità implicita

L'unico parametro delle formule di valutazione Black & Scholes che non può essere osservato direttamente è la volatilità del prezzo dell'azione. Si è visto nel paragrafo 2.4 come possa essere stimato in base ad una serie storica dei prezzi dell'azione. E' ora opportuno menzionare un altro approccio che utilizza la cosiddetta "volatilità implicita" (*implied volatility*). Si tratta della volatilità nel prezzo delle opzioni osservazione sul mercato.

Per illustrare l'idea che è alla base di quest'approccio, si supponga che il premio di una *call* scritta sul Mib30, nel caso in cui non vengano distribuiti dividendi, sia pari a 2464,97 (€6162,42)<sup>19</sup> quando  $S = 21500$ ,  $X = 19500$ ,  $r = 5\%$  e  $T - t = 0,25$  (3 mesi). La volatilità implicita è quel valore di  $\sigma$  che, inserito nell'equazione (2.14), dà  $c = 2464,97$ . Purtroppo, non è possibile invertire l'equazione (2.14) in modo da esprimere  $\sigma$  in funzione di  $S$ ,  $X$ ,  $r$ ,  $T - t$  e  $c$ . Tuttavia, si può usare una procedura iterativa per trovare il  $\sigma$  implicito. Possiamo ad esempio iniziare provando  $\sigma = 0,2$ . Si ottiene così un valore di  $c$  pari a 2381,36, che è troppo basso. Dato che  $c$  è una funzione crescente di  $\sigma$ , il valore di  $\sigma$  deve essere più alto. Possiamo provare  $\sigma = 0,3$ . Si ottiene così un valore di  $c$  pari a 2652,92, che è troppo alto, il che vuol dire che  $\sigma$  è compreso tra 0,2 e 0,3. Possiamo provare  $\sigma = 0,25$ . Anche questo valore risulta troppo alto ( $c = 2506,33$ ), cosicché  $\sigma$  è compreso tra 0,2 e 0,25. Procedendo in questo modo, si può dimezzare ad ogni interazione l'intervallo in cui  $\sigma$  è compreso ed il valore corretto di  $\sigma$  può essere ottenuto con l'accuratezza richiesta.<sup>20</sup> In questo esempio la volatilità implicita è pari a 0,23456 ossia al 23,456 per cento annuo.

Le volatilità implicite possono essere utilizzate per verificare le opinioni del mercato circa la volatilità di un particolare titolo. Queste opinioni mutano nel tempo. Le volatilità implicite possono anche essere usate per stimare il prezzo di un'opzione dal

---

<sup>19</sup> Vedi paragrafo 1.5.

<sup>20</sup> Questo metodo è stato presentato per fini esemplificativi. In pratica, per calcolare la volatilità implicita, si usano di solito procedure numeriche più efficaci, come il metodo Newton-Raphson. La procedura di Newton-Raphson è stata disegnata per risolvere un'equazione del tipo  $f(x) = 0$ . si inizia con una congettura della soluzione:  $x = x_0$ . Si ottengono quindi stime via via migliori della soluzione:  $x = x_1, x = x_2, x = x_3, \dots$ , usando la formula  $x_{i+1} = x_i - f(x_i) / f'(x_i)$ . Di solito,  $x_2$  è estremamente vicino alla soluzione esatta.

prezzo di un'altra opzione. Molto spesso si ottengono diverse volatilità implicite sulla base di opzioni scritte sullo stesso titolo e si vuole calcolare una volatilità implicita complessiva. Diversi sono i metodi proposti in letteratura per ricavare un valore unico della volatilità implicita.

### Media aritmetica

In particolare Scmalensee e Trippi<sup>21</sup> impiegano la media aritmetica delle volatilità di tutte le opzioni escludendo quelle “*deep-in-the-money*” e quelle “*deep-out-of-the-money*”, in quanto poco rappresentative delle aspettative del mercato riguardo la volatilità futura. In pratica gli Autori considerano solo le opzioni più rappresentative del mercato, che sono anche quelle con maggior numero di contrattazioni, e fanno la media aritmetica delle volatilità implicite calcolate.

In questo caso la volatilità implicita è data da:

$$\sigma(t, T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i(t, T)$$

dove:

$N$  : numero di opzioni considerate

$\sigma_i(t, T)$  : volatilità implicita calcolata in  $t$  dall'opzione con prezzo di esercizio  $X_i$  e scadenza  $T$ .

### Media ponderata

Latané e Rendleman,<sup>22</sup> invece, considerano tutte le opzioni sul sottostante, calcolano le volatilità implicite per ogni prezzo di esercizio, e ne fanno la media pesata: in particolare i pesi sono rappresentati dal volume delle transizioni avvenute. In questo caso le opzioni con maggior numero di contrattazioni influiranno maggiormente sul calcolo delle volatilità implicite; in particolare si ha:

---

<sup>21</sup> Scmalensee R., Trippi R. R., “*Common Stock Volatility Expectations Implied by Option Premia*” *Journal of Finance*, Vol. 33, (1978), 129-147.

<sup>22</sup> Latané H. A., Rendleman R. J. Jr., “*Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices*”, *Journal of Finance*, Vol. 31, (1976), 369-381.

$$\sigma(t, T) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_i(t, T) n_i$$

dove:

$M$  : numero totale degli scambi dell'opzione osservata in  $t$  e scadenza in  $T$

$\sigma_i(t, T)$  : volatilità implicita calcolata in  $t$  dall'opzione con prezzo di esercizio  $X_i$  e scadenza  $T$

$n_i$  : numero degli scambi dell'opzione con un determinato prezzo di esercizio  $X_i$

### Metodo Harvey e Whaley

Questi due Autori<sup>23</sup> hanno proposto di usare le sole opzioni *at-the-money* perché sono quelle più sensibili alle variazioni della volatilità<sup>24</sup>, e quindi contengono più informazioni sull'andamento futuro della volatilità stessa.

## 2.12 Ricerche empiriche sulla volatilità implicita

Il modello Black & Scholes assume che i rendimenti del sottostante seguano una distribuzione normale con volatilità costante. Evidenze empiriche hanno dimostrato, comunque, che il modello non è totalmente coerente con realtà per almeno quattro motivi.

1 Studi precedenti di Mandelbrot<sup>25</sup> e Fama<sup>26</sup> hanno indicato che i rendimenti a breve nei mercati azionari e delle materie prime non sono distribuiti normalmente ma hanno code più pesanti, cioè hanno distribuzioni leptocurtiche. Comunque, per orizzonti di investimento più lunghi di un mese, la distribuzione dei rendimenti sembra convergere a una distribuzione normale.<sup>27</sup>

---

<sup>23</sup> Harvey R. C., Whaley R. E., “*S&P 100 Index Option Volatility*”, Journal of Finance, Vol. 46, No. 4, (1991), 1551-1561.

<sup>24</sup> La sensibilità di un'opzione rispetto al  $\sigma$  è misurata dalla derivata parziale del prezzo rispetto al  $\sigma$ .

<sup>25</sup> Mandelbrot B., “*The Variation of Certain Speculation Prices*”, Journal of Business, Vol. 36, (1963), 394-419.

<sup>26</sup> Fama E. F., “*The Behavior of Stock Market Returns*”, Journal Of Business, Vol. 38, (1965), 34-105.

<sup>27</sup> Fama E. F., “*Foundations of Finance*”, Basic Books, (1976). In particolare: Capitolo 1

- 2 Evidenze più recenti hanno mostrato che l'assunzione di volatilità costante è spesso violata nei mercati finanziari.<sup>28</sup>
- 3 C'è una tendenza per le variazioni dei prezzi azionari a essere negativamente correlati con le variazioni della volatilità.<sup>29</sup> Questo è spesso imputato come “effetto leva”.
4. Il cosiddetto “effetto smile”, risultato di osservazioni empiriche della volatilità implicita delle opzioni con la stessa data di estinzione confrontate con differenti prezzi di esercizio. Se si rappresenta la volatilità implicita rispetto ai prezzi d'esercizio si possono osservare due distinte tipologie: “volatility smile” e “volatility skew”.<sup>30</sup> Quando il tempo alla scadenza aumenta, queste curve tipicamente si appiattiscono per valori esterni.<sup>31</sup> L'effetto smile è tipicamente descritto da una forma ad U mostrando volatilità implicita elevata nelle opzioni *in-the money* e *out-of-the-money* e volatilità bassa per le opzioni *at-the-money*.<sup>32</sup> La “volatility smile” è stata riscontrata nelle opzioni riferite all'indice azionario S&P 100<sup>33</sup> nel periodo precedente al *crash* del 19 ottobre 1987<sup>34</sup> e nelle opzioni legate alla valuta<sup>35</sup>. Dopo il *crash*, comunque, si è osservato spesso una volatilità implicita di tipo *skew*. Gli studi effettuati dopo il *crash* sulle opzioni legate all'indice S&P 500 e sui *futures* mostrano che la volatilità implicita decrementa in maniera monotona all'aumentare del prezzo d'esercizio relativo al livello dell'indice.<sup>36</sup>

---

<sup>28</sup> Taylor S. J., “Modelling Financial Time Series”, John Wiley & Sons, (1986), Chicester.

<sup>29</sup> C'è molta letteratura in questo senso; in particolare citiamo: Schwert G. W., “Why Does stock Market Volatility Change Over Time?”, Journal of Finance, Vol. 44, (1989), 1115-1153. Gallant A. R., Rossi P. E., Tauchen G., “Stock Prices and Volume”, Review of Financial Studies, Vol.5, No. 2, (1992), 199-242.

<sup>30</sup> Questa forma di volatilità è anche chiamata “sneer” letteralmente “ghigno”.

<sup>31</sup> Vedi Ghysels E., Harvey A., Renault E., “Stochastic Volatility” Discussion Paper 95s-49, (1995), Cirano, Università di Montreal.

<sup>32</sup> C'è molta letteratura in questo senso; in particolare citiamo: Heynen R., “An Empirical Investigation of Observed Smile Patterns”, The Review of Futures Markets, 13, No. 2, (1994), 317-353. Dumas B., Fleming J., Whaley R., “Implied Volatility Functions: Empirical Test”, Journal of Finance, Vol. 53, No. 6, (Dicembre 1998), 2059-2106.

<sup>33</sup> Sheikn A. M., “Transaction Data Test of S&P 100 Call Option Pricing”, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 26, (1991), 459-475.

<sup>34</sup> Si veda il rapporto della commissione Brady ovvero “Report of the Presidential task Force on Market Mechanisms”, Gennaio 1998.

<sup>35</sup> Taylor S. J., Xu X., “The Magnitude of Implied Volatility Smiles: Theory and Empirical Evidence for Exchange rates” Review of Futures Markets, Vol. 13, (1994), 355-380.

<sup>36</sup> Vedi Rubinstein M., “Implied Binomial Trees”, Journal of Finance, Vol. 69, (1994), 771-818. Taylor S. J., Xu X., “Implied Volatility Shapes when Price and Volatility Shocks are Correlated”, Working Paper, (1994).



## Capitolo III

Vari studi empirici hanno mostrato che l'assunzione di volatilità costante nel tempo nel modello di Black & Scholes è spesso violata nei mercati finanziari.

Quindi vengono adottati modelli GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity ) per descrivere i cambiamenti di volatilità. Il corrispondente modello GARCH per la determinazione del prezzo dell'opzione di Duan è capace di descrivere il cosiddetto “*effetto smile*”, il quale può essere trovato spesso nei prezzi dell'opzione.

Un'importante limitazione a cui è sottoposto il modello GARCH è il vincolo di positività dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$  per la determinazione della varianza condizionata; inoltre questo modello non tiene conto dell'effetto “*leverage*” che determina il contributo di uno shock negativo dei rendimenti sulla varianza condizionale.

Per ovviare a questi inconvenienti, nel prossimo capitolo, si presenteranno altri due modelli per la determinazione del prezzo dell'opzione: il modello TARCH (Threshold AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) che considera l'effetto leva e il modello EGARCH (Exponential GARCH) che oltre a considerare l'effetto leva non ha vincoli sui parametri.

### 3.1 Dai processi ARCH ai processi GARCH

Engel<sup>1</sup> introdusse un modello ARCH( $p$ ) (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) nel quale la varianza condizionata  $\sigma_t^2$  è una funzione lineare delle innovazioni al quadrato ritardate di  $p$  periodi  $\varepsilon_t$ , ovvero:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 \text{ con } \alpha_i > 0 \quad \forall i$$

e

$$\varepsilon_t | \phi_{t-1} \approx N(0, \sigma_t^2) \tag{3.1}$$

dove  $\phi_{t-1}$  è il set di informazioni disponibili fino al periodo  $t$ . Una proprietà molto importante di questo processo è che la distribuzione marginale di  $\varepsilon_t$  è sempre leptocurtica<sup>2</sup>. Si prenda, ad esempio, un modello ARCH(1); la curtosi marginale delle  $\varepsilon_t$ , è pari a:

$$\frac{E(\varepsilon_t^4)}{[E(\varepsilon_t^2)]^2} = \frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2}.$$

La curtosi è ovviamente più grande di 3; se  $\alpha_1^2 < 1/3$  tende all'infinito.

Perciò, i modelli di tipo ARCH sono consistenti con le proprietà empiriche delle distribuzioni dei rendimenti nei mercati finanziari.

Bollerslev<sup>3</sup> propose un'estensione dei processi ARCH per tenere conto della persistenza senza considerare molti ritardi, ovvero il processo GARCH ( $p, q$ ).

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2$$

<sup>1</sup> Engle Robert F., “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”, *Econometrica* Vol. 50, No 4, (1982), 987-1007.

<sup>2</sup> Bollerslev T., Engle Robert F., Nelson Daniel B., “ARCH Models “ *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, (1994), Cap. 49, 2961-3038.

<sup>3</sup> Bollerslev T., “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*, Vol. 31 (1986), 307-327.

$$\text{con } \alpha_i > 0 \text{ e } \beta_j > 0 \text{ per } i = 0, 1, \dots, p \text{ e } j = 1, \dots, q \quad (3.2)$$

In generale, il valore di  $p$  nell'equazione (3.2) sarà più piccolo del valore  $p$  dell'equazione (3.1).

### 3.2 Il modello GARCH per la determinazione del prezzo dell'opzione

Si consideri un'economia a tempo discreto<sup>4</sup> e si indichi con  $S_t$  il prezzo del sottostante al tempo  $t$ . Il suo tasso di rendimento in un periodo di tempo è assunto essere condizionatamente distribuito log-normale sotto una misura di probabilità  $P$ , ovvero:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \varepsilon_t \quad (3.3)$$

dove  $\varepsilon_t$  ha media zero e varianza condizionata  $\sigma_t^2$  sotto misura  $P$ .  $r$  è il tasso di rendimento (costante) di un titolo privo di rischio (composto continuamente) e  $\lambda$  il premio (costante) per un'unità di rischio. Sotto log-normalità condizionata, si ha un tasso di rendimento atteso uguale a  $\exp(r + \lambda\sigma_t)$ .

Si assuma, inoltre, che  $\varepsilon_t$  segua un processo GARCH  $(p, q)$  sotto misura di probabilità  $P$ :

$$\varepsilon_t | \phi_{t-1} \approx N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$$\text{con } p \geq 0; q \geq 0; \alpha_0 > 0; \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p; \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$$

---

<sup>4</sup> Duan J C., "The GARCH Option Pricing Model" Mathematical Finance, Vol. 5, No. 1 (1995), 13-32.

dove  $\phi_t$  è il set di tutte le informazioni disponibili al tempo  $t$ . In altre parole, la varianza condizionata è una funzione lineare dei disturbi passati al quadrato e delle passate varianze condizionate. Il prezzo dell'opzione è determinato tenendo conto della normalità condizionata di  $\varepsilon_t$ . Usando una specificazione alternativa per  $\sigma_t^2$ , come ad esempio il processo EGARCH di Nelson<sup>5</sup> o quello di Glosten<sup>6</sup>, i risultati base per la determinazione del prezzo dell'opzione non cambieranno finché la normalità condizionata degli  $\varepsilon_t$  resterà in essere.

Per assicurarsi la stazionarietà in varianza per il processo GARCH  $(p, q)$ ,

$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j$  è assunto essere minore di 1<sup>7</sup>. Il processo GARCH specificato in (3.4)

si riduce ad un processo log-normale omoschedastico nel modello standard Black & Scholes se  $p = 0$  e  $q = 0$ . Questo assicura che il modello Black & Scholes sia un caso speciale del modello precedentemente specificato.

Si è visto in precedenza come nel modello di Black e Scholes la propensione al rischio degli investitori non abbia alcun ruolo nel determinare la valutazione delle opzioni. Infatti i termini che dipendono dal tasso di rendimento atteso del titolo, il cui livello dipende a sua volta dalla propensione al rischio via il premio al rischio, non compaiono nell'equazione differenziale di Black e Scholes.<sup>8</sup> Nella soluzione di questa, allora, si può assumere la neutralità al rischio di tutti gli operatori, imponendo che il tasso di rendimento atteso di tutti i titoli sia uguale al tasso *risk free*, cioè  $E(S_t / S_{t-1}) = e^r$ .

A causa della presenza di eteroschedasticità il risultato di Black e Scholes non è più valido, poiché evidentemente occorre tener conto della presenza di varianza non

<sup>5</sup> Nelson D., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Return: A new Approach", *Econometrica*, No. 59, (1991), 347-370.

<sup>6</sup> Glosten L., Jagannathan R., Runkle D., "Relationship between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess on Stock" *Journal Finance*, No. 48, (1993), 1779-1801.

<sup>7</sup> Vedi Teorema 1 di Bollerslev (1986). Se la somma è uguale ad 1 nel caso di un processo GARCH(1,1), il processo è attribuibile come un processo GARCH integrato. Nelson (1990) mostra che il processo IGARCH è stazionario ed ergodico sebbene la varianza sia infinita. Infatti, il processo GARCH potrebbe essere ancora strettamente stazionario se la somma delle  $\alpha_i$  e  $\beta_j$  fosse maggiore di 1. La condizione sufficiente e necessaria per la sua stazionarietà è connessa al maggior esponente di Lyapunov di una sequenza particolare di matrici random. Vedi Bougerol P., Picard N., "Stationarity of GARCH Processes and Some Nonnegative Time Series" *Journal Econometrics*, No. 52 (1992), 115-127.

<sup>8</sup> Vedi equazione 2.14.

costante. Duan definisce la misura di probabilità neutrale al rischio in modo tale che il modello di volatilità rimanga qualitativamente lo stesso.

**Definizione 3.1.** Si dice che una misura  $Q$  per la determinazione del prezzo soddisfa LRNVR (*locally risk-neutral valuation relationship*) se la misura  $Q$  è mutuamente e assolutamente continua rispetto alla misura  $P$  e  $S_t / S_{t-1} | \phi_{t-1}$  si distribuisce in maniera log-normale (sotto  $Q$ ),

$$E^Q(S_t / S_{t-1} | \phi_{t-1}) = e^r.$$

e

$$Var^Q[\ln(S_t / S_{t-1}) | \phi_{t-1}] = Var^P[\ln(S_t / S_{t-1}) | \phi_{t-1}]$$

quasi certamente rispetto alla misura  $P$ .

Nella definizione 3.1, le varianze condizionate sotto le due misure sono richieste essere uguali. Questo è desiderabile perché si può osservare e quindi stimare la varianza condizionata sotto la misura  $P$ . Questa proprietà e il fatto che la media condizionata può essere sostituita dal tasso privo di rischio produce un modello ben specificato che non dipende localmente dalle preferenze. La *locally risk-neutral valuation relationship* (LRNVR) è, comunque insufficiente per l'eliminare i parametri di preferenza. Tuttavia il modello aggiustato, è forte abbastanza per ridurre ogni considerazione di preferenza verso il premio per il rischio,  $\lambda$ . Questa asserzione sarà verificata più tardi nel teorema 3.2. Nella definizione 3.1, l'uguaglianza delle varianze condizionate è una relazione quasi certa. Fin quando  $Q$  è assolutamente continua rispetto a  $P$ , la relazione quasi certa sotto  $P$  resterà valida anche sotto  $Q$ . Duan prova che sotto opportune condizioni per le preferenze dell'investitore la LRNVR è valida.

**Teorema 3.1.** Se l'agente rappresentativo è colui che massimizza l'utilità attesa e la funzione di utilità è separabile nel tempo e additiva, allora LRNVR resiste sotto le seguenti tre condizioni:<sup>9</sup>

---

<sup>9</sup> Per approfondimenti Duan J C., (1995) vedi appendice.

(i) La funzione di utilità è *absolute risk aversion*<sup>10</sup> e i cambiamenti logaritmici del processo aggregato sono distribuiti normalmente con media costante e varianza sotto misura  $P$

(ii) La funzione di utilità è *relative risk aversion*<sup>11</sup> e i cambiamenti logaritmici del processo aggregato sono distribuiti normalmente con media costante e varianza sotto misura  $P$

(iii) La funzione di utilità è lineare.

La media costante e la varianza assunta per il processo in (i) e (ii) del teorema 3.1 assicura che il tasso di interesse impiegato sia costante. Quindi questo garantisce la consistenza con l'assunzione del tasso di interesse costante fatta in precedenza. Sebbene sia possibile sviluppare il modello con tassi di interesse stocastici, il modello risultante diventerà considerevolmente molto complicato. L'assunzione del tasso di interesse costante permette il confronto con il modello Black & Scholes solamente nella dimensione dell'eteroschedasticità.

Duan presenta il seguente teorema che descrive l'implicazione del LRNVR .

**Teorema 3.2.** Il LRNVR implica che, sotto misura  $Q$ ,

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t$$

dove

$$\xi_t | \phi_{t-1} \approx N(0, \sigma_t^2)$$

e

---

<sup>10</sup> *Absolute risk aversion* è una misura di avversione al rischio; così definita:

$$R_A(w) = -\frac{U''(w)}{U'(w)}$$

dove  $w$  è la ricchezza e  $U$  è la funzione di utilità di Von Neumann-Morgenstern, la quale è limitata e ammette derivata seconda.  $U'$  è l'utilità marginale della ricchezza mentre  $U''$  è il tasso di cambio dell'utilità marginale rispetto alla ricchezza.

Esempio: funzione di utilità quadratica  $U(w) = a + bw - \frac{1}{2}cw^2$ , con  $w > \frac{b}{c}$ ;  $R_A(w) = c/(b - cw)$ .

<sup>11</sup> *Relative risk aversion* è una misura di rischio proporzionale al livello della ricchezza così definita:

$$R_R(w) = -\frac{U''}{U'} w = R_A(w) \cdot w.$$

Esempio: funzione di utilità logaritmica  $U(w) = \ln w$ ;  $R_R(w) = 1$ .

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (\xi_{t-i} - \lambda \sigma_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Il teorema 3.2 implica che la forma del processo GARCH( $p, q$ ) rimane valida rispetto a LRNVR. L'innovazione della varianza (*variance innovation*) è governata da  $p$  variabili casuali chi-quadrato non-centrali ognuna con un grado di libertà, mentre il processo GARCH, sotto misura di probabilità  $P$ , può essere visto come un processo governato da  $p$  innovazioni chi-quadrato centrali. Il parametro di non-centralità comune per il processo di varianza condizionata sotto misura  $Q$  è il premio per il rischio,  $\lambda$ . Per vedere ciò, si necessita di portare fuori il fattore  $\sigma_{t-i}$  dai termini entro la parentesi e ammettere che  $\xi_{t-i}/\sigma_{t-i}$  è una variabile casuale normale standard sotto la misura  $Q$ .

Il teorema 3.2 suggerisce che il premio per il rischio  $\lambda$ , influenza il processo di variabilità condizionata sebbene il rischio sia stato localmente neutralizzato sotto la misura  $Q$  per la determinazione del prezzo. In altre parole, LRNVR è non equivalente a RNVR. La necessità di distinguere tra la “*locale*” e la “*globale*” valutazione neutrale verso il rischio scompare quando i coefficienti che governano l'innovazione della varianza sono uguali a zero.

Se si sceglie una specificazione alternativa per i rendimenti del sottostante, ad esempio un processo EGARCH, si può ugualmente osservare un risultato simile al teorema 3.2.

Ogni qual volta la variabile  $\varepsilon_t$  appare nell'equazione della varianza condizionata, dovrebbe essere sostituita da  $\xi_t - \lambda \sigma_t$ , mentre ogni altro termine rimane invariato. Sebbene i risultati per la determinazione del prezzo dell'opzione sono “*ad hoc*” per il processo GARCH di Bollerslev, essi sono applicabili, dopo piccole modifiche, anche ad altre specificazioni.

Per calcolare i *payoffs* sui derivati si richiede l'aggregazione dei rendimenti sul sottostante per giungere ad un possibile prezzo finale riferito ad un futuro istante nel tempo,  $T$ .

Il prezzo finale del sottostante è derivato nel seguente corollario.

**Corollario 3.1.**

$$S_T = S_t \exp\left((T-t)r - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T \sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^T \xi_s\right)$$

Il prezzo del sottostante, attualizzato al tasso privo di rischio, possiede delle proprietà tipiche di un processo di Martingale<sup>12</sup>. Harrison e Kreps<sup>13</sup> stabilirono, per primi, l'importanza di queste proprietà per la teoria della determinazione del prezzo dell'opzione. L'approccio della valutazione neutrale verso il rischio viene a volte chiamato “misura equivalente di martingala” (*equivalent martingale measure*).

Sotto la specificazione GARCH  $(p, q)$ , una opzione *call* di tipo europeo con prezzo d'esercizio  $X$  e con scadenza  $T$  ha valore al tempo  $t$  uguale a :

**Corollario 3.3.**

$$C_t^{GH} = e^{-(T-t)r} E^Q[\max(S_T - X, 0) | \phi_t]$$

Sotto la specificazione GARCH  $(p, q)$ ,  $\phi_t$  è la sigma-algebra generata da  $\{S_t, \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-p+1}, \sigma_t^2, \dots, \sigma_{t-q+1}^2\}$ . Una semplificazione sostanziale con riferimento a  $\phi_t$  può essere ottenuta adottando il modello “più popolare”, ovvero un GARCH  $(1,1)$ .

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \xi_t$$

dove

$$\xi_t | \phi_{t-1} \approx N(0, \sigma_t^2)$$

e

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\xi_{t-1} - \lambda \sigma_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \tag{3.4}$$

<sup>12</sup> Per la dimostrazione vedi appendice Duan J C., (1995).

<sup>13</sup> Harrison M., Kreps D., “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets”, Journal of Economic Theory, No. 20, (1979), 381-408. Vedi anche, Harrison M., Pliska S., “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading”, Stoch. Process. Applic., No. 11, (1981), 215-260.

Per un modello GARCH (1,1),  $S_T$  e  $\sigma_t^2$  assieme servono come statistica sufficiente per  $\phi_t$ . In altre parole, il GARCH (1,1) non è un processo di Markov univariato, ma può essere inteso come un processo di Markov bivariato. Il modello per la determinazione del prezzo dell'opzione GARCH (1,1) esplicitamente riflette lo stato del prezzo del sottostante in due dimensioni: livello di prezzo e volatilità condizionata. Questa dimensione aggiuntiva permette al prezzo del modello di riflettere un'alta o una bassa varianza del sottostante quando lo stato dell'economia cambia.

Purtroppo, però, quando non sono disponibili formule chiuse per la valutazione dei derivati si deve ricorrere a delle procedure numeriche. Questo perché il prezzo dell'opzione è il valore del *payoff* atteso, dove il valore atteso è calcolato in riferimento alla distribuzione di probabilità del prezzo a termine del sottostante. Un importante uso del modello per la determinazione del prezzo serve anche, per adottare una strategia di *delta hedging*. Per usare tale tecnica in una struttura GARCH, si deve per primo derivare la corrispondente formula delta. Indichiamo il delta dell'opzione GARCH al tempo  $t$  con  $\Delta_t^{GH}$ .

$$\Delta_t^{GH} = e^{-(T-t)r} E^Q \left[ \frac{S_T}{S_t} I_{[S_T \geq X]} \mid \phi_t \right]$$

dove  $I_{[S_T \geq X]}$  è una funzione indicatrice.

Per una *put* di tipo europeo, il suo prezzo e il suo delta può essere derivato usando la relazione di *put-call parity*.

Può essere dimostrato che il prezzo dell'opzione GARCH e il delta si riduce all'equivalente delle formule di Black & Scholes quando il processo sottostante è omoschedastico.

### 3.3 Procedure numeriche

Il metodo che viene scelto in pratica dipende dalle caratteristiche del derivato da valutare e dal grado di accuratezza richiesto.

●**Procedure ad albero o Lattice framework**

Una tecnica utile e molto diffusa per valutare le opzioni su azioni e altri derivati comporta la costruzione di un cosiddetto “albero binomiale”. Si tratta di un albero che rappresenta i diversi sentieri che potrebbero essere seguiti dal prezzo dell’azione durante la vita del derivato. La procedura assume che le variazioni del prezzo di un’azione siano composte da un gran numero di piccoli movimenti. Questa è l’assunzione sottostante ad una procedura numerica proposta per la prima volta da Cox, Ross e Rubinstein.<sup>14</sup>

Si consideri la valutazione di un’opzione scritta su un titolo che non paga dividendi. Iniziamo col dividere la vita dell’opzione in un gran numero di intervalli di lunghezza  $\Delta t$ . Assumiamo che in ogni intervallo il prezzo dell’azione passi dal valore iniziale,  $S$ , ad un dei due nuovi valori possibili,  $Su$  e  $Sd$ ; in generale,  $u > 1$  e  $d < 1$ . Pertanto, la variazione da  $S$  a  $Su$  è “al rialzo o up” e la variazione da  $S$  a  $Sd$  è “al ribasso o down”. Si assume che la probabilità di un rialzo sia pari a  $p$  e che la probabilità di un ribasso sia pari a  $1 - p$ .

I parametri  $p$ ,  $u$  e  $d$  devono essere tali da determinare valori corretti della media e della varianza del prezzo dell’azione alla fine dell’intervallo  $\Delta t$ . Data l’assunzione che gli operatori siano neutrali verso il rischio, il tasso di rendimento atteso dell’azione è pari al tasso d’interesse privo di rischio,  $r$ .<sup>15</sup> Quindi il valore atteso del prezzo dell’azione alla fine dell’intervallo  $\Delta t$  è  $Se^{r\Delta t}$ , dove  $S$  è il prezzo dell’azione all’inizio dell’intervallo. Ne segue che

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1 - p)Sd$$

da cui

$$e^{r\Delta t} = pu + (1 - p)d \tag{3.5}$$

<sup>14</sup> Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M., „Option pricing: A simplified Approach“, Journal of Financial Economics, No. 7, (1979), 229-263.

<sup>15</sup> In pratica,  $r$ , viene di solito posto uguale al tasso zero coupon realtivo ad un titolo con durata pari alla vita residua dell’opzione;  $r$ , però, può essere reso funzione del tempo.

Nel caso di assunzione di log-normalità dei prezzi azionari con assenza di stacco di dividendi (*dividend yield*) durante la vita dell'opzione, la varianza del prezzo dell'azione in un piccolo intervallo di tempo  $\Delta t$  è pari a  $S^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1)$ . Dato che la varianza di una variabile  $X$  è pari a  $E(X^2) - [E(X)]^2$ , dove  $E$  indica il valore atteso, ne segue che

$$S^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) = pS^2 u^2 + (1-p)S^2 d^2 - S^2 [pu + (1-p)d]^2$$

da cui

$$e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} = pu^2 + (1-p)d^2. \quad (3.6)$$

Le equazioni (3.5) e (3.6) impongono due condizioni su  $p$ ,  $u$  e  $d$ . Una terza condizione imposta da Cox, Ross e Rubinstein è la seguente:

$$u = \frac{1}{d}.$$

Si può dimostrare che queste tre condizioni implicano

$$p = \frac{a-d}{u-d}; \quad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}; \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}};$$

dove  $a = e^{r\Delta t}$  e i termini di ordine superiore a  $\Delta t$  sono stati ignorati<sup>16</sup>.

L'albero dei prezzi azionari che si considera quando si usa il modello binomiale è quello illustrato in figura 3.1.

---

<sup>16</sup> In alternativa, possiamo risolvere esattamente le equazioni (3.5) e (3.6) soggette al vincolo  $u = 1/d$  ottenendo  $u = \frac{(a^2 + b^2 + 1) + \sqrt{(a^2 + b^2 + 1)^2 - 4a^2}}{2a}$ ;  $p = \frac{a-d}{u-d}$  dove  $a = e^{r\Delta t}$  e  $b^2 = a^2(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1)$ .

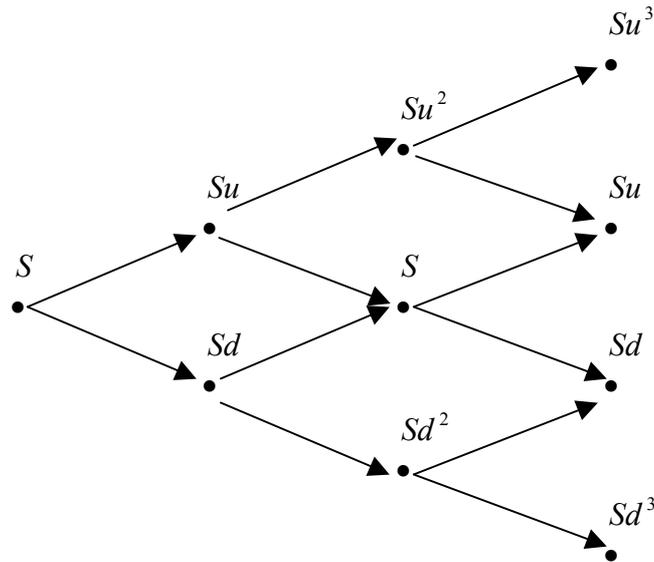


Figura 3.1: Modello di albero binomiale utilizzato per valutare un'opzione su azioni

Al tempo zero il prezzo dell'azione,  $S$ , è noto. Al tempo  $\Delta t$ , esistono due prezzi possibili,  $Su$  e  $Sd$ ; al tempo  $2\Delta t$  esistono tre prezzi possibili,  $Su^2$ ,  $S$  e  $Sd^2$ ; e così via. In generale, al tempo  $i\Delta t$ , esistono  $i + 1$  prezzi possibili. Si tratta di

$$Su^j d^{i-j} \quad j = 0, 1, \dots, i.$$

Si noti che, nella figura 3.1, per calcolare il prezzo dell'azione in corrispondenza di ciascun nodo dell'albero, si è utilizzata la relazione  $u = 1/d$ . Ad esempio,  $Su^2 d = Su$ . Si noti inoltre che l'albero si ricombina, nel senso che una variazione al rialzo seguita da una variazione al ribasso porta allo stesso prezzo che si ottiene quando una variazione al ribasso è seguita da una variazione al rialzo. In questo modo il numero dei nodi dell'albero si riduce considerevolmente.

Le opzioni vengono valutate dalla fine dell'albero (al tempo  $T$ ) e tornando indietro. Al tempo  $T$  il valore dell'opzione è noto. Ad esempio una *call* vale  $\max(S_T - X, 0)$ , dove  $S_T$  è il prezzo dell'azione al tempo  $T$  e  $X$  è il prezzo d'esercizio. Data l'assunzione di neutralità verso il rischio, il valore dell'opzione ad ogni nodo corrispondente al tempo  $T - \Delta t$  può essere calcolato come valore atteso dell'opzione al tempo  $T$  attualizzando in base al tasso d'interesse privo di rischio  $r$ , per un

periodo di tempo  $\Delta t$ . Analogamente, il valore dell'opzione ad ogni nodo corrispondente al tempo  $T - 2\Delta t$  può essere calcolato come valore atteso dell'opzione al tempo  $T - \Delta t$  attualizzato in base al tasso d'interesse privo di rischio per un periodo di tempo  $\Delta t$ , e così via. Se l'opzione è di tipo americano, si deve verificare ad ogni nodo se convenga o meno esercitare l'opzione anticipatamente. Alla fine, tornando indietro lungo tutto l'albero, si ottiene il valore dell'opzione al tempo zero.

L'approccio originale di Cox, Ross e Rubinstein non rappresenta l'unico modo per costruire un albero binomiale. Invece di porre  $u = 1/d$  nelle equazioni (3.5) e (3.6), si può assumere  $p = 0,5$ . In tal caso, trascurando i termini di ordine superiore a  $\Delta t$ , una soluzione delle due equazioni è data da

$$u = e^{(r - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}; \quad d = e^{(r - \sigma^2/2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Rispetto all'approccio di Cox, Ross e Rubinstein, questa procedura ha il vantaggio che le probabilità sono sempre pari a 0,5, quale che sia il valore di  $\sigma$  o il numero di intervalli.<sup>17</sup>

In alternativa agli alberi binomiali, si possono usare alberi trinomiali. Si supponga che  $p_u$ ,  $p_m$  e  $p_d$  siano le probabilità di movimenti al rialzo, intermedi e al ribasso in ciascun nodo e che  $\Delta t$  sia la lunghezza dell'intervallo di tempo. Nel caso di un titolo che non paga dividendi, i valori dei parametri che, trascurando i termini di ordine superiore a  $\Delta t$ , consentono di uguagliare media e varianza dei prezzi del titolo sono

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}} \quad d = \frac{1}{u} \quad p_d = -\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}} + \frac{1}{6} \quad p_m = \frac{2}{3}$$

$$p_u = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}} + \frac{1}{6}.$$

---

<sup>17</sup> L'albero costruito secondo le indicazioni di Cox, Ross e Rubinstein presenta l'inconveniente di comportare probabilità negative quando  $\sigma < |r\sqrt{\Delta t}|$ . La procedura alternativa che è stata qui descritta non è soggetta a quest'inconveniente.

Nel caso di un titolo che paga un *dividend yield* continuo  $q$ , basta sostituire la variabile  $r$  con  $r - q$ . I calcoli per un albero trinomiale sono analoghi a quelli per un albero binomiale. Si può dimostrare che l'approccio dell'albero trinomiale equivale al metodo esplicito delle differenze finite.

• **Simulazioni con il metodo Monte Carlo**

Si consideri un derivato di stile europeo (durante la cui vita non occorre prendere alcuna decisione) con valore finale  $c_T$  al tempo  $T$ . Il suo valore al tempo  $t$  è

$$c = \hat{E}(c_T e^{-\bar{r}(T-t)}) \tag{3.7}$$

dove  $\hat{E}$  è il valore atteso in un mondo neutrale verso il rischio e  $\bar{r}$  rappresenta la media del tasso d'interesse istantaneo privo di rischio nel periodo tra  $t$  e  $T$ . Se si assume che il tasso privo di rischio sia noto, l'equazione precedente si semplifica nella seguente

$$c = e^{-\bar{r}(T-t)} \hat{E}(c_T) \tag{3.8}$$

dove  $\bar{r}$  rappresenta il tasso *zero coupon* con scadenza al tempo  $T$ .

Si consideri ad esempio il caso in cui il derivato dipenda da una sola variabile stocastica. Si supponga che questa variabile non sia un tasso d'interesse, in modo da poter usare l'equazione (3.8). Usando un processo simile a quello descritto nel paragrafo 2.2 si simula uno dei possibili sentieri che può essere seguito dalla variabile in un mondo neutrale verso il rischio. Si può così determinare il valore finale del derivato, che può essere considerato come un'estrazione casuale dall'insieme di tutti i possibili valori finali. Quindi si simula un secondo sentiero per la variabile e si determina un secondo campione di valore finale. Ulteriori sentieri campionari generano ulteriori campioni di valori finali. Dopo aver generato un gran numero di valori finali (ad esempio, 20.000), se ne calcola la media aritmetica per stimare  $\hat{E}(c_T)$ . Quindi, usando l'equazione (3.8), si può determinare il valore corrente del derivato.

In alternativa, si può attualizzare ogni valore finale campionario, non appena viene determinato, per poi calcolare la media aritmetica dei risultati ottenuti. Chiameremo “simulazioni” il calcolo di ogni valore finale (o di ogni valore finale attualizzato). Pertanto, la procedura che è stata descritta consiste in 20.000 simulazioni.

Se la variabile è rappresentata dal tasso d’interesse a breve privo di rischio,  $r$ , o da un’altra variabile legata a  $r$ , la procedura è simile a quella che è stata ora descritta, fatta eccezione per il tasso di attualizzazione, che è diverso per ogni simulazione.

Per descrivere più formalmente il metodo Monte Carlo quando c’è una sola variabile sottostante, si supponga che la variabile sia  $\theta$ . Sia  $s$  la volatilità di  $\theta$  e  $\hat{m}$  il suo tasso di crescita atteso in un mondo neutrale verso il rischio. Per effettuare le simulazioni, la vita del derivato va divisa in  $N$  intervalli, ciascuno di lunghezza  $\Delta t$ . La versione discreta del processo seguito da  $\theta$  in un mondo neutrale verso il rischio è

$$\Delta\theta = \hat{m}\theta\Delta t + s\theta\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{3.9}$$

Dove  $\Delta\theta$  è la variazione di  $\theta$  nell’intervallo  $\Delta t$  e  $\varepsilon$  è un’ estrazione casuale da una distribuzione normale standardizzata.<sup>18</sup> Per effettuare una simulazione, occorrono  $N$  estrazioni casuali indipendenti da una distribuzione normale standardizzata. Sostituendo queste estrazioni casuali nell’equazione (3.9), si ottengono i valori di  $\Delta\theta$  per gli istanti di tempo  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$ . Si genera così un sentiero temporale per  $\theta$  e si può determinare un valore finale campionario per il derivato.

Quando il derivato dipende da diverse variabili stocastiche, occorre generare in ogni simulazione il sentiero temporale di ciascuna variabile per poi calcolare il valore finale del derivato. Va sottolineato che, ai fini della simulazione, i processi stocastici di tutte le variabili, inclusa  $r$ , sono quelli che le variabili seguirebbero in un mondo neutrale verso il rischio.

---

<sup>18</sup> Quando  $\theta$  segue un moto geometrico Browniano (cioè quando  $\hat{m}$  e  $s$  sono costanti), è lievemente più accurato assumere  $(\theta + \Delta\theta)/\theta$  sia distribuito in modo log-normale. Sulla base dei risultati del paragrafo 2.2, si può dimostrare che l’equazione (3.9) diventa

$$\theta + \Delta\theta = \theta e^{(\hat{m}-s^2/2)\Delta t + s\varepsilon\sqrt{\Delta t}} .$$

Il metodo Monte Carlo può essere esteso senza difficoltà ai casi in cui vengono effettuati pagamenti durante la vita del derivato ma non può essere facilmente usato per valutare i derivati di stile americano.

Il numero delle simulazioni da effettuare dipende dall'accuratezza richiesta. Se si effettuano  $N$  simulazioni indipendenti nel modo che è stato descritto, si calcola di solito la deviazione standard, oltre che la media, dei valori correnti del derivato ottenuti nelle  $N$  simulazioni. Si indichi con  $\mu$  la media e con  $\omega$  la deviazione standard. La variabile  $\mu$  è la stima del valore corrente del derivato. L'errore standard della stima è

$$\frac{\omega}{\sqrt{N}}.$$

Pertanto, l'intervallo di confidenza al 95% per il prezzo,  $c$ , del derivato è

$$\mu - \frac{1,96\omega}{\sqrt{N}} < c < \mu + \frac{1,96\omega}{\sqrt{N}}.$$

Da quest'espressione si vede che la nostra incertezza circa il valore del derivato è inversamente proporzionale alla radice quadrata del numero delle simulazioni. Per raddoppiare l'accuratezza di una stima, dobbiamo, quindi, quadruplicare il numero delle simulazioni.

Il metodo Monte Carlo tende ad essere numericamente più efficiente delle altre procedure nel caso in cui il derivato dipenda da tre o più variabili stocastiche. Ciò dipende da fatto che, in prima approssimazione, il tempo richiesto dal metodo Monte Carlo cresce in modo lineare con il crescere del numero delle variabili, mentre il tempo richiesto dalle altre procedure cresce esponenzialmente con il numero delle variabili. Il metodo Monte Carlo presenta il vantaggio di fornire un errore standard della stima. E' un approccio che consente di valutare derivati con valori finali complessi e processi stocastici complessi. Può essere usato quando il valore finale del derivato dipende da una certa funzione dell'intero sentiero temporale seguito dalla variabile (non dal solo valore finale della variabile). Un limite delle simulazioni con il

metodo Monte Carlo è che possono essere effettuate solo nel caso dei derivati di stile europeo.

Il Metodo Carlo consente di calcolare i parametri necessari per le operazioni di copertura.<sup>19</sup> Supponiamo di essere interessati alla derivata di  $c$  rispetto a  $q$ , dove  $c$  è il valore corrente del derivato e  $q$  è il valore di una variabile sottostante o di un parametro. Innanzitutto, si usa il metodo Monte Carlo nel modo consueto per ottenere una stima,  $c$ , del valore corrente del derivato. Quindi si modifica leggermente il valore di  $q$  e si calcola un nuovo valore corrente  $c^*$ , usando lo stesso insieme di estrazioni casuali generato per le simulazioni precedenti. Una stima della derivata di  $c$  rispetto a  $q$  è data da

$$\frac{c^* - c}{\Delta q}.$$

Il numero delle simulazioni,  $N$ , deve restare invariato quando si stimano  $c$  e  $c^*$ .

Esistono, inoltre, altre procedure numeriche<sup>20</sup> come ad esempio i metodi delle differenze finite (metodo implicito delle differenze finite<sup>21</sup> e metodo esplicito delle differenze finite<sup>22</sup>), approssimazioni analitiche, in particolare per le opzioni di tipo americano<sup>23</sup>, metodo Markov chain, metodo Neural network.

### 3.3.1 Procedure per la riduzione della varianza

Se le simulazioni vengono effettuate nel modo che è stato descritto finora, per stimare  $c$  con ragionevole accuratezza occorre usare in genere un valore molto elevato di  $N$ , con conseguenti notevoli costi in termini di tempo di calcolo. Qui di seguito

---

<sup>19</sup> Vedi paragrafo 2.9.

<sup>20</sup> Duan J.C., "Lattices and Markov Chains for Numerical Pricing of Derivates?" Rotman School of Management, University of Toronto, (2002).

<sup>21</sup> Brennan M., Schwartz E. S., "The valuation of American Put Options", Journal of Finance, No. 32 (1977), 449-462.

<sup>22</sup> Hull J., White A., "Valuing Derivative Securities Using The Explicit Finite Difference Method", Journal of Financial and Quantitative Analysis, No. 25 (1990), 87-100.

<sup>23</sup> Barone-Adesi. G., Whaley R. E., "Efficient Analytic Approximation of America Option Values", Journal of Finance, No. 42, (1987), 301-320. In ambiente GARCH, Youngsoo C., "An analytical approximation option formula under the garcb model" Department of mathematics, Hankuk University of foreign studies, Korea, (2003), 449-791

verranno esaminate alcune tecniche di riduzione della varianza che portano a comprimere enormemente i tempi di calcolo.

### Tecnica della Variabile Antitetica

Se si adotta la tecnica della variabile antitetica, in ogni simulazione si devono determinare due valori. Il primo,  $c_1$ , è quello calcolato nel modo consueto; il secondo,  $c_2$ , viene calcolato cambiando il segno a tutti i campioni estratti casualmente dalle distribuzioni normali standardizzate. (Se  $\varepsilon$  è il campione usato per calcolare  $c_1$ , si usa  $-\varepsilon$  per calcolare  $c_2$ ). Il valore campionario del derivato calcolato in ogni simulazione è la media di questi due valori. Questa tecnica funziona bene perché quando un valore si trova sopra a quello effettivo, l'altro tende a trovarsi sotto, e viceversa.

Sia  $\bar{c}$  la media di  $c_1$  e  $c_2$ :

$$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2}{2}. \tag{3.10}$$

La stima finale del valore del derivato è la media delle  $\bar{c}$ . Se  $\omega$  è la deviazione standard delle  $\bar{c}$  ed  $N$  è il numero delle simulazioni (ossia il numero delle coppie di valori che sono state calcolate), l'errore standard della stima è  $\omega/\sqrt{N}$ .

### Tecnica della Variabile di Controllo

La tecnica della variabile di controllo può essere usata quando ci sono due derivati simili,  $A$  e  $B$ . Il primo è quello sotto osservazione; il secondo è simile al primo, ma può essere valutato in base ad una formula analitica. Supponiamo che  $X$  sia uno stimatore obiettivo del prezzo del derivato  $A$ . Una variabile casuale  $Y$  è chiamata variabile di controllo per  $X$  se essa è correlata con  $X$  e il suo valore atteso  $\gamma$  è conosciuto. La variabile casuale di controllo *lineare*  $X(\alpha)$  è definita come<sup>24</sup>

$$X(\alpha) = X - \alpha(Y - \gamma)$$

---

<sup>24</sup> Kleijnen J. P. C., Rubinstein R. Y., "Monte Carlo Sampling and Variance Reduction Techniques", Discussion paper No. 9401, Center for Economic Research, Tilburg University, (1994).

(3.11)

dove  $\alpha$  è un parametro scalare. La varianza di  $X(\alpha)$  è minimizzata da

$$\alpha^* = Cov(X, Y) / Var(Y)$$

la varianza minimale risultante è, quindi,

$$Var[X(\alpha^*)] = (1 - \rho_{XY}^2) Var(X)$$

dove  $\rho_{XY}$  denota il coefficiente di correlazione tra  $X$  e  $Y$ . Poiché la  $Cov(X, Y)$  è sconosciuta, il coefficiente di controllo ottimale  $\alpha^*$  deve essere stimato dalla simulazione. Stimando sia  $Cov(X, Y)$  che  $Var(Y)$  significa che l'analisi della regressione lineare è applicata per stimare  $\alpha^*$ .

### Campionatura per Importanza

La campionatura per importanza (*importance sampling*) si spiega meglio con un esempio. Si supponga di voler calcolare il prezzo di una *call deep out of the money* con prezzo d'esercizio  $X$ . Se i sentieri temporali vengono determinati nel modo consueto, gran parte porterà ad un valore finale nullo per la *call*. Si spreca così tempo di calcolo, dato che i sentieri con valore finale nullo contribuiscono molto poco alla determinazione del valore dell'opzione. Cercheremo quindi di selezionare solo i sentieri importanti, ossia i sentieri con prezzi dell'azione superiori a  $X$  alla scadenza. Se  $F$  è la distribuzione probabilistica non condizionata (marginale) del prezzo dell'azione e  $\delta$  è la probabilità (nota analiticamente) che il prezzo risulti maggiore di  $X$  alla scadenza, allora  $G = F / \delta$  è la distribuzione probabilistica del prezzo dell'azione condizionata dal fatto che il prezzo sia maggiore di  $X$ . Se si adotta la campionatura per importanza, i campioni vengono estratti da  $G$  piuttosto che da  $F$ . La stima del prezzo dell'opzione è la media dei valori finali attualizzati moltiplicata per  $\delta$ .

### Campionatura Stratificata

La campionatura stratificata (*stratified sampling*) comporta la suddivisione in strati, o intervalli, della distribuzione probabilistica sottostante e l'estrazione dei campioni da ciascun intervallo in base alla probabilità che è ad esso associata. Se il numero degli intervalli è elevato, si può usare la media o la mediana, condizionata dal fatto di trovarsi nell'intervallo, come valore rappresentativo dell'intervallo stesso. (Quando verranno estratti i campioni dall'intervallo, si prenderà sempre il loro valore rappresentativo). Curran<sup>25</sup> ha utilizzato questa procedura per valutare sia le *calls* europee sia le opzioni che dipendono dal sentiero temporale seguito dalla variabile sottostante (*path dependent options*). Nel caso di una distribuzione normale standardizzata suddivisa in  $n$  intervalli, il valore rappresentativo dell'  $i$ -esimo intervallo è

$$N^{-1}\left(\frac{i-0,5}{n}\right)$$

dove  $N^{-1}$  è l'inversa della distribuzione normale cumulata. Ad esempio, quando  $n = 4$  i valori rappresentativi di ciascuno dei quattro intervalli sono  $N^{-1}(0,125)$ ,  $N^{-1}(0,375)$ ,  $N^{-1}(0,625)$  e  $N^{-1}(0,875)$ . La funzione  $N^{-1}$  può essere calcolata iterativamente usando una delle approssimazioni per  $N$  o pacchetti software adatti. Un'approssimazione che si può facilmente ottenere è data dalle seguenti equazioni:

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1k + a_2k^2 + a_3k^3) \rightarrow x \geq 0 \\ 1 - N(-x) \rightarrow x < 0 \end{cases}$$

dove

$$k = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

$$\gamma = 0,33267$$

$$a_1 = 0,4361836$$

---

<sup>25</sup> Curran M., "Strata Germs", Risk, Marzo 1994, 70-71.

$$a_2 = -0,1201676$$

$$a_3 = 0,9372980$$

e

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Quest'approssimazione fornisce valori di  $N(x)$  che sono accurati fino alla quarta cifra decimale e per i quali l'errore standard non è mai superiore a 0,0002.

In alternativa si può seguire l'approccio suggerito da Moro.<sup>26</sup>

### Metodo dei Momenti

Il metodo dei momenti (*moment matching*) comporta l'aggiustamento dei campioni estratti da una distribuzione normale standardizzata in modo da assicurare l'uguaglianza tra i momenti campionari (in genere il primo e il secondo, ma possibilmente anche i momenti di ordine superiore) e i corrispondenti momenti della distribuzione probabilistica. Si supponga che i campioni estratti da una distribuzione normale, usati per calcolare la variazione di valore di una certa variabile in un certo periodo di tempo, siano  $\varepsilon_i (1 \leq i \leq n)$ . Per assicurare l'uguaglianza dei primi due momenti, calcoliamo la media campionaria,  $m$ , e la deviazione standard campionaria,  $s$ . Quindi definiamo nel modo seguente i campioni aggiustati  $y_i (1 \leq i \leq n)$ :

$$y_i = \frac{\varepsilon_i - m}{s}.$$

Correttamente, la media dei campioni aggiustati è nulla e la deviazione standard è pari ad 1. Questi campioni aggiustati vengono usati per effettuare le simulazioni.

Il metodo dei momenti consente di ridurre i tempi di calcolo ma può creare problemi di memoria, dato che ogni estrazione deve essere mantenuta in memoria fino alla fine della simulazione. Il metodo dei momenti è a volte chiamato "ricampionatura quadratica", (*quadratic resampling*). Spesso viene usato insieme alla tecnica della

---

<sup>26</sup> Moro B., "The Full Monte" Risk, Febbraio 1985, 57-58.

variabile antitetica. Dato che quest'ultima assicura automaticamente l'uguaglianza dei momenti dispari, l'obiettivo del metodo dei momenti diventa quello di assicurare l'uguaglianza del secondo momento e possibilmente del quarto.

### Successioni Quasi Casuali

Una successione quasi-casuale (detta anche successione a “bassa discrepanza”) è una successione di campioni rappresentativi estratti da una distribuzione probabilistica.<sup>27</sup>

Le successioni quasi casuali hanno il vantaggio di comportare un errore standard proporzionale a  $1/N$  invece che a  $1/\sqrt{N}$ , dove  $N$  è la numerosità campionaria

La campionatura quasi-casuale è simile alla campionatura stratificata. L'obiettivo è quello di ottenere valori rappresentativi delle variabili. Nella campionatura stratificata si assume di sapere in anticipo quanti campioni verranno estratti. La campionatura quasi-casuale è più flessibile. I campioni vengono selezionati in modo da “riempire le distanze” tra i campioni già estratti. In ogni stadio della simulazione i punti campionati sono all'incirca equi-distanziati nello spazio probabilistico.

### 3.4 Confronto del modello GARCH (1,1) per la determinazione del prezzo con il modello Black & Scholes

Sebbene il processo omoschedastico usato nel modello Black & Scholes sia un caso speciale del processo GARCH per la determinazione del prezzo dell'opzione, l'interpretazione del modello Black & Scholes nella struttura GARCH è considerevolmente molto complicata.

Ipotizzando che i rendimenti subordinati al passato siano governati da un processo GARCH(1,1); l'idea potrebbe essere quella di applicare il modello Black & Scholes utilizzando la distribuzione marginale dei rendimenti come distribuzione di riferimento. Quindi la varianza da utilizzare nel modello Black & Scholes è pari a

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)}$$

---

<sup>27</sup> Brotherton R., “Monte Carlo Moting”, Risk Dicembre 1994, 53-58.

Si ricorda però, che la formula analitica di Black & Scholes richiede una valutazione neutrale al rischio; quindi sotto l'assunzione incorretta di omoschedasticità quando il processo che governa la realtà è eteroschedastico si deve ricorrere, non alla neutralizzazione del rischio di natura globale ma bensì, alla *locally risk-neutral valuation relationship* (LRNVR) per mantenere la consistenza del modello.

Duan dimostra alcune proprietà del processo GARCH(1,1) dopo aver assunto LRNVR. Esso suggerisce che un uso corretto del LRNVR modificherà alcune caratteristiche chiave del processo GARCH.

**Teorema 3.3.** Sotto misura di probabilità  $Q$ , se  $|\lambda| < \sqrt{(1-\alpha_1-\beta)/\alpha_1}$ , allora

- (i) La varianza marginale stazionaria di  $\xi_t$  è uguale a  $\alpha_0 [1 - (1 + \lambda^2)\alpha_1 - \beta]^{-1}$
- (ii)  $\xi_t$  ha un processo leptocurtico
- (iii)  $Cov^Q(\xi_t | \sigma_t, \sigma_{t+1}^2) = -2\lambda\alpha_0\alpha_1 [1 - (1 + \lambda^2)\alpha_1 - \beta]^{-1}$

La varianza marginale dei rendimenti GARCH, sotto la misura di probabilità originale  $P$ , è  $\alpha_0(1-\alpha_1-\beta)^{-1}$ . E' anche vero che la varianza condizionata è in correlata con i rendimenti del sottostante ritardati sotto la misura  $P$ . Dal teorema 3.3 l'assunzione di LRNVR induce un incremento nella varianza marginale  $\alpha_0 [1 - (1 + \lambda^2)\alpha_1 - \beta]^{-1}$ . Ciò comporta anche che la varianza condizionata può essere negativamente (positivamente) correlata con i rendimenti del sottostante ritardati se il premio per il rischio è positivo (negativo).

Come affermato in precedenza, il prezzo dell'opzione Black & Scholes nella struttura GARCH dovrebbe essere interpretato usando un'assunzione incorretta di omoschedasticità e quindi un'incorretta deviazione standard incondizionata. Il prezzo dell'opzione *call* Black & Scholes potrebbe essere valutato usando l'equazione 2.14 con  $\sigma^2 = \alpha_0(1-\alpha_1-\beta)^{-1}$  commettendo così uno sbaglio.

Dal momento che il processo GARCH, sotto assunzione di LRNVR, è ancora leptocurtico, sarà più probabile per le opzione *out-the-money* finire *in-the-money*. Questo implica che il prezzo dell'opzione GARCH sarà più elevato di quello Black & Scholes. La leptocurtosi rende più probabile anche il processo inverso, ovvero che

un'opzione *in-the-money* finisca *out-the-money*; questo, comunque, non implica prezzi minori per le opzioni *in-the-money* rispetto ai prezzi Black & Scholes. Ciò è vero perché ci deve essere una compensazione in aumento nella probabilità nel valore più elevato per far sì che le opzioni *in-the-money* raggiungano uguali valori. Oltre che a queste osservazioni generali, il confronto tra questi due modelli può essere solamente fatto per via numerica.

## Capitolo IV

### 4.1 Dati

La serie storica dei rendimenti<sup>1</sup> del Mib30 utilizzata in questo lavoro copre un intervallo temporale che va dal 1 luglio 1998 al 30 giugno 2003. Per le analisi sono stati utilizzati alcuni noti software: Eviews per le stime dei modelli, Excel e Matlab per le elaborazioni.

Nel seguito sono presentate le statistiche descrittive e una breve analisi dei dati, i quali saranno poi utilizzati nelle stime dei modelli. Per prima cosa è stata costruita la serie storica del Mib30. Dopo averne calcolato i logaritmi è stata costruita la serie storica dei rendimenti giornalieri, rappresentata in figura 4.1.

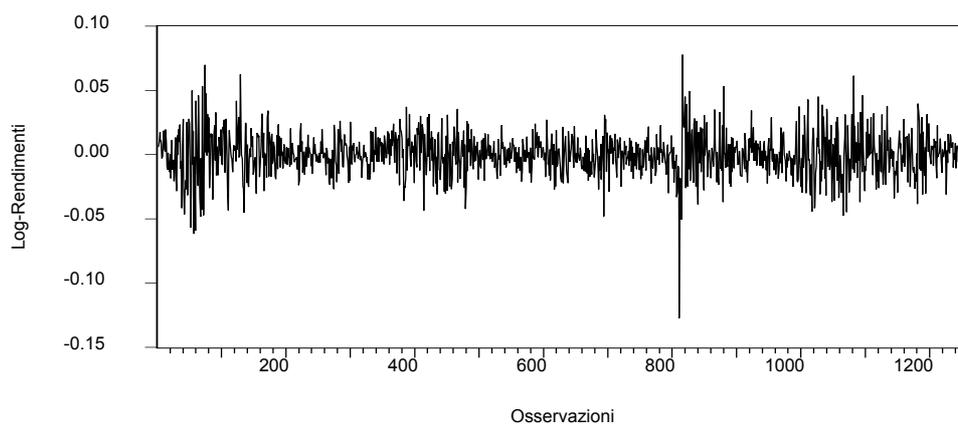


Figura 4.1: Log-rendimenti giornalieri Mib30

---

<sup>1</sup> Calcolata sui dati di chiusura.

Dalle statistiche riportate in tabella 4.1 si può facilmente notare che la distribuzione dei rendimenti è leptocurtica e presenta una lieve asimmetria a sinistra; il valore molto elevato del test Jarque-Bera indica il rifiuto dell'ipotesi di normalità.

Statistica	Valore	
Osservazioni	1255	
Media	-0.000259	
Mediana	-0.000344	
Massimo	0.077736	
Minimo	-0.127197	
Std. Dev.	0.016945	
Asimmetria	-0.219656	
Curtosi	6.496059	
Jarque-Bera	649.2231	
n° di ritardi	Ljung-Box Q-statistics applicata sui rendimenti	Ljung-Box Q-statistics applicata al quadrato dei rendimenti
10	24.498	306.03
20	50.033	413.97
40	73.381	452.23
60	91.494	463.97

Tabella 4.1: Statistiche descrittive dei log-rendimenti mib30

Il fenomeno della “*volatility smile*” può essere osservato nella volatilità implicita delle opzioni sull'indice azionario Mib30.

In diversi giorni di contrattazione (alla fine della sessione di Borsa) sono stati raccolti dati riguardanti il prezzo delle Mibo.

La figura 4.2 non ha lo scopo di calcolare la volatilità del sottostante osservando il prezzo delle opzioni<sup>2</sup> ma di evidenziare il fenomeno della “*volatility smile*”; la linea tratteggiata rappresenta i valori della volatilità implicita risultante dai prezzi delle opzioni osservate mentre quella continua rappresenta una linea di tendenza.

Le volatilità implicite indicate nella figura sottostante si riferiscono a delle opzioni con una vita residua relativamente breve (rimangono 44 giorni di contrattazione).

La differenza tra le due volatilità potrebbe essere imputabile sia ai bassi volumi (inferiore ai 100) delle opzioni in corrispondenza alle varie *moneyness* (ci sono dei casi limite di un solo contratto scambiato per opzioni *deep-out-of-the-money* e *deep-in-the-money*) sia ad un particolare momento del mercato.

<sup>2</sup> Se fosse così dovrei utilizzare uno dei metodi descritti nel paragrafo 2.11.

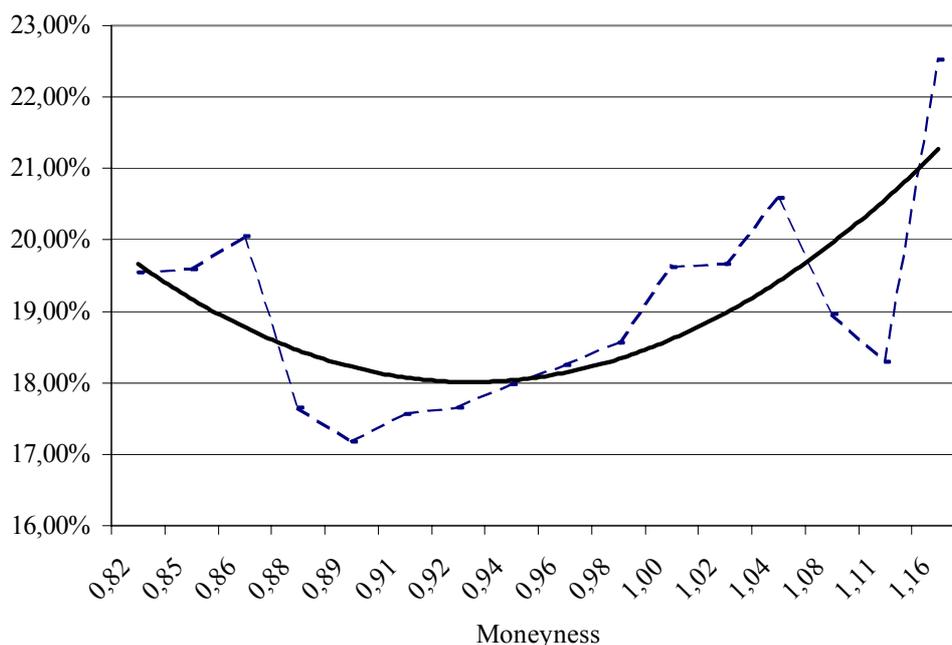


Figura 4.2: Volatilità implicita (*volatility smile*) delle opzioni sul Mib30 negoziate il 18 luglio 2003 con un livello dell'indice sottostante pari a 25.429

## 4.2 Stime dei Modelli

Le tabelle che seguono presentano le stime dei parametri dei diversi modelli di volatilità (GARCH(1,1), TAR(1,1), EGARCH(1,1)) che saranno utilizzati nelle simulazioni per studiarne il comportamento della volatilità implicita in rapporto al modello Black & Scholes.

Con l'utilizzo del software Eviews e ponendo il vincolo  $\lambda = 0$  e tasso d'interesse, *risk free*, uguale a zero si sono trovate le seguenti stime sui parametri per i diversi modelli.

Le stime dei parametri per i diversi modelli sono accompagnate dalle stime robuste degli *standard error*.<sup>3</sup>

In tabella 4.2 vengono visualizzate le stime per i vari parametri del modello GARCH(1,1).

<sup>3</sup> Gli standard error inseriti nelle tabelle sono calcolati usando il metodo descritto da Bollerslev e Wooldridge. Vedi Bollerslev T., Wooldridge J. M., "Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances" *Econometric Reviews*, (1992), No. 11, 143–172.

Parametro	Coefficiente	Std. Error	Stat. T.
$\delta$	2,299773	1,569357	1,465424
Equazione della varianza			
$\alpha_0$	7,46E-06	2,85E-06	2,616692
$\alpha_1$	0,129653	0,041621	3,115093
$\beta$	0,849467	0,038476	22,07771
Ljung-Box Q-statistics			
n° di ritardi	Residui	Quadrato dei residui	
	standardizzati	standardizzati	
10	13,209	14,164	
20	23,431	24,403	
40	42,217	34,164	
60	63,960	49,581	

Tabella 4.2: Stime dei parametri per il modello GARCH(1,1) per la determinazione del prezzo dell'opzione basato sull'equazione (3.4)

### Il modello TARCH per la determinazione del prezzo dell'opzione

Il modello TARCH<sup>4</sup> o modello GJR<sup>5</sup> generalizza il modello GARCH per permettere agli shocks negativi sui rendimenti di incrementare maggiormente la volatilità. Questa asimmetria è chiamata frequentemente *leverage*. Il modello TARCH(1,1) ha varianza condizionata così definita:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 \quad (4.1)$$

L'effetto *leverage* è misurato da  $\gamma$ , che determina il contributo di uno shock negativo dei rendimenti sulla varianza condizionata.  $D_{t-1}$  è una variabile dummy che assume valore 1 se  $\varepsilon_{t-1} < 0$  e 0 altrimenti;  $\alpha_0, \alpha_1$  e  $\beta$  hanno la medesima interpretazione del modello GARCH(1,1).

<sup>4</sup> Zakoian J., M., "Threshold Heteroskedastic Models", Journal of Economics and Control, No. 18, (1994), 931-955.

<sup>5</sup> Glosten L., R., Jagannathan R., Runkle D., E., "On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks", Journal of Finance, No. 48, (1993), 1779-1801.

Nella specificazione di questo modello, la derivata seconda della volatilità rispetto al prezzo corrente del sottostante non esiste. Se  $\varepsilon_{t-1} > 0$  la costante che premoltiplica la derivata dell'errore è solo  $\alpha_1$  (non c'è il termine del *leverage*), se invece  $\varepsilon_{t-1} < 0$  la costante è pari a  $\alpha_1 + \gamma$ .

La varianza marginale del processo TARCH(1,1) è pari a:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta + 0.5\gamma)}$$

Seguendo la metodologia utilizzata da Duan per il modello GARCH, specifichiamo il modello TARCH(1,1) per il processo dei rendimenti azionari. Sotto la misura  $Q$ , che soddisfa (LRNVR), il processo è così definito:

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \xi_t$$

con

$$\xi_t | \phi_{t-1} \approx N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1} - \lambda \sigma_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1} (\varepsilon_{t-1} - \lambda \sigma_{t-1})^2 \quad (4.2)$$

Mentre il prezzo azionario al tempo  $T$  può essere così definito:

$$S_T = S_t \exp \left( (T-t)r - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T \sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^T \xi_s \right)$$

Il valore dell'opzione *call* con prezzo d'esercizio  $X$  può essere ottenuto, prendendo il valore atteso condizionato dei *payoff* a termine sotto misura  $Q$  e attualizzando il valore atteso risultante al tasso d'interesse privo di rischio.

$$C_t^{TARCH} = e^{-(T-t)r} E^Q [\max(S_T - X, 0) | \phi_t]$$

Il corrispondente valore dell'opzione *put* di tipo europeo si può trovare utilizzando la condizione di *put-call parity*.

In tabella 4.3 vengono visualizzate le stime per i vari parametri del modello TARCH(1,1).

Parametro	Coefficiente	Std. Error	Stat. T.
$\delta$	-0,147517	1,568925	-0,094024
<b>Equazione della varianza</b>			
$\alpha_0$	5,94E-06	2,02E-06	2,940559
$\alpha_1$	0,045446	0,031362	1,449100
$\beta$	0,873093	0,062165	2,019079
$\gamma$	0,125515	0,023728	36,79655
<b>Ljung-Box Q-statistics</b>			
n° di ritardi	Residui	Quadrato dei residui	
	standardizzati	standardizzati	
10	13,293	17,390	
20	22,780	28,943	
40	43,469	39,488	
60	66,787	56,754	

Tabella 4.3: Stime dei parametri per il modello TARCH(1,1) per la determinazione del prezzo dell'opzione basato sull'equazione (4.2)

### Il modello EGARCH per la determinazione del prezzo dell'opzione

Un'importante limitazione dei modelli ARCH e GARCH sono la costrizione di positività dei parametri  $\alpha_i$  e  $\beta_j$  per la determinazione della varianza condizionata.

Inoltre il modello GARCH assume che l'impatto delle  $\varepsilon_t$ , nella volatilità condizionata dipende solo dalla grandezza, ma non dal segno, dell'innovazione. Studi empirici hanno mostrato che i cambiamenti dei prezzi azionari sono negativamente correlati con i cambiamenti di volatilità. Per superare questi inconvenienti, Nelson<sup>6</sup>,

<sup>6</sup> Nelson D., B., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, Vol. 59, (1991), 347-370.

introdusse il modello GARCH esponenziale, (EGARCH) nel quale il logaritmo della varianza condizionata è così specificata<sup>7</sup>:

$$\ln \sigma_t^2 = a_0 + a_{1a} \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + a_{1b} \left( \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - E \left[ \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} \right] \right) + b_1 \ln \sigma_{t-1}^2 \quad (4.3)$$

per  $\varepsilon_t \approx N(0, \sigma_t^2)$  la variabile standardizzata  $\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$  segue una distribuzione normale standard e conseguentemente  $E \left[ \frac{|\varepsilon_t|}{\sigma_t} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ .<sup>8</sup> Il parametro  $a_{1a}$  cattura l'effetto leva.

Per “good news”  $\left( \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} > 0 \right)$  l'impatto delle innovazioni  $\varepsilon_{t-1}$  è  $(a_{1b} + a_{1a}) \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$  e per “bad news”  $\left( \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} < 0 \right)$  si ha  $(a_{1b} - a_{1a}) \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$ . Se  $a_{1a} = 0$ , allora  $\ln \sigma_t^2$  risponde simmetricamente a  $\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$ . Per produrre un effetto leva,  $a_{1a}$  deve essere negativo. Il

fatto che il processo EGARCH sia specificato in termini di log-volatilità implica che  $\sigma_t^2$  sia sempre positivo e, conseguentemente non ci sono vincoli sui segni dei parametri del modello. La volatilità marginale del processo EGARCH(1,1) è:

$$\sigma^2 = \exp \left[ \frac{a_0 - a_{1b} \sqrt{2/\pi}}{1 - b_1} + \frac{1}{2} \frac{(a_{1a}^2 + a_{1b}^2)}{1 - b_1} \right] \prod_{m=0}^{\infty} [F_m(a_{1a}, a_{1b}, b_1) + F_m(-a_{1a}, a_{1b}, b_1)]$$

con

$$F_m = N[b_1^m (a_{1b} - a_{1a})] \exp(b_1^{2m} a_{1a} a_{1b}) \quad (4.4)$$

dove  $N[ ]$  è la distribuzione normale standard cumulata.

Seguendo la metodologia utilizzata da Duan per il modello GARCH, specifichiamo il modello EGARCH(1,1). Sotto la misura  $Q$ , per la determinazione del prezzo, che

<sup>7</sup> Per convenienza esplicitiamo un modello EGARCH(1,1)

<sup>8</sup> Johnson N., L., Kotz S., “Distributions in Statistics – Continuous Univariate Distributions“, Wiley & Sons, New York, (1970).

soddisfa la valutazione locale neutrale verso il rischio (LRNVR), il processo dei rendimenti azionari è così definito:

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \xi_t$$

$$\ln \sigma_t^2 = a_0 + a_{1a} \left( \frac{\xi_{t-1}}{\sigma_{t-1}} - \lambda \right) + a_{1b} \left( \left| \frac{\xi_{t-1}}{\sigma_{t-1}} - \lambda \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) + b_1 \ln \sigma_{t-1}^2$$

con

$$\xi_t | \phi_{t-1} \approx N(0, \sigma_t^2) \tag{4.5}$$

dove  $r$  è il tasso d'interesse privo di rischio,  $\lambda$  è il premio per il rischio,  $a_0, a_{1a}, a_{1b}$  e  $b_1$  sono parametri indipendenti. Per assicurare la stazionarietà,  $b_1$  è assunto essere minore di uno.

Mentre il prezzo azionario al tempo  $T$  può essere così definito:

$$S_T = S_t \exp \left( (T-t)r - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T \sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^T \xi_s \right)$$

Il valore dell'opzione *call* con prezzo d'esercizio  $X$  può essere ottenuto, prendendo il valore atteso condizionato dei *payoff* a termine sotto misura  $Q$  e attualizzando il valore atteso risultante al tasso d'interesse privo di rischio.

$$C_t^{EGA} = e^{-(T-t)r} E^Q [\max(S_T - X, 0) | \phi_t]$$

Il corrispondente valore dell'opzione *put* di tipo europeo si può trovare utilizzando la condizione di *put-call parity*.

In tabella 4.4 vengono visualizzate le stime per i vari parametri del modello EGARCH(1,1).

Parametro	Coefficiente	Std. Error	Stat. T.
$\delta$	0,834211	1,629632	0,511901
<b>Equazione della varianza</b>			
$a_0$	-0,433358	0,110566	-3,919452
$a_{1a}$	-0,084050	0,042386	-1,982951
$a_{1b}$	0,204383	0,045633	4,478897
$b_1$	0,967721	0,010374	93,28566
<b>Ljung-Box Q-statistics</b>			
n° di ritardi	Residui standardizzati	Quadrato dei residui standardizzati	
10	13,868	22,811	
20	23,460	35,463	
40	44,125	45,271	
60	67,241	60,876	

Tabella 4.4: Stime dei parametri per il modello EGARCH(1,1) per la determinazione del prezzo dell'opzione basato sull'equazione (4.5)

Il parametro  $\delta$  è lasciato libero in sede di stima; poi utilizzando la stima robusta degli *standard error* vengono calcolati gli intervalli di confidenza ad un livello  $1 - \alpha = 99\%$  per verificare se nei tre modelli considerati il parametro  $\delta$  potrebbe essere posto pari a  $-\frac{1}{2}$ .

- Intervallo di confidenza per il modello GARCH

$$\delta \pm z_{\frac{\alpha}{2}} Std.error = (-1,743 ; 6,342)$$

- Intervallo di confidenza per il modello TARCH

$$\delta \pm z_{\frac{\alpha}{2}} Std.error = (-4,189 ; 3,894)$$

- Intervallo di confidenza per il modello EGARCH

$$\delta \pm z_{\frac{\alpha}{2}} Std.error = (-3,363 ; 5,031)$$

Si può osservare che il valore  $-\frac{1}{2}$  cade all'interno di ciascun intervallo calcolato.

### 4.3 Disegno della simulazione Monte Carlo

Dal momento che la distribuzione del prezzo a termine del sottostante  $S_T$  non può essere derivata analiticamente, si usano delle simulazioni Monte Carlo per calcolare i prezzi delle opzioni *call* con i diversi modelli considerati. Il prezzo simulato dell'opzione *call* in  $t$  (tempo iniziale) valutata con i diversi modelli di volatilità è dato da:

$$\begin{aligned} C_t^{\text{mod}}(S_t, \sigma, T-t) &= e^{-(T-t)r} E\{\max[S_T - X, 0], S_t, \sigma, T-t\} \\ &\approx \hat{C}_t^{\text{mod}}(n, S_t, \sigma, T-t) \\ &= e^{-(T-t)r} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\max(S_{i,T} - X, 0)] \end{aligned}$$

$$S_{i,T} = S_t e^{(T-t)r - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T \sigma_{i,s}^2 + \sum_{s=t+1}^T \xi_{i,s}} \quad \xi_{i,T} \approx N(0, \sigma_{i,T}^2) \quad i = 1, \dots, n$$

$$T = t + j; \quad j = 21, 42, \dots, 126, 189, 252 \quad \text{in modo da considerare più scadenze.} \quad (4.1)$$

dove  $\sigma$  è la varianza marginale dei rendimenti ottenuta dalla combinazione dei parametri del modello considerato,  $n = 50.000$  è il numero di simulazioni<sup>9</sup>, mentre  $\sigma_{i,i}^2$  è la varianza condizionata dei modelli presi in considerazione.

Le simulazioni sono state eseguite con l'ausilio di un *M-file* creato in codice Matlab per ottimizzare i calcoli e i risultati.

In Appendice A è stato riportato solo quello relativo alla simulazione del prezzo dell'opzione *call* valutato con il modello GARCH, che nonostante la semplicità risulta essere interessante dato che può essere utilizzata, con piccole modifiche, anche per gli altri modelli di valutazione dell'opzione di tipo *call*.

---

<sup>9</sup> Engle R.F., Rosenberg J. V., "GARCH Gamma", Journal of Derivatives, No. 2, (1995), 47-59.

Per migliorare l'efficienza nella valutazione del prezzo dell'opzione sono state utilizzate alcune tecniche di riduzione della varianza in particolare il metodo della variabile antitetica e la tecnica della variabile di controllo.

Come spiegato in precedenza<sup>10</sup> per applicare il metodo della variabile antitetica vengono calcolati in realtà due prezzi dell'opzione; il primo risultante dalle innovazioni  $\xi_j$  associate al modello considerato, mentre il secondo scaturisce dalle innovazioni  $-\xi_j$ . La media di questi due prezzi procura l'output per una simulazione. Inoltre il corrispondente prezzo Monte Carlo sotto le assunzioni di Black & Scholes,  $C_t^{BS}$  è usato come variabile di controllo<sup>11</sup> dal momento che esiste una soluzione analitica per la formula di Black & Scholes<sup>12</sup>,  $\tilde{C}_t^{BS}$ .

$$\tilde{C}_t^{BS} = S_t N(d_1) - Xe^{-r(T-t)} N(d_2)$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / X) + (r + \sigma_{BS}^2 / 2)(T - t)}{\sigma_{BS} \sqrt{T - t}} \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - \sigma_{BS} \sqrt{T - t} \quad (4.2)$$

La volatilità  $\sigma_{BS}$  per il modello Black & Scholes è posta uguale alla volatilità marginale  $\sigma$  dei diversi processi di volatilità.

Il risultante prezzo dell'opzione *call* relativo ai vari modelli  $\tilde{C}_t^{\text{mod}}(n)$  è allora così definito

$$\tilde{C}_t^{\text{mod}}(n) = C_t^{\text{mod}}(n) - q(n) [C_t^{BS}(n) - \tilde{C}_t^{BS}]$$

dove

$$q(n) = \frac{\text{Cov}(C_t^{\text{mod}}(n), C_t^{BS}(n))}{\text{Var}(C_t^{BS}(n))} \quad (4.3)$$

<sup>10</sup> Vedi paragrafo 3.3.1.

<sup>11</sup> Schmitt C., "Option Pricing Using EGARCH Models?", ZEW Discussion Paper No. 20, (1996), Mannheim

<sup>12</sup> Vedi equazione (2.14).

Il prezzo dell'opzione,  $C_t^{\text{mod}}(n)$  è calcolato sfruttando, all'interno della simulazione, il metodo della variabile antitetica mentre  $\tilde{C}_t^{\text{mod}}(n)$  è il prezzo risultante applicando, anche, la variabile di controllo.

Dopo aver preso visione delle stime dei parametri dei diversi modelli si è deciso di operare le simulazioni sui seguenti valori dei parametri. Per semplicità si assume che il tasso di interesse, *risk-free*, sia zero. Questa assunzione semplifica anche la definizione di *moneyness*,  $m$ <sup>13</sup>.

#### 4.4 Volatilità implicita e rapporto IVR

Per un confronto grafico tra i vari modelli considerati e i prezzi delle opzioni Black & Scholes, si derivano le volatilità implicite che scaturiscono dai prezzi simulati delle opzioni. Considerando l'equazione (2.14), si sono calcolate le volatilità implicite  $\sigma_{\text{mod,imp}}$  dei prezzi delle opzioni *call*, risultanti dalle simulazioni dei vari modelli di volatilità considerati, per differenti valori di *moneyness* ( $S_t / X$ ) e di maturità ( $T - t$ ) ovvero

$$\tilde{C}_t^{\text{mod}} = C_t^{\text{BS}} \left( \sigma_{\text{mod,imp}}, \frac{S_t}{X}, r, T - t \right). \quad (4.4)$$

Le volatilità marginali  $\sigma$  dei vari modelli sono usate come stime per la volatilità nel calcolo del costo dell'opzione Black & Scholes. Per facilitare il confronto tra i modelli, si calcola un rapporto (*IVR*) tra la volatilità implicita del modello considerato  $\sigma_{\text{mod,imp}}$  e la corrispondente volatilità  $\sigma_{\text{BS}}$  usata per la determinazione del prezzo Black & Scholes, ovvero

$$IVR = \frac{\sigma_{\text{mod,imp}}}{\sigma_{\text{BS}}} = \frac{\sigma_{\text{mod,imp}}}{\sigma} \quad (4.5)$$

---

<sup>13</sup> Nella letteratura, la *moneyness* è sia definita come  $S/X$  o  $F/X$ , dove  $F$  denota il prezzo forward. Per  $r = 0$ , entrambe le definizioni sono, di conseguenza, identiche.

## 4.5 Scelta dei dati simulati da utilizzare

Per stimare il costo delle opzioni *call* con ragionevole accuratezza occorre usare in genere un valore molto elevato di  $n$ , con conseguenti notevoli costi in termini di tempi di calcolo. In questo paragrafo si esamineranno per via grafica gli *standard error*, dei costi delle opzioni *call*, che scaturiscono dalle diverse tecniche di riduzione della varianza. Le diverse tecniche utilizzate, nei tre modelli considerati, per la determinazione del costo dell'opzione *call* sono: nessun metodo di riduzione della varianza (semplice), metodo della variabile antitetica, metodo della variabile antitetica associato alla tecnica della variabile di controllo.

In base all'esperienza appena conclusasi, gli *standard error* risultanti dalle simulazioni per la determinazione del prezzo dell'opzione indicano che il metodo della variabile antitetica associato alla tecnica della variabile di controllo (prezzo Black & Scholes<sup>14</sup>) coincide con il solo metodo della variabile antitetica; questo perché i coefficienti di controllo ottimale  $q(n)$ <sup>15</sup> sono prossimi allo zero. Dal punto di vista teorico ciò avviene perché ogni singolo modello considerato è poco o per nulla correlato con il modello Black & Scholes. Dal punto di vista pratico questi risultati scaturiscono perché nelle simulazioni l'insieme dei campioni estratti in comune, tra il modello considerato e il modello Black & Scholes, è composto da realizzazioni di variabili normali standardizzate indipendenti. Se non si utilizzasse questo insieme di informazioni il costo  $\tilde{C}_t^{BS}$  non sarebbe più il valor medio di  $C_t^{BS}(n)$ <sup>16</sup>. Inoltre, già con  $n = 50.000$ , le differenze tra  $C_t^{BS}(n)$  e  $\tilde{C}_t^{BS}$  sono pressoché nulle.

Se, invece, si mettono a confronto gli *standard error* prodotti nelle simulazioni, utilizzando la sola variabile antitetica con il metodo semplice (ovvero senza utilizzo di procedure per la riduzione della varianza), si vede chiaramente, dalle figure 4.3 e 4.4, un enorme beneficio risultante da una forte diminuzione della variabilità del costo dell'opzione, specialmente se si considerano opzioni *at-the-money* e *in-the-money*; mentre per le opzioni *out-of-the-money* la riduzione della variabilità del costo è meno evidente.

---

<sup>14</sup> Op. cit., Schmitt C., 1996.

<sup>15</sup> Vedi equazione (4.3).

<sup>16</sup> Vedi equazione (3.11) e di conseguenza equazione (4.3).

Ciò dipende dal metodo della variabile antitetica; in questo contesto, il metodo agisce solo dopo aver effettuato una trasformazione non lineare,  $\max(S_T - X, 0)$ .

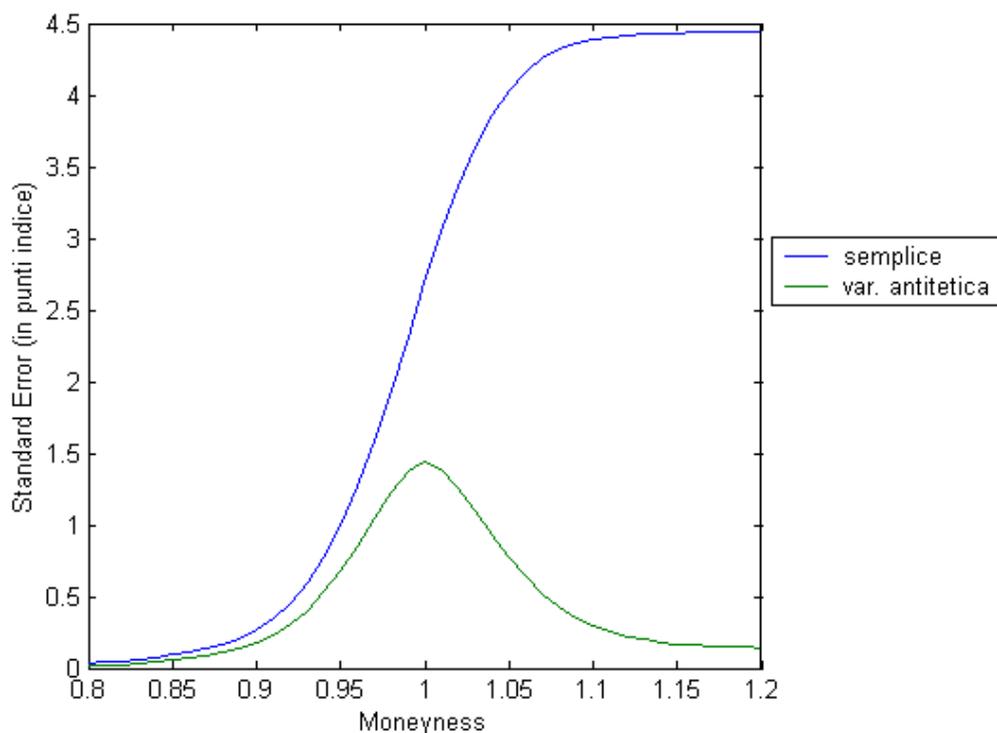


Figura 4.3: *Standard Error* relativo al modello GARCH per la determinazione del prezzo dell'opzione (scadenza ad 1 mese e volatilità 13,71%)

Nel grafico 4.3 si vede chiaramente che, per le opzioni *out-of-the-money*, le curve prodotte dagli *standard error* (associate ai rispettivi metodi di riduzione della varianza: semplice e variabile antitetica) hanno una forma molto simile data dal fatto che il valore 0 è in misura dominante. Ragionamento inverso, invece, se si vuole spiegarne l'andamento della curva, relativa ad opzioni *in-the-money*, associata al non utilizzo di procedure per la riduzione della varianza. Questa argomentazione, però, spiega solo il motivo della coda destra più pesante (curva degli *standard error* associata all'utilizzo della variabile antitetica) ma non della forma. Per spiegare ciò, si deve far ricorso alla tecnica utilizzata per la costruzione della variabile antitetica; per cui se si verifica un valore,  $S_t$ , sopra a quello effettivo, l'altro tende a trovarsi sotto, e viceversa mediando così i prezzi delle opzioni.

Dai grafici analoghi, relativi alle altre combinazioni (indipendentemente dai modelli considerati), si può notare che la curva tracciata dallo *standard error* (linea blu), la quale fornisce informazioni sulla variabilità del costo dell'opzione senza considerare alcuna tecnica di riduzione della varianza, tende ad assumere la forma di una retta all'aumentare sia della scadenza sia della volatilità; mentre i valori dello *standard error* relativi all'utilizzo della variabile antitetica (linea verde) tende ad assumere una forma che volge la concavità verso il basso.

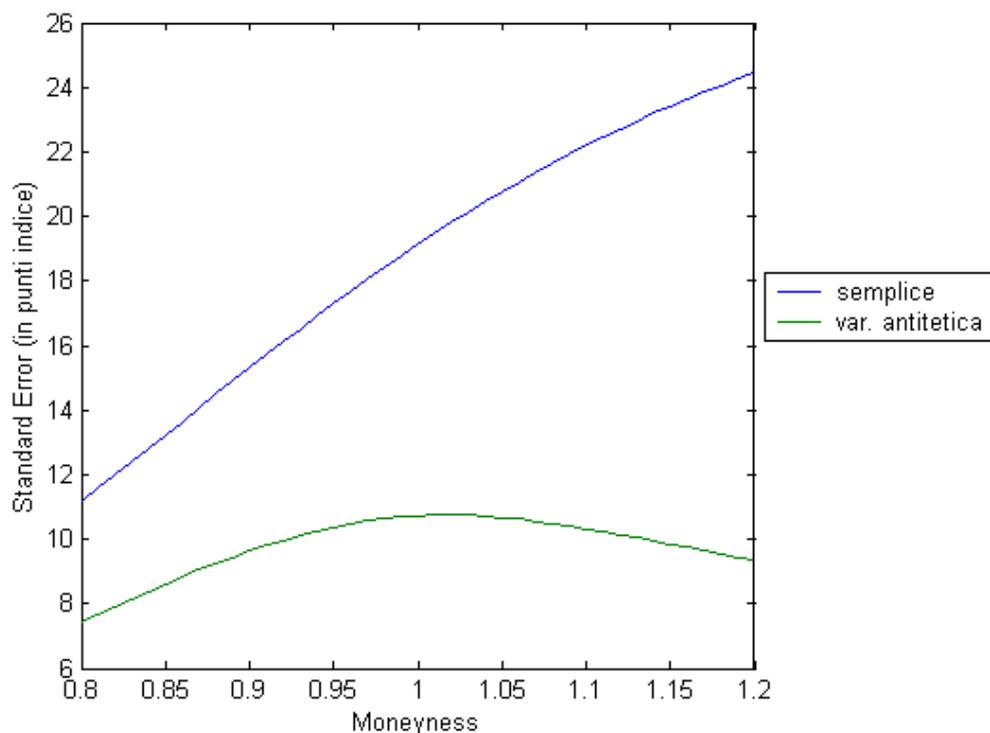


Figura 4.4: *Standard Error* relativo al modello TARCh per la determinazione del prezzo dell'opzione (scadenza a 12 mesi e volatilità 27,36%)

Le analisi che verranno svolte si baseranno sul costo dell'opzione *call* simulato con il solo metodo della variabile antitetica<sup>17</sup>,  $C_t^{\text{mod}}(n)$  questo perché si è potuto verificare che il costo *call* trovato senza nessun metodo di riduzione della varianza produce uno *standard error* molto maggiore.

<sup>17</sup> Ciò implica che, al numeratore del rapporto IVR si assegna la volatilità implicita che scaturisce dal costo  $C_t^{\text{mod}}(n)$ ; vedi equazione (4.5).

Anno	1998	1999	2000	2001	2002
Volatilità storica	33,78%	20,37%	22,36%	29,36%	28,62%

Tabella 4.5: Volatilità storica del Mib30

Inoltre, nei casi in cui la volatilità annualizzata del processo considerato sia inferiore del 20%, la simulazione risultante dal non utilizzo di tecniche di riduzione della varianza, per  $n=50.000$ , può molto frequentemente imbattersi nell'impossibilità di calcolare, per le opzioni *call* con scadenza breve, la volatilità implicita.

Segnaliamo però, tabella 4.5, che la serie della volatilità storica del Mib30 accoglie valori superiori al 20%.

#### 4.6 Risultati della simulazione GARCH

In questo paragrafo si analizzano i risultati relativi alle diverse simulazioni dovuti alle differenti combinazioni dei parametri; particolare enfasi viene posta sulle caratteristiche della volatilità implicita che scaturisce adottando un modello GARCH(1,1). Le figure che seguono, riportano in ordinata il rapporto IVR e in ascissa la *moneyness*, permettendo così un confronto con la volatilità implicita del modello Black & Scholes corrispondente.

Nel paragrafo 4.2 si è stimato un modello GARCH(1,1) associato ai rendimenti dell'indice Mib30. Tali parametri vengono tenuti in considerazione per fornire un orientamento circa la possibile dimensione dei parametri.

Nella tabella 4.6 sono riportati i valori parametrici per il modello GARCH(1,1), le *moneyness* e le diverse scadenze considerate nell'analisi.

Parametri	Valori
$\alpha_0$	0.00000746
$\alpha_1$	0.100, 0.125, 0.150
$\beta$	0.800, 0.825, 0.850
$\lambda$	0
$r$	0
$m = \frac{S}{Xe^{-r(T-t)}}$	0.80, 0.81, ..., 1.19, 1.20
$T - t$	1 mese, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12 mesi

Tabella 4.6: Simulazione basata sul modello GARCH(1,1)

La variazione di  $\alpha_1$ ,  $\beta$  e  $T-t$  forniscono 64 differenti combinazioni dei parametri. Ciò accade perché la combinazione  $\alpha_1 = 0.150$ ,  $\beta = 0.850$  viola la condizione  $\alpha_1 + \beta < 1$ .

Per essere consistente con la natura discreta delle serie simulate, assumiamo che un anno sia composto da 252 (negoziazioni) giorni. Fattori come  $\sqrt{250}$  o  $\sqrt{252}$  sono anche tipicamente usati per annualizzare la volatilità storica dai dati giornalieri. Perciò, un mese è definito da  $252/12 = 21$  (negoziazioni) giorni.

La volatilità iniziale<sup>18</sup>,  $\sigma$ , è posta uguale alla volatilità non condizionale dei diversi processi utilizzati; l'implicazione è che si troverà correntemente al suo livello medio di lungo periodo. Un cambiamento in questo valore iniziale avrà effetti sul valore dell'opzione. La tabella 4.7 mostra le volatilità marginali (annualizzate) di modelli GARCH(1,1) per particolari combinazioni parametriche (il parametro  $\alpha_0$  è posto uguale a quello stimato in tabella 4.2).

GARCH		$\beta$		
		0,800	0,825	0,850
$\alpha_1$	0,100	13,71%	15,83%	19,39%
	0,125	15,83%	19,39%	27,42%
	0,150	19,39%	27,42%	*

Tabella 4.7: volatilità marginale annualizzate per un modello GARCH(1,1)

Nel processo GARCH(1,1) la volatilità marginale aumenta con l'aumentare dei coefficienti  $\alpha_1$  e  $\beta$  nella stessa proporzione.

In figura 4.5 si vedono gli effetti del cambiamento del tempo di scadenza; ci si accorge che l'effetto *smile* decresce con un incremento della vita residua di un'opzione. Nei mercati finanziari, le distribuzioni dei rendimenti convergono alla normalità se si incrementa l'orizzonte temporale degli investimenti<sup>19</sup>. Il fatto che, i prezzi GARCH delle opzioni convergono ai prezzi Black & Scholes sotto aggregazione temporale rende consistente quanto affermato in precedenza.

<sup>18</sup> Vedi equazione (4.1).

<sup>19</sup> Vedi Capitolo II, paragrafo 2.12.

I risultati della figura 4.5 sono basati su un modello GARCH che per costruzione non contiene un parametro leva quindi la volatilità implicita non può essere di tipo *skew*.

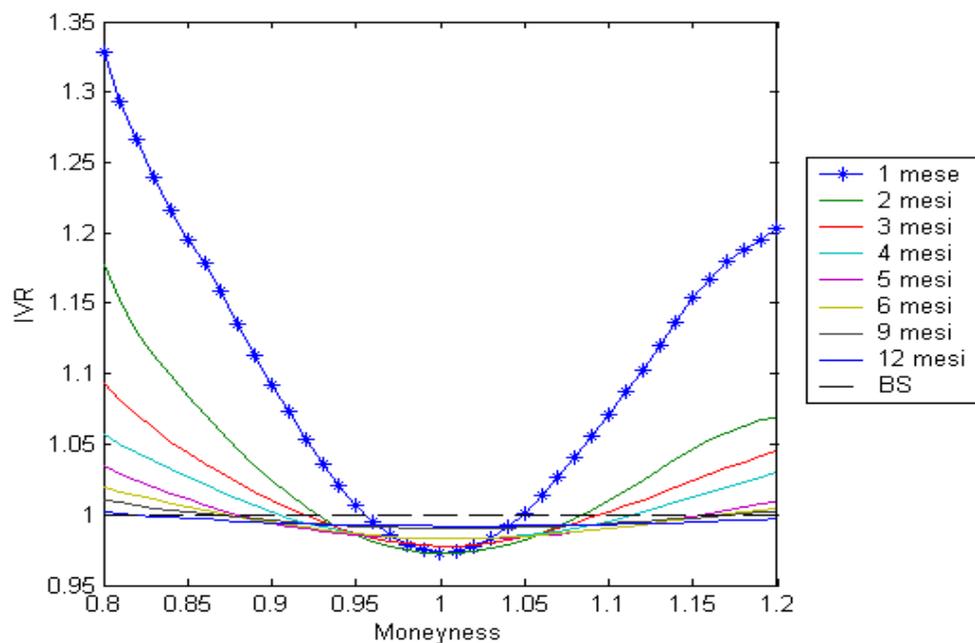


Figura 4.5: Curve IVR: Modello GARCH(1,1) con parametri  $\alpha_1 = 0,125$ ,  $\beta = 0,800$ .

Per le opzioni *at-the-money*, la volatilità implicita del modello GARCH è sistematicamente più piccola della corrispondente volatilità Black & Scholes; ciò implica un minore prezzo delle opzioni basate su un modello GARCH rispetto alle corrispondenti opzioni Black & Scholes. BS denota l'indice IVR per il modello Black & Scholes, il quale è sempre uno.

La figura 4.6 visualizza chiaramente l'effetto *smile* della volatilità implicita lungo tutta la *moneyness*. Per le opzioni *at-the-money*, la volatilità implicita del modello GARCH è sistematicamente più piccola della corrispondente volatilità implicita Black & Scholes, ma l'*implied volatility ratio* (IVR) è più grande di 1 sia per le opzioni *in-the-money* ( $S/X > 1$ ) sia per le opzioni *out-of-the-money* ( $S/X < 1$ ).

Le analisi rivelano ulteriormente che per le opzioni *deep-out-of-the-money* le curve IVR, se aumentiamo la volatilità conseguenza dell'aumento del parametro  $\beta$ , tendono a slittare in basso.

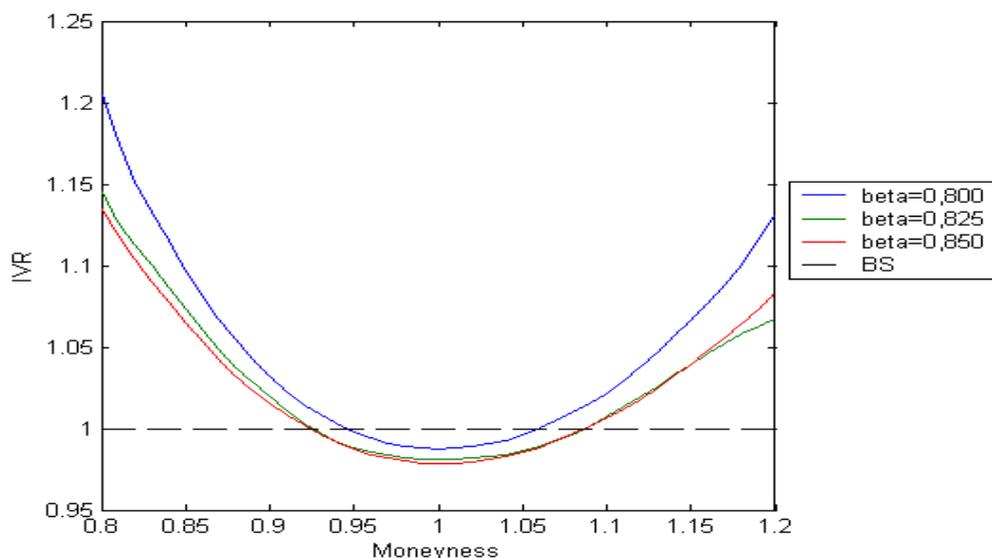


Figura 4.6: Curve IVR: Modello GARCH(1,1) con parametri  $\alpha_1 = 0,100$ , scadenza 2 mesi.

Ciò si verifica sempre per i casi in cui la scadenza è inferiore a 3 mesi mentre con l'aumentare della vita residua dell'opzione questa caratteristica potrebbe essere, a volte, smentita ma se ciò accade succede solo tra curve IVR che scaturiscono da modelli GARCH che hanno una differenza di  $\beta$  minore di 0,05.

Il comportamento della curva IVR per le opzioni *deep-in-the-money* è invece meno prevedibile ma denota una caratteristica importante; i valori assunti dalla curva IVR sono sistematicamente più bassi rispetto ai valori assunti per le opzioni *deep-out-of-the-money* ovvero la curva IVR non è simmetrica.

Le figure 4.7 e 4.8 mostrano i comportamenti delle curve IVR, a parità di volatilità del modello GARCH e della vita residua dell'opzione.

Nei grafici si evidenzia che, per le opzioni *at-the-money*, aumentando  $\beta$  e di conseguenza diminuendo  $\alpha_1$ , l'indice IVR pur rimanendo inferiore ad 1 tende ad aumentare.

La figura 4.8 sottolinea che la caratteristica precedentemente citata permane vera, anzi viene amplificata, se si aumenta la vita residua dell'opzione; ovvero le curve IVR tendono quasi a non intersecarsi tra di loro.

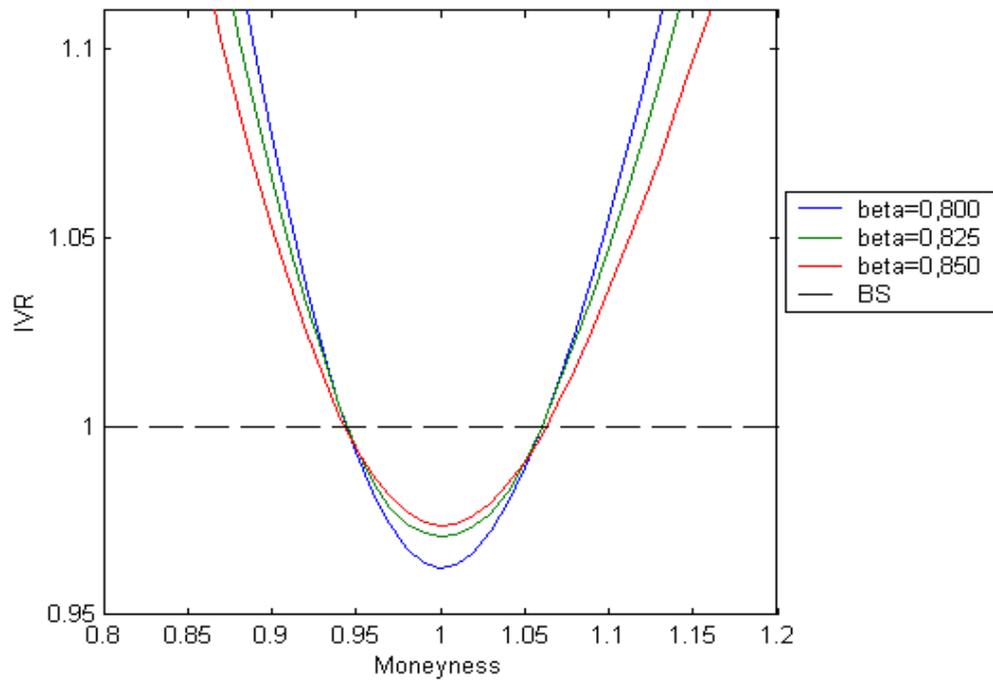


Figura 4.7: Curve IVR: Modello GARCH(1,1) con volatilità 19,39%, scadenza 1 mese.

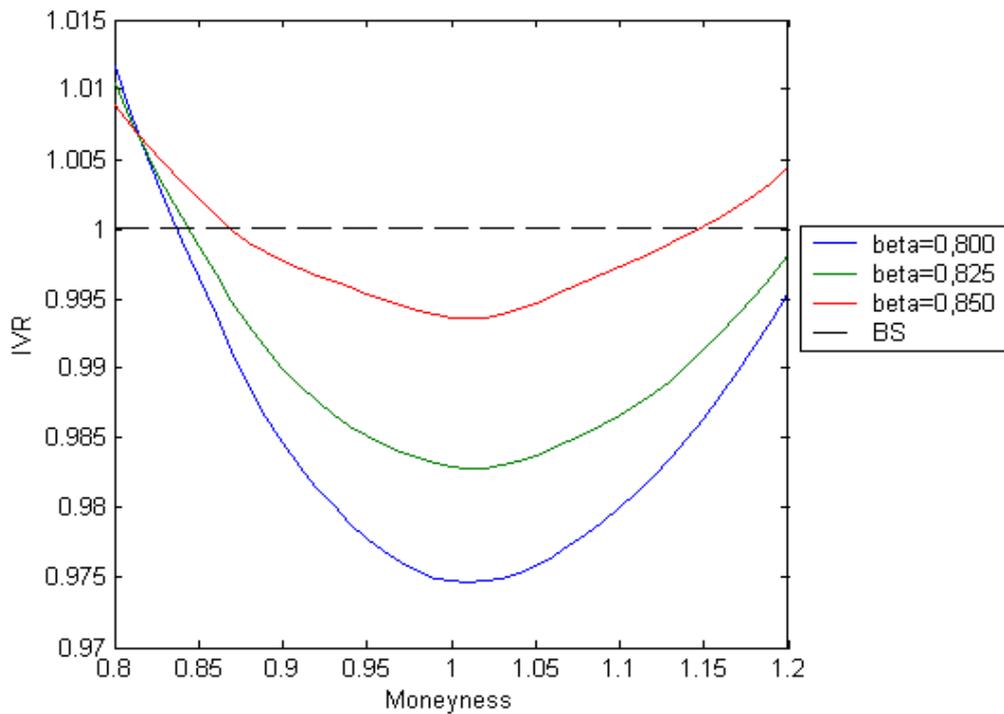


Figura 4.8: Curve IVR: Modello GARCH(1,1) con volatilità 19,39%, scadenza 9 mesi

### 4.7 Risultati della simulazione TARCH

In questo paragrafo si analizzano i risultati relativi alle diverse simulazioni con modelli TARCH(1,1) dovuti a differenti combinazioni dei parametri, ponendo particolare enfasi sulle volatilità implicite che scaturiscono adottando tali modelli.

I risultati, precedentemente acquisiti, della stima dei parametri per il modello TARCH(1,1) servono per fornire un possibile orientamento.

Nella tabella 4.8 vengono riportati i valori parametrici per il modello TARCH(1,1), le *moneyness* e le diverse scadenze considerate nell'analisi.

Parametri	Valori
$\alpha_0$	0.00000594
$\alpha_1$	0.05, 0.08
$\beta$	0.800, 0.825, 0.850
$\gamma$	0.10, 0.15
$\lambda$	0
$r$	0
$m = \frac{S}{Xe^{-r(T-t)}}$	0.80, 0.81, ... ,1.19, 1.20
$T - t$	1 mese, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12 mesi

Tabella 4.8: Simulazione basata sul modello TARCH(1,1)

La variazione di  $\alpha_1$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $T - t$  forniscono 88 differenti combinazioni dei parametri. Ciò accade perché la combinazione  $\alpha_1 = 0.08$ ,  $\beta = 0.850$  e  $\gamma = 0.15$  rende il denominatore della varianza negativo infatti  $\alpha_1 + \beta + 0.5\gamma > 1$ .

Le tabelle 4.9a e 4.9b mostrano le volatilità marginali (annualizzate) di modelli TARCH(1,1) per particolari combinazioni parametriche (il parametro  $\alpha_0$  è posto uguale a quello stimato in tabella 4.3).

TARCH		$\beta$		
		0,800	0,825	0,850
$\alpha_1$	0,05	12,23%	14,13%	17,30%
	0,08	14,62%	18,24%	27,36%

Tabella 4.9a: Volatilità marginale annualizzate per un modello TARCH(1,1) con parametro  $\gamma = 0.10$

TARCH		$\beta$		
		0,800	0,825	0,850
$\alpha_1$	0,05	14,13%	17,30%	24,47%
	0,08	18,24%	27,36%	*

Tabella 4.9b: Volatilità marginale annualizzate per un modello TARCH(1,1) con parametro  $\gamma = 0.15$

Come ci si aspetta la volatilità marginale per i modelli TARCH(1,1), con i medesimi valori dei parametri  $\alpha_1$  e  $\beta$ , aumenta se si accresce il parametro di *leverage*,  $\gamma$ .

La figura 4.9 visualizza chiaramente la volatilità implicita di tipo *skew* classica dei modelli che contengono l'effetto *leverage*. La curva IVR ha una forma decrescente lungo i primi valori della *moneyness* (l'opzione è *out-of-the-money*) per poi assumere una forma crescente lungo i restanti valori; questo è riscontrabile e molto evidente per le opzioni che hanno una vita residua breve.

I restanti grafici relativi a tutte le altre combinazioni dei parametri evidenzino curve IVR analoghe a quelle riportate in figura 4.9. La volatilità implicita del modello TARCH è sistematicamente più grande della corrispondente volatilità implicita Black & Scholes solo per le opzioni *deep-in-the-money* la cui vita residua è molto breve.

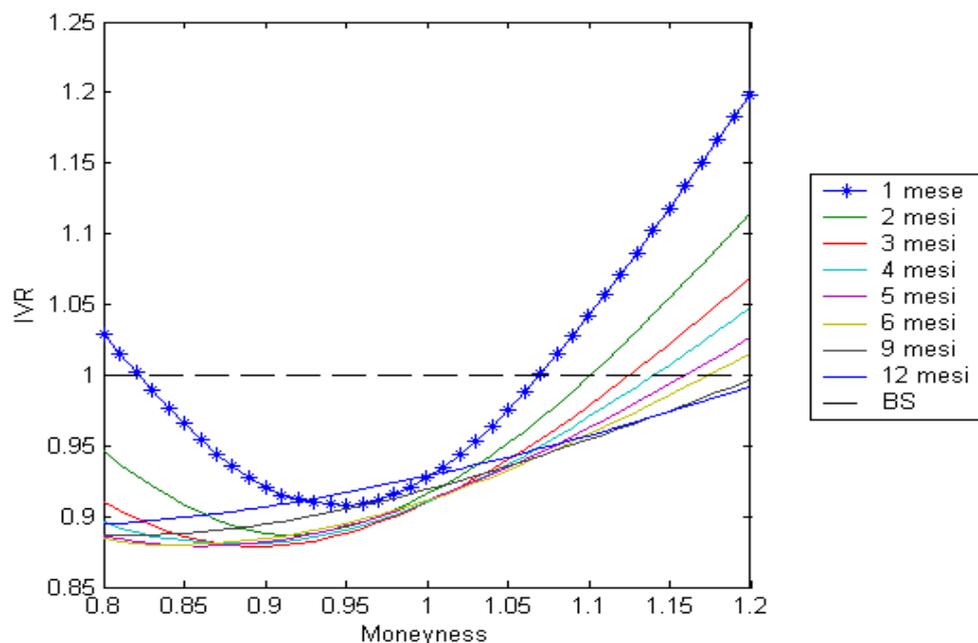


Figura 4.9: Curve IVR: Modello TARCH(1,1) con  $\alpha_1 = 0,08$   $\beta = 0,850$  e  $\gamma = 0,10$ .

In figura 4.10 si vedono gli effetti della variazione del parametro  $\beta$  in un modello TARCH. Un aumento di tale parametro determina uno spostamento della curva IVR in basso (alcune eccezioni si possono riscontrare nei modelli TARCH, con una bassa volatilità annualizzata, per le opzioni *deep-out-of-the-money* con scadenza ad 1 mese).

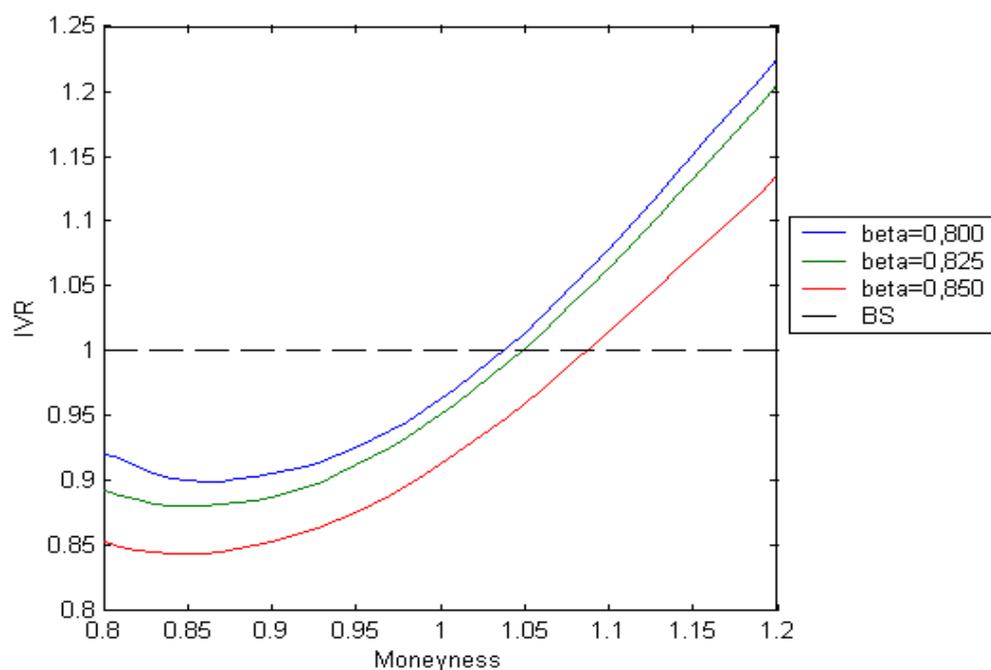


Figura 4.10: Curve IVR: Modello TARCH(1,1) con  $\alpha_1=0,05$   $\gamma=0,15$  e scadenza 3 mesi.

E' stata svolta un'analisi per mettere in evidenza gli effetti che si riscontrano nei modelli TARCH che differiscono tra loro solo rispetto ad un diverso valore del parametro  $\gamma$ . Le curve IVR, relative a modelli TARCH con parametro leva pari a 0,10, assumono sistematicamente valori più elevati<sup>20</sup> rispetto alle corrispondenti curve IVR associate ad un parametro  $\gamma=0,15$ .

Inoltre, si è riscontrata un'ulteriore caratteristica empirica; Se si effettua la derivata prima della curva IVR per le opzioni *deep-in-the-money*, si scopre che inizialmente il tasso di crescita, per i modelli TARCH con un  $\gamma$  pari a 0,10, è maggiore ma questa differenza diminuisce aumentando la vita residua dell'opzione fino a invertire la

<sup>20</sup> Alcune eccezioni si hanno nei valori IVR relativi ad opzioni *deep-in-the-money*.

tendenza iniziale<sup>21</sup>; generalmente, considerando già un'opzione con scadenza a 3 mesi, il tasso di crescita della curva IVR per un modello TARCH con parametro  $\gamma = 0,15$  è superiore rispetto al tasso di crescita che scaturisce da un modello con un parametro  $\gamma = 0,10$ .

Moneyness	Modello TARCH con $\gamma = 0,10$ , scadenza 1 mese	Modello TARCH con $\gamma = 0,15$ , scadenza 1 mese	Modello TARCH con $\gamma = 0,10$ , scadenza 4 mesi	Modello TARCH con $\gamma = 0,15$ , scadenza 4 mesi
1,10	2.2162	1.8828	0.8286	0.9050
1,11	2.2982	1.8935	0.8639	0.9236
1,12	2.3774	1.8932	0.8944	0.9434
1,13	2.3694	1.9094	0.9097	0.9602
1,14	2.3835	1.9098	0.9221	0.9811
1,15	2.4093	1.9197	0.9380	0.9970
1,16	2.4360	1.9469	0.9472	0.9974
1,17	2.5530	1.9483	0.9602	1.0073
1,18	2.5890	1.9490	0.9819	1.0066
1,19	2.5822	1.9515	0.9936	1.0131
1,20	2.6474	1.9440	1.0095	1.0100

Tabella 4.10: valori relativi al tasso di crescita tra due modelli TARCH(1,1)

Per comprendere meglio quanto affermato vengono inseriti i grafici 4.11 e 4.12 e la tabella 4.10.

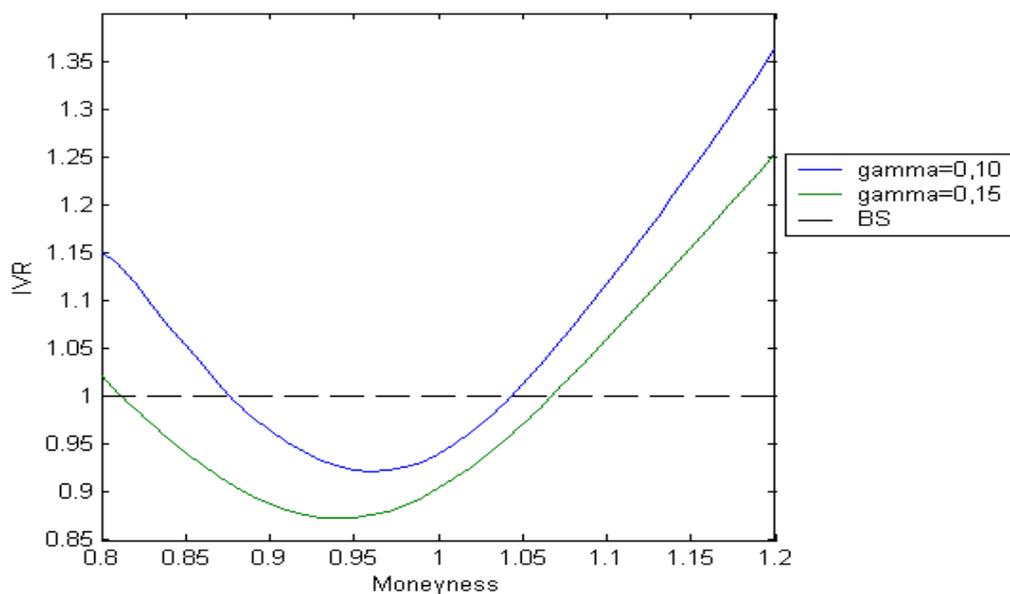


Figura 4.11: Curve IVR: Modello TARCH(1,1) con  $\alpha_1 = 0,08$   $\beta = 0,825$  e scadenza 1 mese.

<sup>21</sup> Se si considerano i due modelli TARCH(1,1) con  $\alpha_1 = 0,05$  e  $\beta = 0,825$ , si può accertare la singolarità di un tasso di crescita, del modello basato su  $\gamma = 0,15$ , sempre superiore.

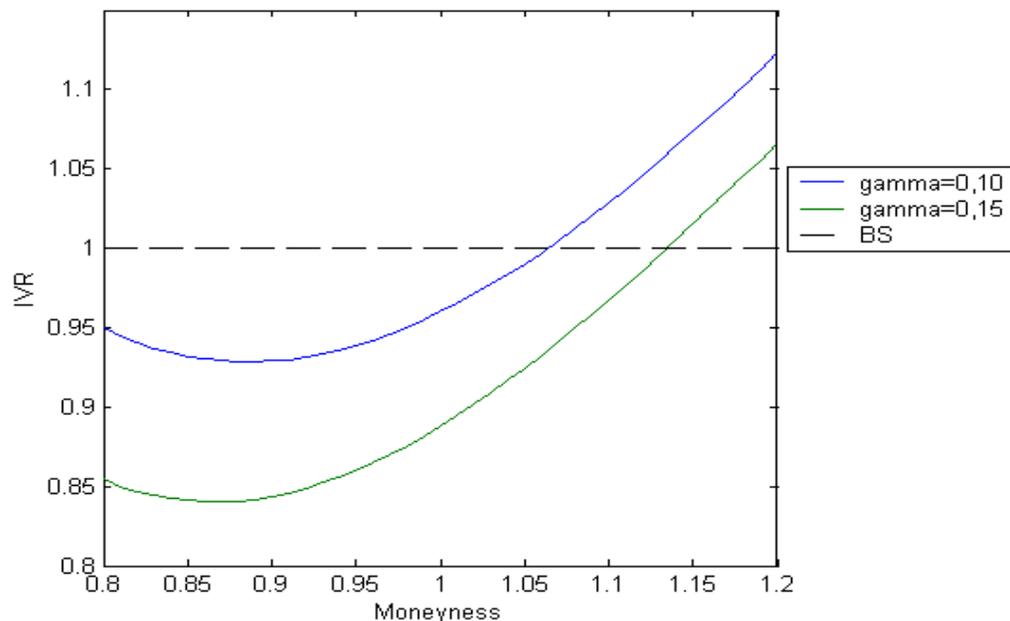


Figura 4.12: Curve IVR: Modello TARCH(1,1) con  $\alpha_1=0,08$   $\beta=0,825$  e scadenza 4 mesi.

## 4.8 Risultati della simulazione EGARCH

In questo paragrafo si descrivono i risultati relativi alle diverse simulazioni con modelli EGARCH(1,1), analizzando in particolare le volatilità implicite che scaturiscono adottando tali modelli.

Nella tabella 4.11 vengono riportati i valori parametrici per il modello EGARCH(1,1), le *moneyness* e le diverse scadenze considerate nell'analisi.

Parametri	Valori
$a_0$	-0.43
$a_{1a}$	0.00, -0.10, -0.20
$a_{1b}$	0.15, 0.25, 0.35
$b_1$	0.95
$\lambda$	0
$r$	0
$m = \frac{S}{Xe^{-r(T-t)}}$	0.80, 0.81, ..., 1.19, 1.20
$T - t$	1 mese, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12 mesi

Tabella 4.11: Simulazione basata sul modello EGARCH(1,1)

La variazione di  $a_{1a}$ ,  $a_{1b}$  e  $T-t$  forniscono 72 differenti combinazioni dei parametri.

La tabella 4.12 visualizza le volatilità marginali (annualizzate) di modelli EGARCH(1,1) per particolari combinazioni parametriche (i parametri  $a_0$  e  $b_1$  sono posti uguali a quelli inseriti in tabella 4.11).

EGARCH		$a_{1b}$		
		0,15	0,25	0,35
$a_{1a}$	0,00	22,01%	22,88%	24,28%
	-0,10	22,45%	23,28%	24,66%
	-0,20	23,86%	24,54%	25,85%

Tabella 4.12: Volatilità marginale annualizzate per un modello EGARCH(1,1)

Come ci si aspetta, la volatilità marginale del processo EGARCH incrementa con  $a_{1b}$  mentre l'effetto leva  $a_{1a}$  ha solo una minor influenza.

Le figure 4.13 e 4.14 mostrano gli effetti della variazione del parametro  $a_{1b}$  il quale misura l'impatto della dimensione delle innovazioni  $\left(\frac{|\xi_{t-1}|}{\sigma_{t-1}}\right)$  sulla volatilità. In entrambe le figure, la scadenza è fissata ad 1 mese.

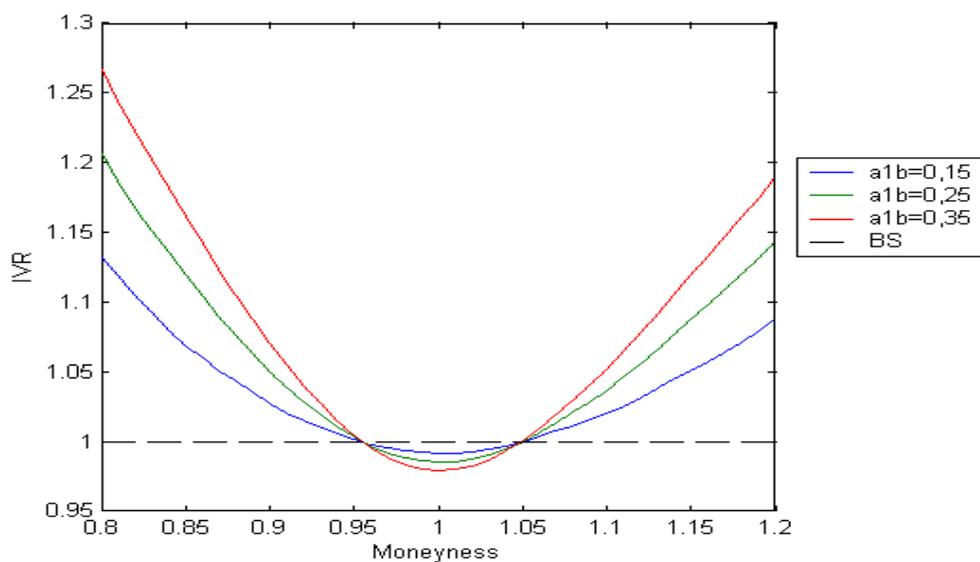


Figura 4.13: Curve IVR: Modello EGARCH(1,1) con  $a_{1a} = 0.00$ , scadenza 1 mese

La figura 4.13 visualizza chiaramente il modello *smile* della volatilità implicita lungo la *moneyness*. Per le opzioni *at-the-money*, la volatilità implicita del modello EGARCH è sistematicamente più piccola della corrispondente volatilità implicita Black & Scholes, ma l'*implied volatility ratio* è più grande di 1 sia per le opzioni *in-the-money* sia per le opzioni *out-of-the-money*. Il modello di volatilità *smile* in figura 4.13 assomiglia moltissimo ai risultati ottenuti per il modello GARCH. La figura 4.13 è basata sulle simulazioni con  $a_{1a} = 0$ , cioè senza un effetto leva mentre il parametro di *leverage*  $a_{1a}$  è fissato a -0,20 per le simulazioni sottostanti la figura 4.14. Variando ora,  $a_{1b}$  da 0,15 a 0,35 si produce dei modelli di volatilità implicita completamente differenti. Per piccoli valori di  $a_{1b}$ , l'effetto obliquo che attribuisce il parametro  $a_{1a}$  alla volatilità implicita è chiaramente dominante. Il modello EGARCH comporta volatilità implicite più elevate del modello Black & Scholes per le opzioni *call in-the-money* ma volatilità implicite minori per le opzioni *out-the-money*.

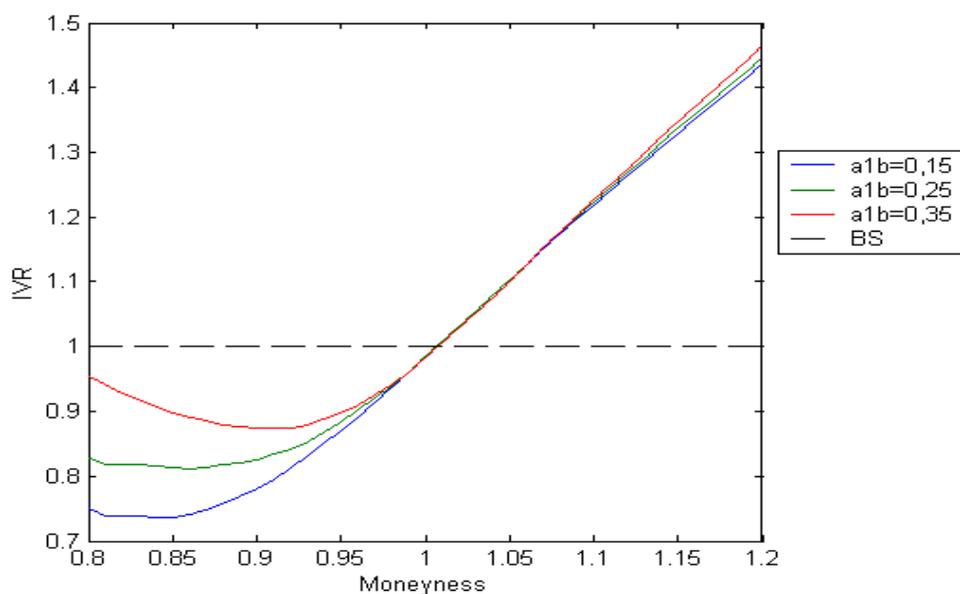


Figura 4.14: Curve IVR: Modello EGARCH(1,1) con  $a_{1a} = -0.20$ , scadenza 1 mese

Per comprendere meglio l'effetto leva sulla volatilità, ricordiamo che un parametro negativo  $a_{1a}$  implica, a parità delle altre condizioni, che le innovazioni positive siano associate con decrementi di volatilità e viceversa. Le opzioni *out-of-the-money*

richiedono elevati rendimenti positivi del sottostante per finire *in-the-money* alla scadenza.

Dal momento che, le innovazioni positive producono una minore volatilità, i prezzi EGARCH delle opzioni *call out-of-the-money* dovrebbero essere minori dei corrispondenti prezzi Black & Scholes. Questo spiega le forme asimmetriche delle curve IVR in figura 4.14. Nota, comunque, che con un incremento di  $a_{1b}$  relativo a  $a_{1a}$ , l'effetto *smile* riemerge gradualmente.

La figura 4.15 mostra la variazione dell'effetto leva quando  $a_{1a}$  varia ma  $a_{1b}$  è costante a 0,25. Si vede chiaramente, che al decrescere del parametro  $a_{1a}$  il rapporto IVR è soggetto ad un effetto obliquo. Questo fenomeno si sviluppa in senso antiorario attorno al valore di *moneyness* 1.

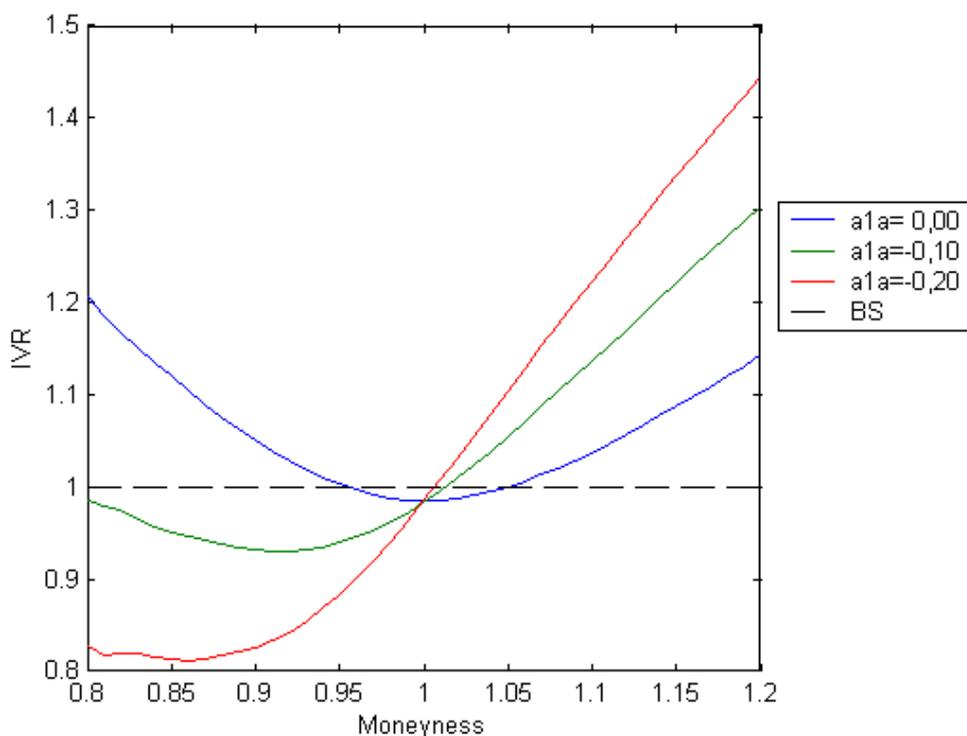
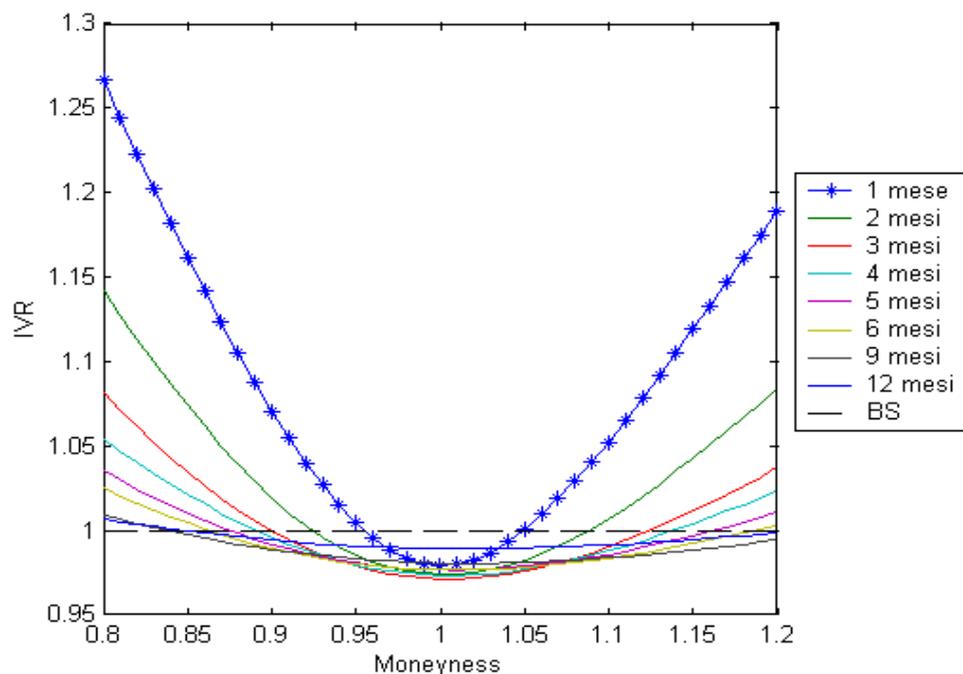


Figura 4.15: Curve IVR: Modello EGARCH(1,1) con  $a_{1b} = 0.25$ , scadenza 1 mese


 Figura 4.16: Curve IVR: Modello EGARCH(1,1) con  $a_{1a}=0.00$   $a_{1b}=0.35$ 

In figura 4.16 si vedono gli effetti del cambiamento del tempo di scadenza; si può vedere che l'effetto *smile* decresce con un incremento della vita residua di un'opzione. I prezzi EGARCH delle opzioni convergono ai prezzi Black & Scholes se si incrementa l'orizzonte temporale degli investimenti questo deriva dal fatto che le distribuzioni dei rendimenti convergono alla normalità; sotto aggregazione temporale rende consistente quanto affermato in precedenza.

I risultati della figura 4.16 sono basati su un modello EGARCH senza l'effetto leva e, perciò, non si può trovare una volatilità di tipo *skew*.

Anche in figura 4.17 si vedono gli effetti del cambiamento del tempo di scadenza ma in questo caso siamo alla presenza di un modello EGARCH asimmetrico. Con  $a_{1a}$  fissato a  $-0,10$  e  $a_{1b}$  a  $0,25$ ; si può ancora vedere che, in generale, gli effetti della volatilità implicita sono più energici per le opzioni con scadenza più breve rispetto a quelle con scadenza più distante. Comunque, si deve annotare delle eccezioni per le opzioni *deep-out-of-the-money* con *moneyness* minori di  $0,9$ . Il rapporto IVR di una *call* con scadenza ad 1 mese con *moneyness* pari a  $0,80$  è  $0,9848$  mentre il rapporto decrementa

fino a 0,8975 per una opzione *call* con scadenza a 3 mesi e incrementa di nuovo fino a 0,9425 per un'opzione con scadenza a 12 mesi.

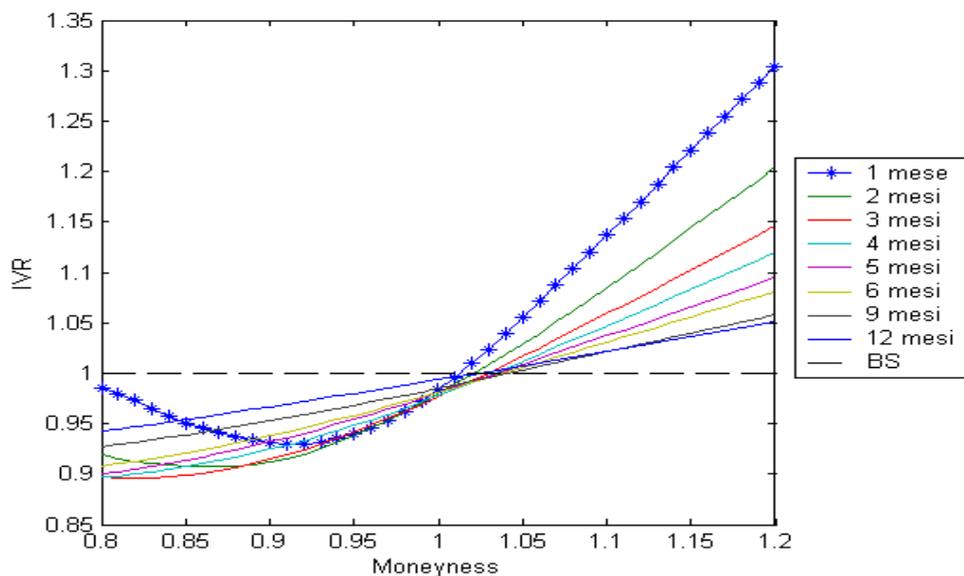


Figura 4.17: Curve IVR: Modello EGARCH(1,1) con  $a_{1a} = -0.10$   $a_{1b} = 0.25$

Questo effetto interessante è dovuto al fatto che, sotto aggregazione temporale, il fenomeno della volatilità *smile* sparisce più velocemente del fenomeno della volatilità di tipo *skew*. E' da aggiungere che questo tipo di grafico si è trovato con tutte le altre combinazioni di  $a_{1a}$  e  $a_{1b}$  dove  $a_{1a} < 0$ .

Tutte le simulazioni che servono per determinare il sentiero temporale del sottostante e di conseguenza i prezzi delle opzioni richiedono un valore iniziale della volatilità,  $\sigma$ . Una scelta naturale è la volatilità marginale del corrispondente modello EGARCH come definito nell'equazione 3.15. I risultati delle precedenti figure sono tutte basate su questo valore iniziale. Sarebbe interessante sapere se i risultati della simulazione sono sensibili rispetto alla scelta del valore iniziale. Le figure 4.18 e 4.19 cercano di verificare questo. Usando un valore iniziale della volatilità di 15,36% il quale è più piccolo della volatilità marginale pari a 23,28% (basata su  $a_{1a} = -0,10$  e  $a_{1b} = 0,25^{22}$ ), ha l'effetto di slittare le curve della volatilità implicita in basso

<sup>22</sup> Vedi tabella 4.12.

(confronta figure 4.17 e 4.18). La base razionale economica dietro a questo cambiamento è piuttosto ovvia. I prezzi Black & Scholes non vengono modificati dal momento che essi sono ancora calcolati in base alla stessa volatilità marginale ma i prezzi EGARCH diminuiscono e tale diminuzione è dovuta alla volatilità iniziale che condiziona le volatilità successive. La volatilità e gli effetti dei prezzi sembrano essere piuttosto sostanziale ma si dovrebbe ricordare che la differenza nel valore iniziale è molto grande.

La figura 4.19 illustra gli effetti sull'uso di una volatilità iniziale relativamente grande pari a 29,36% (pari alla volatilità storica annualizzata nell'anno 2001). Non risulta sorprendente che una volatilità iniziale più grande faccia slittare le curve IVR in basso (confronta figure 4.17 e 4.19). Perciò, la scelta del valore iniziale determina la *posizione* delle curve IVR. E', invece, interessante notare che la forma delle curve IVR non sono molto colpite dalle variazioni sulla volatilità iniziale. Risultati analoghi si sono riscontrati anche per i modelli GARCH(1,1) e TARCH(1,1).

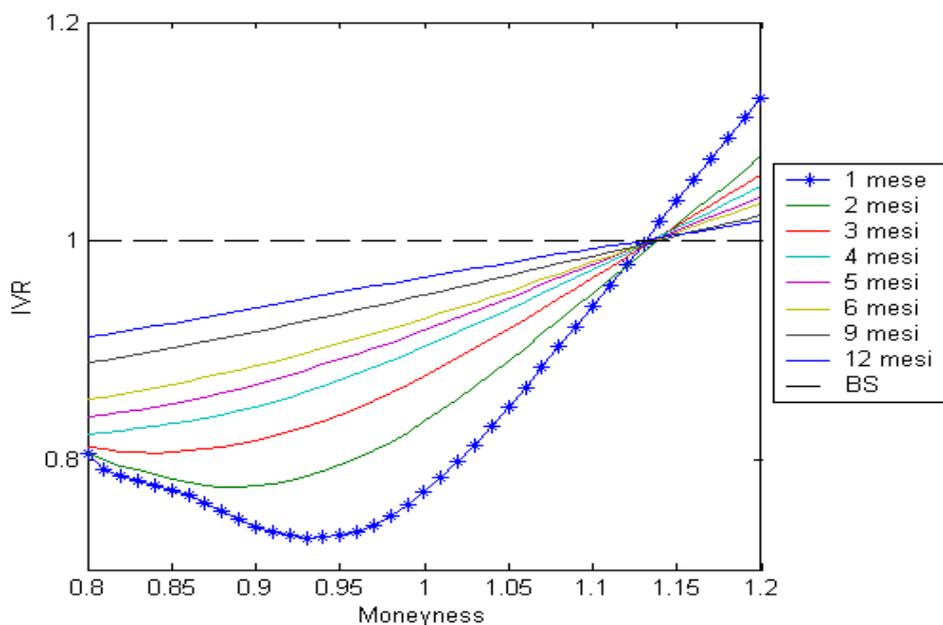


Figura 4.18: Curve IVR: Modello EGARCH(1,1) con  $a_{1a} = -0.10$ ,  $a_{1b} = 0.25$  e condizione iniziale: bassa volatilità (pari a 15,36%)

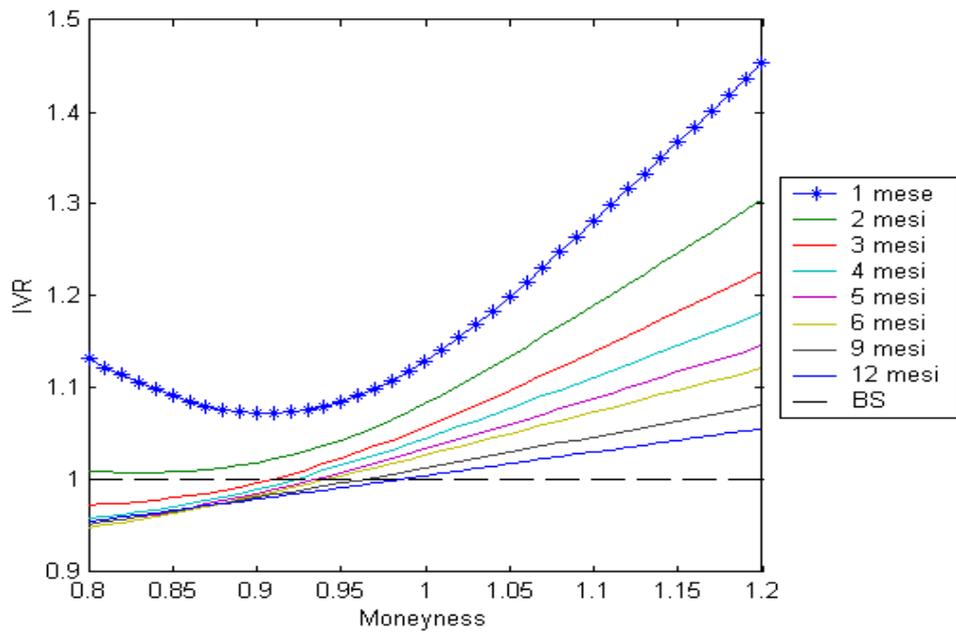


Figura 4.19: Curve IVR: Modello EGARCH(1,1) con  $a_{1a} = -0.10$ ,  $a_{1b} = 0.25$  e condizione iniziale: alta volatilità (pari a 29,36%).

## Appendice A

M-file sottostante è stato realizzato in codice Matlab e utilizzato per determinare il prezzo delle opzioni *call* di tipo europeo con sottostante un modello GARCH(1,1).

La procedura calcola il costo e lo standard error associato delle opzioni *call* usando: il metodo semplice, la tecnica della variabile antitetica e il metodo della variabile antitetica associato alla variabile di controllo; inoltre per ogni metodo si determina il costo dell'opzione *call* per differenti *maturity* e per diverse *moneyness*.

I parametri iniziali riguardano le scelte adottate.

### Codice

```
%Modello: GARCH(1,1) implementato nella versione di Duan sotto LRNVR
clear all
format bank
fid=fopen('c:/dati/chiusura.txt','r'); %Acquisisco la serie storica reale
traiettoria=fscanf(fid,'%f');

%Parametri
t1=length(traiettoria);
r=0; % Risk-free
lamda=0; %premio per il rischio
delta=(-0.5);
T=252;
N=50000; %N° di simulazioni
```

```

%Stime dei parametri della varianza condizionata del processo
w=0.00000746;
alfa=0.100;
beta=0.800;

%Varianza marginale del processo
sigstaz=w/(1-(1+lamda^2)*alfa-beta);

%Valori della moneyness considerati
m=[0.80:0.01:1.20];
l=length(m);

%Inizializzazioni
mese1=21;
mese2=42;
mese3=63;
mese4=84;
mese5=105;
mese6=126;
mese9=189;
mese12=252;
oriz=[mese1 mese2 mese3 mese4 mese5 mese6 mese9 mese12];
o=length(oriz);
ep=zeros(N,T+1);
ep1=zeros(N,T+1);
epb=zeros(N,T+1);
sig2=zeros(N,T+1);
sig21=zeros(N,T+1);
ST=zeros(N,o+1);
STa=zeros(N,o+1);
ST(:,1)=traiettoria(t1);
STa(:,1)=traiettoria(t1);
via=zeros(N,l);
vib=zeros(N,l);
va=zeros(N,l);
tempo= repmat(0,[1 o]);
att= repmat(0,[1 o]);
strike= repmat(0,[1 l]);
q1= repmat(0,[1 l]);
q2= repmat(0,[1 l]);
q3= repmat(0,[1 l]);
q4= repmat(0,[1 l]);
q5= repmat(0,[1 l]);
q6= repmat(0,[1 l]);
q9= repmat(0,[1 l]);
q12= repmat(0,[1 l]);

```

```

cgarchtilde1=zeros(N,1);
cgarchtilde2=zeros(N,1);
cgarchtilde3=zeros(N,1);
cgarchtilde4=zeros(N,1);
cgarchtilde5=zeros(N,1);
cgarchtilde6=zeros(N,1);
cgarchtilde9=zeros(N,1);
cgarchtilde12=zeros(N,1);

%Condizione iniziale sulla varianza
varcond=sigstaz;

%Strike price
for(i=1:l)
    strike(i)=traiettoria(t1)/m(i);
end

%Coefficienti per attualizzare
for(i=1:o)
    tempo(i)=oriz(i)/T;
    att(i)=exp(-r*tempo(i));
end

%Traiettorie simulate
for(j=1:N)
    epb(j,1)=normrnd(0,1);
    ep(j,1)=epb(j,1)*sqrt(varcond);
    sig2(j,1)=varcond;
    ep1(j,1)=-epb(j,1)*sqrt(varcond);
    sig21(j,1)=varcond;
end
for(j=1:N)
    for(i=2:T+1)
        sig2(j,i)=w+alfa*(ep(j,i-1)-lamda*sqrt(sig2(j,i-1)))^2+beta*sig2(j,i-1);
        sig21(j,i)=w+alfa*(ep1(j,i-1)-lamda*sqrt(sig21(j,i-1)))^2+beta*sig21(j,i-1);
        epb(j,i)=normrnd(0,1);
        ep(j,i)=epb(j,i)*sqrt(sig2(j,i));
        ep1(j,i)=-epb(j,i)*sqrt(sig21(j,i));
    end
end

%Calcolo del prezzo del sottostante
for(j=1:N)
    ST(j,2)=traiettoria(t1)*exp(oriz(1)*r+delta*sum(sig2(j,2:mese1+1))+sum(ep(j,2:
mese1+1)));

```

```
STa(j,2)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(1)*r+delta*sum(sig21(j,2:mese1+1))+sum(ep1(j,
2:mese1+1)));
```

```
end
for(j=1:N)
```

```
ST(j,3)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(2)*r+delta*sum(sig2(j,2:mese2+1))+sum(ep(j,2:
mese2+1)));
```

```
STa(j,3)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(2)*r+delta*sum(sig21(j,2:mese2+1))+sum(ep1(j,
2:mese2+1)));
```

```
end
for(j=1:N)
```

```
ST(j,4)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(3)*r+delta*sum(sig2(j,2:mese3+1))+sum(ep(j,2:
mese3+1)));
```

```
STa(j,4)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(3)*r+delta*sum(sig21(j,2:mese3+1))+sum(ep1(j,
2:mese3+1)));
```

```
end
for(j=1:N)
```

```
ST(j,5)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(4)*r+delta*sum(sig2(j,2:mese4+1))+sum(ep(j,2:
mese4+1)));
```

```
STa(j,5)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(4)*r+delta*sum(sig21(j,2:mese4+1))+sum(ep1(j,
2:mese4+1)));
```

```
end
for(j=1:N)
```

```
ST(j,6)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(5)*r+delta*sum(sig2(j,2:mese5+1))+sum(ep(j,2:
mese5+1)));
```

```
STa(j,6)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(5)*r+delta*sum(sig21(j,2:mese5+1))+sum(ep1(j,
2:mese5+1)));
```

```
end
for(j=1:N)
```

```
ST(j,7)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(6)*r+delta*sum(sig2(j,2:mese6+1))+sum(ep(j,2:
mese6+1)));
```

```
STa(j,7)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(6)*r+delta*sum(sig21(j,2:mese6+1))+sum(ep1(j,
2:mese6+1)));
```

```
end
for(j=1:N)
```

```

ST(j,8)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(7)*r+delta*sum(sig2(j,2:mese9+1))+sum(ep(j,2:
mese9+1)));

STa(j,8)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(7)*r+delta*sum(sig21(j,2:mese9+1))+sum(ep1(j,
2:mese9+1)));
end
for(j=1:N)

ST(j,9)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(8)*r+delta*sum(sig2(j,2:mese12+1))+sum(ep(j,2:
mese12+1)));

STa(j,9)=traiettoria(t1)*exp(ORIZ(8)*r+delta*sum(sig21(j,2:mese12+1))+sum(ep1(
j,2:mese12+1)));

end

%Valore intrinseco
a=1;
b=1;
for(gg=1:o)
    for(j=1:N)
        for(i=1:l)
            vib(j,i)=max(ST(j,gg+1)-strike(i),0);
            via(j,i)=max(STa(j,gg+1)-strike(i),0);
        end
    end
    va=(vib+via)/2; %Valore intrinseco sfruttando la variabile antitetica

switch gg
case 1
    vig1=va;
    value1=vib;
case 2
    vig2=va;
    value2=vib;
case 3
    vig3=va;
    value3=vib ;
case 4
    vig4=va;
    value4=vib;
case 5
    vig5=va;
    value5=vib;
case 6

```

```

    vig6=va;
    value6=vib;
case 7
    vig9=va;
    value9=vib;
otherwise
    vig12=va;
    value12=vib;
end
end
end

```

%Valori utilizzando la variabile antitetica

%Standard error

```

sdg1=std(vig1,0,1);
sdg2=std(vig2,0,1);
sdg3=std(vig3,0,1);
sdg4=std(vig4,0,1);
sdg5=std(vig5,0,1);
sdg6=std(vig6,0,1);
sdg9=std(vig9,0,1);
sdg12=std(vig12,0,1);

```

%Costo call garch

```

garch1=att(1)*sum(vig1(1:N,:))/N;
garch2=att(2)*sum(vig2(1:N,:))/N;
garch3=att(3)*sum(vig3(1:N,:))/N;
garch4=att(4)*sum(vig4(1:N,:))/N;
garch5=att(5)*sum(vig5(1:N,:))/N;
garch6=att(6)*sum(vig6(1:N,:))/N;
garch9=att(7)*sum(vig9(1:N,:))/N;
garch12=att(8)*sum(vig12(1:N,:))/N;

```

%Valori senza nessun metodo di riduzione della varianza

%Standard error

```

sdvalue1=std(value1,0,1);
sdvalue2=std(value2,0,1);
sdvalue3=std(value3,0,1);
sdvalue4=std(value4,0,1);
sdvalue5=std(value5,0,1);
sdvalue6=std(value6,0,1);
sdvalue9=std(value9,0,1);
sdvalue12=std(value12,0,1);

```

%Costo call garch

```

cg1=att(1)*sum(value1(1:N,:))/N;
cg2=att(2)*sum(value2(1:N,:))/N;

```

```

cg3=att(3)*sum(value3(1:N,:))/N;
cg4=att(4)*sum(value4(1:N,:))/N;
cg5=att(5)*sum(value5(1:N,:))/N;
cg6=att(6)*sum(value6(1:N,:))/N;
cg9=att(7)*sum(value9(1:N,:))/N;
cg12=att(8)*sum(value12(1:N,:))/N;

% Formula analitica di Black-Scholes
SBS=zeros(N,o+1);
SBSA=zeros(N,o+1);
SBS(:,1)=traiettoria(t1);
SBSA(:,1)=traiettoria(t1);
vol=sqrt(sigstaz)*sqrt(T);
r1=r*100;
for i=1:l
callchiusa1(i) = blsprice(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(1),vol);
callchiusa2(i) = blsprice(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(2),vol);
callchiusa3(i) = blsprice(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(3),vol);
callchiusa4(i) = blsprice(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(4),vol);
callchiusa5(i) = blsprice(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(5),vol);
callchiusa6(i) = blsprice(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(6),vol);
callchiusa9(i) = blsprice(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(7),vol);
callchiusa12(i) = blsprice(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(8),vol);
end

%Simulazione del prezzo Black-Scholes
for (j=1:N)
    for(i=2:(o+1))
        SBS(j,i)=traiettoria(t1)*exp(((r-(vol^2)/2)*tempo(i-1))+vol*sqrt(tempo(i-1)))*epb(j,i);
        SBSA(j,i)=traiettoria(t1)*exp(((r-(vol^2)/2)*tempo(i-1))+vol*sqrt(tempo(i-1)))*(-epb(j,i));
    end
end

a=1;
b=1;
for(gg=1:o)
    for(j=1:N)
        for(i=1:l)
            vib(j,i)=max(SBS(j,gg+1)-strike(i),0);
            via(j,i)=max(SBSA(j,gg+1)-strike(i),0);
        end
    end
    va=(vib+via)/2;
switch gg

```

```

    case 1
        vibs1=va;
    case 2
        vibs2=va;
    case 3
        vibs3=va;
    case 4
        vibs4=va;
    case 5
        vibs5=va;
    case 6
        vibs6=va;
    case 7
        vibs9=va;
    otherwise
        vibs12=va;
end
end

%Valori simulati utilizzando il modello Black-Scholes
%Standard error
sdb1=std(vibs1,0,1);
sdb2=std(vibs2,0,1);
sdb3=std(vibs3,0,1);
sdb4=std(vibs4,0,1);
sdb5=std(vibs5,0,1);
sdb6=std(vibs6,0,1);
sdb9=std(vibs9,0,1);
sdb12=std(vibs12,0,1);

%Costo call B-S simulato
callbs1=att(1)*sum(vibs1(1:N,:))/N;
callbs2=att(2)*sum(vibs2(1:N,:))/N;
callbs3=att(3)*sum(vibs3(1:N,:))/N;
callbs4=att(4)*sum(vibs4(1:N,:))/N;
callbs5=att(5)*sum(vibs5(1:N,:))/N;
callbs6=att(6)*sum(vibs6(1:N,:))/N;
callbs9=att(7)*sum(vibs9(1:N,:))/N;
callbs12=att(8)*sum(vibs12(1:N,:))/N;

%Coefficienti di controllo ottimale
for i=1:l
    trasf=cov(vig1(:,i),vibs1(:,i));
    q1(i)=trasf(2,1)/trasf(2,2);
    trasf=cov(vig2(:,i),vibs2(:,i));
    q2(i)=trasf(2,1)/trasf(2,2);
    trasf=cov(vig3(:,i),vibs3(:,i));

```

```

q3(i)=trasf(2,1)/trasf(2,2);
trasf=cov(vig4(:,i),vibs4(:,i));
q4(i)=trasf(2,1)/trasf(2,2);
trasf=cov(vig5(:,i),vibs5(:,i));
q5(i)=trasf(2,1)/trasf(2,2);
trasf=cov(vig6(:,i),vibs6(:,i));
q6(i)=trasf(2,1)/trasf(2,2);
trasf=cov(vig9(:,i),vibs9(:,i));
q9(i)=trasf(2,1)/trasf(2,2);
trasf=cov(vig12(:,i),vibs12(:,i));
q12(i)=trasf(2,1)/trasf(2,2);
end

for j=1:l
    for i=1:N
        cgarchtilde1(i,j)=vig1(i,j)-q1(j)*(vibs1(i,j)-callchiusa1(j));
        cgarchtilde2(i,j)=vig2(i,j)-q2(j)*(vibs2(i,j)-callchiusa2(j));
        cgarchtilde3(i,j)=vig3(i,j)-q3(j)*(vibs3(i,j)-callchiusa3(j));
        cgarchtilde4(i,j)=vig4(i,j)-q4(j)*(vibs4(i,j)-callchiusa4(j));
        cgarchtilde5(i,j)=vig5(i,j)-q5(j)*(vibs5(i,j)-callchiusa5(j));
        cgarchtilde6(i,j)=vig6(i,j)-q6(j)*(vibs6(i,j)-callchiusa6(j));
        cgarchtilde9(i,j)=vig9(i,j)-q9(j)*(vibs9(i,j)-callchiusa9(j));
        cgarchtilde12(i,j)=vig12(i,j)-q12(j)*(vibs12(i,j)-callchiusa12(j));
    end
end

%Valori utilizzando la variabile antitetica + variabile di controllo
%Standard error
sdgm1=std(cgarchtilde1,0,1);
sdgm2=std(cgarchtilde2,0,1);
sdgm3=std(cgarchtilde3,0,1);
sdgm4=std(cgarchtilde4,0,1);
sdgm5=std(cgarchtilde5,0,1);
sdgm6=std(cgarchtilde6,0,1);
sdgm9=std(cgarchtilde9,0,1);
sdgm12=std(cgarchtilde12,0,1);

%Costo call garch
garchm1=att(1)*sum(cgarchtilde1(1:N,:))/N;
garchm2=att(2)*sum(cgarchtilde2(1:N,:))/N;
garchm3=att(3)*sum(cgarchtilde3(1:N,:))/N;
garchm4=att(4)*sum(cgarchtilde4(1:N,:))/N;
garchm5=att(5)*sum(cgarchtilde5(1:N,:))/N;
garchm6=att(6)*sum(cgarchtilde6(1:N,:))/N;
garchm9=att(7)*sum(cgarchtilde9(1:N,:))/N;
garchm12=att(8)*sum(cgarchtilde12(1:N,:))/N;

```

```

for i=1:l
volatility1(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(1),garch1(i),100000);
valuevol1(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(1),cg1(i),100000);

volatility2(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(2),garch2(i),100000);
valuevol2(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(2),cg2(i),100000);

volatility3(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(3),garch3(i),100000);
valuevol3(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(3),cg3(i),100000);

volatility4(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(4),garch4(i),100000);
valuevol4(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(4),cg4(i),100000);

volatility5(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(5),garch5(i),100000);
valuevol5(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(5),cg5(i),100000);

volatility6(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(6),garch6(i),100000);
valuevol6(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(6),cg6(i),100000);

volatility9(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(7),garch9(i),100000);
valuevol9(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(7),cg9(i),100000);

volatility12(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(8),garch12(i),100000);
valuevol12(i)=blsimpv(traiettoria(t1),strike(i),r1,tempo(8),cg12(i),100000);
end

%coefficiente metodo variabile antitetica
IVR1=volatility1/vol;
IVR2=volatility2/vol;
IVR3=volatility3/vol;
IVR4=volatility4/vol;
IVR5=volatility5/vol;
IVR6=volatility6/vol;
IVR9=volatility9/vol;
IVR12=volatility12/vol;

%coefficiente senza nessun metodo di riduzione della varianza
I1=valuevol1/vol;
I2=valuevol2/vol;
I3=valuevol3/vol;
I4=valuevol4/vol;
I5=valuevol5/vol;
I6=valuevol6/vol;
I9=valuevol9/vol;
I12=valuevol12/vol;

```

## Bibliografia

- Barone-Adesi. G., Whaley R. E., “*Efficient Analytic Approximation of American Option Values*”, *Journal of Finance*, No. 42, (1987), 301-320.
- Black F. e Scholes M., “*The pricing of Options and colorate Liabilities* ”, *Journal of Political Economy*, No. 81 (maggio-giugno 1973), 637-54.
- Bollerslev T., “*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*”, *Journal of Econometrics*, Vol. 31 (1986), 307-327.
- Bollerslev T., Engle Robert F., Nelson Daniel B., “*ARCH Models* “ *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, (1994), Cap 49, 2961-3038.
- Bollerslev T., Wooldridge J. M., “*Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances*” *Econometric Reviews*, (1992), No. 11, 143–172.
- Bougerol P., Picard N., “*Stationarity of GARCH Processes and Some Nonnegative Time Series*” *Journal Econometrics*, No. 52 (1992), 115-127.
- Brennan M., Schwartz E. S., “*The valuation of American Put Options*“, *Journal of Finance*, No. 32 (1977), 449-462.
- Brennan M., “*The pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models*”, *Journal Finance*, No.34, (1979), 53-68.
- Brotherton R., “*Monte Carlo Motoring*”, *Risk* Dicembre 1994, 53-58.
- Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M., „*Option pricing: A simplified Approach*“, *Juornal of Financial Economics*, No. 7, (1979), 229-263.
- Curran M., “*Strata Germs*”, *Risk*, Marzo 1994, 70-71.

Duan J C., “*The Garch Option Pricing Model*” *Mathematical Finance*, Vol. 5, No. 1 (1995), 13-32.

Duan J.C., “*Lattices and Markov Chains for Numerical Pricing of Derivates*” Rotman School of Management, University of Toronto, (2002).

Dumas B., Fleming J., Whaley R., “*Implied Volatility Functions: Empirical Test*”, *Journal of Finance*, Vol. 53, No. 6, (Dicembre 1998), 2059-2106.

Engle Robert F., “*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*”, *Econometrica* Vol. 50, No 4, (1982), 987-1007.

Engle R. F., Noh J., Kane A., “*A Test of Efficiency for the S&P500 Index: Option Market Using Variance Forecasts*”, *Journal of Derivatives*, 2, (1994), 17-30.

Engle R.F., Rosenberg J. V., “*Garch Gamma*”, *Journal of Derivatives*, 2, (1995), 47-59.

Fama E. F., “*The Behavior of Stock Market Returns*”, *Journal Of Business*, Vol. 38, (1965), 34-105.

Fama E. F., “*Foundations of Finance*”, Basic Books, (1976).

French D. W., “*The Weekend Effect on the Distribution of Stock Prices: Implications for Option Pricing*”, *Journal of Financial economics*, 13 (1984), 547-559.

French K., “*Stock Returns and the Weekend Effect*”, *Journal of Financial economics*, No. 8 (1980), 55-69.

French K., Roll R., “*Stock Return Variances: the Arrival of Inforamtion and the Reaction of Traders*”, *Journal of Financial Economics*, No. 17, (1986), 5-26.

Gallant A. R., Rossi P. E., Tauchen G., “*Stock Prices and Volume*”, *Review of Financial Studies*, Vol.5, No. 2, (1992), 199-242.

Ghysels E., Harvey A., Renault E., “*Stochastic Volatility* ” Discussion Paper 95s-49, (1995), Cirano, Università di Montreal.

Glosten L., Jagannathan R., Runkle D., “*Relationship between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess on Stock*” *Journal Finance*, No. 48, (1993), 1779-1801.

Glosten L., R., Jagannathan R., Runkle D., “*On the Relation Between the Expoected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*” , *Journal of Finance*, No. 48, (1993) , 1779-1801.

Harrison M., Kreps D., “*Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*”, *Journal of Economic Theory*, No. 20, (1979), 381-408.

- Harrison M., Pliska S., “*Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading*”, *Stochastic Process Appl.*, No. 11, (1981), 215-260.
- Harvey R. C., Whaley R. E., “*S&P 100 Index Option Volatility*”, *Journal of Finance*, Vol. 46, No. 4, (1991), 1551-1561.
- Heynen R., “*An Empirical Investigation of Observed Smile Patterns*”, *The Review of Futures Markets*, 13, No. 2, (1994), 317-353.
- Hull J., White A., “*Valuing Derivative Securities Using The Explicit Finite Difference Method*”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, No. 25 (1990), 87-100.
- Ito K., “*On Stochastic differential Equations*”, *Memoirs, American Mathematical Society*, 4 (1951), 1-51.
- Johnson N., L., Kotz S., “*Distributions in Statistics – Continuous Univariate Distributions*”, Wiley & Sons, New York, (1970).
- Kleijnen J. P. C., Rubinstein R. Y., “*Monte Carlo Sampling and Variance Reduction Techniques*”, Discussion paper No. 9401, Center for Economic Research, Tilburg University, (1994).
- Latané H. A., Rendleman R. J. Jr., “*Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices*”, *Journal of Finance*, Vol. 31, (1976), 369-381.
- Leland H., “*L’assicurazione di portafoglio – Elementi teorici e applicativi*”, Il Mulino, 1999, Bologna. Edizione originale: *Portfolio Insurance*.
- Mandelbrot B., “*The Variation of Certain Speculation Prices*”, *Journal of Business*, Vol. 36, (1963), 394-419.
- Moro B., “*The Full Monte*” Risk, Febbraio 1985, 57-58.
- Nelson D., “*Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model*”, *Econometrics Theory*, No. 6, (1990), 318-334.
- Nelson D., “*Conditional Heteroskedasticity in Asset Return: A new Approach*”, *Econometria*, No. 59, (1991), 347-370.
- Rubinstein M., “*The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options*”, *Bell Journal Economic Management Science*, No. 7 (1976), 407-425.
- Rubinstein M., “*Implied Binomial Trees*”, *Journal of Finance*, Vol. 69, (1994), 771-818.
- Taylor S. J., “*Modelling Financial Time Series*”, John Wiley & Sons, (1986), Chicester.
- Schmitt C., “*Option Pricing Using Egarch Models*”, ZEW Discussion Paper No. 20, (1996), Mannheim

Schwert G. W., "*Why Does stock Market Volatility Change Over Time?*", Journal of Finance, Vol. 44, (1989), 1115-1153.

Scmalensee R., Trippi R. R., "*Common Stock Volatility Expectations Implied by Option Premia*" Journal of Finance, Vol. 33, (1978), 129-147.

Sheikn A. M., "*Transaction Data Test of S&P 100 Call Option Pricing*", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 26, (1991), 459-475.

Taylor S. J., Xu X., "*The Magnitude of Implied Volatility Smiles: Theory and Empirical Evidence for Exchange rates*" Review of Futures Markets, Vol. 13, (1994), 355-380.

Taylor S. J., Xu X., "*Implied Volatility Shapes when Price and Volatility Shocks are Correlated*", Working Paper, (1994).

Youngsoo C., "*An analytical approximation option formula under the garch model*" Department of mathematics, Hankuk University of foreign studies, Korea, (2003), 449-791.

Zakoian J., M., "*Threshold Heteroskedastic Models*", Journal of Economics and Control, No. 18, (1994), 931-955.