



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE DII

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE

ANALISI NUMERICA DELLA ROTTURA DI FIBRE SOLIDE IN TURBOLENZA OMOGENEA ISOTROPA

RELATORE

PROF. FRANCESCO PICANO

LAUREANDO

SIMONE VANUZZO

CORRELATORE

ING. FEDERICO DALLA BARBA

MATRICOLA

2027864

ANNO ACCADEMICO

2022-2023

Sommario

Un problema comune a diversi ambiti ingegneristici, e fortemente presente in quello aerospaziale, è sicuramente quello dell'interazione tra una struttura solida e il campo fluido in cui è immersa (FSI o "fluid-structure interaction"). Questo problema, già di per sé di difficile trattazione, risulta essere ancora più complesso quando si vanno ad analizzare le fratture che le forze fluido-dinamiche possono indurre sulla struttura solida: tale condizione, infatti, porta all'insorgere di singolarità nelle equazioni alle derivate parziali che solitamente si utilizzano per descrivere il problema. Per simulare e studiare questo particolare tipo d'interazione, è dunque necessario "conciliare" la dinamica che regola il fluido con la meccanica che governa il solido e la formazione di eventuali cricche all'interno di quest'ultimo, cercando, al tempo stesso, di sopperire al problema dell'insorgenza delle singolarità introdotte dalle fratture stesse; una possibile soluzione è quella di utilizzare la peridinamica per la descrizione del comportamento della struttura solida. Questa teoria consiste nell'analizzare il solido immaginandolo non come un continuo, ma come un insieme (idealmente infinito) di particelle legate tra loro: questa rappresentazione permette di considerare in modo intrinseco l'eventuale insorgenza di fratture, le quali consistono "semplicemente" nella rottura, parziale o totale, dei legami che uniscono diverse particelle. Inoltre, dal punto di vista matematico, le equazioni utilizzate sono di tipo integrale e non risentono quindi del problema di eventuali punti di singolarità.

L'obiettivo del lavoro svolto, dunque, è quello di analizzare, con un lavoro di post-process, i risultati ottenuti da un programma di simulazione di FSI (sviluppato dall'Ing. Federico Dalla Barba) basato sulla teoria della peridinamica, in modo da indagare il fenomeno della rottura in un problema di interazione fluido-struttura; in particolare, il focus dell'analisi effettuata si concentra sulla caratterizzazione della formazione e propagazione di eventuali cricche su delle fibre immerse in un campo fluido turbolento. Tale caso di

studio presenta diverse applicazioni d'interesse: la rottura di fibre a seguito dell'interazione con un flusso turbolento è un fenomeno comune a tutti quei processi industriali che coinvolgono la lavorazione, per l'appunto, di fibre (carta, tessuti ecc.), ma può essere utile anche per comprendere, e di conseguenza predire, in modo più accurato la dispersione negli oceani di microplastiche.

Indice

Introduzione	1
1 Cenni di Fluidodinamica	5
1.1 Equazioni di Navier-Stokes	5
1.1.1 Equazioni di Navier-Stokes per flussi incomprimibili . .	9
1.1.2 Equazioni di Navier-Stokes adimensionali incomprimibili	11
1.2 Cenni di Turbolenza	12
1.2.1 Teoria di Kolmogorov e Cascata Turbolenta	19
2 Cenni di Meccanica delle Fratture	23
2.1 Criterio energetico	24
3 Software di simulazione per problemi di FSI	27
3.1 Primo modulo - <i>Fluid Solver</i>	27
3.1.1 Simulazione di flussi turbolenti e metodo DNS	28
3.2 Secondo modulo - <i>Peridynamic Solver</i>	31
3.2.1 Teoria Peridinamica	32
3.2.2 Equazioni di governo della peridinamica	33
3.2.3 Modello <i>bond-based</i> della peridinamica	37
3.2.4 Rottura dei legami nel modello peridinamico	40
3.2.5 Discretizzazione del modello peridinamico	41
3.2.6 Individuazione e tracciamento delle interfacce	44
3.3 Terzo modulo - Sincronizzazione e Accoppiamento	46
3.3.1 IBM - <i>Immerse Boundary Method</i>	47
3.3.2 Calcolo degli stress fluidodinamici sulla superficie del solido - <i>Normal Probe Method</i>	51
4 Caso in esame e Obiettivo d'interesse	55
4.1 Ipotesi di Lavoro	56

4.2	Metodologia di Analisi	57
4.2.1	Calcolo del tensore degli stress	58
4.2.2	Media sulle sezioni	60
4.2.3	Tempo di simulazione e di output	61
5	Risultati ottenuti	63
5.1	Danneggiamento delle Fibre	63
5.1.1	Propagazione della cricca - Fibra 1	67
5.1.2	Propagazione della cricca - Fibra 6	67
5.1.3	Propagazione della cricca - Fibra 7	67
5.1.4	Propagazione della cricca - Fibra 9	67
5.1.5	Considerazioni generali sulla propagazione delle cricche	68
5.2	Tensioni Interne delle Fibre - <i>Stress</i>	77
5.2.1	Caso statico di verifica	80
5.2.2	Confronto tra stress e forze fluidodinamiche	84
6	Conclusione e sviluppi futuri	87
	Bibliografia	91

Elenco delle figure

1.1	Esempio di struttura multiscala: eruzione di un vulcano ($Re \simeq 10^8 \div 10^9$). Si nota come le strutture vorticosi varino di dimensione anche per $6 \div 8$ ordini di grandezza.	13
1.2	Esempio di transizione da laminare a turbolento al variare di Re : flusso su di un cilindro. A sx flusso laminare ($Re \ll 1$): per simmetria è impossibile definire se il flusso arrivi dall'alto o dal basso. Al centro flusso in regime di transizione ($Re > 1$): inizio della rottura della simmetria. A dx flusso turbolento ($Re \gg 1$): è chiara la direzione del flusso per via della non simmetria e della scia vorticosi.	14
1.3	Esempio di decomposizione di Reynolds. Si nota come il campo di velocità possa essere riscritto attraverso la somma di un valore medio e dallo scostamento dalla media stessa.	15
1.4	Considerando il flusso tra due pareti, la velocità istantanea in regime turbolento è fluttuante sia nello spazio (x, y, z) che nel tempo t ; il campo medio, invece, rispetta le simmetrie delle condizioni al contorno (non varia in x e z) e l'invarianza temporale di quest'ultime (è stazionario), andando ad assomigliare alla soluzione laminare.	15
1.5	Sistema per l'analisi delle energie cinetiche del campo medio e del campo fluttuante.	17
1.6	Rappresentazione grafica della relazione tra l'energia cinetica del campo medio e l'energia cinetica del campo fluttuante. . .	18
1.7	Rappresentazione grafica della cascata turbolenta: i vortici più grandi alimentano i vortici via via più piccoli fino alla scala di Kolmogorov, dove l'energia cinetica viene dissipata per via delle forze viscosi.	21

2.1	Rappresentazione delle tre possibili modalità di frattura dovute rispettivamente, da sinistra a destra, a trazione, carichi di taglio e torsione.	26
3.1	Confronto di un getto simulato con le tre tecniche di DNS, LES e RANS.	31
3.2	Rappresentazione grafica della relazione tra densità della forza di accoppiamento $\vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t)$ e densità della forza di legame $\vec{t}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t)$, in un caso 2D.	35
3.3	Rappresentazione grafica delle coppie di "bond force density" nelle varie tipologie di modelli peridinamici.	38
3.4	Esempio bidimensionale di discretizzazione del modello peridinamico.	42
3.5	A sinistra: intorno, nella sua formulazione per la peridinamica discreta, della particella $\vec{X}_{0,h}$. A destra: rappresentazione grafica del fattore di riduzione del volume $\Gamma_{h,t}$; solo la parte verde del volume deve essere considerata per il bilancio delle forze interne.	43
3.6	Rappresentazione grafica del problema di indebolimento fittizio del materiale nei pressi della superficie.	46
3.7	Confronto tra una mesh adattata alla superficie del solido e una mesh non adattata.	48
3.8	Esempio grafico del problema del "ghost fluid" per il metodo IBM.	49
3.9	Guscio poroso di "fluido solidificato" nel metodo IBM.	50
3.10	Schema bidimensionale del sistema di coordinate locali e dello stencil di interpolazione per il normal probe method.	52
4.1	Rappresentazione della configurazione iniziale del problema analizzato.	58
4.2	Rappresentazione grafica di una delle sezioni in cui è suddivisa la fibra discretizzata.	60
4.3	Relazione tra istanti di simulazione e istanti dei dati in uscita.	61
5.1	Istanti di danneggiamento delle fibre che vanno incontro a rottura, ovvero le fibre 1, 6, 7 e 9.	64
5.2	Livello di danneggiamento della fibra 1 nei vari istanti di output.	65
5.3	Livello di danneggiamento della fibra 6 nei vari istanti di output.	65

5.4	Livello di danneggiamento della fibra 7 nei vari istanti di output.	66
5.5	Livello di danneggiamento della fibra 9 nei vari istanti di output.	66
5.6	Stress e danneggiamento della fibra 1 all'istante output 69. . .	69
5.7	Stress e danneggiamento della fibra 1 all'istante output 70. . .	69
5.8	Stress e danneggiamento della fibra 1 all'istante output 71. . .	69
5.9	Stress e danneggiamento della fibra 1 all'istante output 72. . .	70
5.10	Stress e danneggiamento della fibra 1 all'istante output 73. . .	70
5.11	Stress e danneggiamento della fibra 1 all'istante output 74. . .	70
5.12	Stress e danneggiamento della fibra 6 all'istante output 33. . .	71
5.13	Stress e danneggiamento della fibra 6 all'istante output 34. . .	71
5.14	Stress e danneggiamento della fibra 6 all'istante output 35. . .	71
5.15	Stress e danneggiamento della fibra 6 all'istante output 36. . .	72
5.16	Stress e danneggiamento della fibra 6 all'istante output 37. . .	72
5.17	Stress e danneggiamento della fibra 6 all'istante output 38. . .	72
5.18	Stress e danneggiamento della fibra 7 all'istante output 79. . .	73
5.19	Stress e danneggiamento della fibra 7 all'istante output 80. . .	73
5.20	Stress e danneggiamento della fibra 7 all'istante output 81. . .	73
5.21	Stress e danneggiamento della fibra 7 all'istante output 82. . .	74
5.22	Stress e danneggiamento della fibra 7 all'istante output 83. . .	74
5.23	Stress e danneggiamento della fibra 7 all'istante output 84. . .	74
5.24	Stress e danneggiamento della fibra 9 all'istante output 2. . . .	75
5.25	Stress e danneggiamento della fibra 9 all'istante output 3. . . .	75
5.26	Stress e danneggiamento della fibra 9 all'istante output 4. . . .	75
5.27	Stress e danneggiamento della fibra 9 all'istante output 5. . . .	76
5.28	Stress e danneggiamento della fibra 9 all'istante output 6. . . .	76
5.29	Stress e danneggiamento della fibra 9 all'istante output 7. . . .	76
5.30	Andamento degli stress medi sulla fibra 1 nell'istante 1.	78
5.31	Andamento degli stress medi sulla fibra 7 all'istante 69.	78
5.32	Andamento degli stress medi sulla fibra 1 nell'istante 70, subito prima dello strappo.	79
5.33	Andamento degli stress medi sulla fibra 1 all'istante 71, subito dopo lo strappo.	79
5.34	Schema dell'ipotetico caso statico di verifica dei carichi nella condizione più sfavorevole di "fibra tra due vortici contro- rotanti".	80
5.35	Schema del caso statico dopo aver "tagliato" sulla sezione cen- trale.	81

5.36	Probability Density Function (PDF) del campo degli stress.	85
5.37	Probability Density Function (PDF) delle forze fluidodinamiche imposte dal fluido sull'interfaccia del solido.	85

Elenco delle tabelle

4.1	Grandezze caratteristiche con cui si adimensionalizzano tutti i parametri della simulazione.	57
4.2	Parametri adimensionalizzati caratteristici di ogni fibra solida.	58
5.1	Risultati adimensionali ottenuti considerando la dissipazione turbolenta media \mathcal{E}_{media}	82
5.2	Risultati adimensionali ottenuti considerando la dissipazione turbolenta massima \mathcal{E}_{max}	83
5.3	Confronto tra le deformazioni imposte nel caso statico, e il valore limite di rottura del modello peridinamico.	84

Introduzione

La mutua interazione tra una struttura solida deformabile e il campo fluido in cui è immersa (o che presenta al suo interno) viene definita come *Fluid-Structure Interaction* (FSI); tale fenomeno è prettamente multi-fisico, ovvero coinvolge diversi fenomeni fisici ognuno modellato dalla propria teoria e dalle proprie formule. Questo genere di problema racchiude al suo interno un ampio spettro di applicazioni nei più svariati campi ingegneristici: in campo biomedico, per esempio, si va incontro a fenomeni di questo tipo durante la modellazione dei sistemi cardiovascolari [10], mentre in campo civile potrebbe rappresentare il comportamento di un ponte o di un edificio quando sottoposti agli effetti del vento.

Per quanto riguarda l'ambito dell'ingegneria aeronautica ed aerospaziale, di maggiore interesse per questo elaborato, i problemi di FSI si incontrano soprattutto durante lo studio della possibile insorgenza di fratture in strutture solide elastiche soggette ad un flusso fluido. Un noto esempio è quello del fenomeno di *aeroelastic fluttering* [8], ovvero un'instabilità auto-sostenuta dovuta all'accoppiamento tra le forze aerodinamiche di cui risente una struttura deformabile (per esempio l'ala di un velivolo) e le forze elastiche proprie della struttura stessa; se si raggiunge una condizione di risonanza, la deformazione della struttura può essere tale da generare un campo di stress abbastanza elevato da portare al danneggiamento locale o addirittura al completo fallimento della superficie aerodinamica. In molti casi d'interesse aerospaziale risulta importante non solo predire quali condizioni di carico possono portare al fallimento di una data struttura, ma anche modellare come avvenga tale fallimento, come dei danneggiamenti locali influiscano sulle prestazioni della struttura e come tali fratture si possano propagare.

L'obiettivo di questo lavoro, dunque, è quello di presentare un'analisi approfondita dei dati ottenuti tramite la simulazione di un problema di Fluid-Structure Interaction (FSI), con un particolare focus sull'analisi delle fibre

elastiche all'interno di un flusso turbolento. Il contesto simulato consta quindi di una serie di fibre elastiche che interagiscono con un campo fluido in regime turbolento omogeneo ed isotropo. Il caso di studio scelto offre diverse applicazioni non solo per il settore ingegneristico, ma anche per altre aree di interesse: tra le applicazioni principali vi sono tutti quei processi industriali che coinvolgono la lavorazione di fibre (lavorazione della carta, dei tessuti ecc.), ma lo studio delle fibre può rivelarsi particolarmente rilevante anche per la comprensione delle dinamiche legate al deterioramento delle fibre plastiche negli ambienti oceanici, con la conseguente dispersione di microplastiche. Una caratteristica interessante della simulazione effettuata è certamente la sua flessibilità: variando opportunamente i diversi parametri, infatti, è possibile esplorare una vasta gamma di scenari e condizioni.

A causa della sua natura fortemente non lineare e del suo carattere multifisico, modellare e simulare un problema di FSI non risulta affatto banale: la "struttura" di base di una simulazione di FSI deve considerare la dinamica del campo fluido, la meccanica che descrive il comportamento del solido e includere un modello in grado di prevedere e descrivere il meccanismo di formazione di eventuali fratture nel solido. Uno dei problemi principali di tali simulazioni risiede proprio nella bassa affidabilità dei modelli della meccanica del solido nel predire il comportamento delle fratture, a causa delle discontinuità che queste introducono: i modelli della meccanica solida, generalmente, si basano su equazioni differenziali alle derivate parziali, le quali sono soggette a singolarità nei dintorni delle discontinuità. Una possibile soluzione, adottata nel simulatore impiegato per questa tesi (meglio descritto in seguito), è quella di modellare il comportamento della struttura solida attraverso la teoria della *peridinamica* [24] [25], ovvero una riformulazione della meccanica del continuo che permette, in modo intrinseco, di tenere conto di possibili fratture. Tale formulazione teorica consiste nel rivedere la teoria del continuo solitamente impiegata nell'analisi dei corpi solidi, andando a considerare tali corpi come un insieme (idealmente infinito) di punti materiali legati tra loro, e andando a sostituire le equazioni differenziali del modello con delle equazioni di carattere integrale, che non sono dunque soggette a problemi di singolarità nei dintorni di eventuali discontinuità. Tale rappresentazione permette di aggirare il problema del comportamento delle equazioni del modello vicino alle fratture, la cui possibile presenza viene intrinsecamente considerata nell'eventuale rottura di alcuni o tutti dei legami che uniscono i vari punti materiali. Spostare il focus da una visione macroscopica del corpo solido con-

tinuo ad una visione più microscopica delle singole particelle materiali che lo compongono, però, introduce anche una nuova serie di criticità, specialmente di carattere geometrico: bisogna infatti integrare nel modello alcuni algoritmi in grado di individuare che cosa rappresenti nel corpo solido ciascuna delle particelle (per esempio se quest'ultima appartenga alla superficie o all'interno del corpo, e dove si trovi rispetto al corpo stesso).

Il programma impiegato per la simulazione della casistica di FSI scelta è un software sviluppato dall'Ing. Federico Dalla Barba [18], il quale si compone di tre moduli principali:

- *Fluid Solver* - simula il comportamento del campo fluido risolvendo con un metodo di *Direct Numerical Simulation* (DNS) [20] tridimensionale le equazioni di Navier-Stokes [9] per fluidi incomprimibili;
- *Peridynamics Solver* - simula il comportamento del solido utilizzando la teoria della peridinamica;
- il terzo modulo si occupa di sincronizzare e accoppiare la soluzione di Navier-Stokes con quella della peridinamica, implementando il cosiddetto *Immerse Boundary Method* (IBM) [2]

La prima parte del simulatore (quella associata al campo fluido) è stata sviluppata a partire dal risolutore open-source CaNS [7], mentre gli altri due moduli sono stati sviluppati ex-novo dall'Ing. F. Dalla Barba. Per quanto riguarda l'analisi in post-process dei dati ottenuti dal simulatore, si sono impiegati una serie di programmi sviluppati ad-hoc per questa tesi sfruttando il software di MATLAB®.

Nei successivi capitoli verranno meglio descritte le teorie impiegate per lo sviluppo di questa ricerca, oltre alle metodologie adottate e ai risultati ottenuti.

Capitolo 1

Cenni di Fluidodinamica

In questo primo capitolo si vanno a riportare i concetti di base della fluidodinamica impiegati per lo sviluppo di questa tesi. Come prima cosa si vanno a presentare le equazioni che governano l'evoluzione temporale del campo fluido, ovvero le cosiddette equazioni di Navier-Stokes, le quali verranno poi particolarizzate per il caso in esame; successivamente si riporta una breve introduzione alla teoria che modella e descrive il comportamento di un fluido in regime turbolento, introducendo il concetto di turbolenza (localmente) omogenea ed isotropa.

1.1 Equazioni di Navier-Stokes

Le equazioni che governano il comportamento di un campo fluido si ricavano applicando alle leggi di conservazione classiche della fisica il cosiddetto *Teorema del trasporto di Reynolds*: data una generica grandezza caratteristica del sistema:

$$B_{SIS} = b \cdot m \quad (1.1)$$

dove con B_{SIS} si intende la grandezza nella sua "formulazione" estensiva (ovvero dipendente dalla massa m del sistema considerato) e con b la sua corrispondente grandezza intensiva (ovvero per unità di massa), si può dimostrare che:

$$\frac{dB_{SIS}}{dt} = \frac{\delta}{\delta t} \int_{V_C} \rho b dV + \int_{S_C} \rho b \vec{v} \cdot \hat{n} ds \quad (1.2)$$

con ρ la densità puntuale del sistema, \vec{v} il campo di velocità, V_C un volume di controllo fisso che all'istante iniziale coincide con il volume di controllo

analizzato, S_C la superficie che delimita il volume di controllo e infine con \hat{n} il versore uscente dalla superficie di controllo.

Infine, applicando il *Teorema della divergenza*¹, è possibile riformulare l'equazione precedente come segue:

$$\frac{dB_{SIS}}{dt} = \frac{\delta}{\delta t} \int_{V_C} \rho b dV + \int_{V_C} \vec{\nabla} \cdot (\rho b \vec{v}) ds \quad (1.3)$$

da dover dunque applicare alle leggi di conservazione così da ricavare le equazioni che governano un generico campo fluido.

Le leggi di conservazione che ci interessano sono tre:

- *Conservazione della massa o equazione di continuità* - sappiamo che complessivamente la massa del sistema si deve conservare:

$$\frac{d}{dt} m_{SIS} = 0 \quad (1.4)$$

applicando a tale legge il teorema sopra-descritto si ottiene, con alcuni semplici passaggi, una relazione che esprime come, dato un generico volume di controllo V_C , la somma tra la variazione della massa interna al volume e il flusso attraverso la superficie di controllo deve necessariamente essere nulla:

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.5)$$

sfruttando il concetto di *derivata materiale*² è possibile riformulare la relazione appena ottenuta come:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (1.6)$$

- *Conservazione della quantità di moto* - la variazione della quantità di moto del sistema nel tempo è pari alla somma delle forze esterne:

$$\frac{d}{dt} (m_{SIS} v_{SIS}) = \sum \vec{F}e \quad (1.7)$$

con alcuni passaggi, applicando il teorema del trasporto e separando nella somma delle forze i contributi delle forze di volume e di superficie, si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{\delta}{\delta t} (\rho \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \quad (1.8)$$

¹ *Teorema della divergenza* $\int_{S_C} (\dots) \cdot \hat{n} ds = \int_{V_C} \vec{\nabla} \cdot (\dots) dv$

² relazione della derivata materiale $\frac{D}{Dt} (\dots) = \frac{\delta}{\delta t} (\dots) + \vec{\nabla} (\dots) \cdot \vec{v}$

con \vec{f} il vettore delle forze di volume per unità di massa (dimensionalmente si tratta dunque di una accelerazione) e \vec{T} il tensore degli sforzi superficiali. La forma di tale tensore dipende dal caso e dalle caratteristiche del fluido scelto: in condizioni statiche gli unici sforzi presenti su di un volumetto fluido sono quelli nelle direzioni normali (di intensità pari a meno la pressione agente), e il tensore è dunque diagonale, se invece il sistema è in moto sono presenti anche degli sforzi tangenziali dovuti alla viscosità del fluido stesso. Nel caso più comune di fluidi Newtoniani³, il tensore degli sforzi può essere riscritto come:

$$\begin{aligned}\vec{T} &= -p\vec{I} + 2\mu\vec{E} + \lambda(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{I} \\ &= -p\vec{I} + \vec{\Sigma}\end{aligned}\quad (1.9)$$

con μ la viscosità dinamica del fluido⁴, λ il secondo coefficiente di viscosità⁵ e con \vec{E} la matrice delle deformazioni, definita dalla relazione:

$$\vec{E} = \frac{\vec{\nabla}\vec{v} + \vec{\nabla}\vec{v}^T}{2}\quad (1.10)$$

Complessivamente, inserendo l'Eq. (1.9) nell'Eq. (1.8), si ottiene per la conservazione della quantità di moto la seguente relazione:

$$\frac{\delta}{\delta t}(\rho\vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}\vec{v}) = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma}\quad (1.11)$$

ancora una volta è possibile utilizzare il concetto di derivata materiale per riformulare tale relazione come segue:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma}\quad (1.12)$$

- *Conservazione dell'energia* - dal primo principio della termodinamica si può affermare che:

$$\Delta E_{SIS} = \delta Q + \delta L\quad (1.13)$$

³un fluido è detto Newtoniano quando gli sforzi tangenziali $\vec{\tau}$ agenti su quest'ultimo (o dovuti a quest'ultimo) sono proporzionali alla rapidità di deformazione $\dot{\beta}$ secondo la legge $\vec{\tau} = \mu\dot{\beta}$ con μ la viscosità dinamica del fluido.

⁴a volte invece di μ si utilizza la viscosità cinematica $\nu = \mu/\rho$.

⁵per i fluidi Stokesiani (molto comuni) tale coefficiente è pari a $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$

Andando ancora una volta ad applicare il teorema del trasporto di Reynolds, dopo aver separato i vari contributi, la relazione che si ottiene è la seguente:

$$\frac{\delta}{\delta t}(\rho e_T) + \vec{\nabla} \cdot (\rho e_T \vec{v}) = \dot{Q}\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot (p\vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\Sigma}) \quad (1.14)$$

oppure, passando alla derivata materiale:

$$\frac{D(\rho e_T)}{Dt} = \dot{Q}\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot (p\vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\Sigma}) \quad (1.15)$$

con e_T la densità di energia⁶ (che dipende dalla temperatura T), $\rho \dot{Q}$ il flusso termico per irraggiamento, $\vec{\nabla} \cdot \vec{q}$ il flusso termico per conduzione o convezione, $\rho \vec{f} \cdot \vec{v}$ la potenza dovuta alle forze di volume, $\vec{\nabla} \cdot (p\vec{v})$ la potenza dovuta alle forze di compressione ed espansione e, infine, con $\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\Sigma})$ la potenza delle forze viscosse.

Mettendo insieme le equazioni Eq. (1.6), Eq.(1.12) e Eq. (1.15) si ottiene complessivamente un sistema di 5 equazioni (Eq. (1.6) e Eq.(1.12) sono scalari, mentre l'Eq. (1.15) è vettoriale) nelle 6 incognite di: densità ρ , temperatura T , pressione p e velocità \vec{v} (essendo vettoriale ha 3 componenti incognite); per poter completare il sistema è necessario aggiungere un'ulteriore equazione, ovvero l'*equazione di stato del fluido*, che dipende dal fluido considerato (per esempio se si considerasse l'aria sarebbe possibile utilizzare l'equazione di stato dei gas ideali⁷).

Il sistema delle equazioni di conservazione del fluido (ovvero Eq. (1.6), Eq.(1.12) e Eq. (1.15)), completato con l'equazione di stato del fluido considerato, prende il nome di equazioni di Navier-Stokes; purtroppo, per tale sistema, non si è ancora riusciti a ricavare una forma analitica per la soluzione, tranne in casi molto semplici, e risulta dunque necessario risolverlo in modo numerico, impostando in modo opportuno le condizioni iniziali e al contorno.

⁶la densità di energia è definita come $e_T = e + \frac{v^2}{2}$ con e l'energia interna pari a $e = c_V T$ dove c_V è il calore specifico per unità di volume e T la temperatura.

⁷eq. di stato dei gas ideali $p = \rho RT$

1.1.1 Equazioni di Navier-Stokes per flussi incomprimibili

Nel caso d'interesse per la realizzazione di questa tesi, il fluido considerato viene ipotizzato in condizioni di incomprimibilità, ipotesi che può essere ritenuta valida fintanto che la velocità media delle particelle che compongono il campo fluido risulta essere inferiore a circa il 30% della velocità di propagazione del suono nel fluido stesso. Tale condizione permette di affermare che la densità del campo fluido sia ovunque costante e, di conseguenza, che la sua derivata sia sempre nulla; utilizzando questa "nuova" considerazione è possibile semplificare il sistema di equazioni di Navier-Stokes come segue:

- *Conservazione della massa* - introducendo l'incomprimibilità del fluido, l'Eq. (1.6) viene riscritta come:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.16)$$

ovvero il campo di velocità è di tipo *solenoidale*⁸.

- *Conservazione della quantità di moto* - sfruttando il fatto che la densità rimane costante e che il campo di velocità è solenoidale, l'equazione della conservazione della quantità di moto può essere riformulata come:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{f} + \mu\nabla^2\vec{v} \quad (1.17)$$

in cui si ricorda che con ∇^2 si indica il *laplaciano*⁹ di una data grandezza.

In questo caso si ha già un sistema di 4 equazioni, 1 per la conservazione della massa e 3 per la quantità di moto (essendo vettoriale), nelle 4 incognite di pressione p e campo di velocità \vec{v} (la densità, essendo costante, sarà un dato del problema); non è dunque necessario introdurre ulteriori equazioni, come quella di conservazione dell'energia o di stato del fluido.

Nonostante l'ipotesi di incompressibilità del fluido abbia semplificato notevolmente il sistema di equazioni di Navier-Stokes, è possibile semplificare ulteriormente le relazioni introducendo il concetto di *pressione modificata* P_M ,

⁸per definizione, un campo vettoriale è detto solenoidale quando il suo flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo.

⁹il laplaciano di una grandezza è definito come $\nabla^2(\dots) = \frac{\delta^2(\dots)}{\delta x^2} + \frac{\delta^2(\dots)}{\delta y^2} + \frac{\delta^2(\dots)}{\delta z^2}$

ovvero la pressione di scostamento da quella del caso idrostatico P_I ¹⁰. Nel caso idrostatico incomprimibile:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 0 \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= 0 = -\vec{\nabla} P_I + \rho \vec{f} + \mu \nabla^2 \vec{v}\end{aligned}\quad (1.18)$$

ma anche:

$$\mu \nabla^2 \vec{v} = 0 \quad (1.19)$$

dunque:

$$-\vec{\nabla} P_I + \rho \vec{f} = 0 \quad (1.20)$$

Tornando al caso generale (sempre in ipotesi di fluido incomprimibile) e scrivendo la pressione come la somma tra la pressione idrostatica e la pressione modificata e sfruttando l'Eq. (1.20), con alcuni passaggi si ottiene che il sistema di Navier-Stokes può essere semplificato come:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{v} \end{cases} \quad (1.21)$$

Dove, per alleggerire la scrittura, si va ad indicare semplicemente con P la pressione modificata. Infine, applicando la divergenza alla conservazione della quantità di moto, è possibile "esplicitare" la pressione come:

$$\nabla^2 P = -\rho \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) \quad (1.22)$$

Complessivamente, nel caso di un fluido incomprimibile, il sistema diventa puramente meccanico, ovvero si slega dalla temperatura T , la quale, pur potendo ancora essere valutata in ogni punto ed istante, viene "semplicemente" trasportata dal campo di velocità senza influenzarlo. In realtà la temperatura determina comunque la velocità di propagazione del suono nel fluido e non influenza il campo di velocità solo fin tanto che rimane valida l'ipotesi di incomprimibilità (che si ricorda valere quando la velocità media del fluido è inferiore al 30% della velocità del suono).

¹⁰dunque $p = P_I + P_M$

1.1.2 Equazioni di Navier-Stokes adimensionali incompressibili

Per le simulazioni di fluidodinamica risulta particolarmente utile esprimere le equazioni che governano il campo fluido in modo adimensionale, così che i risultati ottenuti per una certa simulazione siano applicabili a tutti i casi simili a quest'ultima.

Per adimensionalizzare è necessario, innanzitutto, introdurre un set di grandezze caratteristiche (o di riferimento) per il sistema:

- L_∞ - lunghezza caratteristica
- V_∞ - velocità caratteristica
- ρ_∞ - densità caratteristica
- μ_∞ - viscosità caratteristica

grazie alle quali è possibile esprimere in modo adimensionale tutte le grandezze coinvolte nelle equazioni che governano il campo fluido. Dato che nel caso analizzato per questa tesi si utilizzano le equazioni di Navier-Stokes per flussi incompressibili, ci si concentra solo sull'adimensionalizzazione di quest'ultime; come prima cosa si definiscono le singole grandezze adimensionali (identificate dall'apice *):

$$\begin{aligned}
 x^* &= \frac{x}{L_\infty} & y^* &= \frac{y}{L_\infty} & z^* &= \frac{z}{L_\infty} \\
 v_x^* &= \frac{v_x}{V_\infty} & v_y^* &= \frac{v_y}{V_\infty} & v_z^* &= \frac{v_z}{V_\infty} \\
 t^* &= \frac{t}{\frac{L_\infty}{V_\infty}} & P^* &= \frac{P}{\rho_\infty V_\infty^2} & F^* &= \frac{F}{\rho_\infty V_\infty^2 L_\infty^2}
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

È anche possibile adimensionalizzare i seguenti operatori matematici:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{\delta t^*} &= \frac{\delta}{\delta t} \frac{V_\infty}{L_\infty} \\
 \frac{D}{Dt^*} &= \frac{D}{Dt} \frac{V_\infty}{L_\infty} \\
 \vec{\nabla}^* &= \vec{\nabla} L_\infty \\
 \nabla^{2*} &= \nabla^2 L_\infty^2
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

sostituendo tutte le adimensionalizzazioni effettuate nelle equazioni che governano il fluido (ovvero il sistema Eq. (1.21)), tramite alcuni passaggi, si ottiene il set di equazioni di Navier-Stokes adimensionale per fluidi incomprimibili:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}^* \cdot \vec{v}^* \\ \frac{D\vec{v}^*}{Dt^*} = -\vec{\nabla}^* P^* + \frac{1}{Re} \nabla^{2*} \vec{v}^* \end{cases} \quad (1.25)$$

dove con Re si indica il cosiddetto *Numero di Reynolds*, un parametro adimensionale che indica il rapporto tra i termini di accelerazione e i termini viscosi; la definizione di tale parametro è la seguente:

$$Re = \frac{\rho_\infty V_\infty L_\infty}{\mu_\infty} \quad (1.26)$$

Poter adimensionalizzare il problema risulta molto utile anche quando si desidera analizzare un sistema di grosse dimensioni, dato che permette di sfruttare la similitudine per effettuare un esperimento in scala; per far sì che i risultati dell'esperimento in scala siano validi è necessario che il modello rispetti contemporaneamente la *Similitudine Geometrica* (stessa forma anche se in scala) e la *Similitudine Dinamica* (ovvero avere lo stesso numero di Reynolds Re).

1.2 Cenni di Turbolenza

Nel corso di questa sezione si andranno a presentare le basi teoriche dei flussi turbolenti e i meccanismi fisici che stanno alla base di questo complesso fenomeno; per non appesantire troppo l'elaborato, però, non si entrerà nel dettaglio dei passaggi e delle dimostrazioni che costituiscono la formulazione matematica della turbolenza, dato che non rappresenta lo scopo di questa tesi (per la trattazione matematica si rimanda a testi dedicati [15] [22]).

In fluidodinamica, con flusso turbolento [26] si indica un flusso irregolare e (apparentemente) caotico, nel quale insorgono numerose strutture vorticosi; questo tipo di campo fluido si instaura per valori di Reynolds elevati ($Re \gg 1$) ed è fortemente tridimensionale e multi-scala, dato che coinvolge contemporaneamente fenomeni (come le strutture vorticosi) le cui dimensioni caratteristiche variano molto (Fig. (1.1)).

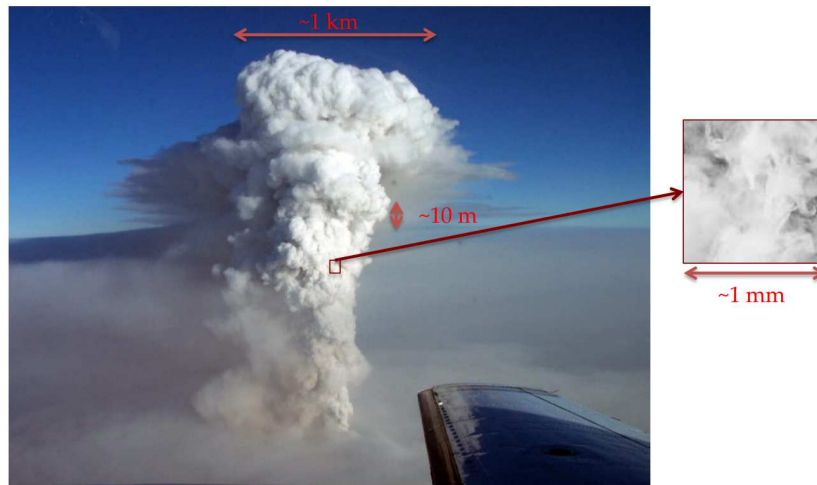


Figura 1.1: Esempio di struttura multiscala: eruzione di un vulcano ($Re \simeq 10^8 \div 10^9$). Si nota come le strutture vorticosse varino di dimensione anche per $6 \div 8$ ordini di grandezza.

All'aumentare del numero di Reynolds, partendo da una condizione di flusso laminare¹¹, il campo fluido diviene sempre più "disordinato", attraversando una condizione di transizione per poi raggiungere un regime pienamente turbolento; durante questo passaggio il fluido perde le simmetrie tipiche della condizione laminare e inizia a formare strutture vorticosse di diverse dimensioni (si veda Fig. (1.2)).

Seppur un flusso turbolento possa apparire come caotico e casuale, in realtà deve anch'esso seguire necessariamente le equazioni che governano il fluido, ovvero le eq. di Navier-Stokes, le quali sono esatte e deterministiche: date le condizioni iniziali e al contorno, tutta l'evoluzione temporale del campo fluido è prescritta. Se si ripete lo stesso esperimento più volte, però, si osserveranno misure differenti; tutto ciò è dovuto all'estrema dipendenza delle equazioni di Navier-Stokes dalle condizioni iniziali e al contorno (quando ci si trova in regime turbolento), di conseguenza piccolissime variazioni (anche non osservabili) in tali condizioni divergono portando a soluzioni più o meno differenti. Tale fenomeno di apparente casualità prende il nome di *Caos*

¹¹un flusso è in regime laminare quando il suo Re è abbastanza piccolo; in tali condizioni il flusso è caratterizzato da un moto ordinato delle sue particelle, le quali scorrono seguendo traiettorie tra loro parallele senza quasi mai rimescolarsi e senza creare strutture vorticosse complesse. A regime, un flusso laminare è caratterizzato da un campo di velocità stazionario nel tempo.

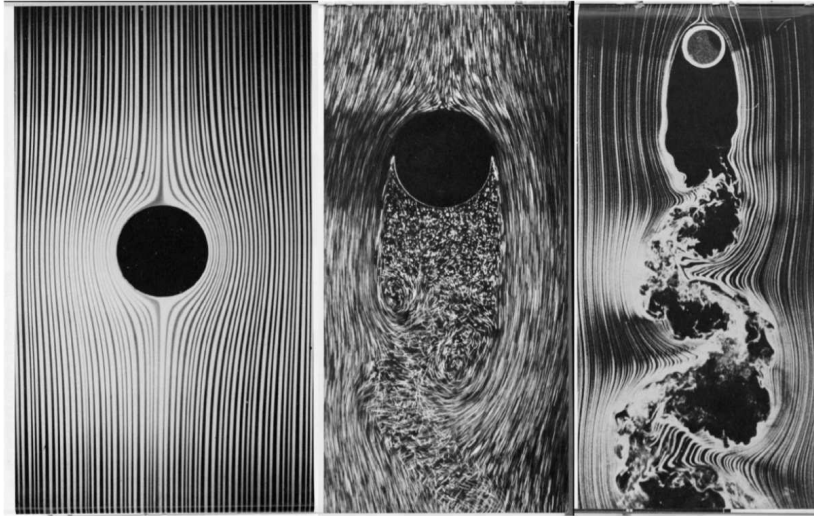


Figura 1.2: Esempio di transizione da laminare a turbolento al variare di Re : flusso su di un cilindro. A sx flusso laminare ($Re \ll 1$): per simmetria è impossibile definire se il flusso arrivi dall'alto o dal basso. Al centro flusso in regime di transizione ($Re > 1$): inizio della rottura della simmetria. A dx flusso turbolento ($Re \gg 1$): è chiara la direzione del flusso per via della non simmetria e della scia vorticososa.

Deterministico.

Per questo genere di problemi risulta conveniente utilizzare un approccio statistico, descrivendo il campo di velocità attraverso la cosiddetta *Decomposizione di Reynolds*, la quale consiste nel separare la velocità in due contributi:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{U}(\vec{x}, t) + \vec{u}'(\vec{x}, t) \quad (1.27)$$

dove $\vec{u}(\vec{x}, t)$ è la velocità complessiva (o istantanea) in un dato punto di coordinate \vec{x} del campo nell'istante t , mentre $\vec{U}(\vec{x}, t)$ indica la media di Reynolds¹² (o di insieme) della velocità stessa e $\vec{u}'(\vec{x}, t)$ lo scostamento dalla media. Un esempio grafico di tale decomposizione è riportato in Fig. (1.3).

Un vantaggio di tale rappresentazione è che, date delle condizioni al contorno simmetriche, anche se il campo di velocità istantaneo \vec{u} e la sua componente oscillante \vec{u}' sono "disordinati" e asimmetrici, la velocità media \vec{U} recupera le simmetrie delle condizioni al contorno (assumendo dunque un

¹²si tratta non di una media nel tempo o nello spazio, ma di una media su più esperimenti, i quali devono essere effettuati cercando di mantenere il più possibile uguali le condizioni al contorno ed iniziali; matematicamente viene indicata col simbolo $\langle (\dots) \rangle$.

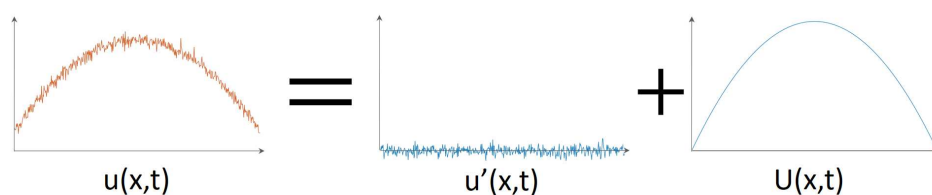


Figura 1.3: Esempio di decomposizione di Reynolds. Si nota come il campo di velocità possa essere riscritto attraverso la somma di un valore medio e dallo scostamento dalla media stessa.

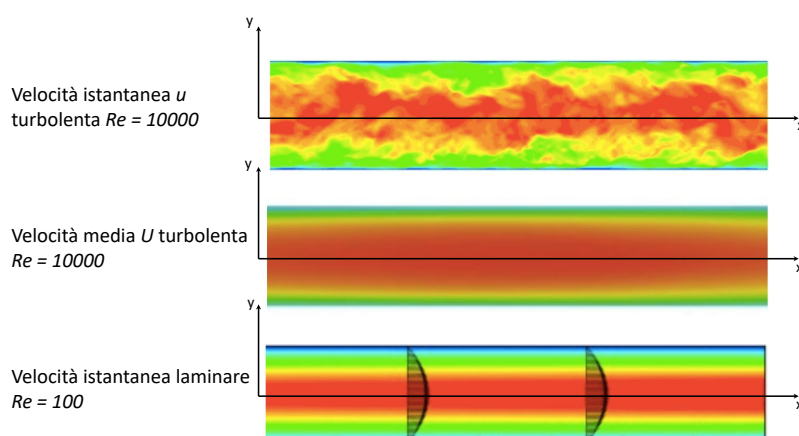


Figura 1.4: Considerando il flusso tra due pareti, la velocità istantanea in regime turbolento è fluttuante sia nello spazio (x, y, z) che nel tempo t ; il campo medio, invece, rispetta le simmetrie delle condizioni al contorno (non varia in x e z) e l'invarianza temporale di quest'ultime (è stazionario), andando ad assomigliare alla soluzione laminare.

comportamento più simile a quello laminare); un esempio è quello riportato in Fig. (1.4).

Aver separato il campo di velocità in due contributi, ci permette anche di definire due distinte energie cinetiche, la prima legata al campo medio di velocità, espressa come:

$$K = \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} \quad (1.28)$$

e la seconda, detta *energia cinetica turbolenta*, legata alla componente fluttuante \vec{u}' della velocità dalla relazione:

$$k = \frac{\langle \vec{u}' \cdot \vec{u}' \rangle}{2} \quad (1.29)$$

dove si ricorda che con $\langle \dots \rangle$ si intende la media di Reynolds di una data grandezza.

Per analizzare meglio queste due energie cinetiche si consideri un sistema formato da un condotto che immette un flusso inizialmente laminare (nel condotto la fluttuazione \vec{u}' è nulla) in un campo fluido inizialmente statico; dopo una certa distanza dall'uscita il flusso raggiunge un Re abbastanza elevato da diventare turbolento. Se si considera un volume di controllo Ω molto più grande del flusso turbolento (Fig. (1.5)), è possibile dimostrare che, per quanto riguarda l'energia cinetica del campo medio K , vale la seguente relazione:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} K dV = \mathbb{C}^{(K)} + \mathbb{F}^{(K)} - \mathbb{D} - \mathbb{P} \quad (1.30)$$

dove:

- $\mathbb{C}^{(K)}$ rappresenta l'energia cinetica introdotta nel sistema dall'esterno, la quale va ad alimentare il campo medio.
- $\mathbb{F}^{(K)}$ rappresenta il flusso attraverso la superficie del dominio, di una grandezza legata al trasporto dell'energia cinetica K nel campo fluido; tale trasporto è proporzionale alla velocità media \vec{U} , la quale è praticamente nulla su quasi tutta la superficie $\delta\Omega$. Il trasporto dell'energia cinetica "media", dunque, rimescola tale energia nel campo fluido, ma il suo flusso attraverso il "confine" di Ω è trascurabile ($\mathbb{F}^{(K)} \simeq 0$).
- \mathbb{D} è un termine legato alla dissipazione dell'energia cinetica del campo medio; essendo proporzionale a $1/Re$, ed essendo $Re \gg 1$ per i flussi turbolenti, questo termine risulta trascurabile.
- \mathbb{P} è un termine detto *Produzione*, il quale contiene sia la velocità media \vec{U} che quella fluttuante \vec{u}' ; è proprio questo termine quello legato alla nascita della turbolenza, dato che, come vedremo, alimenta il campo fluttuante.

Ipotizzando di valutare l'andamento del sistema a regime, è possibile porre nulla la derivata temporale dell'integrale dell'energia cinetica del campo medio sul dominio:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} K dV = 0 \quad (1.31)$$

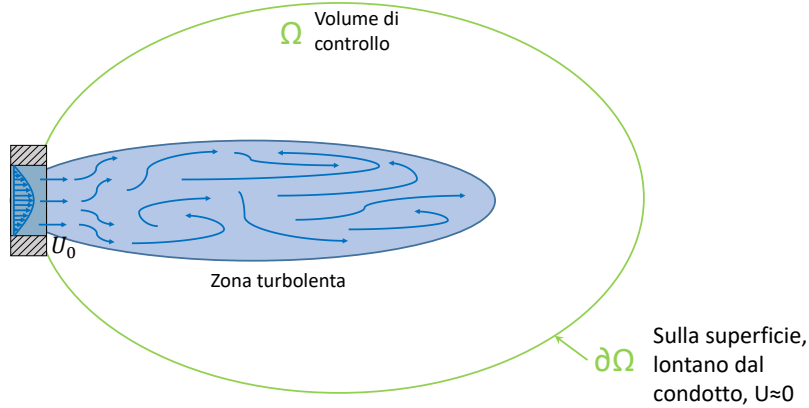


Figura 1.5: Sistema per l'analisi delle energie cinetiche del campo medio e del campo fluttuante.

da cui, per le considerazioni fatte per i vari membri dell'Eq. (1.30), si ricava:

$$\mathbb{C}^{(K)} \simeq \mathbb{P} \quad (1.32)$$

quindi tutta l'energia introdotta nel campo medio viene "catturata" dal termine di produzione.

Andando ora ad analizzare l'energia cinetica del campo fluttuante, considerando sempre il sistema della Fig. (1.5), si può dimostrare che:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} k dV = \mathbb{C}^{(k)} + \mathbb{F}^{(k)} + \mathbb{P} - \mathcal{E} \quad (1.33)$$

dove:

- $\mathbb{C}^{(k)}$ è un termine convettivo che rappresenta l'entrata o uscita di energia attraverso la superficie che fa da contorno al dominio. Se Ω è abbastanza grande questo termine è solitamente trascurabile: dipende da $k \cdot \vec{U}$, ma sul contorno $\vec{U} \simeq 0$ ovunque tranne all'uscita del condotto, dove però è nulla k , dato che il flusso è inizialmente laminare (fluttuazione nulla).
- $\mathbb{F}^{(k)}$, come per il campo medio, rappresenta il flusso attraverso $\delta\Omega$ della grandezza associata al trasporto spaziale di k , la quale però è non nulla solo all'interno del dominio (trasporta k nel dominio, ma il suo flusso in entrata o uscita è quasi nullo).
- \mathbb{P} indica sempre il termine di produzione.

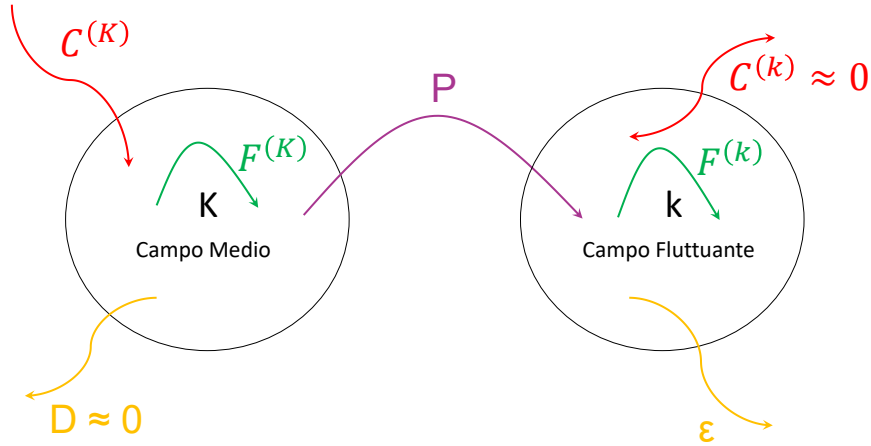


Figura 1.6: Rappresentazione grafica della relazione tra l'energia cinetica del campo medio e l'energia cinetica del campo fluttuante.

- \mathcal{E} rappresenta la dissipazione viscosa del campo fluttuante. Dipende sempre da $1/Re$ (che tende a zero per $Re \rightarrow \infty$), ma anche dall'intensità del gradiente del campo di velocità fluttuante, il quale cresce molto al crescere di Re ; complessivamente, per $Re \rightarrow \infty$, si ha che \mathcal{E} tende ad un valore finito non trascurabile proporzionale a U_0^3/l_0 (*Anomalia Dissipativa*¹³), dove U_0 ed l_0 sono rispettivamente la velocità del campo medio e lunghezza caratteristiche del sistema considerato.

Andando sempre ad analizzare il sistema a regime (annullando quindi la derivata temporale a sinistra dell'uguale nell'Eq. (1.33)) e grazie alle considerazioni fatte sui vari termini di quest'ultima equazione, si ricava che:

$$\mathbb{P} \simeq \mathcal{E} \quad (1.34)$$

quindi, (quasi) tutta l'energia viene introdotta dall'esterno nel campo medio per poi essere trasferita al campo fluttuante dove viene dissipata. Si riporta in Fig. (1.6) una rappresentazione grafica del processo appena descritto.

¹³dimensionalmente ci si aspetta che $[\mathcal{E}] \propto [\nu U_0^2/l_0^2]$, eppure, sperimentalmente, si ha che per $Re \rightarrow \infty$ \mathcal{E} tende ad un valore costante indipendente dalla viscosità e proporzionale a U_0^3/l_0 . Questo fenomeno prende il nome di anomalia dissipativa.

1.2.1 Teoria di Kolmogorov e Cascata Turbolenta

Come è già stato introdotto nella sezione precedente, la turbolenza è un fenomeno prettamente multiscala; per comprendere meglio il fenomeno che sta alla base della formazione di strutture vorticosi su scale diverse, è innanzitutto necessario definire una velocità caratteristica propria di ogni scala. Per prima cosa, si consideri un flusso turbolento generato da un generico corpo di dimensione caratteristica l_0 (come per esempio la scia turbolenta di un flusso su di un cilindro di diametro l_0); la dimensione caratteristica l delle strutture vorticosi varierà da un valore minimo, indicato con η , fino ad un valore prossimo ad l_0 . Per individuare una velocità caratteristica di una data scala, si sceglie una generica coppia di punti P e Q a distanza l tra loro e si valuta la differenza tra le velocità in questi due punti; tale differenza di velocità sarà funzione dei punti considerati, ma può anche essere scritta come funzione del punto P , di un versore \hat{l} che individua la direzione da P a Q e del modulo del segmento che separa i due punti (modulo che sarà proprio uguale ad l). Per avere una grandezza scalare che rappresenti la velocità caratteristica di una data scala di vortici, si va a mediare (sempre attraverso una media di Reynolds) tale differenza di velocità e la si va a proiettare lungo il versore \hat{l} ¹⁴. Complessivamente abbiamo dunque definito la velocità caratteristica (che si ricorda essere una grandezza scalare) di una data scala l come:

$$u_l(P, \hat{l}, l) = \langle \delta u_{\parallel} \rangle = \langle (\vec{u}_P - \vec{u}_Q)_{\parallel} \rangle \quad (1.35)$$

Grazie a questa velocità caratteristica è anche possibile associare ad ogni scala un proprio numero di Reynolds:

$$Re_l = \frac{u_l l}{\nu} \quad (1.36)$$

Introducendo la teoria *K-41* [17], chiamata così perché sviluppata da A. N. Kolmogorov nel 1941, si può dimostrare che per Re abbastanza elevati:

1. Macroscopicamente il flusso turbolento dipende dalla geometria che lo genera ed è *disomogeneo* e *anisotropo*

¹⁴in realtà si può dimostrare come, considerando il valore mediato della differenza di velocità, non vi sia differenza tra scegliere di proiettare lungo \hat{l} o lungo una direzione ortogonale a quest'ultimo; per semplicità si sceglie la direzione parallela.

2. Microscopicamente, per $l \ll l_0$, il flusso perde la sua dipendenza dalla geometria che lo genera e diventa universale; il flusso turbolento è quindi *localmente omogeneo e localmente isotropo*.

Si fa notare come tale isotropia ed omogeneità locali siano riferite non al campo di velocità istantaneo, ma alla velocità caratteristica delle singole scale appena descritta u_l , la quale risulta quindi essere localmente indipendente dal punto scelto per valutarla e dalla direzione in cui la si valuta ($u_l(P, \hat{l}, l) \rightarrow u_l(l)$ per le piccole scale). Queste considerazioni sono fondamentali per lo studio della turbolenza, dato che affermano come i flussi turbolenti, visti localmente, siano tutti tra loro simili e indipendenti dalla geometria che li genera.

Sfruttando la teoria appena introdotta, senza entrare nel dettaglio delle dimostrazioni e dei passaggi matematici, si riassumono ora i comportamenti delle diverse scale di grandezza caratteristiche di un campo turbolento:

- *Scale grandi* ($l \simeq l_0$) - è la scala nella quale viene introdotta l'energia cinetica dall'esterno; si ha che $Re_l \gg 1$, ovvero i termini viscosi sono trascurabili così come lo è la dissipazione. Tutta l'energia introdotta in queste scale viene trasferita alle scale più piccole ed è proporzionale a U_0^3/l_0 (come già si era visto nella sezione (1.2)).
- *Scala di Kolmogorov* ($l \simeq \eta$) - per le ipotesi di Kolmogorov si ha che le grandezze statistiche¹⁵ di questa scala sono universali e dipendono al più da \mathcal{E} e da ν . Con un'analisi dimensionale si possono definire le seguenti grandezze e relazioni:

$$\begin{aligned}
 \text{lunghezza di Kolmogorov} & \quad \eta = \left(\frac{\nu^3}{\mathcal{E}} \right)^{\frac{1}{4}} \\
 \text{velocità di Kolmogorov} & \quad u_\eta = (\nu \mathcal{E})^{\frac{1}{4}} \\
 \text{tempo di Kolmogorov} & \quad t_\eta = \frac{\eta}{u_\eta} = \left(\frac{\nu}{\mathcal{E}} \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

dove η , u_η e t_η sono rispettivamente la dimensione, velocità e tempo di vita caratteristici delle strutture vorticosi nella scala di Kolmogorov. Per questa scala si ha che $Re \simeq 1$, di conseguenza i termini viscosi non sono trascurabili ed è dunque questa la scala in cui viene dissipata

¹⁵come la velocità, essendo mediata su più esperimenti tramite la media di Reynolds

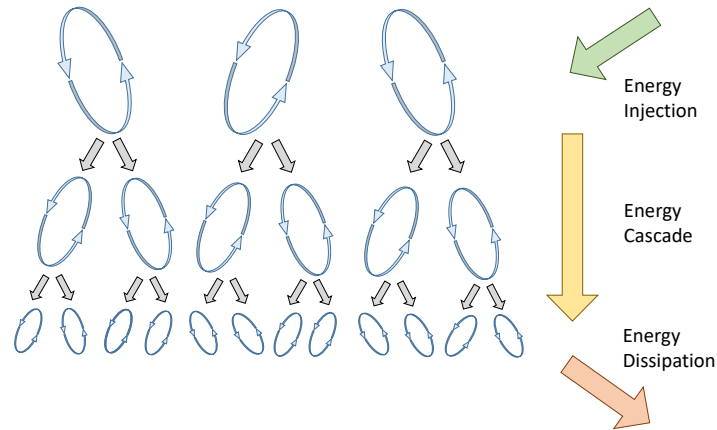


Figura 1.7: Rappresentazione grafica della cascata turbolenta: i vortici più grandi alimentano i vortici via via più piccoli fino alla scala di Kolmogorov, dove l'energia cinetica viene dissipata per via delle forze viscosive.

l'energia del flusso turbolento (al di sotto di questa scala non si generano altri vortici).

- *Scale universali intermedie* ($\eta \ll l \ll l_0$) - da questa scala in giù il flusso può essere visto come omogeneo ed isotropo; dalle ipotesi di Kolmogorov si ha che le grandezze statistiche di queste scale sono universali e, fissato un l , dipendono solo da \mathcal{E} (si perde la dipendenza da ν). Da un'analisi dimensionale si ricava che:

$$u_l = (\mathcal{E}l)^{\frac{1}{3}}$$

$$Re_l = \frac{u_l l}{\nu} = \frac{l^{\frac{4}{3}}}{\frac{\nu}{\mathcal{E}^{1/3}}} = \left(\frac{l}{\eta}\right)^{\frac{4}{3}} \quad (1.38)$$

Per $l \gg \eta$ si ha che $Re_l \gg 1$, quindi la viscosità è trascurabile e i termini inerziali sono predominanti; proprio per questo motivo le scale intermedie vengono anche dette *scale inerziali*. Complessivamente, tutta l'energia ricevuta dalle grandi scale viene "solo" trasmessa alle scale inferiori (ovvero a quella di Kolmogorov).

Riassumendo, in un campo turbolento l'energia cinetica viene introdotta nelle grandi scale, i cui vortici trasportano l'energia a scale via via più piccole, generando così strutture vorticosi sempre più ridotte, fino a raggiungere la scala più piccola η , nella quale avviene la dissipazione per mezzo della viscosità. Questo fenomeno è detto *cascata turbolenta* ed è graficamente schematizzato nella Fig. (1.7).

Capitolo 2

Cenni di Meccanica delle Fratture

Nel corso di questo capitolo si vanno a presentare i concetti di base della meccanica delle fratture; in realtà, per lo sviluppo di questa tesi, non viene impiegata questa formulazione teorica per valutare l'insorgere di fratture in un materiale, ma si ritiene comunque necessario discuterla brevemente per poter introdurre alcuni concetti, come quelli di *energy release rate* e *critical energy release reate*, che risultano essere fondamentali per il modello di frattura implementato nel programma di simulazione adottato.

La meccanica delle fratture si propone di analizzare una particolare metodologia di fallimento di una struttura, la quale presuppone che vi sia una certa cricca (o difetto) nel solido e che quest'ultima possa, sotto l'azione dei carichi esterni, propagare fino al fallimento dell'intera struttura. Questo tipo di fallimento risulta importante soprattutto per quei materiali che presentano un comportamento "fragile" (detti anche *brittle materials*¹) e si può presentare per un carico anche molto inferiore rispetto a quello che ci si aspetterebbe ignorando la presenza di eventuali difetti del materiale. Nel caso in cui la struttura presenti un qualche tipo di danneggiamento pregresso, quindi, non è possibile utilizzare l'approccio classico² per valutare se tale struttura sia o

¹sono quei materiali per i quali si suppone che la fase di deformazione plastica sia trascurabile; un materiale "brittle" presenta una tensione di snervamento quasi coincidente con la sua tensione ultima a trazione.

²ovvero comparare gli stress indotti sulla struttura con il suo valore di tensione ultima a trazione o tensione di snervamento.

meno in grado di sopportare un certo carico esterno, ma risulta necessario introdurre un nuovo parametro che descriva la resistenza del materiale alla propagazione di una frattura; tale parametro viene solitamente definito come *Fracture Toughness* (o *tenacità*) di un dato materiale. Per valutare la tenacità di un materiale esistono due approcci principali:

- *energy criterion* - si basa su di una analisi dal punto di vista energetico del fenomeno della propagazione di una cricca.
- *stress intensity approach* - assomiglia maggiormente all'approccio classico e si basa su di una valutazione del valore degli stress nei pressi della frattura stessa.

Per lo scopo di questo elaborato si riporta di seguito una breve introduzione ai concetti di base del primo approccio, ovvero quello energetico, così da introdurre quei parametri che saranno indispensabili per la modellazione della propagazione di fratture utilizzata in questa tesi; per una descrizione più dettagliata di entrambi gli approcci si rimanda il lettore a [1].

2.1 Criterio energetico

Si basa sul lavoro sviluppato da A.A. Griffith nel 1920, il quale applicò il bilancio dell'energia al fenomeno della propagazione della frattura in un corpo solido linearmente elastico. Dal primo principio della termodinamica si deduce che, quando un sistema passa uno stato di non-equilibrio ad uno di equilibrio, si ha una riduzione "netta" dell'energia del sistema; applicando tale considerazione alla frattura, Griffith dimostrò che quando si crea o propaga una cricca in una struttura, la variazione di energia complessiva del sistema dE , rapportata all'incremento in area dA della cricca stessa, è nulla. Il bilancio energetico di Griffith, quindi, può essere espresso attraverso la seguente relazione:

$$\frac{dE}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (2.1)$$

Dove $d\Pi$ rappresenta la variazione di energia potenziale elastica accumulata dal materiale (dovuta a carichi esterni e tensioni interne), mentre dW_s rappresenta il lavoro necessario per creare una nuova superficie dA , ovvero necessario a generare o propagare una cricca.

La relazione precedente permette di ricavare che, durante la propagazione di una cricca, l'energia potenziale accumulata equivale al lavoro necessario a formare nuove superfici:

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW_s}{dA} \quad (2.2)$$

Applicando una certa tensione ad una data struttura solida, questa accumulerà una certa energia potenziale elastica; se si propaga una cricca, il sistema diviene complessivamente meno rigido, ovvero "rilascia" una quota parte dell'energia elastica accumulata. Quello che afferma l'Eq. (2.2), dunque, è che una cricca può propagarsi, solo quando la quota parte di energia potenziale persa equivale ad un certo preciso valore, pari al lavoro necessario a creare nuove superfici nella struttura considerata.

Con il nome di *energy release rate* G si va proprio ad indicare quanto varia l'energia potenziale accumulata a seguito di un ipotetica propagazione della cricca, ovvero:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} \quad (2.3)$$

Questo termine può assumere diversi valori, i quali dipendono dalla dimensione iniziale della cricca e dallo stato di tensione applicato al solido. Con il termine *critical energy release rate* G_c , invece, si intende quel valore di G tale per cui la cricca si può propagare, che dall'Eq. (2.2) si sa essere pari a:

$$G_c = \frac{dW_s}{dA} \quad (2.4)$$

Ogni materiale possiede un valore caratteristico di G_c associato alle diverse modalità di propagazione di una cricca: una frattura, infatti, può espandersi sia per carichi di trazione, che per carichi di taglio e di torsione (Fig. (2.1)), ma il valore più piccolo di G_c è associato ai carichi di trazione, che sono dunque i più pericolosi per quelle strutture che presentano dei difetti iniziali. Questa "critical energy release rate" G_c rappresenta proprio la tenacità ("fracture toughness") del materiale nel criterio energetico della meccanica delle fratture. Complessivamente, il fenomeno della propagazione di una frattura avviene quando l'"energy release rate" raggiunge un valore pari a quello della tenacità della struttura, ovvero:

$$G = G_c \quad (2.5)$$

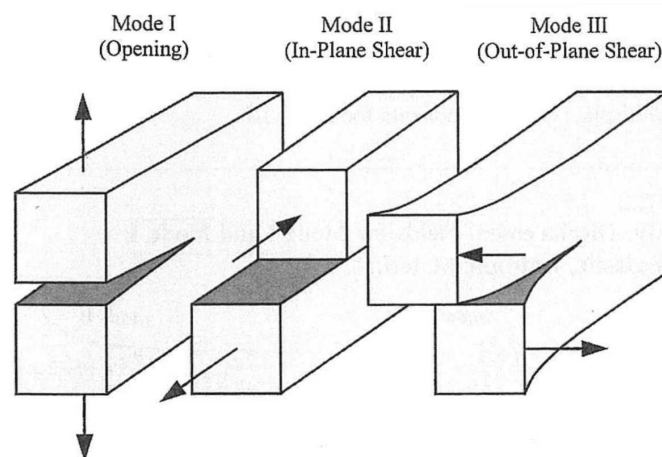


Figura 2.1: Rappresentazione delle tre possibili modalità di frattura dovute rispettivamente, da sinistra a destra, a trazione, carichi di taglio e torsione.

Ricavare un'espressione per G_c non è possibile, se non in alcuni semplici casi, e viene dunque solitamente valutata attraverso una serie di esperimenti e test in laboratorio.

Capitolo 3

Software di simulazione per problemi di FSI

Nel corso di questo capitolo si vanno a trattare più nel dettaglio i tre moduli principali che compongono il simulatore di FSI utilizzato, ovvero *Fluid Solver*, *Peridynamics Solver* e il modulo di sincronizzazione e accoppiamento. Prima di tutto ciò, però, si ritiene giusto sottolineare come il software impiegato, in grado di simulare una vasta gamma di problemi di FSI con geometrie arbitrariamente complesse e di riprodurre la formazione di fratture in materiali solidi fragili e linearmente elastici, sia stato ampiamente testato e validato dal suo sviluppatore l'Ing. F. Dalla Barba (per i test e la validazione si rimanda al documento [3]). Dato l'elevato costo computazionale richiesto da tale programma, le simulazioni sono state effettuate utilizzando il super-computer GALILEO 100 del CINECA; per ulteriori dettagli sulla storia e sulle caratteristiche prestazionali di tale macchina si rimanda al sito ufficiale del CINECA [6].

3.1 Primo modulo - *Fluid Solver*

Come già accennato, la parte di simulazione associata al campo fluido turbolento viene affrontata dal software risolvendo numericamente in modo diretto (DNS) le equazioni di Navier-Stokes in condizioni di fluido incomprimibile; per la teoria associata a tali equazioni e al fenomeno della turbolenza si rimanda al capitolo dedicato (1), mentre in questa sezione ci si concentra sulla tecnica di simulazione DNS adottata dal programma.

3.1.1 Simulazione di flussi turbolenti e metodo DNS

Simulare il comportamento di un fluido turbolento equivale a ricavarne le grandezze che lo descrivono in una serie discreta di punti nello spazio e di istanti nel tempo, risolvendo numericamente un dato modello che ne predica l'andamento. Per poter risolvere numericamente un qualsivoglia modello, infatti, risulta indispensabile passare da una visione continua ad una discreta, andando a suddividere il dominio "spazio-temporale" (x, y, z, t) in una serie finita di punti e istanti. Dal punto di vista temporale si va dunque a fissare uno "step" finito Δt che rappresenta ogni quanto viene valutata l'evoluzione temporale della soluzione; dal punto di vista spaziale, invece, è necessario costruire una cosiddetta *griglia di calcolo* (o *MESH computazionale* [11]), ovvero una griglia di elementi i cui nodi sono proprio i punti in cui verrà valutata la soluzione del modello matematico scelto (solitamente, per migliorare l'accuratezza della simulazione, si va poi ad interpolare la soluzione tra i vari nodi, così da avere un andamento più "continuo" della soluzione). L'esempio più semplice di MESH tridimensionale è quello di un "box" suddiviso in piccoli cubi di lato Δ , in cui gli spigoli dei cubi rappresentano i nodi computazionali della griglia.

Questa discretizzazione comporta che la soluzione ottenuta sia solo un'approssimazione dell'andamento reale delle grandezze da valutare ed è dunque indispensabile scegliere in modo accurato lo step temporale e la forma, dimensione e spaziatura della griglia computazionale, per far sì che tale approssimazione risulti accettabile.

Per la simulazione di flussi in regime turbolento esistono diversi metodi possibili. Di seguito si riportano quelli principali, entrando poi nel dettaglio solo del metodo DNS, ovvero quello impiegato nel programma di simulazione di FSI utilizzato per questa tesi:

- *DNS* - concettualmente è quello più semplice dei tre, ma anche il più "costoso" a livello computazionale; consiste nel risolvere numericamente le equazioni di Navier-Stokes, ottenendo i valori istantanei (non mediati) delle varie grandezze d'interesse.
- *LES* - la sigla sta per *Large Eddy Simulation*, dove si ricorda che con Eddy ci si riferisce alle strutture vorticosi tipiche dei campi turbolenti. Questa tecnica di simulazione consiste nel simulare esclusivamente i vortici di scala maggiore (dipendenti dalla geometria) e di utilizzare dei

modelli per l'andamento delle strutture più piccole. Queste simulazioni sono molto meno computazionalmente dispendiose delle DNS e, come quest'ultime, permettono di ottenere una soluzione del campo istantaneo (vengono solitamente utilizzate per le previsioni meteo); tuttavia i risultati ottenuti sono decisamente meno accurati rispetto a quelli delle simulazioni DNS.

- *RANS* - consiste nel risolvere le equazioni omonime, ovvero le *Reynolds Averaged Navier-Stokes equations*, le quali sono ottenute applicando i concetti di media di Reynolds e decomposizione di Reynolds (si veda sezione (1.2), in particolare l'Eq. (1.27)) alle equazioni di Navier-Stokes incomprimibili (Eq. (1.21)):

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \\ \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} \frac{P}{\rho} + \vec{\nabla} \cdot (2\nu \vec{\underline{E}}) - \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{u}'\vec{u}' \rangle \end{cases} \quad (3.1)$$

dove $\vec{\underline{E}}$ è la matrice delle deformazioni (Eq. (1.10)) in cui la velocità da considerare è solo quella media \vec{U} , mentre il termine $\langle \vec{u}'\vec{u}' \rangle$ è detto *tensore degli sforzi di Reynolds*. Il problema delle equazioni RANS è che non costituiscono un sistema chiuso¹, di conseguenza è necessario utilizzare dei modelli per il tensore degli sforzi di Reynolds, modelli che sono per loro natura semplificati e spesso empirici, e che introducono dunque un'ulteriore elemento di approssimazione oltre alla discretizzazione. Tra le tre tecniche presentate è quella con il minor costo computazionale, ma risolvendo le RANS è possibile ottenere una soluzione solo per il campo medio.

Come già anticipato, il programma utilizzato per simulare il caso di FSI d'interesse per questa tesi impiega proprio un metodo DNS, nel quale viene risolta la formulazione per flussi incomprimibili delle equazioni di Navier-Stokes; tali equazioni sono esatte e considerano intrinsecamente la possibilità di avere a che fare con un flusso in regime turbolento, di conseguenza comportano il vantaggio di non doverci "affiancare" nessun altro modello che descriva la turbolenza. Per poter utilizzare in modo efficace il metodo DNS, e ottenere

¹un sistema di equazioni non è chiuso quando ci sono più incognite che equazioni, cosa che rende il sistema non risolvibile di per sè.

quindi risultati accettabili, è necessario assicurarsi, innanzitutto, che siano valide le ipotesi di utilizzo delle equazioni di Navier-Stokes incomprimibili:

- devono valere le ipotesi di flusso incomprimibile (si veda sezione (1.1.1)).
- devono essere valide le ipotesi di conservazione della massa e della quantità di moto, ovvero non vi devono essere fonti o pozzi² [5] nel campo fluido.
- deve valere, per il campo fluido, l'ipotesi del continuo, ovvero il fluido considerato non può essere rarefatto, inoltre la più piccola scala (η) delle strutture vorticose deve essere comunque molto più grande del libero cammino medio delle molecole che compongono il fluido stesso.

Oltre alla validità di tali ipotesi, è indispensabile scegliere in modo accurato i parametri della griglia computazionale, dato che per ottenere dei risultati validi la simulazione deve riuscire a "cogliere" tutto il fenomeno della turbolenza, dalle grandi alle piccole scale. Considerando una MESH semplice, ovvero un box tridimensionale suddiviso in piccoli cubi:

- la dimensione del box deve essere almeno paragonabile alla dimensione caratteristica della scala più grande l_0 , ma ancor meglio se risulta essere $10 \div 20$ volte maggiore.
- la spaziatura della MESH deve essere almeno paragonabile alla dimensione della scala più piccola, ovvero la scala di Kolmogorov (η), ma qualche volta più piccola sarebbe meglio.

L'elevato costo computazione delle simulazioni DNS deriva proprio dal grande numero di nodi computazionali: si ha infatti un box di grandi dimensioni, suddiviso in una griglia molto fitta. Inoltre, anche lo step temporale Δt non può essere troppo elevato, in modo da valutare bene l'evoluzione delle varie strutture vorticose. Complessivamente si può dimostrare che il costo computazionale di una simulazione DNS sia proporzionale a circa Re^3 , il che rappresenta un problema se ci si ricorda che per i flussi turbolenti Re è molto elevato.

²Per sorgenti e pozzi si intendono delle entità fisico-matematiche che rappresentano dei punti dai quali scaturisce del fluido oppure scompare della materia.

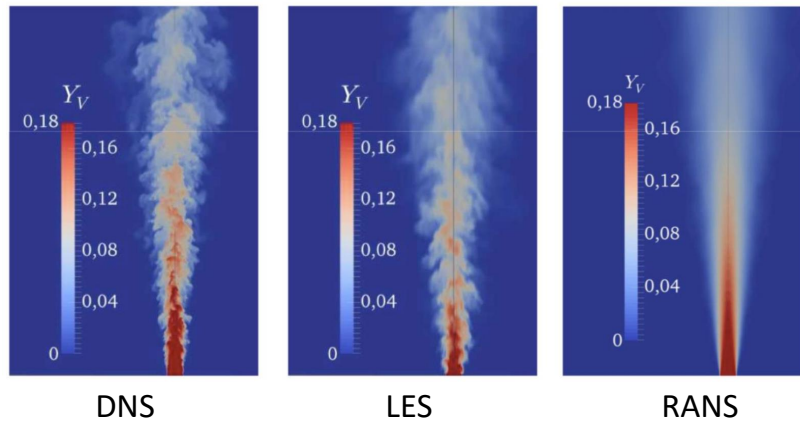


Figura 3.1: Confronto di un getto simulato con le tre tecniche di DNS, LES e RANS.

Il vantaggio, però, del metodo DNS è che, se si scelgono in modo accurato i vari parametri di simulazione e le tecniche di risoluzione numerica delle equazioni differenziali, i risultati ottenuti possono essere considerati come provenienti da una sorta di "esperimento virtuale", ovvero si possono considerare come "giusti" senza doverli effettivamente validare. Riassumendo, questo metodo di simulazione risulta essere molto utile per le attività di ricerca (come questa tesi) e per lo sviluppo di una teoria sulla turbolenza, ma a causa dell'elevatissimo costo computazionale non è applicabile per la simulazione di casistiche reali dove i Re sono troppo elevati.

Si riporta, infine, un confronto tra i risultati delle tre tecniche di simulazione descritte (Fig. (3.1)).

3.2 Secondo modulo - *Peridynamic Solver*

Come già introdotto, una delle limitazioni principali della meccanica classica del continuo è quella di riuscire a predire in modo accurato l'insorgere e l'evoluzione di eventuali cricche all'interno di un solido; tale limitazione è dovuta all'insorgenza di singolarità quando si vanno a valutare le equazioni differenziali, tipiche di questi modelli, nell'intorno delle discontinuità del solido analizzato. Per ovviare a questo problema, il simulatore di FSI impiegato per questa tesi risolve l'analisi del solido attraverso la teoria della peridinamica.

Nel corso di questa sezione si vanno a presentare i concetti che stanno alla base di questa teoria, oltre alle equazioni che ne costituiscono la formulazione matematica.

3.2.1 Teoria Peridinamica

Le teorie utilizzate per l'analisi e la modellazione dei corpi solidi deformabili possono essere racchiuse in due macrocategorie:

- *Teorie Locali* - si fondano sull'ipotesi che il solido sia un continuo ad ogni scala arbitrariamente piccola, e sul fatto che ogni punto che lo compone possa interagire con gli altri punti esclusivamente attraverso forze di contatto. In tale formulazione, lo stress in un punto dipende solamente dal valore locale di deformazione e dalla temperatura; tutti i modelli che si basano su delle relazioni *stress-strain*³ impiegano delle derivate parziali che, per loro natura, sono soggette a singolarità nei pressi di eventuali discontinuità all'interno del solido.
- *Teorie Non-Locali* - si basano sull'assunzione che i punti di un corpo possano interagire tra loro non solo a contatto, ma anche tramite delle forze a corto raggio le quali possono agire fino ad una certa distanza caratteristica, solitamente indicata con δ . Per $\delta \rightarrow 0$ il comportamento modellato tende a quello di un continuo, mentre per $\delta \rightarrow \infty$ si tende ad una versione continua della dinamica molecolare. Il principale vantaggio delle teorie non-locali è quello di poter tenere conto della microstruttura di un dato materiale.

La teoria della peridinamica, impiegata per questa tesi, rientra in questa seconda macrocategoria, trattandosi infatti di una teoria non-locale che modella i corpi solidi da un punto di vista lagrangiano⁴, andando a spostare l'attenzione dal corpo macroscopico ai singoli punti microscopici che lo compongono. In questa teoria il corpo solido viene ancora ipotizzato come composto da una serie idealmente infinita di punti materiali⁵, i quali possono interagire tra loro attraverso delle forze a corto raggio che sono in grado di mettere in relazione i

³ovvero delle equazioni che mettono in relazione il tensore delle tensioni con la deformazione del corpo considerato.

⁴a differenza di quello euleriano, in cui il "focus" è sul campo di una data grandezza, il punto di vista lagrangiano si concentra sull'analizzare le singole particelle che compongono un dato campo, "seguendole" nel loro moto e vedendo come le grandezze caratteristiche ad esse associate evolvono nel tempo.

⁵con punti materiali si intendono dei punti geometrici a cui viene associata una frazione infinitesima dm di massa del corpo che compongono.

punti che si trovano entro una certa distanza δ , detta orizzonte; complessivamente la teoria peridinamica si concentra su una "scala intermedia" tra quella macroscopica del solido continuo e quella molecolare. I principali vantaggi di utilizzare questa teoria per la modellazione del solido sono due:

1. innanzitutto, al posto delle classiche equazioni differenziali, la peridinamica si basa su delle equazioni di carattere integrale che rappresentano il bilancio dei momenti lineari (ovvero della quantità di moto); il vantaggio di impiegare equazioni integrali è che queste non sono soggette a singolarità nei pressi di eventuali discontinuità del materiale.
2. la modellazione del corpo solido attraverso un insieme di punti "legati" tra loro permette intrinsecamente di considerare la possibile insorgenza di fratture, le quali possono essere viste come la rottura, di tutti o solo di alcuni, di questi legami.

3.2.2 Equazioni di governo della peridinamica

In questa sezione si vanno a presentare le equazioni che rappresentano il formalismo matematico della peridinamica. Definendo con \vec{X}_0 le coordinate lagrangiane di un generico punto materiale interno al solido nella sua configurazione di riferimento B , è possibile esprimere l'evoluzione temporale di tali coordinate come $\vec{X}(\vec{X}_0, t)$. Si definisco poi con $\vec{F}(\vec{X}_0, t)$ le forze esterne, per unità di volume, agenti sul generico punto materiale inizialmente identificato da \vec{X}_0 , e con $\vec{L}(\vec{X}_0, t)$ la forza, sempre per unità di volume, agente sullo stesso punto a causa dell'interazione con gli altri punti materiali; si fa notare come $\vec{L}(\vec{X}_0, t)$ sia una forza interna propria del solido. Dalla seconda legge di Newton (conservazione della quantità di moto), scritta per unità di volume, si ha che:

$$\frac{d}{dt}\rho \cdot \vec{v} = \sum \vec{F} \quad (3.2)$$

indicando con $\vec{v}(\vec{X}_0, t)$ la derivata temporale di $\vec{X}(\vec{X}_0, t)$ e con $\rho(\vec{X}_0)$ la densità puntuale del solido, il bilancio della quantità di moto per una generica regione \mathcal{P} del solido peridinamico \mathcal{B} può essere scritto come:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho(\vec{X}_0) \vec{v}(\vec{X}_0, t) dV = \int_{\mathcal{P}} [\vec{F}(\vec{X}_0, t) + \vec{L}(\vec{X}_0, t)] dV \quad (3.3)$$

Particolarizzando per un solo punto materiale:

$$\frac{d}{dt}\rho(\vec{X}_0) \vec{v}(\vec{X}_0, t) = \vec{F}(\vec{X}_0, t) + \vec{L}(\vec{X}_0, t) \quad \forall \vec{X}_0 \in \mathcal{B}, t \geq 0 \quad (3.4)$$

Ricordando che $\vec{L}(\vec{X}_0, t)$ è una forza interna, questa deve essere necessariamente auto-equilibrata, ovvero:

$$\int_{\mathcal{B}} \vec{L}(\vec{X}_0, t) dV = 0 \quad (3.5)$$

Di conseguenza, per ogni campo di forza $\vec{L}(\vec{X}_0, t)$, esiste una funzione vettoriale antisimmetrica $\vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t)$ tale che:

$$\vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t) = -\vec{f}(\vec{X}_0, \vec{X}'_0, t) \quad \forall \vec{X}_0, \vec{X}'_0 \in \mathcal{B}, t \geq 0 \quad (3.6)$$

Dove $\vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t)$ viene chiamata *pairwise force density* (o densità della forza di accoppiamento), e rappresenta la densità della forza interna per unità di volume⁶ agente sul punto materiale \vec{X}_0 a causa dell'interazione con un altro punto materiale \vec{X}'_0 . Indicando con dV' il volumetto infinitesimo associato al punto \vec{X}'_0 , la relazione che lega la funzione vettoriale $\vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t)$ alla forza esterna agente sul generico punto \vec{X}_0 è la seguente:

$$\vec{L}(\vec{X}_0, t) = \int_{\mathcal{B}} \vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t) dV' \quad \forall \vec{X}_0 \in \mathcal{B}, t \geq 0 \quad (3.7)$$

Si può dimostrare che per ogni funzione $\vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t)$ è possibile identificare una funzione $\vec{t}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t)$, detta *bond force density* (o densità della forza di legame), tale per cui:

$$\vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t) = \vec{t}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t) - \vec{t}(\vec{X}_0, \vec{X}'_0, t) \quad \forall \vec{X}_0, \vec{X}'_0 \in \mathcal{B}, t \geq 0 \quad (3.8)$$

La densità della forza di legame rappresenta una grandezza fondamentale per questa teoria, dato che sta alla base del modello costitutivo stesso della teoria peridinamica. In Fig. (3.2) si riporta un esempio grafico, in un semplice caso 2D, della relazione che lega la "bond force density" $\vec{t}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t)$ con la "pairwise force density" $\vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t)$.

Utilizzando la relazione espressa dall'Eq. (3.7) nell'Eq. (3.4), si ottiene che:

$$\frac{d}{dt} \rho(\vec{X}_0) \vec{v}(\vec{X}_0, t) = \int_{\mathcal{B}} \vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t) dV' + \vec{F}(\vec{X}_0, t) \quad \forall \vec{X}_0 \in \mathcal{B}, t \geq 0 \quad (3.9)$$

Da cui, inserendo l'Eq. (3.8), si ricava:

$$\frac{d}{dt} \rho(\vec{X}_0) \vec{v}(\vec{X}_0, t) = \int_{\mathcal{B}} \left[\vec{t}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t) - \vec{t}(\vec{X}_0, \vec{X}'_0, t) \right] dV' + \vec{F}(\vec{X}_0, t) \quad (3.10)$$

⁶dimensionalmente $[\vec{f}] = \text{Forza}/\text{Volume}^2$

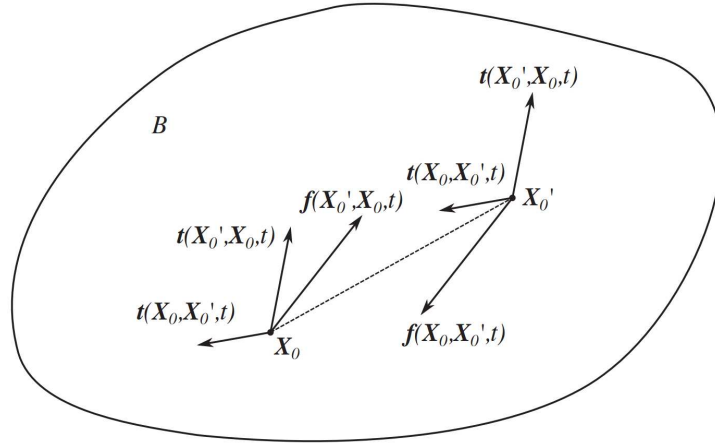


Figura 3.2: Rappresentazione grafica della relazione tra densità della forza di accoppiamento $\vec{f}(\vec{X}_0', \vec{X}_0, t)$ e densità della forza di legame $\vec{t}(\vec{X}_0', \vec{X}_0, t)$, in un caso 2D.

Quest'ultima equazione rappresenta la relazione fondamentale della peridinamica, ed esprime, per ogni punto materiale $\vec{X}_0 \in B$, il bilancio della quantità di moto.

Per poter risolvere l'equazione del moto, espressa dalla relazione (3.10), è necessario introdurre un modello costitutivo per le $\vec{t}(\vec{X}_0', \vec{X}_0, t)$ che sia funzione delle proprietà meccaniche macroscopiche del materiale e dello stato di deformazione del solido peridinamico. Per poter formulare questo modello costitutivo risulta necessario introdurre il concetto di *stato peridinamico*, che a sua volta richiede prima la definizione di altre grandezze caratteristiche della teoria peridinamica. Si consideri un generico punto materiale \vec{X}_0 , è possibile definire un *intorno* \mathcal{H}_{X_0} di tale punto come:

$$\mathcal{H}_{X_0} = \left\{ \vec{X}_0' \in \mathcal{B}, \|\vec{X}_0' - \vec{X}_0\| < \delta \right\} \quad (3.11)$$

Questo insieme racchiude, dunque, tutti i punti materiali \vec{X}_0' che si trovano all'interno di una sfera di raggio pari all'orizzonte δ , centrata sul punto materiale \vec{X}_0 . In modo analogo è possibile definire la *famiglia* di \vec{X}_0 come:

$$\mathcal{H} = \left\{ \vec{\xi} \in (\mathbb{R}^3 \setminus 0), (\vec{\xi} + \vec{X}_0) \in \mathcal{H}_{X_0} \right\} \quad (3.12)$$

Dove il generico vettore $\vec{\xi} \in \mathcal{H}$ viene definito come *legame* connesso a \vec{X}_0 . Si fa notare come \mathcal{H}_{X_0} contenga le coordinate lagrangiane dei punti nell'intorno di \vec{X}_0 , mentre \mathcal{H} contenga i vettori legame che collegano il punto materiale di riferimento \vec{X}_0 con tutti gli altri punti nel suo intorno.

Tornando alla definizione di un legame $\vec{\xi}$, questo può essere espresso anche come:

$$\vec{\xi} = \vec{X}'_0 - \vec{X}_0 \quad \forall (\vec{X}_0 \in \mathcal{B}, \vec{X}'_0 \in \mathcal{H}_{X_0}) \quad (3.13)$$

mentre, la sua immagine in una configurazione successiva, e dunque deformata, può essere espressa come:

$$\vec{\zeta} = \vec{X}'(\vec{X}'_0, t) - \vec{X}(\vec{X}_0, t) \quad \forall (\vec{X}_0 \in \mathcal{B}, \vec{X}'_0 \in \mathcal{H}_{X_0}), t \geq 0 \quad (3.14)$$

La differenza (vettoriale) tra il legame nella configurazione di riferimento $\vec{\xi}$ e la sua immagine nella configurazione deformata $\vec{\zeta}$ rappresenta dunque lo "spostamento" del legame stesso:

$$\vec{\eta} = \vec{\zeta} - \vec{\xi} \quad (3.15)$$

Ora che si dispone di tutte i concetti necessari, è possibile introdurre quello di stato peridinamico, il quale viene definito come una funzione in \mathcal{H} che associa ad un generico legame $\vec{\xi} \in \mathcal{H}$ un certo tensore di ordine m , che può trattarsi anche di una grandezza vettoriale ($m = 1$) o scalare ($m = 0$); matematicamente, si tratta dunque di una funzione del tipo:

$$\underline{A}(\vec{X}_0, t) \langle \vec{\xi} \rangle : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}_m \quad (3.16)$$

Dove $\underline{A}(\vec{X}_0, t) \langle \vec{\xi} \rangle$ è il simbolo utilizzato per indicare lo stato peridinamico \underline{A} di un generico legame $\vec{\xi}$, nel quale si esplicita la dipendenza dello stato peridinamico dal tempo e dal punto materiale associato al legame scelto.

Per la definizione stessa del legame $\vec{\xi}$ (Eq. (3.13)), per un generico stato peridinamico \underline{C} vale la relazione:

$$\int_{\mathcal{H}} \underline{C}(\vec{X}_0, t) \langle \vec{\xi} \rangle dV_{\xi} = \int_{\mathcal{H}_{X_0}} \underline{C}(\vec{X}_0, t) \langle \vec{X}'_0 - \vec{X}_0 \rangle dV' \quad (3.17)$$

Dove dV_{ξ} è il volumetto infinitesimo valutato sulla punta del vettore di legame $\vec{\xi}$, mentre dV' è il volumetto infinitesimo associato al punto materiale \vec{X}'_0 (ovvero la variabile "dummy" d'integrazione).

Per la funzione "stato peridinamico" è possibile definire anche una serie di operazioni matematiche, le quali, però, non risultano essere necessarie ai fini di questa tesi; per un approfondimento su tali operazioni si rimanda il lettore ai riferimenti [24] [29] [25] [14].

Usando il concetto appena introdotto di stato peridinamico, è possibile riscrivere la densità della forza di legame $\vec{t}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t)$ come:

$$\vec{t}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t) = \underline{T}(\vec{X}_0, t) \langle \vec{\xi} \rangle = \underline{T}(\vec{X}_0, t) \langle \vec{X}'_0 - \vec{X}_0 \rangle \quad (3.18)$$

Dove $\underline{T}(\vec{X}_0, t) \langle \vec{\xi} \rangle$ prende il nome di *force vector state*. Considerando l'Eq. (3.10), questa può essere riformulata inserendo i concetti appena descritti, ottenendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \rho(\vec{X}_0) \frac{d^2}{dt^2} \vec{X}(\vec{X}_0, t) = \vec{L}(\vec{X}_0, t) + \vec{F}(\vec{X}_0, t) \\ \vec{L}(\vec{X}_0, t) = \int_{\mathcal{B}} [\underline{T}(\vec{X}_0, t) \langle \vec{X}'_0 - \vec{X}_0 \rangle - \underline{T}(\vec{X}'_0, t) \langle \vec{X}_0 - \vec{X}'_0 \rangle] dV' \end{cases} \quad (3.19)$$

Questo sistema, valido sempre $\forall \vec{X}_0, \vec{X}'_0 \in \mathcal{B}, t \geq 0$, rappresenta le equazioni che governano la peridinamica, dove si può notare che il bilancio delle forze interne è imposto attraverso una relazione integrale (valutata in una regione finita di spazio di raggio δ) che, come già specificato, permette di evitare il problema dell'insorgenza delle singolarità. Per completare definitivamente il sistema, però, è necessario introdurre anche un modello costitutivo per il "force vector state" \underline{T} , il quale dovrà dipendere dalla deformazione del solido peridinamico, ed eventualmente da altre variabili. In base al modello scelto si distinguono tre possibili differenti riformulazioni della teoria peridinamica:

- *Bond-Based Peridynamics* - in questa formulazione, i vettori $\vec{t}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t)$ e $\vec{t}(\vec{X}_0, \vec{X}'_0, t)$ sono entrambi paralleli al vettore di posizione relativa nella configurazione deformata (ovvero $\vec{\zeta}$) e sono tra loro uguali in modulo, ma opposti nel verso.
- *Ordinary State-Based Peridynamics* - le "bond force density" \vec{t} sono parallele a $\vec{\zeta}$, ma tra loro possono avere moduli differenti.
- *Non-Ordinary State-Based Peridynamics* - i due vettori \vec{t} di una coppia di "bond force density" possono non essere paralleli tra loro e avere moduli differenti.

Si riporta in Fig. (3.3) un esempio grafico delle tre possibili tipologie di teorie peridinamiche.

Il modello peridinamico impiegato nel programma di simulazione di FSI utilizzato per questa tesi è quello della "Bond-Based Peridynamics", di conseguenza si propone una descrizione più approfondita solo di questa formulazione della peridinamica.

3.2.3 Modello *bond-based* della peridinamica

L'assunzione di base della "bond-based peridynamics" è che ogni legame sia caratterizzato dalla propria relazione costitutiva, la quale è indipendente da

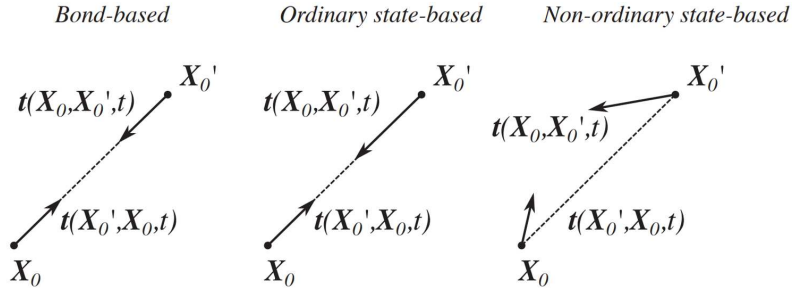


Figura 3.3: Rappresentazione grafica delle coppie di "bond force density" nelle varie tipologie di modelli peridinamici.

tutte le altre; questo tipo di modello del materiale viene detto *microelastico*. Detto ciò, possiamo andare a definire il modello costitutivo del "force vector state" \underline{T} come segue:

$$\underline{T}(\vec{X}_0, t) \langle \vec{\xi} \rangle = \frac{1}{2} \vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t) \quad (3.20)$$

Di conseguenza, dalla relazione (3.18), si ha che:

$$\begin{aligned} \vec{t}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t) &= \frac{1}{2} \vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t) \\ \vec{t}(\vec{X}_0, \vec{X}'_0, t) &= \frac{1}{2} \vec{f}(\vec{X}_0, \vec{X}'_0, t) = -\frac{1}{2} \vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

L'equazione di governo (3.19), in questo caso, può quindi essere riscritta come:

$$\rho(\vec{X}_0) \frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{X}_0, t) = \int_{\mathcal{B}} \vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t) dV' + \vec{F}(\vec{X}_0, t) \quad \forall \vec{X}_0 \in \mathcal{B}, t \geq 0 \quad (3.22)$$

Dove, dato che ogni legame ha una propria legge costitutiva indipendente dagli altri legami, il valore di $\vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t)$ dipende solo dal legame che collega i due punti materiali \vec{X}_0 e \vec{X}'_0 . La densità della forza di accoppiamento $\vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t)$ può essere espressa attraverso la seguente relazione, nella quale si mette in evidenza la sola dipendenza dai parametri del legame ad essa associato:

$$\vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t) = \vec{f}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = c_0 s(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \frac{\vec{\xi} + \vec{\eta}}{\|\vec{\xi} + \vec{\eta}\|} \lambda(\vec{\xi}, t) \quad (3.23)$$

Dove:

- $\lambda(\vec{\xi}, t)$ è un coefficiente che può essere uguale a 1 o a 0 a seconda che il legame considerato sia o meno attivo (come verrà meglio descritto nella sezione successiva (3.2.4)).

- $s(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ indica lo "stretch" del legame, ovvero:

$$s(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{\|\vec{\xi} + \vec{\eta}\| - \|\vec{\xi}\|}{\|\vec{\xi}\|} \quad (3.24)$$

- c_0 viene definito il cosiddetto *micromodulo del legame* e si tratta di un coefficiente per il quale è necessario introdurre un ulteriore modello costitutivo che dipenda in qualche modo dalle proprietà meccaniche macroscopiche del materiale considerato. L'equazione costitutiva di c_0 dipende dalla geometria e dalle condizioni di carico specifiche del problema in esame. Per il caso d'interesse di questa tesi, si può dimostrare che c_0 può essere scritto in funzione del modulo di Young E^7 e dell'orizzonte peridynamico δ :

$$c_0 = \begin{cases} \frac{9E}{\pi b \delta^3} & 2D \text{ plane stress} \\ \frac{48E}{5\pi b \delta^3} & 2D \text{ plane strain} \\ \frac{12E}{\pi \delta^4} & 3D \end{cases} \quad (3.25)$$

Dove, nei casi $2D$, con b si intende lo spessore del corpo nella direzione normale al piano. Per lo scopo di questa tesi si è scelto di considerare c_0 come uniforme e costante, ma se necessario è possibile introdurre nel modello del micromodulo anche un eventuale dipendenza dallo spazio e dal tempo.

Infine, si ritiene importante far notare una delle limitazioni principali della "bond-based peridynamics", ovvero la non dipendenza del micromodulo dal coefficiente di Poisson ν_s ⁸; si può infatti dimostrare che le Eq. (3.25) implicano intrinsecamente un certo valore per tale coefficiente, pari a $1/4$ nei casi $3D$ e $2D$ "plane strain"⁹, e pari a $1/3$ per il rimanente caso $2D$ "plane stress"¹⁰.

⁷detto anche *modulo elastico*, equivale al coefficiente angolare della retta che rappresenta la regione elastica del diagramma "stress-strain" di un dato materiale.

⁸coefficiente che tiene conto della deformazione di un corpo nella direzione ortogonale ad un carico, rispetto alla deformazione nella direzione del carico.

⁹in cui le deformazioni si sviluppano solo sul piano.

¹⁰in cui le tensioni agiscono solo sul piano.

3.2.4 Rottura dei legami nel modello peridinamico

Come già anticipato, uno dei vantaggi principali della modellazione del solido attraverso un approccio peridinamico è quello di tenere intrinsecamente conto della possibile insorgenza di fratture nel materiale. Tale danneggiamento viene incorporato a livello dei legami che interconnettono i vari punti materiali come una naturale evoluzione delle equazioni del moto e dei modelli costitutivi: l'assunzione di base, infatti, è che le cricche nascano a causa della rottura dei legami, la quale insorge quando lo "stretch" del legame stesso $s(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ (Eq. (3.24)) supera un certo valore limite s_0 , detto appunto *limit bond stretch*.

Per tale parametro s_0 è possibile ricavare una relazione costitutiva che dipenda dalle proprietà meccaniche macroscopiche del materiale, la quale avrà una formulazione diversa a seconda delle condizioni di carico e della geometria del problema considerato. In particolare, per il caso d'interesse di questa tesi, è possibile scrivere una relazione che lega il "limit bond stretch" alla "critical energy release rate" G_c (si veda sezione 2.1), al modulo di Young E e all'orizzonte peridinamico δ ; comparando, infatti, il lavoro necessario a rompere ogni legame per unità di superficie della frattura, calcolato nella visione peridinamica del solido, con la sua grandezza corrispondente nella meccanica classica (ovvero G_c) è possibile ricavare le seguenti relazioni:

$$s_0 = \begin{cases} \sqrt{\frac{4\pi G_c}{9E\delta}} & 2D \text{ plane stress} \\ \sqrt{\frac{5\pi G_c}{12E\delta}} & 2D \text{ plane strain} \\ \sqrt{\frac{5G_c}{6E\delta}} & 3D \end{cases} \quad (3.26)$$

È importante sottolineare che la rottura di un legame è un evento permanente ed irreversibile, il quale corrisponde alla formazione (o propagazione) di una cricca nella direzione ortogonale al versore del legame stesso. Per tenere traccia della rottura di un dato legame, si utilizza il coefficiente $\lambda(\vec{\xi}, t)$, già introdotto nella sezione precedente (si veda Eq. (3.23)), il quale è descritto dalla relazione:

$$\lambda(\vec{\xi}, t) = \lambda(s, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \leq s_0, \quad t > 0 \\ 0 & \text{se } s > s_0, \quad t > 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Con questo parametro, quindi, si va a "disattivare" la "pairwise force density" di un legame, nel momento in cui questo viene reciso; ancora una volta si sottolinea come, una volta che λ diviene nullo, non può più tornare ad essere uguale a 1. Questo modello peridinamico di danneggiamento del solido comporta automaticamente un indebolimento del materiale nei pressi della frattura, dato che la rottura di uno o più legami influenza direttamente l'equilibrio delle forze interne (i legami rotti, infatti, non sono più in grado di sostenere i carichi a trazione esterni).

È possibile definire il livello di danneggiamento locale, ovvero in un dato punto \vec{X}_0 del solido, attraverso il seguente parametro:

$$\Phi(\vec{X}_0, t) = 1 - \frac{\int_{\mathcal{H}_{X_0}} \lambda(\vec{\xi}, t) dV'}{\int_{\mathcal{H}_{X_0}} dV'} \quad (3.28)$$

Il quale rappresenta quanti legami sono rotti: se è nullo allora tutti i legami sono ancora integri, mentre se assume valore unitario allora ogni legame di \vec{X}_0 è stato reciso. In una visione discreta della teoria peridinamica, il livello di danneggiamento locale $\Phi(\vec{X}_0, t)$ può essere espresso come:

$$\Phi(\vec{X}_0, t) = 1 - \frac{n^\circ \text{ legami attivi al tempo } t}{n^\circ \text{ legami iniziali di } \vec{X}_0} \quad (3.29)$$

3.2.5 Discretizzazione del modello peridinamico

Per poter essere implementata in un simulatore numerico, la teoria peridinamica deve necessariamente essere discretizzata: per farlo si ripartisce la massa del solido in una serie finita di particelle materiali, dette *particelle peridinamiche*, le quali rappresentano una versione discreta dei punti materiali della teoria continua. Una particella materiale, dunque, è una piccola zona che circonda un punto materiale e che è centrata su quest'ultimo; ad ognuna di queste particelle viene associata una frazione finita del volume e della massa del solido complessivo.

Per il caso analizzato, si è scelto di discretizzare attraverso una semplice distribuzione cartesiana di N_p cubi materiali equidistanziati tra loro di lato Δ_s , i quali vengono identificati attraverso le coordinate di un nodo posto nel loro centroide; tale discretizzazione, pur essendo concettualmente molto semplice, permette di riprodurre in modo accurato anche geometrie molto complesse. Lo spazio tra i vari nodi è pari al lato del cubetto peridinamico; il rapporto tra l'orizzonte peridinamico δ e il lato Δ_s della particella peridinamica è indicato

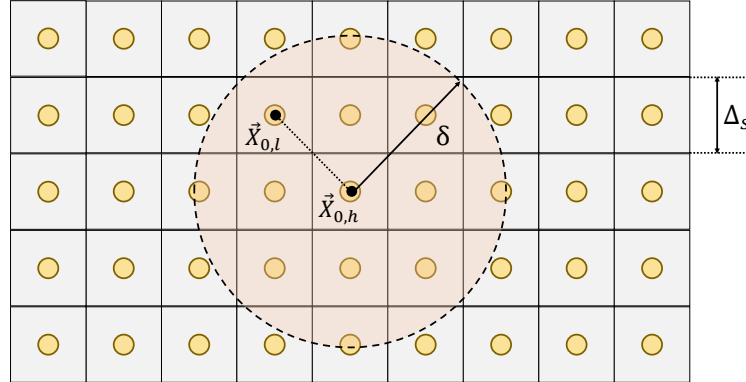


Figura 3.4: Esempio bidimensionale di discretizzazione del modello peridinamico.

con:

$$m = \frac{\delta}{\Delta_s} \quad (3.30)$$

In questa versione discreta della peridinamica, ad ogni particella materiale è associata la posizione lagrangiana $\vec{X}_{0,h}$, riferita alle coordinate geometriche del centroide della particella e con $1 \leq h \leq N_p$. Si riporta in Fig. (3.4) un esempio bidimensionale della discretizzazione appena introdotta. Nella versione discretizzata della peridinamica, inoltre, risulta conveniente modificare leggermente la definizione dell'intorno di $\vec{X}_{0,h}$ come:

$$\mathcal{H}_{X_{0,h}} = \left\{ \vec{X}_{0,l} \in \mathcal{B}, \|\vec{X}_{0,l} - \vec{X}_{0,h}\| < \delta + \frac{\Delta_s}{2} \right\} \quad (3.31)$$

Questo permette di tenere conto, tra le varie particelle $\vec{X}_{0,l}$ interne all'intorno di $\vec{X}_{0,h}$, anche di quelle particelle materiali che sono solo parzialmente contenute all'interno della sfera di raggio δ ; per queste particelle, però, bisogna considerare nel bilancio delle forze interne esclusivamente la loro frazione di volume che risulta essere effettivamente entro l'orizzonte peridinamico della particella h -esima di riferimento. Per tenere conto della frazione di volume utile al bilancio delle forze interne, si usa il *fattore di riduzione del volume* $\Gamma_{h,l}$, il quale rappresenta il rapporto tra il volume di $\vec{X}_{0,l}$ compreso nella sfera di raggio δ , e il suo volume complessivo. Nel caso tridimensionale non è possibile ricavare una formula analitica per $\Gamma_{h,l}$, il quale deve essere dunque valutato numericamente: si suddivide il cubo peridinamico in altri N^3 cubetti, definendo poi con N_i il numero di cubetti il cui centro dista meno di δ dalla

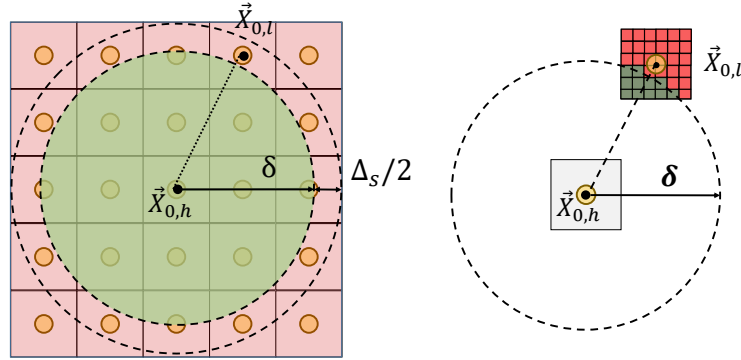


Figura 3.5: A sinistra: intorno, nella sua formulazione per la peridinamica discreta, della particella $\vec{X}_{0,h}$. A destra: rappresentazione grafica del fattore di riduzione del volume $\Gamma_{h,l}$; solo la parte verde del volume deve essere considerata per il bilancio delle forze interne.

particella di riferimento, una buona approssimazione del fattore di riduzione del volume è data da:

$$\Gamma_{h,l} = \frac{N_l}{N^3} \quad (3.32)$$

Una rappresentazione grafica di come viene valutato tale fattore è riportata in Fig. (3.5). Nella modellazione discretizzata della peridinamica "bond-based", le equazioni di governo per ogni particella materiale possono essere scritte come:

$$\rho_h(\vec{X}_{0,h}) \frac{d^2}{dt^2} \vec{X}_h(\vec{X}_{0,h}, t) = \sum_{l=1}^{N_h} \vec{f}_{h,l}(\vec{X}_{0,l}, \vec{X}_{0,h}, t) \Gamma_{h,l} \Delta V_l + \vec{F}_h + \vec{C}_h + \vec{D}_h \quad (3.33)$$

Dove con ΔV_l si intende il volume della particella materiale $\vec{X}_{0,l}$, che essendo un cubo è pari a Δ_s^3 , con $\vec{f}_{h,l}(\vec{X}_{0,l}, \vec{X}_{0,h}, t)$ la "pairwise force density" subita da $\vec{X}_{0,h}$ a causa di $\vec{X}_{0,l}$, con N_h il numero di $\vec{X}_{0,l} \in \mathcal{H}_{X_{0,h}}$ e dove la forza è stata suddivisa nei seguenti contributi:

- \vec{F}_h - rappresenta il generico campo di forze esterne per unità di volume.

- \vec{C}_h - rappresenta le forze, sempre per unità di volume, dovute al contatto o con altre particelle solide con cui però la particella di riferimento non ha alcun legame attivo, o con dei confini solidi del dominio.
- \vec{D}_h - rappresenta uno smorzamento interno dipendente dalla velocità relativa tra le varie coppie di particelle; introduce un elemento dissipativo nel moto di un solido peridinamico. Si tratta di una forza interna "auto-equilibrata" che, quindi, non va ad influenzare il moto rigido del solido.

3.2.6 Individuazione e tracciamento delle interfacce

Nel contesto lagrangiano della peridinamica discreta, dove un solido continuo viene rappresentato attraverso una serie di particelle materiali di dimensioni finite, non è affatto banale identificare quali di queste particelle costituiscono la superficie del corpo solido e quali il suo interno. Dei diversi approcci possibili, quello impiegato per questa tesi consiste nell'utilizzare dei "marker" lagrangiani che identifichino e traccino la superficie del solido nel tempo. Nella modellazione peridinamica si vanno dunque a scegliere, con un criterio prestabilito, un set di particelle materiali tra quelle con cui si è discretizzato il solido, le quali andranno a identificare l'interfaccia iniziale del solido stesso; in questo modo, si tiene facilmente traccia dell'evoluzione temporale della superficie iniziale semplicemente valutando le equazioni del moto delle particelle scelte per rappresentare l'interfaccia.

Un'altra problematica di cui tenere conto è rappresentata dalla possibilità, durante l'eventuale formazione di cricche sul solido, dell'insorgere di nuove interfacce del solido stesso; oltre alla superficie iniziale, dunque, è necessario tenere traccia di quelle particelle che andranno a formare la nuova interfaccia, le quali andranno aggiunte al set di marker lagrangiani. Per identificare le nuove interfacce è possibile implementare diversi algoritmi, l'idea di quello utilizzato per questa tesi viene riassunta nei seguenti passaggi principali:

1. si suddivide l'intorno $\mathcal{H}_{X_{0,h}}$ della particella da valutare in N_s settori.
2. ogni particella $\vec{X}_{0,l} \in \mathcal{H}_{X_{0,h}}$ viene associata ad uno di questi settori in base alla sua posizione attuale.
3. si scartano tutte le particelle $\vec{X}_{0,l}$ per le quali il legame con la particella da valutare è stato reciso.

4. se l'intorno $\mathcal{H}_{X_{0,h}}$ della particella da valutare $\vec{X}_{0,h}$ presenta un certo numero N_v di settori consecutivi vuoti, allora quest'ultima viene identificata come nuova superficie per il solido peridinamico.

La scelta di N_s ed N_v varia l'accuratezza dell'algoritmo di identificazione di nuove superfici; nel programma utilizzato si è scelto $N_s = 8$ e $N_v = 2$.

Oltre all'individuazione delle superfici del solido, risulta spesso utile identificare un versore normale a tali superfici; per farlo è possibile calcolare un versore normale approssimato \hat{n}_h , ottenuto dalla seguente relazione:

$$\begin{cases} \vec{n}_h = - \frac{\sum_{l=1}^{N_h} (\vec{X}_l - \vec{X}_h) \lambda_{h,l} \Gamma_{h,l} \Delta V_l}{\sum_{l=1}^{N_h} \lambda_{h,l} \Gamma_{h,l} \Delta V_l} \\ \hat{n}_h = \frac{\vec{n}_h}{\|\vec{n}_h\|} \end{cases} \quad (3.34)$$

Per definire anche dei versori tangenziali è sufficiente sceglierne arbitrariamente due che siano tra loro, e anche rispetto ad \hat{n}_h , ortogonali.

Un'ultima problematica da dover affrontare quando si parla di interfacce nella teoria peridinamica discreta è legata alla resistenza del solido nei pressi della sua superficie. Le particelle materiali sulla superficie, infatti, presentano per loro natura un intorno $\mathcal{H}_{X_{0,h}}$ almeno parzialmente vuoto (si veda Fig. (3.6)); avere un numero ridotto di legami (e di conseguenza di forze interne) con cui bilanciare localmente le forze esterne, porta ad un indebolimento del materiale sulla superficie. Tale indebolimento, però, è dovuto solo alla formulazione matematica del modello peridinamico e, almeno per quanto riguarda la superficie iniziale del solido, non corrisponde ad un vero fenomeno fisico. Per correggere tale effetto esistono diverse metodologie possibili [12], quella adottata per il programma impiegato per questa tesi consiste nell'irrobustire fittiziamente il materiale vicino alla sua superficie nominale, andando ad aumentare il micromodulo c_o dei legami che coinvolgono le particelle sull'interfaccia iniziale (così i "pochi" legami dei punti sulla superficie saranno complessivamente resistenti come i legami di un punto all'interno del solido). Tale incremento del micromodulo è ottenuto andando a moltiplicare a tutte le "pairwise density function" dei legami delle particelle materiali superficiali un coefficiente $\gamma_{h,l}$, definito dalla relazione:

$$\gamma_{h,l} = \frac{2V_0}{V_{\mathcal{H},h} + V_{\mathcal{H},l}} \quad (3.35)$$

Dove le varie grandezze sono:

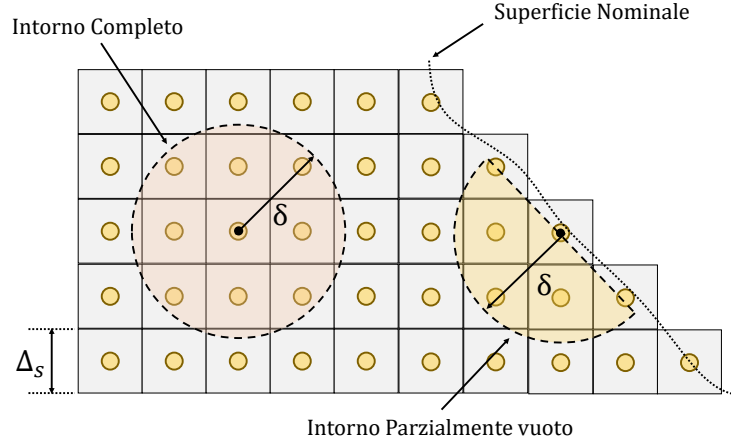


Figura 3.6: Rappresentazione grafica del problema di indebolimento fittizio del materiale nei pressi della superficie.

- V_0 - volume di un ipotetico intorno completamente pieno, pari dunque a:

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi\delta^3 \quad (3.36)$$

- $V_{\mathcal{H},h}$, $V_{\mathcal{H},l}$ - i volumi effettivamente pieni degli intorni delle particelle $\vec{X}_{0,h}$ e $\vec{X}_{0,l}$; tale volume viene calcolato, prendendo come esempio $\vec{X}_{0,h}$, nel modo seguente:

$$V_{\mathcal{H},h} = \sum_{i=1}^{N_h} \Gamma_{h,i} \Delta V_i \quad (3.37)$$

Si sottolinea che il coefficiente di irrobustimento $\gamma_{h,l}$ viene valutato, per ogni legame, nella configurazione di riferimento e viene poi imposto costante nel tempo.

3.3 Terzo modulo - Sincronizzazione e Accoppiamento

Lo scopo del terzo e ultimo modulo principale del programma di simulazione è quello di garantire il corretto passaggio di informazioni tra il risolutore della fase fluida e quello del solido peridinamico; l'accoppiamento delle due fasi deve avvenire sia dal punto vista temporale che dal punto di vista spaziale. Per quanto riguarda l'accoppiamento temporale, i risolutori delle due fasi (solido

e fluido) hanno due valori differenti del massimo step temporale stabile per l'integrazione, di conseguenza ad ogni "passo" di uno dei due risolutori sono associati diversi step dell'altro. Nel caso d'interesse, la condizione di stabilità del risolutore perid dinamico richiede un massimo step temporale decisamente più piccolo rispetto a quello richiesto dal risolutore fluido, di conseguenza il programma deve tenere conto che per ogni integrazione del fluido ci vogliono diversi step di perid dinamica, in modo da sincronizzare le due soluzioni. Per quanto riguarda l'accoppiamento spaziale, ovvero l'imposizione delle condizioni al contorno sull'interfaccia solido-fluido, è possibile utilizzare diverse strategie; nelle sottosezioni successive si riassumono i concetti principali della strategia implementata nel programma utilizzato per questa tesi, ovvero la combinazione dei cosiddetti *immerse boundary method* (IBM) [2] [4] [19] e *normal probe method* [27].

3.3.1 IBM - *Immerse Boundary Method*

Per avere un corretto passaggio di informazioni tra solido e fluido è innanzitutto necessario "far conoscere" al fluido la posizione dell'interfaccia del corpo solido, cosa che si traduce nel dover imporre la condizione di aderenza¹¹ del fluido viscoso sull'interfaccia. Un possibile approccio è quello di generare, per il risolutore fluido, una mesh che si adatti in ogni istante alla posizione attuale della superficie del solido; questo permettere di imporre l'aderenza in modo molto semplice, andando ad imporre direttamente il valore di alcune grandezze sui nodi che coincidono con l'interfaccia. Tuttavia, il continuo aggiornamento e riadattamento della mesh comporta un costo computazionale davvero molto elevato. Un'altra strategia è invece quella di utilizzare una mesh non conforme al solido (Fig. (3.7)), ovvero una griglia computazionale scelta all'istante iniziale, e mantenuta fissa ad ogni step di integrazione; questa seconda macrocategoria di possibili approcci prende il nome di *Fixed - Eulerian - Method*. In particolare, nel programma impiegato per questa tesi, la soluzione scelta è quella di impiegare il cosiddetto IBM, il quale appartiene proprio alla "famiglia" dei metodi a griglia fissa; nell'*Immerse Boundary Method* si elimina dunque il costo elevato del "re-gridding" e la condizione di

¹¹l'aderenza del fluido viscoso consiste di due condizioni: "nessun slittamento" e "nessuna penetrazione" del fluido rispetto al solido; tali condizioni comportano che la velocità relativa tra solido e fluido sull'interfaccia sia nulla.

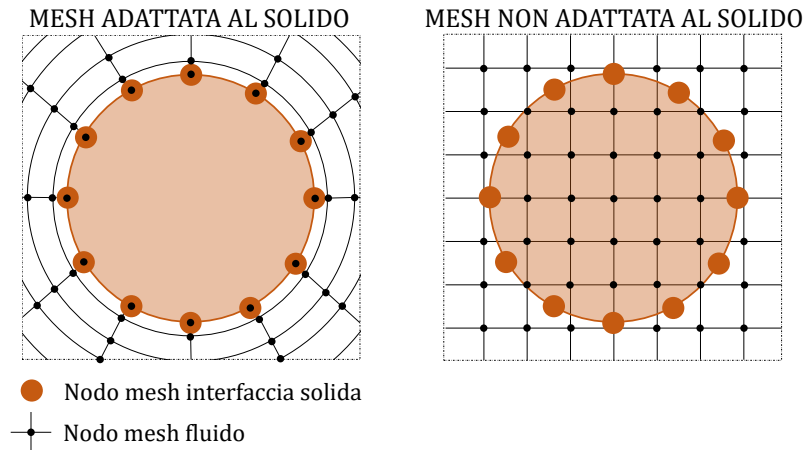


Figura 3.7: Confronto tra una mesh adattata alla superficie del solido e una mesh non adattata.

aderenza fluido-interfaccia viene imposta introducendo un campo di forze per unità di massa \vec{q} che simuli, per il fluido, la presenza della superficie del corpo immerso. Se la spaziatura della griglia fluida è abbastanza piccola nei pressi dell'interfaccia (condizione già necessaria per avere una buona simulazione DNS 3.1.1), questo metodo permette di rappresentare in modo abbastanza accurato la presenza della superficie sommersa, anche se ovviamente in modo meno preciso rispetto ad una griglia solidale al solido. Anche per l'imposizione di questo campo di forze \vec{q} esistono diversi approcci possibili, i quali possono essere racchiusi in due gruppi principali:

- *continuous forcing approach* - consiste nell'introdurre il campo di forze \vec{q} direttamente nelle equazioni continue che governano il campo fluido, e andare successivamente a discretizzare il tutto sui nodi della griglia computazionale.
- *discrete forcing approach* - con questo approccio prima si vanno a discretizzare sui nodi le equazioni di governo della fase fluida e successivamente vi si aggiunge la formulazione discreta di \vec{q} per imporre la condizione di aderenza.

Nel programma impiegato il campo forzante \vec{q} è introdotto a livello discreto ("discrete forcing approach"), e il giusto valore da imporre ad ogni istante viene calcolato con uno schema iterativo che prende il nome di *multi direct forcing* [28]. Le equazioni di governo del fluido incomprimibile (Eq. (1.21)),

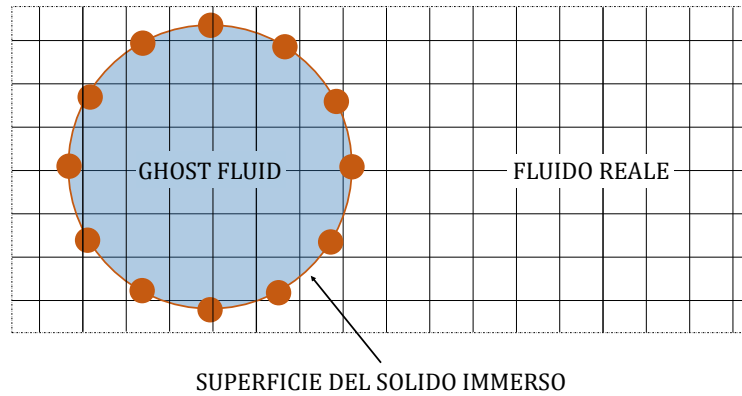


Figura 3.8: Esempio grafico del problema del "ghost fluid" per il metodo IBM.

nei nodi vicino al confine solido-fluido, diventano:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{q} \end{cases} \quad (3.38)$$

Utilizzare una mesh fissa, pur riducendo di molto il costo computazionale, comporta l'insorgere di alcune problematiche "collaterali":

- per prima cosa, avendo una griglia non conforme al solido immerso, alcuni dei nodi che la compongono saranno in una regione di spazio che in realtà sarebbe occupata dal solido stesso; il campo fluido sarà dunque formato da una serie di nodi che corrispondono ad un "fluido reale", e da un altro insieme di nodi che corrispondono invece ad un cosiddetto *ghost fluid* (Fig. (3.8)), ovvero quella parte del campo fluido che nella realtà sarebbe occupata dal solido. I nodi associati a questo "fluido fantasma", ovvero un fluido fittizio contenuto all'interno del volume delineato dalla superficie del solido, possono variare nel tempo con lo spostarsi e deformarsi dell'interfaccia. Introdurre un algoritmo che tenga conto di quali nodi corrispondano al ghost fluid richiederebbe un alto costo computazionale che, almeno in parte, andrebbe a ridurre il vantaggio di impiegare una mesh fissa; di conseguenza, ipotizzando che il volume occupato dal solido sia relativamente piccolo rispetto al dominio totale, risulta più conveniente risolvere il campo fluido in ogni nodo, anche quelli associati al fluido fittizio.

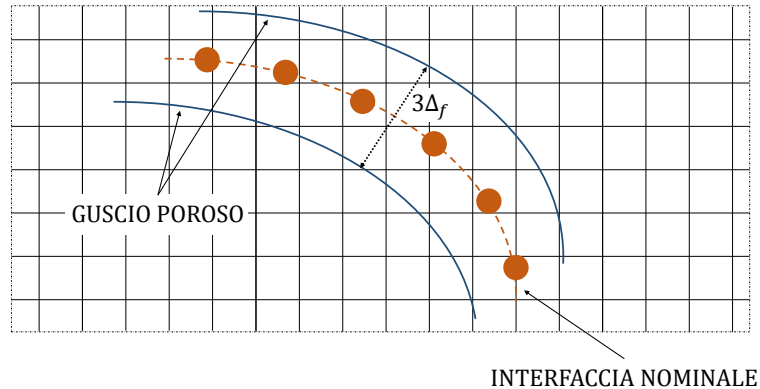


Figura 3.9: Guscio poroso di "fluido solidificato" nel metodo IBM.

- a causa della discretizzazione, non è possibile imporre perfettamente la posizione della superficie del solido immerso nel campo fluido; nella rappresentazione discreta, la sottile interfaccia, che idealmente è rappresentata da una linea monodimensionale, viene sostituita da un sottile "guscio" poroso di "fluido solidificato". Questo "guscio" è centrato sull'interfaccia nominale e, ipotizzando che la spaziatura Δ_f della griglia fluida sia uguale in ogni direzione, ha uno spessore di $3\Delta_f$ (Fig. (3.9)). Questo effetto comporta un'alterazione nella dimensione effettiva del corpo immerso, andando anche a modificare le forze fluidodinamiche che questo scambia con il fluido; in particolare, considerando che il fluido di interesse è quello "reale" e non il ghost fluid interno al solido, il corpo immerso risulta più grande di quanto sia realmente. Tale effetto può essere mitigato ritraendo fittiziamente verso l'interno la superficie del solido di un certo valore d_r , il quale deve essere ricavato sperimentalmente e che per questa tesi è stato imposto pari a $0.5\Delta_f$.

Riassumendo, il metodo IBM permette di imporre al campo fluido la presenza dell'interfaccia con il solido, grazie ad una forzante aggiuntiva \vec{q} che garantisce la condizione di aderenza. Per valutare però le forze di reazione che il fluido esercita sul solido non è possibile integrare semplicemente questa forzante, dato che il valore di \vec{q} è calcolato in modo che imponga l'aderenza sia al fluido reale all'esterno del solido, sia al ghost fluid fittizio che si trova all'interno; separare i contributi del fluido reale e di quello "fantasma" non è semplice, e per valutare le forze fluidodinamiche subite dal solido si preferisce adottare una strategia diversa. Delle diverse soluzioni possibili per valutare l'azione

del campo fluido sul corpo immerso si è scelto di affiancare al metodo IBM il cosiddetto *normal probe method*, meglio descritto nella sezione successiva.

3.3.2 Calcolo degli stress fluidodinamici sulla superficie del solido - *Normal Probe Method*

Il normal probe method, affiancato ad un metodo IBM, consente di approssimare in modo abbastanza accurato le forze superficiali che il fluido esercita su di un generico corpo immerso; per calcolare tali forze si va ad utilizzare una "sonda"¹² localmente normale alla superficie del solido, lungo la quale si vanno a valutare i gradienti delle grandezze caratteristiche del fluido, quali pressione e campo di velocità, con cui è poi possibile computare gli sforzi viscosi e l'effetto della pressione idrodinamica. Per poter impiegare questo metodo è necessario conoscere a priori le direzioni normali e tangenziali alla superficie in ognuno dei nodi in cui questa viene discretizzata; tali versori vengono ricavati seguendo il procedimento già illustrato nella sezione 3.2.6 (in particolare, per il versore normale, si faccia riferimento alla Eq.(3.34)). Noti i tre versori è possibile definire un sistema di riferimento locale (η, ξ, ζ) in cui le direzioni sono concordi rispettivamente al versore normale, al versore tangenziale e a quello binormale. Per ogni punto lagrangiano $\vec{X}_h(\vec{X}_{0,h}, t)$ appartenente alla superficie immersa discretizzata, si manda un sensore fittizio di lunghezza $\Delta l = 2\Delta_f$ nella direzione normale η ; idicando con T la punta della sonda matematica e con R la sua base, si va poi a generare uno "stencil" cubico $2 \times 2 \times 2$ (in x, y, z) con spaziatura Δ_f (Fig. (3.10)). Una volta definito lo stencil, lo si va ad utilizzare per valutare, mediante differenze finite, i valori dei gradienti di pressione $\vec{\nabla}P|_T$ e di velocità $\vec{\nabla}\vec{u}|_T$. Il prossimo passo è quello di calcolare il gradiente di pressione; per farlo si va innanzitutto a "misurare" la pressione $P|_T$ sulla punta della sonda, e poi si va a scrivere la pressione alla base $P|_R$ come:

$$P|_R = P|_T + \frac{1}{2} \left[\frac{\delta P}{\delta \eta} \Big|_R + \frac{\delta P}{\delta \eta} \Big|_T \right] \Delta l \quad (3.39)$$

¹²con sonda si intende non un sensore reale, ma uno strumento matematico impiegato per il normal probe method.

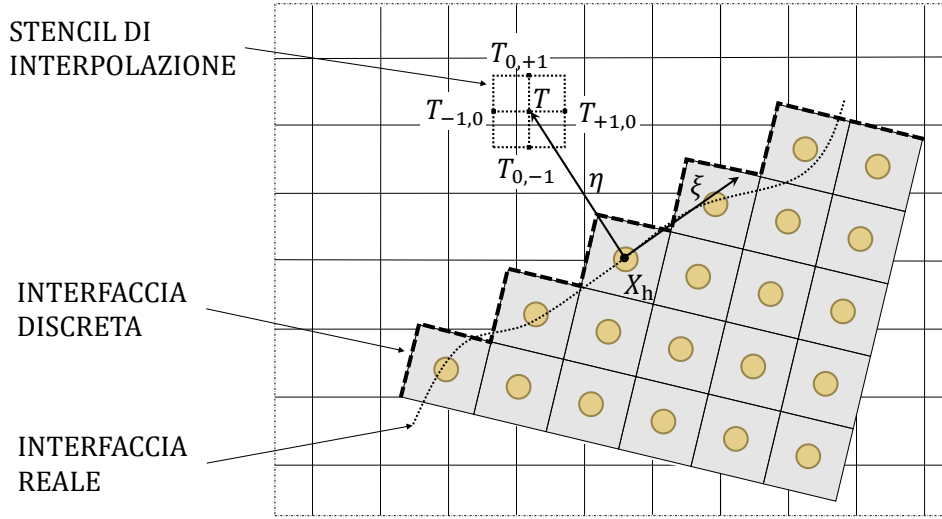


Figura 3.10: Schema bidimensionale del sistema di coordinate locali e dello stencil di interpolazione per il normal probe method.

Dove, per aderenza:

$$\frac{\delta P}{\delta \eta} \Big|_R \approx \frac{D\vec{u}}{Dt} \Big|_R \cdot \hat{n}_h \approx \frac{d\vec{U}_h}{Dt} \cdot \hat{n}_h \quad (3.40)$$

Mentre, avendo già valutato $\vec{\nabla} P|_T$ sullo stencil:

$$\frac{\delta P}{\delta \eta} \Big|_T = \vec{\nabla} P|_T \cdot \hat{n}_h \quad (3.41)$$

Per computare gli sforzi viscosi alla base R si va sempre ad utilizzare il gradiente del campo di velocità $\vec{\nabla} \vec{u}|_T$ valutato sulla cima della sonda; questo procedimento si basa sull'ipotesi che il campo di velocità del fluido vari linearmente nei pressi della superficie solida, ipotesi che può essere ritenuta accettabile se la mesh fluida è abbastanza fitta (condizione che, come descritto nella sezione 3.1.1, è già imposta dall'impiego di una simulazione di tipo DNS). Con queste condizioni, le derivate lungo la normale locale delle componenti \vec{u}_η , \vec{u}_ξ , \vec{u}_ζ della velocità, valutate alla base R , possono essere scritte come:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \vec{u}_\eta}{\delta \eta} \Big|_R &= \vec{\nabla} \vec{u}|_T \cdot \hat{n} \cdot \hat{n} \\ \frac{\delta \vec{u}_\xi}{\delta \eta} \Big|_R &= \vec{\nabla} \vec{u}|_T \cdot \hat{t} \cdot \hat{n} \\ \frac{\delta \vec{u}_\zeta}{\delta \eta} \Big|_R &= \vec{\nabla} \vec{u}|_T \cdot \hat{b} \cdot \hat{n} \end{aligned} \quad (3.42)$$

dove $(\hat{n}, \hat{t}, \hat{b})$ sono rispettivamente il versore normale, tangenziale e binormale del sistema di riferimento locale. Dalle derivate delle velocità è possibile computare gli sforzi viscosi come:

$$\begin{aligned}\tau_\eta &= \mu \frac{\delta \vec{u}_\eta}{\delta \eta} \Big|_R - P \Big|_R \\ \tau_\xi &= \mu \frac{\delta \vec{u}_\xi}{\delta \eta} \Big|_R \\ \tau_\zeta &= \mu \frac{\delta \vec{u}_\zeta}{\delta \eta} \Big|_R\end{aligned}\tag{3.43}$$

tali sforzi vengono poi ruotati nel sistema di riferimento "universale"¹³ attraverso una matrice di rotazione:

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{n}_x & \hat{t}_x & \hat{b}_x \\ \hat{n}_y & \hat{t}_y & \hat{b}_y \\ \hat{n}_z & \hat{t}_z & \hat{b}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_\eta \\ \tau_\xi \\ \tau_\zeta \end{bmatrix}\tag{3.44}$$

Nelle equazioni che governano la peridinamica (Eq. (3.33)) vanno inserite le forze per unità di volume esercitate dal fluido sul solido, le quali possono essere valutate attraverso la relazione:

$$\vec{F}_h = \vec{\tau}_h \frac{A_h}{\Delta_s^{\frac{2}{3}}}\tag{3.45}$$

dove Δ_s è il lato del cubetto peridinamico, mentre A_h indica la superficie esposta al fluido della h-esima particella; il valore di A_h viene valutato in modo preciso per ogni particella che compone la superficie iniziale, mentre per tutte le particelle che, a causa dei danneggiamenti, andranno a formare nuove superfici, viene fissata pari a $\Delta_s^{\frac{2}{3}}$ (dopo che viene formata la nuova area esposta).

¹³ovvero il sistema di riferimento associato al dominio completo.

Capitolo 4

Caso in esame e Obiettivo d'interesse

Come già introdotto, l'interazione tra un campo fluido e una generica struttura solida è un problema molto complesso che si riscontra in una vasta gamma di applicazioni pratiche. Il caso analizzato per la realizzazione di questa tesi consta di una serie di fibre¹ solide elastiche immerse in un fluido turbolento omogeneo ed isotropo; lo scopo dell'analisi effettuata è quello di andare a studiare e caratterizzare il comportamento del sistema considerato nei confronti della "nascita" e propagazione di un eventuale cricca sul solido immerso. La caratterizzazione del fenomeno di rottura in un problema di FSI può essere utile per molti ambiti, in particolare, per quanto riguarda il caso in esame, un'applicazione reale potrebbe essere quella della rottura delle fibre plastiche (o meglio microplastiche²) disperse negli oceani; tale fenomeno, infatti, non è ancora stato ben caratterizzato da un modello predittivo affidabile e, con gli studi effettuati finora, non è ben chiaro il comportamento del sistema che porta alla rottura di tali fibre. Si ritiene importante sottolineare, però, come i parametri utilizzati per la simulazione della FSI considerata, i cui valori saranno riportati nella sezione seguente, non corrispondano al caso reale della plastica nei mari. Questo perché l'analisi effettuata per questa tesi è ancora a livello fondamentale: non sono d'interesse i valori delle singole grandezze

¹il termine fibra si riferisce alla forma caratteristica del solido considerato, il quale si presenta con una forma allungata e filamentosa.

²si definiscono come microplastiche quei frammenti di materiale polimerico la cui dimensione è generalmente compresa tra il micrometro e il millimetro.

coinvolte nel sistema, quali il valore di uno stress o di una deformazione, ma l'interesse dello studio effettuato coinvolge principalmente la caratterizzazione della rottura di una fibra e del fenomeno che porta a tale danneggiamento. I parametri usati, quindi, rappresentano un caso più "accademico" che reale, ma ovviamente sono stati attentamente scelti in modo che i risultati siano comunque applicabili ad un caso reale, non tanto nel valore numerico delle grandezze, quanto più nel comportamento complessivo del sistema. Il motivo per cui i parametri scelti non possono coincidere con il caso reale delle microplastiche è di natura computazionale: impiegare modulo di Young e numero di Reynolds prossimi al caso reale comporterebbe dei tempi di calcolo eccessivi, che non si addicono ad un'analisi ancora di tipo fondamentale, la quale richiede di effettuare numerose simulazioni in serie. I valori scelti per l'analisi rappresentano dunque un "trade-off" tra l'avvicinarsi il più possibile alla realtà e il mantenere il tempo di simulazione (almeno durante questa analisi preliminare) entro un limite ragionevole.

Date queste premesse, si riporta nella sezione successiva l'effettiva struttura del problema di FSI considerato, così come i valori delle grandezze caratteristiche del sistema e la metodologia impiegata per l'analisi effettuata.

4.1 Ipotesi di Lavoro

Prima di descrivere come è stato modellato il problema e la metodologia adottata, è opportuno introdurre quelle che sono le ipotesi fondamentali su cui si basa il lavoro svolto:

1. Le fibre analizzate vengono considerate come perfettamente elastiche, ovvero non si tiene conto di alcuna deformazione plastica; per questo motivo tali fibre possono essere viste come dei solidi fragili ("brittle materials" 2).
2. Si ipotizza che in ogni istante e ad ogni scala il fluido rispetti la condizione di incomprimibilità (descritta nella sezione 1.1.1).
3. Si ipotizza che il campo turbolento in esame sia localmente omogeneo e localmente isotropo, in accordo con la teoria di Kolmogorov introdotta nella sezione 1.2.1.

Grandezze caratteristiche con cui adimensionalizzare

Parametro	Valore
Lunghezza caratteristica	$L_\infty = 0.1 \text{ m}$
Velocità caratteristica	$U_\infty = 1.5 \text{ m/s}$
Densità caratteristica	$\rho_\infty = 1 \text{ kg/m}^3$
Numero di Reynolds	$Re = 150$

Tabella 4.1: Grandezze caratteristiche con cui si adimensionalizzano tutti i parametri della simulazione.

4.2 Metodologia di Analisi

Si elencano di seguito le principali caratteristiche del modello computazionale utilizzato per simulare e caratterizzare la rottura delle fibre nel problema di FSI precedentemente introdotto:

- Per ogni simulazione si va ad analizzare il comportamento di 10 fibre distinte, le quali interagiscono sia con il fluido, sia tra loro (nel caso di urti tra i vari corpi).
- L'intero sistema viene adimensionalizzato attraverso delle grandezze caratteristiche, riportate in Tab. (4.1). L'adimensionalizzazione di tutte le grandezze coinvolte permette di ampliare la rosa di applicazioni reali dei risultati ottenuti, potendo sfruttare i concetti di similitudine geometrica e dinamica (introdotti nella sezione 1.1.2).
- Ogni fibra è caratterizzata dagli stessi parametri adimensionali, riportati in Tab. (4.2).
- Per la discretizzazione di ogni fibra si impiegano 7752 particelle peridamiche, per un totale di 77520 nodi complessivi.
- Per la mesh del campo fluido si impiega una griglia tridimensionale di spaziatura uguale in ogni direzione, composta da $256 \times 256 \times 256$ nodi.
- il dominio di simulazione $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ si estende ugualmente in ogni direzione cartesiana ed è periodico, ovvero quando una fibra solida raggiunge il confine "rientra" dal lato opposto; si fa notare che è indispensabile tenere conto di tale effetto nel calcolo della deformazione della fibra.

Parametri adimensionalizzati della fibra

Parametro	Valore
Lunghezza	$L/L_\infty = 1$
Diametro	$d/L_\infty = 0.1$
Densità	$\rho/\rho_\infty = 800$
Coefficiente di Poisson	$\nu_s = 0.25$
Modulo di Young	$E/(\rho_\infty U_\infty^2) = 4444.45$
Critical energy release rate	$G_c/(\rho_\infty U_\infty^2 L_\infty) = 0.5279$
Stretch limite di rottura	$s_0 = 0.07$

Tabella 4.2: Parametri adimensionalizzati caratteristici di ogni fibra solida.

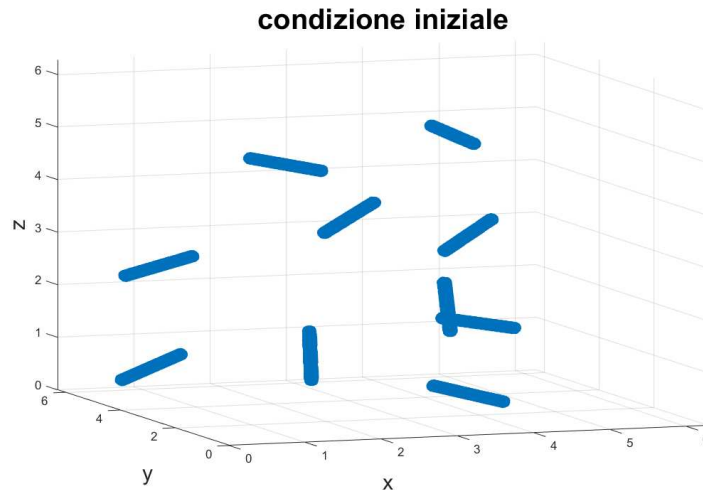


Figura 4.1: Rappresentazione della configurazione iniziale del problema analizzato.

Per poter meglio comprendere l'ambiente di lavoro, si riporta in Fig. (4.1) una rappresentazione della configurazione iniziale del sistema; si può notare come, all'inizio della simulazione, le fibre si trovino nella loro configurazione indeformata.

4.2.1 Calcolo del tensore degli stress

Per poter valutare il tensore degli stress in ognuno dei nodi che compongono la fibra, in accordo con la teoria peridinamica impiegata per la sua modellazione,

è possibile utilizzare la seguente relazione:

$$\vec{\sigma}(\vec{X}_h) = \frac{1}{2V_p} \sum_{\vec{X}_l \in \mathcal{H}_{X_h}} \vec{F}(\vec{X}_l, \vec{X}_h) \times (\vec{X}_l - \vec{X}_h) \quad (4.1)$$

dove con \times si indica un prodotto tensoriale, con V_p si rappresenta il volume della particella peridinamica (nell'ipotesi che sia uguale per ogni nodo), mentre con $\vec{F}(\vec{X}_l, \vec{X}_h)$ si intende la forza vettoriale d'interazione tra il nodo considerato \vec{X}_h e la generica particella \vec{X}_l nel suo intorno. Questa forza \vec{F} può essere calcolata come:

$$\vec{F}(\vec{X}_l, \vec{X}_h) = \vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t) V_{p,h} (V_{p,l} \Gamma_{h,l}) \quad (4.2)$$

dove $\vec{f}(\vec{X}'_0, \vec{X}_0, t)$ è la pairwise force density definita dall'Eq. (3.23), $V_{p,h}$, $V_{p,l}$ i volume delle due particelle coinvolte e $\Gamma_{h,l}$ la frazione di volume definita dall'Eq. (3.32). Per la dimostrazione dell'Eq. (4.1) si rimanda a [23].

Con il metodo appena descritto è dunque possibile ricavare il tensore delle tensioni in ogni punto discreto della fibra; tale tensore però, composto da 9 entrate di cui 6 indipendenti, risulta complesso da analizzare e raffigurare in dei grafici. Per questo motivo si è scelto di andare a valutare uno stress equivalente che fosse più facilmente rappresentabile e, di conseguenza, più semplice da analizzare; dopo alcuni test, si è scelto di utilizzare il criterio di Von Mises [21] [13], il quale permette di definire una tensione equivalente che tenga contemporaneamente conto di tutte le componenti del tensore, la quale viene valutata attraverso la relazione:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \quad (4.3)$$

Seppur l'utilizzo di questa tensione equivalente porti ad un'inevitabile perdita di informazioni, permette di poter rappresentare e analizzare in modo più semplice ed immediato l'effetto complessivo del tensore degli stress in ogni punto della fibra. Per migliorare la comprensione del campo delle tensioni, si va a modificare il criterio sopracitato ottenendo il cosiddetto *signed Von Mises Stress* [16]: questo stress equivalente è in modulo uguale a quello ottenuto con l'Eq.(4.3), ma gli viene associato un segno positivo o negativo a seconda che il campo di tensione in quel punto sia, rispettivamente, di trazione (segno +) o di compressione (segno -).

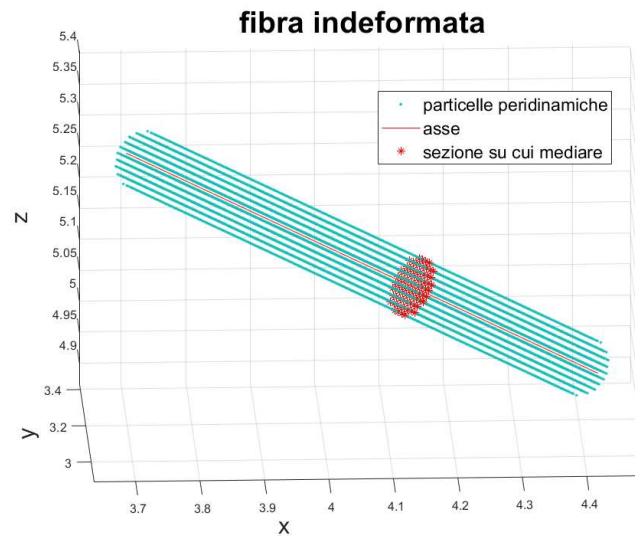


Figura 4.2: Rappresentazione grafica di una delle sezioni in cui è suddivisa la fibra discretizzata.

4.2.2 Media sulle sezioni

Per poter avere una rappresentazione più chiara ed immediata, alcuni dei risultati ottenuti (come il livello di danneggiamento del solido peridinamico) sono stati mediati sulle varie sezioni di una fibra; in questo modo è possibile realizzare dei grafici che mostrino l'andamento di una data grandezza man mano che ci si sposta lungo l'asse della fibra stessa. In un ambiente discreto come quello della peridinamica, in cui il focus è sulle singole particelle più che sul corpo macroscopico che compongono, andare ad individuare quali punti costituiscano le varie sezioni non è banale. Come prima cosa è necessario andare ad individuare l'asse della fibra stessa: per farlo si ricorre ad un algoritmo che permette di valutare la retta di regressione lineare che, per sua definizione, si trova alla minima distanza da ognuna delle particelle peridinamiche che compongono una fibra. Una volta individuata tale retta, o meglio segmento di retta lungo quanto la fibra stessa, è possibile suddividerlo in N_L piani ortogonali alla retta stessa, i quali saranno proprio le sezioni in cui si andrà a suddividere la fibra; per ognuno di questi piani si va a valutare la distanza di ogni nodo che compone la fibra, e si tiene traccia di tutti quei punti la cui distanza dal piano rientra al di sotto di un certo valore arbitrario d_{check} . Questo procedimento viene effettuato nella configurazione iniziale, ovvero indeformata, di ogni fibra e permette di tenere traccia dell'evoluzione delle varie sezioni man mano che la fibra trasla, ruota e si deforma. Scegliendo il valore

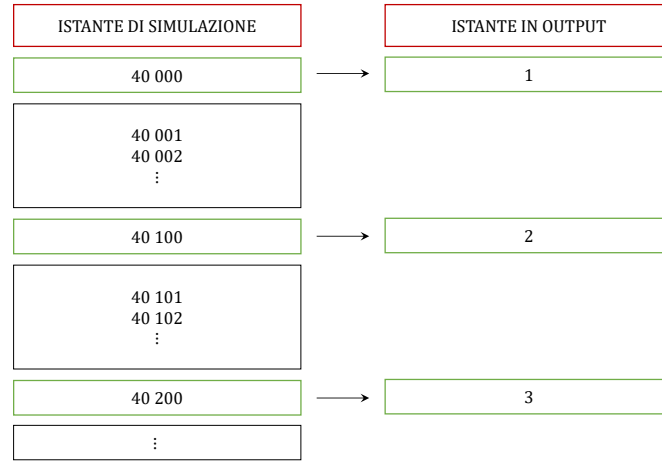


Figura 4.3: Relazione tra istanti di simulazione e istanti dei dati in uscita.

di N_L in modo che sia pari al numero di particelle peridinamiche lungo l'asse della fibra, è possibile suddividerne i punti in modo che ogni nodo appartenga in modo univoco ad una sola delle sezioni in cui è stata suddivisa (per questa tesi si ha $N_L = 200$ e $d_{check} = 1/N_L$). In Fig.(4.2) si riporta un esempio grafico di una delle fibre analizzate, dove si può apprezzare, evidenziata in rosso, una delle sezioni in cui è stata suddivisa la fibra stessa.

4.2.3 Tempo di simulazione e di output

Come ogni altro parametro della simulazione, anche il tempo viene adimensionalizzato dividendolo per un tempo caratteristico definito da:

$$t_\infty = \frac{L_\infty}{U_\infty} \quad (4.4)$$

Vi è però una differenza tra gli istanti della simulazione e quelli in output: l'effettivo andamento temporale del sistema è discretizzato in una serie di istanti che vengono definiti "di simulazione", i quali rappresentano tutti gli istanti in cui il simulatore risolve l'andamento del sistema. Il cosiddetto "tempo di output", invece, è composto da tutti quegli istanti in cui il simulatore fornisce i risultati, appunto, in output. La simulazione effettuata, complessivamente, consta di 50 001 istanti di simulazione (da 0 a 50 000), ma, dato che dai test effettuati si riscontra un danneggiamento delle fibre solo dopo l'istante 40 000, i risultati su cui si concentra l'analisi più dettagliata comprendono solo gli istanti dal 40 000 (che rappresenta quindi l'istante 1 di output) al 50 000. Un ulteriore differenza è che il simulatore fornisce un risultato in out-

put ogni 100 istanti simulati, di conseguenza i dati in "uscita" presentano una risoluzione temporale inferiore rispetto a quella effettivamente simulata; uno schema esemplificativo del legame tra i due sistemi temporali è riportato in Fig. (4.3). Questa distinzione, pur riducendo la risoluzione, è necessaria per ridurre il tempo computazionale del programma e per mantenere "gestibile" il volume di dati da analizzare. Il simulatore, infatti, impiega comunque un certo tempo a salvare i risultati da fornire in uscita; inoltre, se si avesse un rapporto 1:1 sui tempi di simulazione e output, e se i due condividessero anche lo stesso istante iniziale, il volume del pacchetto di dati in uscita raggiungerebbe all'incirca i 29 TB (TeraBytes).

Capitolo 5

Risultati ottenuti

Per una maggiore chiarezza espositiva, i risultati ottenuti sono stati raggruppati in due macrocategoria: la prima riguarda lo studio del danneggiamento delle varie fibre, mentre la seconda riporta un'analisi degli stress interni sulle fibre confrontati con le forze esterne applicati sul solido dal fluido.

5.1 Danneggiamento delle Fibre

Delle dieci fibre simulate, solo quattro vanno incontro a fenomeni di danneggiamento e, successivamente, di rottura, ovvero le fibre 1, 6, 7 e 9; per distinguere meglio i diversi comportamenti delle fibre, da adesso ci si riferirà con il termine "danneggiamento" alla nascita e propagazione di una cricca, che non comporta necessariamente la rottura in più parti separate della fibra, mentre con il termine "strappo" si farà riferimento all'evento che porta ad una separazione del solido in più frammenti distinti. Per quantificare il danneggiamento di ogni fibra si è sfruttato il livello di danneggiamento definito dall'Eq. (3.28), il quale è stato mediato sulle varie sezioni della fibra (in accordo con quanto descritto in 4.2.2).

Nella Fig. (5.1) si riporta uno schema in cui sono espressi tutti gli istanti (di output 4.2.3) in cui le quattro fibre sopraelencate vanno incontro a fenomeni di danneggiamento; si può notare come per tutte le fibre si possano distinguere chiaramente tre diverse fasi di danneggiamento:

1. si ha una prima fase di accumulo progressivo (riquadrata in verde nella figura), nella quale il livello di danneggiamento cresce lentamente nel tempo; per la fibra 7 si può notare che non si ha una vera e propria fase di accumulo, ma, come sarà mostrato in seguito, anch'essa è caratterizzata

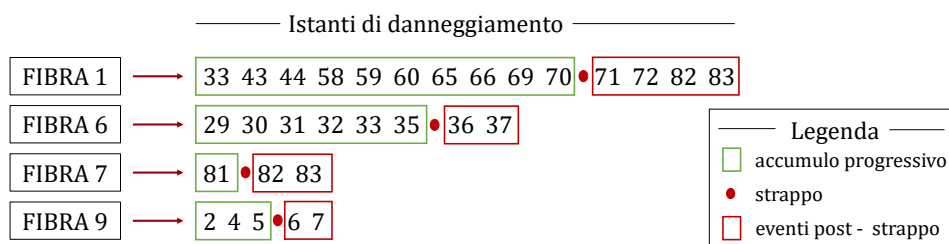


Figura 5.1: Istanti di danneggiamento delle fibre che vanno incontro a rottura, ovvero le fibre 1, 6, 7 e 9.

da un primo piccolo danneggiamento che andrà poi a propagare fino allo strappo.

2. quando il livello di danneggiamento raggiunge un valore abbastanza elevato, si innesca una propagazione molto rapida della cricca che porta, a cavallo di due istanti temporali, allo strappo completo della fibra.
3. successivamente alla rottura della fibra, si ha poi una fase caratterizzata da eventi minori di danneggiamento "post-strappo", riquadrata di rosso nella figura.

Di seguito si vanno a riportare gli andamenti del livello di danneggiamento medio per le fibre 1 (5.2), 6 (5.3), 7 (5.4) e 9 (5.5). Da questi grafici è possibile apprezzare i diversi andamenti sopra descritti; inoltre, si nota come tutte le fibre tendano a danneggiarsi nell'intorno del punto medio del loro asse, questo è congruente con il fatto che le sezioni più sollecitate debbano proprio essere quelle centrali di ogni fibra. Durante l'analisi degli stress, riportata in una sezione successiva, ci si aspetterà dunque di riscontrare il valore massimo delle tensioni nei pressi delle sezioni centrali delle fibre.

Si riportano ora, in delle sottosezioni dedicate ad ognuna delle fibre, le rappresentazioni 3D del comportamento dei solidi considerati nell'intorno dell'istante di strappo, così da poterne apprezzare meglio le varie modalità con cui le cricche vanno a propagare.

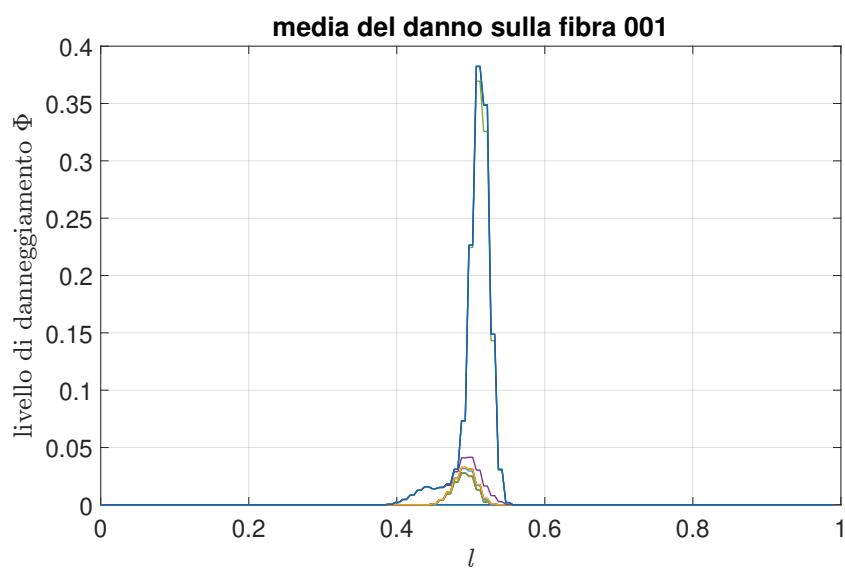


Figura 5.2: Livello di danneggiamento della fibra 1 nei vari istanti di output.

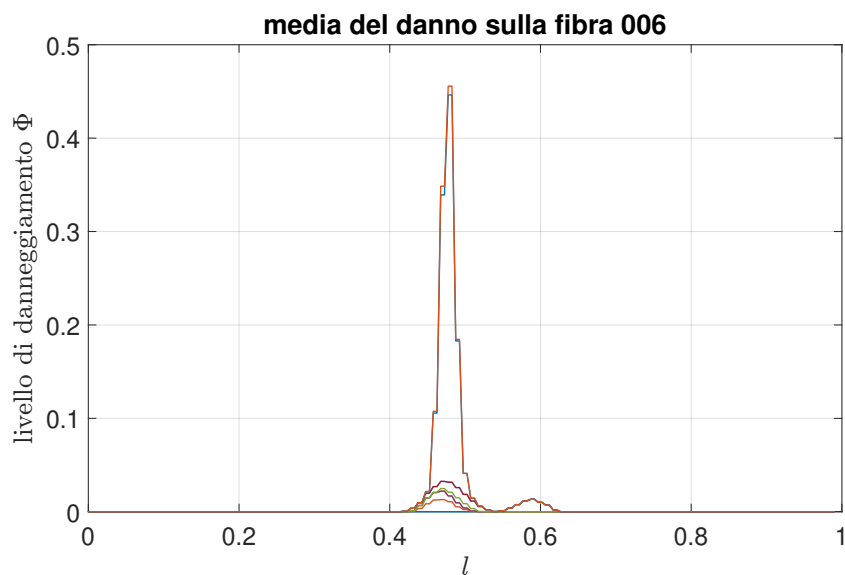


Figura 5.3: Livello di danneggiamento della fibra 6 nei vari istanti di output.

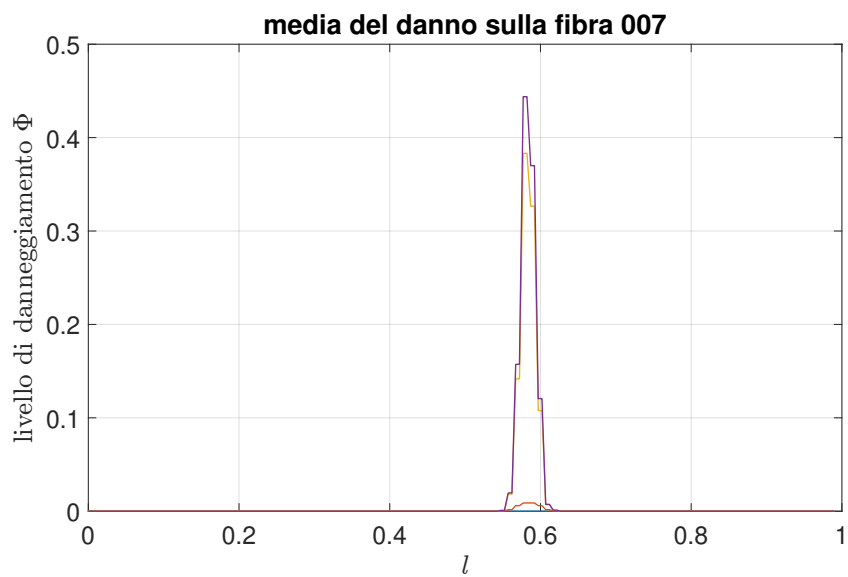


Figura 5.4: Livello di danneggiamento della fibra 7 nei vari istanti di output.

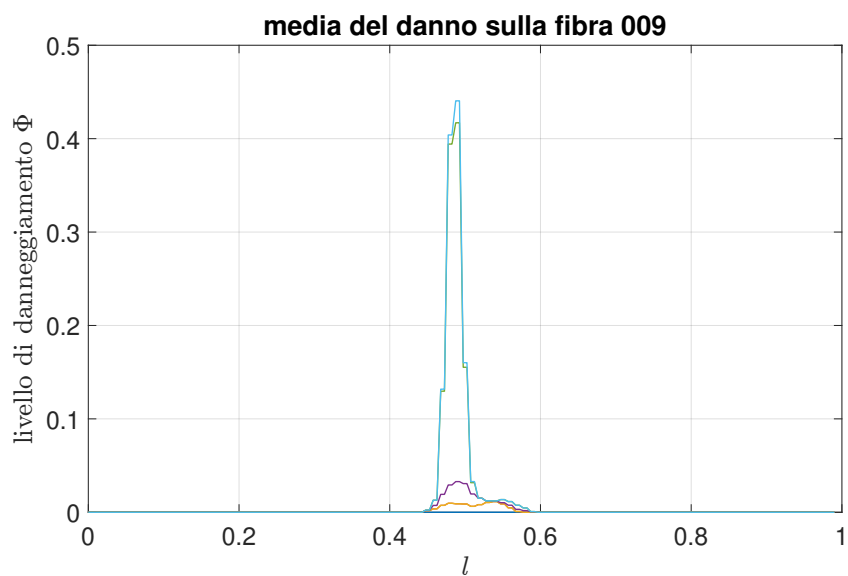


Figura 5.5: Livello di danneggiamento della fibra 9 nei vari istanti di output.

5.1.1 Propagazione della cricca - Fibra 1

Nelle figure da Fig. (5.6) a Fig. (5.11) è riportata l'evoluzione temporale degli stress (a sinistra) e del livello di danneggiamento (a destra) per la fibra 1. Si può notare, in particolare nella Fig. (5.7), come la cricca iniziale non propaghi verso l'interno della sezione della fibra, ma piuttosto questa si protrae superficialmente attorno alla sezione stessa; successivamente, una volta che il danneggiamento diviene sufficientemente elevato, la frattura si apre anche verso l'interno, andando a strappare completamente la fibra separandola in due frammenti distinti.

5.1.2 Propagazione della cricca - Fibra 6

Nelle figure da Fig. (5.12) a Fig. (5.17) è riportata l'evoluzione temporale degli stress (a sinistra) e del livello di danneggiamento (a destra) per la fibra 6. Questa volta si può notare come la fibra presenti inizialmente due danneggiamenti separati, ma è solo quello maggiore ad andare a propagare fino allo strappo; a differenza di quanto visto per la fibra 1, per la fibra 6 la cricca si propaga direttamente verso l'interno della sezione, andando ad aprirsi lungo un piano quasi ortogonale all'asse della fibra stessa. Questo andamento è facilmente apprezzabile in Fig. (5.15), dove si è riusciti a cogliere l'attimo subito prima dello strappo, dove vi è ancora un ridotto insieme di punti che lega tra loro i due frammenti, ormai quasi del tutto separati, della fibra.

5.1.3 Propagazione della cricca - Fibra 7

Nelle figure da Fig. (5.18) a Fig. (5.23) è riportata l'evoluzione temporale degli stress (a sinistra) e del livello di danneggiamento (a destra) per la fibra 7. Per questa fibra il danneggiamento e successivo strappo avvengono molto rapidamente, senza che la fibra compia diverse oscillazioni; come per la fibra 6, anche in questo caso la propagazione della cricca avviene direttamente verso l'interno della sezione interessata.

5.1.4 Propagazione della cricca - Fibra 9

Nelle figure da Fig. (5.24) a Fig. (5.29) è riportata l'evoluzione temporale degli stress (a sinistra) e del livello di danneggiamento (a destra) per la fibra 9. Nella prima immagine, la fibra presenta una cricca sul lato opposto rispetto

a quello mostrato, cricca che però non va ad espandersi dato che la fibra, negli istanti subito successivi, si "rilassa" andando a raddrizzarsi; successivamente, come si nota in Fig. (5.27), le oscillazioni portano la fibra a piegarsi nel verso opposto a prima, andando a generare un ulteriore danneggiamento esattamente speculare al precedente. Nel momento in cui il danneggiamento complessivo diventa abbastanza elevato, le due cricche speculari vanno ad unirsi, portando al fallimento e alla rottura della fibra 9.

5.1.5 Considerazioni generali sulla propagazione delle cricche

Riassumendo quanto visto per le singole fibre, si sono riuscite ad identificare tre diverse modalità di propagazione della cricca, ovvero:

- propagazione superficiale attorno al bordo della sezione interessata.
- propagazione verso l'interno ("bulk") della sezione danneggiata.
- unione di due cricche speculari.

Dai grafici sopra analizzati, inoltre, si riesce anche a notare come il danneggiamento avvenga sempre nelle zone della fibra in cui lo stato di tensione prevalente è di trazione, in accordo con quanto descritto anche dalla meccanica classica delle fratture (sezione 2).

Andando ad analizzare i diagrammi tridimensionali di tutte le fibre ad ogni istante temporale (i quali non sono stati tutti riportati per non appesantire troppo l'elaborato) si riesce inoltre ad osservare come tutti, o quasi, gli eventi di danneggiamento si verificano a seguito di oscillazioni ad ampiezza crescente delle varie fibre.

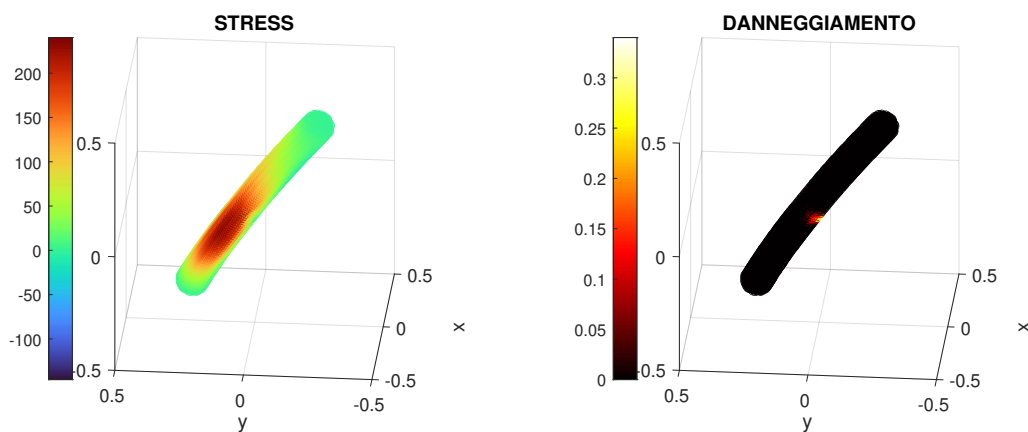


Figura 5.6: Stress e danneggiamento della fibra 1 all'istante output 69.

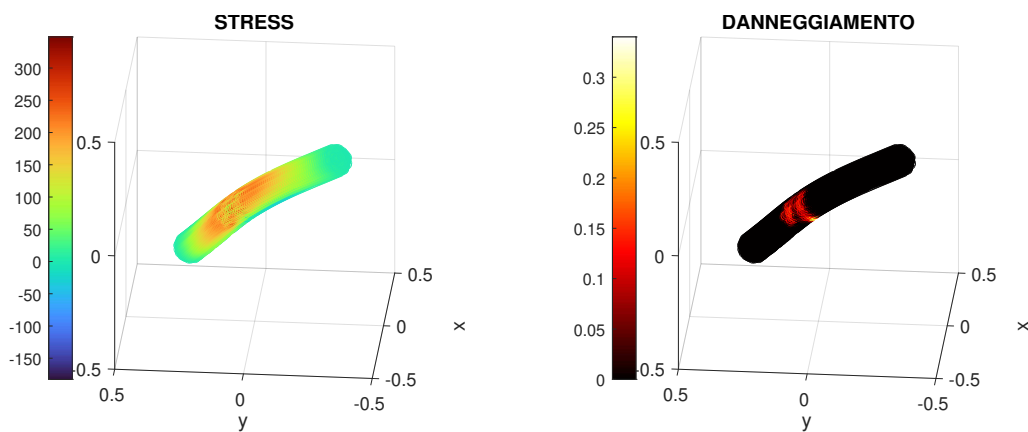


Figura 5.7: Stress e danneggiamento della fibra 1 all'istante output 70.

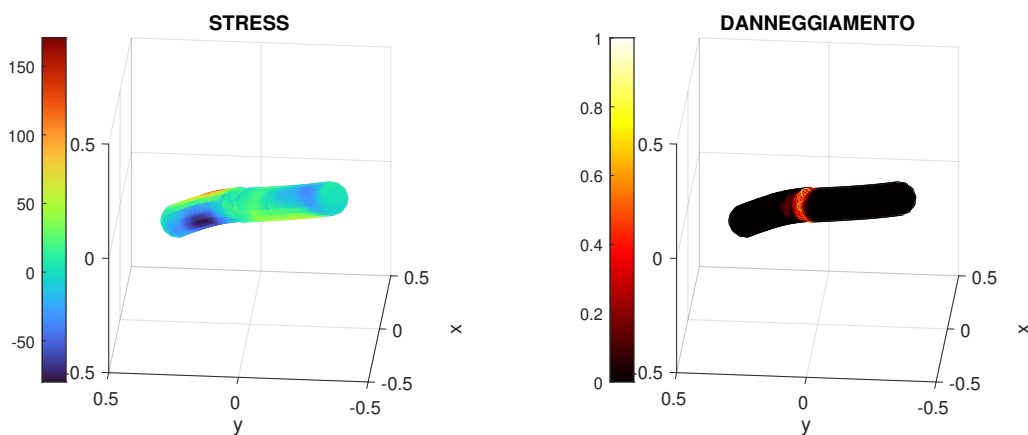


Figura 5.8: Stress e danneggiamento della fibra 1 all'istante output 71.

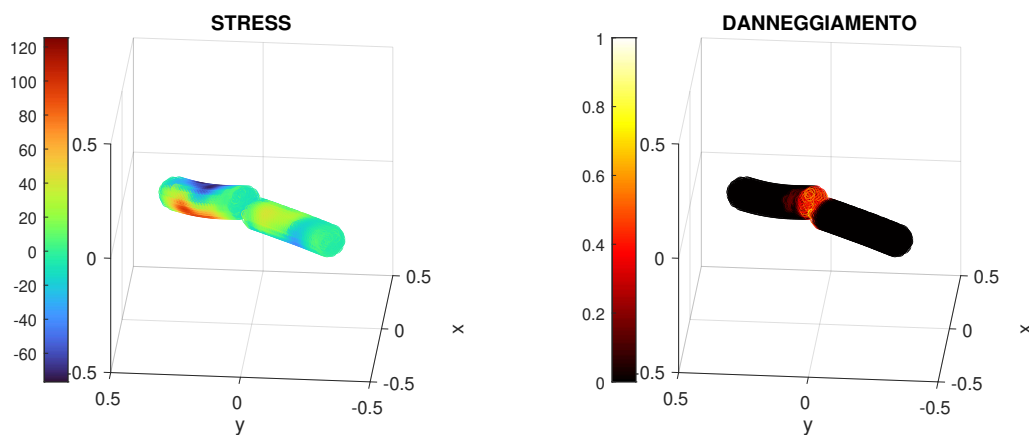


Figura 5.9: Stress e danneggiamento della fibra 1 all'istante output 72.

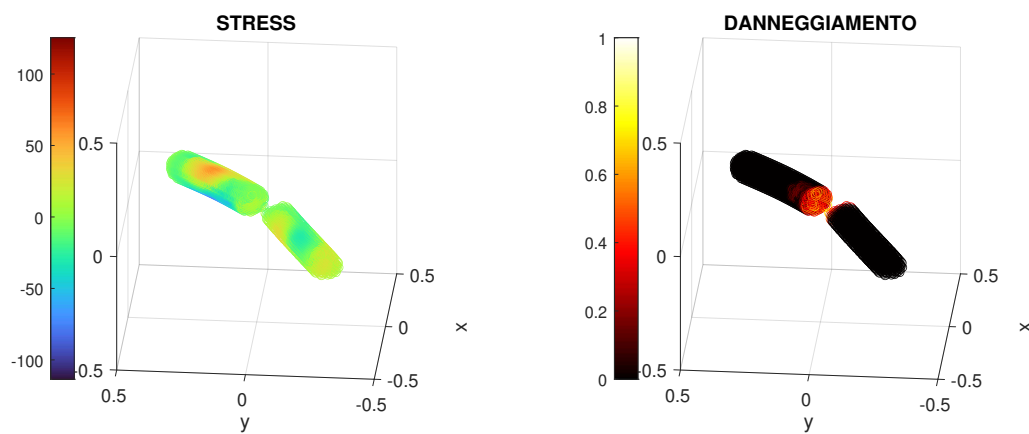


Figura 5.10: Stress e danneggiamento della fibra 1 all'istante output 73.

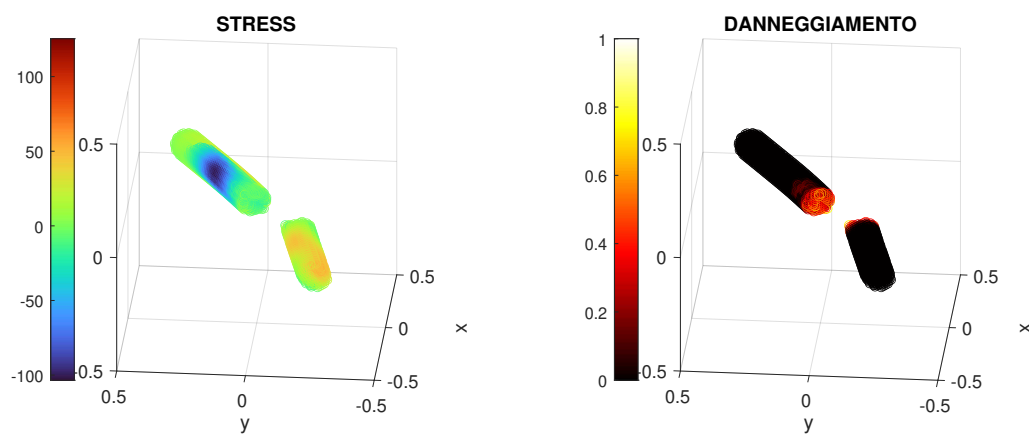


Figura 5.11: Stress e danneggiamento della fibra 1 all'istante output 74.

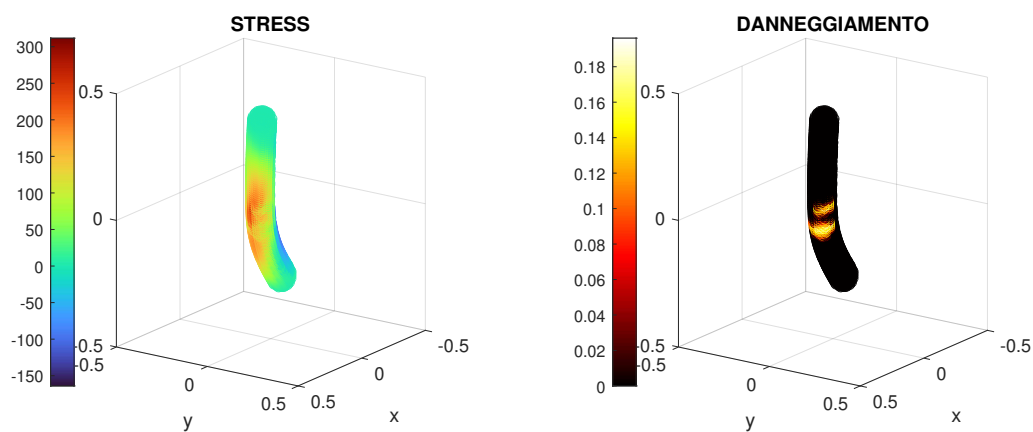


Figura 5.12: Stress e danneggiamento della fibra 6 all'istante output 33.

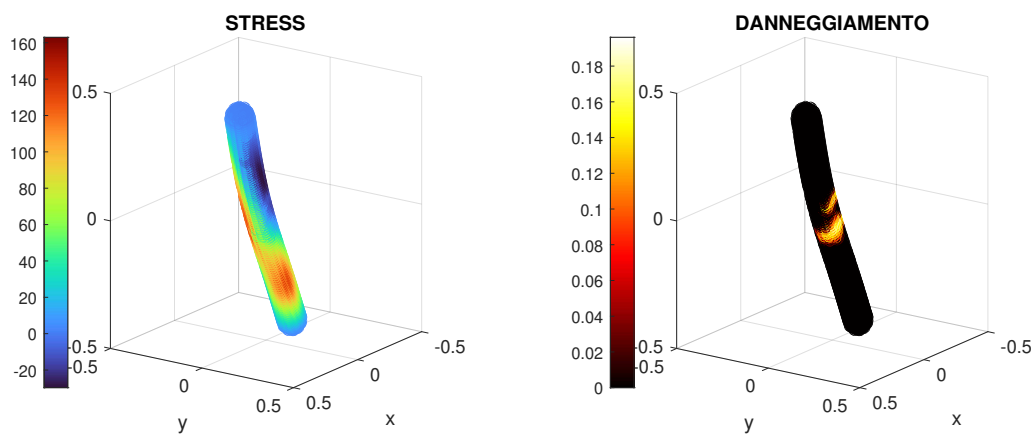


Figura 5.13: Stress e danneggiamento della fibra 6 all'istante output 34.

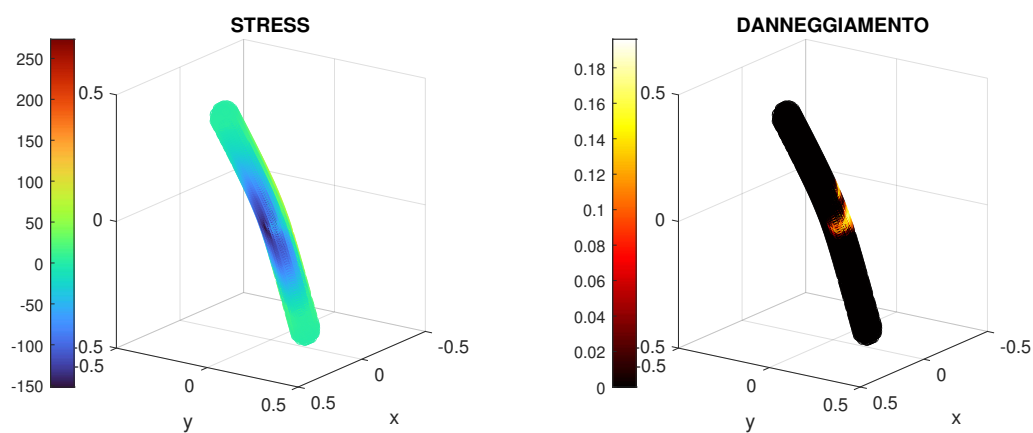


Figura 5.14: Stress e danneggiamento della fibra 6 all'istante output 35.

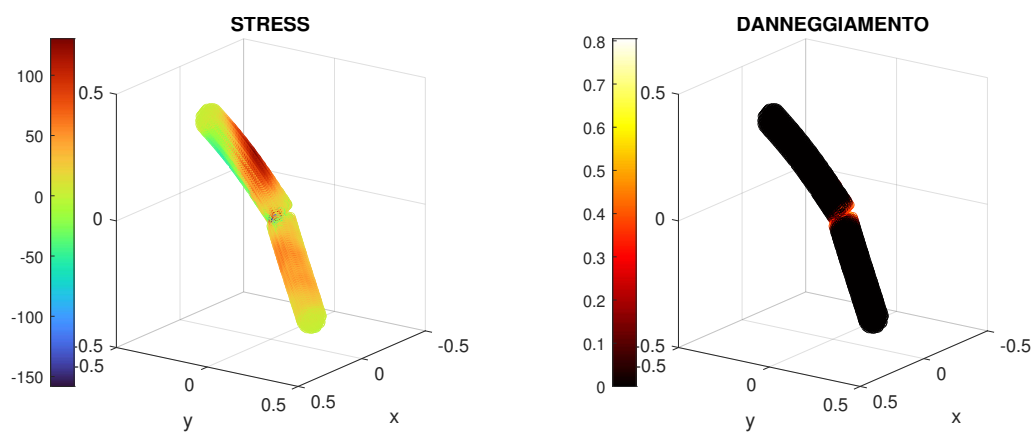


Figura 5.15: Stress e danneggiamento della fibra 6 all'istante output 36.

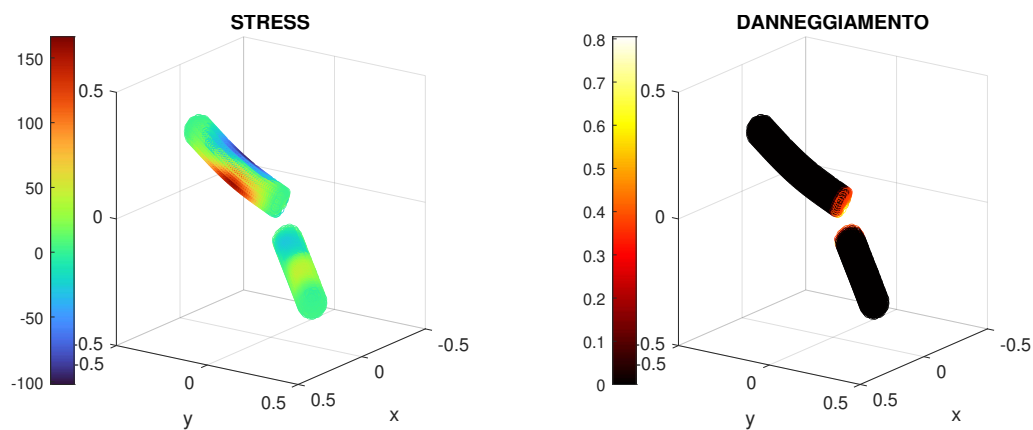


Figura 5.16: Stress e danneggiamento della fibra 6 all'istante output 37.

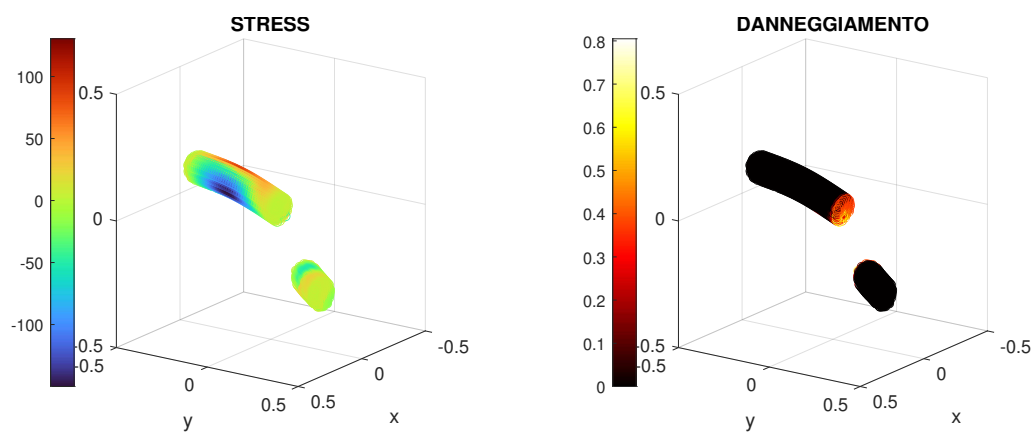


Figura 5.17: Stress e danneggiamento della fibra 6 all'istante output 38.

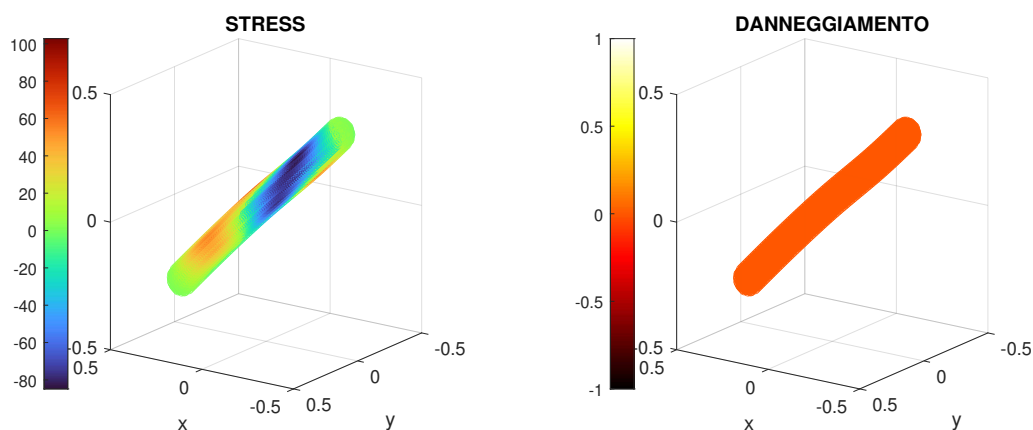


Figura 5.18: Stress e danneggiamento della fibra 7 all'istante output 79.

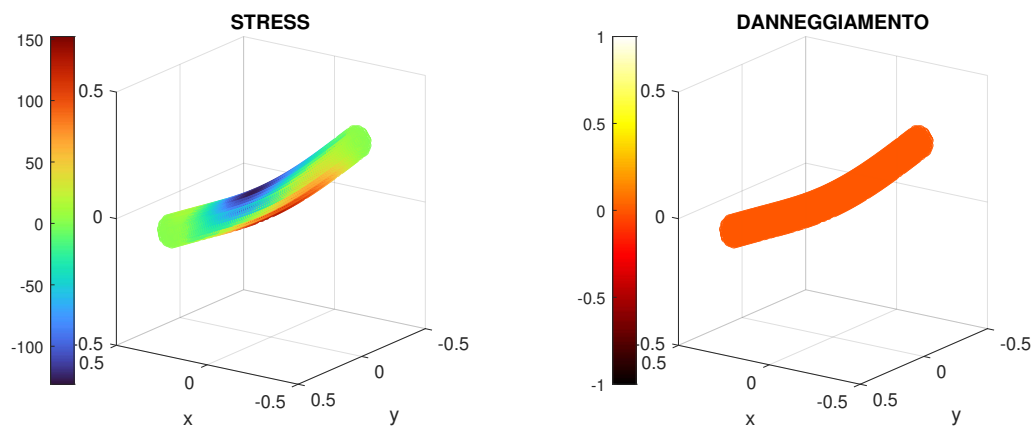


Figura 5.19: Stress e danneggiamento della fibra 7 all'istante output 80.

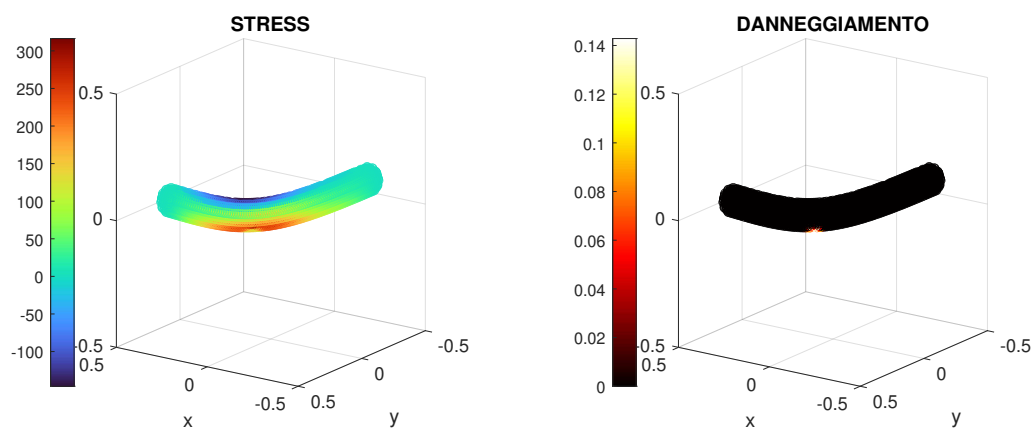


Figura 5.20: Stress e danneggiamento della fibra 7 all'istante output 81.

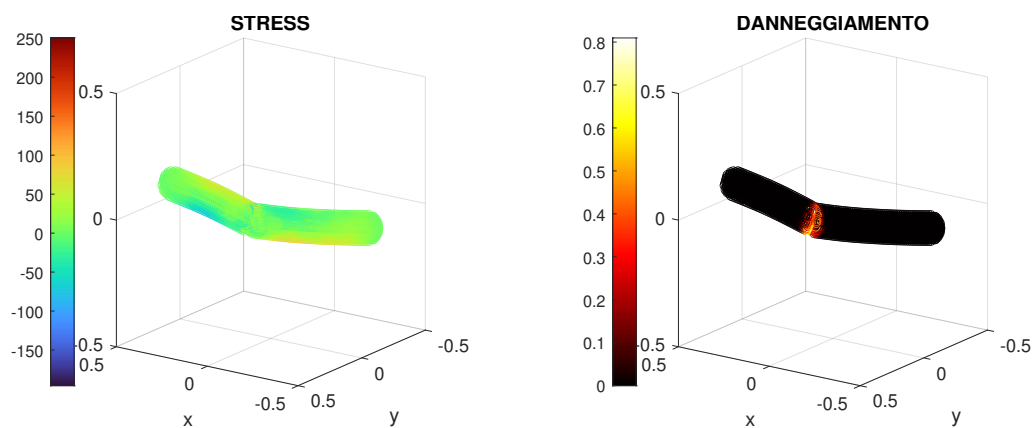


Figura 5.21: Stress e danneggiamento della fibra 7 all'istante output 82.

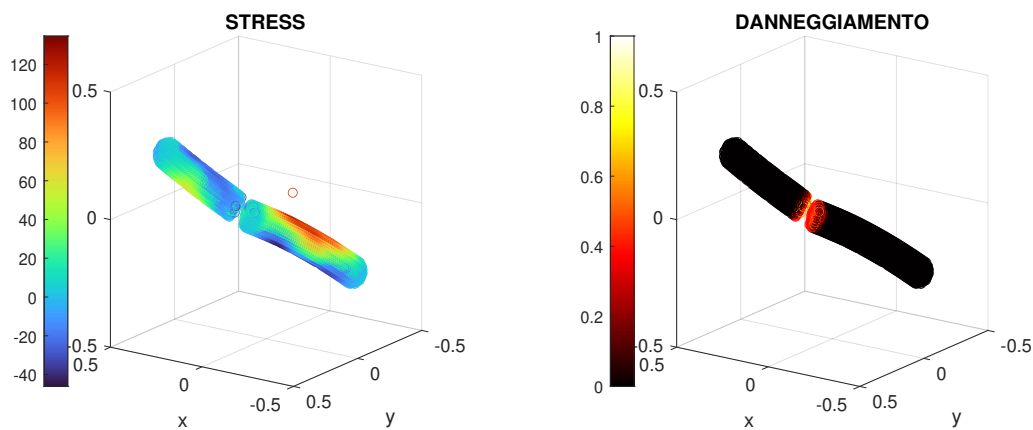


Figura 5.22: Stress e danneggiamento della fibra 7 all'istante output 83.

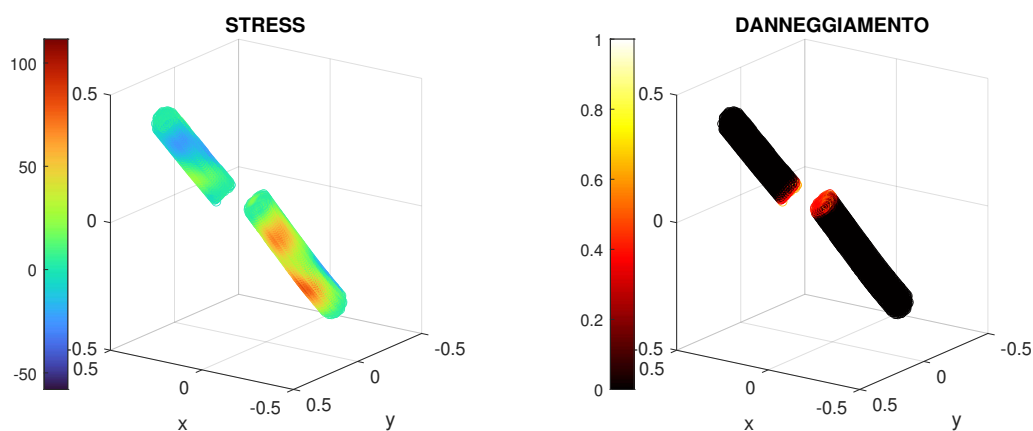


Figura 5.23: Stress e danneggiamento della fibra 7 all'istante output 84.

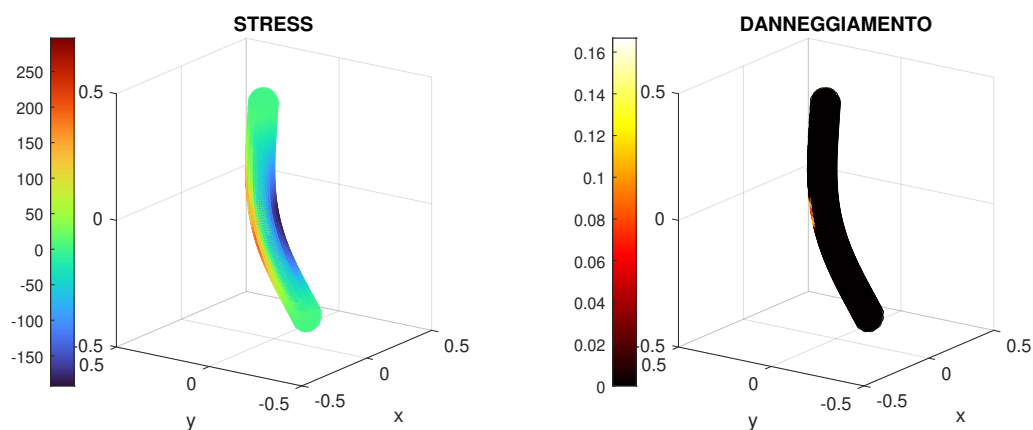


Figura 5.24: Stress e danneggiamento della fibra 9 all'istante output 2.

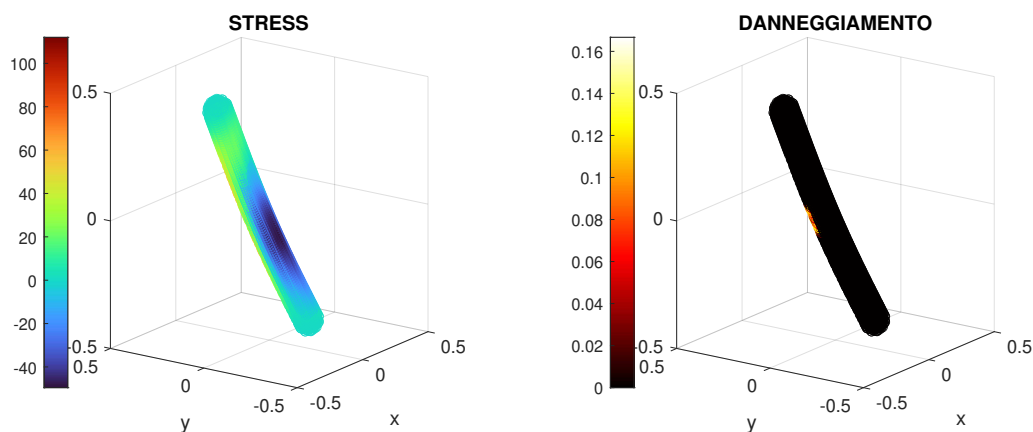


Figura 5.25: Stress e danneggiamento della fibra 9 all'istante output 3.

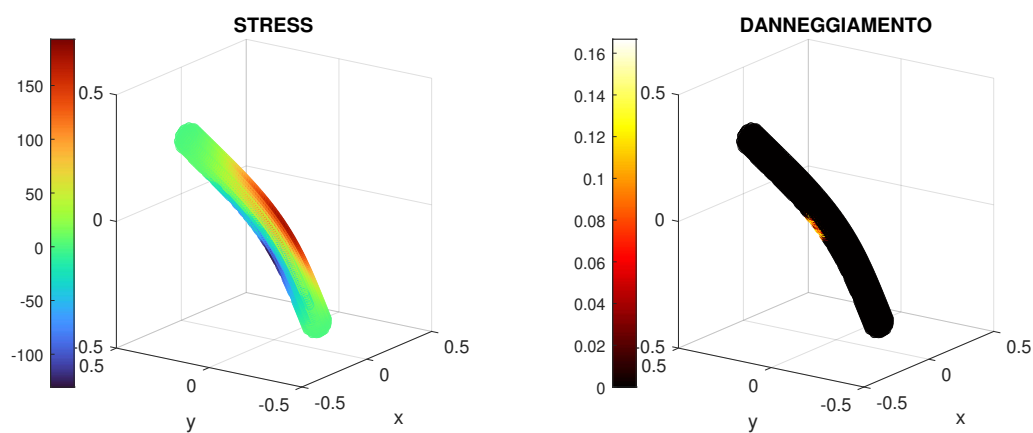


Figura 5.26: Stress e danneggiamento della fibra 9 all'istante output 4.

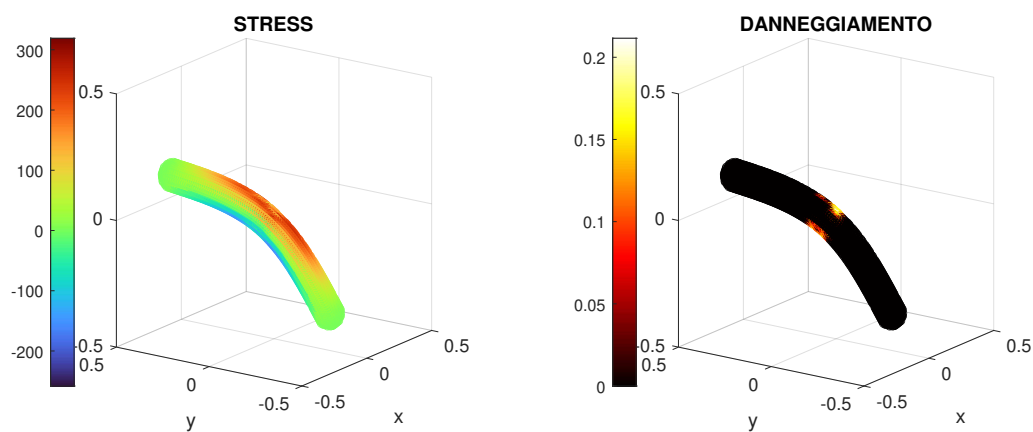


Figura 5.27: Stress e danneggiamento della fibra 9 all'istante output 5.

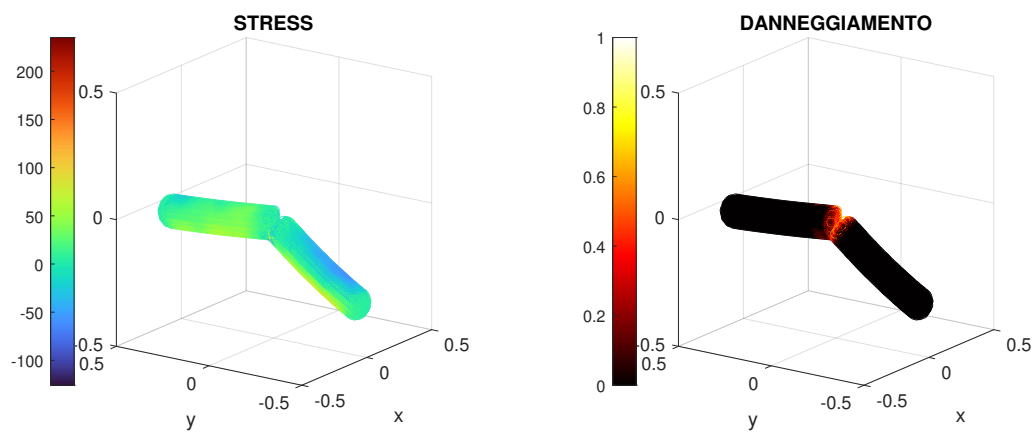


Figura 5.28: Stress e danneggiamento della fibra 9 all'istante output 6.

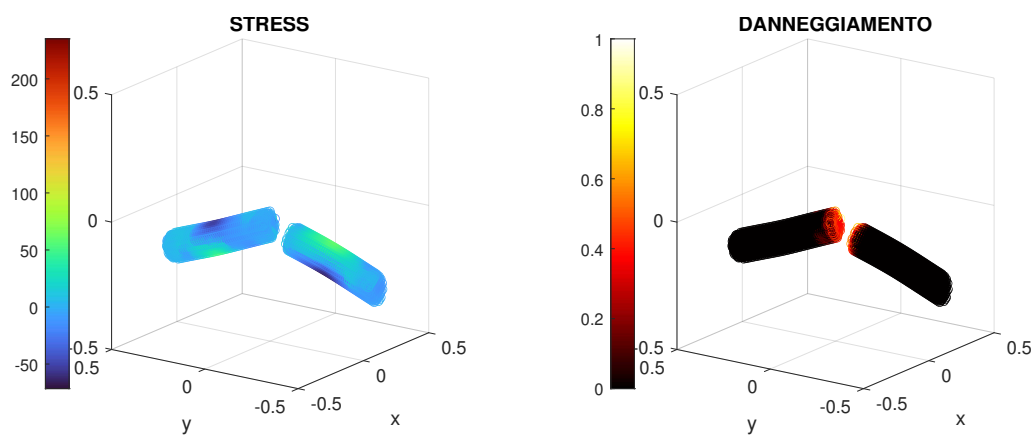


Figura 5.29: Stress e danneggiamento della fibra 9 all'istante output 7.

5.2 Tensioni Interne delle Fibre - *Stress*

Dopo aver analizzato il livello di danneggiamento, si passa ora a presentare i risultati ottenuti valutando l'andamento dello stress lungo le varie fibre. Come prima cosa si vuole chiarire che le tensioni rappresentate sono state valutate come descritto nella sezione 4.2.1 e successivamente sono state mediate sulle varie sezioni, in accordo con quanto riportato nella sezione 4.2.2; si vuole però sottolineare che durante la media si sono considerati esclusivamente gli stress associati ai punti in trazione sulla fibra, dato che, come osservato in 5.1.5, il danneggiamento si verifica proprio dove lo stato predominante è quello di trazione.

Si riportano di seguito (Fig. (5.30) e Fig. (5.31)) due esempi per l'andamento delle tensioni man mano che ci si sposta lungo l'asse di una data fibra; si può chiaramente osservare come lo stress presenti dei valori massimi proprio nell'intorno delle sezioni centrali delle fibre, in accordo con quanto emerso dall'analisi del livello di danneggiamento, e di come le tensioni tendano poi a valori nulli nei pressi degli estremi (che corrispondono a delle superfici libere).

In Fig. (5.32) e Fig. (5.33) sono rappresentati gli andamenti dello stress nei due istanti (di output) subito prima e subito dopo l'evento dello strappo; si è riportato come esempio il caso della fibra 1, ma gli andamenti sono analoghi per tutte le fibre. Osservando queste due immagini si può notare come, dopo lo strappo, l'andamento a "campana" delle tensioni si vada a riproporre sui singoli frammenti della fibra, ma anche come i valori massimi degli stress si vadano a ridurre: questo è compatibile con il fatto che, dopo la rottura, la fibra presenta lo stesso diametro, ma una lunghezza più corta e, di conseguenza, le nuove sezioni centrali saranno soggette a momenti flettenti minori (e stress più contenuti). Nella sezione centrale, dove avviene lo strappo, lo stress dovrebbe assumere un valore nullo; questo non è riscontrato nei grafici a causa della media effettuata, infatti se lo strappo non è esattamente parallelo alla sezione su cui si media, i risultati in tale zona risultano alterati dalla media stessa.

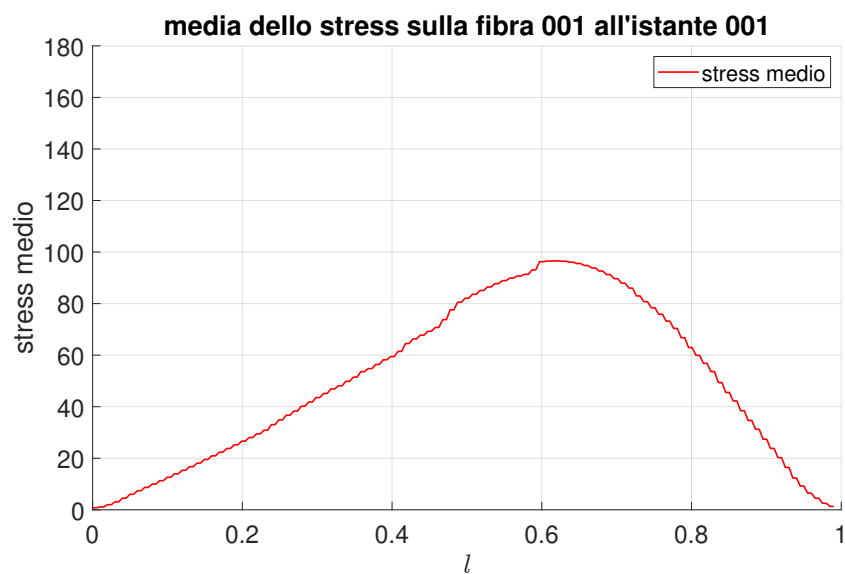


Figura 5.30: Andamento degli stress medi sulla fibra 1 nell'istante 1.

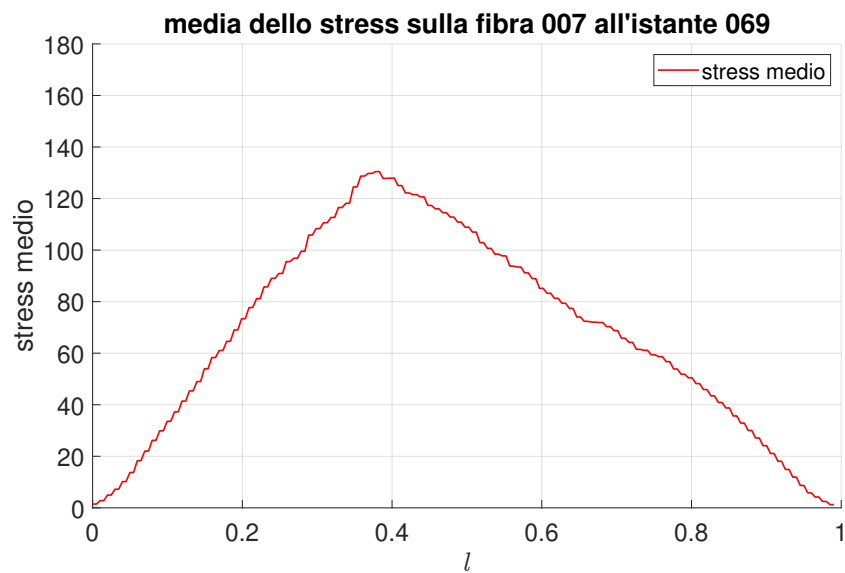


Figura 5.31: Andamento degli stress medi sulla fibra 7 all'istante 69.

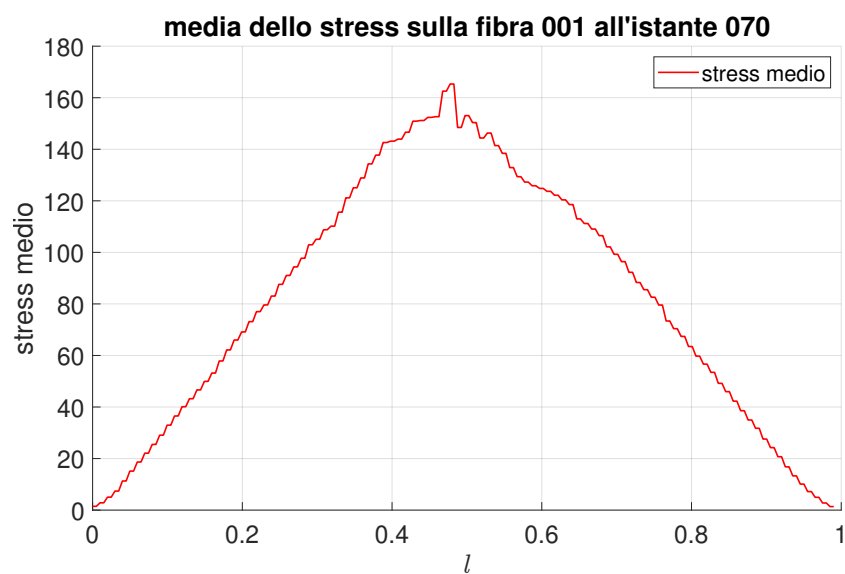


Figura 5.32: Andamento degli stress medi sulla fibra 1 nell'istante 70, subito prima dello strappo.

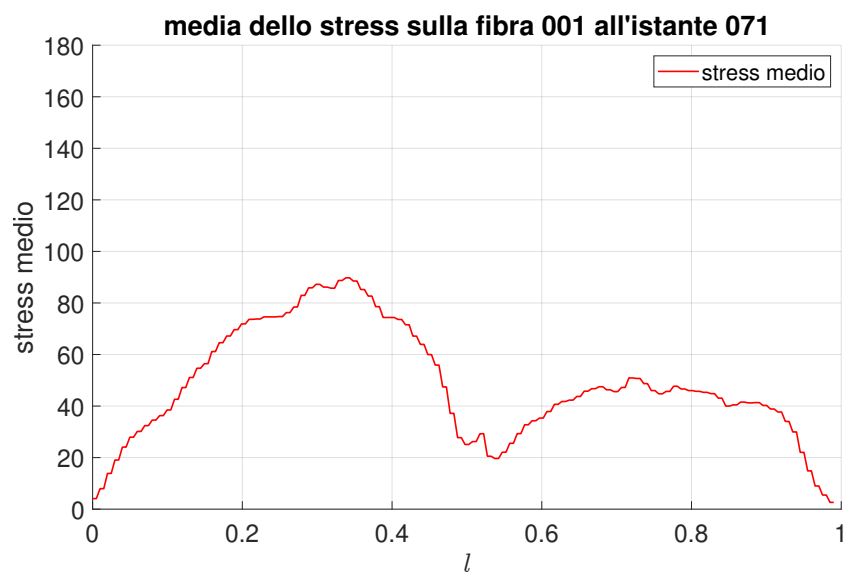


Figura 5.33: Andamento degli stress medi sulla fibra 1 all'istante 71, subito dopo lo strappo.

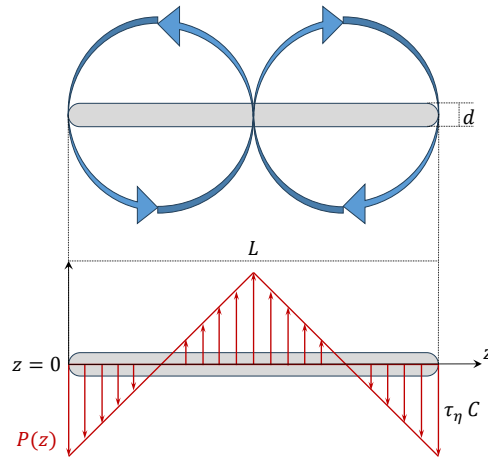


Figura 5.34: Schema dell'ipotetico caso statico di verifica dei carichi nella condizione più sfavorevole di "fibra tra due vortici contro-rotanti".

5.2.1 Caso statico di verifica

Il problema analizzato, come generalmente tutti i problemi di FSI, è fortemente dinamico; di conseguenza, l'accoppiamento tra le forze fluidodinamiche e le oscillazioni della fibra è un fenomeno sicuramente molto rilevante per l'evoluzione del sistema. Per poter comprendere quanto importante sia il ruolo dell'accoppiamento dinamico nel fenomeno del danneggiamento delle fibre studiate, si va ad analizzare un ipotetico caso statico che rappresenti la condizione più sfavorevole in cui può trovarsi una delle fibre, ovvero "incastrata" tra due vortici contro-rotanti. Lo scopo è quello di andare a valutare se gli stress indotti dalle forze fluidodinamiche siano in grado di danneggiare la fibra anche in un caso statico, rimuovendo, quindi, i possibili accoppiamenti dinamici e verificando la deformazione massima imposta al solido; una volta ottenuta la deformazione massima nel caso statico, questa viene confrontata con lo stretch limite di rottura s_0 (descritto nella sezione 3.2.4) e si verifica se le forze fluidodinamiche siano o meno abbastanza intense da rompere, anche solo localmente, la fibra.

Come prima cosa è necessario impostare il problema: uno schema esemplificativo di come viene considerato il caso statico è riportato in Fig.(5.34), dove sono evidenziate le condizioni di carico a cui è soggetta la fibra, modellata come una trave libera. Ovviamente il sistema è stato molto semplificato per poter riuscire ad effettuare una valutazione di massima sulle deformazioni: ancora una volta l'interesse non è quello di ricavare l'effettivo valore

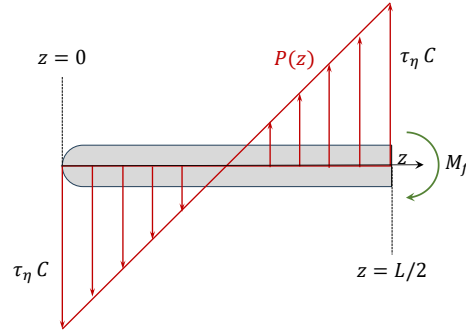


Figura 5.35: Schema del caso statico dopo aver "tagliato" sulla sezione centrale.

della deformazione massima imposta, ma piuttosto confrontarne l'ordine di grandezza con quello della deformazione limite che porta al danneggiamento.

Andando ad analizzare lo schema in Fig. (5.34) si nota che la condizione imposta sulla fibra è quella di un carico distribuito $P(z)$ che varia lungo l'asse (identificato dalla coordinata z); per valutare la deformazione massima che tale carico impone, si ipotizza di "tagliare" la fibra nella sezione centrale, essendo quella più sollecitata, e di calcolare il momento flettente interno M_f in tale sezione (Fig. (5.35)). Il momento con cui la sezione "reagisce" al carico esterno è pari a:

$$M_f = \int_0^{L/2} P(z)z \, dz \quad (5.1)$$

Definendo come P il valore massimo in modulo del carico distribuito, la funzione che descrive l'andamento lineare di $P(z)$ per $z \in [0, L/2]$ è la seguente:

$$P(z) = \frac{4P}{L}z - P \quad \forall z \in [0, L/2] \quad (5.2)$$

da cui si ottiene:

$$M_f = \frac{PL^2}{24} \quad (5.3)$$

Per il valore massimo di $P(z)$ si è scelto di utilizzare il prodotto tra lo sforzo viscoso caratteristico τ_η del fluido alla scala di Kolmogorov (sezione 1.2.1), e la circonferenza C della sezione (così da ricondursi ad una grandezza per unità di lunghezza); tale sforzo può essere valutato come:

$$\tau_\eta = \mu \frac{u_\eta}{\eta} \quad (5.4)$$

in realtà, lo sforzo massimo viscoso generato dal fluido alla scala dei vortici contro-rotanti considerati risulterebbe inferiore rispetto a quello alla scala di

Risultati adimensionali con dissipazione media

Parametro	Valore
Dissipazione media	$\mathcal{E}_{media} = 0.005625$
Viscosità cinematica	$\nu = 0.006667$
Velocità di Kolmogorov	$u_\eta = 0.078254$
Scala di Kolmogorov	$\eta = 0.085192$
Sforzo viscoso di Kolmogorov	$\tau_\eta = 0.006123$

Tabella 5.1: Risultati adimensionali ottenuti considerando la dissipazione turbolenta media \mathcal{E}_{media} .

Kolmogorov (bisognerebbe riscalarlo sulla dimensione del vortice considerato), ma per lavorare in favore di sicurezza si utilizza comunque τ_η , dato che rappresenta il valore più elevato che tale sforzo può assumere. Per calcolare quantitativamente tale sforzo viscoso è necessario valutare la velocità u_η e la dimensione caratteristica della scala di Kolmogorov η , i quali dipendono esclusivamente dalla viscosità cinematica ν e dalla dissipazione turbolenta \mathcal{E} secondo le relazioni nell'Eq. (1.37). Avendo adimensionalizzato l'intero problema, la viscosità cinematica adimensionale sarà pari a $\nu = 1/Re$; per quanto riguarda la dissipazione, invece, il problema è più complesso, dato che si tratta di una grandezza molto variabile sia spazialmente che temporalmente. Di seguito si riportano i risultati ottenuti considerando prima la dissipazione media¹ \mathcal{E}_{media} , in Tab. (5.1), e poi la dissipazione massima² \mathcal{E}_{max} , in Tab. (5.2).

Passando ora al calcolo della tensione indotta nella sezione centrale, questa viene definita, nel caso statico semplificato che si sta analizzando, dalla relazione:

$$\sigma = \frac{M_f}{I_c} y \quad (5.5)$$

dove I_c è il secondo momento di area della sezione³ mentre y è la distanza dal-

¹con dissipazione media \mathcal{E}_{media} si intende il valore della dissipazione mediata sia nello spazio, che nei diversi istanti temporali.

²con dissipazione massima \mathcal{E}_{max} si intende il valore massimo nel tempo della media spaziale della dissipazione.

³per una sezione circolare si ha $I_c = \pi d^4/64$, con d il diametro della sezione.

Risultati adimensionali con dissipazione massima

Parametro	Valore
Dissipazione massima	$\mathcal{E}_{max} = 0.007802$
Viscosità cinematica	$\nu = 0.006667$
Velocità di Kolmogorov	$u_\eta = 0.084925$
Scala di Kolmogorov	$\eta = 0.078499$
Sforzo viscoso di Kolmogorov	$\tau_\eta = 0.007212$

Tabella 5.2: Risultati adimensionali ottenuti considerando la dissipazione turbolenta massima \mathcal{E}_{max} .

l'asse neutro⁴; per ottenere la tensione massima bisogna valutare σ nel punto più lontano dall'asse neutro, che, avendo una sezione circolare, corrisponde a $y = d/2$, con d il diametro della sezione:

$$\sigma_{max} = \frac{M_f d}{2I_c} \quad (5.6)$$

Dato che nel modello peridinamico la rottura di un legame è associata ad un certo valore di stretch limite s_0 e non propriamente ad una tensione di rottura, si valuta la deformazione massima ϵ_{max} dovuta alla tensione appena calcolata:

$$\epsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E} \quad (5.7)$$

facendo le opportune sostituzioni con quanto ricavato fin ora e semplificando:

$$\epsilon_{max} = \frac{4\tau_\eta L^2}{3Ed^2} \quad (5.8)$$

Inserendo i valori numerici delle varie grandezze si ricava la deformazione massima imposta mediamente alla fibre (ovvero la deformazione massima ottenuta considerando la dissipazione media \mathcal{E}_{media}) e la deformazione massima imposta nel caso di un picco nella dissipazione (ovvero ottenuta tramite \mathcal{E}_{max}); entrambi i risultati sono riportati in Tab. (5.3), insieme al valore di s_0 con cui devono essere confrontate.

Dai risultati ottenuti si può notare come, sia che si consideri il valore medio della dissipazione, sia che se ne consideri il valore di picco, la deforma-

⁴in una trave soggetta a momenti flettenti, l'asse neutro è una retta, nel piano di una delle sezioni, in cui la tensione dovuta al momento è nulla.

Confronto deformazioni

Parametro	Valore
ϵ_{max} ottenuta con \mathcal{E}_{media}	$\epsilon_{max} _{\mathcal{E}_{media}} = 1.837 \cdot 10^{-4}$
ϵ_{max} ottenuta con \mathcal{E}_{max}	$\epsilon_{max} _{\mathcal{E}_{max}} = 2.164 \cdot 10^{-4}$
Stretch limite di rottura	$s_0 = 7 \cdot 10^{-2}$

Tabella 5.3: Confronto tra le deformazioni imposte nel caso statico, e il valore limite di rottura del modello peridynamico.

zione imposta dai carichi fluidodinamici in un ipotetico caso statico è di due ordini di grandezza inferiore rispetto a s_0 ; L'accoppiamento dinamico tra le forze fluidodinamiche e le oscillazioni delle fibre, dunque, rappresentano un fenomeno decisamente importante per la dinamica complessiva del sistema nei confronti del danneggiamento e della rottura delle fibre solide stesse.

5.2.2 Confronto tra stress e forze fluidodinamiche

Un altro "indizio" dell'importanza dell'accoppiamento dinamico nel problema considerato lo si riscontra confrontando la *probability density function* (PDF) degli stress agenti su ogni punto della fibra (valutati in accordo con quanto descritto in 4.2.1), con quella delle forze fluidodinamiche imposte dal fluido. Osservando la PDF delle tensioni, riportata in Fig. (5.36), si può facilmente notare come vi sia una netta distinzione tra gli stress sviluppati dalle fibre che si rompono (in rosso) rispetto a quelli che si riscontrano sulle fibre che rimangono intatte (in blu); questa differenza sottolinea come, le fibre che vanno incontro a danneggiamento, non solo sviluppino mediante degli stress più elevati, ma presentino anche tensioni massime di valore superiore rispetto alle fibre che non si rompono. Ovviamente si tratta di un andamento che ci si aspettava, ma risulta comunque interessante andare a confrontarlo con quanto accade per le forze fluidodinamiche: osservando infatti la Fig. (5.37) si può notare come, seppure le fibre siano soggette a forze diverse tra loro, non vi sia più una netta distinzione tra le fibre che vanno incontro a danneggiamento (in rosso) e quelle che rimangono integre fino alla fine della simulazione (in blu). Tutto ciò avvale l'ipotesi che, almeno nei casi analizzati, il danneggiamento di una fibra non avvenga a causa di picchi nelle forze fluidodinamiche a cui è soggetta, ma piuttosto che questa avvenga per via di un accoppiamento

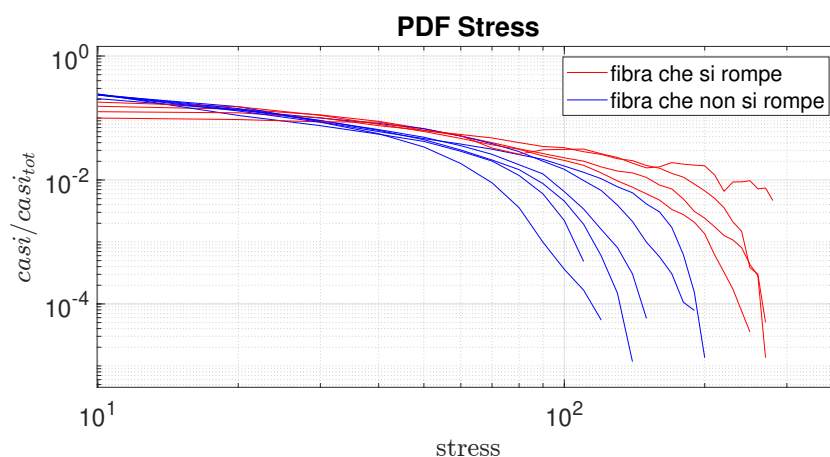


Figura 5.36: Probability Density Function (PDF) del campo degli stress.

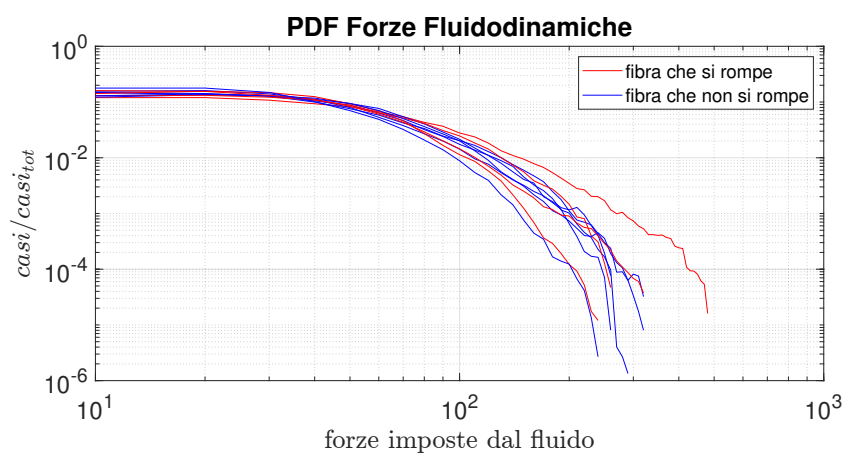


Figura 5.37: Probability Density Function (PDF) delle forze fluidodinamiche imposte dal fluido sull'interfaccia del solido.

dinamico tra il campo degli sforzi viscosi, che varia in modo molto caotico, e le oscillazioni della fibra stessa; a volte le due "grandezze" si accoppiano portando ad uno smorzamento dell'ampiezza di oscillazione, mentre altre volte si verifica una condizione di "risonanza" che porta ad un aumento della deformazione della fibra, fino al suo danneggiamento.

Capitolo 6

Conclusione e sviluppi futuri

Il lavoro compiuto per questa tesi verte sulla caratterizzazione del fenomeno della rottura in un problema di interazione fluido-struttura (FSI), problema che già di per sé risulta essere molto complesso, ma che con l'aggiunta del possibile danneggiamento del solido rivela una nuova serie di criticità. In particolare il caso scelto per questa analisi consta di una serie di fibre di ridotte dimensioni immerse in un campo fluido turbolento, sotto l'ipotesi che per quest'ultimo valga la condizione di localmente omogeneo ed isotropo; i riscontri "reali" di questa particolare casistica coprono un'ampia rosa di possibilità, come per esempio tutti quei processi industriali che coinvolgono la presenza di fibre (dalla fabbricazione della carta a quella dei tessuti ecc.), ma anche i problemi di tipo ambientale, come il fenomeno della dispersione e frammentazione a "cascata" delle microplastiche negli oceani. L'analisi svolta, però, è ancora ad un livello fondamentale e si propone di valutare in un modo qualitativo, più che quantitativo, il comportamento del sistema nei confronti della nascita e propagazione di eventuali cricche. Le ipotesi fondamentali del modello impiegato assumono che il fluido sia incomprimibile e, come già accennato, in un regime turbolento localmente omogeneo ed isotropo; per quanto riguarda il solido, invece, questo viene modellato attraverso la teoria della peridinamica, la quale si fonda sull'idea che i singoli punti materiali che compongono un dato corpo siano in grado di interagire tra loro non solo a contatto (come nella teoria classica del continuo), ma anche fino ad una certa distanza δ detta orizzonte. Per ottenere i risultati sui quali si è concentrata l'analisi effettuata, si è simulato il problema di FSI grazie ad un software, sviluppato dall'Ing. F. Dalla Barba, in grado di simulare in modo accurato diversi casi di interazione fluido-solido; tale programma è costituito

da tre blocchi principali: il primo risolve il campo fluido attraverso una simulazione numerica diretta (DNS), il secondo risolve il modello peridynamico del solido, mentre il terzo ed ultimo componente ha il compito di accoppiare, spazialmente e temporalmente, i risultati degli altri due blocchi. Dopo aver effettuato alcune simulazioni utili al "settaggio" dei diversi parametri, si sono indagati i risultati ottenuti in termini di livello di danneggiamento delle fibre, stress interni e forze fluidodinamiche applicate alle fibre. In particolare l'iter di analisi dei risultati comprende una valutazione del comportamento del danneggiamento delle varie fibre (dove si realizza e come si propaga), una verifica delle tensioni imposte in un ipotetico caso statico, volta a verificare se, una volta rimosso l'accoppiamento dinamico, i carichi fluidodinamici fossero in grado di rompere la fibra, un'analisi del comportamento degli stress interni e un confronto di quest'ultimo con l'andamento delle forze viscosi. Di seguito vengono riassunti i principali risultati ottenuti:

- si è riscontrato che il danneggiamento si concentra soprattutto nella zona centrale della fibra, compatibilmente con il fatto che tale zona corrisponda proprio a quella più sollecitata (ovvero quella in cui gli stress interni sono maggiori).
- osservando in una visione $3D$ l'evoluzione temporale delle fibre che andavano incontro a rottura, si sono evidenziate diverse modalità di propagazione delle cricche; in particolare si è riusciti ad individuare tre distinti andamenti, ma non si esclude che con ulteriori simulazioni se ne possano verificare degli altri. I tre modi di propagazione trovati sono: propagazione superficiale della cricca attorno alla sezione interessata; apertura della cricca con conseguente propagazione verso l'interno della sezione danneggiata; formazione e successiva unione di due cricche distinte e speculari rispetto all'asse della fibra interessata.
- osservando gli stress interni si è verificato che questi rispettino l'andamento predetto dalla meccanica classica, inoltre si è riscontrato come, a seguito dello strappo di una fibra, i valori massimi degli stress tendano a calare (sempre in accordo con la teoria classica).
- dall'analisi dell'ipotetico caso statico si è ottenuto che, rimuovendo gli effetti di accoppiamento dinamico tra le oscillazioni della fibra e le variazioni degli sforzi viscosi del campo fluido, le forze fluidodinamiche

agenti sui solidi non impongano delle deformazioni sufficienti a generare un danneggiamento (le deformazioni massime imposte risultano essere di due ordini di grandezza inferiori rispetto a quella necessaria per rompere un legame perid dinamico).

- confrontando le probability density function (PDF) degli stress interni e delle forze fluidodinamiche, si è riscontrato che: gli stress, come ci aspettava, riportino dei valori superiori nelle fibre che si rompono e, in generale, vi è una netta distinzione tra le PDF delle fibre che vanno incontro a rottura rispetto a quelle che rimangono sempre integre; osservando la PDF delle forze, invece, non si nota alcuna distinzione particolare tra le due tipologie di fibre (che si rompono o che non si rompono).

Questi risultati portano a pensare che l'accoppiamento dinamico costituisca un aspetto fondamentale per la tipologia di problematica in esame, e costituisca uno dei fenomeni principali che porta al danneggiamento delle fibre coinvolte; gli "indizi" raccolti suggeriscono che le variazioni molto caotiche degli sforzi imposti dal fluido vadano ad accoppiarsi con le oscillazioni caratteristiche delle fibre, a volte andandole a smorzare, mentre altre volte entrando in "risonanza" tra loro e aumentando l'ampiezza di vibrazione delle fibre imponendo delle deformazioni abbastanza intense da danneggiare localmente il materiale.

Alla luce dei risultati ottenuti, un possibile sviluppo futuro di questo problema potrebbe essere quello di indagare in modo più approfondito la dinamica del sistema, concentrando l'analisi sugli spettri in frequenza delle varie grandezze coinvolte, così da caratterizzare questa presunta risonanza; inoltre, potrebbe risultare interessante andare a valutare in modo più accurato come si comportano le fibre solide dopo essersi danneggiate una prima volta, dato che le ipotesi utilizzate per l'analisi dell'ipotetico caso statico non tenevano conto di fratture iniziali nel materiale. Infine, data la grande variabilità e caoticità del problema considerato, si suggerisce di proseguire con le simulazioni in modo da accumulare un "pool" di risultati abbastanza grande da poter realizzare un'indagine statistica accurata ed eventualmente sviluppare un modello di previsione per la rottura delle fibre.

Bibliografia

- [1] T. L. Anderson. *FRACTURE MECHANICS: Fundamentals and Application, third edition*. Taylor & Francis Group.
- [2] Alessandro Ballatore. *Immersed Boundary Method in OpenFOAM: Numerical Validation and Applications to Wheel Geometries*. 2020. Cap. Description of the Immersed Boundary Method, pp. 14–15.
- [3] Federico Dalla Barba. *A Novel Numerical Method for Fluid-Structure Interaction Problems*. 2021. Cap. Implementation and validation, pp. 62–90.
- [4] Wim-Paul Breugem. «A second-order accurate immersed boundary method for fully resolved simulations of particle-laden flows». In: *Journal of Computational Physics* 231.13 (2012), pp. 4469–4498. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.02.026>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999112001374>.
- [5] E. Buffoni. «Il metodo delle singolarità idrodinamiche». In: *Idrodinamica*. 2015. Cap. VII, pp. 77–110. URL: <http://www.dic.unipi.it/e.buffoni/Idrodinamica/capitolo%207.pdf>.
- [6] CINECA. *GALILEO100—SCAI*. URL: <https://www.hpc.cineca.it/hardware/galileo100> (visitato il 25/08/2023).
- [7] P. Costa. «A fft-based finite-difference solver for massively-parallel direct numerical simulation of turbulent flows». In: *Computers & Mathematics with Application* 76(8) (2018), pp. 1853–1862.
- [8] «Flutter Phenomenon in Aeroelasticity and Its Mathematical Analysis». In: *Journal of Aerospace Engineering* 19.1 (2006), pp. 1–12.
- [9] Giorgio Graziani. *Aerodinamica*. casa editrice universitaria La Sapienza, 2018.

- [10] Matthew Hirschhorn et al. «Fluid–structure interaction modeling in cardiovascular medicine – A systematic review 2017–2019». In: *Medical Engineering & Physics* 78 (2020), pp. 1–13. ISSN: 1350-4533.
- [11] Ltd John Wiley & Sons. *Mesh Adaptation for Computational Fluid Dynamics 1*. 2022. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781394163991.ch1>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781394163991.ch1>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781394163991.ch1>.
- [12] Q.V. Le e F. Bobaru. «Surface corrections for peridynamic models in elasticity and fracture». In: *Computational Mechanics* (2018).
- [13] S. Lenci. «Criteri Energetici». In: *Lezioni di Meccanica Strutturale*. Pitagora Editrice Bologna, 2004. Cap. 13.3, pp. 381–387.
- [14] E. Madenci e E. Oterkus. «Peridynamic theory». In: *Peridynamic Theory and Its Applications* (2014), pp. 19–43.
- [15] Jean Mathieu e Julian Scott. *An Introduction to Turbulent Flow*. Cambridge University Press, 2000. DOI: 10.1017/CBO9781316529850.
- [16] Continuum Mechanics. *Von Mises Stress*. URL: <https://www.continuummechanics.org/vonmisesstress.html> (visitato il 13/10/2023).
- [17] Micropore. *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number, by A. N. Kolmogorov*. URL: <https://micropore.wordpress.com/2010/08/21/kolmogorov-originl-paper-on-turbulence/> (visitato il 04/09/2023).
- [18] Federico Dalla Barba Mirco Zaccariotto Francesco Picano e Ugo Galvanetto. «3d fluid-structure interaction with fracturing: a new method with application». In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 398:115210 (2022).
- [19] R. Mittal et al. «A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries». In: *Journal of Computational Physics* 227.10 (2008), pp. 4825–4852. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.01.028>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999108000235>.
- [20] Parviz Moin e Krishnan Mahesh. «DIRECT NUMERICAL SIMULATION: A Tool in Turbulence Research». In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 30.1 (1998), pp. 539–578.

- [21] G. Pertucci. «Criteri di resistenza». In: *Lezioni di Costruzioni di Macchine*. Cap. 11, pp. 11.1–11.13.
- [22] David R. Dowling Pijush K. Kundu Ira M. Cohen. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 2004.
- [23] Arash S. Fallah Illias N. Giannakeas Rizgar Mella Mark R. Wenman Yasser Safa e Hamid Bahai. «On the Computational Derivation of Bond-Based Peridynamic Stress Tensor». In: *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling* 2:352-378 (2020). DOI: <https://doi.org/10.1007/s42102-020-00036-9>.
- [24] S.A. Silling. «Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces». In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48.2 (2000), pp. 175–209.
- [25] S.A. Silling e R.B. Lehoucq. «Peridynamic theory of solid mechanics». In: *Advances in applied mechanics* 44 (2010), pp. 73–168.
- [26] SIMSCALE. *Turbulent Flow*. URL: <https://www.simscale.com/docs/simwiki/cfd-computational-fluid-dynamics/what-is-turbulent-flow/> (visitato il 04/09/2023).
- [27] Marcos Vanella e Elias Balaras. «A moving-least-squares reconstruction for embedded-boundary formulations». In: *Journal of Computational Physics* 228.18 (2009), pp. 6617–6628. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.003>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999109003246>.
- [28] Zeli Wang, Jianren Fan e Kun Luo. «Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles». In: *International Journal of Multiphase Flow* 34.3 (2008), pp. 283–302. ISSN: 0301-9322. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2007.10.004>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932207001474>.
- [29] S.A. Silling M. Epton O. Weckner J. Xu e E. Askari. «Peridynamic states and constitutive modeling». In: *Journal of Elasticity* 88(2) (2007), pp. 151–184.

Ringraziamenti

La fine di un percorso come quello universitario è sempre un momento segnante nella vita di una persona, la chiusura di un capitolo e l'inizio di uno nuovo e questo momento è finalmente giunto anche per me. Gli anni universitari sono stati molto importanti per me, segnati da diversi momenti stupendi, ma anche da molte paure, ansie e frustrazioni. Complessivamente sono soddisfatto di essere arrivato ad oggi, molti credevano che essendo uscito da un liceo artistico non sarei arrivato fino a questo punto, ma allo stesso tempo molte altre persone a me care mi hanno sempre sostenuto e hanno sempre creduto in me. Desidero ora esprimere la mia più sincera gratitudine a tutto coloro che mi hanno aiutato a raggiungere questo tanto agognato obiettivo.

Innanzitutto ci tengo a ringraziare il professor F. Picano e l'ing. F. Dalla Barba, rispettivamente il mio relatore e correlatore, per la loro guida durante questo lavoro di tesi e per la loro pazienza e costante disponibilità; chissà, forse un giorno potremmo ritrovarci ad essere colleghi.

Ci terrei poi a ringraziare tutti i miei amici, che mi hanno sempre aiutato a distrarmi quando ne avevo davvero bisogno e che mi hanno permesso di vivere avventure e creare ricordi da poter un giorno ricordare col sorriso.

Un ringraziamento speciale va poi a mio padre a mia madre e a mia sorella; avete sempre creduto in me e mi avete sempre sostenuto in ogni mia scelta, mi ritengo davvero fortunato di potervi chiamare la mia famiglia.

Infine, ma decisamente non per importanza, ci tengo a ringraziare Chiara, la mia compagna non solo in questo percorso universitario, ma anche nella vita; insieme abbiamo affrontato tutti gli alti e bassi di questi anni, sostenendoci a vicenda nei momenti peggiori e festeggiando insieme le vittorie raggiunte. Sei molto più speciale di quanto tu possa credere e sono sincero quando ti dico che senza di te non sarei mai arrivato dove sono ora.

Grazie di cuore a tutti,
Simone Vanuzzo.