

**Università degli Studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

Corso di Laurea in Fisica

**Tesi di laurea triennale**

## **Onde gravitazionali cosmologiche**

Laureando:  
**Matteo Lambriola**  
Matricola 617951

Relatore:  
**Prof. Sabino Matarrese**

---

**Anno Accademico 2014-2015**

*A mio cugino Carlo.*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Definizione di onda gravitazionale e principali proprietà</b>	<b>3</b>
<b>2 Bande di frequenza</b>	<b>7</b>
<b>3 Sorgenti di onde gravitazionali</b>	<b>9</b>
<b>4 Rivelatori di onde gravitazionali</b>	<b>12</b>
4.1 Rivelatori a massa risonante . . . . .	13
4.2 Rivelatori a fasci di radiazione . . . . .	14
4.3 Principali aspetti sperimentali dei rivelatori interferometrici e fonti di rumore . . . . .	16
4.4 Analisi dati e tecnica del <i>matched filtering</i> . . . . .	19
<b>5 Fondo stocastico di onde gravitazionali</b>	<b>20</b>
5.1 La rivelazione del fondo . . . . .	21
5.2 I vincoli fenomenologici sulla densità di energia del fondo . . .	23
5.3 Il fondo stocastico di origine inflazionaria . . . . .	24
5.4 Il ruolo del CMB e l'ipotesi dell'inflazione nella rivelazione del fondo cosmologico di radiazione gravitazionale . . . . .	24
<b>6 Conclusioni</b>	<b>30</b>



## Introduzione

Le onde gravitazionali sono una naturale conseguenza della teoria della relatività generale. Quest'ultima descrive tali onde come perturbazioni tensoriali della metrica spazio-temporale che si propagano alla velocità della luce. In ambito astronomico, l'eventuale rivelazione di onde gravitazionali aprirebbe una nuova finestra di indagine sull'Universo.

Oltre a permettere di testare la teoria della relatività generale di Einstein, infatti, l'osservazione diretta di tali onde rivelerebbe preziose informazioni su sistemi astrofisici non altrimenti studiabili e su diverse epoche dell'Universo primordiale. Lo spettro delle onde gravitazionali è completamente differente e complementare a quello delle onde elettromagnetiche. Mentre queste ultime sono oscillazioni del campo elettromagnetico che si propagano attraverso lo spazio-tempo, le onde gravitazionali sono oscillazioni del tessuto dello spazio-tempo stesso. Le onde elettromagnetiche sono facilmente assorbite, diffuse e disperse dalla materia, a differenza delle onde gravitazionali, le quali si propagano attraverso l'Universo astrofisico senza significativa attenuazione, scattering o dispersione. Le frequenze delle onde elettromagnetiche si estendono all'incirca per venti ordini di grandezza, in crescere, a partire da  $f \sim 10^7$  Hz; quelle delle onde gravitazionali sempre per venti ordini di grandezza, ma in decrescere, a partire da  $f \sim 10^4$  Hz. Se le prime, infatti, sono emesse generalmente da piccole regioni spaziali e con piccola lunghezza d'onda, fornendo informazioni dettagliate sulle diverse parti delle sorgenti da cui provengono, le seconde sono prodotte da moti di enormi sistemi o concentrazioni di massa-energia: hanno pertanto grandi lunghezze d'onda e forniscono informazioni su regioni ad ampia scala.

Queste profonde differenze suggeriscono, quindi, come le osservazioni a livello elettromagnetico siano, in realtà, scarse portatrici di informazioni riguardanti i fenomeni che i rivelatori di onde gravitazionali potrebbero in futuro scoprire. E poiché il 96% dell'energia-massa dell'Universo non è portatore di carica, le onde gravitazionali forniscono un'opportunità di indagine diretta dell'Universo.

Il fine della tesi è quello di fornire una descrizione il più possibile formale di tali perturbazioni della metrica spazio-temporale, definendo quindi il concetto di onda gravitazionale, per poi analizzare le sorgenti fisiche di tali perturbazioni ed i metodi di rivelazione più importanti, dando particolare rilievo al fondo stocastico cosmologico di onde gravitazionali. Si toccherà, infine, seppur brevemente, l'argomento BICEP2, in merito ai possibili sviluppi futuri nella ricerca di radiazione gravitazionale.

Il lavoro è, dunque, strutturato nel seguente modo: nel primo capitolo si definirà il concetto formale di onda gravitazionale, descrivendone le maggiori proprietà fisiche; nel secondo capitolo verranno distinte le bande di frequenza della radiazione; nel terzo capitolo si analizzeranno le sorgenti principali di tali onde nell'Universo; nel quarto capitolo verranno descritti i principali rivelatori (detectors) di onde gravitazionali, con attenzione a qualche saliente aspetto dell'analisi dati; il quinto capitolo, conclusivo, è dedicato al fondo stocastico di onde gravitazionali ed alla correlata importanza dello studio delle anisotropie

del CMB (Cosmic Microwave Background): si concluderà con una breve analisi dei risultati più importanti forniti dal progetto BICEP2 nel Marzo 2014.

Si adotterà la classica notazione tensoriale secondo la quale le lettere dell'alfabeto greco assumono i valori da 0 a 3, mentre le lettere di quello latino i valori da 1 a 3.

# 1 Definizione di onda gravitazionale e principali proprietà

La non linearità delle equazioni di campo di Einstein rende le soluzioni di tali equazioni analiticamente estremamente complesse. Dinanzi a tale problema, le possibili soluzioni da adottare sono le seguenti: cercare soluzioni particolari delle equazioni di Einstein, oppure studiare queste ultime in approssimazione di campo gravitazionale debole [1]. Una regione di spazio-tempo in cui il campo gravitazionale è debole, corrisponde ad una regione solo leggermente curva. In questa regione spazio-temporale sarà infatti possibile trovare un sistema di coordinate  $x^\mu$  nelle quali la metrica assume la forma [1]:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

dove  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  e le derivate parziali di  $h$  di primo grado e superiori sono infinitesime; tali coordinate si diranno quasi-Minkowskiane [2]. Il sistema di coordinate è arbitrario e, se ne esiste uno in cui vale la relazione sopra riportata, allora ne esisteranno molti altri aventi come proprietà la persistenza della stessa relazione.

Le trasformazioni generali infinitesime di coordinate rappresentano una tipologia di trasformazioni tra sistemi di coordinate aventi la proprietà suddetta, e si scrivono nella forma  $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ , dove  $\epsilon^\mu(x)$  sono quattro funzioni arbitrarie della posizione dello stesso ordine di grandezza di  $h_{\mu\nu}$ . Espandendo pertanto, in approssimazione di campo debole, le equazioni di campo gravitazionale  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -kT_{\mu\nu}$  in potenze di  $h_{\mu\nu}$ , e trascurando i termini non lineari, si ottengono le equazioni di campo linearizzate:

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} - \partial_\nu \partial_\rho \bar{h}_\mu^\rho - \partial_\mu \partial_\rho \bar{h}_\nu^\rho = -2kT_{\mu\nu}.$$

Queste ultime possono essere semplificate ulteriormente adottando il gauge di Lorenz. Le equazioni nel gauge di Lorenz assumono infatti la forma:

$$\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = -2kT^{\mu\nu},$$

purchè sia valida la condizione di gauge

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0.$$

Nello spazio vuoto, le equazioni si riducono a:

$$\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = 0$$

e pertanto avranno come soluzioni onde piane della forma:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho},$$

dove  $A^{\mu\nu}$  sono componenti costanti complesse di un tensore simmetrico e  $k_\mu$  sono componenti costanti reali di un vettore. Sostituendo, si trova che devono

essere soddisfatte le condizioni  $k_\sigma k^\sigma = 0$ , cioè il vettore  $\vec{k}$  deve essere nullo, e  $A^{\mu\nu} k_\nu = 0$ . Convenzionalmente si denotano le componenti del quadrivettore con  $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$ , dove  $\vec{k}$  è un vettore spaziale di direzione uguale a quella di propagazione. Poiché  $\vec{k} \neq 0$ , allora si ha  $\omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2$ : sia la velocità di gruppo che quella di fase dell'onda sono quindi pari a quella della luce. In generale si ha pertanto, per linearità, che una generica soluzione delle equazioni di campo nel vuoto assume la forma:

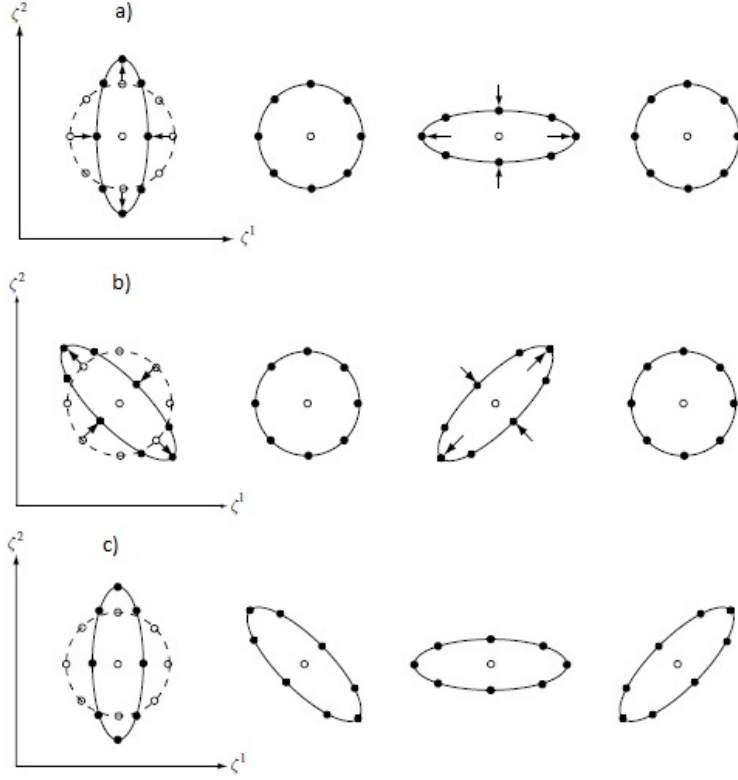
$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = \int A^{\mu\nu}(\vec{k}) e^{ik_\rho x^\rho} d^3\vec{k}.$$

Le soluzioni fisiche si ottengono prendendo la parte reale di tale espressione. Poiché il tensore  $A^{\mu\nu}$  è simmetrico, esso ha dieci componenti differenti. Tuttavia la condizione di gauge riduce questo numero a sei. Operando un'ulteriore trasformazione di gauge che preservi il gauge di Lorenz, il numero di componenti indipendenti si riduce a due, risultato corrispondente a due polarizzazioni distinte per le onde piane gravitazionali.

Questo nuovo gauge adottato è noto come Transverse-traceless gauge (o TT gauge) e permette l'introduzione di due tensori lineari di polarizzazione  $e_x^{\mu\nu}$  e  $e_+^{\mu\nu}$ . Tutti i possibili stati di polarizzazione dell'onda gravitazionale saranno così ottenuti dalla combinazione di soltanto due stati di polarizzazione indipendenti, con le relative fasi ed ampiezze.

A differenza delle onde elettromagnetiche, i due stati di polarizzazione di radiazione gravitazionale hanno un angolo relativo di  $\pi/4$ . Supponendo di avere un insieme di particelle libere disposte ad anello (vedi figura 1) giacenti nel piano  $(x, y)$ , l'effetto del passaggio di un'onda gravitazionale che viaggia in direzione dell'asse  $z$  è mostrato in figura per i due rispettivi stati di polarizzazione e per una polarizzazione circolare *right-handed* [2,3].





**Figura 1:** Rappresentazione degli stati di polarizzazione. Si veda Ref.[2]

La soluzione generale delle equazioni di Einstein linearizzate, in presenza di un tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$  non nullo, è data dalla formula:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(ct, \vec{x}) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\mu\nu}(ct - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y},$$

dove  $\vec{x}$  rappresenta la coordinata in cui si valuta  $h^{\mu\nu}$ , mentre  $\vec{y}$  è la coordinata del punto nella sorgente. Espandendo in termini di multipoli tale equazione si giunge all'espressione:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(ct, \vec{x}) = -\frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} M^{\mu\nu i_1 \dots i_l}(ct_r) \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \left( \frac{1}{r} \right),$$

dove i multipoli M sono dati da

$$M^{\mu\nu i_1 \dots i_l}(ct) = \int T^{\mu\nu}(ct, \vec{y}) y^{i_1} \dots y^{i_l} d^3\vec{y}.$$

Poiché l'andamento con la distanza del termine associato all' $l$ -esimo momento di multipolo è del tipo  $1/r^{l+1}$ , a grandi distanze dalla sorgente (approssimazione di campo lontano) il campo gravitazionale sarà ben approssimato dai primi termini dell'espansione. Introducendo poi l'assunzione, detta post-Newtoniana [4], [5], che le velocità tipiche delle particelle interne al sistema rappresentato dalla

sorgente di emissione siano piccole comparate con  $c$ , la soluzione assume la forma [2], detta in *approssimazione di sorgente compatta*:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(ct, \vec{x}) = -\frac{4G}{c^4 r} \int T^{\mu\nu}(ct - r, \vec{y}) d^3\vec{y},$$

dove si è in approssimazione di campo lontano. Definendo il tensore del momento di quadrupolo della densità di energia della sorgente come:

$$I^{ij} = \int T^{00}(ct, \vec{y}) y^i y^j d^3\vec{y},$$

possiamo ottenere la formula di quadrupolo [2]:

$$\bar{h}^{ij}(ct, \vec{x}) = -\frac{2G}{c^6 r} \left[ \frac{d^2 I^{ij}(ct')}{dt'^2} \right]_r$$

dove la notazione  $[ \ ]_r$  indica che l'espressione va calcolata al tempo ritardato  $ct_r = ct - r$ .

Quel che si evince, dunque, è che il tensore tridimensionale dell'ampiezza dell'onda gravitazionale è proporzionale alla derivata seconda del tensore di momento di quadrupolo. È possibile, dunque, stimare l'ampiezza di un'onda gravitazionale generata da una sorgente. Una tipica componente di  $d^2 I_{ij}/dt^2$  avrà un valore dell'ordine di grandezza di  $(Mv^2)_{\text{nonsf}}$ , dove  $(Mv^2)_{\text{nonsf}}$  è il doppio della componente non sferica dell'energia cinetica interna della sorgente [3,6]. Un limite ad una qualsiasi componente del tensore  $h^{ij}$  sarà dunque [3]:

$$h < \frac{2(Mv^2)_{\text{nonsf}}}{r}$$

E' interessante notare che il rapporto tra l'ampiezza dell'onda e il potenziale Newtoniano  $\phi_{\text{ext}}$  della sorgente, alla distanza  $r$  a cui si trova l'osservatore, è limitato in tal modo:

$$\frac{h}{\phi_{\text{ext}}} < 2v_{\text{nonsf}}^2,$$

dove la relazione è valida nel caso in cui la massa della sorgente sia coinvolta in moti non sferici. Per emettere radiazione intensa, la sorgente dovrà avere, pertanto, una grande energia interna cinetica non sferica. Il miglior modo di ottenere una tale energia è per via gravitazionale, e, per il teorema viriale, ogni energia cinetica indotta per via gravitazionale dovrà essere dell'ordine dell'energia potenziale gravitazionale della sorgente. Un enorme energia potenziale richiede, però, che la sorgente sia estremamente compatta, non molto più estesa del suo raggio gravitazionale. E in sorgenti altamente compatte, massive e dinamiche, si avrà grande perdita di energia dovuta a radiazione gravitazionale e/o formazione di buchi neri: tali sorgenti saranno, quindi, transitorie e soprattutto molto rare nell'Universo.

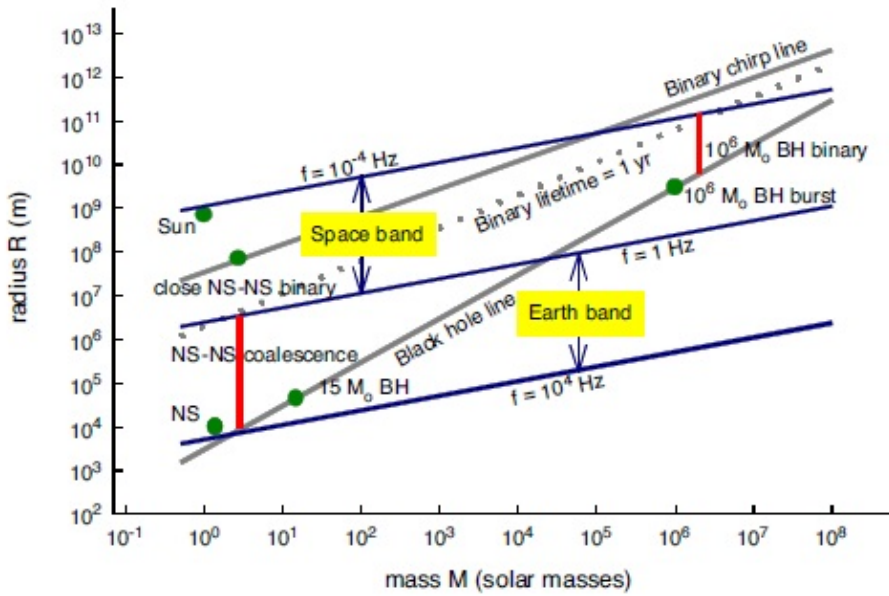
Con semplici stime, si scopre che, per sorgenti aventi energia cinetica interna non sferica  $E_{\text{kin}}^{ns}/c^2$  dell'ordine della massa del Sole,  $h \sim 10^{-22}$  per distanze della sorgente pari a 3000 Mpc,  $h \sim 10^{-21}$  a 200 Mpc,  $h \sim 10^{-20}$  a 15 Mpc (ammasso di galassie Virgo) e  $h \sim 10^{-17}$  a 20 kpc (regioni più esterne della

Via Lattea). Queste stime, seppur banali, impongono che gli apparati di rivelazione di onde gravitazionali siano sensibili ad ampiezze di ordine variabile tra  $h \sim 10^{-21}$  e  $h \sim 10^{-22}$  [3,6].

La formula generale che esprime il valore della frequenza  $f$  di un'onda gravitazionale emessa da una sorgente compatta di massa  $M$  e raggio  $R$  è:

$$f \leq \frac{1}{4\pi GM/c^3} \sim 10^4 \frac{M_\odot}{M} \text{ Hz}$$

In molti casi  $f$  è legata alla frequenza naturale della sorgente, definita come  $f_0 = \sqrt{\frac{G\bar{\rho}}{4\pi}}$ , dove  $\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}$ . La figura 3 mostra il diagramma massa-raggio per diverse sorgenti gravitazionali.



**Figura 2:** Grafico massa-raggio per diverse sorgenti di onde gravitazionali. Ref[3].

L'espressione della luminosità di un'onda gravitazionale nell'approssimazione di quadrupolo, ottenuta integrando il flusso di energia su una sfera distante, è [7,8]:

$$L_{gw} = \frac{1}{5} \left( \sum_{jk} \ddot{I}_{jk} \ddot{I}_{jk} - \frac{1}{3} \dot{I}^2 \right)$$

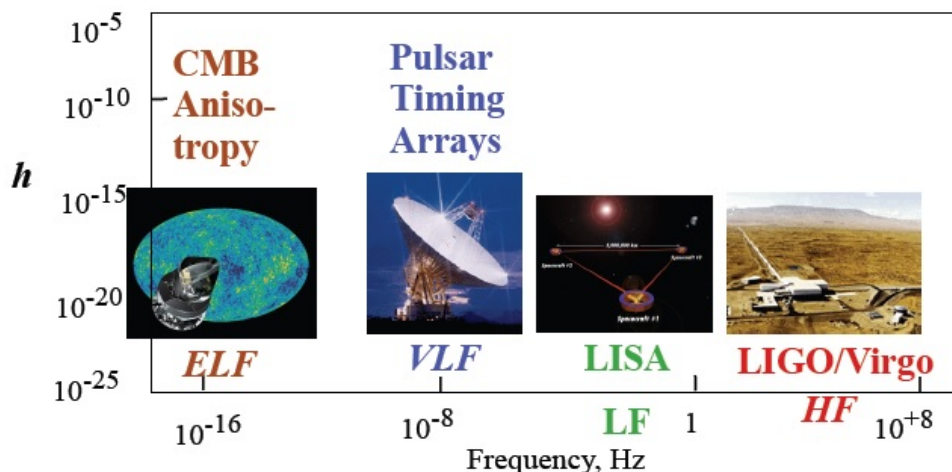
dove  $I$  è la traccia della matrice  $I_{jk}$ .

## 2 Bande di frequenza

Si stanno sperimentalmente esplorando quattro bande di frequenza di onde gravitazionali: la banda di alta frequenza (HF;  $f \sim 10^4$  fino a 1 Hz), la banda di bassa frequenza (LF;  $f \sim 1$  fino a  $10^{-4}$  Hz), la banda di frequenza molto

bassa (VLF;  $f \sim 10^{-7}$  fino a  $10^{-9}$  Hz) e la banda di estremamente bassa frequenza (ELF;  $f \sim 10^{-15}$  fino a  $10^{-18}$  Hz) [6].

In figura, l'illustrazione qualitativa delle quattro bande di frequenza.



**Figura 3:** Presa da Thorne, K.S., Lorentz Lectures, University of Leiden, 2009.

La banda di alta frequenza HF è il dominio dei rivelatori terrestri di onde gravitazionali: interferometri laser e antenne a massa risonante. A frequenze inferiori a 1 Hz, questi rivelatori soffrono di problemi di rumore insormontabili, dovuti essenzialmente a gradienti di gravità newtoniana fluttuanti (non uniformità nell'atmosfera terrestre) ed alle vibrazioni terrestri, molto difficili da filtrare meccanicamente al di sotto di 1 Hz. Rientrano in questa banda HF numerose sorgenti: i collassi stellari originanti stelle di neutroni o buchi neri; le rotazioni e vibrazioni di stelle di neutroni (pulsars) nella nostra galassia; la coalescenza di sistemi binari di stelle di neutroni e buchi neri di massa stellare ( $M < 1000M_{\odot}$ ) in galassie distanti; transizioni di fase nell'Universo primordiale, stringhe cosmiche ed il Big Bang.

La banda di bassa frequenza LF è il dominio dei rivelatori in orbita terrestre o interplanetaria. I più importanti di questi sono rivelatori basati sul tracciamento Doppler di sistemi spaziali via microonde inviate dalla Terra a questi e poi rinviati alla Terra (tecnologia NASA) e gli interferometri laser nello spazio (eLISA). Il limite inferiore di  $10^{-4}$  Hz è definito da problemi di isolamento dei sistemi orbitanti dalla pressione di radiazione solare, vento solare e raggi cosmici. Questa banda è popolata da sorgenti quali sistemi binari di stelle a breve periodo nella nostra galassia (variabili cataclismiche, stelle di neutroni binarie), nane bianche, stelle di neutroni e buchi neri orbitanti verso un buco nero più massivo ( $M \sim 3 \cdot 10^5$  fino a  $3 \cdot 10^7 M_{\odot}$ ) in distanti galassie e dalla coalescenza di sistemi binari di buchi neri supermassivi ( $M \sim 100$  fino a  $10^8 M_{\odot}$ ). Vi sarà anche, come per la banda HF, un fondo stocastico dovuto a transizioni di fase, Big Bang e stringhe cosmiche vibranti.

La banda VLF può essere popolata solo da sorgenti compatte massive, in particolare deve valere  $M > 10^{11} M_{\odot}$  [6]. Poiché l'astronomia suggerisce che

sorgenti di tale massa non esistono, le sole onde gravitazionali intense prodotte in tale banda apparterranno a un fondo stocastico generato da stringhe cosmiche, Big Bang e transizioni di fase.

Joseph Taylor ed altri hanno raggiunto una notevole sensibilità in tale banda analizzando le pulsars. Quando un'onda gravitazionale passa sulla Terra, perturba lo scorrere del tempo sul pianeta, causando apparenti fluttuazioni nei tempi di arrivo dei segnali (impulsi) delle pulsars. Mediando i tempi di arrivo degli impulsi su lunghi periodi di tempo, si può ottenere un'alta precisione sui tempi stessi, che permette di definire dei limiti sulle onde gravitazionali che investono la Terra:  $10^{-7}$  Hz (limite superiore) è imposto dal tempo necessario per mediare dati ottenendo alta accuratezza, corrispondente a qualche mese;  $10^{-9}$  Hz (limite inferiore) è imposto invece dalla data di prima scoperta di pulsars molto stabili, risalente a circa 40 anni fa.

Per concludere, le onde gravitazionali nella banda ELF dovrebbero produrre anisotropie nella temperatura e polarizzazione della radiazione cosmica di fondo (CMBR). Per  $f 10^{-18} Hz$ , la lunghezza d'onda dell'onda è di circa  $\pi$  volte la distanza di Hubble e le onde, deformando tutto lo spazio dentro al nostro orizzonte cosmologico, dovrebbero produrre anisotropia di quadrupolo nel fondo di microonde.

### 3 Sorgenti di onde gravitazionali

Le sorgenti meglio conosciute sono costituite da sistemi binari compatti coalescenti di stelle di neutroni (NS) e buchi neri (BH), ovvero sistemi NS/NS, BH/BH o NS/BH.

Nella banda di alta frequenza, sorgenti chiave sono collassi di nuclei stellari, coalescenze di sistemi binari (NS/NS, BH/BH, NS/BH), stelle di neutroni e formazioni di buchi neri. Nella banda di bassa frequenza le sorgenti note sono, invece, sistemi binari di stelle, formazione e coalescenza di buchi neri supermassivi (SMBH) e cattura di oggetti compatti da parte di SMBHs [15]. Le stelle di neutroni e i buchi neri sono formati dal collasso gravitazionale di una stella o dal collasso del nucleo di una nana bianca. In entrambi i casi, se il collasso è non sferico, la radiazione gravitazionale può sottrarre parte dell'energia di legame del sistema.

I collassi gravitazionali si ritiene producano supernovae di diversi tipi e la maggior parte delle emissioni di raggi gamma [9] in ipernovae e collapsar [10,11]. Di Supernovae di tipo II si stima se ne presentino circa 30 casi ogni anno nel superammasso della Vergine, mentre le ipernovae sono molto più rare.

La simulazione di collassi gravitazionali costituisce un'area di ricerca molto attiva in astrofisica: le simulazioni suggeriscono che in una tipica supernova le onde gravitazionali possano estrarre circa  $10^{-7}$  o  $10^{-5}$  dell'energia-massa totale [12,13,14] con emissione di frequenza compresa tra 200 e 1000 Hz.

Analizzando la radiazione emessa da un sistema binario di stelle in evoluzione orbitante, si nota come due stelle di massa  $m$ , in orbita circolare di raggio  $R$ , abbiano tutta la loro massa in moto non sferico; si ha quindi  $(Mv^2)_{\text{nonsf}} = M(\Omega R)^2 = M^2/R$  con  $\Omega$  velocità orbitale angolare [3].

L'ampiezza dell'onda gravitazionale si scrive dunque:

$$h_{\text{binaria}} \sim \frac{2}{r} M^{5/2} \Omega^{2/3}.$$

La radiazione provoca un restringimento dell'orbita, il quale provocherà un aumento della frequenza delle onde emesse col tempo (chirp). Con l'evoluzione del sistema, frequenza e ampiezza delle onde emesse crescono, rendendo così l'evoluzione sempre più rapida. La crescita della frequenza si arresterà quando le due stelle si troveranno nella ultima orbita stabile (LSO), cioè per  $R = 6M$ , corrispondente a  $f_{LSO} \sim 220 \cdot (20M_{\odot}/M)$  Hz [3].

Nel caso di masse stellari diverse (nel sistema binario) si avrà:

$$h_{\text{binaria}} \sim \frac{2}{r} \mathcal{M}^{5/2} \Omega^{2/3},$$

dove  $M$  è la *chirp mass*:

$$\mathcal{M} = \mu^{3/5} M^{2/5} = \nu^{3/5} M, \quad \nu = \frac{\mu}{M},$$

con  $\mu$  massa ridotta,  $M$  massa totale,  $\nu$  sopra definito.

La velocità di restringimento dell'orbita, misurata come tasso di variazione della frequenza orbitale  $P_b$ , dipende dalla chirp mass secondo:

$$\dot{P}_b = -\frac{192\pi}{5} \left( \frac{2\pi\mathcal{M}}{P_b} \right)^{5/3}$$

e il *chirp time*, scala temporale peculiare del sistema, vale:

$$t_{\text{chirp}} = \frac{5M}{96} \frac{1}{\nu} \left( \frac{M}{R} \right)^{-4}.$$

L'osservazione delle ampiezze, frequenze e contenuto armonico delle onde gravitazionali derivanti da orbite che perdono gradualmente energia gravitazionale può fornire la distanza delle sorgenti in questione, la chirp mass, inclinazione ed eccentricità, oltre che misure della costante di Hubble ed altri parametri cosmologici [6,16].

L'esempio più noto degli effetti della radiazione gravitazionale su un sistema orbitante è la Hulse- Taylor Binary Pulsar, PSR B1913+16, consistente in due stelle di neutroni in orbita eccentrica. Tutti i parametri importanti del sistema possono essere misurati prima di considerare il restringimento orbitale dovuto alla radiazione gravitazionale; in particolare semiasse maggiore ed eccentricità dell'orbita sono note [17,18].

L'equazione per il chirp time prevede che il periodo orbitale  $P_b = 7.75$  hrs vari su una scala di tempo di  $1.9 \cdot 10^{18}$  s. Considerando le correzioni dovute all'eccentricità dell'orbita, Peter e Mathews forniscono un valore  $\dot{P}_T = -(2.40242 \pm 0.00002) \cdot 10^{-12}$  [19], che va ulteriormente corretto tenendo conto dell'accelerazione del sistema binario verso il centro della Via Lattea, fornendo [17, 20]  $\dot{P} = -(2.4056 \pm 0.0051) \cdot 10^{-12}$ , in accordo con le osservazioni entro le incertezze sperimentali. Questo successo rappresenta il più sensibile test

in nostro possesso circa la correttezza delle equazioni di Einstein per ciò che concerne la radiazione gravitazionale. Altri sistemi di pulsars sono noti, in particolare *doppie pulsar* in cui ogni stella di neutroni è vista come una pulsar [21].

Un sistema binario compatto che si unisce dopo aver superato l'ultima orbita stabile è una potente sorgente di onde gravitazionali e si dirà *binaria coalescente*. Eventi simili sono esigui e distanti nella nostra galassia: uno ogni 100000 anni secondo Phinney, Narayan, Piran e Shemi [22,23]. Questi ultimi conclusero che per rivelare tre eventi di coalescenza di sistemi NS/NS per ogni anno, LIGO/VIRGO avrebbero dovuto spingersi fino a 200 Mpc di distanza. Modellizzando l'evoluzione della popolazione di sistemi binari NS/NS della Via Lattea, gli esperti stimano al meglio un tasso di  $3 \cdot 10^{-4}$  coalescenze all'anno, corrispondenti a diversi eventi all'anno a distanze di 60 Mpc e superiori.

Per ciò che riguarda sistemi NS/BH e BH/BH, alcuni dati suggeriscono che entro 200 Mpc sarebbero visibili tre eventi di coalescenza ogni anno, per entrambi i tipi di sistemi [24]. Tuttavia la frequenza di tali eventi è decisamente più incerta di quella dei sistemi NS/NS.

Alcune informazioni note circa la coalescenza di diversi tipi di sistemi sono le seguenti:

- **BH/BH:** saranno emesse vibrazioni di grande ampiezza ed altamente non lineari della curvatura dello spazio-tempo in prossimità degli orizzonti dei buchi neri, fenomeno ancora oggi poco compreso. Il caso di due buchi neri con spin non allineati tra loro o col momento angolare è peculiare: il sistema apparirà infatti come due tornado con orientazioni diverse, immersi in un terzo tornado di orientazione ancora diversa e più grande. Si stanno studiando tuttora pesanti simulazioni numeriche di eventi simili.
- **NS/NS:** saranno prodotte onde sensibili all'equazione di stato nucleare, quindi utili allo studio di quest'ultima [29], nel range di frequenza  $800 \text{ Hz} < f < 2500 \text{ Hz}$ . La rivelazione di tali onde testerebbe la teoria secondo la quale la fusione finale di sistemi NS/NS sarebbe la fonte delle raffiche (*burst*) di raggi gamma, visibili ad un tasso di circa una al giorno da rivelatori specifici disposti su satelliti. Se tale teoria si rivelasse vera, la combinazione dello studio delle onde gravitazionali emesse e dei burst permetterebbe di verificare che la velocità di propagazione delle onde gravitazionali è pari a  $c$  con precisione frazionale di  $10^{-19}$ .
- **NS/BH:** una NS che orbita attorno a un BH di massa  $M > 10M_{\odot}$  verrebbe inghiottito intero o quasi. Se il BH è meno massivo e rapidamente rotante, le maree gravitazionali distruggeranno la NS prima del *merge*. Per modellizzare eventi tali è richiesto il calcolo numerico relativistico.

Altre sorgenti di onde gravitazionali sono rappresentate da:

- **collassi nucleari stellari e Supernovae:** esaurito il combustibile di una stella massiva, il suo nucleo collassa formando una stella di neutroni o

un buco nero. In certi casi, il collasso innesca un'esplosione del mantello della stella, un'esplosione di supernova. Il collasso genera una stella di neutroni che bolle intensamente e non sfericamente per i primi 0.1 secondi della sua vita. Materiale nucleare alla temperatura di  $10^{12}$  K viene trasportato verso la superficie stellare, ove si raffredda per emissione di neutrini [6]. Viene stimato che le onde gravitazionali prodotte dal fenomeno abbiano frequenza prossima a 100 Hz [26];

- **stelle di neutroni rotanti:** quando la stella di neutroni si avvicina al suo stato finale, la sua crosta comincia a solidificare, assumendo la forma oblatata e circa assi-simmetrica che le forze centrifughe stanno cercando di mantenere. Tuttavia la stella può deviare dalla simmetria assiale attorno al suo asse principale d'inerzia. Questa irregolarità rotante genera onde gravitazionali [27];
- **sistemi binari di nane bianche WD/WD:** rientrano nei sistemi binari a corto periodo. Sono così numerosi che potrebbero produrre un fondo stocastico di onde gravitazionali che nasconderebbe altri singoli eventi interessanti [28].
- **coalescenza di buchi neri massivi in galassie distanti:**
- **corpi compatti orbitanti attorno a buchi neri massivi in galassie distanti:** quando un corpo compatto di massa  $\mu$  orbita attorno a un buco nero di massa  $M$ , l'energia orbitale del corpo  $E$  a frequenza fissata  $f$  scala come  $E \propto \mu$ , la luminosità dell'onda gravitazionale  $\dot{E}$  scala come  $\dot{E} \propto \mu^2$  e il tempo prima della coalescenza finale come  $t \propto E/\dot{E}$ . Minore è il rapporto  $\mu/M$ , dunque, maggiore è il numero di orbite spese nella regione di forte gravità del buco nero e maggiormente accurata sarà la mappatura della geometria spazio-temporale ottenuta;
- **buchi neri supermassivi:** osservazioni indicano che probabilmente ogni galassia ospita al suo centro un buco nero di massa compresa tra  $10^6$  e  $10^9 M_\odot$  [29], cioè un SMBH. Per un sistema di due buchi neri non rotanti di massa  $M = 10^6 M_\odot$ , la frequenza delle onde gravitazionali emesse nell'ultima orbita stabile LSO è di  $f_{LSO} = 4$  mHz; durante la coalescenza questa frequenza cresce fino alla frequenza del *modo quasi-normale* di 24 mHz;
- **sorgenti cosmologiche:** Big Bang, stringhe cosmiche, inflazione, transizioni di fase di primo ordine; rappresentano le sorgenti primordiali di onde gravitazionali il cui lascito sarebbe una radiazione fossile nell'Universo. Per dettagli ulteriori, anche se contenuti, si veda la sezione sul fondo stocastico, capitolo 5.

## 4 Rivelatori di onde gravitazionali

I rivelatori di onde gravitazionali si dividono generalmente in due classi: i rivelatori a raggi (ove con raggi si intende radiazione, onde radio o laser, ad



esempio) e i rivelatori a massa risonante. Entrambe le classi includono una varietà di sistemi. I più importanti rivelatori a raggi sono gli interferometri a raggi laser terrestri operanti in diversi punti della Terra, e.g. LIGO negli USA. La missione LISA, coordinata da ESA e NASA, ha invece come obiettivo quello di porre nello spazio un interferometro laser per rivelare onde gravitazionali attorno al mHz di frequenza. I rivelatori a raggi non necessariamente implicano la presenza di un interferometro: gli astronomi hanno monitorato per anni, solo per citare uno dei particolari metodi, le onde radio emesse da pulsars come prova dell'esistenza di onde gravitazionali, senza l'uso di interferometria ottica.

I rivelatori a massa risonante furono il primo tipo di rivelatori costruito in laboratorio: Joseph Weber [30] costruì due rivelatori a barre di alluminio cilindriche e, negli anni successivi, ne furono costruiti altri di sensibilità sempre maggiore anche grazie alla criogenia, e con forme diverse (sfere, icosaedri troncati, etc.) [31].

#### 4.1 Rivelatori a massa risonante

Un tipico rivelatore a barra consiste in un cilindro di alluminio di lunghezza  $l \sim 3$  m, una frequenza di risonanza  $f$  molto stretta tra 500 Hz e 1.5 kHz e di massa  $M \sim 1000$  kg. Una breve emissione di onde gravitazionali di  $h \sim 10^{-21}$  farà vibrare la barra con ampiezza:

$$\delta l_{gw} \sim hl \sim 10^{-21} m.$$

Esistono, per tale sistema, tre fonti principali di rumore.

- Rumore termico: i rivelatori più avanzati oggi, Nautilus [32] e Auriga [33] sono ultra-criogenici e operano alla temperatura di 100 mK. A tale temperatura l'ampiezza media quadratica di vibrazione è:

$$(\delta l^2)_{th}^{1/2} \sim \left( \frac{kT}{4\pi^2 M f^2} \right)^{1/2} \sim 6 \cdot 10^{-18} \text{ m}$$

valore molto più grande dell'ampiezza aspettata delle onde gravitazionali da fonti astrofisiche. Se il materiale ha, però, un alto valore  $Q$  ( $10^6$  circa) nel suo modo fondamentale, possono approssimare l'obiettivo di rivelazione di onde di ampiezza  $h = 10^{-20}$ .

- Rumore di sensore: un trasduttore converte l'energia meccanica della barra in energia elettrica, e un amplificatore amplifica tale segnale. Gli amplificatori introducono rumore, rendendo difficile misurare piccole ampiezze. Le ampiezze di vibrazione sono maggiori nella banda di risonanza vicino a  $f$ ; pertanto il rumore degli amplificatori limita la sensibilità del rivelatore a onde gravitazionali di frequenza prossima a  $f$ .
- Rumore quantistico: le vibrazioni di punto zero di una barra con frequenza di 1 kHz sono:

$$(\delta l^2)_{quant}^{1/2} = \left( \frac{h}{4\pi^2 M f} \right)^{1/2} \sim 4 \cdot 10^{-21} \text{ m}$$

Non è possibile andare oltre il limite quantistico. Tuttavia, definendo alcune osservabili che siano sensibili alle onde gravitazionali, è possibile ottenere misure accurate pagando le piccole incertezze su queste ultime con grandi errori nelle variabili rispettivamente coniugate [38].

Affinché una rivelazione sia affidabile, richiede osservazioni coincidenti, nelle quali due o più rivelatori confermano i risultati degli altri. L'IGEC, International Gravitational Event Collaboration, nel 2003 ha analizzato su lungo periodo i risultati sperimentali coincidenti di più rivelatori e non ha trovato prove di eventi significativi [35]. Il rivelatore ALLEGRO, nella Università di stato della Louisiana, ha operato in maniera congiunta con l'interferometro vicino LIGO, imponendo un limite superiore sul fondo stocastico di onde gravitazionali di 900 Hz circa, pari a  $h_{100}^2 \Omega_{gw}(f) \leq 0.53$  [36]. Nonostante la notevole difficoltà nel raggiungere una sensibilità sperimentale utile, questo tipo di rivelatori, data l'estrema sensibilità che hanno entro la loro stretta banda di frequenza, li rende adatti alla ricerca specializzata ad alta frequenza, in particolare per correlazioni incrociate di ricerca del fondo stocastico [37]. Nuovi designs vengono sempre proposti: è possibile ad esempio costruire grandi sfere di diametro compreso tra 1 e 3 metri circa, andando ad incrementare la massa del rivelatore e migliorando la recettività direzionale. Con rivelatori sferici si può teoricamente scendere al di sotto di  $10^{-21}$  [38]. Un simile prototipo è stato costruito in Olanda [39], ed un altro in Brasile [40].

## 4.2 Rivelatori a fasci di radiazione

Gli interferometri usano raggi laser per misurare variazioni nella differenza tra le lunghezze di due bracci perpendicolari (o quasi perpendicolari). Anche altri tipi di rivelatori, però, fanno uso di radiazione elettromagnetica, ad esempio per ciò che riguarda misurazioni di distanza di sistemi spaziali orbitanti nel Sistema Solare e dei tempi caratteristici delle pulsars [3].

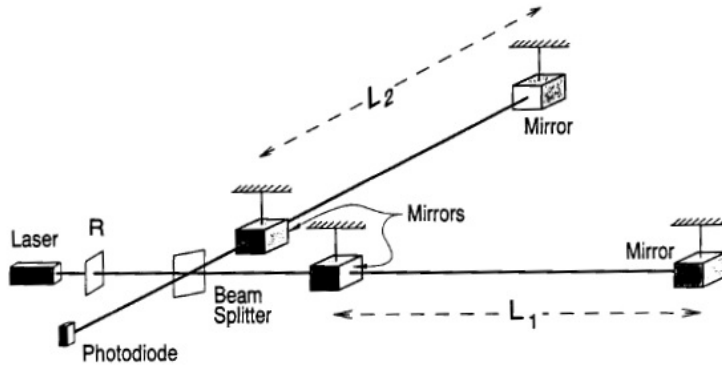
Per comprendere il principio di funzionamento di un simile apparato, si deve studiare l'equazione che descrive l'effetto dell'interazione di un'onda gravitazionale piana con un raggio di luce. Supponendo un angolo  $\theta$  tra la direzione del raggio e la direzione dell'onda piana, si immagina un basilare esperimento, per il quale il raggio di luce origina in un orologio di tempo proprio  $t$  e venga ricevuto da un secondo orologio di tempo proprio  $tf$ . Il raggio e la direzione di propagazione dell'onda determinano un piano, e si denota la componente di polarizzazione agente in questo piano con  $h_+(t)$  come misurata nel luogo dell'orologio originale. La distanza propria tra gli orologi, in assenza dell'onda, è  $L$ . Se l'orologio originante possesse marcature orarie sul raggio di luce, allora l'orologio ricevente potrebbe misurare il tasso a cui arrivano queste marcature. In assenza dell'onda il tasso sarà costante e normalizzato a uno. L'effetto dell'onda gravitazionale è di cambiare la velocità di arrivo in funzione del tasso di emissione secondo:

$$\frac{dt_f}{dt} = 1 + \frac{1}{2}(1 + \cos\theta) \{h_+[t + (1 - \cos\theta)L] - h_+(t)\}$$

I migliori orologi a disposizione oggi sono stabili entro poche parti su  $10^6$  [41], imponendo come limite minimo rivelabile, all'ampiezza delle onde. Il valore di  $h \sim 10^{-15}$ . Un interferometro laser consiste di quattro masse sospese su supporti isolanti dalle vibrazioni e dell'apparato ottico che monitora le separazioni tra le masse. Due masse sono vicine tra loro, agli estremi di una  $L$ , e una massa è agli estremi di ognuno dei bracci. La lunghezza dei bracci è circa eguale,  $L_1 \sim L_2 = L$  [6]. Quando un'onda gravitazionale attraversa il sistema, spinge le masse avanti e indietro come se fossero libere dai loro sostegni, cambiando il valore della differenza di lunghezza delle due braccia  $\Delta L = L_1 - L_2$ . Questa variazione è monitorata grazie all'interferometria laser in maniera tale che le variazioni nel segnale prodotto dal fotodiodo siano direttamente a  $\Delta L$ . In generale vale la seguente relazione:

$$\Delta L(t)/L = F_+ h_+(t) + F_x h_x(t) = h(t),$$

dove i coefficienti  $F_+$  e  $F_x$  sono dell'ordine dell'unità e dipendono in maniera quadrupolare dalla direzione della sorgente rispetto al rivelatore e dall'orientazione del rivelatore stesso [46].  $h(t)$  verrà detto *gravitational-wave strain* agente sul rivelatore, mentre le evoluzioni temporali di  $h(t), h_+(t), h_x(t)$  verranno dette *forme d'onda*.



**Figura 4:** Rappresentazione schematica del rivelatore ad interferometro laser. Ref[54]

Le masse di test del rivelatore sono fatte di silicio fuso trasparente. Le facce interne delle masse sono ricoperte di un materiale dielettrico ad alta riflettanza, andando a formare così gli specchi necessari; le facce esterne sono invece ricoperte di materiale a bassa riflettanza. I due specchi di uno stesso braccio del rivelatore formano la cosiddetta *cavità di Fabry-Perot*. Tramite uno splitter, un raggio laser accuratamente preparato viene diviso in due e diretto nei due bracci: ogni raggio penetra attraverso il rivestimento antiriflettente della massa posta all'angolo di ogni braccio (cioè la massa più vicina allo splitter), attraverso la massa e quindi quindi attraverso lo specchio, per poi finire intrappolato nella cavità di Fabry-Perot, studiata per avere lunghezza pari a circa un numero intero di lunghezze d'onda del raggio. Gli specchi situati al termine della cavità, hanno riflettanza più elevata di quelli "ad angolo"

(*corner mirrors*), in modo da permettere la ricombinazione ed interferenza dei due raggi allo splitter. Una ampia porzione del raggio ricombinato torna al laser ma viene riciclata grazie ad uno *specchio di riciclo* chiamato  $R$ , mentre una piccola porzione finisce al fotodiodo.

Quando un'onda gravitazionale colpisce il rivelatore, la fase relativa dei due raggi che ritornano allo splitter è alterata di una quantità  $\Delta\Phi \propto \Delta L$  e tale variazione, a sua volta, causa un cambiamento nell'intensità della luce ricombinata al fotodiodo, pari a  $\Delta I_{fd} \propto \Delta\Phi \propto \Delta L \propto h(t)$  [6]. La variazione di corrente di output del fotodiodo è, quindi, direttamente proporzionale allo strain  $h(t)$ . Questo modo di monitorare  $h(t)$  è stato ideato da Ronald Drever [43], come modifica alla concezione di interferometro di Rainer Weiss [44].

I principali progetti di rivelatori a interferometri terrestri sono i seguenti:

- LIGO: il rivelatore LIGO consiste principalmente di due strutture vuote, con bracci lunghi circa 4 km, situate rispettivamente ad Hanford, Washington e Livingston, Louisiana (ad Hanford in realtà sono due i rivelatori, di cui uno con bracci di 2 km, che condividono lo stesso sistema a "vuoto"). I primi interferometri di queste due strutture sono stati costruiti da un team di circa 80 fisici e ingegneri del gruppo Caltech e del MIT, guidato da Barry Barish e Gary Sanders.
- VIRGO: un progetto italiano e francese, collocato a Pisa, Italia, con bracci di 3 km e sistemi di isolamento vibrazionale avanzati che lo renderanno più sensibile a frequenze più basse.

### 4.3 Principali aspetti sperimentali dei rivelatori interferometrici e fonti di rumore

Questo tipo di rivelatori è sensibile a qualsiasi direzione spaziale; è pertanto quasi impossibile dedurre informazioni sulla direzione della sorgente con un solo rivelatore: se ne useranno infatti diversi, ampiamente distanti e non collineari. Il numero minimo necessario per ottenere dati accettabili è tre, mentre un quarto, non giacente sul piano degli altri tre, migliorerebbe le suddette informazioni direzionali.

LIGO utilizza un laser Nd:YAG quasi infrarosso (lunghezza d'onda  $\sim 1064$  nm) con potenza di picco  $\sim 10$  W [49]. La luce laser pre-stabilizzata passa attraverso un *mode cleaner* triangolare, che lascia passare solo il modo TEM00. A partire dal mode cleaner, il sistema si trova in un vuoto capace di raggiungere la pressione di  $10^{-9}$  Torr.

Dall'equazione  $h \sim G\ddot{I}/(c^4 r)$ , si stima per la sensibilità richiesta dall'apparato un valore  $h \sim 10^{-21} - 10^{-22}$ , la quale implica che per ogni chilometro di  $L$  è necessario poter misurare variazioni di distanza più piccole di  $10^{-16}$  cm.

Gli atomi sulla superficie degli specchi delle masse test oscillano con ampiezza pari a [49]:

$$\delta l_{atom} = \sqrt{\frac{kT}{m\omega^2}} \sim 10^{-10} \text{ cm}$$

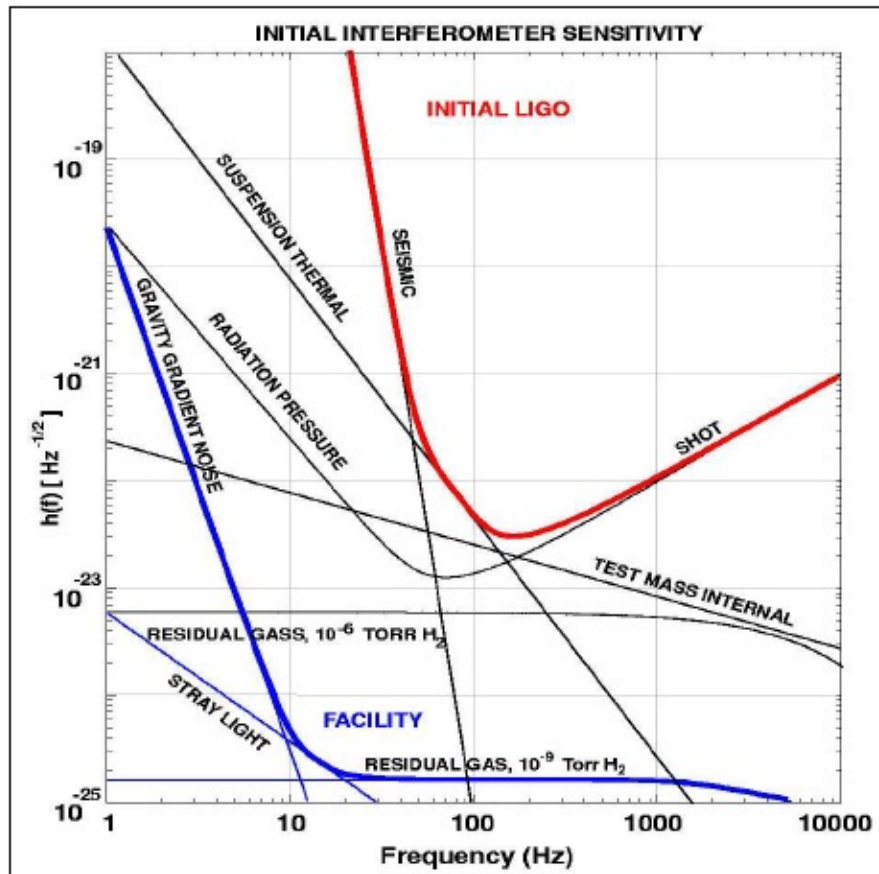
a temperatura ambiente  $T$ , con  $m$  massa atomica e  $\omega \sim 10^{14} \text{ s}^{-1}$  frequenza di vibrazione. Le vibrazioni atomiche però sono casuali e non coerenti. Il raggio laser di diametro pari a circa 7 cm media su all'incirca  $10^{17}$  atomi e almeno  $10^{11}$  vibrazioni per ogni atomo in una acquisizione di 0.01 s. Anche i modi normali delle masse test sono eccitati termicamente, con un  $\delta l_{mass} \sim 10^{-14}$  cm.

LIGO e VIRGO hanno livelli di rumore *random mean square* (rms)  $h_{rms} < 10^{-22}$ , corrispondenti a rumori sulla posizione delle masse  $\Delta L_{rms} < hL \sim 10^{-16}$  cm. La riflettanza degli specchi ad angolo (*corner mirrors*) è calibrata in maniera tale che i due bracci contengano la luce laser mediamente per circa metà di un ciclo di un'onda gravitazionale di circa 100 Hz, ovvero per circa 100 attraversamenti del braccio. La luce in ogni braccio acquisisce, pertanto, una variazione di fase  $\Delta\Phi \sim 100 \cdot 4\pi\Delta L/\lambda \sim 10^{-9}$ , dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della luce. Questa  $\Delta\Phi$  può essere misurata al fotodiodo con precisione imposta dallo *shot noise* dei fotoni,  $\Delta\Phi \sim 1/\sqrt{N}$ , con  $N$  numero di fotoni entranti nell'interferometro durante la metà del ciclo di tempo di acquisizione di fotoni. Per ottenere la precisione richiesta  $\Delta\Phi \sim 10^{-9}$ , guardando allo *shot noise* si dovrà avere  $N \sim 10^{18}$  in 0.01 s, a significare una potenza laser di  $\sim 100$  W [6]. Lo specchio di riciclo  $R$  permette ad un laser di 5 W di comportarsi come un fascio di 100 W.

Le principali fonti di rumore nel sistema sono, quindi, le seguenti:

- rumore sismico: il moto naturale della superficie terrestre ha un picco attorno al valore 150 mH, detto *picco microsismico*. I meccanismi di sospensione sono basati su pendoli, ottimi filtri meccanici per frequenze superiori a quella naturale [3].
- rumore termico: come già anticipato, sia le masse che i cavi che le sorreggono sono soggetti a eccitazione termica. Assicurandosi che entrambi i materiali abbiano un fattore di qualità  $Q$  elevato, in genere superiore al valore  $10^7$ , alle frequenze di misurazione le ampiezze di vibrazione saranno estremamente piccole. La luce assorbita negli specchi innalza la temperatura delle masse, deteriorando la qualità dell'ottica del sistema (*thermal lensing*);
- shot noise: i fotoni causano fluttuazioni casuali dell'intensità del fascio. L'errore introdotto per luce infrarossa di lunghezza d'onda  $\sim 1 \mu\text{m}$  è  $\delta l_{shot} \sim \lambda/(2\pi N^{-1/2})$  [3]. Il riciclo del raggio laser permette di superare tale problema innalzando la potenza e la statistica, cioè il numero  $N$  di fotoni necessario;
- rumore di pressione di radiazione;
- rumore di gradiente di gravità: onde sismiche, variazioni della pressione atmosferica, automobili, animali, treni, perturbano il sistema;
- intensità e frequenza del laser rumorose

- luce diffusa al di fuori del raggio principale che poi raggiunge l'interferometro;
- gas residui: in LIGO, le tracce di idrogeno ( $10^{-9}$  Torr) provocano fluttuazioni della densità le quali creano variazioni dell'indice di rifrazione nei bracci oltre a creare rumore meccanico dovuto all'impatto delle particelle sulle masse;
- campi elettrici: cariche parassite o indotte sulla superficie delle masse possono interagire con le variazioni di campo elettrico attorno alle masse stesse;
- campi magnetici;
- rovesci cosmici: muoni altamente energetici sono arrestati dalle masse, creando rinculo nel corpo;



**Figura 5:** Sensibilità di LIGO. Sono mostrate gli spettri delle ampiezze di rumore per le diverse fonti di rumore. La linea *Initial LIGO* è il progetto del design per il LIGO iniziale; quella *Facility* mostra limiti non superabili anche controllando tutti gli altri rumori perfettamente. Ref[45].

In figura è mostrato l'impatto delle diverse fonti di rumore. I rivelatori LIGO iniziali sono limitati da rumore sismico a basse frequenze ( $< 50$  Hz), da rumore termico nelle sospensioni delle masse a frequenze intermedie ( $50 - 200$  Hz) e da shot noise ad alte frequenze ( $> 200$  Hz) [45].

#### 4.4 Analisi dati e tecnica del *matched filtering*

La *power spectral density* (PSD) del rumore di un rivelatore ne determina la sua qualità. Un'onda gravitazionale provoca un treno di dati adimensionale, detto  $x(t)$ ; in assenza di segnali gravitazionali, l'output del detector sarà soltanto il rumore  $n(t) = x(t)$ . Definendo la funzione di autocorrelazione

$$\kappa = \overline{n(t_1)n(t_2)}$$

dove la linea indica la media su un insieme di realizzazioni di rumore, si vede che nel caso di rumore stazionario, la funzione  $\kappa$  dipenderà solamente da  $\tau = |t_1 - t_2|$ .

Si definisce inoltre  $S_h(f)$  (*one-sided PSD*) [3]:

$$S_h(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(\tau) e^{2\pi i f \tau} d\tau, \quad f \geq 0.$$

La radice quadrata di  $S_h$  è l'ampiezza del rumore, ed ha dimensione  $\text{Hz}^{-1/2}$ . Per ogni rivelatore è possibile studiare  $S_h$ , permettendo di stabilire quali sorgenti saranno rivelabili. Un segnale periodico di frequenza  $f_0$  avrà un SNR (Signal to Noise Ratio) di ampiezza  $\propto T^{1/2}$ . I rivelatori sono quasi omnidirezionali. Ne sono sufficienti circa sei per sorvegliare il cielo del tutto. Per individuare una sorgente, questa deve essere osservata da più rivelatori non prossimi contemporaneamente al fine di triangolarne la posizione.

Esistono due possibili tecniche di analisi dati: la rivelazione coerente e coincidente. Nella prima i dati di diversi rivelatori vengono collezionati, combinati e filtrati [47]; nella seconda vengono prima analizzati i dati di ogni detector singolarmente, per poi cercare coincidenze in parametri intrinseci ed estrinseci. Un recente studio ha dimostrato la netta superiorità del metodo coerente [48]. Queste tecniche non sono adatte alla rivelazione di un fondo stocastico. Si può, però, fare uso del segnale stocastico rumoroso in un detector come filtro di controllo per i dati in un altro detector. Si dimostra che se si opera correlazione incrociata tra due strumenti con identico PSD su una banda di frequenza  $\Delta f$  per un tempo  $T$ , la densità spettrale di rumore dell'output si riduce di un fattore  $(T\Delta f)^{1/2}$  [3].

A livello operativo, sarà necessario impostare una soglia elevata durante l'acquisizione dati al fine di poter trascurare falsi allarmi generati dal rumore. Per un output campionato a 1 kHz e processato attraverso molti filtri, si hanno circa  $3 \cdot 10^{13}$  casi di rumore. Se il rumore filtrato è gaussiano, la probabilità che l'ampiezza del rumore sia più grande di una data soglia  $\eta$  è:

$$P(x|x \geq \eta) = \int_{\eta}^{+\infty} P(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\eta}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx,$$

(dove  $\sigma$  è la deviazione standard) formula che, risolta rispetto a  $\eta$  imponendo non più di un falso allarme all'anno, dà  $\eta = 7.5\sigma$ . In verità, il rumore di un rivelatore non è nè gaussiano nè stazionario, e diversi studi sono stati svolti nel tentativo di trattare un rumore simile.

Ogni evento di onda gravitazionale è caratterizzato da cinque osservabili cinematiche (o estrinseche): posizione della sorgente rispetto al rivelatore ( $D, \theta, \phi$ ) e polarizzazioni ( $h_+, h_x$ ). Disporre di una rete di quattro o più rivelatori, al fine di sottoporre eventi coincidenti a controlli di consistenza, può diminuire notevolmente il tasso di falsi allarmi [3].

Il *matched filtering* è una tecnica di analisi dati per la ricerca di segnali di forma nota, nascosti da una statistica rumorosa [49]. Consiste, infatti, nel correlare l'output di un detector con una forma d'onda, nota come modello (*template*). Dato un segnale  $h(t)$ , sepolto dal rumore  $n(t)$ , l'obiettivo è trovare un template ottimale  $q(t)$  che produca il miglior SNR possibile mediamente.

Detto  $x(t)$  l'output del detector, in presenza di segnale con tempo di arrivo  $t_a$ , vale  $x(t) = h(t - t_a) + n(t)$ . La correlazione tra  $q(t)$  e  $x(t)$  è definita da:

$$c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)q(t + \tau)dt,$$

ove  $\tau$  è detto ritardo. Si dovrà trovare il filtro ottimale  $q(t)$  che massimizza  $c(\tau)$  quando un segnale  $h(t)$  è presente nell'output. Poiché  $n$  è un processo casuale, anche  $c$  lo è. Si dimostra che il  $q$  ottimale è [3]:

$$\tilde{q}(f) = \gamma \frac{\tilde{h}(f)e^{i2\pi f(\tau - t_a)}}{S_h(f)},$$

dove le tilda indicano le trasformate di Fourier delle funzioni rispettive e  $\gamma$  è una costante arbitraria. Il matched filtering ha come effetto quello di innalzare il SNR, permettendo guadagni di ordine 30 – 100 per segnali di binarie compatte orbitanti, ad esempio.

## 5 Fondo stocastico di onde gravitazionali

Oltre alla radiazione gravitazionale proveniente da sorgenti discrete, l'Universo dovrebbe avere un campo di onde gravitazionali risultante dalla sovrapposizione di indefinite ed innumerevoli sorgenti discrete e da processi fondamentali, come il Big Bang. Si distingueranno, in generale, fondo cosmico (CGWB) e fondo astrofisico (AGWB), a sottolineare, in particolare, le diverse sorgenti dalle quali originano. Il fondo stocastico si estende su tutte le bande di frequenza. Per definizione, un fondo stocastico di onde gravitazionali è una sovrapposizione di onde provenienti da direzioni casuali ed in arrivo a tempi casuali, così sovrapposte da rendere non identificabili le singole onde.

Il fondo può essere una funzione deterministica, ma estremamente complessa nella sua evoluzione spaziale e temporale da apparire come processo stocastico. I fondi costituiti da radiazione originata da sovrapposizioni di eventi singoli sono detti fondi secondari [51]. Il segnale di fondo può, al contrario, essere



anche intrinsecamente aleatorio, come processi quanto-meccanici: fondi di origine quanto-meccanica si diranno primordiali (o *relic*, cioè relitti cosmici).

Sono diversi i meccanismi cosmologici che possono aver prodotto onde gravitazionali: vibrazioni di stringhe cosmiche, transizioni di fase di primo ordine, il Big Bang, l'inflazione, ed altre ancora. Si tratterà nella sezione 5.3 in particolare l'ipotesi inflazionaria nella sua correlazione alle anisotropie del CMB. Il fondo proveniente dal Big Bang, probabilmente molto debole, giungerebbe a noi senza ostacoli dall'epoca di Planck.

Solitamente si descrive l'intensità di un campo di onde gravitazionali casuale con la sua densità di energia, funzione della frequenza. Poiché la densità energetica di un'onda piana è pari al flusso dell'onda (quando  $c = 1$ ), si ha [3]:

$$\rho_{gw} = (\pi/4)f^2h^2.$$

Tuttavia, in questo contesto, il campo di onde è una variabile casuale;  $h^2$  andrà quindi sostituito con una ampiezza quadrata media statistica per unità di frequenza chiamata  $S_{gw}(f)$ , in modo tale che la densità di energia per unità di frequenza sia proporzionale a  $f^2S_{gw}(f)$ . Dopo aver mediato su tutte le direzioni delle onde e su tutte le componenti di polarizzazione indipendenti, si ottiene:

$$\frac{d\rho_{gw}}{d\ln f} = 4\pi^2 f^3 S_{gw}(f).$$

Quel che interessa, però, è la densità di energia fratto l'energia critica o di chiusura dell'Universo. Tale rapporto è:

$$\Omega_{gw}(f) = \frac{10\pi^2}{3H_0^2} f^3 S_{gw}(f),$$

con  $H_0$  costante di Hubble.

## 5.1 La rivelazione del fondo

La radiazione casuale è indistinguibile dal rumore strumentale per un singolo rivelatore, perlomeno per tempi brevi di osservazione. Se il campo casuale è prodotto da una serie di sorgenti distribuite in modo non isotropo, allora in un anno di tempo il rivelatore, cambiando orientamento, sarà in grado di identificare tali sorgenti studiando le fluttuazioni sistematiche del rumore. Se si hanno a disposizione due rivelatori, la tecnica della correlazione incrociata permette di migliorare l'acquisizione dei dati. Nella correlazione incrociata, il segnale casuale di un rivelatore agisce da modello per il segnale nell'altro. Se corrispondono, ci sarà una forte correlazione. Sarà possibile una forte corrispondenza solamente nel caso in cui la distanza tra gli apparati è minore della lunghezza d'onda dell'onda gravitazionale: in caso contrario, infatti, i ritardi temporali rovinano la corrispondenza.

Due rivelatori vicini, ognuno con densità di rumore spettrale  $S_h$  e con rumore strumentale totalmente non correlato, osservando su una larghezza di banda  $f$  a frequenza  $f$  per un tempo  $T$ , possono rivelare un fondo stocastico

con densità energetica:

$$\Omega_{gw}^{1/2} h_{100} = \left( \frac{S_h^{1/2}}{3.1 \cdot 10^{-18} \text{ Hz}^{-1/2}} \right) \left( \frac{f}{10 \text{ Hz}} \right)^{5/4} \left( \frac{T}{3 \text{ yrs}} \right)^{-1/4}$$

dove  $h_{100}$  deriva da  $H_0 = h_{100} \cdot (100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$ . I due rivelatori di prima generazione LIGO (separati da circa 10 ms di tempo di percorrenza della luce) erano ben predisposti a queste correlazioni: operando a 100 Hz potevano, in un anno di correlazione, raggiungere la sensibilità di  $\Omega_{gw} \sim 1.7 \cdot 10^{-8}$  (valore che migliora nel tempo con le evoluzioni di LIGO).

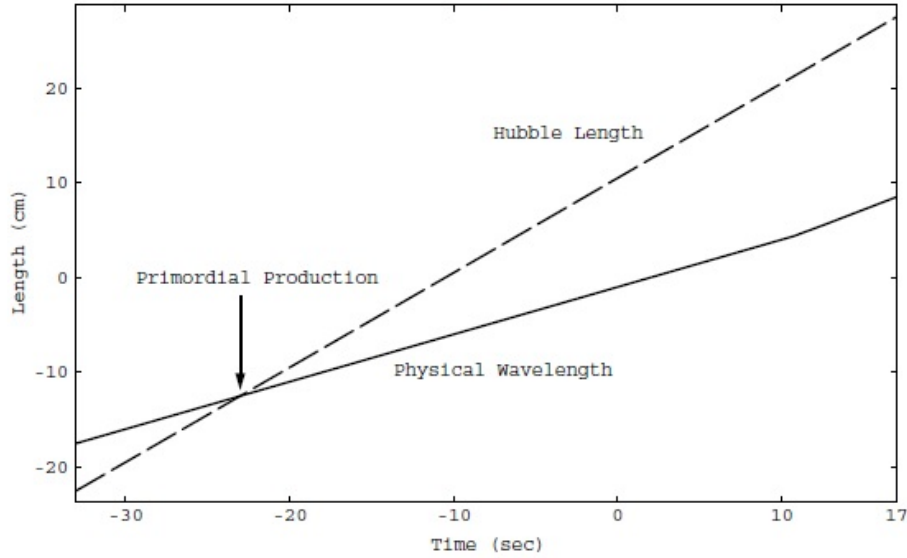
Si assumerà che il fondo stocastico di onde sia isotropo, stazionario e gaussiano [46]. Sotto queste condizioni, il fondo è completamente descritto dallo spettro  $\Omega(f)$ . E' ormai ben stabilito che il fondo cosmico di radiazione CMBR (*Cosmic Microwave Background Radiation*) è altamente isotropo. É pertanto non irragionevole assumere che il fondo stocastico di onde gravitazionali sia anch'esso isotropo.

Allen Ottewill, nel 1996, hanno mostrato come alcuni dati di LIGO potrebbero essere analizzati per la ricerca di anisotropia; tuttavia ulteriori dettagli inerenti esulano dagli scopi di questa tesi. Il fatto che sia stazionario è quasi certamente giustificato: l'età dell'Universo è 20 ordini di grandezza più grande del tempo caratteristico delle onde che LIGO, VIRGO e altri rivelatori possono studiare. Sembra quindi altamente improbabile che il fondo stocastico abbia proprietà statistiche che varino su una scala di tempo pari all'ultima nominata (ovvero quella di LIGO e VIRGO).

La terza assunzione (gaussianità) può essere, invece, giustificata col teorema del limite centrale [46].

Si supponga, ora, che LIGO o VIRGO abbiano rivelato un fondo stocastico di radiazione gravitazionale. È cruciale poter determinare a quale epoca storica dell'Universo questa radiazione risalga. Le possibilità sono due: o risale all'epoca presente o si tratta di radiazione fossile. Nel caso di radiazione fossile di origine cosmologica, si può ragionare fisicamente per determinarel'epoca di produzione. Onde di una certa frequenza sono prodotte quando il tempo caratteristico di variazione di energia e materia nell'Universo è comparabile col periodo delle onde.

La figura di seguito mostra come, per esempio, a  $10^{-22}$  s dopo il Big Bang il tempo di espansione caratteristico era circa comparabile al periodo di un'onda che, con l'opportuna correzione di redshift fino all'epoca presente, cade nella larghezza di banda a cui LIGO/VIRGO sono sensibili.



**Figura 6:** Il grafico mostra le due lunghezze. Gli assi sono in scala logaritmica. La curva solida rappresenta la lunghezza d'onda di un'onda che LIGO/VIRGO potrebbero rivelare a circa 100 Hz, oggi pari a circa  $3 \cdot 10^8$  cm; la curva tratteggiata mostra la lunghezza di Hubble, oggi pari a circa  $10^{28}$  cm. L'intersezione delle curve determina il tempo al quale la produzione primordiale di gravitoni nella banda di LIGO/VIRGO è avvenuta. Ref[46].

## 5.2 I vincoli fenomenologici sulla densità di energia del fondo

E' importante conoscere i vincoli sperimentali sulla densità di energia del fondo a tutte le frequenze in quanto gli spettri della densità dipendono dai parametri dei modelli cosmologici: tali vincoli implicheranno allora, automaticamente, altri vincoli sui parametri cosmologici coinvolti nello spettro. Tali vincoli sono principalmente tre: il limite di nucleosintesi, il limite di COBE ed il limite di *millisecond pulsar* [52].

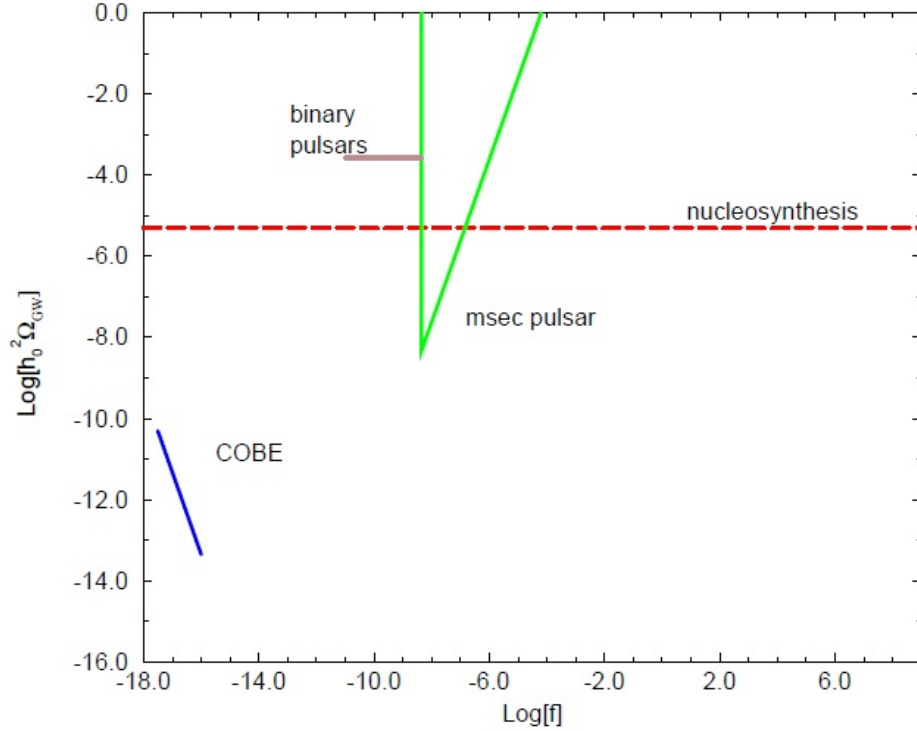
Il limite di nucleosintesi, basandosi su considerazioni energetiche, impone che  $h_0^2 \Omega_{gw} < 5.6 \cdot 10^{-6}$  [53], ove  $h_0 = h_{100}$ .

Il limite di COBE deriva dalla misura delle fluttuazioni di temperatura nel CMBR, e impone che:

$$h_0^2 \Omega_{gw}(f) < 7 \cdot 10^{-11} \left( \frac{H_0}{f} \right)^2, \quad 3 \cdot 10^{-18} \text{ Hz} < f < 10^{-16} \text{ Hz}.$$

Il limite di pulsar, infine, dopo circa 8 anni di osservazioni, ha condotto a:

$$h_0^2 \Omega_{gw}(f) < 4.8 \cdot 10^{-9} \left( \frac{f}{f_0} \right)^2, \quad f > f_0 = 4.4 \cdot 10^{-9} \text{ Hz}.$$



**Figura 7:** I vari limiti su  $h_0^2 \Omega_{gw}$ . Ref[52].

### 5.3 Il fondo stocastico di origine inflazionaria

La rivelazione del fondo di origine inflazionaria è atteso con grande fiducia. Un aspetto poco certo riguarda la sua ampiezza, che varia come  $h^2 \Omega_{gw} \propto G^2 E_{infl}^4$ , con l'energia non nota dell'inflazione.

Come già suddetto, durante l'inflazione le fluttuazioni quantistiche del campo di gravitone sono amplificate parametricamente [56] in perturbazioni tensoriali dall'espansione quasi esponenziale dell'Universo.

Lo spettro risultante copre oggi un ampio range di scale, da quella di Hubble (corrispondente a modi prodotti alla fine dell'inflazione) a quella del giorno d'oggi (corrispondente a modi prodotti durante l'inflazione e rientranti nel raggio di Hubble solo oggi). L'ampiezza dello spettro ad una data frequenza è oggi direttamente proporzionale alla circa costante densità di energia risalente al momento in cui il modo ha lasciato il raggio di Hubble durante l'inflazione.

Se l'inflazione si verifica ad energie sufficientemente alte (non molto al di sotto della scala della GUT,  $E_{infl} \sim 10^{16}$  GeV), il fondo generato potrebbe essere rivelato indirettamente tramite l'anisotropia della polarizzazione del CMB[56] nel range  $f \sim 10^{-18} - 10^{-16}$  Hz.

### 5.4 Il ruolo del CMB e l'ipotesi dell'inflazione nella rivelazione del fondo cosmologico di radiazione gravitazionale

Il Cosmic Microwave Background (CMB) è considerato per diversi aspetti una fotografia dell'Universo all'età di circa  $3 \cdot 10^5$  anni (dopo il Big Bang). Si

crede che il suo studio porterà ad importanti scoperte circa l'età e geometria dell'Universo, il contenuto di energia-materia di quest'ultimo e lo spettro delle perturbazioni primordiali. Se le onde gravitazionali vengono ricercate attraverso il moto che inducono in masse campione, allora, poiché il fluido di fotoni e barioni alla superficie di ultima diffusione costituisce un insieme di masse campione, ci si aspetta che questi moti siano impressi nella temperatura e polarizzazione del CMB. Le onde gravitazionali, a differenza delle perturbazioni adiabatiche (fonti principali dell'anisotropia di temperatura e polarizzazione del CMB), imprimono un singolare disegno di polarizzazione nel cielo. Tale schema è detto polarizzazione *Modo-B* o *curl mode* [50].

La temperatura del CMB è una grandezza scalare; mentre la diversa natura tensoriale della polarizzazione del CMB permette la separazione delle fluttuazioni scalari da quelle tensoriali, generate da onde gravitazionali (o meglio, dal *GWB*, *Gravitational-wave background*). La polarizzazione del CMB può essere divisa in due termini. Uno è il gradiente di un potenziale scalare, invariante sotto trasformazioni di parità (detto *modo-E*), l'altro è il *modo-B* già nominato. La componente del modo-B del CMB esiste solo in presenza di perturbazione gravitazionale e, la sua rivelazione, oltre ad essere fondamentale in quanto metodo di ricerca indiretto di onde gravitazionali, aprirà una nuova prospettiva per la risoluzione di problemi come il paradigma cosmologico inflazionario. L'ipotesi cosmologica dell'inflazione, infatti, prevede, come nessun altro meccanismo cosmologico, l'imprinting del fondo stocastico *GWB* sul CMB, nonostante sia essa stessa a spiegare la forte isotropia del CMB stesso.

L'inflazione rappresenta un'epoca di espansione accelerata nell'Universo primordiale ( $\sim 10^{-34}$  s dopo il Big Bang), che permette di risolvere due inconsistenze fondamentali del modello standard del Big Bang: il problema dell'orizzonte e quello della curvatura spaziale, piccola dopo 14 miliardi di anni dopo il Big Bang. Il fondo (che ci si aspetta) generato durante l'inflazione ha ampiezza incerta. Durante l'inflazione le fluttuazioni quantistiche del campo di gravitone sono amplificate in perturbazioni tensoriali dall'espansione quasi esponenziale dell'Universo. Quando i modi tensoriali rientrano nel raggio di Hubble durante l'evoluzione post-inflazionaria, diventano onde gravitazionali visibili come perturbazioni tensoriali dello spazio-tempo.

Il CMB è polarizzato con un ampiezza di pochi  $\mu\text{K}$ ; a dominare è il modo-E, generato da perturbazioni della densità nel *last scattering*. Questi modi-E hanno un picco in corrispondenza del multipolo angolare  $l \sim 1000$ . Il modo-B del *IGW* (*Inflationary Gravitational Wave*) si ritiene abbia un picco per  $l \sim 80$  [55]. Esiste anche un'altra opportunità per la ricerca del segnale di *IGW*, ovvero quella di ricercarlo per  $l < l_0$ , nella cosiddetta *reionization bump*. Si consideri un'onda elettromagnetica polarizzata di frequenza angolare  $\omega$ :

$$E = E_{y0} \sin(\omega t - \delta_y) \hat{y} + E_{x0} \sin(\omega t - \delta_x) \hat{x};$$

lo stato di polarizzazione è determinato dai parametri di Stokes  $I, Q, U$  e  $V$ :

$$I = I_x + I_y, \quad \text{dove} \quad I_y = \langle E_{y0}^2 \rangle \quad \text{e} \quad I_x = \langle E_{x0}^2 \rangle;$$

$$Q = I_y - I_x, \quad U = 2E_{y0}E_{x0} \cos(\delta_y - \delta_x), \quad V = 2E_{y0}E_{x0} \sin(\delta_y - \delta_x).$$

$Q$  e  $U$  quantificano la polarizzazione lineare dell'onda,  $V$  il grado di quella circolare. Si introduce il simbolo di Chandrasekhar:

$$\hat{I} = (I_x, I_y, U, V).$$

Radiazione polarizzata in presenza di perturbazione cosmologica della metrica è rappresentata da un vettore di stato che descrive i numeri di occupazione della radiazione [50]:

$$\hat{n} = \frac{c^2}{h\nu^3} \hat{I} = \hat{n}_0 + n_0 \delta \hat{n} = n_0 [(1, 1, 0) + \delta \hat{n}],$$

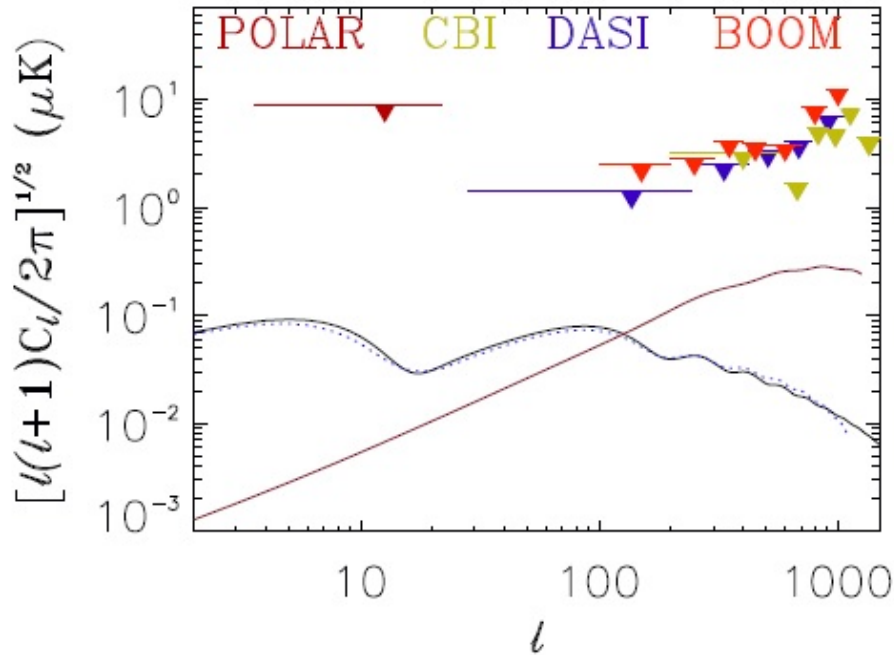
dove  $n_0 = [e^{h\nu/K_b T} - 1]^{-1}$ . Introducendo  $\hat{n}_0 = n_0(1, 1, 0)$ , corrispondente a radiazione isotropa uniforme non polarizzata,  $\delta \hat{n}$  ne rappresenta la correzione al primo ordine. Tutti i fenomeni cosmologici più importanti agenti sulla polarizzazione, possono essere descritti in base al loro effetto su  $\delta \hat{n}$ .

Un'onda gravitazionale arbitraria può essere considerata una sovrapposizione lineare di onde gravitazionali piane. La linearità impone dunque che anisotropia e polarizzazione generate da un'onda qualsiasi siano sovrapposizione lineare di anisotropia e polarizzazione generate da un'onda piana. Risolvendo l'equazione del trasporto di Boltzmann, per un'onda gravitazionale di vettore d'onda  $k$ , il vettore  $\delta \hat{n}$  assume la forma [50]:

$$\delta \hat{n}(\eta, \vec{k}) = \frac{\gamma}{2} \left[ \alpha(\eta, \mu, k)(1 - \mu^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2\phi + \beta(\eta, \mu, k) \begin{pmatrix} (1 + \mu^2) \cos 2\phi \\ -(1 + \mu^2) \cos 2\phi \\ 4\mu \sin 2\phi \end{pmatrix} \right].$$

Sia la re-ionizzazione che le onde gravitazionali hanno effetti sulla polarizzazione del CMB. La reionizzazione ha effetti essenzialmente sul modo-E (modo di gradiente).

Il segnale di modo-B primordiale soffre di una contaminazione dovuta a *lensing gravitazionale* del modo-E, dovuta a grandi strutture gravitazionali. Nel 2006 i limiti osservati da POLAR, CBI, DASI e BOOMERANG sul modo di *curl* (modo-B) erano rappresentati da tale grafico:



**Figura 8:** Misurazione dello spettro di potenza della polarizzazione di modo-B. La linea continua blu è lo spettro per un fit di WMAP ; la linea continua con picco per  $l \sim 1000$  è lo spettro di lensing gravitazionale del modo-E; le altre curve sono risultati analitici. Ref [50].

Il satellite Planck, lanciato il 14 Maggio 2009, ha scansionato il cielo ininterrottamente dall'Agosto successivo. È dotato di 74 rivelatori sensibili nel range di frequenze 25 – 1000 Ghz. È dotato di un sistema di raffreddamento che lo mantiene a  $-273.05$  °C. Ha come missione principale quella di misurare le anisotropie spaziali della temperatura del CMB, oltre che la polarizzazione delle anisotropie.

*Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization* (BICEP), invece, è un radiotelescopio polarimetro ed esperimento localizzato al Polo Sud. Il 17 Marzo 2014 è stato annunciato un risultato della collaborazione BICEP2: sono stati rivelati degli eccessi nello spettro di potenza del modo-B nel range  $30 < l < 150$ , inconsistenti con l'*ipotesi nulla* (rappresentata dalla teoria  $\Lambda$ CDM) a  $5\sigma$  e più. Simulazioni e *jackknife tests* hanno mostrato che la contaminazione sistematica dei dati è molto minore degli eccessi misurati. Tutti i modelli di emissioni di polveri polarizzate analizzati prevedevano potenze 5 – 10 volte più piccole di quelle osservate in eccesso.

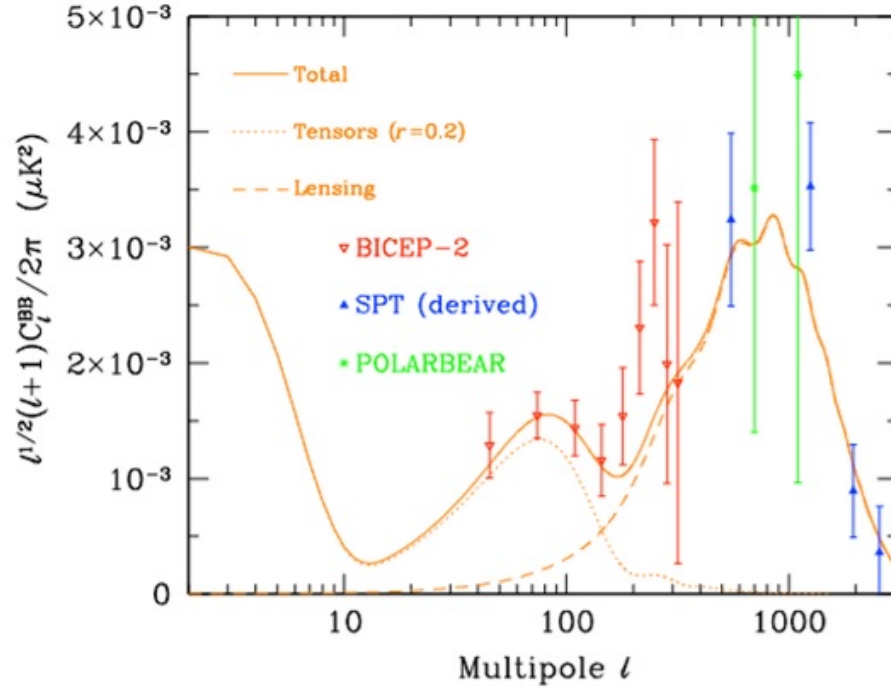


Figura 9: Ref[55].

Il valore del *Tensor to Scalar ratio*  $r$  trovato sperimentalmente da BICEP2 è  $r = 0.20^{+0.70}_{-0.05}$ , con  $r = 0$  scartato a  $7.0\sigma$  [55].

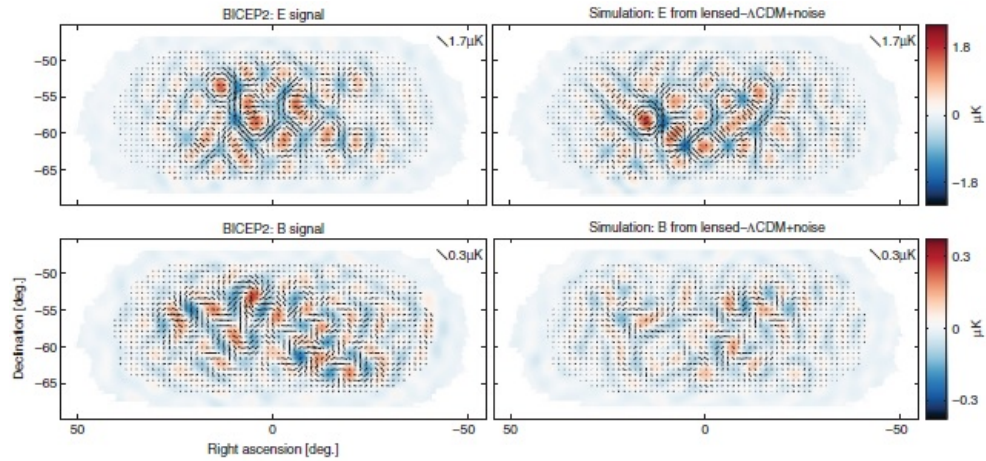


Figura 10: A sinistra i modi E e B di BICEP2 filtrati a  $50 < l < 120$ . A destra l'equivalente per una simulazione di lensing- $\Lambda$ CDM+rumore. Ref[55].

Nell' analisi dati eseguita dal gruppo di BICEP2, le proiezioni di polvere polarizzata sono state modellizzate e studiate, con il forte ausilio dei dati forniti da *Planck*.

Le mappe di polarizzazione, dei parametri  $Q, U$  e  $T$ , fornite da BICEP2 sono le più precise e dettagliate mai fornite: il livello di rumore è di  $87 \text{ nK deg}$



su un'area effettiva di  $380 \text{ deg}^2$ .

La mappa della temperatura fornita da Planck è stata utilizzata come *template model* nell'analisi dati.

Il valore di  $r$  fornito da Planck è  $r < 0.11$  al 95% di C.L..

L'emissione termica polarizzata della polvere galattica è la maggiore fonte di disturbo presente in misurazioni della polarizzazione del CMB a frequenze superiori a 100 GHz.

Il satellite Planck fornisce per diversi range di  $l$  valori di potenza di emissione di polvere galattica. La collaborazione dei team di BICEP2 e Planck chiarirà a che livello l'interpretazione di BICEP2 sia compromessa: in particolare non la rivelazione del segnale, bensì l'interpretazione di quest'ultimo come derivante da onde gravitazionali primordiali.

## 6 Conclusioni

Lo scopo della tesi era quello di fornire una descrizione delle onde gravitazionali nel campo della fisica, della cosmologia e dell'astrofisica. Il formalismo teorico che si cela dietro allo studio di tali fenomeni è di estrema difficoltà, complessità e profondità. È stato possibile, tuttavia, trattare comunque con particolare attenzione alcuni aspetti di maggior rilevanza, andando a creare un filo conduttore avente come termine le ultime recenti pubblicazioni a opera del progetto BICEP2, nel Marzo 2014.

Partendo da una analisi della definizione formale di onda gravitazionale in relatività generale, si sono forniti gli strumenti necessari per comprendere e stimare, a livello sperimentale, i maggiori problemi esistenti nel tentativo di rivelare tale radiazione. La seguente descrizione delle sorgenti di radiazione gravitazionale nell'Universo, ha permesso, poi, di conoscere ancor meglio i limiti da superare nel campo della ricerca. Ogni rivelatore di onde gravitazionali è, infatti, ostacolato dalla presenza di numerose fonti di rumore sperimentale, ed è per questo che ci si è in seguito soffermati, seppur brevemente, su uno dei metodi di analisi dati più noti in tale campo. La parte finale è stata dedicata al fondo stocastico di onde gravitazionali: se ne sono considerati i principali limiti di rivelazione, i meccanismi astrofisici o cosmologici all'origine e la correlazione tra la rivelazione di tale fondo e le anisotropie del CMB. Eventuali nuove scoperte circa le anisotropie del CMB, comporterebbero, infatti, profondi risultati in campo cosmologico, in particolare per ciò che riguarda l'ipotesi dell'inflazione. Le righe finali sono state, perciò, dedicate ad una pubblicazione che potrebbe rappresentare soltanto il punto d'inizio di una nuova concezione fisica dell'Universo: quella del progetto BICEP2.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley Sons, Inc., 1972
- [2] Hobson, M. P., Efstathiou, G. P., Lasenby, A. N., *General Relativity*, Cambridge University Press, 2006.
- [3] Sathyaprakash, B. S., Schutz Bernard, F., *Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves*, Living Rev. Relativity, **12**, (2009), 2.
- [4] Blanchet, L., *Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries*, Living Rev. Relativity, **9**, lrr-2006-4, (2006)
- [5] Futamase, T., Itoh, Y., *The Post-Newtonian Approximation for Relativistic Compact Binaries*, Living Rev. Relativity, 10, lrr-2007-2, (2007).
- [6] Thorne, K. S., *Gravitational Waves*, Theoretical Astrophysics, California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, USA.
- [7] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco, 1973 1.2, 2.6, 2.6, 6.2.
- [8] Schutz, B. F., *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2009, 2nd edition. 2.6, 2.6.
- [9] Hjorth, J., Sollerman, J., Moller, P., Fynbo, J.P.U., Woosley, S.E., Kouveliotou, C., Tanvir, N.R., Greiner, J., Andersen, M.I., Castro-Tirado, A.J., Castro Cerón, J.M., Fruchter, A.S., Gorosabel, J., Jakobsson, P., Kaper, L., Klose, S., Masetti, N., Pedersen, H., Pedersen, K., Pian, E., Palazzi, E., Rhoads, J.E., Rol, E., van den Heuvel, E.P.J., Vreeswijk, P.M., Watson, D., Wijers, R.A.M.J., *A very energetic supernova associated with the -ray burst of 29 March 2003*, Nature, 423, 847850, (2003). [DOI], [astro-ph/0306347]. 3.2
- [10] Woosley, S.E., *Gamma-ray bursts from stellar mass accretion disks around black holes*, Astrophys. J., 405, 273277, (1993). [DOI], [ADS]. 3.2.
- [11] MacFadyen, A.I., Woosley, S.E., *Collapsars: Gamma-ray bursts and explosions in failed supernovae*, Astrophys. J., 524, 262289, (1999). [DOI], [astro-ph/9810274]. 3.2.
- [12] Müller, E., *Gravitational Waves from Core Collapse Supernovae*, in Marck J.-A., Lasota J.-P., eds., Relativistic Gravitation and Gravitational Radiation, Proceedings of the Les Houches School of Physics, held in Les Houches, Haute Savoie, 26 September – 6 October, 1995, Cambridge Contemporary Astrophysics, pp. 273308, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997). 3.2.

- [13] Dimmelmeier, H., Font, J.A., Müller, E., *Relativistic simulations of rotational core collapse. II. Collapse dynamics and gravitational radiation*, *Astron. Astrophys.*, 393, 523–542, (2002). [astro-ph/0204289v1]. 3.2, 7.4.
- [14] Dimmelmeier, H., Ott, C.D., Janka, H.-T., Marek, A., Müller, E., *Generic Gravitational-Wave Signals from the Collapse of Rotating Stellar Cores*, *Phys. Rev. Lett.*, 98, 251101, (2007). [DOI], [astro-ph/0702305v2]. 3.2.
- [15] Flanagan Eanna E., *Astrophysical Sources of Gravitational Radiation and Prospects for their Detection*, Cornell University, Ithaca, NY 14853, USA.
- [16] Schutz B.F., *Determining the Hubble Constant from Gravitational Wave Observations*, *Nature*, 323, 310311, (1986). [DOI]. 3.4.2, 6.5.1, 8.3.
- [17] Will C.M., *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, *Living Rev. Relativity*, 9, lrr-2006-3, (2006).
- [18] Stairs, I.H., *Testing General Relativity with Pulsar Timing*, *Living Rev. Relativity*, 6, lrr-2003-5, (2003).
- [19] Peters P.C., Mathews J., *Gravitational radiation from point masses in a Keplerian orbit*, *Phys. Rev.*, 131, 435440, (1963). [DOI]. 3.4.2, 3.4.3, 6.3.
- [20] Taylor J.H., and Weisberg, J.M., *Further experimental tests of relativistic gravity using the binary pulsar PSR 1913+16*, *Astrophys. J.*, 345, 434450, (1989). [ADS]. 3.4.3, 7.
- [21] Lyne, A.G., Burgay, M., Kramer, M., Possenti, A., Manchester, R.N., Camilo, F., McLaughlin, M.A., Lorimer, D.R., D’Amico, N., Joshi, B.C., Reynolds, J., and Freire, P.C.C., *A Double-Pulsar System: A Rare Laboratory for Relativistic Gravity and Plasma Physics*, *Science*, 303, 11531157, (2004). [DOI], [astro-ph/0401086]. 3.4.3, 7.3.6.
- [22] Phinney, E. S. , *Astrophys. J.*, 380:L17, 1991.
- [23] Narayan, R., Piran, T., Shemi, A., *Astrophys. J.*, 379:L17,1991.
- [24] Tutukov, A. V., Yungelson, L. R., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 260:675, 1993.
- [25] Abramovici, A., et al., *Science*, 256:325, 1992.
- [26] Burrows, A., Hayes, J., Fryxell, B. A., *Astrophys. J.*,1995.
- [27] Zimmermann, M., Szedenits, E., *Phys. Rev. D*, 20:351, 1979.
- [28] Hils, D., Bender, P., Webbink, R. F., *Astrophys. J.*, 360:75, 1990.
- [29] Rees, M.J., *Gravitational waves from galactic centres?*, *Class. Quantum Grav.*, 14, 1411–1415, (1997). [DOI]. 3.4.5, 3.4.6
- [30] Weber, J., *Gravitational radiation*, *Phys. Rev. Lett.*, 18, 498501, (1967). [DOI]. 4

- [31] Johnson, W. W., Merkowitcz, S. M., *Phys. Rev. Lett.*, 70:2367, 1993.
- [32] Astone, P., Babusci, D., Bassan, M., Bonifazi, P., Coccia, E., DAntonio, S., Fafone, V., Giordano, G., Marini, A., Minenkov, Y., Modena, I., Modestino, G., Moleti, A., Pallottino, G.V., Pizzella, G., Quintieri, L., Rocchi, A., Ronga, F., Terenzi, R., and Visco, M., *The next science run of the gravitational wave detector NAUTILUS*, *Class. Quantum Grav.*, 19, 19111917, (2002). [DOI]. 1
- [33] Laboratori Nazionali Legnaro, *AURIGA Bar Detector*, project homepage. URL (cited on 08 November 2007): <http://www.auriga.lnl.infn.it/>. 1, 4.1
- [34] Caves, C.M., Thorne, K.S., Drever, R.W.P., Sandberg, V.D., and Zimmerman, M., *On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator*. I. Issues of principle, *Rev. Mod. Phys.*, 52, 341392, (1980). [DOI]. 3
- [35] Astone, P., Babusci, D., Baggio, L., Bassan, M., Blair, D.G., Bonaldi, M., Bonifazi, P., Busby, D., Carelli, P., Cerdonio, M., Coccia, E., Conti, L., Cosmelli, C., DAntonio, S., Fafone, V., Falferi, P., Fortini, P., Frasca, S., Giordano, G., Hamilton, W.O., Heng, I.S., Ivanov, E.N., Johnson, W.W., Marini, A., Mauceli, E., McHugh, M.P., Mezzena, R., Minenkov, Y., Modena, I., Modestino, G., Moleti, A., Ortolan, A., Pallottino, G.V., Pizzella, G., Prodi, G.A., Quintieri, L., Rocchi, A., Rocco, E., Ronga, F., Salemi, F., Santostasi, G., Taffarello, L., Terenzi, R., Tobar, M.E., Torrioli, G., Vedovato, G., Vinante, A., Visco, M., Vitale, S., and Zendri, J.P. (International Gravitational Event Collaboration), *Methods and results of the IGEC search for burst gravitational waves in the years 19972000*, *Phys. Rev. D*, 68, 022001, 133, (2003). [astro-ph/0302482]. 4.1
- [36] Abbott, B. et al. (LIGO Scientific Collaboration ALLEGRO Collaboration), *First crosscorrelation analysis of interferometric and resonant-bar gravitational-wave data for stochastic backgrounds*, *Phys. Rev. D*, 76, 022001, 117, (2007). [gr-qc/0703068]. 4.1
- [37] Compton, K.A., and Schutz, B.F., *Bar-Interferometer Observing*, in Ciufolini, I., and Fidecaro, F., eds., *Gravitational Waves: Sources and Detectors*, Proceedings of the International Conference, Cascina, Italy, 19–23 March, 1996, Edoardo Amaldi Foundation, vol. 2, pp. 173185, (World Scientific, Singapore; River Edge, NJ, 1997). 4.1
- [38] Coccia, E., Fafone, V., and Frossati, G., *On the Design of Ultralow Temperature Spherical GravitationalWave Detectors*, in Coccia, E., Pizzella, G., and Ronga, F., eds., *Gravitational Wave Experiments*, First Edoardo Amaldi Conference, Villa Tuscolana, Frascati, Rome, 14–17 June 1994, pp. 463478, (World Scientific, Singapore; River Edge, NJ, 1995). 4.1.
- [39] Gottardi, L., de Waard, A., Usenko, A., Frossati, G., Podt, M., Flokstra, J., Bassan, M., Fafone, V., Minenkov, Y., and Rocchi, A., *Sensitivity of*

- the spherical gravitational wave detector MiniGRAIL operating at 5 K*, Phys. Rev. D, 76, 102005, (2007). [arXiv:0705.0122]. 4.1.
- [40] Aguiar, O.D., Andrade, L.A., Barroso, J.J., Bortoli, F., Carneiro, L.A., Castro, P.J., Costa, C.A., Costa, K.M.F., de Araujo, J.C.N., de Lucena, A.U., de Paula, W., de Rey Neto, E.C., de Souza, S.T., Fauth, A.C., Frajuca, C., Frossati, G., Furtado, S.R., Magalhães, N.S., Marinho Jr, R.M., Matos, E.S., Melo, J.L., Miranda, O.D., Oliveira Jr, N.F., Paleo, B.W., Remy, M., Ribeiro, K.L., Stellati, C., Velloso Jr, W.F., and Weber, J., *The Brazilian gravitational wave detector Mario Schenberg: progress and plans*, Class. Quantum Grav., 22, S209S214, (2005). [DOI]. 4.1.
- [41] Armstrong, J.W., *Low-Frequency Gravitational Wave Searches Using Spacecraft Doppler Tracking*, Living Rev. Relativity, 9, lrr-2006-1, (2006). URL (cited on 03 September 2007): <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-1>. 4.2, 4.4.1.
- [42] Thorne, K. S., In S. W. Hawking and W. Israel, editors, *Three hundred Years of Gravitation*, pages 330-458. Cambridge University Press, 1987.
- [43] Drever, R. W. P., In Deruelle, N. and Piran, T., editors, *Gravitational radiation*, page 321, North Holland, 1983.
- [44] Weiss, R., *Quarterly Progress Report of RLE*, MIT, 105:54, 1972.
- [45] Hughes, S. A., Mørka, S., Bender, P. L., Hogan, C.J., *New Physics and astronomy with the new gravitational-wave observatories*, 2001.
- [46] Allen, B., *The stochastic gravity-wave background: sources and detection*, Milwaukee, Proceedings of the Les Houches School on Astrophysical Sources of Gravitational Waves, eds. Jean-Alain Marck and Jean-Pierre Lasota, Cambridge University Press 1996.
- [47] Pai, A., Dhurandhar, S., and Bose, S., *A data-analysis strategy for detecting gravitational wave signals from inspiraling compact binaries with a network of laser-interferometric detectors*, Phys. Rev. D, 64, 042004, (2001). [gr-qc/0009078]. 4.7.1.
- [48] Mukhopadhyay, H., Sago, N., Tagoshi, H., Dhurandhar, S., Takahashi, H., and Kanda, N., *Detecting gravitational waves from inspiraling binaries with a network of detectors: coherent versus coincident strategies*, Phys. Rev. D, 74, 083005, (2006). [gr-qc/0608103]. 4.7.1.
- [49] Helstrom, C.W., *Statistical Theory of Signal Detection*, International Series of Monographs in Electronics and Instrumentation, vol. 9, Pergamon Press, Oxford; New York, 1968, 2nd edition. 5.1, 5.3, 5.3.1, 5.3.2.
- [50] Keating, B. G., Polnarev, A. G., Miller, N. J., Baskaran, D., *The Polarization of the Cosmic Microwave Background due to Primordial Gravitational Waves*, 2006, arXiv:astro-ph/0607208v1.

- [51] Grishchuk, L. P., *Primordial and Secondary Backgrounds of Stochastic Gravitational Waves*, ILIAS meeting, Tuebingen, Ottobre 2007.
- [52] Maggiore, M., *Gravitational Wave Experiments and Early Universe Cosmology*, IFUP-TH 20/99, May 1999.
- [53] Buonanno, A., *Tasi Lectures on Gravitational Waves From The Early Universe*, 2004.
- [54] Thorne, K. S., *Probing Black Holes and Relativistic Stars with Gravitational Waves*, 1997.
- [55] P. A. R. Ade, R.W. Aikin, D. Barkats, S. J. Benton, C. A. Bischoff, J. J. Bock, J. A. Brevik, I. Buder, E. Bullock, C. D. Dowell, L. Duband, J. P. Filippini, S. Fliescher, S. R. Golwala, M. Halpern, M. Hasselfield, S. R. Hildebrandt, G. C. Hilton, V. V. Hristov, K. D. Irwin, K. S. Karkare, J. P. Kaufman, B. G. Keating, S. A. Kernasovskiy, J. M. Kovac, C. L. Kuo, E. M. Leitch, M. Lueker, P. Mason, C. B. Netterfield, H. T. Nguyen, R. OBrient, R.W. Ogburn, A. Orlando, C. Pryke, C. D. Reintsema, S. Richter, R. Schwarz, C. D. Sheehy, Z. K. Staniszewski, R. V. Sudiwala, G. P. Teply, J. E. Tolan, A. D. Turner, A. G. Vieregg, C. L. Wong, K.W. Yoon, *Detection of B-Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2*, Phys. Rev. Lett. PRL 112, 241101 (2014), 2014.
- [56] Bin´etruy, P., Boh´e, A., Caprini, C., Dufaux, J., *Cosmological Backgrounds of Gravitational Waves and eLISA/NGO: Phase Transitions, Cosmic Strings and Other Sources*, 26 Jun 2012.