

Università degli Studi di Padova



Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi Triennale

COLLASSO SFERICO E STRUTTURE COSMOLOGICHE

Candidato: **Loris Amalberti**
Matricola: **1074024**

Relatore: **Dott. Michele Liguori**

Anno accademico 2015-2016

*Alle mie nonne Luciana e Maria
e a mio nonno Piero*

Indice

Introduzione	1
1 La Cosmologia nel background	3
1.1 Panoramica Osservazionale	3
1.1.1 Nello spettro visibile	3
1.1.2 Nello spettro non visibile	4
1.1.3 Particelle nell'Universo	5
1.2 Le equazioni dell'Universo	6
1.2.1 L'equazione di Friedmann	6
1.2.2 L'equazione del fluido	7
1.2.3 L'equazione di accelerazione	8
1.3 La geometria dell'Universo	9
1.3.1 Geometria piana ($k = 0$)	9
1.3.2 Geometria sferica ($k > 0$)	9
1.3.3 Geometria iperbolica ($k < 0$)	10
1.4 I parametri cosmologici	10
1.4.1 La Legge di Hubble	10
1.4.2 Lo Spostamento verso il Rosso	11
1.4.3 Il Parametro di Densità	12
1.4.4 La Costante Cosmologica	13
1.5 Universi di Friedmann	14
1.5.1 Universo di Einstein-de Sitter di materia	15
1.5.2 Universo di Einstein-de Sitter di radiazione	15
1.5.3 Universo di materia e radiazione	16
1.5.4 Evoluzione includente la Curvatura	18
2 Crescita delle perturbazioni: il regime lineare	20
2.1 Perturbazioni in un fluido stazionario	20
2.2 Instabilità di Jeans nei modelli di Friedmann	24
2.2.1 Soluzione per un Universo di materia	24
2.2.2 Soluzione per un Universo radiativo	27
2.2.3 Soluzione per un Universo con w qualsiasi	29
2.3 L'effetto di stagnazione	30

3	Il regime non lineare: il Modello di Collasso Sferico	31
3.1	Il collasso sferico	31
3.1.1	L'evoluzione della densità	31
3.1.2	L'evoluzione delle velocità	35
3.1.3	Stima del redshift	35
3.2	Collasso Sferico con Costante Cosmologica	36
3.2.1	Condizione per il collasso	36
3.2.2	Turnaround e Virializzazione	38
3.3	Densità Caratteristiche	40
3.3.1	Contrasto di densità lineare al collasso	40
3.3.2	Densità dell'oggetto virializzato	43
	Bibliografia	44

Introduzione

Nella trattazione che segue si discuterà il meccanismo di formazione delle strutture a grande scala (galassie, ammassi di galassie, ecc.), problema della Cosmologia moderna ancora oggi non del tutto risolto. Lo spettro della radiazione cosmica del fondo a microonde (CMB) mostra come dopo poco più di 300000 anni dal Bigbang l'Universo fosse con ottima approssimazione omogeneo e isotropo, con disomogeneità nella temperatura dell'ordine di $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$, a cui corrispondono analoghe disomogeneità della densità. Sebbene a scale maggiori di 100 Mpc l'universo appaia ancor oggi essenzialmente omogeneo e isotropo, a scale più piccole la situazione è ben diversa. Ad esempio la densità all'interno di un ammasso di galassie è di circa cento o mille volte superiore rispetto alla densità media dell'universo. Si pensa dunque che le piccole disomogeneità osservabili nella radiazione di fondo possano essersi ingigantite fino a formare le immense strutture cosmiche attualmente visibili. A rafforzare quest'idea vi è il fatto che nell'Universo presente le galassie non sono distribuite in maniera casuale, anzi, è decisamente probabile trovare una galassia vicino ad un'altra o un ammasso di galassie accanto ad un altro di questi.

Nel *Capitolo 1* ci introdurremo brevemente alla Cosmologia moderna. In particolare studieremo le equazioni che governano l'Universo (*equazioni di Friedmann, del fluido, di accelerazione*) e studieremo il comportamento delle loro soluzioni in funzione di diversi parametri. Vedremo così l'esistenza di differenti modelli e geometrie adatti alla descrizione del Cosmo e ne elencheremo le principali caratteristiche.

Nel *Capitolo 2* introdurremo la *teoria dell'instabilità gravitazionale*. Considereremo l'Universo come un fluido stazionario dotato di una propria equazione di stato e di un sistema di equazioni capace di descriverne il comportamento, per poi studiarne l'evoluzione in presenza di piccole perturbazioni delle quantità coinvolte (*densità, pressione, velocità, entropia, potenziale*). Estenderemo poi l'idea ad un fluido non stazionario, in particolare ad Universi piatti descritti dall'equazione di Friedmann. Trattando un Universo iniziale prevalentemente radiativo accenneremo all'effetto di stagnazione di una perturbazione.

Nel *Capitolo 3* tratteremo il *modello di collasso sferico*, adatto a descrivere l'evoluzione di una perturbazione di densità in regime non lineare. Stabiliremo condizioni di soglia per il collasso dell'oggetto sferico sovradenso e ne analizzeremo le diverse fasi di evoluzione. Infine assumeremo l'esistenza della Costante Cosmologica Λ e analizzeremo nuovamente il processo di collasso, evidenziandone somiglianze e differenze con le teorie precedenti.

Capitolo 1

La Cosmologia nel background

Un punto chiave della cosmologia moderna è l'assunto che la posizione occupata dal pianeta Terra nell'Universo non è in alcun modo privilegiata. Solo nel 1952 l'astronomo Walter Baade dimostrò che la Via Lattea è solo una delle moltissime tipiche galassie, conducendo alla moderna visione descritta dal principio cosmologico: l'Universo è omogeneo e isotropo se visto su una scala di lunghezza opportunamente grande. Quest'idea segna una proprietà dell'Universo globale e perde di significato se si guardano i fenomeni locali. Partendo da questa premessa, ci preoccupiamo di introdurci brevemente alla Cosmologia descrivendo i corpi costituenti l'Universo, le equazioni e i parametri che lo descrivono, per poi analizzarne il comportamento a partire da determinate condizioni iniziali. Per la scrittura di idee e concetti riportati in questo capitolo è stato preso in considerazione [1].

1.1 Panoramica Osservazionale

1.1.1 Nello spettro visibile

Stelle

Le stelle sono corpi celesti brillanti di luce propria. L'energia generata attraverso processi di fusione nucleare viene irradiata nello spazio sotto forma di radiazione elettromagnetica. La loro massa è talvolta espressa in unità di massa solare $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30} \text{Kg}$.

Galassie

Le galassie sono sistemi di stelle legate gravitazionalmente costituite anche da residui di esse, polveri, gas interstellare e materia oscura. Le dimensioni di una galassia sono molto vaste e possono contenere dalle decine di milioni ai mille miliardi di stelle. Vi sono diversi tipi di galassie, a spirale, ellittiche o irregolari, ma in ognuno di questi casi le stelle ruotano lentamente attorno ad un comune centro di massa.

Clusters e Superclusters di galassie

Da ricerche su vasta scala effettuate su alcune regioni dell'Universo è stato possibile identificare ammassi di galassie, comunemente chiamati "clusters", tenuti assieme dalla forza di gravità. Clusters di galassie possono a loro volta far parte di enormi gruppi in grado di racchiuderli, chiamati superclusters, i quali sono tra le più grandi strutture conosciute nell'Universo. In mezzo a questi oggetti si estende il vuoto cosmico fino a distanze che possono raggiungere le decine di *Mpc*.

1.1.2 Nello spettro non visibile

Microonde

Le Microonde offrono una delle più importanti informazioni a supporto della teoria del Big Bang. La radiazione cosmica di fondo¹ è la radiazione elettromagnetica residua prodotta dal Big Bang² che permea l'Universo. Essa ha intensità maggiore nella regione delle microonde dello spettro elettromagnetico ed è stata confermata la sua somiglianza alla radiazione emessa da un corpo nero di temperatura $2.725 \pm 0.001K$. Possono essere identificate piccolissime variazioni di intensità della CMB proveniente da diverse direzioni. Si pensa che queste anisotropie possano essere correlate all'origine delle strutture nell'Universo.

Infrarosso

Questa radiazione risulta utile per la ricerca di galassie giovani, costituite da stelle all'inizio del proprio ciclo di vita, e per studiare le galassie più remote, emittenti radiazione appartenente a questa particolare fascia dello spettro elettromagnetico. Gli infrarossi sono utilizzati anche per osservare oggetti distanti attraverso la polvere presente nella nostra galassia, questo perché subiscono uno "scattering" minore rispetto alla radiazione visibile.

Raggi-X

I Raggi-X sono utilizzati per studiare gruppi di galassie. Tra questi ammassi giace del gas di temperatura che raggiunge le decine di milioni di Kelvin e le cui emissioni di radiazione elettromagnetica corrispondono alla parte dello spettro relativa ai Raggi-X.

Onde Radio

¹CMB = Cosmic Microwave Background.

²Si tratta di un modello cosmologico secondo il quale l'Universo iniziò ad espandersi a velocità molto elevata in un determinato istante nel passato, a partire da una condizione di volume ridottissimo e temperatura e densità estreme.

Le onde Radio sono efficaci per ottenere mappe ad alta risoluzione di galassie distanti.

1.1.3 Particelle nell'Universo

Ogni cosa nell'Universo è costituita da particelle fondamentali e il comportamento del Cosmo dipende dalle loro proprietà. L'energia³ associata ad ogni particella è data da due contributi, uno rappresentante l'energia cinetica e l'altro l'energia di massa

$$E_{totale}^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2, \quad (1.1)$$

ove m è la massa della particella a riposo e p il suo momento. Se il termine corrispondente all'energia di massa è dominante, la particella si muoverà a velocità decisamente minore di quella della luce ed in tale limite⁴ possiamo effettuare l'espansione

$$E_{totale} = mc^2 \left(1 + \frac{p^2}{m^2 c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx mc^2 + \frac{1}{2m} p^2. \quad (1.2)$$

Siamo nel caso non relativistico e riconosciamo il termine mc^2 indicante l'energia di massa a riposo. Viceversa nel caso relativistico è il termine cinetico a prevalere e la particella si muoverà a frazioni significative della velocità della luce⁵, fino al caso limite in cui essa possieda massa a riposo nulla e dovrà necessariamente muoversi a tale velocità. In base a quanto detto, possiamo suddividere le particelle costituenti l'Universo nelle seguenti categorie:

- **Barioni**

Con il termine Barioni si indicano le particelle costituite da tre quarks⁶. Di tutti i possibili Barioni solo il protone e il neutrone risultano particelle stabili e conseguentemente si pensa siano le sole ad avere una significativa influenza sul comportamento dell'Universo. Le energie di massa di protone e neutrone sono rispettivamente 938.3 MeV e 939.6 MeV . Anche gli elettroni sono spesso inclusi nella famiglia dei Barioni dai cosmologi, nonostante essi non siano composti da quarks⁷. La loro energia di massa risulta 0.511 MeV . Nell'Universo presente i Barioni possiedono energia cinetica molto minore dell'energia di massa e sono dunque considerate particelle non relativistiche.

- **Radiazione**

Il fotone è il costituente elementare della radiazione elettromagnetica. Esso si propaga alla velocità della luce, conseguentemente deve possedere una

³Questa particolare espressione per l'energia è prevista dalla teoria della Relatività Speciale.

⁴ $\frac{v}{c} \ll 1$.

⁵ $c = 299792458 \text{ m/s}$.

⁶In fisica delle particelle un quark è una particella elementare che partecipa all'interazione forte.

⁷Gli elettroni appartengono alla famiglia dei leptoni.

massa a riposo nulla. La loro energia è puramente cinetica ed è relazionata alla loro frequenza dalla legge

$$E = hf, \quad (1.3)$$

ove h è la costante di Planck⁸. I fotoni possono interagire con i Barioni causando effetti di scattering o ionizzando un eventuale atomo, maggiore è la loro energia e più significativi sono i loro effetti sulle altre particelle. Poiché la loro energia coincide sempre con l'energia cinetica, i fotoni sono considerate particelle relativistiche.

- **Neutrini**

I neutrini sono particelle che interagiscono debolmente e vengono prodotte in alcuni decadimenti radioattivi⁹. Sebbene abbiamo massa non nulla non abbiamo attualmente significative evidenze sperimentali per provare che essa sia abbastanza grande da avere notevoli effetti cosmologici. Spesso vengono dunque considerati privi di massa ed insieme ai fotoni costituiscono il materiale relativistico del nostro Universo.

1.2 Le equazioni dell'Universo

1.2.1 L'equazione di Friedmann

L'equazione di Friedmann si occupa di descrivere l'espansione dell'Universo. Al fine di derivarla, ci preoccupiamo di trovare un'espressione per l'energia potenziale e cinetica di una particella di prova e successivamente utilizzare la conservazione dell'energia. Consideriamo un mezzo uniforme in espansione di densità $\rho(t)$ e prendiamo come origine del nostro sistema di riferimento un qualunque punto dell'Universo in grado di rappresentare il suo centro per quanto stabilito dal principio cosmologico¹⁰. Consideriamo a distanza \vec{r} dal centro un volume infinitesimo approssimabile ad una particella puntiforme di massa m , che secondo il *Teorema del Guscio Sferico* questa risentirà della forza gravitazionale della sola materia nella regione sferica delimitata da $r = r_{max}$. La massa della materia racchiusa da questa sfera è $M = \frac{4\pi r^3}{3}\rho$, dunque la forza di cui la particella risente è

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{4\pi Gm\rho r}{3}, \quad (1.4)$$

con G costante gravitazionale¹¹. Conseguentemente diciamo che la particella possiede energia potenziale gravitazionale

$$U_p = -\frac{GMm}{r} = -\frac{4\pi Gm\rho r^2}{3}. \quad (1.5)$$

⁸ $h = 6.62606957 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

⁹Si veda il decadimento β come possibile esempio.

¹⁰Ricordiamo che per quanto stabilito dal principio l'Universo appare uguale in ogni suo punto.

¹¹ $G = 6,67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg} \cdot \text{s}^2$.

Se la velocità della particella è \dot{r} , l'energia cinetica è allora

$$U_k = \frac{1}{2}m\dot{r}^2, \quad (1.6)$$

e secondo la legge di conservazione dell'energia

$$U_{tot} = U_k + U_p = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi Gm\rho r^2}{3}. \quad (1.7)$$

Vista l'omogeneità dell'Universo, questa equazione stabilisce l'evoluzione della distanza di separazione r tra due qualsiasi particelle. Possiamo allora portarci in un nuovo sistema di coordinate, dette coordinate comoventi, per le quali vale la seguente relazione tra la reale distanza \vec{r} e la distanza comovente \vec{x}

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}. \quad (1.8)$$

Le coordinate sono così trascinate insieme all'espansione e le posizioni dei costituenti dell'Universo rimangono fisse. Il fattore $a(t)$ è detto *fattore di scala dell'Universo*, è funzione del solo tempo e misura il rateo di espansione del Cosmo. Sostituendo la (1.8) all'interno della (1.7) si ottiene l'equazione di Friedmann

$$U_{tot} = \frac{1}{2}m\dot{a}^2x^2 - \frac{4\pi Gm\rho a^2x^2}{3}, \quad (1.9)$$

che possiamo riscrivere come

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (1.10)$$

con $kc^2 = \frac{-2U_{tot}}{mx^2}$, $[k] = m^{-2}$.

1.2.2 L'equazione del fluido

L'equazione del fluido si occupa di descrivere come la densità di materiale nell'Universo ρ evolve nel tempo. Per derivare l'equazione dobbiamo includere anche la pressione p del materiale e considerare la prima legge della termodinamica

$$dE + pdV = TdS, \quad (1.11)$$

applicata ad un volume V di raggio comovente unitario, dunque raggio reale $r = a$. Ricaviamo l'energia partendo dall'equazione $E = mc^2$ nel seguente modo

$$E = \frac{4\pi c^2}{3}a^3\rho, \quad (1.12)$$

e ricaviamo la variazione di energia nel tempo dt

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi\rho a^2 c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi c^2}{3} \frac{d\rho}{dt} a^3, \quad (1.13)$$

mentre la variazione di volume nello stesso intervallo infinitesimo di tempo sarà

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt}. \quad (1.14)$$

Infine assumiamo una trasformazione adiabatica ed irreversibile¹² e inseriamo le variazioni temporali di energia e volume nell'equazione (1.11). Riarrangiando i termini otteniamo l'equazione del fluido

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0. \quad (1.15)$$

Possiamo notare due termini all'interno delle parentesi contribuenti alla variazione di densità: il primo corrisponde alla diminuzione di questa dovuta alla crescita del volume dell'Universo, il secondo corrisponde alla perdita di energia relativa al lavoro fatto dalla pressione del materiale sul volume crescente stesso. L'energia persa dal fluido per questo lavoro si trasforma in energia potenziale. La soluzione dell'equazione dipende dalla relazione tra densità ρ e pressione p e assumiamo la validità dell'equazione di stato

$$p \equiv p(\rho). \quad (1.16)$$

1.2.3 L'equazione di accelerazione

L'equazione di Friedmann e l'equazione del fluido possono essere utilizzate per derivare una terza espressione che si occupa di descrivere l'accelerazione del fattore di scala. Riprendendo l'equazione (1.10) e derivando rispetto al tempo otteniamo

$$2\frac{\dot{a}}{a}\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + 2\frac{kc^2\dot{a}}{a^3}. \quad (1.17)$$

Sostituiamo $\dot{\rho}$ usando l'equazione (1.15), dunque ricaviamo

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + \frac{kc^2}{a^2}. \quad (1.18)$$

Utilizziamo nuovamente l'equazione di Friedmann per trovare l'espressione finale dell'equazione di accelerazione

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right). \quad (1.19)$$

Siamo adesso in grado di vedere che se il materiale possiede una pressione p l'espansione dell'Universo è rallentata, in buon accordo col fatto che l'energia potenziale gravitazionale, e quindi la forza gravitazionale, viene incrementata.

¹²In tale caso $dS = 0$.

1.3 La geometria dell'Universo

Consideriamo nuovamente l'equazione di Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}.$$

Il parametro k , come prova la Relatività Generale¹³, misura la curvatura dello spazio. La richiesta del principio cosmologico è che l'Universo sia omogeneo ed isotropo e queste condizioni sono soddisfatte da tre diverse geometrie corrispondenti a k nullo, positivo o negativo.

1.3.1 Geometria piana ($k = 0$)

Uno degli assiomi della geometria Euclidea stabilisce che in geometria piana due rette parallele rimangono sempre a distanza fissata. Siamo portati a due importanti conclusioni:

- La somma degli angoli interni di un triangolo è di 180° .
- La circonferenza di un cerchio di raggio r è $2\pi r$.

Se questa è la geometria che descrive il nostro Universo, esso deve necessariamente estendersi all'infinito, o verrebbe violata l'ipotesi di omogeneità. Tale Universo corrisponde ad un parametro di curvatura k nullo e prende il nome di Universo piatto.

1.3.2 Geometria sferica ($k > 0$)

Una sfera ideale appare in egual modo in ogni punto della propria superficie e dunque le ipotesi di omogeneità e isotropia vengono soddisfatte. La geometria costruita su una sfera è non-Euclidea e negando il quinto postulato otteniamo le condizioni:

- La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 180° .
- La circonferenza di un cerchio di raggio r è minore di $2\pi r$.

Il nostro universo spazialmente tridimensionale può avere proprietà simili alla superficie di una sfera bidimensionale. Nonostante la superficie di una sfera bidimensionale di raggio r sia $4\pi r^2$, e dunque sia finita in termini di estensione, non vi sono confini di espansione per essa. Proprio come per una sfera bidimensionale, la curvatura di quella tridimensionale è una proprietà intrinseca, dunque non vi è bisogno che essa risieda in uno spazio a quattro dimensioni¹⁴. Un Universo di questo tipo corrisponde ad un parametro di curvatura k positivo e prende il nome di Universo chiuso.

¹³Una trattazione più rigorosa del parametro di curvatura k porterebbe a descrivere l'Universo attraverso la metrica di Robertson-Walker, che noi qui non considereremo.

¹⁴Ci stiamo riferendo alle sole dimensioni spaziali.

1.3.3 Geometria iperbolica ($k < 0$)

Le ipotesi di omogeneità e isotropia sono soddisfatte anche dalla geometria iperbolica, costruita negando nuovamente il quinto assioma di Euclide. Le conclusioni che possiamo trarre sono le seguenti:

- La somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 180° .
- La circonferenza di un cerchio di raggio r è maggiore di $2\pi r$.

In questo caso due rette parallele divergono l'una dall'altra e dunque l'Universo deve essere esteso all'infinito. Tali geometria ed Universo corrispondono ad un parametro di curvatura k negativo e l'Universo viene chiamato Universo aperto.

1.4 I parametri cosmologici

1.4.1 La Legge di Hubble

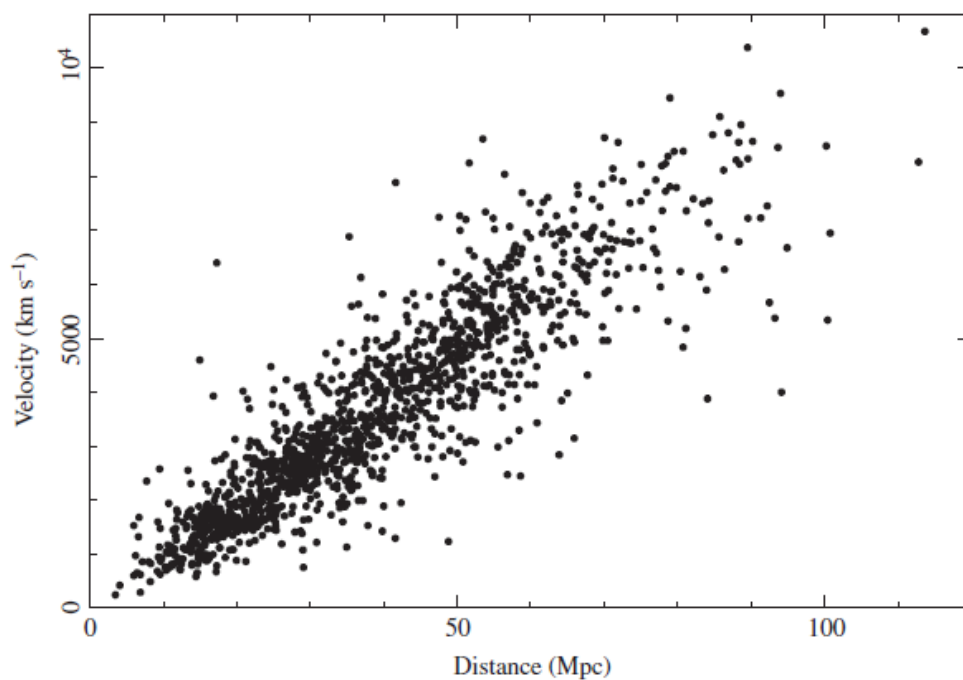


Figura 1.1: Il grafico mostra l'andamento della velocità in funzione della distanza stimata per un campione di 1355 galassie. A meno di moti casuali di queste ed incertezze di misura, l'andamento lineare implica la validità della legge di Hubble.

Ogni corpo dell'Universo si sta allontanando da noi e tanto più questo è lontano, più velocemente sembra distaccarsi dal nostro pianeta. Dunque la velocità di re-

cessione \vec{v} è proporzionale alla distanza di un oggetto dal punto di osservazione \vec{r} , relazione espressa dalla *Legge di Hubble*

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}, \quad (1.20)$$

ove H_0 è la costante di Hubble presente che spesso viene parametrizzata come $H_0 = 100h \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, con h parametro adimensionale¹⁵. La Figura 1.1 mostra chiaramente quanto appena esposto. Il principio cosmologico non è violato, poiché ogni osservatore in ogni punto dell'universo vede gli oggetti allontanarsi da lui con velocità proporzionale alle loro distanze. La velocità di recessione è data da $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ed ha stessa direzione e verso di \vec{r} . Ricordando la relazione (1.8) possiamo scrivere

$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}. \quad (1.21)$$

Confrontando la (1.20) e la (1.21) ricaviamo

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.22)$$

Il parametro di Hubble è determinato per tempi fissati, in particolare $H(t_0) = H_0$ ove t_0 indica il tempo presente. Per quanto detto possiamo riscrivere l'equazione di Friedmann come

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (1.23)$$

1.4.2 Lo Spostamento verso il Rosso

Lo spostamento verso il rosso, in inglese *redshift*, è il fenomeno per cui la frequenza della luce osservata è più bassa della frequenza che possedeva quando è stata emessa. Ciò accade in genere quando la sorgente di luce si muove allontanandosi dall'osservatore¹⁶. Il fenomeno inverso, che si verifica nel caso in cui un corpo si avvicina all'osservatore, prende il nome di *blueshift*. Quasi ogni galassia sembra allontanarsi ed il suo redshift è misurato dal numero puro

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}, \quad (1.24)$$

con λ_{obs} lunghezza d'onda della luce nel punto di osservazione e λ_{em} nel punto di emissione. Se un oggetto si sta allontanando con velocità v allora il suo redshift è

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}, \quad (1.25)$$

¹⁵Il parametro h può assumere valori tra 0.5 e 1 e dipende dai parametri Ω_0 e Ω_Λ che introdurremo nelle prossime sottosezioni.

¹⁶Similmente a quanto accade alle onde sonore per *effetto Doppler*.

con c velocità della luce. Se $\frac{v}{c} \ll 1$ con buona approssimazione vale $z = \frac{v}{c}$ e questo è il caso che prenderemo in considerazione. Per oggetti più vicini prendiamo la differenza tra lunghezze d'onda di ricezione ed emissione $d\lambda \equiv \lambda_r - \lambda_e$ e usiamo le due espressioni (1.24) - (1.25) al fine di ottenere

$$\frac{d\lambda}{\lambda_e} = \frac{dv}{c} = \frac{\dot{a}}{a} \frac{dr}{c} = \frac{\dot{a}}{a} dt = \frac{da}{a}, \quad (1.26)$$

dove abbiamo usato l'intervallo temporale che intercorre tra momento di emissione e ricezione $dt = \frac{dr}{c}$, la legge di Hubble e il fatto che $d\lambda$ sia positivo per via del fenomeno di recessione. Procediamo per integrazione e troviamo

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda_e} = \int \frac{da}{a},$$

e dunque

$$\ln(\lambda) = \ln(a) + \text{cost.} \quad (1.27)$$

da cui con evidenza notiamo $\lambda \propto a$, con λ lunghezza d'onda misurata in un dato tempo. Abbiamo ricavato il risultato utilizzando l'approssimazione $z = \frac{v}{c}$ per corpi vicini, ma può essere generalizzato anche per oggetti più lontani. Abbiamo mostrato che poiché l'Universo si sta espandendo, le lunghezze d'onda crescono in maniera direttamente proporzionale al fattore di scala. Inoltre abbiamo ricavato un'equazione che lega parametro di redshift z e fattore di scala a

$$1 + z = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}. \quad (1.28)$$

1.4.3 Il Parametro di Densità

Introduciamo ora un parametro adatto a descrivere la densità dell'Universo. Il punto di partenza è ancora l'equazione di Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2}.$$

Fissato il parametro H , esiste un particolare valore della densità, chiamato *densità critica*, che risulta necessario per avere un Universo piatto¹⁷

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (1.29)$$

Notiamo che la densità critica evolve nel tempo proporzionalmente ad H . Conoscendo il valore presente della costante di Hubble, seppur in termini del parametro h , possiamo ricavare una misura per la densità critica presente: $\rho_c(t_0) = 2.78 h^{-1} \times 10^{11} M_\odot / (h^{-1} \text{Mpc})^3$. Quanto misurato è in buona approssimazione in

¹⁷In tal caso infatti $k = 0$ e la densità dell'universo coinciderebbe con la densità critica.

accordo con la realtà, dato che una galassia ha massa pari a $10^{11} - 10^{12}$ masse solari e la separazione tra due galassie vicine è di circa un Megaparsec. Se presente un qualsiasi valore di materia in più oltre a quella prevista, il parametro di curvatura k risulta maggiore di zero e cambia l'intera evoluzione dell'Universo, che rallenterà in un primo momento per poi invertire la propria espansione. Nonostante la geometria dell'Universo non sia necessariamente piana, si usa descrivere la sua densità in termini della densità critica per mezzo della quantità adimensionale

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (1.30)$$

$\Omega(t)$ è chiamato parametro di densità, in particolare con Ω_0 viene indicato il suo valore attuale che cambia a seconda dell'Universo che stiamo considerando. Se definiamo anche un parametro di densità associato alla curvatura dell'Universo

$$\Omega_k \equiv \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (1.31)$$

che può essere positivo, negativo o nullo, possiamo riscrivere l'equazione di Friedmann nel seguente modo

$$\Omega + \Omega_k = 1. \quad (1.32)$$

1.4.4 La Costante Cosmologica

L'introduzione di un nuovo termine costante, che viene oggi indicato con la lettera greca Λ , è permesso dalla relatività generale di Einstein¹⁸ e può assumere valori sia positivi che negativi. Nonostante ciò noi tratteremo il solo caso in cui $\Lambda > 0$. La costante cosmologica appare all'interno dell'equazione di Friedmann come un nuovo termine

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.33)$$

e dunque ha le dimensioni dell'inverso del quadrato del tempo. I suoi effetti sulle espressioni viste fino ad ora sono meglio visibili sull'equazione di accelerazione

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.34)$$

Una costante cosmologica positiva dà un contributo positivo ad \ddot{a} e, se sufficientemente grande, è in grado di prevalere sul termine negativo dovuto all'energia potenziale gravitazionale al fine di accelerare l'espansione dell'Universo. Anche in questo caso risulta utile definire un parametro di densità per la costante cosmologica come

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (1.35)$$

¹⁸Einstein soleva pensare che l'Universo fosse statico sebbene la teoria della Relatività Generale non permettesse tale ipotesi. Propose così un cambiamento alle proprie equazioni introducendo la Costante Cosmologica.

per poter riscrivere l'equazione di Friedmann come

$$\Omega + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1, \quad (1.36)$$

separando dunque il termine relativo a Λ dalla densità di materia corrispondente a Ω secondo la notazione cosmologica. La relazione tra la costante e la geometria dell'Universo può essere espressa nel seguente modo:

- Universo aperto: $0 < \Omega + \Omega_\Lambda < 1$.
- Universo piatto: $\Omega + \Omega_\Lambda = 1$.
- Universo chiuso: $\Omega + \Omega_\Lambda > 1$.

Come si nota dalla sua espressione, Ω_Λ evolve nel tempo, rinomineremo dunque questa quantità con $\lambda \equiv \Omega_\Lambda$ in modo tale da indicare il suo attuale valore con λ_0 e non confonderlo col termine Ω_0 visto discutendo il parametro di densità di materia nella precedente sottosezione. Può essere talvolta conveniente descrivere la costante cosmologica come un fluido di densità di energia ρ_Λ e pressione p_Λ . Ponendo $\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}$ riscriviamo l'equazione di Friedmann come

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}. \quad (1.37)$$

Al fluido relativo a Λ associamo una propria equazione del fluido

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_\Lambda + \frac{p_\Lambda}{c^2}\right) = 0, \quad (1.38)$$

ed essendo $p_\Lambda = \text{cost.}$ dobbiamo necessariamente avere $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$. La costante cosmologica ha un effetto negativo di pressione, ovvero viene fatto lavoro sul fluido mentre l'Universo si espande e questo permette alla densità di energia di rimanere costante nonostante il volume incrementi.

1.5 Universi di Friedmann

In molti casi i fluidi hanno un'equazione di stato espressa in maniera esatta o approssimata dalla relazione $p = w\rho c^2$, col parametro w costante e appartenente all'intervallo $0 \leq w \leq 1$. Ci serviremo di questa espressione per analizzare l'evoluzione di Universi di Friedmann con parametro di curvatura nullo, chiamati anche *Universi di Einstein-de Sitter*. In particolare per un Universo di polvere ed un Universo di materia i valori di w sono rispettivamente $w = 0$ e $w \simeq 0$ ¹⁹, mentre per un Universo radiativo abbiamo $w = \frac{1}{3}$.

¹⁹Tratteremo queste due situazioni come un caso unico.

1.5.1 Universo di Einstein-de Sitter di materia

Abbiamo specificato che per un Universo di polvere e materia l'equazione di stato è data da $p = 0$. Riprendiamo l'equazione del fluido ed eliminiamo il termine proporzionale alla pressione, otteniamo

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \quad (1.39)$$

che può essere riscritta come

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (\rho a^3) = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt} (\rho a^3) = 0 = \frac{d}{dt} (const.), \quad (1.40)$$

da cui concludiamo $\rho \propto \frac{1}{a^3}$, in particolare

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3}. \quad (1.41)$$

La densità decresce in proporzione al volume dell'Universo. Possiamo ora analizzare come a vari nel tempo tramite l'equazione di Friedmann. Inseriamo l'espressione della densità appena trovata e ricordiamo che il parametro di curvatura è nullo, otteniamo

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3a}, \quad (1.42)$$

da cui

$$\dot{a} \propto \frac{1}{\sqrt{a}} \rightarrow a^{\frac{3}{2}} \propto t \rightarrow a \propto t^{\frac{2}{3}}. \quad (1.43)$$

Poiché si pone $a = 1$ al tempo presente, otteniamo le seguenti relazioni

$$a(t) = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{t_0^{\frac{2}{3}}}; \quad \rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}. \quad (1.44)$$

Con queste soluzioni l'Universo si espande all'infinito, nonostante il rateo di espansione individuato dal parametro di Hubble decresca nel tempo

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}. \quad (1.45)$$

Notiamo che l'universo continua ad espandersi sebbene sia presente la forza di gravità, evitando il proprio collasso.

1.5.2 Universo di Einstein-de Sitter di radiazione

Per un Universo di tipo radiativo l'equazione di stato è $p = \frac{\rho c^2}{3}$. L'equazione del fluido diventa inserendo l'espressione per la pressione

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \quad (1.46)$$

che può essere riscritta come

$$\frac{1}{a^4} \frac{d}{dt} (\rho a^4) = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt} (\rho a^4) = 0 = \frac{d}{dt} \text{cost.}, \quad (1.47)$$

da cui concludiamo $\rho \propto \frac{1}{a^4}$, in particolare

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^4}. \quad (1.48)$$

Esaminiamo la caduta di densità, proporzionale all'inverso della quarta potenza del fattore di scala. Tre di queste potenze identificano la caduta dovuta all'incremento di volume dell'Universo, mentre l'ultima potenza è dovuta allo "stretching" della lunghezza d'onda della luce. Essendo questo allungamento proporzionale ad a e l'energia della radiazione alla propria frequenza²⁰ in accordo con $E = hf$, questo risulta in una perdita di energia tramite la restante potenza di a . Possiamo nuovamente analizzare come a vari nel tempo tramite l'equazione di Friedmann. Inseriamo l'espressione della densità appena trovata e otteniamo

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3a^2}, \quad (1.49)$$

da cui

$$\dot{a} \propto \frac{1}{a} \rightarrow a^2 \propto t \rightarrow a \propto t^{\frac{1}{2}}. \quad (1.50)$$

Poiché si pone $a = 1$ al tempo presente, otteniamo le seguenti relazioni

$$a(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{t_0^{\frac{1}{2}}}; \quad \rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}. \quad (1.51)$$

Il parametro di Hubble decresce nel tempo

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t}. \quad (1.52)$$

Notiamo che l'Universo si espande più lentamente se dominato dalla radiazione rispetto alla materia, in accordo con quanto previsto dall'equazione di accelerazione²¹.

1.5.3 Universo di materia e radiazione

Consideriamo una situazione più generale in cui siano presenti sia materia che radiazione. Le densità sono proporzionali a diverse potenze del fattore di scala

$$\rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3}, \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4}, \quad (1.53)$$

²⁰E dunque alla lunghezza d'onda associata essendo $f = c/\lambda$.

²¹Secondo questa infatti la presenza di un termine di pressione rallenta l'espansione dell'Universo.

e vogliamo considerare il caso in cui sia una delle due a dominare. Supponiamo di partire da un Universo in cui prevalga la radiazione, in tal caso $a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$ e dunque

$$\rho_{mat} \propto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{t^2}. \quad (1.54)$$

La densità della materia decresce più lentamente nel tempo, dunque la situazione

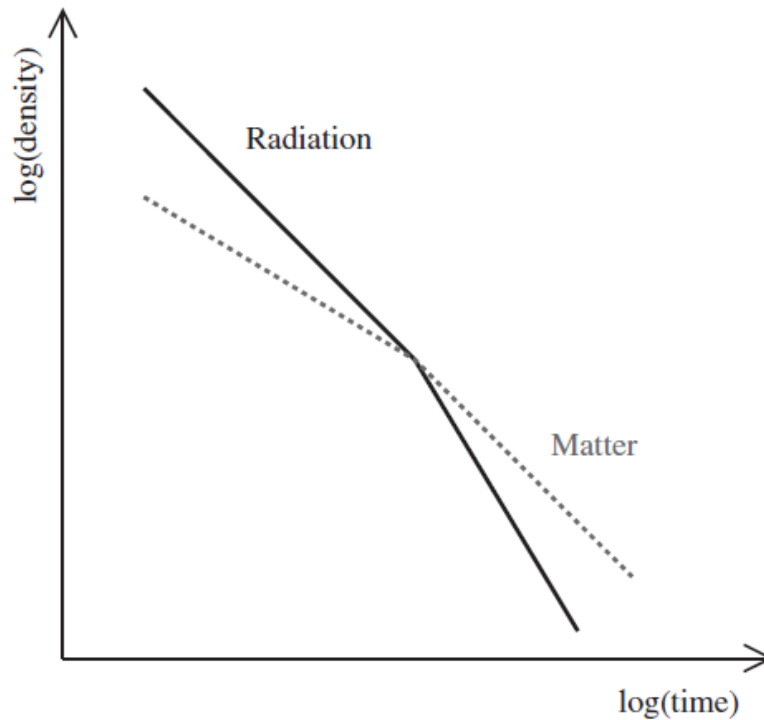


Figura 1.2: Illustrazione schematica dell'evoluzione di un Universo contenente radiazione e materia.

in cui sia la radiazione a dominare non può durare per sempre. Si arriverà ad un punto in cui $\rho_{rad} = \rho_{mat}$, chiamato *periodo di equivalenza* dell'Universo, dopo il quale la densità di materia prevarrà su quella di radiazione. La situazione è riportata in Figura 1.2. Se analizziamo il caso in cui la materia eserciti una maggiore influenza allora $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$ e quindi

$$\rho_{mat} \propto \frac{1}{t^2}, \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{t^{\frac{8}{3}}}. \quad (1.55)$$

La situazione non cambia nel tempo, la ρ_{rad} decresce nel tempo più velocemente e il dominio della materia sarà sempre più forte.

1.5.4 Evoluzione includente la Curvatura

Reintroduciamo la possibilità che il parametro di curvatura k non sia nullo e discutiamo qualitativamente il comportamento delle soluzioni delle equazioni di Friedmann in Universi dominati dalla materia non relativistica. Osservando l'equazione di Friedmann (1.23) ci chiediamo se esiste la possibilità che l'Universo cessi di espandersi, ovvero se possa risultare $H = 0$. Notiamo che ciò è impossibile nel caso in cui $k < 0$, poiché entrambi i termini a destra dell'uguale sarebbero positivi. Un tale Universo deve espandersi per sempre e per tempi lunghi il termine $\frac{k}{a^2}$ dominerà sul contributo di densità che decresce come $\rho \propto \frac{1}{a^3}$.

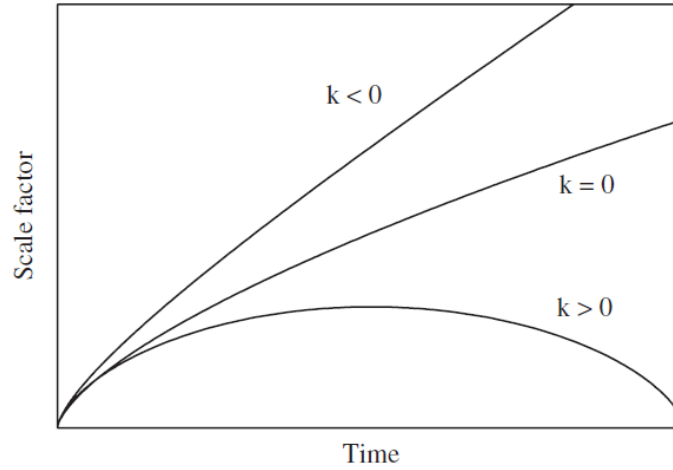


Figura 1.3: Tre possibili evoluzioni per l'Universo, corrispondenti a differenti segni di k . Durante le prime fasi dell'espansione le tre linee sono molto vicine tra loro e rendono difficile la distinzione del modello di un Universo preso in considerazione.

Quando ciò succede otteniamo

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2}, \quad (1.56)$$

da cui $a \propto t$. L'espansione risulta più veloce. La situazione cambia completamente se consideriamo $k > 0$, poiché il parametro di Hubble può assumere un valore nullo. Questo risulta anzi inevitabile per via dell'influenza negativa di $\frac{k}{a^2}$ che nel tempo si afferma sempre più sul termine relativo alla densità di materia. Il collasso dell'Universo risulta necessario in questa situazione. I comportamenti dell'Universo basati sul parametro di curvatura sono relazionati all'energia U_{tot} del volumetto infinitesimo approssimato ad una particella che abbiamo utilizzato per derivare l'equazione di Friedmann. Se l'energia della particella è positiva, allora essa può allontanarsi fino all'infinito, con un'energia cinetica finale data da U_{tot} . Se l'energia totale è

nulla, allora la particella può scappare dall'attrazione gravitazionale, ma con velocità nulla. Se l'energia è negativa la particella non può resistere all'attrazione gravitazionale ed è destinata a collassare. La Figura 1.3 riporta l'evoluzione del fattore di scala in funzione del tempo a seconda della curvatura dell'Universo.

Capitolo 2

Crescita delle perturbazioni: il regime lineare

Abbiamo accennato al fatto che l'Universo al tempo presente risulti omogeneo ed isotropo su determinate scale di lunghezza, tuttavia siamo a conoscenza di come quest'idea non valga localmente, basti pensare al vuoto che separa i pianeti del nostro Sistema Solare, o le stelle appartenenti ad una Galassia. Queste "irregolarità" devono derivare da anisotropie e disomogeneità già presenti nell'Universo primordiale, ove potrebbero avere giocato un ruolo fondamentale le *fluttuazioni quantistiche*, mutamenti temporanei nello stato di energia dello spazio vuoto in accordo col principio di Heisenberg¹. Se le fluttuazioni di energia del vuoto quantistico rendono conto dell'esistenza di disomogeneità nell'universo primordiale è poi in virtù del processo fisico noto come instabilità gravitazionale che tali perturbazioni si evolvono al trascorrere del tempo. Infatti se la materia presente nell'universo è distribuita in modo irregolare le regioni sovradense provvedono ad un eccesso di attrazione gravitazionale ed attirano materiale verso di loro incrementando la rispettiva densità sotto l'azione della gravità quindi le irregolarità diventano sempre più consistenti e danno origine, lentamente, alle strutture. Per la stesura di questo capitolo è stato preso in considerazione [2].

2.1 Perturbazioni in un fluido stazionario

Volendo spiegare la formazione delle strutture cosmiche, mostriamo come partendo da un fluido omogeneo, isotropo e in condizione stazionaria, piccole fluttuazioni di densità $\delta\rho$ e velocità δv possono evolvere nel tempo, con particolare interesse verso le fluttuazioni di densità che possono crescere se l'effetto stabilizzante della pressione è trascurabile rispetto all'effetto dovuto all'autogravitazione. Questo effetto è chiamato *instabilità gravitazionale di Jeans*. Le equazioni che descrivono il

¹Secondo una delle forme del principio si ha $\Delta E \Delta T > h/2\pi$, dunque la conservazione dell'energia può essere violata, ma per brevissimi periodi di tempo.

moto di un fluido autogravitante sono le seguenti

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{\nabla} \varphi = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla^2 \varphi - 4\pi G \rho = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s = 0, \quad (2.4)$$

che corrispondono rispettivamente alle equazioni di continuità, di Eulero, di Poisson e di conservazione dell'entropia per unità di massa². Aggiungiamo anche la relazione che lega la velocità del suono in un mezzo alla pressione

$$v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s. \quad (2.5)$$

Questo sistema di equazioni ammette la soluzione statica $\rho = \rho_0$, $\vec{v} = 0$, $s = \vec{s}_0$, $p = p_0$, $\vec{\nabla} \varphi = 0$, sebbene quest'ultima contraddica l'equazione di Poisson nel caso di un Universo infinito: se $\rho_0 \neq 0$ il potenziale, contrariamente all'ipotesi di omogeneità, deve variare nello spazio. Questo è un difetto della teoria di Jeans, la distribuzione omogenea di densità ρ deve rappresentare un'espansione o un collasso, non può essere stazionaria. Inseriamo piccole perturbazioni al sistema: $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $\vec{v} = \delta\vec{v}$, $s = \vec{s}_0 + \delta\vec{s}$, $p = p_0 + \delta p$, $\vec{\nabla} \varphi = +\delta\varphi$ e trascuriamo i termini di ordine superiore al primo, otteniamo il seguente sistema linearizzato

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \delta\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \vec{\nabla} \delta\rho + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_s \vec{\nabla} \delta s + \vec{\nabla} \delta\varphi = 0, \quad (2.7)$$

$$\nabla^2 \delta\varphi - 4\pi G \delta\rho = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} = 0. \quad (2.9)$$

Al fine di risolvere tale sistema cerchiamo soluzioni del tipo onda piana, in cui può essere scomposta una generica fluttuazione

$$\delta u_i = \delta_i \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (2.10)$$

dove le δu_i rappresentano $\delta\rho$, $\delta\vec{v}$, $\delta\varphi$, δs per $i = 1, 2, 3, 4$. Essendo poi le δ_i funzioni del solo tempo, ed essendo la soluzione imperturbata indipendente da esso, possiamo cercare espressioni del tipo

$$\delta_i(t) = \delta_{0i} \exp(i\omega t), \quad (2.11)$$

²Quest'ultima valida in quanto trascureremo termini dissipativi dovuti a viscosità e conduzione.

tenendo conto che nello sviluppo dei calcoli indicheremo le δ_{0i} rispettivamente con D , \vec{V} , Φ e Σ . Poniamo infine $\delta_0 = \frac{D}{\rho_0}$ ³ e sostituiamo l'espressione di onda piana alle perturbazioni del precedente sistema. Ricordando la relazione (2.5), otteniamo

$$\omega \delta_0 + \vec{k} \cdot \vec{V} = 0, \quad (2.12)$$

$$\omega \vec{V} + \vec{k} v_s^2 \delta_0 + \frac{\vec{k}}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \Sigma + \vec{k} \Phi = 0, \quad (2.13)$$

$$k^2 \Phi + 4\pi G \rho_0 \delta_0 = 0, \quad (2.14)$$

$$\omega \Sigma = 0. \quad (2.15)$$

Consideriamo inizialmente le perturbazioni indipendenti dal tempo, ovvero quelle con $\omega = 0$. Una soluzione si ottiene ponendo $\Sigma = \Sigma^* = \text{cost.} \neq 0$. Tale soluzione è detta entropica e mostra che in mancanza di viscosità e termoconduzione le perturbazioni relative ad s si conservano nel tempo. Se ancora vale la relazione $\omega = 0$ otteniamo altre due soluzioni ponendo $\Sigma = 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{V} = 0$. Queste corrispondono a valori del vettore d'onda perpendicolari a \vec{V} e rappresentano moti vorticosi che non hanno alcuna influenza sulla densità del fluido, come può essere mostrato dalle restanti equazioni del sistema. Consideriamo adesso le soluzioni con $\omega \neq 0$. Dalla (2.15) risulta $\Sigma = 0$, dunque le perturbazioni sono adiabatiche. Inoltre avendo precedentemente assunto $\vec{k} \cdot \vec{V} = 0$, possiamo ora assumere che i due vettori siano invece paralleli e identificare la perturbazione come un'onda longitudinale. Il sistema diventa in questo modo

$$\omega \delta_0 + kV = 0, \quad (2.16)$$

$$\omega V + k v_s^2 \delta_0 + k\Phi = 0, \quad (2.17)$$

$$k^2 \Phi + 4\pi G \rho_0 \delta_0 = 0. \quad (2.18)$$

Sappiamo dall'algebra lineare che tale sistema ammette soluzione non nulla se nullo è il suo determinante. Eseguendo il calcolo giungiamo alla *relazione di dispersione*

$$\omega^2 - v_s^2 k^2 + 4\pi G \rho_0 = 0. \quad (2.19)$$

Introduciamo la lunghezza d'onda di Jeans

$$\lambda_J = v_s \left(\frac{\pi}{G \rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.20)$$

ricordiamo la relazione $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ e risolviamo l'equazione rispetto ad ω ottenendo

$$\omega = \pm v_s k \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.21)$$

³ δ rappresenta il contrasto di densità tra Universo imperturbato e Universo perturbato.

Troviamo due situazioni dipendenti dal comportamento della lunghezza d'onda λ corrispondente alla fluttuazione. Se $\lambda < \lambda_J$ dalla (2.21) ricaviamo una pulsazione ω reale. Dalle espressioni (2.10) e (2.11) e dal precedente sistema relativo a perturbazioni adiabatiche traiamo il seguente sistema

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = \delta_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm |\omega|t)], \quad (2.22)$$

$$\delta\vec{v} = \mp \frac{\vec{k}}{k} v_s \delta_0 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm |\omega|t)], \quad (2.23)$$

$$\delta\varphi = v_s^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm |\omega|t)], \quad (2.24)$$

rappresentante due onde sonore dirette nelle direzioni $\pm\vec{k}$, con termine di dispersione individuato da $\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Nel limite $\lambda \rightarrow \lambda_J$ la velocità di fase dell'onda tende a zero. Se invece $\lambda > \lambda_J$ la (2.21) restituisce una pulsazione immaginaria e procedendo esattamente come prima otteniamo

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = \delta_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(\pm|\omega|t), \quad (2.25)$$

$$\delta\vec{v} = \mp \frac{\vec{k}}{k^2} \omega \delta_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(\pm|\omega|t), \quad (2.26)$$

$$\delta\varphi = v_s^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \pi) \exp(\pm|\omega|t), \quad (2.27)$$

che rappresentano onde stazionarie di ampiezza esponenzialmente crescente o decrescente con tempo caratteristico

$$\tau \equiv |\omega|^{-1} = (4\pi G\rho_0)^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.28)$$

e per $\lambda \gg \lambda_J$ la (2.28) coincide col tempo di caduta libera

$$\tau_{ff} = \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (2.29)$$

Soluzioni di questo tipo si dicono soggette al fenomeno di instabilità gravitazionale. Ci preoccupiamo di comprendere il significato fisico della lunghezza d'onda di Jeans tramite una semplice considerazione qualitativa. Consideriamo ad un dato istante una fluttuazione di densità $\delta\rho > 0$ in una regione sferica di raggio λ all'interno del fluido. La fluttuazione cresce nel tempo se la forza per unità di massa causata dall'autogravitazione F_g domina sulla forza per unità di massa dovuta alla pressione F_p

$$F_g \simeq \frac{G\rho\lambda^3}{\lambda^2} > F_p \simeq \frac{p\lambda^2}{\rho\lambda^3} \simeq \frac{v_s^2}{\lambda}, \quad (2.30)$$

e ciò implica che $\lambda > v_s (G\rho)^{\frac{1}{2}} \simeq \lambda_J$. Ricapitolando il significato delle soluzioni trovate può essere così presentato: se la pressione interna della regione perturbata prevale sulla forza di autogravitazione la perturbazione si propaga come un'onda sonora di lunghezza λ , mentre quando a dominare è invece la gravità, la perturbazione è instabile e la crescita della sua ampiezza è di tipo esponenziale.

2.2 Instabilità di Jeans nei modelli di Friedmann

Quanto detto nella precedente sezione non può essere adottato per un Universo in espansione. Come visto nel primo capitolo la densità dell'Universo decresce nel tempo secondo la legge $\rho \propto \frac{\rho_0}{t^2}$ a causa dell'espansione. In particolare può essere mostrato che il tempo caratteristico della variazione

$$\tau_{exp} = \frac{\rho}{\dot{\rho}} \simeq t \simeq \frac{1}{G\rho^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.31)$$

il quale è dello stesso ordine di grandezza del tempo caratteristico dell'instabilità gravitazionale di Jeans per $\lambda \gg \lambda_J$ come esplicitato nella (2.29). Ci aspettiamo ancora un'onda acustica per $\lambda < \lambda_J$ e instabilità di Jeans per $\lambda > \lambda_J$ con una crescita o decrescita meno veloce del livello esponenziale. Considerando infatti una fluttuazione di densità $\delta\rho > 0$ e $\lambda > \lambda_J$ la sua crescita avverrà più lentamente che nel caso stazionario poiché essa dovrà attirare particelle che si muovono secondo le leggi di espansione dell'Universo.

2.2.1 Soluzione per un Universo di materia

Riprendiamo il sistema di equazioni considerate nella precedente sezione (Continuità, Eulero, Poisson, relazione tra velocità del suono e pressione e conservazione dell'entropia), e riscriviamole in maniera opportuna per un fluido in espansione e nel caso di un universo di sola materia inizialmente omogenea e isotropa. Ricaviamo la seguente soluzione

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (2.32)$$

$$\vec{v} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}, \quad (2.33)$$

$$\varphi = \frac{2}{3} \pi G \rho r^2, \quad (2.34)$$

$$p = p(\rho, S), \quad (2.35)$$

$$s = \text{cost.} \quad (2.36)$$

ove $a(t)$ è il fattore di scala introdotto nel primo capitolo. Passiamo allo spazio di Fourier

$$\rho(\vec{r}, t) = \int D_k(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3k, \quad (2.37)$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \int \vec{V}_k(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3k, \quad (2.38)$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \Phi_k(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3k, \quad (2.39)$$

$$s(\vec{r}, t) = \int \Sigma_k(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3k, \quad (2.40)$$

ove i coefficienti sono ora dipendenti dal tempo. Studieremo l'evoluzione dei singoli ed indipendenti modi di Fourier in cui può essere scomposta una perturbazione. Tenendo ciò a mente perturbiamo nuovamente il sistema trascurando i termini superiori al primo e otteniamo le seguenti equazioni

$$\dot{D} + 3\frac{\dot{a}}{a}D + i\vec{v} \cdot \vec{k}D + i\rho \vec{k} \cdot \vec{V} = 0, \quad (2.41)$$

$$\dot{\vec{V}} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{V} + i\vec{v} \cdot \vec{k}\vec{V} + v_s^2 \vec{k} \frac{D}{\rho} + i\vec{k} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \Sigma + i\vec{k} \Phi = 0, \quad (2.42)$$

$$k^2 \Phi + 4\pi G D = 0, \quad (2.43)$$

$$\dot{\Sigma} + i\vec{v} \cdot \vec{k}\Sigma = 0. \quad (2.44)$$

Per lo studio del problema siamo interessati alla derivata Lagrangiana $\frac{d}{dt}$, ovvero al caso in cui $\vec{v} = 0$ poiché ci troviamo in un sistema comovente. Il sistema di equazioni ammette una soluzione entropica indipendente dal tempo

$$\delta s = \Sigma_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (2.45)$$

Sono ammesse soluzioni relative a moti vorticosi, ottenute ponendo $D = \Phi = \Sigma = 0$ e $\vec{V} \cdot \vec{k} = 0$. In questo modo si ricava

$$\dot{\vec{V}} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{V} = 0, \quad (2.46)$$

con soluzioni

$$\vec{V} = \vec{V}_0 \frac{a_0}{a}. \quad (2.47)$$

Ponendo $\Sigma = 0$ e i vettori \vec{V} e \vec{k} paralleli ritroviamo il caso delle perturbazioni adiabatiche. Le equazioni del sistema diventano

$$\dot{D} + 3\frac{\dot{a}}{a}D + i\rho kV = 0, \quad (2.48)$$

$$\dot{V} + \frac{\dot{a}}{a}V + ik \left(v_s^2 - \frac{4\pi G \rho}{k^2} \right) \frac{D}{\rho} = 0. \quad (2.49)$$

Poniamo $\delta = \frac{D}{\rho}$ e la (2.48) diventa

$$\dot{\delta} + ikV = 0, \quad (2.50)$$

che deriviamo per avere

$$\ddot{\delta} + ik \left(\dot{V} - \frac{\dot{a}}{a} V \right) = 0. \quad (2.51)$$

Abbiamo dunque tre equazioni disponibili e tre variabili, usiamo (2.50) e (2.49) per esprimere \vec{V} e $\dot{\vec{V}}$ in funzione di δ ed arrivare a

$$\ddot{\delta} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} + (v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho) \delta = 0. \quad (2.52)$$

La soluzione di questa differenziale può essere scomposta in due modi

$$\delta = D(t)_+ F(\vec{r}) + D(t)_- G(\vec{r}), \quad (2.53)$$

con i coefficienti $D(t)_\pm$ linearmente indipendenti e le due funzioni F e G descrittive la densità iniziale. Il coefficiente $D(t)_+$ è detto *fattore di crescita lineare* e rappresenta il modo crescente della soluzione. Per un Universo di materia valgono le seguenti relazioni accennate nel primo capitolo

$$\rho = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad (2.54)$$

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (2.55)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}, \quad (2.56)$$

a cui aggiungiamo l'espressione per la velocità del suono supponendo la materia composta di particelle monoatomiche di massa m e a temperatura T_m

$$v_s = \left(\frac{5 k_B T_m}{3m} \right). \quad (2.57)$$

Sostituiamo queste equazioni nella (2.52) per trovare

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3} \frac{\dot{\delta}}{t} - \frac{2}{3t^2} \left(1 - \frac{v_s^2 k^2}{4\pi G \rho} \right) \delta = 0. \quad (2.58)$$

Supponiamo che la perturbazione sia proporzionale ad una potenza del tempo: $\delta \propto t^{n^4}$, le soluzioni che troviamo sono le seguenti

$$\delta_{1,2} \propto t^{-[1 \pm 5(1 - 6v_s^2 k^2 / 25\pi G \rho)^{\frac{1}{2}}] / 6} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (2.59)$$

Per proseguire con l'analisi introduciamo la *lunghezza d'onda di Jeans per un Universo di materia*

$$\lambda'_J = \frac{\sqrt{24}}{5} v_s \left(\frac{\pi}{G \rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.60)$$

ci troviamo allora davanti a due casi diversi:

⁴In generale però n dipende dal tempo tramite il termine $\frac{\lambda'_J}{\lambda}$.

- i) Se l'argomento della radice è positivo, ovvero $\lambda > \lambda'_J$ le soluzioni (2.59) presentano il fenomeno dell'instabilità gravitazionale. In particolare per $\lambda \gg \lambda'_J$

$$\delta_+ \propto t^{\frac{2}{3}} \quad \delta_- \propto t^{-1}.$$

- ii) Se invece $\lambda < \lambda'_J$ la (2.59) può essere riscritta come

$$\delta_{1,2} \propto \frac{1}{t^{\frac{1}{6}}} \exp i \left\{ \vec{k} \cdot \vec{r} + \frac{5}{6} \left[\left(\frac{\lambda'_J}{\lambda} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \ln t \right\}, \quad (2.61)$$

che rappresenta due soluzioni oscillanti. Ancora per $\lambda \ll \lambda'_J$ troviamo

$$\delta_{1,2} \propto \exp i (\vec{k} \cdot \vec{r} \pm k v_s t \ln t). \quad (2.62)$$

Dunque l'espansione del Cosmo in Universo dominato dalla materia influenza sia la crescita delle soluzioni non stazionarie che di quelle stazionarie, smorzandone l'ampiezza. Concludiamo osservando la sottile somiglianza tra la lunghezza d'onda di Jeans per un Universo stazionario e quella per un Universo di polvere materia in espansione.

2.2.2 Soluzione per un Universo radiativo

Nel caso di un Universo di tipo radiativo vanno modificate le equazioni (2.1), (2.2), (2.3) per tenere conto del fatto che la sorgente gravitazionale è ora $\rho + \frac{3p}{c^2} = 2\rho$. Il sistema di equazioni corrette è il seguente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \vec{v} = 0, \quad (2.63)$$

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) + \vec{\nabla} p + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \vec{\nabla} \phi = 0, \quad (2.64)$$

$$\nabla^2 - 4\pi G \left(\rho + 3 \frac{p}{c^2} \right) = 0, \quad (2.65)$$

$$v_s = \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad (2.66)$$

Non riportiamo nuovamente l'equazione di conservazione dell'entropia poiché ci interessiamo al caso di perturbazioni adiabatiche longitudinali. Ripercorrendo quanto visto fino ad ora, introduciamo piccole perturbazioni nel sistema, consideriamo il sistema linearizzato, passiamo allo spazio di Fourier e ripetendo gli stessi passaggi visti per un Universo di materia otteniamo l'equazione analoga

$$\ddot{\delta} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} + \left(v_s^2 k^2 - \frac{32}{3} \pi G \rho \right) \delta = 0. \quad (2.67)$$

Anche la soluzione di questa differenziale può essere scomposta in due modi

$$\delta = D(t)'_+ F(\vec{r})' + D(t)'_- G(\vec{r})',$$

ove i coefficienti $D(t)'_{\pm}$ e le due funzioni F' e G' hanno le stesse caratteristiche del caso precedente. Per un Universo radiativo valgono le relazioni

$$\rho = \frac{3}{32\pi G t^2}, \quad (2.68)$$

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.69)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t}, \quad (2.70)$$

e supponiamo che $\delta \propto t^n$, ottenendo due nuove soluzioni

$$\delta_{1,2} \propto t^{\pm(1-3v_s^2 k^2 / 32\pi G \rho)^{\frac{1}{2}}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (2.71)$$

Abbiamo ora la possibilità di introdurre la *lunghezza d'onda di Jeans per un Universo radiativo*

$$\lambda'_J = \sqrt{\frac{3}{8}} v_s \left(\frac{\pi}{G\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.72)$$

ci troviamo sempre davanti a due possibilità:

- i) Se l'espressione nella radice è positiva, ovvero $\lambda > \lambda'_J$ le soluzioni (2.71) presentano il fenomeno dell'instabilità gravitazionale. In particolare per $\lambda \gg \lambda'_J$

$$\delta_+ \propto t \quad \delta_- \propto t^{-1}.$$

- ii) Se invece $\lambda < \lambda'_J$ la (2.59) può essere riscritta come

$$\delta_{1,2} \propto \exp i \left\{ \vec{k} \cdot \vec{r} \pm \left[\left(\frac{\lambda'_J}{\lambda} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \ln t \right\}, \quad (2.73)$$

che rappresenta due soluzioni oscillanti. Sempre per $\lambda \ll \lambda'_J$ troviamo

$$\delta_{1,2} \propto \exp i (\vec{k} \cdot \vec{r} \pm k v_s t \ln t). \quad (2.74)$$

L'espansione dell'Universo ha influenza sul modello radiativo, in particolare l'ampiezza delle onde stazionarie risulta smorzata. Analogamente a prima osserviamo la sottile somiglianza tra la lunghezza d'onda di Jeans per un Universo stazionario e quella per un Universo di radiazione in espansione.

2.2.3 Soluzione per un Universo con w qualsiasi

Ci concentriamo sul caso di modelli di Universo costituiti da un fluido con relativa equazione di stato $p = \omega \rho c^2$ ed in generale $v_s = w^{\frac{1}{2}} c$ per $w > 0$, mentre per $w \simeq 0$ il suo valore dovrà essere espresso adeguatamente come visto nel caso di Universi di materia. Il procedimento da seguire è ancora il medesimo, reintroduciamo piccole perturbazioni nel sistema e prendiamo in considerazione il sistema linearizzato per poi passare allo spazio di Fourier. Sviluppiamo i calcoli per arrivare all'equazione

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + \left\{ v_s^2 k^2 - 4\pi G(1+\omega) \left[1 + 3\left(\frac{v_s}{c}\right)^2 \right] \rho \right\} \delta = 0, \quad (2.75)$$

e notiamo come i due casi precedenti possano essere ottenuti ponendo $\omega = 0$ e $\omega = \frac{1}{3}$. Nel caso in cui l'equazione di stato dipenda dal parametro ω per universi di Einstein-de Sitter sono valide le seguenti relazioni

$$\rho = \frac{1}{6\pi(1+\omega)^2 G t^2}, \quad (2.76)$$

$$a \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}, \quad (2.77)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(1+\omega)t}. \quad (2.78)$$

Sostituiamo queste espressioni nella (2.75) otteniamo l'espressione

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3(1+\omega)} \frac{\dot{\delta}}{t} - \frac{3(1+3\omega)}{2(1+\omega)t^2} \left[1 - \frac{v_s^2 k^2}{4\pi(1+\omega)(1+3\omega)G\rho} \right] \delta = 0. \quad (2.79)$$

Definiamo la *lunghezza d'onda di Jeans per Universo con $\frac{p}{\rho} = \text{cost}$* .

$$\lambda_J' = \frac{\sqrt{24}}{5+9\omega} v_s \left(\frac{\pi}{G\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.80)$$

e al solito supponiamo che $\delta \propto t^n$ per ricavare due soluzioni

$$\delta_{1,2} \propto t^{-\{1-3\omega \pm (5+9\omega)[1-(\lambda_J'/\lambda)^2]\}^{1/2}/6(1+\omega)}. \quad (2.81)$$

Per $\lambda > \lambda_J'$ si ha l'instabilità gravitazionale, in particolare se $\lambda \gg \lambda_J'$

$$\delta_+ \propto t^{\frac{2(1+3\omega)}{3(1+\omega)}} \quad \delta_- \propto t^{-1},$$

con la soluzione decrescente indipendente dal parametro ω , mentre la soluzione crescente è proporzionale ad una potenza del tempo che cresce con ω , caratteristica dovuta al fatto che maggiore è il valore di questo parametro, più lentamente si espanderà l'Universo. Per $\lambda < \lambda_J'$ le soluzioni della (2.75) sono oscillanti, per $\lambda \ll \lambda_J'$ troviamo

$$\delta \propto t^{-(1-3\omega)/6(1+\omega)} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm kv_s t \ln t)]. \quad (2.82)$$

2.3 L'effetto di stagnazione

In un Universo composto sia da materia che radiazione esiste la possibilità che ad essere perturbata sia solo la materia non relativistica, lasciando imperturbata la materia relativistica. Ci occupiamo di descrivere l'evoluzione lineare di una perturbazione di questo tipo in un Universo prevalentemente radiativo (ρ_{rel}), ma composto anche da materia con densità $\rho_{non-rel}$. In termini di redshift siamo nel periodo dell'universo in cui $z > z_{eq}$. Introduciamo la variabile ausiliaria $y = \frac{\rho_{non-rel}}{\rho_{rel}} = \frac{a}{a_{eq}}$ e risolviamo le equazioni relative all'evoluzione lineare del contrasto di densità $\frac{\delta\rho_{non-rel}}{\rho_{non-rel}}$ ottenendo

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + \frac{2+3y}{2y(1+y)} \frac{\partial \delta}{\partial y} - \frac{3\delta}{2y(1+y)} = 0. \quad (2.83)$$

Il modo crescente della soluzione

$$\delta_+ \propto 1 + \frac{3}{2}y.$$

Per tempi dell'Universo prima di z_{eq} risulta $y < 1$ e guardando la crescita della perturbazione nell'arco di tempo $[t = 0, t_{eq}]$ troviamo

$$\frac{\delta_+(y=1)}{\delta_+(y=0)} = \frac{5}{2}.$$

Il modo sembra essere "congelato" e la relativa perturbazione può diventare instabile solo dopo il periodo di equivalenza. Il motivo di ciò è che il tempo caratteristico relativo al fenomeno di instabilità gravitazionale $\tau_J \simeq (G\rho_{non-rel})^{\frac{1}{2}}$ è maggiore del tempo caratteristico dell'espansione dell'Universo $\tau_{exp} \simeq (G\rho_{rel})^{\frac{1}{2}}$ prima di z_{eq} e comparabile solamente dopo.

Capitolo 3

Il regime non lineare: il Modello di Collasso Sferico

Quando $\delta \simeq 1$ allora la teoria di Jeans dell'instabilità gravitazionale non è più valida e si entra nel regime non lineare. Nel regime lineare abbiamo espresso le perturbazioni tramite le relative trasformate di Fourier e abbiamo studiato l'evoluzione dei vari (e indipendenti) modi di Fourier. In regime non lineare resteremo nello spazio delle coordinate e analizzeremo direttamente $\delta(x, t)$. Ci aspettiamo che regioni dell'universo di dimensioni fissate e con un contrasto di densità superiore a un certo valore di soglia siano gravitazionalmente instabili e destinate quindi a collassare. Assumeremo che le regioni in questione abbiano simmetria sferica e che la pressione al loro interno sia nulla così da poterne seguire la crescita indipendentemente dal resto dell'Universo imperturbato (esse vengono chiamate perturbazioni "top-hat"). Per l'evoluzione di quest'ultimo, infine, considereremo valido il modello cosmologico standard e la soluzione alle equazioni di Friedmann. L'Universo imperturbato sarà un Universo di Einstein-de Sitter, dunque con parametro di curvatura nullo. Per la stesura di questo capitolo sono stati presi in considerazione [3], [4], [5] e [6]

3.1 Il collasso sferico

3.1.1 L'evoluzione della densità

Consideriamo il caso di una regione sferica sovradensa di massa M e raggio R immersa in un universo in espansione (piatto, omogeneo e isotropo). In particolare se $\bar{\rho}_b(t)$ è la densità di *background*, ovvero quella dell'Universo imperturbato, allora la densità della regione sferica potrà essere scritta come $\rho(\vec{r}, t_i) = \bar{\rho}_b(t_i)[1 + \delta_i(\vec{r})]$, con un $\delta_i(\vec{r})$ contrasto di densità iniziale dipendente dalla posizione. Supporremo anche che le velocità peculiari delle componenti della perturbazione siano nulle e assumeremo che la regione considerata non interagisca con nessun'altra, come se in tutto l'universo ci fosse una sola zona di maggiore densità. L'evoluzione della

perturbazione *top-hat* è allora regolata dall'equazione

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = -\frac{GM}{R^2}, \quad (3.1)$$

con

$$M = \frac{4\pi R_i^3}{3} \bar{\rho}_{b,i} (1 + \Delta_i), \quad \Delta_i = \bar{\delta}_i = \frac{\int_0^{R_i} 4\pi r^2 \delta_i(\vec{r}) dr}{4\pi R_i^3/3}.$$

Se consideriamo gusci sferici concentrici questi rimarranno tali mentre evolvono, senza "attraversarsi" a vicenda, cosicché la massa da loro delimitata rimanga costante. La regione sovradensa può essere considerata come un piccolo Universo chiuso¹ con $\Omega_k > 0$ in espansione secondo le equazioni di Friedmann, situato in un universo piatto anch'esso in espansione. La diversa natura dei due universi fa sì che l'evoluzione della regione perturbata si separi da quella dell'Universo di background: un Universo chiuso è destinato a rallentare progressivamente la sua espansione fino a raggiungere una dimensione massima, dopo cui si ha il collasso, mentre un universo piatto continua ad espandersi indefinitamente². Integriamo l'equazione del moto per ottenere

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 - \frac{GM}{R} = \text{const.} = U_{tot}. \quad (3.2)$$

Considerando $\Delta_i \ll 1$ e velocità peculiari nulle allora le velocità iniziali sono date dalla legge di espansione di Hubble: $(\partial R/\partial t)_i \approx (\partial a x/\partial t)_i = H_i R_i$. Utilizzando queste espressioni per scrivere le energie potenziale e cinetica iniziali abbiamo

$$U_{k,i} = \frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{(H_i R_i)^2}{2}, \quad U_{p,i} = -\frac{GM}{R_i} = -\Omega_i (1 + \Delta_i) \frac{(H_i R_i)^2}{2},$$

ove per esprimere la $U_{p,i}$ sono state usate l'espressione della massa data precedentemente e il parametro di densità relativo all'Universo di background. L'energia iniziale totale può allora essere riscritta come

$$U_{tot,i} = U_{k,i} + U_{p,i} = U_{k,i} [1 - \Omega_i (1 + \Delta_i)], \quad (3.3)$$

e il collasso avviene quando l'energia totale è negativa, ovvero quando il termine di energia potenziale gravitazionale è maggiore di quello cinetico e dunque quando la perturbazione è sufficientemente più densa del background, ovvero

$$(1 + \Delta_i) > \frac{1}{\Omega_i}. \quad (3.4)$$

¹A cui corrisponde una geometria sferica, come visto nel primo capitolo, sezione *La geometria dell'Universo*.

²Si tratta di un Universo di Einstein-de Sitter.

Al momento di massima espansione, e quindi di inversione, l'energia cinetica della perturbazione sferica sarà nulla mentre sarà massimo il termine potenziale secondo la legge di conservazione dell'energia, che può essere espressa nel seguente modo

$$U_{tot} = -\frac{GM}{R_{max}} = -\frac{R_i}{R_{max}} U_k \Omega_i (1 + \Delta_i), \quad (3.5)$$

e per la conservazione dell'energia

$$U_{tot} = U_{tot,i} = U_{k,i} [1 - \Omega_i (1 + \Delta_i)],$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{R_{max}}{R_i} = \frac{\Omega_i (1 + \Delta_i)}{\Omega_i (1 + \Delta_i) - 1}. \quad (3.6)$$

Per un Universo con geometria piana $\Omega_i = 1$ e dunque $\frac{R_{max}}{R_i} \approx \frac{1}{\Delta_i}$, mostrando che il rapporto dipende soltanto dal contrasto di densità qualunque sia la massa M della perturbazione e che minore sarà la sovradensità, maggiore tenderà ad essere R_{max} rispetto ad R_i . In quest'ultimo caso intuivamo come perturbazioni leggermente sovradense impiegheranno più tempo a collassare. Dopo aver raggiunto l'espansione massima, il sistema collassa, le particelle appartenenti a diversi gusci si incrociano ed il sistema raggiunge l'equilibrio viriale. Secondo il relativo teorema, a tal punto

$$E = U_{k,vir} + U_{p,vir} = -U_{p,vir}/2 = -\frac{GM}{2R_{vir}} = -\frac{GM}{R_{max}}, \quad (3.7)$$

ove l'ultima uguaglianza è valida per la conservazione dell'energia. Troviamo $2R_{vir} = R_{max}$, dunque che il raggio dell'oggetto virializzato è sempre metà del raggio alla massima espansione, e quindi la sua densità sarà otto volte più grande di quella corrispondente a R_{max} . Per seguire esattamente l'evoluzione di ogni guscio, si può adottare una forma parametrica, che è soluzione dell'equazione di Friedmann per Universi aperti ($\Omega > 1$)

$$\frac{R}{R_i} = A(1 - \cos \theta), \quad \frac{t+T}{t_i} = B(\theta - \sin \theta), \quad (3.8)$$

con validità della relazione

$$(AR_i)^3 = GM(Bt_i)^2, \quad (3.9)$$

e con θ che cresce da un valore nullo fino a 2π al momento del collasso. Il momento di massima espansione corrisponde a $\theta = \pi$, quindi da $2R_{vir} = R_{max}$ possiamo ricavare un'espressione per la costante A richiedendo $\frac{R_{max}}{R_i} = 2A$ e dalla (3.9) traiamo anche B

$$A = \frac{1 + \Delta_i}{2}, \quad B = \frac{(1 + \Delta_i)}{2H_i t_i \Omega_i^{1/2}} \left[1 + \Delta_i - 1/\Omega_i \right]^{-\frac{3}{2}}. \quad (3.10)$$

Può essere mostrato che $\frac{T}{t_i} = \Delta_i \ll 1$ in quanto inizialmente la perturbazione risulta minima, come previsto dal regime lineare. Per un Universo di Einstein-de Sitter dominato da materia ricordiamo che valgono $\Omega = 1$ e $\rho_{mat} = \frac{1}{6\pi G t^2}$. Il rapporto tra sovradensità media e densità di background è

$$\begin{aligned} 1 + \Delta &= \frac{\bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}_b(t)} = \frac{\bar{\rho}_{b,i}}{\bar{\rho}_b(t)} \left(\frac{R_i}{R} \right)^3 \simeq \frac{(t/t_i)^2}{A^3(1 - \cos \theta)^3} \\ &= \frac{B^2(\theta - \sin \theta)^2}{A^3(1 - \cos \theta)^3} = \frac{9(\theta - \sin \theta)^2}{2(1 - \cos \theta)^3}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

dove sono state usate le espressioni della massa data ad inizio sezione e le due relazioni della (3.8). Consideriamo ora i tre seguenti casi limite

- i) Per tempi ($t \approx t_i$) possiamo sviluppare in *serie di McLaurin* le funzioni *seno* e *coseno* per ottenere

$$\Delta \approx \frac{3\theta^2}{20} \approx \frac{3}{20} \left(\frac{6t}{Bt_i} \right)^{\frac{2}{3}} \approx \frac{3}{5} \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.12)$$

La dipendenza dal tempo è la stessa prevista dalla teoria lineare delle perturbazioni a cui il modello di collasso sferico si riduce per tempi vicini al tempo iniziale t_i e per un Universo dominato dalla materia.

- ii) Quando $\theta = \pi$ la perturbazione raggiunge la massima espansione, la (3.11) diventa

$$1 + \Delta_{max} = \frac{9\pi^2}{16} \approx 5.55. \quad (3.13)$$

Essendo $\Delta_{max} > 1$ la perturbazione è decisamente non lineare e la teoria vista nel secondo capitolo perde di significato. Possiamo comunque prevedere il risultato che ci avrebbe offerto: utilizziamo la (3.12) per definire

$$\Delta_{lin} = \frac{3}{5} \Delta_i \left(\frac{t}{t_i} \right)^{2/3} = \frac{3}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^{2/3} (\theta - \sin \theta)^{2/3}, \quad (3.14)$$

e valutiamola per $\theta = \pi$ per ottenere $\Delta_{lin} = 1.062 < 5.55$ previsto dal modello sferico.

- iii) Per $\theta \rightarrow 2\pi$ formalmente si avrebbe $\Delta \rightarrow \infty$, ma l'oggetto raggiunge l'equilibrio viriale ad un valore finito del raggio, in particolare avevamo dedotto $2R_{vir} = R_{max}$. Se poniamo che ciò accada a $t_{vir} = t(\theta = 2\pi)$, allora varrà $t_{vir} = 2t_{max}$. Viste le dipendenze $a \propto t^{2/3}$ e $\bar{\rho}_b \propto 1/t^2$, l'Universo tra t_{max} e t_{vir} si sarà espanso di un fattore $2^{2/3}$ e sarà meno denso di un fattore $2^2 (= 4 =)$. Perciò la densità dell'oggetto al punto di equilibrio viriale è

$$1 + \Delta_{vir} = \frac{9\pi^2}{16} \left(\frac{R_{max}}{R_{vir}} \right)^3 \left(\frac{\bar{\rho}_{max}}{\bar{\rho}_{vir}} \right) = \frac{9\pi^2}{16} \cdot 8 \cdot 4 \approx 178 \quad (3.15)$$

volte più densa della densità di background, indipendentemente dal valore della massa iniziale della perturbazione. Quando l'oggetto è virializzato il contrasto di densità è decisamente più alto di quello previsto dalla teoria lineare, la quale prevede secondo la (3.14) che $\Delta_{lin} = 1.68647 \ll 178$, diventando totalmente inefficace.

3.1.2 L'evoluzione delle velocità

Il modello in questione offre una buona descrizione per l'evoluzione delle velocità. Considerando le velocità riscalate (similmente a quanto fatto per (3.8)) dei gusci concentrici

$$\frac{v}{R_i/t_i} = \frac{\partial(R/R_i)}{\partial(t/t_i)} = \frac{\partial(R/R_i)}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial(t/t_i)} = \frac{A}{B} \frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)}, \quad (3.16)$$

da cui mostriamo come il rapporto tra velocità peculiare del guscio e la velocità dovuta alla legge di espansione di Hubble rispetto al centro della perturbazione sferica è

$$\frac{v_{pec}}{HR} = \frac{v}{R_i/t_i} \frac{R_i}{R} \frac{H_i}{H} \frac{1}{H_i t_i} = \frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2} \frac{t/t_i}{2B/3} = \frac{3}{2} \frac{\sin\theta(\theta - \sin\theta)}{(1-\cos\theta)^2}. \quad (3.17)$$

Queste velocità che descrivono l'evoluzione dei gusci rispetto al centro della perturbazione, perdono di significato una volta che l'oggetto raggiunge l'equilibrio viriale, in quanto particelle di diverse shell si mescolano. Tuttavia abbiamo visto che ogni oggetto virializzato ha la stessa densità indipendentemente dal valore della massa iniziale. Possiamo allora utilizzare il teorema del viriale per stimare un valore delle velocità orientate in maniera casuale, che indichiamo con velocità viriali

$$v_{vir}^2 \approx \frac{GM}{R_{vir}} = \frac{1 + \Delta_{vir}}{2/\Omega} (HR_{vir})^2 = (943 \text{ km/s})^2 \left(\frac{1 + \Delta_{vir}}{178/\Omega} \right) \left(\frac{R_{vir}}{h^{-1} \text{ Mpc}} \right), \quad (3.18)$$

ove abbiamo posto $H = 100h(\text{km/s})/\text{Mpc}$ e usato il fatto che $\Omega = \bar{\rho}/\bar{\rho}_{critica}$. Nella formula compare il raggio viriale R_{vir} che può arrivare ad avere una lunghezza dell'ordine del Mpc , suggerendo che i moti viriali relativi alla perturbazione possono essere di 10^3 km/s . Si può mostrare che la (3.18) può essere espressa in termini di massa

$$v_{vir}^2 \approx (1122 \text{ km/s})^2 \left(\frac{1 + \Delta_{vir}}{178/\Omega} \right)^{1/3} \left(\frac{M}{10^{15} h^{-1} M_\odot} \right)^{2/3}, \quad (3.19)$$

e vedere come le velocità dipendano dalla potenza $2/3$ della massa. Si tratta in ogni caso di velocità relativamente basse rispetto a quella della luce.

3.1.3 Stima del redshift

In questo modello la materia non ha alcuna pressione, quindi apparentemente nulla può frenare il collasso della regione perturbata verso una densità infinita. Se il

parametro di reshift relativo al momento in cui l'oggetto ha raggiunto la massima espansione è z_{max} , allora il parametro associato al completo collasso z_{coll} può essere stimato da

$$\frac{1+z_{coll}}{1+z_{max}} = \frac{a_{max}}{a_{coll}} = \left(\frac{t_{max}}{t_{coll}} \right)^{2/3} = \frac{1}{2^{2/3}}.$$

Sappiamo però che il collasso si blocca al raggiungimento dell'equilibrio viriale e abbiamo visto che in questa fase l'oggetto perturbato ha una densità più di 100 volte maggiore di quella di background. Prendiamo il parametro di densità di background Ω_{bg} e ricordando che in un Universo di materia $H = \frac{2}{3t} = H_0(1+z)^{3/2}$ abbiamo

$$\bar{\rho}_{vir} \geq (100) \left(\frac{3\Omega_{bg}}{8\pi G} \right) (1+z_{vir})^3. \quad (3.20)$$

Studiando l'evoluzione delle velocità abbiamo ricavato $v_{vir}^2 \approx \frac{GM}{R_{vir}}$, la quale può essere usata per esprimere la densità

$$\rho_{vir} = \frac{3M}{4\pi R_{vir}^3} = \frac{3v_{vir}^6}{4\pi G^3 M^2}, \quad (3.21)$$

e dunque stimiamo

$$1+z_{vir} \leq 0.47 \left(\frac{v_{vir}}{100 \text{ km s}^{-1}} \right)^2 \left(\frac{M}{10^{12} M_{\odot}} \right)^{-2/3}. \quad (3.22)$$

3.2 Collasso Sferico con Costante Cosmologica

3.2.1 Condizione per il collasso

Riconsideriamo l'evoluzione del fattore di scala $a(t)$ in un Universo dotato di costante cosmologica Λ , troviamo

$$\frac{da}{dt} = \frac{H_0}{f(a)}, \quad f(a) = \left[1 + \Omega_0 \left(\frac{1}{a} - 1 \right) + \lambda_0 (a^2 - 1) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.23)$$

ove il pedice 0 indica i valori presenti dei relativi parametri a cui è assegnato. Abbiamo già introdotto i parametri λ e Ω^3 , inseriamo qua le espressioni delle loro evoluzioni in funzione del parametro redshift z

$$\Omega(z) = \Omega_0 (1+z)^3 \left[\frac{H_0}{H(z)} \right]^2, \quad (3.24)$$

e

$$\lambda(z) = \lambda_0 \left[\frac{H_0}{H(z)} \right]^2, \quad (3.25)$$

³Si veda il primo capitolo, sezione *I parametri cosmologici*.

con

$$\left[\frac{H_0}{H(z)} \right]^2 = \Omega_0(1+z)^3 - (\Omega_0 + \lambda_0 - 1)(1+z)^2 + \lambda_0. \quad (3.26)$$

Similmente a quanto fatto nella precedente sezione, assumiamo che ad un certo tempo iniziale t_i , corrispondente ad un valore di redshift z_i , una regione sferica di raggio R_i di massa $M = \frac{4\pi R_i^3}{3} \bar{\rho}_{b,i}(1+\Delta_i)$ sia sovradensa. L'evoluzione dell'oggetto dipende dal valore della propria energia

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 - \frac{GM}{R} - \frac{H^2 \lambda R^2}{2} = U_{tot}, \quad (3.27)$$

che al tempo iniziale scelto t_i possiamo esprimere come

$$U(t_i) = \frac{H_i^2 R_i^2}{2} [1 - \Omega_i(1 + \Delta_i) - \lambda_i]. \quad (3.28)$$

Introducendo una nuova variabile $s = \frac{R}{R_i}$ ed utilizzando il valore della massa della perturbazione, possiamo riscrivere la (3.27) come

$$\frac{ds}{dt} = \frac{H_i}{g(s)},$$

con

$$g(s) = \left[1 + \Omega_i(1 + \Delta_i) \left(\frac{1}{s} - 1 \right) + \lambda_i(s^2 - 1) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.29)$$

e i parametri $H_i = H(z_i)$, $\Omega_i = \Omega(z_i)$ e $\lambda_i = \lambda(z_i)$ sono dati da (3.24) - (3.26). Tramite la (3.27) e (3.28) siamo in grado di determinare la massima espansione del raggio della sfera perturbata definendo anche $s_{max} = \frac{R_{max}}{R_i}$, in particolare questo dovrà obbedire all'equazione

$$b_1 s_{max}^3 + b_2 s_{max} + b_3 = 0, \quad (3.30)$$

con $b_1 = \lambda_i$, $b_2 = 1 - \Omega_i(1 + \Delta_i) - \lambda_i$ e $b_3 = \Omega_i(1 + \Delta_i)$. La soluzione reale, positiva ed in grado di riprodurre il caso $\Lambda = 0$ nel caso limite di piccoli valori di quest'ultimo è unica

$$s_{max} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{-b_2}{b_1} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\phi - 2\pi}{3} \right), \quad (3.31)$$

con $\phi = \arccos[x/(x^2 + y^2)^{1/2}]$, $x = -9b_1^{1/2}b_3$ e $y = [3(-4b_2^3 - 27b_1b_3^2)]^{1/2}$. Notiamo come ponendo $\lambda_0 = 0$ ritroviamo semplicemente $s_{max} = -\frac{b_3}{b_2}$. La condizione per cui la soluzione individuata dalla (3.31) sia reale è

$$\Delta_i > \Delta_{critico} = \frac{1}{\Omega_i} u(\lambda_i) - 1, \quad (3.32)$$

dove

$$u(\lambda_i) = 1 + \frac{5\lambda_i}{4} + \frac{3\lambda_i(8 + \lambda_i)}{4v(\lambda_i)} + \frac{3v(\lambda_i)}{4}. \quad (3.33)$$

e

$$v = v(\lambda_i) = \{\lambda_i[8 - \lambda_i^2 + 20\lambda_i + 8(1 - \lambda_i)^{3/2}]\}^{1/3}.$$

Anche qua se consideriamo il caso limite $\lambda_0 \rightarrow 0$ otteniamo $u(\lambda_i) \rightarrow 1$ e la (3.33) si riduce alla (3.4). Per $\lambda_0 > 0$ invece otteniamo $u(\lambda_i) > 1$ e dunque a parità di raggio R_i e parametro di densità Ω_i le sfere perturbate devono essere ulteriormente sovradense rispetto ad un Universo privo di costante cosmologica. Tuttavia la (3.24) mostra che l'evoluzione del parametro di densità dipende da λ , dunque conviene confrontare le due situazioni per un dato Ω_0 , al fine di mostrare che il $\Delta_{critico}(\lambda_0 > 0)$ può essere maggiore o minore del $\Delta_{critico}(\lambda_0 = 0)$, a seconda del valore dei parametri λ_0 e Ω_0 . Vale la pena notare che nel caso $\lambda_0 = 0$ abbiamo trovato la condizione per il collasso della perturbazione richiedendo che l'energia totale U_{tot} dell'oggetto sferico fosse negativa. Se decidessimo di seguire lo stesso procedimento anche in un Universo dotato di costante cosmologica, secondo la (3.27) troveremmo la condizione $\Delta_i > \Omega_i^{-1}(1 - \lambda_i) - 1$, la quale permette sovradensità minori di quelle richieste dalla (3.32) dato che $(1 - \lambda_i < 1)$. In seguito al momento di massima espansione, vedi Figura 3.1, la regione perturbata evolve similmente a quanto previsto dal modello di collasso gravitazionale sferico visto nella sezione precedente ove $\Lambda = 0$, per cui possono essere utilizzate la (3.8) e (3.9).

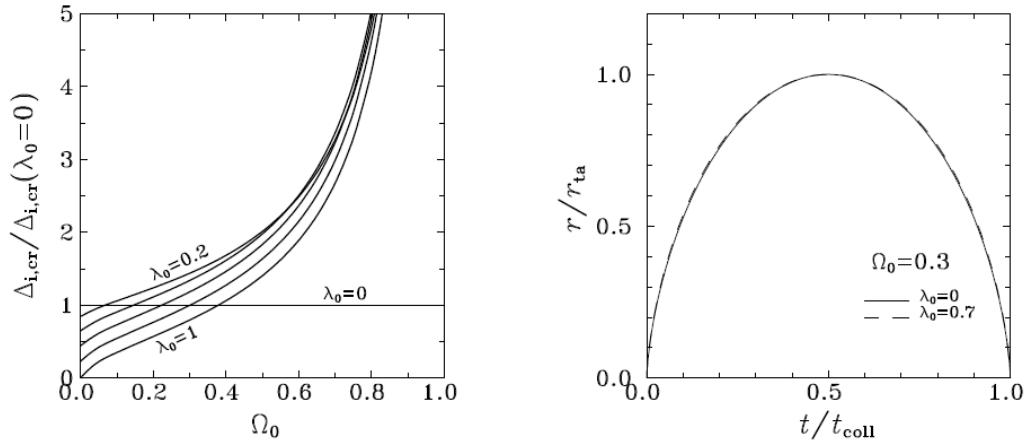


Figura 3.1: Immagine a Sx: Andamento del rapporto $\frac{\Delta_{crit}}{\Delta_{crit}(\lambda_0=0)}$ in funzione di Ω_0 per redshift fissato $z_i = 100$. Immagine a Dx: Evoluzione del raggio della regione perturbata in presenza o assenza di λ_0 per Ω_0 fissato.

3.2.2 Turnaround e Virializzazione

La costante cosmologica può essere trattata secondo la teoria Newtoniana come un contributo all'energia potenziale. Riesprimiamo la (3.27) in termini di Λ , cosicché

per una shell sferica di raggio R contenente una massa M l'energia per unità di massa possa essere scritta come

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 - \frac{GM}{R} - \frac{1}{6} \Lambda r^2. \quad (3.34)$$

Con approssimazioni di simmetria sferica e densità costante possiamo dare un'espressione più opportuna per il termine di energia potenziale gravitazionale

$$U_{p,G} = -\frac{3GM^2}{5R}, \quad (3.35)$$

per quanto riguarda il termine corrispondente alla costante cosmologica calcoliamo inizialmente il singolo apporto di un guscio sferico di raggio r e spessore dr

$$dU_{p,\Lambda} = -\frac{1}{6} \Lambda r^2 \cdot 4\pi r^2 \rho dr = -\frac{2\pi\rho}{3} \Lambda r^4 dr, \quad (3.36)$$

in seguito integriamo tra 0 ed R per raccogliere ogni contributo

$$U_{p,G} = -\frac{2\pi\rho\Lambda}{3} \int_0^R r^4 dr = -\frac{2\pi\rho\Lambda R^5}{3 \cdot 5} = -\frac{1}{10} \Lambda MR^2, \quad (3.37)$$

ove abbiamo tenuto conto che $M = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$. Per quanto detto se l'energia totale è negativa il nostro oggetto è destinato a rallentare progressivamente la sua espansione fino a raggiungere una dimensione massima, dopo cui si ha il collasso. Nel momento di massima espansione $\dot{R} = 0$ e l'energia viene data dalla seguente equazione

$$U_{tot} = U_{p,G}^{max} + U_{p,\Lambda}^{max} = -\frac{3GM^2}{GR_{max}} - \frac{1}{10} \lambda MR_{max}^2. \quad (3.38)$$

Una generalizzazione del teorema del viriale mostra che se l'energia potenziale ha un andamento $U_p \propto R^n$ allora l'energia cinetica $U_k = \frac{n}{2} U_p$. Dunque una volta che la sfera ha raggiunto la virializzazione per la conservazione dell'energia possiamo scrivere

$$\frac{1}{2} U_{p,G}^{vir} + 2U_{p,\Lambda}^{vir} = U_{p,G}^{max} + U_{p,\Lambda}^{max}, \quad (3.39)$$

che diventa sostituendo le espressioni trovate in precedenza per i termini di potenziale e sostituendo $x = \frac{R_{vir}}{R_{max}}$

$$\frac{3GM}{xR_{max}} + 2\Lambda x^2 R_{max}^2 = \frac{6GM}{R_{max}} + \Lambda R_{max}^2. \quad (3.40)$$

Introduciamo la variabile $\eta = \frac{\Lambda R_{max}^3}{3GM} = \frac{\Lambda}{4\pi G \rho_{max}}$, parametro adimensionale reale di valore molto piccolo in generale, che ci permette di scrivere la (3.40) come

$$1 + 2\eta x^3 = 2x + \eta x \rightarrow 2\eta x^3 - (2 + \eta) x + 1 = 0. \quad (3.41)$$

Analizziamo il parametro $x = \frac{R_{vir}}{R_{max}}$: nella sezione precedente abbiamo considerato il caso in cui $\Lambda = 0$ e abbiamo visto che il rapporto tra il raggio di massima espansione e il raggio della sfera una volta raggiunta la virializzazione vale $\frac{1}{2}$. Ora, pur essendo molto piccolo, $\Lambda \neq 0$ e ci aspettiamo solo una piccola correzione al rapporto sopra citato

$$x = \frac{1}{2} + \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1,$$

che va inserita all'interno di (3.41). Tenendo conto dei soli termini al primo ordine in ε otteniamo

$$-\varepsilon \left(2 - \frac{1}{2}\eta \right) = \frac{1}{4}\eta, \quad (3.42)$$

da cui ricaviamo un'espressione per $\varepsilon = -\frac{\frac{1}{4}\eta}{2 - \frac{1}{2}\eta}$ e infine

$$\frac{R_{vir}}{R_{max}} = \frac{1 - \frac{1}{2}\eta}{2 - \frac{1}{2}\eta}. \quad (3.43)$$

Per $0 < \eta < 1$ il rapporto è minore di $\frac{1}{2}$, ovvero la perturbazione collassa ad un raggio minore se assumiamo la presenza della costante cosmologica. Ciò è dovuto al fatto che esiste un ulteriore termine di energia potenziale $U_{p,\Lambda}$ che porta le shells sferiche a collassare ulteriormente mentre acquisiscono una velocità tale che il sistema possa raggiungere un equilibrio viriale.

3.3 Densità Caratteristiche

3.3.1 Contrasto di densità lineare al collasso

Riprendiamo le equazioni $\frac{da}{dt} = \frac{H_0}{f(a)}$ e $\frac{ds}{dt} = \frac{H_i}{f(s)}$ e procediamo con un'integrazione per ottenere

$$\int_0^a f(a) da = H_0 t, \quad (3.44)$$

$$\int_0^s g(s) ds = H_i t. \quad (3.45)$$

Consideriamo una regione caratterizzata da un particolare Δ_i ed eliminiamo la variabile temporale così da ottenere due equazioni che permettono di calcolare il fattore di scala nel momento di massima espansione e nel momento in cui l'oggetto è collassato, quest'ultimo individuato dal caso limite per cui $s \rightarrow 0^4$. Indicheremo i fattori di scala corrispondenti rispettivamente con a_{max} e a_{coll} . Le espressioni che stiamo cercando sono le seguenti

$$\int_0^{a_{max}} f(a) da = \frac{H_0}{H_i} \int_0^{s_{max}} g(s) ds, \quad (3.46)$$

⁴Talvolta questo caso limite viene inteso come il momento in cui il sistema raggiunge l'equilibrio viriale.

$$\int_0^{a_{coll}} f(a) da = 2 \frac{H_0}{H_i} \int_0^{s_{max}} g(s) ds, \quad (3.47)$$

con s_{max} dato dalla (3.31) e l'accettazione che il tempo t_{coll} sia il doppio del tempo di massima espansione. Assumiamo nuovamente che la massa all'interno della sfera perturbata resti costante, in tal caso la sovradensità al suo interno rispetto alla densità di background può essere scritta come

$$\delta = \frac{\rho}{\rho_b} - 1 = \frac{1}{s^3} \left(\frac{a}{a_i} \right)^3 (1 + \Delta_i) - 1. \quad (3.48)$$

Per tempi $t \rightarrow 0$ possiamo espandere le equazioni integrali sopra riportate attorno ad $a = 0$ e $s = 0$ rispettivamente, troviamo

$$H_0 t = \frac{2}{3\Omega_0^{1/2}} a^{3/2} + \frac{\Omega_0 + \lambda_0 - 1}{5\Omega_0^{3/2}} a^{5/2} + O(a^{7/2}), \quad (3.49)$$

$$H_i t = \frac{2}{3[\Omega_i(1 + \Delta_i)]^{1/2}} s^{3/2} + \frac{\Omega_i(1 + \Delta_i) + \lambda_i - 1}{5[\Omega_i(1 + \Delta_i)]^{3/2}} s^{5/2} + O(s^{7/2}). \quad (3.50)$$

Isoliamo a ed s per esprimerli in funzione del tempo, troviamo

$$a = c_1 t^{2/3} + c_2 t^{4/3} + O(t^{8/3}), \quad (3.51)$$

con coefficienti $c_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (h_0^2 \Omega_0)^{1/3}$ e $c_2 = \frac{3}{10} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \frac{H_0^{4/3} (1 - \Omega_0 - \lambda_0)}{\Omega_0^{1/3}}$, e

$$s = d_1 t^{2/3} + d_2 t^{4/3} + O(t^{8/3}), \quad (3.52)$$

con coefficienti $d_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} [H_i^2 \Omega_i (1 + \Delta_i)]^{1/3}$ e $d_2 = \frac{3}{10} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \frac{H_i^{4/3} [1 - \Omega_i (1 + \Delta_i) - \lambda_i]}{[\Omega_i (1 + \Delta_i)]^{1/3}}$.

Inseriamo ora le (3.51) e (3.52) dentro l'espressione del contrasto di densità mantenendo solo i termini di ordine inferiore per ottenere

$$\frac{3}{5} \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left[\frac{H_0^{2/3} (1 - \Omega_0 - \lambda_0)}{\Omega_0^{2/3}} + \frac{H_i^{2/3} [\Omega_i (1 + \Delta_i) + \lambda_i - 1]}{[\Omega_i (1 + \Delta_i)]^{2/3}} \right] t^{2/3} + O(t^{4/3}). \quad (3.53)$$

Abbiamo visto che $a = c_1 t^{2/3} + O(t^{4/3})$ e dunque nel limite di a piccoli la dipendenza di δ da esso è

$$\delta = c(\Omega_0, \lambda_0, \Delta_i, z_i) a + O(a^2), \quad (3.54)$$

con

$$c(\Omega_0, \lambda_0, \Delta_i, z_i) = \frac{3}{4} \left[\frac{1 - \Omega_0 - \lambda_0}{\Omega_0} + \frac{[\Omega_i (1 + \Delta_i) + \lambda_i - 1] (1 + z_i)}{\Omega_i (1 + \Delta_i)^{2/3}} \right]. \quad (3.55)$$

Risolviendo l'equazione differenziale (2.52) nel capitolo precedente avevamo visto come la soluzione potesse essere scomposta in due modi, uno decrescente ed uno

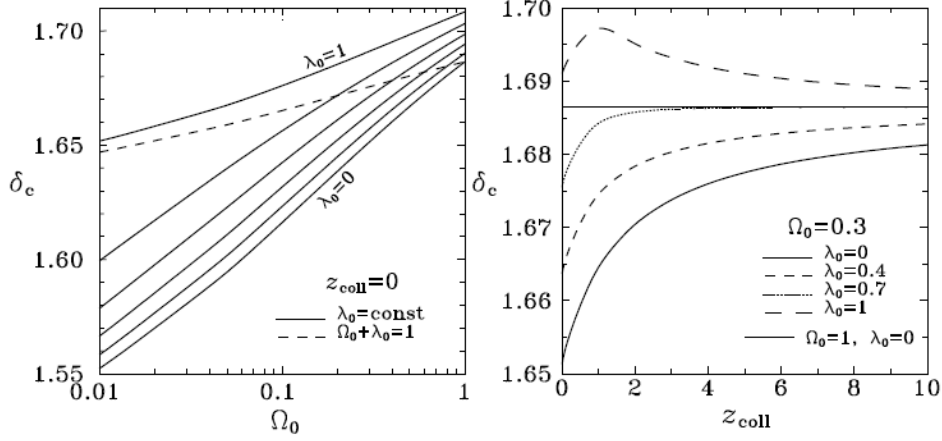


Figura 3.2: Immagine a Sx: Parametro δ_c in funzione di Ω_0 con linee continue corrispondenti (dal basso verso l'alto) a $\lambda_0 = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ e la linea tratteggiata mostrandone il caso in cui $\Omega_0 + \lambda_0 = 1$. Immagine a Dx: δ_c in funzione di z_{coll} per quattro modelli con $\Omega_0 = 0.3$ e $\lambda_0 = 0, 0.4, 0.7, 1$. La sottile linea orizzontale corrisponde al caso in cui $\Omega_0 = 1$ e λ_0 .

crescente. Può essere mostrato che quest'ultimo, in presenza della costante Λ , assume la forma

$$D(a) = \frac{5\Omega_0}{2af(a)} \int_0^a (f(a))^3 da, \quad (3.56)$$

ove l'espressione è stata normalizzata. Per parametri arbitrari Ω_0 e λ_0 un'espansione intorno ad $a = 0$ dell'integrando porta a $D(a) = a + O(a^2)$. Vista la forma della (3.54) abbiamo allora ottenuto lo stesso risultato previsto dalla teoria lineare secondo cui $\delta_L = c(\Omega_0, \lambda_0, \Delta_i, z_i)D(a)$. Una quantità degna di nota è il contrasto di densità lineare al momento del collasso, ovvero quando s raggiunge lo zero

$$\delta_{coll} = c(\Omega_0, \lambda_0, \Delta_i, z_i)D(a_{coll}). \quad (3.57)$$

La Figura 3.2 mostra $\delta_{coll} (\equiv \delta_c)$ per diversi valori di λ_0 . Nell'immagine di destra viene fatta l'assunzione che il processo di collasso stia avvenendo ora, ovvero $z_{coll} = 0$. Le linee continue mostrano la dipendenza di δ_{coll} da Ω_0 per valori costanti di λ_0 , mentre la linea tratteggiata in accordo con $\Omega_0 + \lambda_0 (\equiv \Omega_\Lambda) = 1$ mostra il risultato per un Universo piatto. L'immagine di sinistra invece rispecchia l'andamento di δ_{coll} in funzione dello redshift relativo al collasso z_{coll} nel caso in cui sia fissato $\Omega_0 = 0.3$ e λ_0 assuma invece valori diversi. La dipendenza dallo redshift appare debole e per alti valori di questo il contrasto di densità converge al valore previsto dalla teoria lineare $\delta_{coll} = 1.68$, valido in un Universo piatto privo di costante cosmologica. Notiamo che questo particolare valore è raggiunto più velocemente per valori $\Omega_0 = 0.3$ e $\lambda_0 = 0.7$.

3.3.2 Densità dell'oggetto virializzato

Altra quantità interessante è il rapporto tra la densità dell'oggetto e la densità critica alla virializzazione

$$\Delta_c = \frac{\rho_{vir}}{\rho_c}(a_{coll}) = \frac{\Omega(a_{coll})}{s_{coll}^3} \left(\frac{a_{coll}}{a_i} \right)^3 [1 + \Delta_i(a_{coll})], \quad (3.58)$$

ove adesso $s_{coll} = \frac{r_{coll}}{r_i}$ e r_{coll} è l'effettivo raggio finale dell'oggetto collassato. Assumiamo che la virializzazione avvenga a t_{coll} , il tempo corrispondente a $s \rightarrow 0$ come già visto in precedenza. Abbiamo visto cosa comporta l'applicazione del teorema del viriale in presenza di un termine potenziale extra dovuto alla presenza di Λ , arrivando all'equazione (3.41). La soluzione esatta di questa equazione deve essere utilizzata per il calcolo di Δ_c , e nel caso di $\lambda > 0$ essa è data dalla (3.31), con x al posto di s_{max} e $b_1 = 2\eta$, $b_2 = -(2 + \eta)$, $b_3 = 1$. La Figura 3.3 mostra l'andamento di Δ_c in funzione di diversi valori di λ_0 . Similmente al caso lineare, l'immagine a sinistra mostra i valori di Δ_c in funzione di Ω_0 per modelli con differenti valori λ_0 con l'assunzione che il collasso avvenga a $z_{coll} = 0$. Le linee continue marcate corrispondono a diversi valori di λ_0 , mentre la linea tratteggiata corrisponde al caso in cui $\Omega_0 + \lambda_0 = 1$, ovvero ad un Universo piatto. Vediamo che per un dato Ω_0 valori più bassi di λ_0 rendono l'oggetto sempre più denso rispetto alla densità critica. Questa relazione tuttavia si inverte se si osserva il comportamento di Δ_c in funzione del parametro di redshift z_{coll} , ben visibile nell'immagine a destra della stessa figura. Come nel caso di δ_c disponiamo di vari modelli, e osserviamo che per ognuno di questi per alti valori di z_{coll} i valori di Δ_c tendono asintoticamente al valore già previsto $\Delta_c = 177.653$ per Universi con $\Omega_0 = 1$ e $\lambda_0 = 0$.

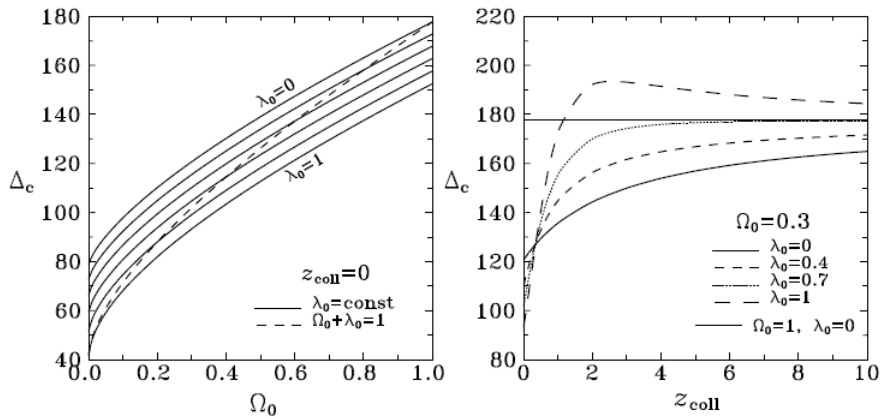


Figura 3.3: Immagine a Sx: Parametro Δ_c in funzione di Ω_0 con linee continue corrispondenti (dall'alto verso il basso) a $\lambda_0 = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ e la linea tratteggiata mostrandone il caso in cui $\Omega_0 + \lambda_0 = 1$. Immagine a Dx: Δ_c in funzione di z_{coll} per quattro modelli con $\Omega_0 = 0.3$ e $\lambda_0 = 0, 0.4, 0.7, 1$. La sottile linea orizzontale corrisponde al caso in cui $\Omega_0 = 1$ e $\lambda_0 = 0$.

Bibliografia

- [1] A.Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*, Wiley, 2015.
- [2] F.Lucchin, *Introduzione alla cosmologia*, Zanichelli, 1994.
- [3] Ravi K. Sheth, *The spherical evolution model*, 2006.
- [4] Øystein Elgarøy, *The spherical collapse model*, 2012.
- [5] E.L. Lokas, Y. Hoffman, *The spherical collapse model in a Universe with Cosmological Constant*, 2008.
- [6] E.L. Lokas, Y. Hoffman, *Nonlinear evolution of spherical perturbation in a non-flat Universe with cosmological constant*, 2008.

When a door closes, a window
opens... Or something like that.

Maxine Caulfield
Life is Strange