UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata

TESI DI LAUREA

TEORIA DELLA PROGRAMMAZIONE SEMIDEFINITA

Relatore: Dott. CARLO FILIPPI

Laureando: ANTONIO CELEBRIN

Anno Accademico: 2003/2004

Indice

Introduzione

La Programmazione semidefinita (semidefinite programming - SDP) considera quei problemi che minimizzano una funzione lineare soggetta al vincolo di semidefinitezza positiva di una combinazione affine di matrici simmetriche.
Questo vincolo non è lineare, ma è convesso, per cui i problemi di SDP sono particolari problemi di ottimizzazione convessa.
SDP annovera poi la programmazione lineare (linear programming - LP) e la programmazione quadratica a vincoli quadratici (quadratically constrained quadratic programming - QCQP) e riveste importanza in alcune applicazioni in ambito matematico (algebra lineare, geometria, ottimizzazione combinatoria) ed in ambito ingegneristico.
Nonostante le proprietà di SDP siano più generali di quelle viste in LP, i metodi atti a risolvere il problema e quindi a trovarne la soluzione ottima sono comunque gli stessi.
Come in LP, questi metodi hanno complessità polinomiale e sono pertanto efficienti nella pratica.
Nel Capitolo 1 elenco alcuni richiami di Algebra lineare e di Ottimizzazione convessa utili nel prosieguo della lettura.
Nel Capitolo 2 descrivo le proprietà dei problemi primale e duale in SDP, osservando che SDP è un'estensione di LP, con proprietà più generali di quelle riscontrate in LP.
Osservo inoltre che SDP annovera, oltre alla LP, problemi di QCQP e di programmazione non lineare con funzione obiettivo frazionaria.
Riporto poi alcune applicazioni di SDP, in particolare in algebra lineare, in geometria, in fisica - matematica e in statistica.
Concludo quindi la trattazione, estendendo le definizioni di funzione barriera, centro analitico del problema e cammino centrale, usate in LP nei metodi di punto

interno, al caso semidefinito, elencandone le più importanti proprietà.
Tali strumenti mi saranno infine necessariper delineare un metodo chiamato di riduzione del potenziale, convergente in un tempo polinomiale alla soluzione ottima comune ai problemi primale - duale.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo capitolo riporto alcuni richiami di Algebra lineare e Ottimizzazione convessa, utili nella prosecuzione della lettura.

1.1 Richiami di Algebra lineare

$\mathbb{S}^{n\times n} := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ : \ A = A^t\} \qquad \dim \mathbb{S}^{n\times n} = \frac{n(n+1)}{2}$

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è semidefinita positiva se soddisfa la seguente condizione:

$$a^t A a \geq 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}^n$$

Si scrive $A \geq 0$.

Condizioni necessarie e sufficienti affinchè una matrice A$\in$ $\mathbb{R}^{n\times n}$ sia semidefinita positiva:

1. gli autovalori di A sono non negativi;

2. $\det(B) \geq 0$ $\forall B$ sottomatrice principale di A, dove le sottomatrici principali di A sono n e la sottomatrice principale di ordine r si ottiene da A cancel-

lando le ultime n-r righe e le ultime n-r colonne;

3. $\exists W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $A = WW^t$, in particolare $A = B^2$ se B è simmetrica.

Dati $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \lambda \in \mathbb{R}$ si definisce la *traccia* di una matrice come segue:

$$\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \ldots + a_{nn}$$

$$\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$$

$$\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{Tr}(A)$$

Il determinante e la traccia di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ possono essere espressi in termini degli autovalori della stessa:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Decomposizione spettrale o autovalore di A
Sia $A \in \mathbb{S}^{n\times n}$ allora essa può essere fattorizzata come segue:

$$A = Q\Lambda Q^t$$

dove $Q \in O(n) := \{C \in \mathbb{R}^{n\times n} \ : \ C^tC = I\}$ (gruppo ortogonale) e $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ è la matrice diagonale degli autovalori di A, i quali sono radici del polinomio caratteristico $p(s) := \det(sI - A)$. Le colonne di Q formano una base ortonormale di autovettori di A.

Decomposizione valore singolare di A
Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e sia r il suo rango. Allora A può essere fattorizzata come segue:

$$A = U\Sigma V^t$$

dove le matrici $U \in \mathbb{R}^{m\times r}$ e $V \in \mathbb{R}^{n\times r}$ soddisfano: $U^tU = I_r, \quad V^tV = I_r$ e $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$.

Radice quadrata simmetrica di A
Siano $A \in \mathbb{S}^{n\times n}$ e $A = Q\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Q^t$ la relativa decomposizione spettrale.
Si definisce la radice quadrata simmetrica di A come:

$$A^{\frac{1}{2}} = Q\mathrm{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_n^{\frac{1}{2}})Q^t$$

La radice quadrata simmetrica di A è l'unica soluzione simmetrica semidefinita positiva dell'equazione $X^2 = A$.

La *norma di Frobenius* di una matrice $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ è data da:
$\|X\|_F := (\mathrm{Tr}(X^tX))^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

La *norma spettrale* di una matrice $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ è data da:
$\|X\|_2 := (\lambda_{\min}(X^tX))^{\frac{1}{2}}$

Formule dell'inversa e del determinante di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
Indico con $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ la matrice A privata della sua riga i-esima e della sua colonna j-esima.

$$A_{i,j}^{-1} = \frac{1}{\det(A)}((-1)^{i+j}\det(A_{ij}))_{i,j}^t \qquad \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}\det(A_{ij})$$

Derivata del determinante

Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ una matrice in $\mathbb{R}^{n\times n}$ e siano $\tilde{a}_{ij}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,m^2 funzioni tali che $\tilde{a}_{ij}(\lambda) = a_{ij}$.

Per il precedente richiamo sulla formula del determinante si ha:

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ per ogni scelta di $i = 1, \dots, n$

Posto $J := \det(A)$ si ha $J = J(\tilde{a}_{11}(\lambda), \dots, \tilde{a}_{ij}(\lambda), \dots, \tilde{a}_{nn}(\lambda))$.

Allora:

$\frac{d}{d\lambda} J = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial a_{ij}} J(\dots, \tilde{a}_{ij}(\lambda), \dots) = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \frac{d}{d\lambda} \tilde{a}_{ij}(\lambda)$

perchè da $J = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ segue $\frac{\partial}{\partial a_{ij}} J = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) := C_{ij}$ in quanto C_{ij} non dipende da a_{ij}.

Si ha quindi:

$$\frac{d}{d\lambda} \det(A) = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \frac{d}{d\lambda} \tilde{a}_{ij}(\lambda) \tag{1.1}$$

La traccia del prodotto di due matrici è uguale alla traccia del prodotto delle stesse permutate:

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \tag{1.2}$$

Proposizione 1 *Siano A,B matrici simmetriche semidefinite positive allora la traccia del loro prodotto é non-negativa:*

$$A = A^t \geq 0 \qquad B = B^t \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Tr}(AB) \geq 0$$

Dimostrazione

$A = A^t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{min}}(A) \geq 0$

$B = B^t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \mu_{\text{min}}(B) \geq 0$

dove λ_i e μ_i rappresentano gli autovalori delle matrici A e B rispettivamente per $i = 1, \dots, n$.

Abbiamo $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0$, $\quad \mathrm{Tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \geq 0$, $\quad \mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_i$ dove c_i sono gli autovalori della matrice AB per $i = 1, \ldots, n$ in quanto $AB = SJS^{-1} \Rightarrow$ $\mathrm{Tr}(AB) =($ per (1.2) $) = \mathrm{Tr}(SJS^{-1}) = \mathrm{Tr}(S^{-1}SJ) = \mathrm{Tr}(J) = \sum_{i=1}^{n} c_i$.
Basta allora provare che $c_{\min}(AB) \geq 0$ per dimostrare che $\mathrm{Tr}(AB) \geq 0$.
$c_{\min}(AB) = \min x^t ABx = (B = QMQ^t \quad QQ^t = I) = \min_x x^t AQMQ^t x \geq$ $\min x^t AQ\mu_{\min}(B)IQ^t x =$ (sicuramente $M = \mathrm{diag}(\mu_i) \geq \mu_{\min}(B)I$) $= \min \mu_{\min}(B)x^t Ax =$ $\mu_{\min}(B)\lambda_{\min}(A) \geq 0$
Si ottiene quindi $c_{\min}(AB) = \mu_{\min}(B)\lambda_{\min}(A) \geq 0$. □

Proposizione 2 *Se A,B sono matrici simmetriche semidefinite positive e la traccia del loro prodotto è nulla allora il loro prodotto è nullo:*

$$A = A^t \geq 0, \qquad B = B^t \geq 0, \qquad \mathrm{Tr}(AB) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad AB = BA = 0$$

Dimostrazione
$0 = \mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_i$
Per la Proposizione 1 $\; c_{\min}(AB) \geq \mu_{\min}(B)\lambda_{\min}(A) \geq 0$
$0 \leq c_{\min}(AB) \leq c_2 \leq c_3 \leq \ldots \leq c_n \;\Rightarrow\; c_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$
ma allora se chiamo S:=AB $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ e ne scrivo la decomposizione singolare:

$$S = U\Sigma V^t \quad \text{dove} \quad UU^t = I \quad VV^t = I$$

da $c_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$ segue $\Sigma = \mathrm{diag}(c_i) = O \quad \Rightarrow S = AB = O$.
Per il richiamo 1.2 si ha poi $0 = \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ e questo permette di affermare che anche BA=0, per quanto appena dimostrato, e quindi che le due matrici commutano. □

Complemento di Schur
Sia $X \in \mathbb{S}^{n\times n}$ definita come segue:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} \qquad \text{con} A \in \mathbb{S}^{k\times k}$$

Se $\det(A) \neq 0$, la matrice $S := C - B^t A^{-1} B$ è chiamata il *complemento di Schur* di A in X.
Se $A > 0 \quad \Rightarrow \quad X \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad S \geq 0$

Proposizione 3 *Sia* $F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i$ *dove le matrici* $F_0, \ldots, F_m \in \mathbb{S}^{n \times n}$ *allora vale la seguente espressione:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \log\det(F(x))^{-1} = -\mathrm{Tr}((F(x))^{-1} F_i)$$

Dimostrazione
Mostriamo che entrambe le espressioni sono equivalenti a:

$$-\frac{1}{\det(F(x))} \sum_{l,j} (-1)^{l+j} f_{lj}^i \det(A_{lj})$$

Pongo $F(x) = (f_{hk}^0 + x_1 f_{hk}^1 + \ldots + x_m f_{hk}^m)_{h,k=1,\ldots,n} =: (a_{hk})_{h,k}$
Vale allora $\det(F(x)) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$
Prima di procedere nella dimostrazione osservo infine che:
$AA^{-1} = I_n$, $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1 \;\Rightarrow\; \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i} \log\det(F(x))^{-1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \log\left(\frac{1}{\det(F(x))}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\det(F(x))}\right)}{\frac{1}{\det(F(x))}} \\ &= \frac{\frac{-\frac{\partial}{\partial x_i}\det(F(x))}{(\det(F(x)))^2}}{\frac{1}{\det(F(x))}} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x_i}\det(F(x))}{(\det(F(x)))^2} \det(F(x)) \end{aligned}$$

Utilizzando inoltre la formula (1.1) della derivata del determinante, dopo aver posto $J(x) := \det(F(x))$, si ha $\frac{\partial}{\partial x_i} J(x_i) = \sum_{l,j=1}^n (-1)^{l+j} \det(A_{lj}) \frac{\partial}{\partial x_i} a_{lj}$
Si perviene pertanto a scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \log\det(F(x))^{-1} =$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\det(F(x))}\sum_{l,j}(-1)^{l+j}\det(A_{lj})\frac{\partial}{\partial x_i}(f^0_{lj}+x_1f^1_{lj}+\ldots+x_mf^m_{lj}) \\
&= -\frac{1}{\det(F(x))}\sum_{l,j}(-1)^{l+j}f^i_{lj}\det(A_{lj})
\end{aligned}
$$

Per completare la dimostrazione ricordo inoltre la formula dell'inversa della matrice $F(x)$:
$(F(x))^{-1} = \frac{1}{\det(A)}((-1)^{i+j}\det(A_{ij}))^t_{i,j=1,\ldots,n}$
Segue allora:

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{Tr}(F(x))^{-1}F_i = \\
&= -\mathrm{Tr}\frac{1}{\det(F(x))}((-1)^{i+j}\det(A_{ij})^t_{i,j}(f^i_{hk})_{h,k} \\
&= \text{(linearità della traccia)} \\
&= -\frac{1}{\det(F(x))}\mathrm{Tr}((-1)^{i+j}\det(A_{ij}))^t_{i,j}(f^i_{hk})_{h,k} \\
&= -\frac{1}{\det(F(x))}\mathrm{Tr}((-1)^{i+j}\det(A_{ij}))_{j,i}(f^i_{hk})_{h,k} \\
&= -\frac{1}{\det(F(x))}\mathrm{Tr}(\sum_h(-1)^{h+j}\det(A_{hj})f^i_{hk})_{j,k} \\
&= -\frac{1}{\det(F(x))}\sum_{j=k}(\sum_h(-1)^{h+j}\det(A_{hj})f^i_{hk}) \\
&= -\frac{1}{\det(F(x))}\sum_{h,j}(-1)^{h+j}\det(A_{hj})f^i_{hj}\Box
\end{aligned}
$$

Espansione al secondo ordine della funzione $\log\det(X)^{-1}$
Se X,Y sono matrici simmetriche con $X > 0$ allora per piccoli Y si ha :

$$
\log\det(X+Y)^{-1} \;=\; \log\det(X)^{-1} \;-\; \mathrm{Tr}X^{-1}Y \;-\; \frac{1}{2}\mathrm{Tr}X^{-1}YX^{-1}Y \;+\; o(\|Y\|^2)
$$

Per la dimostrazione si confrontino le pagine 641 - 644 dell'Appendice A del testo di Boyd e Vandenberghe [6].

Definizione di omotopia

Siano X,Y due spazi topologici e $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ due applicazioni continue; un'omotopia tra f_0 e f_1 è l'applicazione continua:

$$F : X \times [0,1] \longrightarrow Y \text{ soddisfacente } F(x,0) = f_0(x) \quad F(x,1) = f_1(x) \quad \forall x \in X$$

1.2 Richiami di Ottimizzazione convessa

Formulazione generale di un problema di programmazione lineare

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \max & c^t x \\ \text{s.t} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Questo problema rappresenta il problema primale; il problema duale ad esso associato è:

$$(LD) \qquad \begin{array}{ll} \min & b^t y \\ \text{s.t} & A^t y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

dove $c, x \in \mathbb{R}^n, \quad b, y \in \mathbb{R}^m, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Teorema di dualità debole

Se $\tilde{x}$ è soluzione ammissibile primale, soddisfa cioé i vincoli del primale e $\tilde{y}$ è ammissibile duale allora:

$$c^t \tilde{x} \geq b^t \tilde{y}$$

Teorema di dualità forte

Il problema primale (P) ha una soluzione ottima se e solo se il problema duale (D) ha una soluzione ottima, e in questo caso i due valori coincidono:

$$c^t x - b^t y = 0$$

Teorema degli scarti complementari

Siano x^* e y^* due soluzioni ammissibili primale e duale rispettivamente. Esse sono soluzioni ottime se e solo se valgono le seguenti condizioni:

$$x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i a_{ij} y_i^* = c_j \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_i a_{ij} y_j^* > c_j \quad \Rightarrow \quad x_j^* = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

Programmazione convessa

1. Formulazione generale di un problema di programmazione convessa

$$\begin{array}{lccl} & \min & f(x) & \\ (CP) & \text{s.t.} & g_i(x) \leq 0 & i = 1, \ldots, m \\ & & (a^k)^t x - b_k = 0 & k = 1, \ldots, p \end{array}$$

   dove le funzioni $f, g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sono convesse e con derivate continue e $a^k \in \mathbb{R}^n, \ b_k \in \mathbb{R}$.

2. La regione ammissibile del problema (CP) è un insieme convesso.

3. Ogni ottimo locale di (CP) è ottimo globale.

4. Condizioni di ottimalità per (CP) (condizioni di Karush - Kuhn - Tucker):

   (a) $g_i(x) \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, m$

   (b) $(a^k)^t x - b_k = 0 \qquad k = 1, \ldots, p$

   (c) $\lambda_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m$

   (d) $\lambda_i g_i(x) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m$

   (e) $\nabla f(x) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_k \nu_k a^k = 0$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\nu \in \mathbb{R}^p$ sono i vettori dei moltiplicatori di Lagrange e il termine a sinistra di 4e è il gradiente in x della funzione Lagrangiana:
$L(x, \lambda, \nu) = f(x) + \sum_i \lambda_i g_i(x) + \sum_k \nu_k [(a^k)^t x - b_k]$

5. Duale del problema (CP) secondo Wolfe

$$\begin{array}{ll} \max & L(x, \lambda, \nu) \\ \text{s.t.} & \nabla_x L(x, \lambda, \nu) = 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{array}$$

6. Sufficienza e necessità delle condizioni KKT

   - Sufficienza:
     Se (x^*, λ^*, ν^*) è una soluzione delle condizioni KKT allora essa è ottima per il problema (CP).

   - def. I vincoli del problema (CP) si dicono fortemente consistenti se vale la condizione di regolarità di Slater:
     $\exists\ x^0$ t.c. $g_i(x) < 0\ i = 1, \ldots, m\ (a^k)^t x - b_k = 0\ k = 1, \ldots, p$

   - Necessità:
     Siano i vincoli di (CP) fortemente consistenti, i vettori a^k linearmente indipendenti e sia x^* un ottimo di (CP). Allora esistono due vettori λ^* e ν^* tali che (x^*, λ^*, ν^*) sia una soluzione delle condizioni KKT.

Capitolo 2

Programmazione semidefinita

In questo capitolo espongo la teoria della Programmazione semidefinita ed alcune sue importanti applicazioni. Delineo inoltre un metodo risolutivo generale per problemi semidefiniti.

2.1 Introduzione

Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.t.} \quad & F(x) \geq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove $c, x \in \mathbb{R}^m$, $F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i$ e $F_0, \ldots, F_m \in \mathbb{S}^{n \times n}$.
Il vettore x costituisce le variabili del problema mentre il vettore c e le matrici $F_i, \quad i = 1, \ldots, m,$ rappresentano i dati dello stesso.
La disuguaglianza $F(x) \geq 0$ significa poi che la matrice $F(x)$ è semidefinita positiva cioè:

$$z^t F(x) z \geq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

La disuguaglianza $F(x) \geq 0$ è chiamata disuguaglianza lineare di matrici e il problema (2.1) programma semidefinito.
Questo problema è un problema di ottimizzazione convessa perchè la funzione obiettivo ed i vincoli sono funzioni convesse.
La funzione obiettivo è convessa perchè lineare; per quanto riguarda il vincolo in-

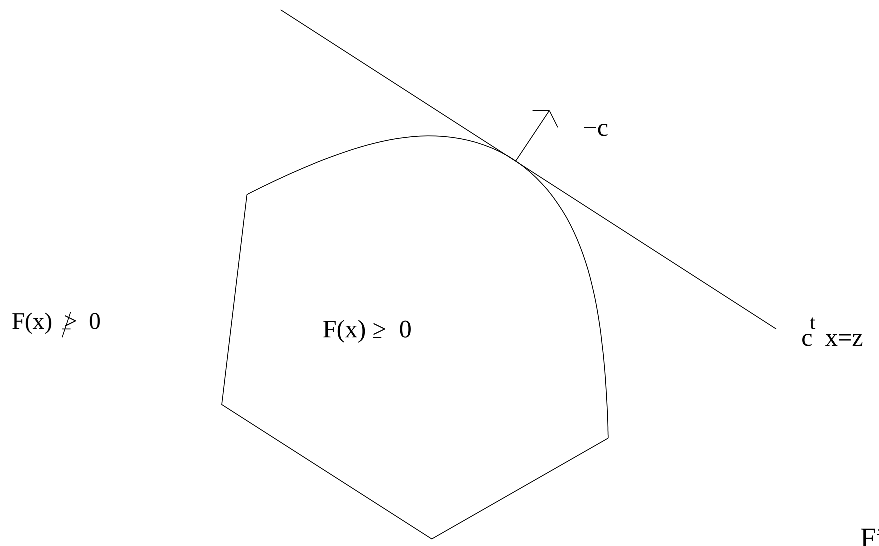

Figura 1

vece:
da $F(x) \geq 0$, $F(y) \geq 0$ segue $F(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \geq 0 \quad \forall \lambda :$ $0 \leq \lambda \leq 1$.
Un semplice esempio di (2.1) è rappresentato in Figura 1.
L'insieme delle soluzioni ammissibili $\{x : F(x) \geq 0\}$ costituisce l'insieme convesso racchiuso dalla linea scura.
Il problema di programmazione semidefinita consiste nello spostarsi il più lontano possibile in direzione -c, sempre però rimanendo dentro la regione ammissibile.

2.2 Dualità

In programmazione semidefinita il problema (2.1) è il problema primale.
Il problema duale ad esso associato è il seguente:

$$\begin{array}{ll} \max & -\mathrm{Tr} F_0 Z \\ \text{s.t.} & \mathrm{Tr} F_i Z = c_i \quad i = 1, \ldots, m \\ & Z \geq 0 \end{array} \tag{2.2}$$

La variabile del problema è la matrice $Z \in \mathbb{S}^{n \times n}$, i suoi dati sono $c \in \mathbb{R}^m$ e $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ per $i = 1, \ldots, m$.
Diremo che una matrice $Z \in \mathbb{S}^{n \times n}$ è ammissibile duale se rispetta i vincoli del

duale cioè se $\mathrm{Tr}F_iZ = c_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$ e $Z \geq 0$. In modo analogo un vettore $x \in \mathbb{R}^m$ si dirà ammissibile primale se rispetta i vincoli del primale e quindi se $F(x) \geq 0$.
Mentre nel problema primale la variabile $x \in \mathbb{R}^m$ è una variabile libera cioè non soggetta a vincoli di non negatività, la variabile del problema duale, $Z \in \mathbb{S}^{n\times n}$, risulta soggetta a tale vincolo.

Osservazione 1 *Il problema (2.2) può essere posto nella forma (2.1), quindi è anch'esso un programma semidefinito:*
per semplicità assumiamo che le matrici F_i per $i = 1, \ldots, m$ siano linearmente indipendenti, allora il seguente insieme di vincoli del problema (2.2):

$$\{Z \mid Z = Z^t \in \mathbb{R}^{n\times n} \ , \ \mathrm{Tr}F_iZ = c_i \ , \ i = 1, \ldots, m\}$$

può essere posta nella seguente forma:

$$\{G(y) := G_0 + G_1y_1 + \ldots + G_py_p \mid y \in \mathbb{R}^p\}$$

dove $p := \frac{n(n+1)}{2} - m$ e G_i sono matrici opportune. Difatti $\{Z \mid Z = Z^t \in \mathbb{R}^{n\times n} \ , \ \mathrm{Tr}F_iZ = c_i \ , \ i = 1, \ldots, m\} = \{Z \in \mathbb{S}^{n\times n} \mid \mathrm{Tr}F_iZ = c_i \ , \ i = 1, \ldots, m\} := \mathcal{N} \subseteq \mathbb{S}^{n\times n}$
dove $\dim\mathcal{N} = \frac{n(n+1)}{2} - m := p$.
Quindi $\mathcal{N}$ è uno spazio di matrici di dimensione p. Esiste allora una base di p matrici linearmente indipendenti tale che:
$\mathcal{N} = G_0 + < G_1, \ldots, G_p >= \{G_0 + G_1y_1 + \ldots + G_py_p \mid y \in \mathbb{R}^p\}$
Definiamo $d \in \mathbb{R}^p$ come $d_i := \mathrm{Tr}F_0G_i$.
$d^ty = \sum_{i=1}^p d_iy_i = \sum_{i=1}^p \mathrm{Tr}F_0G_iy_i = (y_0 = 1) = \sum_{i=0}^p \mathrm{Tr}F_0G_iy_i - \mathrm{Tr}F_0G_0y_0 = \mathrm{Tr}\sum_{i=0}^p F_0G_iy_i - \mathrm{Tr}F_0G_0 = \mathrm{Tr}F_0(G(y) - G_0)$
Pertanto il problema duale diventa:

$$\begin{array}{ll} \min & d^ty \\ s.t. & G(y) \geq 0 \end{array}$$

perchè massimizzare una funzione a valori reali $-f(x)$ equivale a minimizzare $f(x)$.

La proprietà più importante del problema duale semidefinito è che esso fornisce bounds sul valore ottimo del problema primale.
Siano difatti $x \in \mathbb{R}^m$ ammissibile primale e $Z = Z^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ammissibile duale allora:

$$\begin{aligned} c^t x + \mathrm{Tr} F_0 Z = (\mathrm{Tr} F_i Z = c_i) &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Tr} F_i Z x_i + \mathrm{Tr} F_0 Z \\ &= (\text{linearità della traccia}) = \mathrm{Tr} Z F(x) \geq 0 \end{aligned}$$

perchè ho usato la Proposizione 1 valida per le matrici simmetriche semidefinite positive.
Si ottiene

$$c^t x + \mathrm{Tr} F_0 Z = \mathrm{Tr} Z F(x) \geq 0 \tag{2.3}$$

o equivalentemente

$$-\mathrm{Tr} F_0 Z \leq c^t x \tag{2.4}$$

cioè il valore della funzione obiettivo nel problema duale è minore o uguale di quello nel problema primale.
Chiameremo la loro differenza $\eta := c^t x + \mathrm{Tr} F_0 Z = \mathrm{Tr} F(x) Z$ il *duality gap* associato a x e Z.
Noto che η è una funzione lineare in x e in Z.
Siano ora

$$p^* := \inf\{c^t x \mid F(x) \geq 0\}$$

$$d^* := \sup\{-\mathrm{Tr} F_0 Z \mid Z = Z^t \geq 0 \ , \ \mathrm{Tr} F_i Z = c_i \ , \ i = 1, \ldots, m\}$$

i rispettivi valori ottimi dei problemi (2.1) e (2.2).
Dalla relazione (2.4) si osserva facilmente che

$$-\mathrm{Tr}F_0 Z \leq p^* \qquad \forall x \text{ ammissibile primale}$$

$$d^* \leq c^t x \qquad \forall Z \text{ ammissibile duale}$$

cioè le matrici ammissibili duali forniscono lower bounds per il problema primale e viceversa i vettori ammissibili primali costituiscono upper bounds per il problema duale.
Da ciò segue facilmente:

$$d^* \leq p^* \tag{2.5}$$

cioè il valore ottimo del problema duale è minore - uguale del valore ottimo del problema primale.
Definiamo infine gli insiemi ottimi primale e duale:

$$X_{opt} := \{x \mid F(x) \geq 0 \text{ e } c^t x = p^*\}$$

$$Z_{opt} := \{Z \mid Z \geq 0 \ \mathrm{Tr}F_i Z = c_i \ i = 1, \ldots, m \text{ e } -\mathrm{Tr}F_0 Z = d^*\}$$

Osservazione 2 *L'insieme X_{opt} (o Z_{opt}) può essere vuoto anche se p^* (o d^*) è un valore finito.*
Controesempio:

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 \\ s.t. & \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} \geq 0 \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 \\ s.t. & x_1x_2 - 1 \geq 0 \end{array}$$

In questo caso $p^* = 0$ *ma* $\nexists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *t.c.* $c^t x = p^*$ $(x_2 = 0)$ *e* $F(x) \geq 0$ $(x_1x_2 - 1 \geq 0)$.

Richiamo adesso solo l'enunciato del seguente teorema:

Teorema 1 *I valori ottimi dei problemi primale e duale coincidono, cioè* $p^* = d^*$*, se:*

1. *il problema primale (2.1) è strettamente ammissibile cioè* $\exists x$ *t.c.* $F(x) > 0$

2. *il problema duale (2.2) è strettamente ammissibile cioè* $\exists Z = Z^t > 0$ *t.c.* $\mathrm{Tr} F_i Z = c_i$ *per* $i = 1, \ldots, m$

Se valgono entrambe le condizioni gli insiemi ottimi X_{opt} *e* Z_{opt} *non sono vuoti.*

Per la dimostrazione si rinvia il lettore alle pagine 103 - 110 del testo di Nesterov e Nemirovsky [5].
Assumiamo adesso che gli insiemi ottimi X_{opt} e Z_{opt} siano non vuoti: esistano cioè x e Z ammissibili tali che:

$$c^t x = -\mathrm{Tr} F_0 Z = p^* = d^*$$

Da (2.4) segue $\mathrm{Tr} F(x) Z = 0$ ma $F(x), Z \geq 0$ allora per la Proposizione 2 concludo che:

$$ZF(x) = 0 \tag{2.6}$$

Questa condizione si chiama, in analogia al caso lineare, condizione degli scarti complementari.
Il Teorema 1 ci fornisce infine le condizioni di ottimalità per il programma semidefinito (2.1) sotto ipotesi di stretta ammissibilità primale - duale:
x è soluzione ottima per (2.1) se e solo se esiste Z tale che:

$$\begin{cases} F(x) \geq 0 \\ Z \geq 0 \\ \mathrm{Tr} F_i Z = c_i \quad i = 1, \ldots, m \\ ZF(x) = 0 \end{cases}$$

Esempio 1 *Controesempio del teorema 1*
Considero un semplice esempio in cui $p^* \neq d^*$:

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & x_1 \\ s.t. & \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 + 1 \end{pmatrix} \geq 0 \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 \\ s.t. & \begin{cases} -x_1^2 \geq 0 \\ x_1 \geq -1 \end{cases} \end{array}$$

Ma i vincoli di quest'ultimo problema si traducono in $x_1 = 0$, pertanto l'insieme delle soluzioni ammissibili per il problema primale diventa:

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2)^t \mid x_1 = 0 \ , \ x_2 \geq 0\}$$

Pertanto $p^* = 0$.
Il suo problema duale è :

$$(D) \qquad \begin{array}{ll} \max & -z_2 \\ s.t. & \begin{pmatrix} z_1 & \frac{1-z_2}{2} & 0 \\ \frac{1-z_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{pmatrix} \geq 0 \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{ll} \max & -z_2 \\ s.t. & \begin{cases} -\frac{(1-z_2)^2}{4} \geq 0 \\ z_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

L'insieme delle soluzioni ammissibili è :

$$\mathcal{D} = \{(z_1, z_2)^t \mid z_1 \geq 0 \ , \ z_2 = 1\}$$

Concludo allora che $d^* = -1$.
E quindi $p^* \neq d^*$.
I due valori ottimi non sono uguali perchè il problema non soddisfa le condizioni del teorema 1 in quanto entrambi i problemi sono ammissibili, ma non strettamente ammissibili.

2.3 Un primo esempio: SDP estensione di LP

La programmazione semidefinita è considerata come l'estensione della programmazione lineare. Considero appunto il programma lineare:

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s.t.} & Ax + b \geq 0 \end{array} \tag{2.7}$$

dove $c, x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
In questo caso il segno $\geq$ è inteso componente per componente: pertanto il problema consiste nel minimizzare una funzione obiettivo lineare soggetta ad un vincolo composto da m disequazioni lineari.

Osservazione 3 $v \in \mathbb{R}^n,\ v \geq 0 \iff \operatorname{diag}(v) \geq 0$ *dove quest'ultima formula indica che la matrice diagonale, che ha per elementi le componenti del vettore v, è semidefinita positiva.*

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad v \geq 0 \iff v_i \geq 0\ \forall i = 1, \ldots, n$$

Allora

$$diag(v) = \begin{pmatrix} v_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & v_n \end{pmatrix} \geq 0$$

solo se i suoi componenti non sono negativi.

In base all'osservazione 3 posso pertanto esprimere il problema (2.7) nella forma (2.1) imponendo:

$$F(x) := \operatorname{diag}(Ax + b)$$

e osservando:

$$\operatorname{diag}(Ax + b) = \operatorname{diag}(Ax) + \operatorname{diag}(b)$$

si ottiene difatti:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{diag}(Ax) &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n}x_n & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_{mn} \end{pmatrix} x_n \\
&= \operatorname{diag}(a_1)x_1 + \ldots + \operatorname{diag}(a_n)x_n
\end{aligned}
$$

dove a_i è l'i-esima colonna della matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
$\Longrightarrow$ $\operatorname{diag}(Ax+b) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{diag}(a_i)x_i + \operatorname{diag}(b)$
Ponendo pertanto $F_i := \operatorname{diag}(a_i)$ e $F_0 := \operatorname{diag}(b)$ il problema (2.7) diventa allora:

$$
\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s.t.} & F(x) \geq 0 \end{array} \tag{2.8}
$$

La programmazione semidefinita è quindi un'estensione di quella lineare: essa sostituisce i vincoli di disuguaglianza componente per componente con la disuguaglianza lineare di matrici.
Ci sono tuttavia importanti differenze tra i due problemi: i risultati della dualità sono più deboli per SDP rispetto a LP e non ci sono ancora metodi del simplesso semplici per SDP come in LP.
Utilizzando (2.2) scrivo ora il duale di (2.8):

$$
\begin{array}{ll} \max & -\operatorname{Tr} \operatorname{diag}(b)Z \\ \text{s.t.} & \operatorname{Tr} \operatorname{diag}(a_i)Z = c_i \quad i = 1, \ldots, m \\ & Z \geq 0 \end{array} \tag{2.9}
$$

Questo programma può essere notevolmente semplificato osservando che la funzione obiettivo e il vincolo sottoposto ad uguaglianza utilizzano solo gli elementi diagonali di Z e che se $Z \geq 0$ possiamo ritenere senza perdita di generalità 0 gli elementi non diagonali della stessa matrice, la quale rimane semidefinita positiva. Posso scrivere pertanto:

$$Z := \mathrm{diag}(z)$$

Il problema (2.9) diventa:

$$\begin{aligned} \max \quad & -b^t y \\ \text{s.t.} \quad & a_i^t z = c_i \quad i = 1, \ldots, m \\ & z \geq 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

il quale è proprio il duale di (2.7) in LP.

Osservazione 4 *La particolare struttura diagonale del problema appena studiato ci ha permesso di ridurre in modo notevole il numero di variabili dello stesso. In generale il problema duale può essere semplificato quando le matrici F_i sono strutturate: se ad esempio F(x) è una matrice a blocchi diagonale, una tale struttura assume anche la matrice incognita Z.*

Come già accennato, i risultati della dualità in LP sono più forti che in SDP: i valori ottimi di (2.7) e (2.10) sono sempre uguali eccettuato il caso in cui entrambi i problemi siano non ammissibili [1]. (cfr i Teoremi 1.2 e 1.2)
L'esempio 1 contraddice per SDP quest'ultima proprietà.

[1] Assumo la convenzione standard secondo cui il valore ottimo di (2.7) sia $+\infty$ se il problema è non ammissibile ed il valore ottimo di (2.10) sia - ∞ se tale problema è non ammissibile

Possiamo infine rileggere la condizione degli scarti complementari:

$$ZF(x) = 0$$

Se $F(x) = \text{diag}(Ax + b)$, $Z = \text{diag}(z)$ allora vale:
$0 = ZF(x) = \text{diag}(z)\text{diag}(Ax + b) \iff z_i(Ax + b)_i = 0$ per $i = 1, \ldots, n$
Quest'ultima condizione coincide con la condizione degli scarti complementari valida in LP.

Esempio 2 *Problema di ottimizzazione convessa non lineare che può essere espresso come programma semidefinito ma non come programma lineare*

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{(c^t x)^2}{d^t x} \\ s.t. & Ax + b \geq 0 \end{array}$$

Tale problema non è di LP perchè la funzione obiettivo è non lineare.
Assumiamo $d^t x > 0$ *ogni qualvolta* $Ax + b \geq 0$.
Utilizzo un trucco standard per eliminare la funzione obiettivo portandola tra i vincoli, introducendo la variabile ausiliaria t *che si comporta come un upper - bound per la funzione obiettivo stessa:*

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ s.t. & Ax + b \geq 0 \\ & \frac{(c^t x)^2}{d^t x} \leq t \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ s.t. & Ax + b \geq 0 \\ & t - \frac{(c^t x)^2}{d^t x} \geq 0 \end{array}$$

La funzione obiettivo di tale problema è così lineare ed osservo poi che esso può essere riscritto nella forma (2.1). Il problema diventa allora:

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ s.t. & \begin{pmatrix} diag(Ax+b) & 0 & 0 \\ 0 & t & c^t x \\ 0 & c^t x & d^t x \end{pmatrix} \geq 0 \end{array}$$

dove ho utilizzato la struttura a blocchi per rappresentare i due vincoli e un secondo trucco noto con il nome di complemento di Schur per rappresentare il secondo vincolo non lineare.

Difatti

$$\begin{pmatrix} t & c^t x \\ c^t x & d^t x \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

è equivalente a scrivere:

$$\begin{cases} d^t x \geq 0 \\ t d^t x - (c^t x)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} d^t x \geq 0 \\ t - \frac{(c^t x)^2}{d^t x} \geq 0 \end{cases}$$

L'espressione $t - \frac{(c^t x)^2}{d^t x}$ *è chiamata il complemento di Schur di* $d^t x$ *nella disuguaglianza di matrici (9).*

Riconoscere i complementi di Schur nelle espressioni non lineari è spesso il passo

chiave per riformulare problemi di ottimizzazione non lineare convessa come problemi semidefiniti.
La programmazione semidefinita, quindi, oltre ad essere la più corretta estensione della programmazione lineare, annovera anche la programmazione quadratica e la programmazione non lineare ed è inoltre coinvolta in importanti applicazioni.

2.4 Alcune applicazioni

2.4.1 Programmazione quadratica a vincoli quadratici

Un generale problema di programmazione quadratica a vincoli quadratici o QCQP(quadratically constrained quadratic programming) è il seguente:

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ \text{s.t.} & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, L \end{array} \tag{2.12}$$

dove $f_i(x) := (A_i x + b_i)^t (A_i x + b_i) - c_i^t x - d_i$ sono funzioni quadratiche convesse, $x \in \mathbb{R}^k$ e A_i rappresenta una generica matrice.

Osservo, utilizzando il complemento di Schur, che il vincolo $-f_i(x) \geq 0$ può essere riscritto come:

$$\begin{pmatrix} I & A_i x + b_i \\ (A_i x + b_i)^t & c_i^t x + d_i \end{pmatrix} \geq 0$$

Il problema (2.12) diventa allora:

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ \text{s.t.} & \begin{pmatrix} I & A_i x + b_i \\ (A_i x + b_i)^t & c_i^t x + d_i \end{pmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \ldots, L \end{array}$$

La funzione obiettivo non è lineare quindi ricorro all'introduzione di una variabile ausiliaria τ, upper bound della funzione obiettivo stessa:

$$\begin{array}{ll} \min & \tau \\ \text{s.t.} & f_0(x) \le \tau \\ & \begin{pmatrix} I & A_i x + b_i \\ (A_i x + b_i)^t & c_i^t x + d_i \end{pmatrix} \ge 0 \quad i = 1, \dots, L \end{array}$$

$$f_0(x) \le \tau \iff (A_0 x + b_0)^t (A_0 x + b_0) - c_0^t x - d_0 \le \tau$$

$$\iff \tau - (A_0 x + b_0)^t (A_0 x + b_0) + c_0^t x + d_0 \ge 0$$

Utilizzando l'argomentazione discussa in precedenza si ha quindi:

$$f_0(x) \le \tau \iff \begin{pmatrix} I & A_0 x + b_0 \\ (A_0 x + b_0)^t & c_0^t x + d_0 + \tau \end{pmatrix} \ge 0$$

Il problema (2.12) diventa infine:

$$\begin{array}{ll} \min & \tau \\ \text{s.t.} & \begin{pmatrix} I & A_0 x + b_0 \\ (A_0 x + b_0)^t & c_0^t x + d_0 + \tau \end{pmatrix} \ge 0 \\ & \begin{pmatrix} I & A_i x + b_i \\ (A_i x + b_i)^t & c_i^t x + d_i \end{pmatrix} \ge 0 \qquad i = 1, \dots, L \end{array}$$

il quale è un programma semidefinito con variabili $x \in \mathbb{R}^k,\ \tau \in \mathbb{R}$ che riscritto ulteriormente diventa:

$$\begin{array}{ll} \min & \tau \\ \text{s.t.} & F(x) \ge 0 \end{array}$$

dove $F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^{k} F_i x_i + F_\tau \tau = (\tau := k+1) = F_0 + \sum_{i=1}^{k+1} F_i x_i$ se:

$$F_0 := \begin{pmatrix} I & b_0 & & & & & & \\ (b_0)^t & d_0 & & & & & O & \\ & & I & b_1 & & & & \\ & & (b_1)^t & d_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & O & & & & & I & b_L \\ & & & & & & (b_L)^t & d_L \end{pmatrix}$$

$$F_i := \begin{pmatrix} O & A_0^i & & & & & & \\ (A_0^i)^t & (c_0^i)^t & & & & & O & \\ & & O & A_1^i & & & & \\ & & (A_1^i)^t & (c_1^i)^t & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & O & & & & & O & A_L^i \\ & & & & & & (A_L^i)^t & (c_1^L)^t \end{pmatrix}$$

per $i = 1, \ldots, k$ dove A_s^i rappresenta l'i-esima colonna della matrice A_s per $s = 0, \ldots, L$.
Per $i = k + 1$ la matrice F_i ha invece tutti elementi uguali a 0 eccetto quello di posto $(k + 1, k + 1)$ che vale 1.

2.4.2 Minimizzazione dell'autovalore massimo e della norma di una matrice

Problemi di questo tipo trovano larga applicazione in teoria del controllo, ottimizzazione strutturale, teoria dei grafi e ottimizzazione combinatoria.
Supponiamo che la matrice A(x) dipenda in modo affine da $x \in \mathbb{R}^k$:

$$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + \ldots + x_k A_k$$

dove $A_i \in \mathbb{S}^{p \times p}$.
Siano $\lambda_{\max}$ il massimo autovalore della matrice A(x) ed y l'associato autovettore:

$$A(x)y = \lambda_{\max} y$$

Il problema di minimizzare il massimo autovalore diventa perciò:

$$\begin{array}{ll} \min & \lambda_{\max} \\ \text{s.t.} & A(x)y = \lambda_{\max} y \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{ll} \min & \lambda_{\max} \\ \text{s.t.} & A(x)y = (\lambda_{\max} I)y \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{ll} \min & \lambda_{\max} \\ \text{s.t.} & A(x) = \lambda_{\max} I \end{array}$$

Ricorrendo ancora all'introduzione di una variabile ausiliaria t, il problema precedente diventa:

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & \lambda_{\max} \leq t \\ & A(x) - \lambda_{\max} I = 0 \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & \lambda_{\max} e \leq te \\ & A(x) - \lambda_{\max} I = 0 \end{array}$$

dove $e = \begin{pmatrix} 1 \dots 1 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^p$ e la disuguaglianza è intesa componente per componente.

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & (t - \lambda_{\max})e \geq 0 \\ & A(x) - \lambda_{\max} I = 0 \end{array}$$

Ma posso esprimere il primo vincolo del problema come $\text{diag}(t - \lambda_{\max}) \geq 0$, dove adesso il segno $\geq$ sta ad indicare la semidefinitezza positiva della matrice.
Ottengo quindi:

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & \text{diag}(t) - \text{diag}(\lambda_{\max}) \geq 0 \\ & A(x) - \lambda_{\max} I = 0 \end{array}$$

Da $\lambda_{\max} I = \text{diag}(\lambda_{\max})$ e $\lambda_{\max} I = A(x)$ il problema diventa infine:

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & \text{diag}(t) - A(x) \geq 0 \end{array} \tag{2.13}$$

Questo problema ha variabili $x \in \mathbb{R}^k$ e $t \in \mathbb{R}$.
Scrivo ora il problema duale, osservando prima che:
$\bar{x} := (x, t)^t,\ c^t := (0, 1),\ F_0 = A_0,\ F_i = A_i$ per $i = 1, \dots, k$ e $F_t := F_{k+1} = I$

$$\begin{array}{lcc} \min & -\text{Tr} A_0 Z & \\ \text{s.t.} & \text{Tr} A_i Z = 0 & i = 1, \dots, k \\ & \text{Tr} I Z = 1 & i = k+1 \\ & Z \geq 0 & \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{lcc} \min & -\text{Tr} A_0 Z & \\ \text{s.t.} & \text{Tr} A_i Z = 0 & i = 1, \dots, k \\ & Z_{11} + \ldots + Z_{pp} = 1 & i = k+1 \\ & Z \geq 0 & \end{array}$$

Un altro problema simile al precedente riguarda la minimizzazione della norma spettrale di una matrice.
Supponiamo $A(x) = A_0 + x_1 A_1 + \ldots + x_k A_k \in \mathbb{R}^{p\times q}$ $(A^t(x) \in \mathbb{R}^{q\times p})$.
Il problema può essere così espresso:

$$\begin{array}{ll} \min & \|A(x)\| \\ \text{s.t.} & \|A(x)\|^2 = \lambda_{\max}(A^t(x)A(x)) \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & \|A(x)\| \leq t \\ & \|A(x)\|^2 = \lambda_{\max}(A^t(x)A(x)) \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & \|A(x)\|^2 \leq t^2 \\ & \|A(x)\|^2 = \lambda_{\max}(A^t(x)A(x)) \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

Osservando che $A^t(x)A(x) \in \mathbb{R}^{q\times q}$ e utilizzando $A^t(x)A(x)y = \lambda_{\max}(A^t(x)A(x))y = \lambda_{\max}(A^t(x)A(x))I_{q\times q}y$, si ottiene quindi:

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & t^2 - \lambda_{\max}(A^t(x)A(x)) \geq 0 \\ & A^t(x)A(x) = \lambda_{\max}(A^t(x)A(x))I_{q\times q} \end{array}$$

Ma come già visto $t^2 - \lambda_{\max}(A^t(x)A(x)) \geq 0 \iff t^2 e - \lambda_{\max}(A^t(x)A(x))e \geq 0 \iff t^2 I_{q\times q} - \lambda_{\max}(A^t(x)A(x))I_{q\times q} \geq 0$ dove $e = \begin{pmatrix} 1 \dots 1 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^q$.
Il problema diventa:

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & t^2 I_{q\times q} - A^t(x)A(x) \geq 0 \end{array}$$

che può essere riscritto

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & t^2 I_{q\times q} - A^t(x)I_{p\times p}A(x) \geq 0 \end{array}$$

Impongo la ulteriore condizione $t > 0$ cosicchè possa scrivere

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & tI_{q\times q} - A^t(x)\frac{1}{t}I_{p\times p}A(x) \geq 0 \end{array}$$

Usando il complemento di Schur e osservando che $\frac{1}{t}I_{p\times p} = (tI_{p\times p})^{-1}$ e $tI_{p\times p} > 0 \Leftrightarrow t > 0$, posso riscrivere il vincolo al seguente modo

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & \begin{pmatrix} tI_{p\times p} & A(x) \\ A^t(x) & tI_{q\times q} \end{pmatrix} \geq 0 \end{array}$$

il quale è un problema semidefinito nelle variabili $x \in \mathbb{R}^k, t \in \mathbb{R}$.

2.4.3 Ottimizzazione strutturale

Considero una struttura composta da k barre elastiche lineari, connessa da un insieme di p nodi.
Supponiamo noti la lunghezza delle barre ed il loro modulo di Young (rapporto fra lo sforzo applicato alla barra e la deformazione che ne consegue).
Il compito risulta allora quello di mettere in ordine di grandezza tali barre in base alla loro sezione.
Considero inoltre f_i per $i = 1, \dots, p$ un insieme noto di forze applicate ai nodi. Il

vettore degli spostamenti dei nodi risultante da tali forze viene denotato con d.
Si vuole minimizzare l'energia elastica immagazzinata dalla struttura, cioè $E = \frac{1}{2}f^t d$, la quale è una misura dell'inverso della rigidezza della struttura stessa.
Le variabili del problema sono le sezioni delle barre, indicate con x_i.
La relazione tra f e d è poi lineare: $f = A(x)d$ dove la matrice $A(x) := \sum_{i=1}^k x_i A_i$ è chiamata *matrice di rigidezza*. Le matrici A_i che la definiscono sono simmetriche semidefinite positive e dipendono solo dai parametri noti (lunghezza delle barre e moduli di Young).
Il problema è allora:

$$\begin{array}{ll} \min & f^t d \\ \text{s.t.} & f = A(x)d \\ & \sum_{i=1}^k l_i x_i \le v \\ & \tilde{x}_i \le x_i \le \bar{x}_i \quad i = 1, \dots, k \end{array}$$

dove x e d sono le variabili, v è il volume massimo occupato dalla struttura, l_i sono le lunghezze delle barre e $\tilde{x}_i, \bar{x}_i$ sono lower bounds e upper bounds della sezione delle stesse.
Si assume ora per semplicità che $\tilde{x}_i > 0$ e che $A(x) > 0$ per tutti i valori positivi di x_i.
Pertanto $f = A(x)d \implies d = A^{-1}(x)f$ e posso così eliminare la variabile d scrivendo:

$$\begin{array}{ll} \min & f^t A^{-1}(x) f \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^k l_i x_i \le v \\ & \tilde{x}_i \le x_i \le \bar{x}_i \quad i = 1, \dots, k \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & f^t A^{-1}(x) f \le t \\ & \sum_{i=1}^k l_i x_i \le v \\ & \tilde{x}_i \le x_i \le \bar{x}_i \quad i = 1, \dots, k \end{array}$$

Ma $f^tA^{-1}(x)f \le t \;\Leftrightarrow\; t - f^tA^{-1}(x)f \ge 0$ e quest'ultimo termine è il complemento di Schur della matrice A(x). Allora

$$\begin{pmatrix} A(x) & f \\ f^t & t \end{pmatrix} \ge 0$$

Ottengo infine il seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & \begin{pmatrix} A(x) & f \\ f^t & t \end{pmatrix} \ge 0 \\ & \sum_{i=1}^{k} l_i x_i \le v \\ & \tilde{x}_i \le x_i \le \bar{x}_i \qquad i = 1, \ldots, k \end{array}$$

il quale è un programma semidefinito in x e t.

2.4.4 Separazione mediante ellissoidi

Il più semplice modello usato per separare due insiemi di punti $\{x^1, \ldots, x^k\}$ e $\{y^1, \ldots, y^L\}$ in $\mathbb{R}^p$ usa gli iperpiani.
L'iperpiano $a^tx + b = 0$ separa difatti questi due insiemi di punti se:

$$\begin{cases} a^tx^i + b \le 0 & i = 1, \ldots, k \\ a^ty^j + b \ge 0 & j = 1, \ldots, L \end{cases}$$

Questo è un insieme di disequazioni lineari in $a \in \mathbb{R}^p, b \in \mathbb{R}$ che può essere risolto utilizzando LP.
Osservo difatti che il vincolo

$$a^ty^j + b \ge 0 \qquad j = 1, \ldots, L$$

può essere espresso nella forma

$$-a^ty^j - b \le 0 \qquad j = 1, \ldots, L$$

E quindi risolvere $k+L$ disequazioni lineari può essere effettuato in maniera efficiente dagli algoritmi usati per risolvere problemi di LP.
Ma posso per esempio anche cercare fra tutti gli iperpiani che separano i due insiemi di punti quello per cui la somma dei coefficienti è minima.
Introducendo cioè $\tilde{a} = (a^t, b)$ il problema consiste in:

$$\begin{array}{lll} \min & \tilde{a}^t e & \\ \text{s.t.} & a^t x^i + b \leq 0 & i = 1, \dots, k \\ & -a^t y^j - b \leq 0 & j = 1, \dots, L \end{array}$$

dove $e = \begin{pmatrix} 1 \dots 1 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{p+1}$.
Se però non riesco a separare i due insiemi di punti tramite un iperpiano, posso utilizzare una superficie quadratica. Si crea a tal scopo una funzione quadratica $f(x) = x^t A x + b^t x + c$ tale che

$$\begin{array}{ll} (x^i)^t A x^i + b^t x^i + c \leq 0 & i = 1, \dots, k \\ (y^j)^t A y^j + b^t y^j + c \geq 0 & j = 1, \dots, L \end{array}$$

Queste disuguaglianze sono ancora disequazioni lineari nelle variabili $A \in \mathbb{S}^{p \times p}, b \in \mathbb{R}^p, c \in \mathbb{R}$. Pertanto il numero totale delle variabili è $\frac{p(p+1)}{2} + p + 1$.
Procedendo come prima, posso risolvere questo problema utilizzando LP.
Ma in alcuni casi, come ad esempio *cluster analysis*, risulta conveniente trovare un ellissoide che contenga i punti x^i ma non i punti y^j come riportato in figura 2.

Questo vincolo richiede la condizione $A > 0$ affinchè cioè la superficie quadratica sia un ellissoide.
Posso infine cercare il più piccolo ellissoide, il più sferico possibile, contenente la sfera di raggio unitario e contenuto nella sfera di raggio γ, aggiungendo l'ulteriore condizione:

$$I \leq A \leq \gamma I$$

e minimizzando γ.
Il problema diventa allora un programma semidefinito nelle variabili γ,A,b,c:

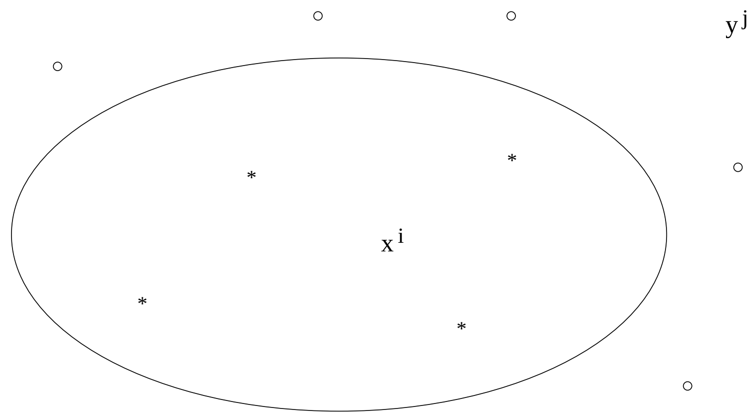

Figura 2

$$
\begin{array}{ll}
\min & \gamma \\
\text{s.t.} & (x^i)^t A x^i + b^t x^i + c \leq 0 \quad i = 1, \ldots, k \\
& (y^j)^t A y^j + b^t y^j + c \geq 0 \quad j = 1, \ldots, L \\
& A > 0 \\
& I \leq A \leq \gamma I
\end{array}
$$

Osservo infine che il valore ottimo di questo problema vale 1 se e solo se la superficie che separa i due insiemi di punti coincide con la sfera di raggio unitario.

2.4.5 Statistica

La programmazione semidefinita oltre ad occuparsi di argomenti algebrici, geometrici e fisico - matematici, viene utilizzata anche in statistica matematica come si vede nell'esempio proposto.
Sia $x \in \mathbb{R}^p$ un vettore di variabili casuali tale che $E(x) = \bar{x}$ e $\mathrm{Cov}(x) = \Sigma$ cioè $\bar{x}$ sia la sua media e Σ la sua matrice di covarianza.
Considero ora un elevato numero di campioni $y = x + r$, dove r ha media 0, scorrelato da x e la cui matrice di covarianza è diagonale ma incognita.
Espresso in formule:

$$E(r) = 0 \quad E(xr) = E(x)E(r) \quad \text{cioè x e r sono indipendenti}$$

$$\mathrm{Cov}(r) = D$$

Si denota poi con $\widehat{\Sigma} = \Sigma + D$ la matrice di covarianza dei campioni y.
Si assume inoltre che si possa stimare $\widehat{\Sigma}$, cioè la si suppone una matrice nota e costante.
Non sappiamo chi sia Σ o chi sia D ma sappiamo che sono ambedue semidefinite positive, pertanto Σ giace di sicuro in un insieme convesso:

$$\Sigma := \{\widehat{\Sigma} - D \mid \widehat{\Sigma} - D \geq 0 \ , \ D > 0 \text{ e diagonale}\}$$

Considero adesso $e^t x = \sum_{i=1}^p x_i$, cioè la somma delle componenti del vettore x, la varianza della quale è:

$$\mathrm{Var}(e^t x) = \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^p x_i) = \sum_{i=1}^p \mathrm{Var}(x_i) + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^p \mathrm{Cov}(x_i, x_j) = e^t \Sigma e$$

$$\begin{aligned} e^t \Sigma e &= \mathrm{Var}(e^t x) = \mathrm{Var}(e^t (y - r)) \\ &= \mathrm{Var}(e^t y) - \mathrm{Var}(e^t r) \\ &= e^t \widehat{\Sigma} e - e^t D e = e^t \widehat{\Sigma} e - \mathrm{Tr}(D) \end{aligned}$$

Non conoscendo Σ, non so anche chi sia $e^t \Sigma e$.
Però possiamo determinare il massimo e il minimo di $e^t \Sigma e$ sull'insieme Σ in quanto è convesso. Possiamo cioè determinare un intervallo nel quale esso giace.
Determino pertanto lower bounds e upper bounds su $e^t \Sigma e$.
Osservo subito che l'upper bound è $e^t \widehat{\Sigma} e$.
Per trovare un lower bound, posso ricorrere invece al seguente programma semidefinito:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^p d_i \\ \text{s.t.} & \widehat{\Sigma} - \mathrm{diag}(d) \geq 0 \\ & d \geq 0 \end{array} \tag{2.14}$$

Questo problema, nelle p variabili d_i, viene chiamato *educational testing problem.*
Una sua interpretazione è la seguente: il vettore casuale y fornisce i risultati di p

esami sostenuti da un generico studente e $e^t y$ ne fornisce il risultato totale conseguito. Il test risulta affidabile se la varianza del risultato totale conseguito dallo studente, $\mathrm{Var}(e^t y)$, si avvicina alla varianza del risultato totale atteso per ciascuno studente, $\mathrm{Var}(e^t x)$.

Il problema (2.14) può essere scritto come:

$$\begin{array}{ll} \min & -e^t d \\ \text{s.t.} & \begin{pmatrix} \widehat{\Sigma} - \mathrm{diag}(d) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(d) \end{pmatrix} \geq 0 \end{array}$$

Quindi grazie a questa riscrittura si vede che:

$$c = -e$$

$$F_0 = \begin{pmatrix} \widehat{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_i = \begin{pmatrix} -\mathrm{diag}(e^i) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(e^i) \end{pmatrix} \qquad \text{per } i = 1, \ldots, p$$

dove e^i denota il vettore in $\mathbb{R}^p$ che ha coordinata 1 in posizione i-esima e 0 altrove.

Il duale di (2.14) risulta allora utilizzando (2.2):

$$\begin{array}{ll} \max & -\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \widehat{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z \\ \text{s.t.} & \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} -\mathrm{diag}(e^i) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(e^i) \end{pmatrix} Z = -1 \quad i = 1, \ldots, p \\ & Z \geq 0 \end{array}$$

Definisco Z come una matrice a blocchi:

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

Il problema duale diventa allora:

$$
\begin{array}{lc}
\max & -\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \widehat{\Sigma} Z_{11} & \widehat{\Sigma} Z_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{s.t.} & \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} -\mathrm{diag}(e^i) Z_{11} & -\mathrm{diag}(e^i) Z_{12} \\ \mathrm{diag}(e^i) Z_{12} & \mathrm{diag}(e^i) Z_{22} \end{pmatrix} = -1 \quad i = 1, \ldots, p \\
& Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix} \geq 0
\end{array}
$$

Senza perdita di generalità si assume $Z_{12} = 0$ e Z_{22} diagonale.
Il problema diventa allora:

$$
\begin{array}{lc}
\max & -\mathrm{Tr}\widehat{\Sigma} Z_{11} \\
\text{s.t.} & (-Z_{11} + Z_{22})_{ii} = -1 \qquad i = 1, \ldots, p \\
& Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix} \geq 0
\end{array}
$$

dove $(Z_{aa})_{ii}$ indica l'elemento sulla diagonale della matrice Z_{aa} $a = 1, 2$ di posto ii. Posso comunque riscrivere quest'ultimo problema in forma più compatta interpretando il blocco Z_{22} come insieme di variabili scarto.
Dopo aver chiamato $Z_{11} := Q$, pervengo alla seguente situazione:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \mathrm{Tr}\widehat{\Sigma} Q \\
\text{s.t.} & -Q_{ii} \leq -1 \\
& Q = Q^t \geq 0
\end{array}
$$

2.5 Funzione barriera per una disuguaglianza lineare di matrici

Supponiamo valgano le due seguenti condizioni:

1. stretta ammissibilità primale e duale:

$$\exists\, x \text{ t.c. } F(x) > 0$$

$$\exists\ Z = Z^t > 0 \text{ t.c. } \mathrm{Tr}F_i = c_i \text{ per } i = 1, \ldots, m$$

2. le matrici F_i siano linearmente indipendenti per $i = 1, \ldots, m$.

Si definisce *funzione barriera* per l'insieme $X := \{x \mid F(x) > 0\}$ la seguente funzione:

$$\phi(x) := \begin{cases} \log\det(F(x))^{-1} & \text{se } F(x) > 0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La definizione di funzione barriera per una disuguaglianza lineare di matrici non è però univoca: $\log\det(F(x))^{-1}$ può ad esempio essere sostituito da $\mathrm{Tr}(F(x))^{-1}$ ma la prima citata possiede speciali proprietà se $F(x) > 0$.
In particolare essa è analitica e strettamente convessa.
Il gradiente e l'hessiano $\nabla\phi(x)$ e $\nabla^2\phi(x)$ di ϕ in x sono i seguenti:

$$\begin{aligned} (\nabla\phi(x))_i &= -\mathrm{Tr}(F(x))^{-1}F_i = -\mathrm{Tr}[((F(x))^{\frac{1}{2}})((F(x))^{\frac{1}{2}}F_i)] \\ &= -\mathrm{Tr}(F(x))^{\frac{1}{2}}F_i(F(x))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla^2\phi(x))_{i,j} &= \mathrm{Tr}(F(x))^{-1}F_i(F(x))^{-1}F_j \\ &= \mathrm{Tr}((F(x))^{\frac{1}{2}}F_i(F(x))^{\frac{1}{2}})((F(x))^{\frac{1}{2}}F_j(F(x))^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

per $i, j = 1, \ldots, m$; dove ho utilizzato (1.2) e la Proposizione 3 e dove $(F(x))^{\frac{1}{2}}$ denota la radice quadrata simmetrica della matrice F(x).

Esempio 3 *Funzione barriera nel caso lineare Nel caso lineare cioè per un insieme di disequazioni lineari* $a_i^t x + b_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$, *la funzione barriera* ϕ *si* *riduce alla già nota barriera logaritmica utilizzata nei metodi di punto interno:*

$$\phi(x) := \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} \log(a_i^t x + b_i) & se\ a_i^t x + b_i > 0 \\ +\infty & altrimenti \end{cases}$$

in quanto
$a_i^t x + b_i > 0 \ i = 1, \ldots, n$
equivale a scrivere

$$F(x) := \begin{pmatrix} a_1^t x + b_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n^t x + b_n \end{pmatrix} > 0$$

dove al solito il segno > indica la definitezza positiva della matrice.
Dalla definizione di funzione barriera osservo che

$$\begin{aligned} \log\det(F(x))^{-1} &= \log\det \begin{pmatrix} a_1^t x + b_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n^t x + b_n \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \log\det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^t x + b_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \frac{1}{a_n^t x + b_n} \end{pmatrix} \\ &= \log\Big(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^t x + b_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \log(\frac{1}{a_i^t x + b_i}) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \log(a_i^t x + b_i) \end{aligned}$$

2.6 Centro analitico di una disuguaglianza lineare di matrici

Si assume ulteriormente che X sia limitato.
La funzione ϕ è strettamente convessa su un insieme limitato. Essa ammette pertanto un unico minimizzatore:

$$x^* := \text{argmin}\phi(x)$$

chiamato *centro analitico* della disuguaglianza lineare di matrici $F(x) \geq 0$.
Osservo subito che
$(\nabla\phi(x))_i|_{x=x^*} = -\mathrm{Tr}(F(x^*))^{-1}F_i = 0$
il che si traduce dicendo che $(F(x^*))^{-1}$ è ortogonale allo spazio generato dalle matrici $F_1, \ldots, F_m$.
Quest'ultima condizione è simile ai vincoli di uguaglianza del problema duale semidefinito (2.2), $\mathrm{Tr}F_iZ = c_i, \ i = 1, \ldots, m$, e fra poco si vedrà la connessione fra centro analitico e ammissibilità duale.
Ritornando al caso lineare
$x^* = \mathrm{argmin}\phi(x) = \mathrm{argmin}\Big[-\sum_{i=1}^n \log(a_i^t x + b_i)\Big] = \mathrm{argmax}\Big[\sum_{i=1}^n \log(a_i^t x + b_i)\Big] = \mathrm{argmax}\log\prod_{i=1}^n (a_i^t x + b_i) \approx \mathrm{argmax}\prod_{i=1}^n (a_i^t x + b_i)$
in quanto la funzione logaritmo è monotona crescente, invertibile e $\mathcal{C}^\infty$ e pertanto massimizzare una generica funzione f è equivalente a massimizzare log(f).
Pervengo infine al risultato seguente:

$$\begin{array}{rll} x^* = & \mathrm{argmax} & \prod_{i=1}^n (a_i^t x + b_i) \\ & \text{s.t.} & a_i^t x + b_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Una sua interpretazione geometrica è la seguente: x^* è quel punto ammissibile che massimizza il prodotto delle distanze dai vincoli piani, cioè i piani definiti dall'equazione $a_i^t x + b_i \geq 0$.
Affronto adesso il problema di calcolare il centro analitico.
Dato un punto iniziale x strettamente ammissibile per determinare il centro analitico si può utilizzare il metodo di Newton.
Per definizione la direzione di Newton δx^N in x è quel vettore che minimizza l'espansione al secondo ordine di $\phi(x+\nu) - \phi(x)$ per tutti i $\nu \in \mathbb{R}^m$:

$$\delta x^N := \mathrm{argmin}_{\nu\in\mathbb{R}^m}[\phi(x+\nu) - \phi(x)]$$

Utilizzando la Proposizione 3 e osservando che
$F(x+\nu) = F_0 + \sum_{i=1}^m (x_i + \nu_i)F_i = (F_0 + \sum_{i=1}^m x_iF_i) + (\sum_{i=1}^m \nu_iF_i) = F(x) + \widetilde{F}(\nu)$
dove $\widetilde{F}(\nu) := \sum_{i=1}^m \nu_iF_i$, si ha:

$$\begin{aligned}
\phi(x+\nu)-\phi(x) &= \log\det(F(x+\nu))^{-1}-\log\det(F(x))^{-1}\\
&= \log\det(F(x)+\widetilde{F}(\nu))^{-1}-\log\det(F(x))^{-1}\\
&= -\mathrm{Tr}(F(x))^{-1}\widetilde{F}(\nu)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F(x))^{-1}\widetilde{F}(\nu)(F(x))^{-1}\widetilde{F}(\nu)
\end{aligned}$$

Se chiamo $F(x) =: F$ e osservo per la proprietà 1.2 che
$\mathrm{Tr}(F^{-1})(\widetilde{F}(\nu)F^{-1}\widetilde{F}(\nu)) = \mathrm{Tr}\widetilde{F}(\nu)F^{-1}\widetilde{F}(\nu)F^{-1}$
giungo al seguente risultato:

$$\begin{aligned}
&\delta x^N =\\
&= \mathrm{argmin}_{\nu\in\mathbb{R}^m}\Big[-\mathrm{Tr}F^{-1}(\sum_{i=1}^m \nu_i F_i)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sum_{i=1}^m \nu_i F_i)F^{-1}(\sum_{j=1}^m \nu_j F_j)F^{-1}\Big]\\
&= \text{(ancora usando (1.2) e per la linearità della traccia)}\\
&= \mathrm{argmin}_{\nu\in\mathbb{R}^m}\Big[-\sum_{i=1}^m \nu_i \mathrm{Tr}F^{-\frac{1}{2}}F_iF^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \nu_i\nu j\mathrm{Tr}(F^{-\frac{1}{2}}F_iF^{-\frac{1}{2}}F^{-\frac{1}{2}}F_jF^{-\frac{1}{2}})\Big]\\
&= \mathrm{argmin}_{\nu\in\mathbb{R}^m}\|-I+\sum_{i=1}^m \nu_i F^{-\frac{1}{2}}F_iF^{-\frac{1}{2}}\|_F^2
\end{aligned}$$

dove $\| \ \|_F$ denota la norma di Frobenius.
L'ultima uguaglianza è valida in quanto:

$$\begin{aligned}
&\|-I+\sum_{i=1}^m \nu_i F^{-\frac{1}{2}}F_iF^{-\frac{1}{2}}\|_F^2 =\\
&= \Big(\mathrm{Tr}(-I+\sum_{i=1}^m \nu_i F^{-\frac{1}{2}}F_iF^{-\frac{1}{2}})^t(-I+\sum_{j=1}^m \nu_j F^{-\frac{1}{2}}F_jF^{-\frac{1}{2}})\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \Big(\mathrm{Tr}(-I+\sum_{i=1}^m \nu_i F^{-\frac{1}{2}}F_iF^{-\frac{1}{2}})(-I+\sum_{j=1}^m \nu_j F^{-\frac{1}{2}}F_jF^{-\frac{1}{2}})\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \Big(\mathrm{Tr}(-I-\sum_{i=1}^m \nu_i F^{-\frac{1}{2}}F_iF^{-\frac{1}{2}}-\sum_{j=1}^m \nu_j F^{-\frac{1}{2}}F_jF^{-\frac{1}{2}})+\\
&\quad(\sum_{i=1}^m \nu_i F^{-\frac{1}{2}}F_iF^{-\frac{1}{2}})(\sum_{j=1}^m \nu_j F^{-\frac{1}{2}}F_jF^{-\frac{1}{2}}))\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \Big(\mathrm{Tr}(-I-2\sum_{i=1}^m \nu_i F^{-\frac{1}{2}}F_iF^{-\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m \nu_i\nu_j F^{-\frac{1}{2}}F_iF^{-\frac{1}{2}}F^{-\frac{1}{2}}F_jF^{-\frac{1}{2}})\Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \Big(-n - 2\sum_{i=1}^{m} \nu_i \mathrm{Tr}(F^{-\frac{1}{2}} F_i F^{-\frac{1}{2}}) + \sum_{i,j=1}^{m} \nu_i \nu_j \mathrm{Tr}(F^{-\frac{1}{2}} F_i F^{-\frac{1}{2}} F^{-\frac{1}{2}} F_j F^{-\frac{1}{2}}) \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Così la direzione di Newton si ottiene risolvendo il seguente problema quadratico:

$$\delta x^N = \mathrm{argmin}_{\nu \in \mathbb{R}^m} \| -I + \sum_{i=1}^{m} \nu_i F^{-\frac{1}{2}} F_i F^{-\frac{1}{2}} \|_F^2 \tag{2.15}$$

Metodo di Newton per calcolare il centro analitico
DATO x strettamente ammissibile
RIPETI

1. Calcola la direzione di Newton δx^N risolvendo (2.15)

2. Trova $\hat{p} := \mathrm{argmin}[\phi(x + p\delta x^N)]$

3. Aggiorna $x := x + \hat{p}\delta x^N$

2.7 Il cammino centrale: parametrizzazione della funzione obiettivo

Considero ora la seguente situazione:

$$\begin{aligned} F(x) > 0 \\ c^t x = \gamma \end{aligned} \tag{2.16}$$

dove $p^* := \inf\{c^t x \mid F(x) \geq 0\} < \gamma < \bar{p} := \sup\{c^t x \mid F(x) > 0\}$.

Proposizione 4 *L'insieme delle soluzioni del precedente problema è limitato e non vuoto per l'assunzione di stretta ammissibilità primale e duale.*

Dimostrazione

Devo provare che l'insieme $\widetilde{X} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) > 0 \;\; c^t x = \gamma\}$ è limitato e non vuoto.

1. $\widetilde{X}$ è non vuoto

   Per ipotesi si ha stretta ammissibilità primale e duale:

$$\exists x^0 \;:\; F(x^0) > 0$$

$$\exists Z^0 \;:\; \mathrm{Tr} F_i Z^0 = c_i \;\forall i = 1, \ldots, m \;\; Z^0 = (Z^0)^t > 0$$

   Come γ esibisco il valore di $c^t x^0$ cioè $c^t x^0 = \gamma$.

   Concludo pertanto $x \in \widetilde{X} \neq \emptyset$.

2. $\widetilde{X}$ è limitato

   Per la dimostrazione di questo punto mi riconduco prima al caso lineare e poi la riformulo per SDP.

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s.t} & Ax \geq b \end{array}$$

$$(D) \qquad \begin{array}{ll} \max & b^t y \\ \text{s.t} & A^t y = c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

   L'ipotesi di stretta ammissibilità primale - duale si traduce nelle seguenti:

$$\exists x^0 \;:\; Ax^0 > b$$

$$\exists y^0 \;:\; A^t y^0 = c \;\; y^0 > 0$$

L'insieme $\{x \mid Ax > b\} \cap \{x \mid c^t x = \gamma\}$ è (A) non vuoto e (B) illimitato, cioè
(A)$\exists \bar{x} \; : \; A\bar{x} > b \; , \; c^t\bar{x} = \gamma$
(B)$\exists d \; : \; A(\bar{x} + \lambda d) > 0 \; , \; c^t(\bar{x} + \lambda d) = \gamma$

$$\Updownarrow$$

$\exists d \; : \; Ad \geq 0 \; , \; c^t d = 0$
Osservo che $d^t(A^t y) = d^t(c) = 0$ per il primo vincolo del problema duale, cioè $(Ad)^t y = 0 \; \forall y \geq 0$ e quindi in particolare $(Ad)^t y^0 = 0 \; \Rightarrow \; Ad = 0$
Ma $Ad = a^1 d_1 + \ldots + a^n d_n$ dove a_i rappresenta l'i-esima colonna della matrice A.
Da $Ad = a^1 d_1 + \ldots + a^n d_n = 0$ segue che
$a^n = -\frac{d_1}{d_n} a^1 - \frac{d_2}{d_n} a^2 - \ldots - \frac{d_{n-1}}{d_n} a^{n-1}$
Si ha poi che:
$Ax \geq b \iff a^1 x_1 + \ldots + a^n x_n \geq b$
Sostituendo la formula trovata per a^n nella precedente ottengo:
$a^1 x_1 + \ldots + a^{n-1} x_{n-1} + (-\frac{d_1}{d_n} a^1 - \frac{d_2}{d_n} a^2 - \ldots - \frac{d_{n-1}}{d_n} a^{n-1}) \geq b$
Ho così eliminato una variabile; ridefinisco ora le n-1 variabili rimanenti:

$$\begin{cases} x'_{n-1} = x_{n-1} - \frac{d_{n-1}}{d_n} \\ \vdots \\ x'_1 = x_1 - \frac{d_1}{d_n} \end{cases}$$

Ma da $c^t d = c_1 d_1 + \ldots + c_n d_n = 0$ segue anche $c_n = -\frac{d_1}{d_n} c_1 - \ldots - \frac{d_{n-1}}{d_n} c_{n-1}$, allora usando lo stesso ragionamento la funzione obiettivo del primale diventa:

$$\begin{aligned} c^t x &= c_1 x_1 + \ldots + c_{n-1} x_{n-1} + c_n x_n \\ &= c_1 x'_1 + \ldots + c_{n-1} x'_{n-1} \end{aligned}$$

Il problema primale é stato cioè ridotto ad un problema più semplice perchè ha perso una variabile:

$$\begin{array}{ll} \min & c_1 x_1^{'} + \ldots + c_{n-1} x_{n-1}^{'} \\ \text{s.t.} & a^1 x_1^{'} + \ldots + a^{n-1} x_{n-1}^{'} \geq 0 \end{array}$$

Itero così il procedimento fino a che non trovo che il primale risulta limitato oppure pervengo al risultato banale:

$$\begin{array}{ll} \min & c_1^* x_1 \\ \text{s.t.} & a_1^* x_1 \geq 0 \end{array}$$

Estendo adesso la dimostrazione al caso semidefinito.
Le ipotesi di stretta ammissibilità primale e duale si traducono in :

- $\exists x^0 \ : \ F(x^0) > 0$ e $c^t x^0 = \gamma$
- $\exists Z^0 = (Z^0)^t \ : \ \mathrm{Tr} F_i Z^0 = c_i \ i = 1, \ldots, m$

$\widetilde{X}$ è illimitato se
$\exists d \ : \ F(x^0 + \lambda d) > 0$ e $c^t(x^0 + \lambda d) = \gamma$ con $\lambda > 0$ e $\forall d \geq 0$

$$\Updownarrow$$

$(F_0 + F_1 x_1^0 + \ldots + F_m x_m^0) + (\lambda F_1 d_1 + \ldots + \lambda F_m d_m) > 0$ e $c^t d = 0 \ \forall d \geq 0$
cioè $\sum_{i=1}^m d_i F_i \geq 0$
ma da $\mathrm{Tr} F_i Z^0 = c_i \ \Leftrightarrow \ d_i \mathrm{Tr}(F_i Z^0) = d_i c_i \ \Leftrightarrow \ \sum_i d_i \mathrm{Tr}(F_i Z^0) = \sum_i d_i c_i$
$\Leftrightarrow \ \mathrm{Tr}(\sum_i d_i F_i) Z^0 = 0$
ma usando la Proposizione 2 $\Rightarrow (\sum_{i=1}^m d_i F_i) Z^0 = 0$
E da $Z^0 > 0 \ \Rightarrow \ \det(Z^0) > 0 \ \Rightarrow \ \exists (Z^0)^{-1} \ \Rightarrow \ F(d) := \sum_{i=1}^m d_i F_i = 0$
Ottengo quindi lo stesso risultato osservato in LP. $\square$

Quindi esiste il centro analitico di (2.16) definito da:

$$\begin{array}{rcc} x^*(\gamma) := & \operatorname{argmin} & \log\det(F(x))^{-1} \\ & \text{s.t.} & F(x) > 0 \\ & & c^t x = \gamma \end{array} \tag{2.17}$$

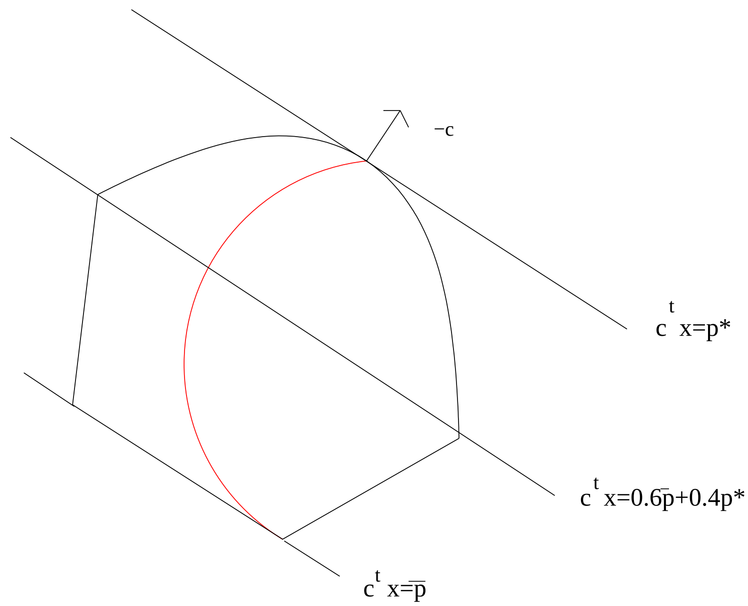

Figura 3

per $p^* < \gamma < \bar{p}$.
La curva descritta da $x^*(\gamma)$ al variare di γ è chiamata il *cammino centrale* per il programma semidefinito primale (1).

Osservazione 5 *Il cammino centrale passa per il centro analitico del vincolo $F(x) \geq 0$: quando γ si avvicina a p^*, $x^*(\gamma)$ converge a un punto ottimo, quando γ si avvicina a $\bar{p}$, esso converge ad un massimizzatore di $c^t x$ soggetto al vincolo $F(x) \geq 0$, come suggerisce la figura 3.*

La quinta condizione di ottimalità KKT per il precedente problema è:

$$\nabla_x \log \det(F(x))^{-1} - \lambda^t c + \nabla_x F(x)\mu = 0$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^m,\ \mu \in \mathbb{R}^n$ sono i vettori dei moltiplicatori di Lagrange.
Osservo subito dalle condizioni (c) e (d) delle KKT che
$\mu_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$ in quanto $F(x) > 0$
L'ultima condizione diventa pertanto:

$$\mathrm{Tr}(F(x))^{-1}F_i - \lambda_i c_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$

Per la necessità delle condizioni KKT, $x^*(\gamma)$ essendo soluzione ottima di (2.17) è soluzione delle KKT stesse:

$$\mathrm{Tr}(F(x^*(\gamma))^{-1}F_i = \lambda_i c_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Tr}\frac{(F(x^*(\gamma))^{-1}}{\lambda}F_i = c_i$$

dove adesso $\lambda > 0$ indica uno tra gli m moltiplicatori di Lagrange.
Quindi se $\lambda > 0$, $\frac{(F(x^*(\gamma))^{-1}}{\lambda}$ è ammissibile duale.
Il duality gap associato alla coppia primale - duale ammissibile

$$\begin{cases} x = x^*(\gamma) \\ Z = \frac{(F(x^*(\gamma))^{-1}}{\lambda} \end{cases}$$

risulta pertanto:
$\eta := \mathrm{Tr}F(x)Z = \mathrm{Tr}F(x^*(\gamma))\frac{(F(x^*(\gamma))^{-1}}{\lambda} = \mathrm{Tr}\frac{I_n}{\lambda} = \frac{n}{\lambda}$
Ma la matrice $\frac{(F(x^*(\gamma))^{-1}}{\lambda}$ non solo è ammissibile duale ma è anche nel cammino centrale del programma semidefinito duale, risolve cioè il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \qquad & \log\det Z^{-1} \\ \text{s.t.} \qquad & \mathrm{Tr}F_i Z = c_i \\ & Z > 0 \\ & -\mathrm{Tr}F_0 Z = \gamma - \tfrac{n}{\lambda} \end{aligned}$$

L'ultimo vincolo segue da:
$c^t x + \mathrm{Tr}F_0 Z = \frac{n}{\lambda}$, $c^t x = \gamma \Rightarrow \ \gamma + \mathrm{Tr}F_0 Z = \frac{n}{\lambda} \ \Rightarrow \ -\mathrm{Tr}F_0 Z = \gamma - \frac{n}{\lambda}$.
Quasi tutti i metodi di punto interno convergono al punto ottimo seguendo il cammino centrale e deviando da quest'ultimo fino ad un certo limite.
Si definisce quindi la deviazione dal cammino centrale come la funzione

$$\psi(x) := \log\det(F(x))^{-1} - \log\det(F(x^*(c^t x)))^{-1}$$

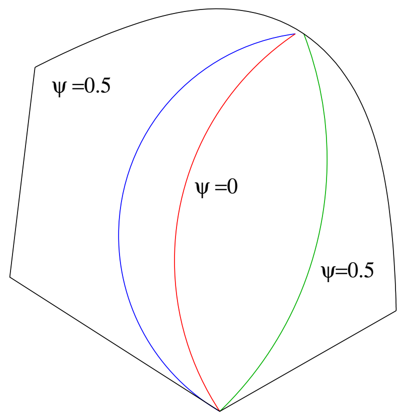

Figura 4

per ogni x strettamente ammissibile.
Si capisce che $\psi(x) = 0$ denota il cammino centrale come illustrato in figura 4, sempre riferendosi al programma semidefinito (2.1).

2.8 Il cammino centrale: parametrizzazione del duality gap

Nel paragrafo precedente abbiamo parametrizzato il cammino centrale utilizzando il parametro valore obiettivo γ. Abbiamo poi osservato che anche il cammino centrale duale viene indirettamente parametrizzato da γ con $\frac{(F(x^*(\gamma))^{-1}}{\lambda}$. Questo rivela che il duality gap possa parametrizzare entrambi i cammini centrali primale e duale.
In particolare questo procedimento è utile nei metodi primale - duale nei quali cioè si minimizza il duality gap su tutti i punti x e Z ammissibili:

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x + \mathrm{Tr} F_0 Z \\ \text{s.t.} & F(x) \geq 0 \\ & Z \geq 0 \\ & \mathrm{Tr} F_i Z = c_i \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

La parametrizzazione primale - duale del cammino centrale $(x^*(\eta), Z^*(\eta))$ risulta così definita:

$$
\begin{array}{rlll}
(x^*(\eta), Z^*(\eta)) := & \text{argmin} & -\log\det F(x) - \log\det Z & \\
& \text{s.t.} & F(x) > 0 & \\
& & Z > 0 & \\
& & \mathrm{Tr} F_i Z = c_i & i = 1, \ldots, m \\
& & c^t x + \mathrm{Tr} F_0 Z = \eta &
\end{array}
$$

per $\eta \geq 0$.
Così fra tutte le coppie (x,Z) con duality gap η, la coppia $(x^*(\eta), Z^*(\eta))$ minimizza la funzione barriera primale - duale $\log\det(F(x))^{-1} + \log\det(Z)^{-1}$.
La coppia $(x^*(\eta), Z^*(\eta))$ è caratterizzata da:

$$
\begin{cases}
F(x^*(\eta)) \geq 0 & \\
Z^*(\eta) \geq 0 & \\
\mathrm{Tr} F_i Z^*(\eta) = c_i & i = 1, \ldots, m \\
Z^*(\eta) F(x^*(\eta)) = (\frac{\eta}{n}) I &
\end{cases}
\tag{2.18}
$$

L'ultima condizione segue da:
$\eta = c^t x^*(\eta) + \mathrm{Tr} F_0 Z^*(\eta) = \mathrm{Tr} F(x^*(\eta)) Z^*(\eta)$
$\Rightarrow Z^*(\eta) F(x^*(\eta)) = \eta \frac{I}{n}$ dove ho usato la proprietà (1.2).
Confrontando le condizioni (2.18) con le condizioni di ottimalità per (P)-(D) semidefiniti:

$$
\begin{cases}
F(x) \geq 0 & \\
Z \geq 0 & \\
\mathrm{Tr} F_i Z = c_i & i = 1, \ldots, m \\
Z F(x) = 0 &
\end{cases}
$$

possiamo interpretare il cammino centrale come un'omotopia, con parametro di omotopia il duality gap η, che perturba la condizione $ZF(x) = 0$ a quella $ZF(x) = (\frac{\eta}{n}) I$.
Osservo poi che, come in LP, la coppia $(x^*(\eta), Z^*(\eta))$ converge alla coppia ottima (P)-(D) quando $\eta \to 0$.

Osservazione 6 *Siano (x,Z) una coppia ammissibile e* $\eta = c^t x + \mathrm{Tr} F_0 Z = \mathrm{Tr} F(x) Z$ *allora*

$-\log\det F(x^*(\eta))Z^*(\eta) \;=\;$ (*per l'ultima condizione delle (2.18)*) $=$
$-\log\det[(\frac{\eta}{n})I] = -\log(\frac{\eta}{n})^n = -n\log(\frac{\eta}{n}) =$
$n\log n - n\log\eta = n\log n - n\log(\mathrm{Tr}F(x)Z)$.

Anche in questo caso è possibile definire una funzione misura della deviazione di (x,Z) dai rispettivi cammini centrali:

$$\begin{aligned}\psi(x,Z) &:= -\log\det F(x)Z + \log\det F(x^*(\eta))Z^*(\eta)\\ &= -\log\det F(x)Z + n\log(\mathrm{Tr}F(x)Z) - n\log n\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dalla precedente osservazione.

$$\begin{aligned}&\psi(x,Z) > 0 \quad \forall(x,Z) \text{ ammissibili}\\ &\psi(x,Z) = 0 \quad \text{solo se } x,Z \text{ sono centrali}\end{aligned}$$

x,Z sono centrali se $F(x)$ e Z sono l'una l'inversa dell'altra ameno di un fattore moltiplicativo.
Difatti da $F(x^*(\gamma))\frac{(F(x^*(\gamma)))^{-1}}{\lambda} = \frac{I_n}{\lambda}$ segue immediatamente che:

$$\begin{aligned}\psi(x,Z) &= -\log(\frac{1}{\lambda})^n + n\log(\frac{n}{\lambda}) - n\log n = (-\log(\frac{1}{\lambda})^n - \log(n)^n) + \log(\frac{n}{\lambda})^n =\\ &= -(\log(\frac{1}{\lambda})^n + \log(n)^n) + \log(\frac{n}{\lambda})^n = -\log(\frac{1}{\lambda})^n(n)^n + \log(\frac{n}{\lambda})^n =\\ &= 0\end{aligned}$$

Osservo infine che la funzione ψ può essere riscritta nella forma:

$$\psi(x,Z) \;=\; n\log\frac{\frac{(\sum_{i=1}^n \lambda_i)}{n}}{(\prod_{i=1}^n \lambda_i)^{\frac{1}{n}}}$$

dove λ_i per $i = 1,\ldots,n$ rappresentano gli autovalori della matrice $F(x)Z$.
Difatti utilizzando l'espressione di traccia e determinante di una matrice in funzione dei suoi autovalori si ha

$$\psi(x,Z) \;:=\; -\log\det F(x)Z + n\log(\mathrm{Tr}F(x)Z) - n\log n$$

$$\begin{aligned}
&= -\log\prod_{i=1}^{n}\lambda_i + n\log\sum_{i=1}^{n}\lambda_i - n\log n \\
&= n(\log\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + \log(\frac{1}{n})) - \log\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \\
&= n(\log\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{n}\right) - \log\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \;=\; n(\log\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{n}\right) - n\log(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i)^{\frac{1}{n}} \\
&= n\log\frac{\frac{(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)}{n}}{(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i)^{\frac{1}{n}}}
\end{aligned}$$

2.9 Descrizione generale dei metodi di riduzione del potenziale

I metodi di riduzione del potenziale utilizzano la seguente funzione:

$$\begin{aligned}
\pi(x,Z) &:= \nu\sqrt{n}\log(\mathrm{Tr}F(x)Z) + \psi(x,Z) \\
&= (n+\nu\sqrt{n})\log(\mathrm{Tr}F(x)Z) - \log\det F(x) - \log\det Z - n\log n
\end{aligned}$$

chiamata *funzione potenziale*.
Tale funzione associa il duality gap della coppia (x,Z), $\eta := \mathrm{Tr}F(x)Z$, alla deviazione della stessa dalla centralità.
ν è invece una costante ≥ 1.
Da $\psi(x,Z) > 0$ per ogni coppia ammissibile primale e duale (x,Z) e dalla definizione di π segue che:
$\pi(x,Z) \geq \nu\sqrt{n}\log(\mathrm{Tr}F(x)Z) \;\Leftrightarrow \frac{\pi(x,Z)}{\nu\sqrt{n}} \geq \log(\mathrm{Tr}F(x)Z)$
$\Leftrightarrow \exp\{\frac{\pi(x,Z)}{\nu\sqrt{n}}\} \geq \mathrm{Tr}F(x)Z = \eta$
Quindi

$$\eta \leq \exp\{\frac{\pi(x,Z)}{\nu\sqrt{n}}\}$$

cioè la funzione potenziale è un bound del duality gap η: se π è piccola allora

anche il duality gap η sarà piccolo e viceversa ad una funzione potenziale elevata corrisponde un elevato valore di η.
I metodi di riduzione del potenziale forniscono quindi un'informazione sul comportamento del duality gap associato alla coppia di soluzioni (x, Z) utilizzando la funzione ausiliaria π.
Essi cominciano da una coppia (x^0, Z^0) strettamente ammissibile e riducono la funzione potenziale di una quantità costante δ cosicchè ad ogni iterazione il comportamento della funzione π sia il seguente:

$$\pi(x^{(n+1)}, Z^{(n+1)}) \leq \pi(x^n, Z^n) - \delta \tag{2.19}$$

Di conseguenza le iterate rimangono ammissibili per i due problemi e convergono all'ottimo.
Per definizione δZ è una direzione ammissibile duale se $\delta Z = \delta Z^t$, $\mathrm{Tr} F_i Z = 0$ per $i = 1, \ldots, m$.
Quindi $Z + q\delta Z$ soddisfa i vincoli del problema duale (2.2) per ogni scelta di $q \in \mathbb{R}$.
In modo analogo δx è una direzione ammissibile primale se $F(\delta x) = 0$, cosicchè $x := x + p\delta x$ soddisfi i vincoli del problema primale (2.1) per ogni scelta di $p \in \mathbb{R}$.
Un algoritmo generale di riduzione del potenziale è il seguente:

DATI (x, Z) strettamente ammissibili
RIPETI

1. Trova una direzione ammissibile primale δx ed una direzione ammissibile duale δZ

2. Trova $p, q \in \mathbb{R}$ tali che esista

$$\min_{p,q} \pi(x + p\delta x, Z + q\delta Z)$$

3. Aggiorna $x := x + p\delta x$ e $Z := Z + q\delta Z$

FINO A CHE $\eta \leq \epsilon$ dove ϵ è una tolleranza predefinita $(0 \leq \epsilon \leq 1)$.

Il secondo step dell'algoritmo prende il nome di *ricerca nel piano* in quanto minimizza la funzione potenziale sull'iperpiano definito dai punti x,Z, di volta in volta aggiornati, e le direzioni δx e δZ.
Differenti sono infine i modi possibili per trovare tali direzioni e ciascun metodo conduce ad un algoritmo diverso.
Il sistema di $m + \frac{n(n+1)}{2}$ equazioni lineari seguente, comunque, le definisce in modo univoco per ogni scelta delle matrici $D = D^t$ e $S = S^t > 0$, le quali però dipendono dall'algoritmo scelto e cambiano ad ogni iterazione dello stesso.

$$\begin{cases} S\delta ZS + \sum_{i=1}^{m} \delta x_i F_i = -D & \\ \mathrm{Tr} F_j \delta Z = 0 & j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Il primo gruppo di $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni è infine giustificato dal seguente fatto:
$(S\delta ZS)^t = S^t(\delta Z)^t S^t = S\delta ZS$
La somma di matrici simmetriche è ancora una matrice simmetrica e dunque anche $S\delta ZS + \sum_{i=1}^{m} \delta x_i F_i$ risulta simmetrica; ed è quindi lecito cercare quel vettore δx e quella matrice simmetrica δZ per cui l'espressione appena citata uguagli la matrice $-D$.
In finale si ha convergenza polinomiale come suggerisce il seguente risultato di cui diamo solo l'enunciato:

Teorema 2 *Supponiamo vera la (2.19) per qualche $\delta > 0$ che non dipenda da n e da $0 \leq \epsilon \leq 1$.*
Allora per

$$k \geq \frac{\nu\sqrt{n}\log(\frac{1}{\epsilon}) + \pi(x^0, Z^0)}{\delta}$$

si ha $\mathrm{Tr}F(x^k)Z^k < \epsilon \mathrm{Tr}F(x^0)Z^0$.

In particolare si ha convergenza in $O(\sqrt{n})$ passi e pertanto l'algoritmo enunciato risulta efficiente.

Bibliografia

[1] S.Boyd, L.Vandenberghe: *Convex Optimization* Cap.1-2-appendix (2002)

[2] R.A.Horn, C.H.Johnson: *Matrix Analysis* (1985)

[3] S.Boyd, L.Vandenberghe: *Semidefinite programming* SIAM Review vol.38 no.1 pag.49-95 (1996)

[4] D.Goldfarb, K.Scheinberg: *On parametric semidefinite programming* Applied Numerical Mathematics 29 pag.361-377 (1999)

[5] R.J.Vanderbei, H.Y.Benson: *On formulating semidefinite programming problems as smooth convex nonlinear optimization problems* ORFE-99-01 pag.1-6

[6] Y.Nesterov, A.Nemirovskii Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming SIAM Studies in Applied Mathematics vol.13 1994