# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

**Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"**

**Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"**

**Corso di Laurea in Fisica**


**Tesi di Laurea**

## Integrabilità alla Euler-Jacobi in Meccanica Classica


**Relatore**

**Prof. Francesco Fassò**

**Laureando**

**Michele Savini**



**Anno Accademico 2021/2022**

# Indice

# Introduzione

Il presente lavoro di tesi vuole analizzare diverse nozioni di integrabilità di un sistema dinamico in meccanica classica.
Viene innanzitutto presentato il celebre teorema di Liouville-Arnold, che ha validità nell'ambito dei sistemi hamiltoniani, e si descrive brevemente il concetto di variabili azione-angolo. Si prosegue citando un risultato formulato da Oleg I. Bogoyavlenskij verso il 1995, che generalizza il teorema di Liouville-Arnold all'esterno del mondo hamiltoniano ed esplicita la relazione tra integrali primi, simmetrie dinamiche e integrabilità di un sistema dinamico.
Si riporta poi l'enunciato del teorema di Euler-Jacobi, il quale ha trovato fino ad oggi relativamente poche applicazioni, perlopiù limitate al mondo dei sistemi anolonomi. Di tale teorema si presenta anche un'analisi critica di una dimostrazione parziale a opera di A. V. Bolsinov, A. V. Borisov e I. S. Mamaev, che viene analizzata punto per punto e, dove possibile, ampliata.
L'ultimo capitolo è infine dedicato ad un'applicazione del teorema di Euler-Jacobi al sistema anolonomo conosciuto come trottola della Veselova.

# Capitolo 1

# I teoremi di Liouville-Arnold e di Bogoyavlenskij

## 1.1 Integrabilità di sistemi hamiltoniani

In questa prima sezione viene presentato un risultato noto ad oggi come teorema di Liouville-Arnold. Esso fornisce delle informazioni sulla dinamica dei sistemi hamiltoniani completamente integrabili. La possibilità di estendere questo teorema a sistemi non hamiltoniani verrà tratta nella prossima sezione.

Per cominciare si forniscono alcune definizioni utili a comprendere i concetti che verranno esposti in seguito (vedere [2] e [5] per approfondimenti sulla struttura simplettica dello spazio delle fasi di un sistema dinamico hamiltoniano).

**Definizione 1.** Data una varietà differenziabile M di dimensione pari $2n$, una *forma simplettica* su M è una 2-forma $\sigma$ non-degenere e chiusa in ogni punto di M. La varietà M equipaggiata con una forma simplettica $\sigma$ viene detta *varietà simplettica* e si denota con $(M, \sigma)$.
Delle coordinate locali $(q, p) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ definite su un aperto $U \subset M$ sono dette *coordinate simplettiche o canoniche* se in $U$ la forma simplettica $\sigma$ è scritta come

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp^i$$

**Definizione 2.** Date una varietà simplettica $(M, \sigma)$ e una funzione $f \in C^\infty(M)$, si definisce il *campo vettoriale hamiltoniano di $f$* come il campo $X_f$ che soddisfa

$$\sigma(X_f, \cdot) = df(\cdot)$$

Una varietà simplettica $(M, \sigma)$ con una funzione $H \in C^\infty(M)$ è detta *sistema hamiltoniano.*

**Definizione 3.** Date una varietà simplettica $(M, \sigma)$ e due funzioni $f, g : M \to \mathbb{R}$ si definisce la loro *parentesi di Poisson* come

$$\{f, g\} := \sigma(X_f, X_g)$$

Le due funzioni $f$ e $g$ si dicono *in involuzione* se la loro parentesi di Poisson è nulla.

**Teorema 1** *(di Liouville-Arnold, [2]). Si supponga di avere una sommersione $f : (f_1, \ldots, f_n)$ su una varietà simplettica $2n$-dimensionale $M$, le cui componenti sono in involuzione a coppie:*

$$\{f_i, f_j\} = 0 \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

*Allora:*

1. *Ogni insieme di livello di $f$ è una sottovarietà di $M$ liscia e invariante per il flusso del campo vettoriale di hamiltoniana $H = f_1$ (quindi $f_1, \ldots, f_n$ sono $n$ integrali primi indipendenti del sistema).*
2. *Se un insieme di livello di $f$ è compatto e connesso, allora è diffeomorfo al toro $n$-dimensionale*

$$T^n = \{\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \ mod\ 1\}$$

3. *Si consideri un tale insieme di livello di $f$. Allora esistono un suo intorno $U$ e un diffeomorfismo*

$$\mathcal{C} : U \to B^n \times T^n, \qquad \mathcal{C}(q,p) = (f(q,p), \phi(q,p))$$

*(dove $B^n$ è la palla aperta $n$-dimensionale in $R^n$) tali che il flusso di $X_H$ su $U$ sia coniugato al flusso lineare*

$$\dot{f} = 0, \qquad \dot{\phi} = \omega(f)$$

*su $B^n \times T^n$.*

4. *Le equazioni canoniche del sistema di hamiltoniana $H$ possono essere integrate per quadrature.*

Un sistema hamiltoniano che soddisfa le ipotesi del teorema di Liouville-Arnold ($n$ integrali primi funzionalmente indipendenti in involuzione) è detto *completamente integrabile (secondo Liouville).*

Si noti che per un tale sistema le soluzioni delle equazioni del moto in coordinate $(f, \phi) \in U$ sono

$$f(t) = f(0), \qquad \phi(t) = \phi(0) + \omega(f(0))t$$

In generale, le variabili $(f, \phi)$ non sono coordinate simplettiche, quindi non vale $\omega = \frac{\partial H}{\partial f}$. Tuttavia si dimostra che è sempre possibile trovare delle funzioni $I = I(f),\ I = (I_1, \ldots, I_n)$ tali che $(I, \phi)$ siano simplettiche e che $H = H(I)$. Le $(I, \phi)$ sono chiamate *variabili azione-angolo.* Una volta ricavate tali coordinate, le equazioni del moto in $U$ sono semplicemente

$$\dot{I} = 0 \qquad \dot{\phi} = \omega(I), \qquad \text{con} \qquad \omega(I) = \frac{\partial H}{\partial I}$$

Le variabili azione si definiscono in $U \ni (q,p)$ come

$$I_i(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} p\ dq, \qquad i = 1, \ldots, n$$

dove $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ è una base per i cicli unidimensionali sul toro identificato da $f$ (cioè le $\gamma_i$ sono curve chiuse sul toro, non contraibili ad un punto né deformabili l'una nell'altra con continuità). Si supponga poi che, fissati i valori degli $n$ integrali primi $f_i$, le $n$ quantità $I_i$ siano indipendenti, cioè $det(\frac{\partial I}{\partial f})|_f \neq 0$. Allora le $(I, \phi)$ così definite possono essere prese come coordinate in $U$ e inoltre sono simplettiche. Si noti anche che le $I_i$ hanno le dimensioni di un'energia per un tempo, ovvero di un'azione, da cui il nome.

Ricapitolando, l'importanza del teorema di Liouville-Arnold consiste nell'affermare che, per un sistema completamente integrabile, lo spazio delle fasi è foliato in tori invarianti, sui quali il flusso è lineare (si dice anche che la dinamica è quasi-periodica). Inoltre, esso conclude che il problema iniziale di risoluzione delle $2n$ equazioni di Hamilton può essere ridotto, in un intorno di ciascuno di questi tori, alla sola integrazione di funzioni note per ottenere le variabili azione $I_i$, e quindi risolto per quadrature (questo in linea di principio, spesso il sistema in realtà rimane di difficile risoluzione).

## 1.2 Integrali primi e simmetrie dinamiche

Si riporta ora l'enunciato di un teorema che generalizza quello della sezione precedente, ma che non ha comunque trovato molte applicazioni al di fuori dell'ambito dei sistemi hamiltoniani. D'altra parte, è interessante studiare come esso chiarisca il ruolo non solo degli integrali primi, ma anche delle simmetrie dinamiche nel concorrere all'integrabilità di un sistema dinamico, intesa qui come quasi-periodicità del moto.

Da un punto di vista fisico-matematico, data l'equazione differenziale $\dot{x} = X(x)$, un integrale primo $f$ rappresenta una quantità conservata durante il moto, mentre una simmetria dinamica $Y$ è un campo vettoriale il cui flusso lascia invariante il campo $X$. Si mostra facilmente che tali condizioni sono equivalenti rispettivamente a:

$$\mathcal{L}_X f = 0 \qquad \text{e} \qquad [X, Y] = 0,$$

dove $\mathcal{L}_X T$ indica la derivata di Lie di un generico campo tensoriale $T$ lungo $X$ e $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$ è il commutatore di due campi vettoriali $X$ e $Y$.
Separatamente, ciascuno di questi oggetti permette di ridurre la dimensione dello spazio delle fasi del sistema da $n$ a $n-1$, sebbene ciò accada tramite meccanismi fondamentalmente diversi: foliazione in sottovarietà invarianti di dimensione $n-1$ per un integrale primo, passaggio ad uno spazio quoziente di dimensione $n-1$ per una simmetria dinamica (dettagli in [3]).

**Teorema 2** *(di O. I. Bogoyavlenskij, [3]). Sia $X$ un campo vettoriale su una varietà $M$ di dimensione $d$. Si supponga che esistano un aperto $M_\star \subseteq M$ invariante sotto il flusso di $X$ e, per qualche* $0 < k < d$*,*

- *Una sommersione $f = (f_1, \ldots, f_{d-k}) : M_\star \to \mathbb{R}$ con insiemi di livello compatti e connessi, le cui componenti siano integrali primi di $X$:*

$$\mathcal{L}_X f_i = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, d-k,$$

- *$k$ simmetrie dinamiche $Y_1, \ldots, Y_k$ di $X$:*

$$[X, Y_i] = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, k,$$

*le quali siano linearmente indipendenti in ogni punto di $M_\star$, commutino a due a due:*

$$[Y_i, Y_j] = 0 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, k,$$

*e 'preservino gli integrali primi' $f_1, \ldots, f_{n-k}$, nel senso che*

$$\mathcal{L}_{Y_i} f_j = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, k, \ \forall j = 1, \ldots, d-k.$$

*Allora:*

1. *Ogni insieme di livello di $f = (f_1, \ldots, f_{d-k})$ in $M_\star$ è diffeomorfo a $T^k$.*
2. *Per ciascun insieme di livello di $f$ in $M_\star$ esistono un intorno $U$ e un diffeomorfismo $\mathcal{C} : U \to B^{d-k} \times T^k$ tali che il flusso di $X$ su $U$ è coniugato ad un flusso lineare su $B^{d-k} \times T^k \ni (f, \phi)$ cioè,*

$$\dot{f} = 0, \qquad \dot{\phi} = \omega(f)$$

*con $k$ funzioni differenziabili $\omega_i : f(U) \to \mathbb{R}$.*

**Osservazione 1.** Questo teorema non richiede che il sistema descritto dall'equazione $\dot{x} = X(x)$ sia hamiltoniano: la varietà $M$ non deve essere necessariamente simplettica e il campo vettoriale $X$ non è necessariamente associato ad una funzione hamiltoniana.

E' interessante ora limitarsi nuovamente al caso hamiltoniano, per esaminare meglio la relazione tra il Teorema 1 e il Teorema 2.
Si scelga quindi una varietà simplettica $(M, \sigma)$, con $dim(M) = 2n$, e una funzione hamiltoniana $H \in C^\infty(M)$, con campo vettoriale hamiltoniano $X_H$.
Si ricava facilmente che la condizione che $f$ sia integrale primo per $X_H$ è equivalente a $\{f, H\} = 0$. Infatti

$$\mathcal{L}_{X_H} f = df(X_H) = \sigma(X_f, X_H) = \{f, H\}$$

Ricordando poi che le parentesi di Poisson soddisfano l'identità di Jacobi ($\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} = 0 \ \forall f_1, f_2, f_3$) e usando le proprietà della derivata di Lie si dimostra la seguente

**Proposizione 1.** *Date due funzioni $f_1$ e $f_2$,*

$$[X_{f_1}, X_{f_2}] = -X_{\{f_1, f_2\}}$$

**Dimostrazione.** Per una generica funzione $f_3$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[X_{f_1}, X_{f_2}]} f_3 &= \mathcal{L}_{X_{f_1}} \mathcal{L}_{X_{f_2}} f_3 - \mathcal{L}_{X_{f_2}} \mathcal{L}_{X_{f_1}} f_3 \\
&= -\mathcal{L}_{X_{f_1}} \{f_2, f_3\} + \mathcal{L}_{X_{f_2}} \{f_1, f_3\} \\
&= \{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} \\
&= -\{f_3, \{f_1, f_2\}\} \\
&= -\mathcal{L}_{X_{\{f_1, f_2\}}} f_3
\end{aligned}$$

□

Ma allora segue subito il seguente fondamentale fatto.

**Proposizione 2.** *Se $f$ è un integrale primo di un sistema hamiltoniano allora $X_f$ è una simmetria dinamica del sistema.*
**Dimostrazione.** Se $f$ è un integrale primo allora $\{f, H\} = 0$, quindi $[X_f, X_H] = -X_{\{f,H\}} = 0$ □

Si comprende allora come, nelle ipotesi del Teorema 1, $n$ integrali primi indipendenti in involuzione forniscano anche $n$ simmetrie dinamiche con le proprietà necessarie a garantire l'integrabilità per il Teorema 2.

Si nota infine che vi è una corrispondenza biunivoca tra funzioni che sono integrali primi (modulo costanti) e simmetrie dinamiche che sono campi vettoriali hamiltoniani. Infatti, un integrale primo determina una simmetria dinamica (Proposizione 2), mentre un campo vettoriale hamiltoniano determina un integrale primo (la sua funzione hamiltoniana) a meno di costanti. Quest'ultima affermazione è una generalizzazione del teorema di Noether, che vale in generale per equazioni differenziali che hanno un'origine variazionale.

# Capitolo 2

# Il teorema di Euler-Jacobi

Il teorema presentato di seguito trova applicazione nelle situazioni in cui si intende studiare l'integrabilità di sistemi dinamici che ammettono una misura invariante ma non una struttura simplettica, in particolare sistemi soggetti a vincoli anolonomi. Questi saranno definiti brevemente nel capitolo 3, dedicato al sistema della trottola della Veselova.
Per il teorema si fornisce una versione commentata e ampliata, ma ancora parziale, della dimostrazione in [1], che ad oggi sembra essere la più completa tra quelle note. Le modifiche, aggiunte ed osservazioni più rilevanti verranno scritte in corsivo e indicate come "*Nota 1, Nota 2,...*".

**Teorema 3** *(di Euler-Jacobi, [1]). Siano $M$ una varietà differenziabile n-dimensionale e $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vettoriale di classe $C^\infty$ su $M$. Si supponga che esistano n-2 integrali primi funzionalmente indipendenti $f_1, \dots, f_{n-2}$ per $X$ e che esista una misura regolare $\mu$ invariante sotto il flusso di $X$. Si consideri una superficie di livello regolare*

$$Q = \{x \in M : f_1 = c_1, \dots, f_{n-2} = c_{n-2}\}$$

*Si supponga che $Q$ sia compatta e che $X(x) \neq 0 \ \forall x \in Q$.*

*Allora, $Q$ e tutte le superfici di livello di $f = (f_1, \dots, f_{n-2})$ in un intorno di $Q$ sono (diffeomorfe a) tori bidimensionali. Inoltre, in un intorno di $Q$ esistono delle coordinate $(\phi_1, \phi_2, f_1, \dots, f_{n-2})$ tali che $\phi_1$ e $\phi_2$ sono coordinate angolari sui tori e che il sistema dinamico $\dot{x} = X(x)$ può essere scritto nella forma*

$$\dot{f}_i = 0, \qquad \dot{\phi}_j = \frac{\delta_j}{\Phi}, \qquad i = 1, \dots, n-2, \ j = 1, 2$$

*con $\delta_j = \delta_j(f_1, \dots, f_{n-2})$ e $\Phi = \Phi(\phi_1, \phi_2, f_1, \dots, f_{n-2})$ funzione positiva.*

*Se il sistema dinamico di partenza, i suoi integrali primi e la misura invariante sono reali analitici, allora lo sono anche le funzioni $\delta_j$, $\Phi$ e le variabili angolari $\phi_1, \phi_2$.*

**Dimostrazione (parziale).** L'idea della dimostrazione consiste nel costruire una simmetria dinamica per il campo $X$ opportunamente normalizzato, per poi applicare un risultato standard sulla rettificazione di campi vettoriali sul toro.

Si osservi innanzitutto che $Q$ è una varietà differenziabile compatta di dimensione 2. Considerando inoltre le ipotesi di orientabilità di $Q$ e di assenza di punti critici di $X$, questa varietà deve essere necessariamente un toro $T^2$, a meno di diffeomorfismi.[1]

[1] In particolare, questo segue dal fatto che una varietà orientabile compatta bidimensionale è necessariamente diffeomorfa o alla sfera $S^2$ o ad una somma connessa di tori $T^2 \# \dots \# T^2$. Si applica poi un corollario del teorema di Poincarè-Hopf: se una varietà differenziabile compatta ammette un campo vettoriale ovunque non nullo, allora essa deve avere caratteristica di Eulero pari a 0. Notando che tra le possibili varietà riportate sopra l'unica con caratteristica di Eulero 0 è il toro $T^2$ si conclude (vedere [8] per il teorema di Poincarè-Hopf e [9] per informazioni sulla caratteristica di Eulero).

Si noti ora che è possibile restringere la misura $\mu$ su $M$ ad un'altra misura, anch'essa invariante, su $Q$; essa sarà data da una 2-forma $\sigma$ che soddisfa $\sigma \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_{n-2} = \mu$. Chiaramente questa 2-forma è chiusa e non è mai nulla, e in particolare è non-degenere. Allora $\sigma$ può essere vista come una forma simplettica e definisce la varietà simplettica $(Q, \sigma)$.
D'ora in avanti si scriverà direttamente $T^2$ in luogo di $Q$ per evidenziarne la topologia.

Per ipotesi di invarianza della misura, vale $\mathcal{L}_X \sigma = 0$. Applicando ora la formula magica di Cartan ([5]) si ottiene

$$0 = \mathcal{L}_X \sigma = i_X(d\sigma) + d(i_X \sigma) = d(i_X \sigma)$$

Quindi la 1-forma $i_X \sigma$ è chiusa, ovvero il campo X è localmente hamiltoniano. Notiamo che su $T^2$ non vale il lemma di Poincarè, non essendo il toro semplicemente connesso; ciò significa che la chiusura di $i_X \sigma$ non implica la sua esattezza e X potrebbe non essere (globalmente) hamiltoniano.

*Nota 1: nella dimostrazione originale spesso il passaggio da $T^2$ a $\mathbb{R}^2$ (o viceversa) non è chiaro oppure è proprio non esplicitato. Ad esempio, viene definita una "funzione hamiltoniana a valori multipli" sul toro, ma non in modo rigoroso. In questo lavoro si è cercato invece di formalizzare questo aspetto, distinguendo con quanta più chiarezza possibile tra la varietà originale e il suo rivestimento universale.*

Conviene allora spostarsi sul rivestimento universale di $T^2$, dato dalla sommersione suriettiva

$$\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2, \qquad \pi(\tilde{x}) = \tilde{x} \; mod \; 1$$

D'ora in avanti si distingueranno gli oggetti definiti su $\mathbb{R}^2$ da quelli su $T^2$ con il simbolo $\sim$ : ad esempio, le coordinate saranno $\tilde{x} = (\tilde{x_1}, \tilde{x_2}) \in \mathbb{R}^2$ e $x = (x_1, x_2) \in T^2$.

$\pi$ è un diffeomorfismo locale, quindi il sollevamento a $\mathbb{R}^2$ di un campo $X$ è unico:

$$\forall X \in \mathfrak{X}(T^2) \quad \exists! \tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2) \; : \; \pi'(\tilde{x})\tilde{X}(\tilde{x}) = X(\pi(\tilde{x})) \quad \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^2$$

Inoltre, dette $\Phi_t^X$ e $\Phi_t^{\tilde{X}}$ le mappe del flusso a tempo $t$ fissato di $X$ e $\tilde{X}$ rispettivamente, vale la relazione

$$\pi \circ \Phi_t^{\tilde{X}} = \Phi_t^X \circ \pi \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ora su $\mathbb{R}^2$ è possibile applicare il lemma di Poincarè, quindi vale $i_{\tilde{X}} \sigma = d\tilde{H}$ per una certa funzione $\tilde{H}(\tilde{x_1}, \tilde{x_2})$, la quale non avrà punti critici poichè il campo $X$ (e quindi il suo sollevamento) non ne ha e $\sigma$ è non-degenere.

*Nota 2: viene fornita la forma esplicita di questo differenziale (sul toro, anche se rigorosamente la hamiltoniana è ben definita solo su $\mathbb{R}^2$)*

$$dH = c_1 dx_1 + c_2 dx_2 + dq(x_1, x_2)$$

*dove $q$ è una funzione periodica sul toro e le costanti $c_1$ e $c_2$ sono determinate da $c_i = \oint_{\gamma_i} dH$, $i = 1, 2$. Non è chiaro il motivo per cui questa sia l'unica forma ammissibile di $dH$, tuttavia si ipotizza che essa sia necessaria nel seguito, in punti che saranno evidenziati di conseguenza.*

Si scelga ora una qualche metrica Riemanniana $g$ su $\mathbb{R}^2$ e la si utilizzi per definire il seguente campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$

$$\tilde{Y} := \frac{\nabla_g \tilde{H}}{||\nabla_g \tilde{H}||_g^2}$$

dove il il campo gradiente $\nabla_g \tilde{H}$ è definito dalla relazione $g(\nabla_g \tilde{H}, \cdot) = d\tilde{H}(\cdot)$ e la sua norma quadrata come $||\nabla_g \tilde{H}||_g^2 := g(\nabla_g \tilde{H}, \nabla_g \tilde{H})$.
Questo campo $\tilde{Y}$ ha l'importante proprietà che il suo flusso preserva le orbite di $\tilde{X}$. In particolare, $\Phi_t^{\tilde{Y}}$ manda l'orbita di $\tilde{X}$ corrispondente a $\{\tilde{H} = c\}$ esattamente nell'orbita $\{\tilde{H} = c + t\}$. Questo implica poi che le orbite di $X$ sono o tutte chiuse o tutte aperte.

*Nota 3: queste tre affermazioni non vengono giustificate nel lavoro originale. Di seguito si fornisce una dimostrazione che rimane comunque parziale, essendo ancora non del tutto chiaro il motivo per cui gli insiemi di livello di $\tilde{H}$ dovrebbero essere connessi.*

*i. Si vuole mostrare che $\Phi_t^{\tilde{Y}}$ manda orbite di $\tilde{X}$ in orbite di $\tilde{X}$, senza necessariamente preservare la parametrizzazione temporale data da $\Phi_t^{\tilde{X}}$, ovvero che $\tilde{Y}$ è una "Lie (point) symmetry" di $\tilde{X}$. Ciò è equivalente ad affermare che $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = a(\tilde{x})\tilde{X}$ per una qualche funzione $a(\tilde{x})$.*[2]

*Si inizi osservando che*

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{H} = d\tilde{H}(\tilde{X}) = \sigma(\tilde{X}, \tilde{X}) = 0$$

*cioè (ovviamente) $\tilde{H}$ è un integrale primo di $\tilde{X}$.*
*Si ha poi*

$$\mathcal{L}_{\tilde{Y}}\tilde{H} = d\tilde{H}(\tilde{Y}) = g(\nabla_g\tilde{H}, \tilde{Y}) = \frac{1}{||\nabla_g\tilde{H}||_g^2}\, g(\nabla_g\tilde{H}, \nabla_g\tilde{H}) = 1$$

*Inoltre, $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ sono ovunque g-ortogonali:*

$$g(\tilde{Y}, \tilde{X}) = \frac{1}{||\nabla_g\tilde{H}||_g^2}\, g(\nabla_g\tilde{H}, \tilde{X}) = d\tilde{H}(\tilde{X}) = 0$$

*Ma allora essi sono anche ovunque linearmente indipendenti, quindi è possibile scrivere un generico campo vettoriale in $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ come loro combinazione lineare, con coefficienti funzioni. Si può scrivere quindi $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = a(\tilde{x})\tilde{X} + b(\tilde{x})\tilde{Y}$. Ora è sufficiente notare che*

$$\begin{aligned}
g(\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]) &\propto g(\nabla_g\tilde{H}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]) \\
&= d\tilde{H}([\tilde{X}, \tilde{Y}]) \\
&= \mathcal{L}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]}\tilde{H} \\
&= \mathcal{L}_{\tilde{X}}\mathcal{L}_{\tilde{Y}}\tilde{H} - \mathcal{L}_{\tilde{Y}}\mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{H} \\
&= \mathcal{L}_{\tilde{X}}1 = 0
\end{aligned}$$

*Quindi $b(\tilde{x}) = 0$, come volevasi dimostrare.*

*ii. Si vuole mostrare che $\Phi_t^{\tilde{Y}}$ manda l'orbita di $\tilde{X}$ definita da $\tilde{\gamma}_c = \{\tilde{H} = c\}$ esattamente in $\tilde{\gamma}_{c+t} = \{\tilde{H} = c + t\}$.*

*Si noti innanzitutto che $\mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{H} = 0$ implica che le curve di livello di $\tilde{H}$ sono invarianti sotto il flusso di $\tilde{X}$. Inoltre, un noto risultato afferma che su una varietà differenziabile compatta ogni campo vettoriale di classe $C^\infty$ è completo, cioè il suo flusso è definito per tutti i tempi ([5]); allora $X$ è completo, e di conseguenza anche $\tilde{X}$ lo è. Si ha allora che, presa una componente connessa di una curva di livello di $\tilde{H}$, un suo qualunque punto la percorre interamente sotto l'azione di $\Phi_t^{\tilde{X}}$.*[3]
*Bisognerebbe ora dimostrare che gli insiemi di livello di $\tilde{H}$ sono connessi. E' probabile che questo segua dalla forma esplicita di $dH$ discussa nella Nota 2 e/o dal fatto che $\tilde{X}$ non ha punti critici. Ci si limiterà ad assumerlo vero, in modo che le curve di livello di $\tilde{H}$ coincidano proprio con le orbite di $\tilde{X}$, che ha senso quindi indicare come $\tilde{\gamma}_c = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^2 : \tilde{H}(\tilde{x}) = c\}$ al variare di $c$ in $\mathbb{R}$.*
*Per concludere è sufficiente ricordare che $\mathcal{L}_{\tilde{Y}}\tilde{H} = 1$ da cui, detta $t \longmapsto \tilde{y}_t$ una qualunque curva integrale del campo $\tilde{Y}$,*

$$\frac{d}{dt}\tilde{H}(\tilde{y}_t) = 1 \ \forall t$$

*iii. Si vuole mostrare che le orbite di $X$, che si ricorda essere definito su $T^2$, sono o tutte chiuse o tutte aperte.*

*Usando il risultato citato al punto precedente, si ha che se esiste un campo $Y \in \mathfrak{X}(T^2)$ il cui sollevamento a $\mathbb{R}^2$ coincide con $\tilde{Y}$ allora esso è completo, e quindi anche $\tilde{Y}$ lo è; si assume vera*

[2] Vedere [11] per la dimostrazione di questo fatto e altre informazioni sulle simmetrie di Lie.

[3] Questo segue dal fatto che $\tilde{X}$ è completo e che $\tilde{H}$ non ha punti critici; infatti, se un punto non percorresse l'intera curva allora avrebbe necessariamente un punto limite, ma questo sarebbe un equilibrio. Il concetto di punto limite verrà precisato più avanti, per approfondimenti vedere [12].

*l'esistenza di un tale campo $Y$, senza dimostrarla.*[4]
*Sotto questa ipotesi, $\Phi_t^{\tilde{Y}}$ è definito per tutti i tempi ed è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^2$ in sé. Per quanto notato al punto precedente, allora, le orbite di $\tilde{X}$ sono curve tutte diffeomorfe tra loro; di conseguenza anche le orbite di $X$ lo sono, e in particolare sono o tutte chiuse o tutte aperte.*

Per proseguire, si vuole modificare il campo $\tilde{Y}$ in modo da rendere chiuse le proiezioni sul toro delle sue orbite. Si dimostra inizialmente che è possibile rendere una di queste curve chiusa.

**Lemma 1.** *Esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che almeno una delle orbite di $\tilde{Y}'_\lambda := \tilde{Y} + \lambda\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ proiettata su $T^2$ sia chiusa, trasversale a $X$ e realizzi un ciclo (omotopicamente) non banale.*[5]

*Nota 4: la dimostrazione che segue si basa su quella in [1], con la principale differenza che la distinzione tra $T^2$ e $\mathbb{R}^2$ viene resa più esplicita.*

**Dimostrazione del Lemma 1.** Si scelga un punto arbitrario $P_0 \in T^2$ e sia $\gamma_0$ l'orbita di $X$ passante per esso. Ora si costruisca un ciclo $\alpha$ non banale sul toro, anch'esso passante per $P_0$, nel seguente modo, distinguendo in base alla natura di $\gamma_0$:

- se $\gamma_0$ è aperta, si scelga un arbitrario ciclo $\alpha \ni P_0$ non banale;
- se $\gamma_0$ è chiusa e realizza essa stessa un ciclo non banale, si scelga un altro ciclo $\alpha \ni P_0$ non banale e indipendente da $\gamma_0$. Si noti che $\gamma_0$ non può essere un ciclo banale, poichè in tal caso le curve che costituiscono la sua preimmagine $\pi^{-1}(\gamma_0)$ delimiterebbero ciascuna un aperto contenente un equilibrio di $\tilde{X}$, che invece non è mai nullo.[6]

Si mostrerà ora che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha$ è proprio la proiezione di almeno un'orbita di $\tilde{Y}'_\lambda$.

Si noti che $\pi^{-1}(\gamma_0)$ è costituito dall'unione di infinite orbite di $\tilde{X}$, che si ricordano essere coincidenti con le curve di livello di $\tilde{H}$; si supponga, senza perdita di generalità, che una di queste sia $\tilde{\gamma}_0 = \{\tilde{H} = 0\}$.
Si scelga un punto $\tilde{P}_0 \in (\pi^{-1}(P_0) \cap \tilde{\gamma}_0) \subset \mathbb{R}^2$; per costruzione, una delle curve di $\pi^{-1}(\alpha)$ passa per esso e per infiniti altri punti di $\pi^{-1}(P_0)$. Si scelga uno di questi punti: esso apparterrà ad un'altra curva di livello di $\tilde{H}$; sia tale curva $\tilde{\gamma}_c$ e sia il punto in questione $\tilde{P}_c$. Si osservi che sul toro si ha $\pi(\tilde{\gamma}_0) = \pi(\tilde{\gamma}_c) = \gamma_0$, mentre sul piano $\tilde{\gamma}_0$ e $\tilde{\gamma}_c$ sono curve distinte.

Si consideri ora la famiglia $\{\tilde{Y}'_\lambda := \tilde{Y} + \lambda\tilde{X},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Da quanto visto nel punto (i) della Nota 3, è chiaro che anche $\tilde{Y}'_\lambda$ è una Lie symmetry di $\tilde{X}$. Ciò implica che

$$\Phi_c^{\tilde{Y}'_\lambda}(\tilde{\gamma}_0) = \tilde{\gamma}_c, \qquad \tilde{\gamma}_0 \ni \tilde{P}_0 \longmapsto \tilde{P}^\lambda := \Phi_c^{\tilde{Y}'_\lambda}(\tilde{P}_0) \in \tilde{\gamma}_c \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Riassumendo, $\tilde{P}_c$ e $\tilde{P}^\lambda$ appartengono entrambi alla curva $\tilde{\gamma}_c$. Per completare la dimostrazione del lemma rimane solo da mostrare che esiste un valore di $\lambda$ tale che $\tilde{P}^\lambda$ coincide con $\tilde{P}_c$.

*Nota 5: nel lavoro originale quest'ultimo punto non è dimostrato, ma viene dato come banalmente vero. Sarebbe questo il caso se valesse $[\tilde{X}, \tilde{Y}'_\lambda] = 0$, poichè si avrebbe che i flussi dei due campi commutano. Tuttavia, $\tilde{Y}'_\lambda$ è solamente una Lie symmetry di $\tilde{X}$, non una simmetria dinamica. Si ritiene quindi che sarebbe opportuno studiare meglio il comportamento del flusso di $\tilde{Y}'_\lambda$. Ciò potrebbe essere possibile facendo uso della formula di Baker-Campbell-Hausdorff ([6]), ma non è stato approfondito.* □

Il prossimo passo consiste nel modificare il campo $\tilde{Y}'_\lambda$ in modo che le proiezioni di tutte le sue orbite risultino chiuse sul toro. Essendo il ciclo $\alpha$ costruito in precedenza trasversale a $X$, è possibile vederlo come una sezione di Poincarè globale per il flusso di $X$. "Tagliando" il toro lungo questa sezione

[4] In generale, dati una sommersione suriettiva $F : M \to N$ tra due varietà e un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, $X$ è il sollevamento di un campo vettoriale $N$ se e solo se $dF_p(X_p) = dF_q(X_q)$ quando $F(p) = F(q)$. In tal caso, inoltre, $X$ è il sollevamento di un unico campo vettoriale ([5]).

[5] Con "ciclo (omotopicamente) non banale" si intende ancora una curva chiusa sul toro non contraibile ad un punto con continuità.

[6] Questo fatto segue dalla teoria di Poincarè-Bendixson, approfondita più avanti. Si veda [12].

e "incollandolo" infinite volte in entrambi i versi si ottiene un cilindro infinito, sul quale si possono introdurre delle coordinate $(\theta, z)$, con $\theta \in [0,1]$ e $z \in \mathbb{R}$. Si scelgono ora due copie consecutive del ciclo $\alpha$, ad esempio date da $\{z = 0\}$ e $\{z = 1\}$, interpretabili come "base inferiore" e "base superiore" (di una porzione) del cilindro.[7]

**Proposizione 3.** *Le orbite di $X$ vanno dalla base inferiore del cilindro a quella superiore.*

*Nota 6: in [1] questa proprietà delle orbite di $X$ viene solamente enunciata. Se ne dà di seguito una dimostrazione completa, basata sul teorema di Poincarè-Bendixson.*[8]

**Dimostrazione della Proposizione 3.** Si supponga per assurdo che un'orbita di $X$ passante per un certo punto $x_0 \in \{z = 0\}$ al tempo $t = 0$ non raggiunga $\{z = 1\}$ per nessun $t > 0$; si denoti la semi-orbita positiva considerata con $\mathcal{O}^+_{x_0}$. Si noti allora che $\mathcal{O}^+_{x_0}$ è contenuta in un insieme compatto.

Si danno ora alcune definizioni utili alla comprensione del resto della dimostrazione. In questa sezione con "orbita chiusa" si intenderà un'orbita periodica di periodo minimo positivo, escludendo quindi gli equilibri.

**Definizione 4.** Sia $\Phi$ un flusso su una varietà $M$ e sia $x$ un punto di M.

i. Un punto $\overline{x} \in M$ si dice $\omega-$*punto* di $x$ se esiste una successione $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ tendente a $+\infty$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{t_n}(x) = \overline{x}$$

ii. L'unione di tutti gli $\omega-$*punti* di $x$ è detta $\omega-$*limite* di $x$ e si denota con $L_\omega(x)$.

iii. Un $\omega-$*ciclo limite* è un'orbita chiusa $\eta$ tale che $\eta \subset L_\omega(x)$ per un qualche $x \notin \eta$.[9]

E' possibile dimostrare che se $\mathcal{O}^+_{x_0}$ è contenuta in un compatto $K$, allora $L_\omega(x_0)$ è un sottoinsieme di $K$ non vuoto e connesso. Questo fatto, unito ad un corollario del teorema di Poincarè-Bendixson, permette di proseguire.

**Teorema 4** *(di Poincarè-Bendixson, [12]). Sia $M$ diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^2$ e si consideri un sistema dinamico dato da un campo vettoriale definito su $M$. Se un insieme limite non vuoto del sistema dinamico non contiene equilibri, allora è un'orbita chiusa.*

**Corollario 1.** *Un insieme compatto e non vuoto $K$ che sia positivamente oppure negativamente invariante contiene o un ciclo limite o un equilibrio.*

Si noti che il cilindro è diffeomorfo a $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, che è un aperto di $\mathbb{R}^2$, come richiesto. Ricordando poi che il campo $X$ non si annulla mai, si ottiene che l'insieme $\omega-$*limite* di $x_0$ deve essere un'orbita chiusa. Ma questo è incompatibile con l'ipotesi che il sistema sia dotato di una misura invariante sotto il flusso di $X$.
Infatti, è possibile dimostrare che se $\eta$ è un $\omega-$*ciclo limite* di $x$, allora esiste un intorno $U$ di $x$ tale che $\eta = L_\omega(y)\ \forall y \in U$. Ma allora $\forall y \in U$, che ha misura strettamente positiva, esiste una successione $t_n \to +\infty$ tale che $\Phi^X_{t_n}(y)$ tende a $\eta$, che ha misura nulla. Quindi si conclude che tutte le orbite di $X$ vanno da $\{z = 0\}$ a $\{z = 1\}$. $\square$

Ora è possibile introdurre sul cilindro finito delle nuove coordinate $(h, t)$, con $h \in [0, k]$ che parametrizza le orbite di $X$ (dove $k$ è il più piccolo numero reale tale che $\pi(\tilde{\gamma}_0) = \pi(\tilde{\gamma}_k)$), e $t \in [0, T(h)]$ è il tempo misurato lungo queste orbite a partire dalla base inferiore. Si noti che $T(h)$ è il tempo che un punto impiega per effettuare una rivoluzione e tornare alla sezione di Poincarè ed è, in generale, una

[7] Tecnicamente, anche in questo caso si sta passando ad un ricoprimento del toro (non universale in quanto il cilindro infinito $S^1 \times \mathbb{R}$ non è semplicemente connesso). Per non appesantire ulteriormente la notazione e la dimostrazione stessa, non si esporrà formalmente questo passaggio.

[8] La dimostrazione di questo importante risultato della teoria dei sistemi dinamici nel piano, così come altre nozioni utilizzate nella dimostrazione della Proposizione 3, si trova in [12].

[9] Si definiscono in modo del tutto analogo, ma per $t_n$ tendente a $-\infty$, i concetti di $\alpha$–*punto*, $\alpha$–*limite* e $\alpha$–*ciclo limite*. Si parlerà semplicemente di *insieme limite* oppure di *ciclo limite* quando non si vorrà distinguere, rispettivamente, tra $\alpha-$*limite* e $\omega-$*limite* oppure tra $\alpha-$*ciclo limite* e $\omega-$*ciclo limite*.

funzione di $h$.

Si prosegue eseguendo una riparametrizzazione temporale del sistema, in modo che la quantità $T(h)$ venga modificata e diventi costante e pari a 1 per tutti i punti. Questa operazione corrisponde a moltiplicare il campo $X$ per un'opportuna funzione positiva. Si dimostra che una tale funzione esiste costruendo esplicitamente una nuova variabile $\tau = \tau(t, h)$.
Per prima cosa si definisce un'opportuna funzione "lisciante" standard $\psi_\varepsilon(t)$ (con $\varepsilon \in (0, 1)$), con le proprietà che sia di classe $C^\infty$ e che

$$\psi_\varepsilon(t) = 1 \text{ per } \varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon, \qquad \psi_\varepsilon(t) = 0 \text{ per } t = 0 \vee t \geq 1$$

$$\psi'_\varepsilon(t) > 0 \text{ per } 0 < t < \varepsilon, \qquad \psi'_\varepsilon(t) < 0 \text{ per } 1 - \varepsilon < t < 1$$

In pratica tale funzione servirà solo ad assicurare che, una volta "re-incollate" le basi del cilindro in modo da ritrovare il toro, la riparametrizzazione ottenuta sarà $C^\infty$.
Si definisce anche la seguente funzione

$$s(h) := \frac{T(h) - 1}{\int_0^1 \psi(t)dt}$$

Ora è finalmente possibile definire $\tau(t, h)$ come il parametro che soddisfa la relazione

$$t(\tau) = \int_0^\tau (1 + s(h)\psi_\varepsilon(t'))dt'$$

Si noti che con le scelte effettuate è valida la relazione che si richiedeva prima:

$$t(1) = \int_0^1 \left[1 + \frac{T(h)\psi_\varepsilon(t') - \psi_\varepsilon(t')}{\int_0^1 \psi_\varepsilon(t'')dt''}\right] dt' = T(h)$$

Inoltre, per $\varepsilon$ abbastanza piccolo si ha $s(h) > -1 \; \forall h$:

$$s(h) > -1 \iff T(h) > 1 - \int_0^1 \psi_\varepsilon(t')dt'$$

e l'ultimo integrale può essere reso arbitrariamente vicino ad 1. Di conseguenza, l'integrando $(1 + s(h)\psi_\varepsilon(t'))$ è strettamente positivo e il cambio di variabile definito da $t(\tau)$ è monotono $\forall h$. Infine si nota che la presenza della funzione $\psi_\varepsilon(t')$ assicura che in un intorno di ciascuna base del cilindro valga $d\tau/dt \equiv 1$, dato che

$$\lim_{t' \to 0^+} (1 + s(h)\psi_\varepsilon(t')) = \lim_{t' \to 1^-} (1 + s(h)\psi_\varepsilon(t')) = 1 \; \forall h$$

La costruzione appena svolta mostra che, dopo aver fatto il passaggio da cilindro a toro, la funzione $\tau$ può essere interpretata come una nuova coordinata angolare su $T^2$, ovunque indipendente da $h$.

Per costruzione, $\tau$ è di classe $C^\infty$ ma non reale analitica. Si può dimostrare che è possibile scegliere un'altra coordinata $\tau'$ che sia reale analitica e arbitrariamente vicina a $\tau$, in modo che anch'essa sia indipendente da $h$.

*Nota 7: in [1] questa affermazione non viene dimostrata ma solamente riportata come conseguenza di un teorema più generale riguardo l'approssimazione di funzioni lisce con funzioni reali analitiche su varietà compatte. Anche la dimostrazione di questo teorema non viene fornita, ma si rimanda a [4].*
*Un altro punto importante che non viene discusso è il motivo per cui la riparametrizzazione appena effettuata dovrebbe implicare la chiusura di tutte le orbite di $\tilde{Y}'_\lambda$, una volta proiettate sul toro. Purtroppo tale ragione non è chiara; nel seguito si dovrà comunque assumere che tali curve sul toro siano tutte chiuse e omotope al ciclo $\alpha$ definito in precedenza.*
*Infine, le tre affermazioni che seguono costituiscono forse il passaggio più delicato della dimostrazione, in quanto riguardano la possibilità di estendere le coordinate $(\tau', h)$ ad un intorno del toro considerato,*

*preservando inoltre la loro indipendenza. Nel lavoro originale non viene fornita alcuna giustificazione per cui ciò dovrebbe essere possibile. Si può cercare di farlo utilizzando il teorema della funzione implicita ma questo richiederebbe un controllo preciso di vari punti della dimostrazione, in particolare della quantità $\lambda$ (si veda la Nota 5). Sicuramente tale questione, e più in generale la parte finale della dimostrazione, merita di essere oggetto di uno studio più approfondito.*

La coordinata $\tau'$ può essere estesa in modo analitico ai tori appartenenti ad un intorno di quello di partenza. Anche $h$ è definita sui tori vicini, e dipende in modo analitico dagli integrali primi $f_1, \dots, f_{n-2}$. Inoltre, $h$ e $\tau'$ rimangono indipendenti su questi tori.

Si considerino ora i campi vettoriali coordinati $\partial_{\tau'}$, $\partial_h$. Per costruzione, $\partial_{\tau'}$ è tangente alle orbite di $X$, ma dalla riparametrizzazione temporale segue che $\partial_{\tau'} = rX$, per una funzione positiva $r$. Come discusso nella Nota 7, si assume che le orbite di $\partial_h$ siano tutte chiuse e omotope al ciclo $\alpha$. Essendo campi coordinati, banalmente $\partial_{\tau'}$ e $\partial_h$ commutano; inoltre, essi sono ovunque linearmente indipendenti. Si è quindi trovata una simmetria dinamica $\partial_h$ del campo $X$ (opportunamente normalizzato per mezzo della funzione $r$).

*Nota 8: non si è stati in grado di ricavare una relazione esplicita, assente anche nel lavoro originale, tra questa funzione $r$ e la funzione $\Phi$ riportata nell'enunciato del teorema.*

A questo punto per concludere il tutto è sufficiente utilizzare il seguente lemma, che è un fatto noto (ad esempio, si vedano [2] e [3]).

**Lemma 2.** *Si supponga di avere due campi vettoriali su un toro che siano ovunque linearmente indipendenti e che commutino; allora esistono delle coordinate angolari sul toro in cui questi campi assumono la forma $\dot{\phi}_1 = \delta_1$, $\dot{\phi}_2 = \delta_2$, con $\delta_1$, $\delta_2$ costanti.*
*Similmente, data una famiglia di tori $T^2 \times B^{n-2}$ e due campi vettoriali che siano tangenti sui tori, ovunque linearmente indipendenti e che commutino, le coordinate angolari che rettificano tali campi possono essere scelte in modo compatibile su tutti i tori contemporaneamente.*
*Nel caso reale analitico, anche le coordinate angolari sono reali analitiche.* □

# Capitolo 3

# La trottola della Veselova

Questa sezione raccoglie brevemente alcuni risultati presentati nei lavori di tesi triennale [7, 10] e ha lo scopo di fornire un esempio di applicazione del teorema appena discusso. Non verranno fornite dimostrazioni degli enunciati, in quanto possono essere consultate direttamente nelle due fonti sopracitate.

Vengono innanzitutto date alcune nozioni relative ai sistemi anolonomi, senza pretesa di svolgere una trattazione esaustiva.

Si ricorda che un vincolo olonomo è una restrizione delle possibili configurazioni del sistema (intuitivamente, il vettore che ha per componenti le "posizioni" dei punti del sistema) ad una sottovarietà $Q$ dello spazio delle configurazioni, e si traduce nell'appartenenza degli atti di moto del sistema (il vettore che ha per componenti le "posizioni" dei punti seguite dalle rispettive "velocità") al fibrato tangente $TQ$.

**Definizione 5.** Dato un sistema olonomo con varietà delle configurazioni $Q$, un *vincolo anolonomo* è una restrizione sugli atti di moto ad appartenere alle fibre di una distribuzione non integrabile $\mathcal{D}$ su $Q$. La distribuzione $\mathcal{D}$ è detta *distribuzione vincolare* e se essa ha rango $r$ costante, si dice che il vincolo ha rango $r$.[1] La sottovarietà $M \subset TQ$ a cui sono ristretti gli atti di moto è detta *varietà vincolare*.

**Definizione 6.** Un vincolo (indipendentemente dal fatto che possa essere olonomo o anolonomo) viene detto *ideale* se le reazioni vincolari che esso può esercitare sul sistema sono tutti e soli i vettori $\Phi$ ortogonali a $\mathcal{D}$.

La trottola della Veselova è costituita da un corpo rigido con un punto fisso in assenza di forze attive, soggetto al vincolo che impone alla velocità angolare di avere componente sempre nulla lungo un asse fisso nello spazio, detto *asse delle rotazioni proibite*. Si suppone che il vincolo considerato sia lineare nelle velocità, ideale e indipendente dal tempo.

La varietà delle configurazioni è $Q = SO(3)$: un suo generico elemento è una matrice ortogonale che mette in relazione un sistema di riferimento fisso e uno solidale al corpo rigido, entrambi con l'origine nel punto fisso del sistema.

Si può mostrare che il vincolo sulla velocità angolare definisce una distribuzione di rango 2. Applicando il teorema di Frobenius ([5]) si mostra che essa non è integrabile, e quindi il vincolo considerato è effettivamente anolonomo. La varietà vincolare $M$ è una sottovarietà di $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ e ha dimensione 5.

Si dimostra che il sistema è invariante per rotazioni spaziali attorno all'asse delle rotazioni proibite, rappresentate dall'azione di un sottogruppo $G$ di $SO(3)$, quindi si considera lo spazio quoziente $M/G \cong TS^2$; si denoterà la proiezione canonica su $M/G$ con $\pi$. Lo spazio quoziente è una sottovarietà di dimensione 4 e la proiezione canonica è una sommersione.
Inoltre, per ogni campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$ esiste un campo vettoriale $\overline{X} \in \mathfrak{X}(M/G)$ che sia $\pi-$collegato a $X$. E' quindi possibile effettuare il passaggio dal sistema completo $(M, X)$ al sistema

[1] Per dettagli sulle distribuzioni si veda [5].

ridotto $(M/G, \overline{X})$.

Il passo successivo è riconoscere che il sistema ridotto possiede due integrali primi indipendenti (uno è ovviamente la funzione energia $H$, l'altro è una funzione $u$ di cui non è nota un'interpretazione fisica) e una misura invariante, dei quali non si riportano le espressioni esplicite.
In entrambi i lavori di tesi si prosegue applicando (una parte del) teorema di Euler-Jacobi, in modo da poter affermare che gli insiemi di livello comuni degli integrali primi (se sono sottovarietà regolari e compatte) sono diffeomorfi a tori bidimensionali e che il flusso su questi tori è rettilineo. Si noti che non viene discussa la possibilità di estendere questo fatto ad un intorno dei tori, che rappresenta un aspetto del teorema ancora non del tutto chiaro (si veda la Nota 7).

**Osservazione 2.** E' possibile verificare l'integrabilità del sistema anche mostrando che esiste una riparametrizzazione del campo vettoriale che lo rende hamiltoniano, per poi applicare il teorema di Liouville-Arnold.

Infine, è possibile procedere allo studio della dinamica sugli insiemi di livello degli integrali primi, prestando attenzione a sottolineare i casi in cui questi non sono sottovarietà regolari e mostrando che la regolarità implica la compattezza. In particolare, si trova che la regolarità è persa nei tre casi $H = \frac{u}{2I_j}$, $j = 1, 2, 3$, dove $I_j$ sono i momenti principali d'inerzia del corpo rigido. Per un esame più approfondito della dinamica del sistema ridotto si veda [10], dove le orbite e gli insiemi di livello vengono anche rappresentati graficamente.

# Bibliografia


[1] A. V. Borisov e I. S. Mamaev A. V. Bolsinov. "Hamiltonization of Non-Holonomic Systems in the Neighborhood of Invariant Manifolds". In: *Regular and Chaotic Dynamics* 16.5 (2011), pp. 443–464. DOI: 10.1134/S1560354711050030.

[2] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Trad. da K. Vogtmann e A. Weinstein. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1989.

[3] F. Fassò. *Note per il corso di Sistemi Dinamici per il corso di laurea magistrale in Matematica*. Università degli Studi di Padova, A. A. 2020-2021.

[4] Hans Grauert. "On Levi's Problem and the Imbedding of Real-Analytic Manifolds". In: *Annals of Mathematics* 68.2 (1958), pp. 460–472. DOI: 10.2307/1970257.

[5] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2012.

[6] Willard Miller. *Symmetry Groups and Their Applications*. Academic Press, 1972.

[7] C. Millevoi. "La trottola della Veselova". Tesi di laurea triennale in Matematica. Università degli Studi di Padova, A. A. 2017-2018.

[8] John W. Milnor. *Topology from The Differentiable Viewpoint*. Princeton University Press, 1965.

[9] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, 2003.

[10] M. Pretto. "La trottola della Veselova, un sistema anolonomo integrabile". Tesi di laurea triennale in Fisica. Università degli Studi di Padova, A. A. 2019-2020.

[11] Hans Stephani. *Differential equations: their solution using symmetries*. Cambridge University Press, 1989.

[12] Morris W. Hirsch e Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1974.