



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea Triennale

Meccanica statistica quantistica dei fotoni in una
microcavità ottica

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureando

Mattia Beltrame

Anno Accademico 2023/2024

Alla mia famiglia.

ABSTRACT

Nel 2010, J. Klaers *et al.* [Nature **468**, 545 (2010)] hanno avuto prova per la prima volta del fenomeno di condensazione di Bose-Einstein per un sistema di fotoni vincolati armonicamente in una microcavità ottica e, fino ad oggi, la fisica sperimentale è giunta ad una esauriente descrizione del suddetto sistema. Questo lavoro, in seguito ad un breve richiamo del gas di fotoni liberi, ha per scopo lo studio dei fotoni nella microcavità. Vengono dedotte le proprietà fisiche di tale sistema come conseguenza della configurazione della microcavità e si impiegano gli strumenti della meccanica statistica quantistica per mostrare come avviene la condensazione di Bose-Einstein e quali sono le relazioni quantitative che la regolano; se ne ricava una caratterizzazione termodinamica tramite opportune grandezze fisiche e si determinano infine i profili di densità e correlazione spaziale.

Indice

Introduzione	1
1 Fotoni liberi	3
1.1 Densità di fotoni nella cavità	3
2 Struttura e proprietà della microcavità ottica	5
2.1 Principi	5
2.2 Relazione di dispersione	5
2.3 Termalizzazione dei fotoni	7
3 Meccanica statistica nella microcavità	9
3.1 Condensazione di Bose-Einstein	9
3.2 Calorimetria del gas di fotoni	12
3.3 Profili di densità e correlazione spaziale	16
Conclusioni	21
Appendice	25

Introduzione

La condensazione di Bose-Einstein, inserita tra gli stati esotici della materia, è l'occupazione macroscopica dello stato fondamentale da parte di un sistema di bosoni e rappresenta una delle manifestazioni su scala macroscopica delle proprietà quantistiche della materia. Se il sistema di bosoni è omogeneo e debolmente interagente, come conseguenza del teorema di Mermin-Wagner esso non può condensare a temperatura finita se non in tre dimensioni; in 3D, infatti, al di sotto di una certa temperatura critica (finita appunto, anche se generalmente molto bassa), i bosoni occupano macroscopicamente lo stato fondamentale. Benché teorizzata nel 1924, si dovette attendere il 1995 per avere la prima evidenza sperimentale della condensazione di atomi bosonici, date le difficoltà tecniche della sua realizzazione.

Il caso dei fotoni è peculiare. Il tentativo di confinamento, termalizzazione e raffreddamento di un gas di fotoni fallisce dal momento che essi interagiscono con le pareti e il loro numero non si conserva e diminuisce con la temperatura, fino a zero, anche in tre dimensioni, come mostrato dalla teoria di Planck della radiazione di corpo nero. Il primo passo in avanti si ebbe nel 2010, grazie ad un ingegnoso apparato: la microcavità ottica da un lato permette di trattare i bosoni alla stregua di particelle dotate di massa su cui è esercitato un potenziale di confinamento armonico, dall'altro ne garantisce la termalizzazione, la conservazione del numero e infine la condensazione di Bose-Einstein addirittura a temperatura ambiente, a dispetto del caso degli atomi ultrafreddi.

Numerosi esperimenti hanno riprodotto similmente la microcavità ottica, cercando (e trovando) la presenza del condensato in un nutrito insieme di grandezze fisiche, nei termini in cui la teoria la prevede. Questi sistemi hanno contribuito a migliorare la conoscenza dello stato esotico della condensazione, nonché dei dettagli matematici e fisici delle fluttuazioni statistiche nel contesto del formalismo gran canonico che la descrive [1, 2]. Per il futuro, questo ramo della ricerca potrebbe rivolgersi allo studio di sistemi di fotoni interagenti [3] e alle applicazioni delle microcavità nell'imaging ad alta risoluzione e nello studio di sistemi complessi [4].

Capitolo 1

Fotoni liberi

Il gas di fotoni in una cavità è oggetto di interesse già dal pionieristico studio da parte di Max Planck del fenomeno della radiazione di corpo nero, di cui la cavità costituisce un prototipo ideale. In questo capitolo, a partire dalla legge di Planck ricaveremo la densità media di fotoni per un tale sistema.

1.1 Densità di fotoni nella cavità

Dato un gas di fotoni liberi in una cavità, l'energia media \bar{E} come funzione del vettore d'onda \mathbf{k} è data dalla *legge di Planck*:

$$\bar{E}(\mathbf{k}) = \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{e^{\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}} - 1}, \quad (1.1)$$

dove la dipendenza da \mathbf{k} nella pulsazione ω è per comodità riportata come pedice, cioè $\omega_{\mathbf{k}} \equiv \omega(\mathbf{k})$. Giacché ogni fotone porta energia $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$, possiamo rivedere la legge come espressione della distribuzione del numero medio di fotoni di fissato numero d'onda \mathbf{k} :

$$\bar{N}(\mathbf{k}) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}} - 1}. \quad (1.2)$$

Ciascun fotone può presentarsi in due diversi stati di polarizzazione s . Supponendo che non sia favorita una polarizzazione rispetto all'altra, il numero totale medio di fotoni \bar{N} sarà

$$\bar{N} = \sum_{\mathbf{k},s} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}} - 1} = 2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}} - 1}. \quad (1.3)$$

Tale espressione corrisponde in effetti alla statistica di Bose-Einstein con un potenziale chimico nullo ($\mu = 0$). Si noti che non è possibile per questo sistema parlare di numero esatto di fotoni, essendo essi costantemente emessi e riassorbiti dalle pareti, bensì solo di un numero medio.

Procedendo con il calcolo, nel limite termodinamico effettueremo la sostituzione formale

$$\sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow V \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (1.4)$$

Così, definendo la densità di fotoni $\bar{n} = \frac{\bar{N}}{V}$ ed essendo $\omega_{\mathbf{k}} = ck$, avremo

$$\begin{aligned} \bar{n} &= 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta \hbar c k} - 1} \\ &= 2 \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{e^{\beta \hbar c k} - 1} \\ (x \equiv \beta \hbar c k) &= \frac{1}{\pi^2 (\beta \hbar c)^3} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

L'integrale nella variabile x può essere semplificato introducendo le funzioni di Bose:

$$\begin{aligned} g_k(z) &= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty dx \frac{x^{k-1}}{z^{-1}e^x - 1} \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty dx x^{k-1} \frac{ze^{-x}}{1 - ze^{-x}} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty dx x^{k-1} ze^{-x} \sum_{m=0}^\infty (ze^{-x})^m \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty dx x^{k-1} \sum_{m'=1}^\infty (ze^{-x})^{m'} = \sum_{m=1}^\infty z^m \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty dx x^{k-1} e^{-mx} \\ (y \equiv mx) &= \sum_{m=1}^\infty z^m \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty dy \frac{y^{k-1}}{m^k} e^{-y} = \sum_{m=1}^\infty \frac{z^m}{m^k} \frac{1}{(k-1)!} \Gamma(k) \\ &= \sum_{m=1}^\infty \frac{z^m}{m^k}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

In questo modo:

$$\int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1} = 2g_3(1) = 2 \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^3} = 2\zeta(3), \quad (1.7)$$

dove $\zeta(x)$ è la nota funzione di Riemann. Per la densità di fotoni liberi nella cavità vale allora l'espressione

$$\bar{n} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2 (\beta \hbar c)^3} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3. \quad (1.8)$$

I fotoni si dispongono dunque omogeneamente nella cavità e il loro numero va a zero con la temperatura. Tale sistema, come anticipato, non può condensare.

Capitolo 2

Struttura e proprietà della microcavità ottica

In questo capitolo viene descritta brevemente la configurazione di una microcavità ottica. Si focalizza l'attenzione sulla deduzione della relazione di dispersione a partire dalle proprietà geometriche della cavità e sul processo di termalizzazione dei fotoni a partire dalle sue proprietà fisiche. Vengono ricavate, in altre parole, le premesse per la trattazione statistico-quantistica che si intende affrontare.

2.1 Principi

Un esempio di microcavità ottica, o microrisunatore ottico, è costituito da specchi ad elevata riflettività posti ad una distanza comparabile con la lunghezza d'onda della radiazione luminosa iniettata. La luce, in successive riflessioni sugli specchi, instaura onde stazionarie che risultano molto disperse nello spettro a causa delle ridotte dimensioni della cavità. Nella fattispecie, gli specchi sono sferici e si è interessati alla luce visibile. La cavità ospita una gocciolina di colorante fluorescente (tipicamente rodamina 6G) diluita in opportuno solvente. La soluzione ha un duplice effetto: da un lato, la limitata banda di fluorescenza del colorante promuove nello spettro delle risonanze della cavità solo un modo longitudinale di oscillazione, congelando un grado di libertà e rendendo il sistema a tutti gli effetti bidimensionale; dall'altro, agisce da bagno termico a temperatura ambiente e permette la termalizzazione del gas di fotoni e la conservazione del loro numero. La luce è iniettata con un fascio laser ad un angolo che massimizza la trasmissione; regolandone l'intensità, è possibile tener traccia del numero di fotoni nella cavità.

2.2 Relazione di dispersione

In riferimento alla figura 2.1, siano z ed r , rispettivamente, la coordinata sull'asse ottico e la coordinata trasversale, e sia R il raggio di curvatura dei due specchi identici. In queste coordinate cilindriche, il modulo del vettore d'onda k si scrive

$$k = \sqrt{k_r^2 + k_z^2}. \quad (2.1)$$

Come prima detto, nella cavità si instaura un modo longitudinale, descritto dal numero q di mezza lunghezze d'onda dell'oscillazione, vale a dire

$$q = \frac{2D(r)}{\lambda}, \quad (2.2)$$

con $D(r)$ la distanza tra gli specchi misurata parallelamente all'asse ottico. Ciò significa che k_z è fissato a

$$k_z(r) = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{q\pi}{D(r)}. \quad (2.3)$$

L'espressione esplicita di $D(r)$ è facilmente calcolabile (si veda l'Appendice):

$$D(r) = D_0 - 2\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right). \quad (2.4)$$

Introduciamo una semplificazione nei calcoli lavorando in approssimazione parassiale, in effetti compatibile con la procedura sperimentale. In tale approssimazione, si assume costante l'indice di rifrazione della soluzione n_0 e valgono le disuguaglianze forti $k_r \ll k_z$, $r \ll R$. Inserendo la (2.4) nella (2.3) e troncando l'espansione in serie al second'ordine negli infinitesimi k_r/k_z e r/R , si trova per l'energia dei fotoni nella cavità:

$$\begin{aligned} E(r) &= \frac{\hbar c}{n_0} \sqrt{k_z^2 + k_r^2} \\ &\simeq \frac{\hbar c}{n_0} k_z(r) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_r}{k_z} \right)^2 \right] = \frac{\hbar c}{n_0} \left[\frac{q\pi}{D(r)} + \frac{D(r)}{2q\pi} k_r^2 \right] \\ &\simeq \frac{\hbar c}{n_0} \left[\frac{q\pi}{D_0 - \frac{r^2}{R}} + \frac{D_0 - \frac{r^2}{R}}{2q\pi} k_r^2 \right] \simeq \frac{\hbar c}{n_0} \left[\frac{q\pi}{D_0} + \frac{q\pi}{D_0^2 R} r^2 + \frac{D_0}{2q\pi} k_r^2 \right] \\ (k_{z,0} \equiv k_z(0)) &\simeq \frac{\hbar c}{n_0} \left[k_{z,0} + \frac{k_{z,0}}{D_0 R} r^2 + \frac{1}{2k_{z,0}} k_r^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Riconosciamo nell'espressione appena ricavata tre termini, nell'ordine: un'energia minima, un termine potenziale di tipo armonico, un termine cinetico. Una scrittura più familiare si ottiene introducendo la frequenza del potenziale efficace di intrappolamento ω_\perp

$$\omega_\perp = \frac{c}{n_0} \sqrt{\frac{2}{D_0 R}} \quad (2.6)$$

e la massa efficace del fotone vincolato m^*

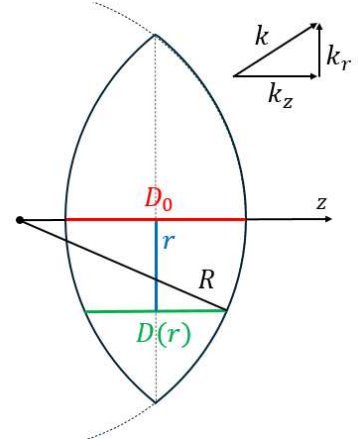


Figura 2.1: Struttura geometrica della cavità

$$m^* = \frac{n_0}{c} \hbar k_{z,0}. \quad (2.7)$$

In questo modo si ha

$$E(r) = m^* \frac{c^2}{n_0^2} + \frac{(\hbar k_{z,0})^2}{2m^*} + \frac{1}{2} m^* \omega_{\perp}^2 r^2. \quad (2.8)$$

Il sistema, in sostanza, è equivalente ad un gas bidimensionale di bosoni massivi soggetti ad un potenziale armonico.

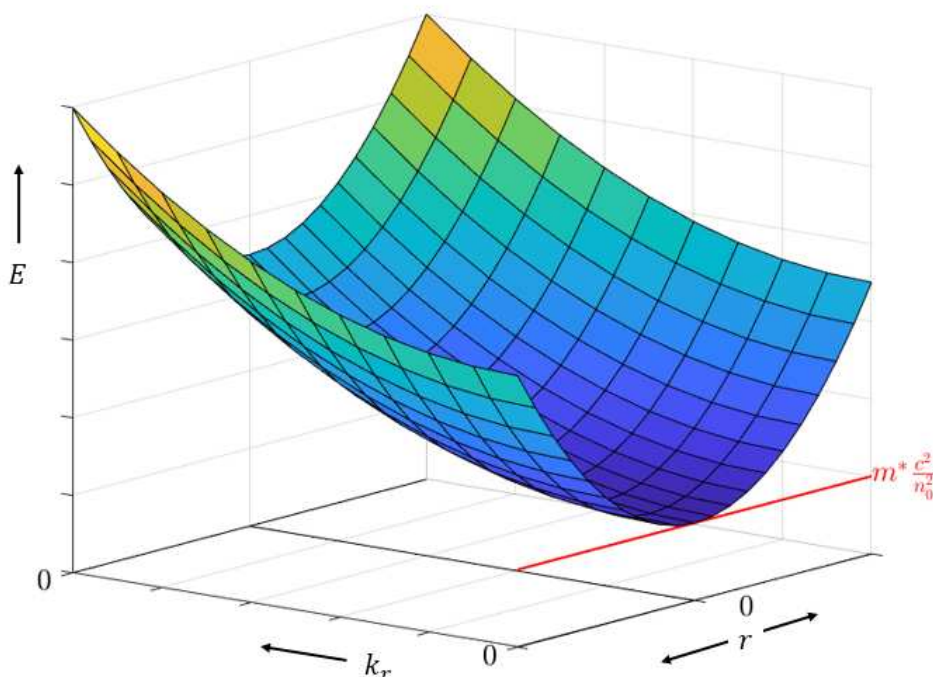


Figura 2.2: Relazione di dispersione nella microcavità ottica, visualizzata come funzione continua di r e k_r .

2.3 Termalizzazione dei fotoni

I fotoni nella microcavità interagiscono continuamente con la soluzione tramite processi di assorbimento ed emissione. Il sistema raggiunge l'equilibrio se si instaura un bilancio dettagliato che rispetti il fattore di Boltzmann; in altre parole, introdotte le frequenze di assorbimento $\alpha(\omega)$ ed emissione in fluorescenza $f(\omega)$, il rapporto tra le efficienze di transizione tra due stati $|1\rangle$ e $|2\rangle$ legati dall'assorbimento di un fotone di frequenza ω_i e l'emissione di un fotone di frequenza ω_j deve soddisfare:

$$\frac{R_{12}}{R_{21}} \propto \frac{\alpha(\omega_i) f(\omega_j)}{\alpha(\omega_j) f(\omega_i)} = e^{-\frac{\hbar(\omega_j - \omega_i)}{k_B T}}. \quad (2.9)$$

Schematizziamo come segue i livelli energetici del colorante, con riferimento alla figura 2.3.

Supponiamo una struttura a due livelli, il fondamentale S_0 e l'eccitato S_1 , ciascuno dei quale presenta un quasi-continuo di sottolivelli energetici rotovibrazionali, rispettivamente, ϵ e ϵ' ; chiamiamo infine $\hbar\omega_0$ la separazione energetica tra i livelli ad energia minima di S_0 ed S_1 . In questo sistema, l'interazione tra le molecole di colorante e quelle di solvente si svolge in tempi caratteristici $\tau \sim \text{ps}$, mentre il tempo di vita medio di uno stato eccitato soddisfa $\tau \sim \text{ns}$ [5]. Conseguentemente, il solvente termalizza i sottolivelli di S_0 ed S_1 prima che lo stato si disecciti e i fotoni vengono emessi e riassorbiti avendo frequenze indipendenti.

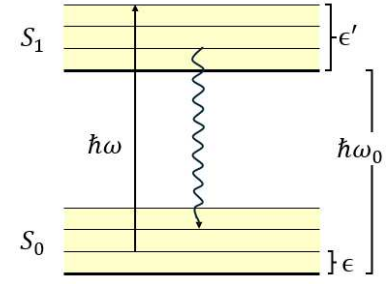


Figura 2.3: Livelli energetici del colorante

Il rapporto tra i termini di emissione e assorbimento

$$\frac{f(\omega)}{\alpha(\omega)} \propto \frac{\int d\epsilon' g'(\epsilon') p(\epsilon') A(\epsilon', \omega)}{\int d\epsilon g(\epsilon) p(\epsilon) B(\epsilon, \omega)} \quad (2.10)$$

si esprime pertanto in termini della medesima distribuzione di stati $p(\epsilon) \propto e^{-\epsilon/k_B T}$; le densità di stati $g(\epsilon)$ e $g'(\epsilon')$ sono invece legate ai coefficienti di Einstein A e B dalla relazione [6]

$$g'(\epsilon') A(\epsilon', \omega) d\epsilon' = \frac{2\hbar\omega^3}{\pi c^3} g(\epsilon) B(\epsilon, \omega) d\epsilon. \quad (2.11)$$

Osservando che la conservazione dell'energia richiede

$$\epsilon' + \hbar\omega_0 = \epsilon + \hbar\omega, \quad (2.12)$$

sostituendo tutto nella (2.10) otteniamo:

$$\frac{f(\omega)}{\alpha(\omega)} \propto \frac{2\hbar\omega^3}{\pi c^3} \frac{\int d\epsilon g(\epsilon) e^{-\frac{\epsilon + \hbar(\omega - \omega_0)}{k_B T}} B(\epsilon, \omega)}{\int d\epsilon g(\epsilon) e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} B(\epsilon, \omega)} \propto \omega^3 e^{-\frac{\hbar(\omega - \omega_0)}{k_B T}}. \quad (2.13)$$

Il risultato appena ricavato, noto come relazione di Kennard-Stepanov [7], nel caso $\hbar\omega \gg k_B T$ realizza appunto la condizione (2.9). La richiesta $\hbar\omega \gg k_B T$ (in effetti soddisfatta in questi sistemi [8]) ha una implicazione ulteriore: le molecole di colorante non possono eccitarsi o diseccitarsi termicamente, bensì solo tramite fotoni della cavità. Il fatto che sia ammessa, in ambo i versi, un sola reazione fotochimica



permette di stabilire l'equilibrio chimico ad una data temperatura e garantisce la conservazione del numero di fotoni.

Capitolo 3

Meccanica statistica nella microcavità

Quest'ultimo capitolo organizza una serie di deduzioni quantitative sul gas di fotoni tramite gli approcci della meccanica statistica quantistica. Si mostra come è possibile per il sistema formare un condensato di Bose-Einstein [5], si ricavano alcune grandezze termodinamiche [9] e si conclude con la derivazione dei profili di densità e della funzione di correlazione spaziale [10].

3.1 Condensazione di Bose-Einstein

Come abbiamo anticipato, la presenza della soluzione colorante e del fascio laser garantisce per il gas di fotoni, rispettivamente, un bagno termico e un reservoir chimico: la naturale descrizione di tale sistema si avrà nell'ensemble gran canonico. Promuovendo la relazione di dispersione (2.8) ad operatore hamiltoniano quantistico \hat{H} , si giunge ad un problema agli autovalori ben noto alla meccanica quantistica; tali autovalori sono:

$$E_{n_x, n_y} = m^* \frac{c^2}{n_0^2} + \hbar\omega_{\perp}(n_x + n_y + 1), \quad n_x, n_y = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

o equivalentemente

$$E_n = m^* \frac{c^2}{n_0^2} + \hbar\omega_{\perp}(n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

avendo definito $n = n_x + n_y$. La degenerazione di tali E_n è $g(E_n) = 2(n + 1)$, dove $(n + 1)$ è il numero delle coppie (n_x, n_y) compatibili con un fissato n e il fattore 2 al solito tiene conto delle polarizzazioni. Il numero di fotoni nella cavità sarà

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(E_n)}{e^{\beta(E_n - \mu)} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n + 1)}{e^{\beta(E_n - \mu)} - 1}. \quad (3.3)$$

Affinché ogni contributo sia ben definito, deve essere naturalmente

$$\mu < \min_n E_n = E_0 = m^* \frac{c^2}{n_0^2} + \hbar\omega_\perp. \quad (3.4)$$

In vista dei calcoli che ci aspettano, è opportuno ricordare brevemente come si scrive, per un sistema quantistico di bosoni, la funzione di partizione gran canonica \mathcal{Z}_{GC} ; usiamo il multi-indice $\boldsymbol{\alpha} = (n_x, n_y)$ e i numeri di occupazione ν_α nel formalismo della seconda quantizzazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{GC} &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} \text{tr}(e^{-\beta\hat{H}}) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} \sum_{\substack{\{\nu_\alpha\} \\ \sum_\alpha \nu_\alpha = N}} e^{-\beta \sum_\alpha \nu_\alpha E_\alpha} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{\{\nu_\alpha\} \\ \sum_\alpha \nu_\alpha = N}} e^{-\beta \sum_\alpha \nu_\alpha (E_\alpha - \mu)} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{\{\nu_\alpha\} \\ \sum_\alpha \nu_\alpha = N}} \prod_{\boldsymbol{\alpha}} \left[e^{-\beta(E_\alpha - \mu)} \right]^{\nu_\alpha} = \sum_{\{\nu_\alpha\}} \prod_{\boldsymbol{\alpha}} \left[e^{-\beta(E_\alpha - \mu)} \right]^{\nu_\alpha} \\ &= \prod_{\boldsymbol{\alpha}} \sum_{\nu_\alpha=0}^{\infty} \left[e^{-\beta(E_\alpha - \mu)} \right]^{\nu_\alpha} = \prod_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{1}{1 - e^{-\beta(E_\alpha - \mu)}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Da qui è immediato il calcolo del gran potenziale Ω :

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}_{GC} = \frac{1}{\beta} \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \ln \left[1 - e^{-\beta(E_\alpha - \mu)} \right]. \quad (3.6)$$

Così, il numero di fotoni si può ottenere direttamente da

$$\begin{aligned} \bar{N} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \\ &= -\frac{1}{\beta} \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{-\beta e^{-\beta(E_\alpha - \mu)}}{1 - e^{-\beta(E_\alpha - \mu)}} = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{1}{e^{\beta(E_\alpha - \mu)} - 1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)}{e^{\beta(E_n - \mu)} - 1}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove nell'ultimo passaggio si è reinserita la degenerazione in margine alla sostituzione di indici $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow n$; il risultato è lo stesso che alla (3.3). Per facilitare il calcolo e alleggerire la notazione, introduciamo le nuove grandezze traslate:

$$\epsilon_n = E_n - m^* \frac{c^2}{n_0^2} - \hbar\omega_\perp = \hbar\omega_\perp n, \quad \tilde{\mu} = \mu - m^* \frac{c^2}{n_0^2} - \hbar\omega_\perp, \quad \tilde{z} = e^{\beta\tilde{\mu}} \quad (3.8)$$

in modo che valgano le relazioni

$$E_n - \mu = \epsilon_n - \tilde{\mu}, \quad \tilde{\mu} < \min_n \epsilon_n = \epsilon_0 = 0, \quad 0 < \tilde{z} < 1. \quad (3.9)$$

Aggiorniamo l'espressione per \bar{N} a

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)}{\tilde{z}^{-1}e^{\beta\epsilon_n} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{\tilde{z}^{-1}e^{\beta\epsilon_n} - 1} + \bar{N}_0, \quad (3.10)$$

dove banalmente si è separato dalla somma il termine \bar{N}_0 ottenuto per $n = 0$, che rappresenta il numero di fotoni occupanti lo stato fondamentale.

Nel limite termodinamico, in cui nel reticolo (n_x, n_y) i punti si fanno densi, gli stati occupati con energie (traslate) nell'intervallo $[0, \epsilon]$ sono racchiusi nella parte di quadrante delimitata dalla retta $n_x + n_y = \frac{\epsilon}{\hbar\omega_{\perp}}$, cioè un triangolo rettangolo isoscele di cateti lunghi $\frac{\epsilon}{\hbar\omega_{\perp}}$ (si veda la figura 3.1 a lato). Pertanto il loro numero, computando le due polarizzazioni, sarà

$$\bar{N}(\epsilon) = \left(\frac{\epsilon}{\hbar\omega_{\perp}} \right)^2 \quad (3.11)$$

e la densità di stati risulta

$$\frac{d\bar{N}}{d\epsilon} = \frac{2\epsilon}{\hbar^2\omega_{\perp}^2}. \quad (3.12)$$

Segue che il calcolo da fare è

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{2\epsilon}{\hbar^2\omega_{\perp}^2} \frac{1}{\tilde{z}^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1} \\ (x \equiv \beta\epsilon) &= \frac{2}{(\beta\hbar\omega_{\perp})^2} \int_0^{\infty} dx \frac{x}{\tilde{z}^{-1}e^x - 1}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Similmente a quanto visto in precedenza, l'integrale nella variabile x può essere semplificato come segue:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x}{\tilde{z}^{-1}e^x - 1} = g_2(\tilde{z}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{z}^m}{m^2}. \quad (3.14)$$

Per studiare il comportamento di questa funzione di \tilde{z} , ne calcoliamo la derivata:

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{z}^m}{m^2} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\tilde{z}^{m-1}}{m^2} = \frac{1}{\tilde{z}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{z}^m}{m}. \quad (3.15)$$

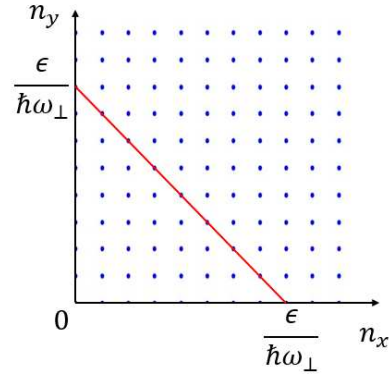


Figura 3.1: Autovalori di energia dell'oscillatore 2D

Il calcolo ci mostra che la funzione è crescente (essendo $0 < \tilde{z} < 1$); tuttavia, si verifica che in $\tilde{z} = 1$ la derivata ha una divergenza, ma la funzione assume un valore finito:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \quad (3.16)$$

L'interpretazione di questo fatto è quanto segue: al crescere del numero di fotoni \bar{N} , l'integrale cresce di pari passo aumentando \tilde{z} o, equivalentemente, il potenziale chimico μ . La restrizione che abbiamo posto su queste grandezze e l'espressione dell'integrale fanno sì che, oltre un certo numero critico di fotoni \bar{N}_c , debba mostrarsi finito il termine \bar{N}_0 . In altre parole, riempiendo sufficientemente la cavità di fotoni si ha, anche nel limite termodinamico, una occupazione macroscopica del livello fondamentale, i.e. condensazione di Bose-Einstein. In tal caso $\tilde{z} = 1$, $\tilde{\mu} = 0$, $\mu = \hbar ck_z + \hbar\omega_{\perp}$. È presto mostrato che per \bar{N}_c vale

$$\bar{N}_c = \frac{2}{(\beta\hbar\omega_{\perp})^2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega_{\perp}} \right)^2 \quad (3.17)$$

e che la temperatura critica T_c per la transizione allo stato di condensato, ottenuta ponendo $\bar{N} = \bar{N}_c$, si ricava

$$\bar{N} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B T_c}{\hbar\omega_{\perp}} \right)^2 \longrightarrow T_c = \sqrt{3\bar{N}} \frac{\hbar\omega_{\perp}}{\pi k_B}. \quad (3.18)$$

Infine, per la frazione di condensato si verifica

$$\frac{\bar{N}_0}{\bar{N}} = 1 - \frac{\bar{N}_c}{\bar{N}} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2, \quad (3.19)$$

andamento riportato in figura 3.2. Sorprendentemente, le condizioni per la condensazione possono essere raggiunte anche a temperatura ambiente [5]. Si osservi che il teorema di Mermin-Wagner [11] non è rispettato, dal momento che il potenziale armonico rende il sistema non omogeneo.

3.2 Calorimetria del gas di fotoni

Iniziamo dalla determinazione dell'energia media \bar{E} :

$$\begin{aligned} \bar{E} &= - \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_z \ln \mathcal{Z}_{GC} \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_z \sum_{\alpha} \ln \left(1 - z e^{-\beta E_{\alpha}} \right) = \sum_{\alpha} \frac{E_{\alpha}}{z^{-1} e^{\beta E_{\alpha}} - 1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)\epsilon_n}{\tilde{z}^{-1} e^{\beta \epsilon_n} - 1} + \bar{N} E_0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

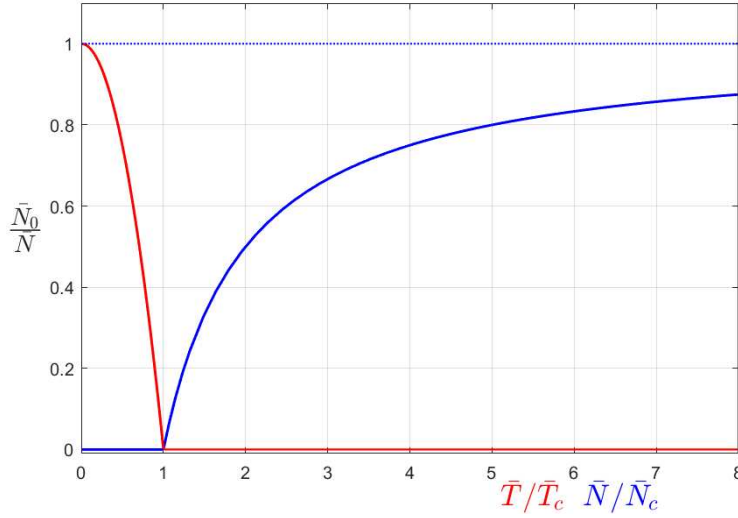


Figura 3.2: Dipendenza della frazione di condensato dalla temperatura e dal numero di fotoni

Il termine $\bar{N}E_0$ rappresenta l'energia del sistema a temperatura $T = 0$ K, mentre per il primo termine abbiamo:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \int_0^\infty d\epsilon \frac{2\epsilon}{\hbar^2\omega_\perp^2} \frac{\epsilon}{\tilde{z}^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1} \\ (x \equiv \beta\epsilon) &= \frac{2}{(\hbar\omega_\perp)^2\beta^3} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{\tilde{z}^{-1}e^x - 1} \\ &= \frac{4g_3(\tilde{z})}{(\hbar\omega_\perp)^2\beta^3} = \frac{12g_3(\tilde{z})}{\pi^2} \bar{N}k_B T_c \left(\frac{T}{T_c}\right)^3.\end{aligned}\quad (3.21)$$

In regime di condensato, si ha dunque

$$\bar{E} = \frac{12\zeta(3)}{\pi^2} \bar{N}k_B T_c \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 + \bar{N}E_0. \quad (3.22)$$

È interessante studiare in questo caso anche il limite di alta temperatura. Combinando le (3.13), (3.14) e (3.18) otteniamo

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{z}^m}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{T_c}{T}\right)^2, \quad (3.23)$$

che fornisce la stima al prim'ordine (per $\tilde{z} \ll 1$):

$$\tilde{z} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 + \mathcal{O}((T_c/T)^4). \quad (3.24)$$

Pertanto, nel limite di alta temperatura la (3.21) dà

$$\bar{E} \xrightarrow{T/T_c \rightarrow \infty} 2\bar{N}k_B T, \quad (3.25)$$

in accordo con il principio di equipartizione dell'energia, che vede nell'hamiltoniana quattro gradi di libertà quadratici (due cinetici e due potenziali).

Passiamo dunque alla capacità termica

$$C(T) = \left. \frac{\partial}{\partial T} \right|_{\bar{N}} \bar{E}. \quad (3.26)$$

Il conto è leggermente più ostico e richiede di ricordare un'utile proprietà della derivata delle funzioni di Bose (in realtà già sfruttata nella (3.15)), facilmente ricavabile dalla rappresentazione in serie:

$$\frac{d}{dz} g_k(z) = \frac{d}{dz} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m z^{m-1}}{m^k} = \frac{1}{z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^{k-1}} = \frac{1}{z} g_{k-1}(z). \quad (3.27)$$

Così, si ha

$$\begin{aligned} C(T) &= \left. \frac{\partial}{\partial T} \right|_{\bar{N}} \frac{4g_3(\tilde{z})}{(\hbar\omega_{\perp})^2 \beta^3} \\ &= \frac{12}{(\hbar\omega_{\perp})^2 \beta^2} k_B g_3(\tilde{z}) + \frac{4}{(\hbar\omega_{\perp})^2 \beta^3} \frac{1}{\tilde{z}} g_2(\tilde{z}) \left. \frac{\partial}{\partial T} \right|_{\bar{N}} \tilde{z}. \\ &= \frac{12}{(\hbar\omega_{\perp})^2 \beta^2} k_B g_3(\tilde{z}) + \frac{2N}{\beta} \frac{1}{\tilde{z}} \left. \frac{\partial}{\partial T} \right|_{\bar{N}} \tilde{z}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Naturalmente vale

$$\left. \frac{\partial}{\partial T} \right|_{\bar{N}} \bar{N} = 0, \quad (3.29)$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{2}{(\beta\hbar\omega_{\perp})^2} \left[\frac{2}{T} g_2(\tilde{z}) + \frac{1}{\tilde{z}} g_1(\tilde{z}) \left. \frac{\partial}{\partial T} \right|_{\bar{N}} \tilde{z} \right] &= 0 \\ \frac{1}{\tilde{z}} \left. \frac{\partial}{\partial T} \right|_{\bar{N}} \tilde{z} &= -\frac{2}{T} \frac{g_2(\tilde{z})}{g_1(\tilde{z})}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

che può essere inserita nella (3.28). La capacità termica risulta allora, in due espressioni equivalenti:

$$C(T) = 6\bar{N}k_B \frac{g_3(\tilde{z})}{g_2(\tilde{z})} - 4\bar{N}k_B \frac{g_2(\tilde{z})}{g_1(\tilde{z})}; \quad (3.31)$$

$$C(T) = \frac{6\bar{N}k_B g_3(\tilde{z})}{\zeta(2)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 + \frac{4\bar{N}k_B \zeta(2)}{\ln(1-\tilde{z})} \left(\frac{T_c}{T}\right)^2, \quad (3.32)$$

dove per la seconda si è usata l'identità (si veda l'Appendice)

$$g_1(\tilde{z}) = -\ln(1-\tilde{z}). \quad (3.33)$$

In presenza di condensato, è sufficiente derivare la (3.22) rispetto alla temperatura:

$$C(T) = \frac{36\zeta(3)}{\pi^2} \bar{N}k_B \left(\frac{T}{T_c}\right)^2. \quad (3.34)$$

La capacità termica presenta (si veda la figura 3.3), nella soglia di condensazione, un picco pronunciato tipico delle cosiddette transizioni λ , che accomunano un certo numero di sistemi.

Infine, occupiamoci dell'entropia S , che si esprime

$$\begin{aligned} S(T) &= -\frac{\partial\Omega}{\partial T} \\ &= -k_B \sum_{\alpha} \ln \left[1 - e^{-\beta(E_{\alpha}-\mu)} \right] + \frac{1}{T} \sum_{\alpha} \frac{E_{\alpha} - \mu}{e^{\beta(E_{\alpha}-\mu)} - 1} \\ &= -k_B \sum_n 2(n+1) \ln \left[1 - e^{-\beta(\epsilon_n - \tilde{\mu})} \right] + \frac{1}{T} \sum_n \frac{2(n+1)(\epsilon_n - \tilde{\mu})}{e^{\beta(\epsilon_n - \tilde{\mu})} - 1}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nel limite termodinamico:

$$\begin{aligned} S(T) &= -k_B \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{2\epsilon}{(\hbar\omega_{\perp})^2} \ln \left[1 - \tilde{z}e^{-\beta\epsilon} \right] + \frac{1}{T} \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{2\epsilon}{(\hbar\omega_{\perp})^2} \frac{\epsilon - \tilde{\mu}}{\tilde{z}e^{\beta\epsilon} - 1} \\ (x \equiv \beta\epsilon) &= \frac{2k_B}{(\beta\hbar\omega_{\perp})^2} \left[-\int_0^{\infty} dx x \ln(1 - \tilde{z}e^{-x}) + 2g_3(\tilde{z}) - \beta\tilde{\mu}g_2(\tilde{z}) \right] \\ &= \frac{2k_B}{(\beta\hbar\omega_{\perp})^2} [3g_3(\tilde{z}) - \beta\tilde{\mu}g_2(\tilde{z})] \\ &= \frac{18g_3(\tilde{z})}{\pi^2} \bar{N}k_B \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 - \frac{6}{\pi^2} \ln(\tilde{z})g_2(\tilde{z})\bar{N}k_B \left(\frac{T}{T_c}\right)^2, \end{aligned} \quad (3.36)$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo riconosciuto che integrando per parti si ha

$$-\int_0^{\infty} dx x \ln(1 - \tilde{z}e^{-x}) = -\left[\frac{x^2}{2} \ln(1 - \tilde{z}e^{-x}) \right]_0^{\infty} + g_3(\tilde{z}) = g_3(\tilde{z}). \quad (3.37)$$

In presenza di condensato, l'entropia vale dunque

$$S(T) = \frac{6\zeta(3)k_B}{(\beta\hbar\omega_\perp)^2} = \frac{18\zeta(3)}{\pi^2}\bar{N}k_B\left(\frac{T}{T_c}\right)^2. \quad (3.38)$$

e, in accordo con il postulato di Nernst, $S(T) \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$.

Gli andamenti delle tre funzioni sono riportati in figura 3.3, unitamente ai risultati ottenuti da [9].

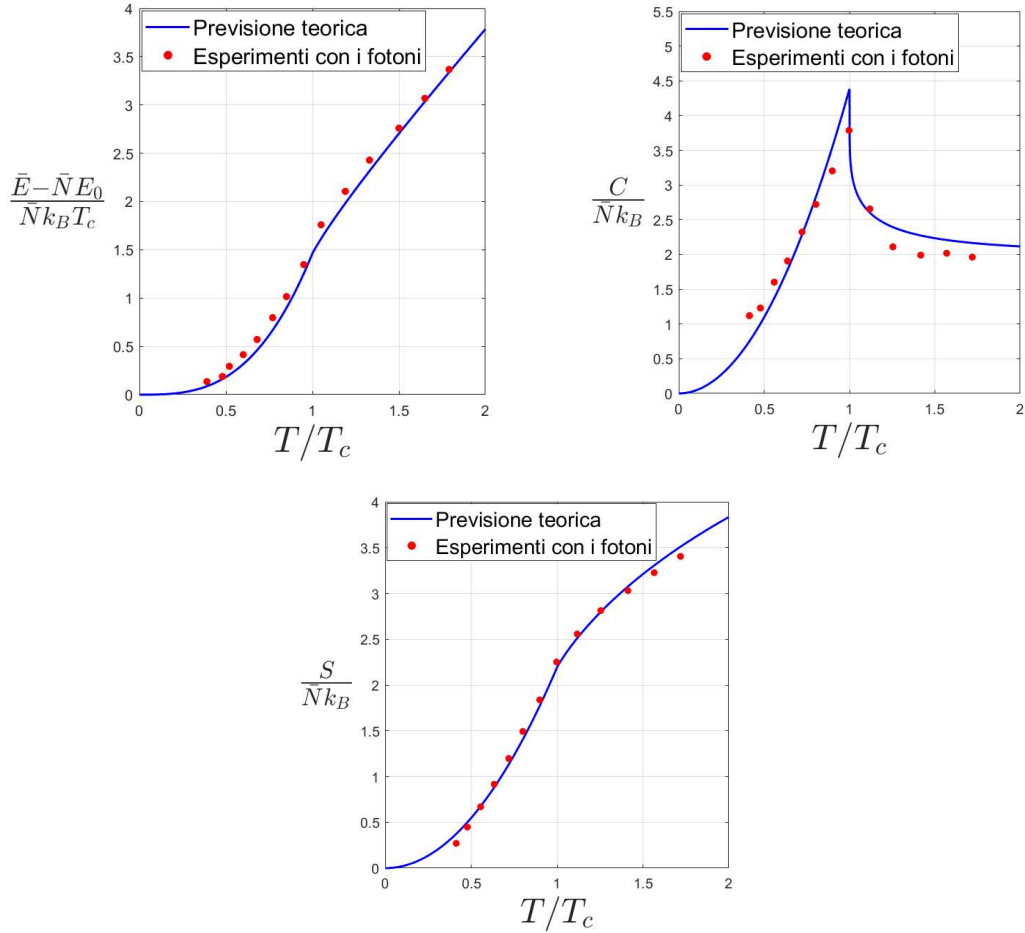


Figura 3.3: Nell'ordine, andamento delle funzioni (ridotte) energia interna, capacità termica, entropia. Si noti che le tre sono funzioni della sola temperatura, essendo $\tilde{z} = \tilde{z}(T)$ soluzione della (3.23). I dati sono presi da [9]

3.3 Profili di densità e correlazione spaziale

L'espressione (3.10), esplicitando il numero di fotoni \bar{N}_T che costituiscono la componente termica, vale a dire non condensata, si scrive

$$\bar{N} = \bar{N}_0(T) + \bar{N}_T(T). \quad (3.39)$$

Una rilettura di questa relazione si può avere in termini di densità spaziale:

$$\bar{n}(x, y) = \bar{n}_0(x, y) + \bar{n}_T(x, y), \quad (3.40)$$

dove naturalmente

$$\bar{N}_0 = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \bar{n}_0(x, y), \quad \bar{N}_T = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \bar{n}_T(x, y). \quad (3.41)$$

Richiamiamo brevemente, in vista del calcolo delle densità, il formalismo degli operatori di campo bosonici:

$$\hat{\psi}(x, y) = \sum_{\alpha} \hat{a}_{\alpha} \phi_{\alpha}(x, y), \quad (3.42)$$

$$\hat{\psi}^{\dagger}(x, y) = \sum_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \phi_{\alpha}^*(x, y), \quad (3.43)$$

dove $\phi_{\alpha}(x, y) = \langle x, y | \alpha \rangle$ è la funzione d'onda di singola particella, \hat{a}_{α} l'operatore di annichilazione sul modo α e gli apici di daga e asterisco indicano, rispettivamente, le operazioni di aggiunta e complessa coniugazione. Detto $|\nu_{\alpha}\rangle$ lo stato con ν_{α} bosoni nello stato α , gli operatori \hat{a}_{α} e $\hat{a}_{\alpha}^{\dagger}$ soddisfano le note proprietà:

$$\hat{a}_{\alpha} |\nu_{\alpha}\rangle = \sqrt{\nu_{\alpha}} |\nu_{\alpha} - 1\rangle, \quad \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} |\nu_{\alpha}\rangle = \sqrt{\nu_{\alpha} + 1} |\nu_{\alpha} + 1\rangle \quad (3.44)$$

e relazioni di commutazione:

$$[\hat{a}_{\alpha}, \hat{a}_{\alpha'}] = 0, \quad [\hat{a}_{\alpha}^{\dagger}, \hat{a}_{\alpha'}^{\dagger}] = 0, \quad [\hat{a}_{\alpha}, \hat{a}_{\alpha'}^{\dagger}] = \delta_{\alpha, \alpha'}. \quad (3.45)$$

La funzione di correlazione al prim'ordine è definita

$$G^{(1)}(x, y, x', y') = \langle \hat{\psi}^{\dagger}(x, y) \hat{\psi}(x', y') \rangle. \quad (3.46)$$

Riusciamo a mostrarne un'utile riscrittura:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x, y, x', y') &= \langle \hat{\psi}^{\dagger}(x, y) \hat{\psi}(x', y') \rangle = \sum_{\alpha, \alpha'} \langle \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha'} \rangle \phi_{\alpha}^*(x, y) \phi_{\alpha'}(x', y') \\ &= \sum_{\alpha, \alpha'} \langle \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha} \rangle \delta_{\alpha, \alpha'} \phi_{\alpha}^*(x, y) \phi_{\alpha'}(x', y') \\ &= \sum_{\alpha} \langle \hat{N}_{\alpha} \rangle \phi_{\alpha}^*(x, y) \phi_{\alpha}(x', y'), \end{aligned} \quad (3.47)$$

dove si è introdotto l'operatore $\hat{N}_{\alpha} = \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha}$ che “conta” il numero di bosoni nello stato:

$$\hat{N}_{\alpha} |\nu_{\alpha}\rangle = \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha} |\nu_{\alpha}\rangle = \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \sqrt{\nu_{\alpha}} |\nu_{\alpha} - 1\rangle = \nu_{\alpha} |\nu_{\alpha}\rangle. \quad (3.48)$$

Se si sceglie $x = x'$, $y = y'$, si ottiene appunto la densità di bosoni:

$$\bar{n}(x, y) = \langle \hat{\rho}(x, y) \rangle = \sum_{\alpha} \langle \hat{N}_{\alpha} \rangle |\phi_{\alpha}(x, y)|^2, \quad (3.49)$$

che stavamo cercando. In presenza di condensato di Bose-Einstein, otteniamo

$$\bar{n}_0(x, y) = \langle \hat{N}_0 \rangle |\phi_0(x, y)|^2. \quad (3.50)$$

Trattandosi di problema di oscillatore armonico, le autofunzioni si esprimono in termini dei polinomi di Hermite:

$$\phi_{\alpha}(x, y) = \phi_{n_x, n_y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2^{n_x+n_y} n_x! n_y!}} \left(\frac{1}{\pi \ell_{\perp}^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\ell_{\perp}^2}} H_{n_x} \left(\frac{x}{\ell_{\perp}} \right) H_{n_y} \left(\frac{y}{\ell_{\perp}} \right), \quad (3.51)$$

dove è stata introdotta la lunghezza armonica caratteristica

$$\ell_{\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega_{\perp}}}. \quad (3.52)$$

Segue quindi, per la densità della frazione di condensato,

$$\bar{n}_0(x, y) = \frac{\bar{N}_0}{\pi \ell_{\perp}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{\ell_{\perp}^2}}; \quad (3.53)$$

in effetti, integrando, si trova immediatamente la prima delle (3.41) dalle proprietà dell'integrale di Gauss. Anche la funzione di correlazione è immediata in regime di condensato:

$$G_0^{(1)}(x, y, x', y') = \frac{\bar{N}_0}{\pi \ell_{\perp}^2} e^{-\frac{x^2+y^2+x'^2+y'^2}{2\ell_{\perp}^2}}. \quad (3.54)$$

Per la frazione di fotoni termici, invece, il conto è più delicato. In linea generale, la funzione di correlazione $G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è legata alla funzione di Wigner $W(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ per mezzo di una trasformata di Fourier in dimensione D :

$$\begin{aligned} W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int d^D \boldsymbol{\xi} e^{-\frac{i\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}}{\hbar}} \left\langle \hat{\psi}^{\dagger} \left(\mathbf{q} - \frac{\boldsymbol{\xi}}{2} \right) \hat{\psi} \left(\mathbf{q} + \frac{\boldsymbol{\xi}}{2} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int d^D \boldsymbol{\xi} e^{-\frac{i\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}}{\hbar}} G^{(1)} \left(\mathbf{q} - \frac{\boldsymbol{\xi}}{2}, \mathbf{q} + \frac{\boldsymbol{\xi}}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

La funzione di Wigner gioca, in meccanica quantistica, un ruolo analogo a quello della funzione di distribuzione nello spazio delle fasi (\mathbf{q}, \mathbf{p}) in meccanica classica. Antitrasformando, abbiamo viceversa:

$$G^{(1)}\left(\mathbf{q} - \frac{\boldsymbol{\xi}}{2}, \mathbf{q} + \frac{\boldsymbol{\xi}}{2}\right) = \int d^D \mathbf{p} e^{\frac{i\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}}{\hbar}} W(\mathbf{p}, \mathbf{q}); \quad (3.56)$$

con le sostituzioni $\mathbf{r} = \mathbf{q} - \frac{\boldsymbol{\xi}}{2}$, $\mathbf{r}' = \mathbf{q} + \frac{\boldsymbol{\xi}}{2}$, possiamo scrivere

$$G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d^D \mathbf{p} e^{-\frac{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\hbar}} W\left(\mathbf{p}, \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}\right). \quad (3.57)$$

Per semplificare il calcolo, introduciamo un'approssimazione, immaginando che la funzione di Wigner sia identica localmente alla distribuzione di momento con energia potenziale U costante e pari al valore locale $U(\mathbf{q})$:

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \frac{1}{e^{\beta(\mathbf{p}^2/2m + U(\mathbf{q}) - \mu)} - 1}. \quad (3.58)$$

Abbiamo pertanto, nel caso di interesse con $D = 2$ e usando la massa efficace,

$$G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2 \mathbf{p} \frac{e^{-\frac{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\hbar}}}{e^{\beta(\mathbf{p}^2/2m^* + U(\frac{\mathbf{r}+\mathbf{r}'}{2}) - \mu)} - 1}. \quad (3.59)$$

Se introduciamo la lunghezza d'onda termica di de Broglie

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m^* k_B T}} \quad (3.60)$$

e una generalizzazione della funzione di Bose

$$\tilde{g}_1(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^m \eta^{1/m}}{m}, \quad (3.61)$$

la (3.59) assume una forma più compatta, la cui deduzione si rimanda all'Appendice:

$$G_T^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\lambda_T^2} \tilde{g}_1\left(e^{\beta(\mu - U(\frac{\mathbf{r}+\mathbf{r}')}{2})}, e^{-\pi \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{\lambda_T^2}}\right), \quad (3.62)$$

e nelle nostre notazioni:

$$G_T^{(1)}(x, y, x', y') = \frac{2}{\lambda_T^2} \tilde{g}_1\left(e^{\beta(\tilde{\mu} - \frac{1}{8} m^* \omega_{\perp}^2 [(x+x')^2 + (y+y')^2])}, e^{-\pi \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\lambda_T^2}}\right). \quad (3.63)$$

L'approssimazione appena impiegata è nota alla letteratura come *approssimazione di densità locale*, ed è tanto migliore quanto più lentamente varia il potenziale U su lunghezze confrontabili con λ_T . In altre parole, deve valere $\lambda_T \ll \ell_{\perp}$, o equivalentemente $\hbar\omega_{\perp} \ll k_B T$ (come è il caso per questi sistemi [5]). La trattazione

esatta è invece affrontata in [10]. Si noti comunque che, scegliendo $x = x'$, $y = y'$, la relazione approssimata dà la densità esatta di fotoni termici:

$$\bar{n}_T(x, y) = \frac{2}{\lambda_T^2} g_1 \left(e^{\beta(\bar{\mu} - \frac{1}{2} m^* \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2))} \right). \quad (3.64)$$

Se integrata nello spazio, essa restituisce in effetti la seconda delle (3.41).

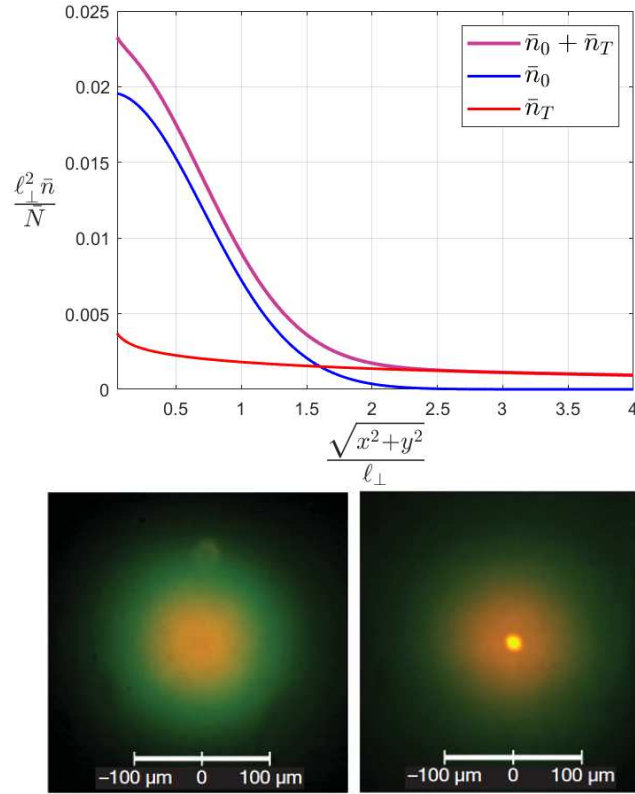


Figura 3.4: Sopra: profili di densità radiale fissati i parametri $\frac{k_B T}{\hbar \omega_{\perp}} = 150$, $\frac{\bar{N}}{N_c} = 1.02$. Sotto: immagini delle distribuzioni spaziali, rispettivamente, sotto e sopra il punto critico (prese da [5])

Come evidente anche dalla figura 3.4, l'emergenza del condensato si nota al centro della cavità in cui ha un massimo la gaussiana (3.53) che ne descrive la densità. La nube termica ha un forma simil-gaussiana, ma caratterizzata da una larghezza maggiore.

Conclusioni

Partendo dal sistema dei fotoni liberi, è stato menzionato il problema della condensazione di Bose-Einstein per i fotoni. Si è introdotto l'apparato della microcavità ottica ed è stato dedotto, ricavando anche la relazione di dispersione, che il gas di fotoni è un analogo formale di un sistema di bosoni massivi confinati armonicamente, il cui numero si conserva. Nell'ultimo capitolo, si è mostrato che tale gas può transire allo stato di condensato di Bose-Einstein se viene iniettato un numero sufficiente di fotoni e si è condotta la caratterizzazione di alcune proprietà delle frazioni termica e condensata; in particolare, sono state ricavate le formulazioni dell'energia interna, della capacità termica e dell'entropia e se ne è visto il riscontro con i dati sperimentali. Infine si è arrivati all'espressione della densità spaziale e delle funzioni di correlazione.

Il pregio di tali sistemi, come si è avuto modo di mostrare solo in maniera succinta perché esula dagli scopi di questo lavoro, risiede nella realizzabilità della controparte sperimentale e nel confronto con le previsioni della teoria. È possibile, pertanto, realizzare la verifica anche delle espressioni di grandezze che sono in generale di più difficile accesso sperimentale; un esempio è dato dalle funzioni di correlazione spaziale e temporale a vari ordini, di cui si è dato un accenno nell'ultimo capitolo e come si vede in più o meno recenti articoli [12–14].

Bibliografia

- [1] C. Ciuti. “Statistical flickers in a Bose-Einstein Condensate of Photons”. In: *Physics* 7 (2014), p. 7.
- [2] A. Crisanti et al. “Canonical vs. Grand Canonical Ensemble for Bosonic Gases under Harmonic Confinement”. In: *Entropy* 26 (2024), p. 367.
- [3] D. Dung et al. “Variable potentials for thermalized light and coupled condensates”. In: *Nature Photonics* 11 (2017), pp. 565–569.
- [4] M. Calvanese Strinati, F. Vewinger e C. Conti. “Nonlocality-induced surface localization in Bose-Einstein condensates of light”. In: *Physical Review A* 105 (2022), p. 043318.
- [5] J. Klaers et al. “Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity”. In: *Nature* 468 (2010), pp. 545–548.
- [6] R. C. Hilborn. “Einstein coefficients, cross sections, f values, dipole moments, and all that”. In: *Am. J. Phys* 50 (1982), pp. 982–986.
- [7] E. H. Kennard. “On the thermodynamics of fluorescence”. In: *Physical Review* 11 (1918), p. 29.
- [8] J. Klaers, F. Vewinger e M. Weitz. “Thermalization of a two-dimensional photonic gas in a ‘white wall’ photon box”. In: *Nature Physics* 6 (2010), pp. 512–515.
- [9] T. Damm et al. “Calorimetry of a Bose-Einstein-condensed photon gas”. In: *Nature communications* 7 (2016), p. 11340.
- [10] M. Naraschewski e R. J. Glauber. “Spatial coherence and density correlations of trapped Bose gases”. In: *Physical Review A* 59 (1999), p. 4595.
- [11] N. D. Mermin e H. Wagner. “Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or two-dimensional isotropic Heisenberg models”. In: *Physical Review Letters* 17 (1966), p. 1133.
- [12] T. Damm et al. “First-order spatial coherence measurements in a thermalized two-dimensional photonic quantum gas”. In: *Nature communications* 8 (2017), p. 158.
- [13] J. Schmitt. “Dynamics and correlations of a Bose-Einstein condensate of photons”. In: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 51 (2018), p. 173001.
- [14] Y. Tang et al. “Photon-photon correlation of condensed light in a microcavity”. In: *Physical Review A* 109 (2024), p. 043713.
- [15] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.

Appendice

In questa sezione sono raccolte le deduzioni di alcune espressioni di carattere prettamente matematico.

Deduzione della relazione (2.4)

L'espressione esplicita di $D(r)$ data dall'equazione (2.4) è ricavabile per via geometrica. Il triangolo ombreggiato di figura 5 ha lati di misure r , R e $(R - \frac{D_0}{2} + \frac{D(r)}{2})$. Dal teorema di pitagora applicato al triangolo otteniamo:

$$\begin{aligned} r^2 + \left(R - \frac{D_0}{2} + \frac{D(r)}{2} \right)^2 &= R^2 \\ R - \frac{D_0}{2} + \frac{D(r)}{2} &= \sqrt{R^2 - r^2} \\ D(r) &= D_0 - 2 \left(R - \sqrt{R^2 - r^2} \right), \end{aligned}$$

che è la cercata relazione.

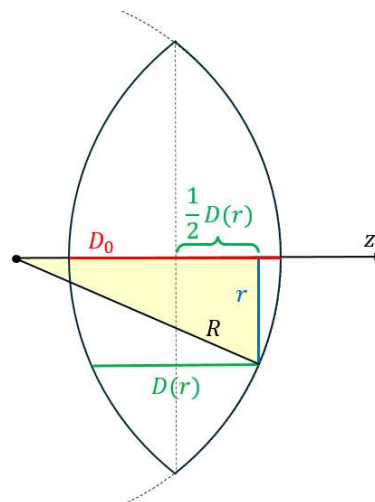


Figura 5: Struttura geometrica della cavità

Deduzione della relazione (3.33)

La relazione (3.33) segue dai seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} g_1(\tilde{z}) &= \int_0^\infty dx \frac{1}{\tilde{z}^{-1}e^x - 1} \\ (u \equiv e^x) &= \int_1^\infty du \frac{1}{\tilde{z}^{-1}u - 1} \frac{1}{u} = \int_1^\infty du \frac{\tilde{z}}{u(u - \tilde{z})} = \int_1^\infty du \left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{u - \tilde{z}} \right) \\ &= \ln \left(\frac{u - \tilde{z}}{u} \right) \Big|_1^\infty = -\ln(1 - \tilde{z}). \end{aligned}$$

Deduzione della relazione (3.62)

Nella (3.59) poniamo

$$A = e^{\beta(\mu - U(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}))},$$

giacché il termine rimarrà immutato. Detto θ_r l'angolo formato dal vettore $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ con l'asse x , l'integrale in coordinate polari piane si scrive:

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dp \frac{p e^{-\frac{i}{\hbar} p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos(\theta - \theta_r)}}{A^{-1} e^{\beta \frac{p^2}{2m}} - 1} = \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty dp \frac{p J_0\left(\frac{p}{\hbar} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right)}{A^{-1} e^{\beta \frac{p^2}{2m}} - 1},$$

dove

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-ix \cos \theta}$$

è una possibile rappresentazione integrale della funzione di Bessel del primo tipo e ordine zero [15] e θ_r può essere banalmente rimosso con un cambio di variabile. Proseguendo,

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty dp \frac{p J_0\left(\frac{p}{\hbar} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right)}{A^{-1} e^{\beta \frac{p^2}{2m}} - 1} &= \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty dp p J_0\left(\frac{p}{\hbar} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(A^{-1} e^{\beta \frac{p^2}{2m}}\right)^{-k} \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^2} \sum_{k=1}^{\infty} A^k \int_0^\infty dp p J_0\left(\frac{p}{\hbar} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) e^{-k\beta \frac{p^2}{2m}}. \end{aligned}$$

Un'utile proprietà della funzione di Bessel [15] è:

$$\int_0^\infty dx x e^{-\alpha x^2} J_0(\gamma x) = \frac{1}{(2\alpha)} e^{-\gamma^2/4\alpha},$$

nel nostro caso con $\alpha = \frac{k\beta}{2m}$ e $\gamma = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\hbar}$; in questo modo, arriviamo a

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^2} \frac{m}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k} e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{\hbar^2} \frac{m}{2k\beta}} &= \frac{1}{\lambda_T^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k} e^{-\pi \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{k\lambda_T^2}} \\ &= \frac{1}{\lambda_T^2} \tilde{g}_1 \left(e^{\beta(\mu - U(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}))}, e^{-\pi \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{\lambda_T^2}} \right), \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.