Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Coomologia di de Rham e Teorema di de Rham

Relatore:
Prof. Ernesto Carlo Mistretta

Laureando:
Giacomo Scodro
Matricola 1217923

Anno Accademico 2021/2022
21 luglio 2022

In the broad light of day mathematicians
check their equations and their proofs,
leaving no stone unturned
in their search for rigour.
But, at night, under the full moon,
they dream, they float among the stars
and wonder at the miracle of the heavens.
They are inspired. Without dreams
there is no art, no mathematics, no life.

Sir Michael F. Atiyah

Indice

Introduzione

L'obiettivo del presente elaborato è studiare nel dettaglio la coomologia di de Rham e presentare il teorema di de Rham, dandone due diverse dimostrazioni: una, che si deve a Glen E. Bredon, utilizzerà classici argomenti della topologia, mentre l'altra farà uso della teoria dei fasci.

Nel primo capitolo introdurremo gli oggetti matematici necessari alla trattazione. Definiremo le forme differenziali ed il loro prodotto wedge, discuteremo una teoria dell'integrazione di forme su varietà differenziabili, e dimostreremo il *Teorema di Stokes*, risultato centrale della geometria differenziale. Inoltre, introducendo un operatore di derivazione esterna, definiremo cosa intendiamo per forma differenziale *chiusa* ed *esatta*. Pur valendo che ogni forma differenziale esatta sia anche chiusa, osserveremo come non valga il viceversa.

La coomologia di de Rham, che verrà trattata nel secondo capitolo, si occupa proprio di studiare quando accade che in una varietà differenziabile siano presenti forme chiuse che non sono esatte. Una misura di questo fenomeno ci viene fornita dai gruppi di coomologia di de Rham, che mostreremo essere invarianti topologici. In maniera analoga, definiremo anche una teoria coomologica considerando solo forme differenziali a supporto compatto, e vedremo come queste due costruzioni siano legate da una relazione di dualità, nota come *dualità di Poincaré*. Tratteremo molti risultati classici legati alla coomologia di de Rham, tra cui il *Lemma di Poincaré* ed il *Teorema di Mayer-Vietoris*.

Nel terzo capitolo svilupperemo il sostrato teorico necessario a comprendere a pieno il teorema di de Rham. Introdurremo l'*omologia singolare*, un argomento della topologia che rappresenta una generalizzazione del concetto di *gruppo fondamentale*, e la *coomologia singolare*, definita considerando una sorta di "duale" dell'omologia singolare. Presenteremo, quindi, il Teorema di de Rham, che lega con un isomorfismo la coomologia singolare e quella di de Rham, implicando che l'ostruzione che una forma differenziale chiusa incontra nell'essere esatta è un problema meramente topologico, e legato all'omologia singolare, ossia alla presenza di buchi nello spazio topologico sottostante alla varietà differenziabile. Daremo, quindi, la dimostrazione di Glen E. Bredon di tale teorema.

Nel quarto ed ultimo capitolo daremo un'altra dimostrazione del Teorema di de

Rham con un approccio totalmente diverso: ci serviremo della teoria dei fasci. In particolare, vedremo che il funtore che associa ad un fascio la sua sezione globale è esatto a sinistra, ma non a destra, poiché un epimorfismo di fasci non induce necessariamente un morfismo suriettivo sulle sezioni globali. Per studiare questo problema, la coomologia dei fasci introduce degli invarianti, detti *oggetti derivati*, che, sotto alcune ipotesi, mostreremo coincidere con i gruppi di coomologia della risoluzione di un fascio. Queste osservazioni saranno la chiave per mostrare nuovamente l'equivalenza tra la coomologia singolare e quella di de Rham.

Capitolo 1

Forme Differenziali

In questo primo capitolo, dopo una rapida introduzione a dei fatti generali di geometria differenziale, presenteremo gli oggetti matematici necessari alla trattazione del vero e proprio argomento di questo lavoro: la coomologia di de Rham ed il Teorema di de Rham.

Prima di tutto, definiremo e studieremo le *forma differenziali*, mediante l'uso dei *tensori alternanti*. Introdurremo, quindi, un operazione tra le forme differenziali, detta *prodotto wedge*, che renderà lo spazio vettoriale di tutte le forme su una varietà un'algebra associativa, anticommutativa e graduata. Inoltre, sarà particolarmente importante definire un operazione di *derivazione esterna*, che generalizza il concetto di differenziale di una funzione, associando, ad ogni una forma differenziale, una forma di un grado più alto. Tale operatore ci consentirà di definire che cosa intendiamo per forma differenziale *chiusa* ed *esatta*, consentendoci di esplorare, nei capitoli successivi, le relazioni tra tali famiglie di forme.

Seguirà una breve parte sull'orientamento di varietà differenziabili. Come è noto, è possibile associare ad ogni spazio vettoriale due orientamenti, considerando le sue basi ordinate e il segno del determinante delle matrici di cambiamento di base. Partendo da quest'idea definiremo come si può associare un orientamento ad una varietà differenziabile, servendoci degli spazi tangenti alla varietà in ogni punto.

Le forme differenziali che abbiamo introdotto ci consentiranno di definire una teoria dell'integrazione su varietà differenziabili, partendo da domini in spazi Euclidei, e generalizzando la definizione su varietà differenziabili generiche, con l'ausilio della partizione dell'unità. La caratteristica più importante delle definizioni che porremo sarà l'invarianza per diffeomorfismi che preservano l'orientamento. Dimostreremo, infine il *Teorema di Stokes*, un risultato tra i più importanti della geometria differenziale, che rappresenta una generalizzazione del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

1.1 Varietà Differenziabili

Iniziamo dando alcune basilari nozioni di geometria differenziale, per fissare le notazioni. Dato uno spazio topologico X, e un aperto $U \subseteq X$, una ***n*-carta locale** è una coppia (U, φ_U), dove $\varphi_U : U \to W \subseteq \mathbb{R}^n$, con W aperto, è un omeomorfismo. Chiameremo U **aperto coordinato**. Due n-carte locali (U, φ_U) e (V, φ_V) si dicono C^k-compatibili se $U \cap V = \varnothing$ o se le **mappe di transizione**

$$\varphi_V \circ (\varphi_U)^{-1} : \varphi_U(U \cap V) \to \varphi_V(U \cap V)$$

sono mappe C^k. Un ***n*-atlante C^k-differenziabile** di uno spazio topologico X è una famiglia di n-carte locali $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ C^k-compatibili, con $\{U_\lambda\}$ ricoprimento aperto di X. Dunque, una ***n*-varietà C^k-differenziabile** è il dato di uno spazio topologico con un n-atlante C^k-differenziabile. D'ora in avanti, chiameremo semplicemente **varietà differenziabile** una varietà C^∞-differenziabile.

Chiameremo, invece, **varietà differenziabile con bordo** un oggetto simile al precedente, ma le cui carte locali (U, φ) sono omeomorfismi del tipo

$$\varphi : U \to W \subseteq \mathbb{H}^n = \{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n,\ x^n \geq 0\},$$

con W aperto. Diremo, allora, che $p \in M$ è un punto interno di M se sta nel dominio di una carta locale interna (ossia una carta la cui immagine è un aperto in $\mathbb{R}^n$), oppure è un punto di bordo di M se sta in una carta di bordo (ossia in una carta la cui immagine non è un aperto di $\mathbb{R}^n$, o, in altre parole, $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \varnothing$).

Date due varietà differenziabili M ed N, diremo che una mappa $F : M \to N$ è di classe C^∞ se per ogni $p \in M$ esistono carte locali (U, φ) e (V, ψ), con $p \in U$ e $F(p) \in V$, tali che

$$\psi \circ\ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

sia una mappa C^∞. Diremo che tale mappa è un **diffeomorfismo** se F è biiettiva ed anche F^{-1} è di classe C^∞.

Data una varietà differenziabile M, e (x^i) coordinate locali per un intorno di $p \in M$, lo **spazio tangente** a M in p è lo spazio vettoriale delle derivazioni in p, ossia lo spazio delle applicazioni lineari $\nu : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tali che

$$\nu(fg) = f(p)\nu g + g(p)\nu f \quad \text{per ogni } f, g \in C^\infty(M).$$

Tale spazio vettoriale risulta essere generato dalle derivate, ossia

$$T_pM = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}|_p; \cdots ; \frac{\partial}{\partial x^n}|_p \right\rangle.$$

Lo **spazio cotangente** a M in p è il suo duale, cioè

$$T_p^*M = \left\langle dx^1|_p; \cdots ; dx^n|_p \right\rangle.$$

Inoltre, dato $F : M \to N$ diffeomorfismo, per ogni $p \in M$ possiamo definire un'applicazione, detta **differenziale** di F in p,

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N,$$

tale che, data una derivazione $\nu \in T_pM$, e una funzione $f \in C^\infty(N)$, si abbia che

$$dF_p(\nu)(f) = \nu(f \circ F).$$

Definiamo il **fibrato tangente** di M come l'unione disgiunta di degli spazi tangenti a M in p, al variare di $p \in M$, ossia

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM,$$

La costruzione analoga si ha per il fibrato cotangente. Osserviamo che esiste una naturale mappa di proiezione $\pi : TM \to M$ che manda ogni vettore in T_pM nel punto a cui è tangente, ossia p. In generale, dato un fibrato vettoriale E, con la sua mappa di proiezione π, chiameremo **sezione** di E una mappa continua $\sigma : M \to E$ tale che $\pi \circ \sigma = id_M$.

Un altro strumento importante che ha un ampio utilizzo in geometria differenziale è la partizione dell'unità. Ossia, data una varietà differenziabile M, ed un suo ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$, si può mostrare che, per ogni i, esistono funzioni $\psi_i : M \to \mathbb{R}$ che siano C^∞ con le seguenti proprietà:

- $0 \leq \psi_i(p) \leq 1$ per ogni $i \in I$ e per ogni $p \in M$;
- $\text{supp}(\psi_i) \subseteq U_i$ per ogni $i \in I$;
- $\{\text{supp}(\psi_i)\}_{i\in I}$ è una famiglia localmente finita, ossia ogni punto di M ha un intorno che interseca $\text{supp}(\psi_i)$ solo per finiti $i \in I$;
- $\sum_{i\in I} \psi_i(p) = 1$ per ogni $p \in M$.

Una tale famiglia di funzioni viene detta **partizione dell'unità** associata al ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$. Usando questo strumento è possibile dimostrare l'esistenza di particolari tipi di funzioni, come, ad esempio, la **funzione di test**, ossia una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ tale che, dati $C \subseteq U \subseteq M$, con C chiuso e U aperto, soddisfi $0 \leq f \leq 1$, $f \equiv 1$ in C, e $\text{supp}(f) \subseteq U$. Un'altra particolare funzione che è possibile costruire grazie alla partizione dell'unità è la **exhaustion function**, cioè una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ tale che $f^{-1}(]-\infty; c])$ è compatto per ogni $c \in \mathbb{R}$.

1.2 Tensiori Alternanti

Sia V uno spazio vettoriale reale finito-dimensionale e α un k-tensore covariante su V, ossia un elemento di

$$T^k(V^*) = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k \text{ copie}} \cong \mathrm{Hom}(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ copie}}; \mathbb{R}).$$

Ricordiamo che l'isomorfismo indicato vale solo per spazi finito-dimensionali, che è il caso in cui ci troveremo sempre. Diremo che α è **alternante** se il suo valore cambia segno non appena due elementi del suo argomento vengono scambiati. I k-tensori covarianti alternanti vengono anche chiamati ***k*-covettori**. Denoteremo lo spazio di tutti i k-covettori su V con $\Lambda^k(V^*)$. Per i k-tensori covarianti valgono le seguenti condizioni:

Lemma 1.1. *Sia α un k-tensore covariante su uno spazio vettoriale di dimensione finita V. Allora le seguenti sono equivalenti:*

- *α è alternante;*
- *$\alpha(v_1, \cdots, v_k) = 0$ se $v_1, \cdots, v_k$ sono linearmente dipendenti;*
- *α si annulla se due elementi del suo argomento sono uguali.*

Introduciamo un'utile notazione che ci consentirà di operare con tensori alternanti con più scioltezza. Dato un intero positivo k, chiameremo **multi-indice** di lunghezza k la tupla ordinata $I = (i_1, \cdots, i_k)$, e, data $\sigma \in S_k$, porremo $I_\sigma = (i_{\sigma(1)}, \cdots, i_{\sigma(k)})$.

Dato uno spazio vettoriale n-dimensionale V, sia $(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n)$ una base per V^*. Vogliamo generalizzare la funzione determinante su $\mathbb{R}^n$, pertanto, per ogni multi-indice $I = (i_1, \cdots, i_k)$ di lunghezza k tale che $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$, definiamo il k-tensore covariante $\varepsilon^I = \varepsilon^{i_1 \cdots i_k}$ come

$$\varepsilon^I(v_1, \cdots v_k) = \det \begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{i_k}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_k}(v_k) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_k^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{i_k} & \cdots & v_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

In altre parole, se A è la matrice $n \times k$ dove le colonne sono i vettori $v_1, \cdots, v_k$ rispetto alla base (e_i), duale di (ε^i), allora $\varepsilon^I(v_1, \cdots, v_k)$ è il determinante della matrice $k \times k$ formata dalle righe $i_1, \cdots, i_k$ di A. Visto che il determinante cambia segno ogni volta che vengono scambiate due colonne, è chiaro che ε^I sia un k-tensore alternante. Chiameremo tale ε^I **tensore alternante elementare**, o k-covettore elementare. I k-covettori elementari godono delle seguenti proprietà:

Lemma 1.2. *Sia (e_i) una base per V, sia (ε^i) la base duale per V^*, e sia ε^I come sopra. Allora vale che:*

- *Se I ha un indice ripetuto, allora $\varepsilon^I = 0$;*
- *Se $J = I_\sigma$ per qualche $\sigma \in S_k$, allora $\varepsilon^I = (sgn\sigma)\varepsilon^I$;*
- *Valutando ε^I su una sequenza di vettori di base si ottiene*

$$\varepsilon^I(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = \delta^I_J.$$

L'importanza dei k-covettori elementari è, opportunamente scelti, che forniscono una base per lo spazio $\Lambda^k(V^*)$. Diremo che un multi-indice $I = (i_1, \cdots, i_k)$ è crescente se $i_1 < \cdots < i_k$, e denoteremo una sommatoria fatta esclusivamente con multi-indici crescenti nel modo seguente:

$$\sum_I{}' \alpha_I \varepsilon^I = \sum_{\{I,\ i_1 < \cdots < i_k\}} \alpha_I \varepsilon^I.$$

Proposizione 1.3 (Base per $\boldsymbol{\Lambda^k(V^*)}$). *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Se (ε^i) è una base per V^*, allora per ogni intero positivo $k \leq n$, l'insieme dei k-covettori*

$$\mathscr{E} = \{\varepsilon^I,\ I \textit{ multi-indice crescente di lunghezza } k\}$$

è una base per $\Lambda^k(V^*)$, e pertanto

$$dim\Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dimostrazione. Dal Lemma 1.1 segue che $\Lambda^k(V^*)$ è lo spazio vettoriale banale quando $k > n$. Per $k \leq n$ dobbiamo mostrare che $\mathscr{E}$ genera $\Lambda^k(V^*)$ ed è formato da vettori linearmente indipendenti. Sia, dunque, (e_i) base per V, duale di (ε^i).

Mostriamo che $\mathscr{E}$ genera $\Lambda^k(V^*)$. Sia $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$, e definiamo, per ogni multi-indice $I = (i_1, \cdots, i_k)$, il numero reale

$$\alpha_I = \alpha(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}).$$

Il fatto che α sia alternante implica che $\alpha_I = 0$ se I contiene indici ripetuti, e $\alpha_J = (\mathrm{sgn}\sigma)\alpha_I$ se $J = I_\sigma$ per $\sigma \in S_k$. Allora, per ogni multi-indice J, dal lemma precedente, otteniamo che

$$\sum_I{}' \alpha_I \varepsilon^I(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = \sum_I{}' \alpha_I \delta^I_J = \alpha_J = \alpha(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}).$$

Così abbiamo tovato che $\sum_I' \alpha_I \varepsilon^I = \alpha$, e dunque $\mathscr{E}$ genera $\Lambda^k(V^*)$.

Mostriamo che $\mathscr{E}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti. Supponiamo che valga $\sum_I' \alpha_I \varepsilon^I = 0$ per alcuni coefficienti α_I. Sia J un multi-indice crescente. Applicando ambo i membri dell'identità ai vettori $(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k})$, ed usando il lemma precedente, otteniamo che

$$0 = \sum_I{}' \alpha_I \varepsilon^I(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = \alpha_J,$$

da cui ogni coefficiente α_J deve essere nullo. □

Vogliamo ora definire un prodotto tra tensori alternanti. Sia, dunque, V uno spazio vettoriale reale finito-dimensionale. Definiamo la proiezione $\mathrm{Alt} : T^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$ come segue:

$$\mathrm{Alt}(\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma)({}^\sigma\alpha),$$

dove S_k è il gruppo simmetrico su k elementi. Più esplicitamente,

$$\mathrm{Alt}(\alpha)(v_1, \cdots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma)\ \alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}).$$

Si ha che $\mathrm{Alt}(\alpha)$ è alternante, e $\mathrm{Alt}(\alpha) = \alpha$ se e solo se α è alternante.

Ora, dati $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ e $\eta \in \Lambda^l(V^*)$, definiamo il loro **prodotto wedge**, o **prodotto esterno** come il seguente $(k+l)$-covettore:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

La presenza di quel misterioso coefficiente è motivata dalla semplicità del lemma a seguire.

Lemma 1.4. *Sia V uno spazio vettoriale n-dimensionale, e sia $(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n)$ base per V^*. Comunque scelti $I = (i_1, \cdots, i_k)$ e $J = (j_1, \cdots, j_l)$ multi-indici, si ha che*

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ},$$

dove $IJ = (i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l)$ è ottenuto concatenando I e J.

Dimostrazione. Sia $(e_1, \cdots, e_n)$ base per V, duale di (ε^i). Grazie alla multilinearità, è sufficiente mostrare che

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(e_{p_1}, \cdots, e_{p_{k+l}}) = \varepsilon^{IJ}(e_{p_1}, \cdots, e_{p_{k+l}})$$

per ogni sequenza $(e_{p_1}, \cdots, e_{p_{k+l}})$ di vettori di base. Trattiamo diversi casi:

CASO 1: *$P = (p_1, \cdots p_{k+l})$ ha un indice ripetuto.* In tal caso entrambi i membri dell'uguaglianza sono nulli per il Lemma 1.1.

CASO 2: *P contiene un indice che non appare né in I né in J.* In tal caso il membro di destra è nullo per il Lemma 1.2. Similmente, ogni termine nell'espansione del membro di sinistra coinvolge o ε^I o ε^J valutati in una sequenza di vettori di base che non è permutazione di I e di J rispettivamente. Quindi anche il membro di sinistra è nullo.

CASO 3: *$P = IJ$ e P non ha indici ripetuti.* In tal caso il membro di destra è uguale a 1. Poi, per definizione,

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(e_{p_1}, \cdots, e_{p_{k+l}}) = \frac{(k+l!)}{k!l!}\mathrm{Alt}(\varepsilon^I \otimes \varepsilon^J)(e_{p_1}, \cdots, e_{p_{k+l}})$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\mathrm{sgn}\sigma)\varepsilon^I(e_{p_{\sigma(1)}}, \cdots, e_{p_{\sigma(k)}})\varepsilon^J(e_{p_{\sigma(k+1)}}, \cdots, e_{p_{\sigma(k+l)}}).$$

I termini della sommatoria sono non nulli solo se σ permuta i primi k indici e gli ultimi l separatamente, ossia se può essere scritta come $\sigma = \tau\eta$, con $\tau \in S_k$ che agisce permutando $\{1, \cdots, k\}$ e $\eta \in S_l$ che agisce permutando $\{k+1, \cdots, k+l\}$. Visto che $\mathrm{sgn}(\tau\eta) = (\mathrm{sgn}\tau)(\mathrm{sgn}\eta)$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(e_{p_1}, \cdots, e_{p_{k+l}}) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\substack{\tau \in S_K \\ \eta \in S_l}} (\mathrm{sgn}\tau)(\mathrm{sgn}\eta)\varepsilon^I(e_{p_{\tau(1)}}, \cdots, e_{p_{\tau(k)}})\varepsilon^J(e_{p_{k+\eta(1)}}, \cdots, e_{p_{k+\eta(l)}}) \\
&= \left(\frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} (\mathrm{sgn}\tau)\varepsilon^I(e_{p_{\tau(1)}}, \cdots, e_{p_{\tau(k)}})\right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{l!} \sum_{\eta \in S_l} (\mathrm{sgn}\eta)\varepsilon^J(e_{p_{k+\eta(1)}}, \cdots, e_{p_{k+\eta(l)}})\right) \\
&= (\mathrm{Alt}\ \varepsilon^I)(e_{p_1}, \cdots, e_{p_k})(\mathrm{Alt}\ \varepsilon^J)(e_{p_{k+1}}, \cdots, e_{p_{k+l}}) \\
&= \varepsilon^I(e_{p_1}, \cdots, e_{p_k})\ \varepsilon^J(e_{p_{k+1}}, \cdots, e_{p_{k+l}}) = 1
\end{aligned}$$

CASO 4: *P è una permutazione di IJ e non ha indici ripetuti.* In tal caso applichiamo una permutazione a P, per ricondurci al caso precedente. Visto che l'effetto che ha la permutazione è di moltiplicare entrambi i membri per lo stesso segno, la tesi è dimostrata. □

Andiamo ora a presentare le proprietà principali del prodotto wedge, delle quali faremo ampio uso a seguire.

Proposizione 1.5 (Proprietà del Prodotto Wedge). *Siano ω, ω', η, η' e ξ multicovettori su uno spazio vettoriale V finito-dimensionale. Allora valgono le seguenti:*

- *Bilinearità: Per ogni a, $a' \in \mathbb{R}$.*

$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta),$$

$$\eta \wedge (a\omega + a'\omega') = a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega');$$

- *Associatività:*

$$\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi;$$

- *Anticommutatività: Per ogni $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ e $\eta \in \Lambda^l(V^*)$,*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega;$$

- *Se (ε^i) è una base per V^* e $I = (i_1, \cdots, i_k)$ è un multi-indice, allora*

$$\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} = \varepsilon^I;$$

- *Dati $\omega^1, \cdots, \omega^k$ covettori, e $v_1, \cdots, v_k$ vettori,*

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k(v_1, \cdots, v_k) = det(\omega^j(v_i)).$$

Dimostrazione. La bilinearità segue dalla definizione di prodotto wedge. Per provare l'associatività usiamo il Lemma 1.4 per ottenere che

$$(\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J) \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJ} \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJK} = \varepsilon^I \wedge \varepsilon^{JK} = \varepsilon^I \wedge (\varepsilon^J \wedge \varepsilon^K),$$

ed il caso generale segue dalla bilinearità. Per mostrare l'anticommutatività, similmente, sempre usando il Lemma 1.4,

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ} = (\mathrm{sgn}\sigma)\varepsilon^{JI} = (\mathrm{sgn}\sigma)\varepsilon^J \wedge \varepsilon^I,$$

dove σ è la permutazione che manda IJ in JI, e si ha che $\mathrm{sgn}\sigma = (-1)^{kl}$. Ancora, usando la bilinearità concludiamo l'anticommutatività.

Anche la quarta proprietà segue immediatamente dal Lemma 1.4, e per mostrare la quinta basta osservare che nel caso in cui ogni ω^j sia uno tra i covettori di base ε^{i_j}, ci si riconduce alla quarta proprietà. Inoltre, poiché entrambi i membri di $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k(v_1, \cdots, v_k) = \det(\omega^j(v_i))$ sono multilineari in $(\omega^1, \cdots, \omega^k)$, otteniamo la tesi. $\square$

Un k-covettore si dice **decomponibile** se può essere espresso nella forma $\eta = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k$, con $\omega^1, \cdots, \omega^k$ covettori. Non è vero che ogni k-covettore è decomponibile se $k > 1$, tuttavia, dal quarto punto della proposizione precedente ne ricaviamo che può essere scritto come combinazione lineare di k-covettori decomponibili.

Per ogni spazio vettoriale n-dimensionale V, definiamo lo spazio vettoriale $\Lambda(V^*)$ come:

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V^*)$$

Dalla Proposizione 1.3 segue che $\dim(\Lambda(V^*)) = 2^n$. Il prodotto wedge dota $\Lambda(V^*)$ della struttura di **algebra esterna** (o algebra di Grassmann) **su** $\boldsymbol{V}$. Tale algebra risulta essere **graduata**, nel senso che il prodotto soddisfa che $(\Lambda^k(V^*))(\Lambda^l(V^*)) \subseteq \Lambda^{k+l}(V^*)$, e **anticommutativa**, ossia il prodotto soddisfa che $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega$ per $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ e $\eta \in \Lambda^l(V^*)$.

Introduciamo un'importante operazione che lega vettori e tensori alternanti. Sia V uno spazio vettoriale finito-dimensionale. Per ogni $v \in V$ definiamo una mappa lineare $i_v : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-1}(V^*)$, chiamata **moltiplicazione interna per** $\boldsymbol{v}$ come segue:

$$(i_v\omega)(w_1, \cdots, w_{k-1}) = \omega(v, w_1, \cdots, w_{k-1}).$$

Per convenzione, poniamo $i_v\omega = 0$ quando ω è un 0-covettore, ossia un numero. Un'altra notazione spesso usata per il prodotto interno è la seguente:

$$v \lrcorner \omega = i_v\omega$$

Lemma 1.6. *Sia V uno spazio vettoriale finito-dimensionale e $v \in V$.*

- $i_v \circ i_v = 0$;
- *Se* $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ *e* $\eta \in \Lambda^l(V^*)$,
$$i_v(\omega \wedge \eta) = (i_v\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_v\eta).$$

Dimostrazione. Per k-covettori, con $k \geq 2$, il primo punto segue immediatamente dal fatto che qualsiasi tensore alternante restituisce zero quando due argomenti sono identici. Se $k = 0$ o $k = 1$, la tesi segue dal fatto che $i_v \equiv 0$ sui 0-covettori. Per mostrare il secondo punto è sufficiente considerare il caso in cui sia ω che η sono decomponibili, dato che ogni tensore alternante di rango positivo può essere scritto come combinazione lineare di tensori decomponibili. Si verifica immediatamente che la tesi segue da questa relazione generale tra covettori:

$$v \lrcorner (\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega^i(v) \omega^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \cdots \wedge \omega^k,$$

ove $\widehat{\omega^i}$ indica che ω^i è stato omesso. Andiamo dunque a mostrare tale formula. Poniamo $v_1 = v$, e applichiamo entrambi i membri ad una arbitraria tupla di vettori $(v_2, \cdots, v_k)$. Dobbiamo quindi provare

$$\begin{aligned}&(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k)(v_1, \cdots, v_k)\\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega^i(v_1)(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \cdots \wedge \omega^k)(v_2, \cdots, v_k).\end{aligned}$$

Il membro di sinistra è il determinante della matrice A le cui entrate (i, j) sono $\omega^i(v_j)$. Se indichiamo con A^i_j la matrice ottenuta da A eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna, il membro a destra diventa

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega^i(v_1) \mathrm{det} A^i_1,$$

che è lo sviluppo di Laplace della matrice A rispetto alla prima colonna, e dunque è uguale a $\mathrm{det} A$, e la formula è provata. □

1.3 Forme Differenziali

Consideriamo, ora, una n-varietà differenziabile con o senza bordo. Se

$$T^k T^* M = \coprod_{p \in M} T^k(T^*_p M)$$

è il fibrato di k-tensori covarianti su M, denotiamo con $\Lambda^k T^* M$ il suo sottoinsieme di tensori alternanti. Pertanto abbiamo che

$$\Lambda^k T^* M = \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T^*_p M).$$

Una sezione di $\Lambda^k T^* M$ è una **k-forma differenziale**, o k-forma. L'intero k è detto **grado** della forma. Denotiamo lo spazio delle k-forme differenziali C^∞ con

$$\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k T^* M).$$

Il prodotto wedge di una k-forma con una l-forma è definito puntualmente, ed è una $(k + l)$-forma. In tal modo, definendo

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M),$$

otteniamo che il prodotto wedge rende $\Omega^*(M)$ un'algebra associativa, anticommutativa e graduata. In ogni carta locale, una k-forma ω può essere scritta come

$$\omega = \sum_I{}' \omega_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_I{}' \omega_I dx^I$$

dove le ω_I sono funzioni continue definite nell'aperto coordinato. Una forma ω sarà C^∞ se lo sono tutte le ω_I.

Dato un diffeomorfismo $F : M \to N$ tra varietà differenziabili, e ω forma differenziale su N, si definisce il **pullback** di ω tramite F, come la forma differenziale su M, $F^*\omega$, definita puntualmente da

$$(F^*\omega)_p(v_1, \cdots, v_k) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), \cdots, dF_p(v_k)),$$

dove $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ è il differenziale di F nel punto p.

Lemma 1.7. *Sia $F : M \to N$ un diffeomorfismo di varietà differenziabili.*

- $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ *è $\mathbb{R}$-lineare;*
- $F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta)$*;*
- *In ogni carta locale si ha che:*

$$F^*\left(\sum_I{}' \omega_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\right) = \sum_I{}' (\omega_I \circ F)\ d(y^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ F).$$

Proposizione 1.8. *Sia $F : M \to N$ un diffeomorfismo tra n-varietà. Se (x^i) e (y^i) sono coordinate su degli aperti $U \subseteq M$ e $V \subseteq N$ rispettivamente, e u è una funzione continua su V a valori reali, allora in $U \cap F^{-1}(V)$ si ha*

$$F^*(udy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = (u \circ F)(detDF)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

dove DF rappresenta la matrice Jacobiana di F in tali coordinate.

Dimostrazione. Poiché in ogni punto la fibra di $\Lambda^n T^*M$ è generata da $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, è sufficiente mostrare che entrambi i membri dell'uguaglianza danno lo stesso risultato se valutati in $(\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n)$. Dal Lemma precedente,

$$F^*(udy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = (u \circ F)\ dF^1 \wedge \cdots \wedge dF^n.$$

Dalle proprietà del prodotto wedge, tuttavia, si ha che

$$dF^1 \wedge \cdots \wedge dF^n\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \det\left(dF^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) = \det\left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}\right).$$

Pertanto, visto che $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\ (\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n) = 1$, entrambi i membri dell'uguaglianza danno $(u \circ F)\ \det(DF)$ se calcolati in $(\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n)$. $\square$

Introduciamo ora un operatore tra le forme differenziali, chiamato **derivazione esterna**, che è una sorta di generalizzazione del concetto di *derivata* di una funzione. Sia, dunque, $\omega = \sum_J{}' \omega_J dx^J$ una k-forma su una aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora definiamo la sua derivata esterna essere la $(k+1)$-forma

$$d\left(\sum_J{}' \omega_J dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}\right) = \sum_J{}' \sum_i \frac{\partial \omega_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}.$$

Osserviamo che per una 0-forma f, ossia una funzione a valori reali, tale definizione si riduce ad essere il differenziale di f.

Prima di poter trasferire questa definizione ad una qualsiasi varietà differenziabile, abbiamo bisogno delle seguenti proprietà.

Proposizione 1.9 (Proprietà della Derivata Esterna su $\mathbb{R}^n$). *La derivata esterna d gode delle seguenti proprietà:*

- *d è lineare su $\mathbb{R}$;*
- *Se ω è una k-forma e η è una l-forma su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, allora*
$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta;$$
- *$d \circ d = 0$;*
- *d commuta con i pullbacks, cioè se U è un aperto di $\mathbb{R}^n$, e V un aperto di $\mathbb{R}^m$, $F : U \to V$ è un diffeomorfismo, e $\omega \in \Omega^k(V)$, allora*
$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Dimostrazione. La linearità discende immediatamente dalla definizione di d. Grazie alla linearità, possiamo ridurci a mostrare la seconda proprietà solo su forme del tipo $\omega = u dx^I \in \Omega^k(U)$ e $\eta = v dx^J \in \Omega^l(U)$, con u e v funzioni a valori reali. Osserviamo, prima di tutto, che $d(u dx^I) = du \wedge dx^I$ per ogni multi-indice I, e non solo per quelli crescenti. Se I ha indici ripetuti, $d(u dx^I) = 0 = du \wedge dx^I$. Altrimenti, sia σ la permutazione che manda I in un multi-indice crescente J. Allora si ha

$$d(u dx^I) = \mathrm{sgn}\sigma\, d(u dx^J) = (\mathrm{sgn}\sigma) du \wedge dx^J = du \wedge dx^I.$$

Usando ciò, possiamo calcolare che

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d((u dx^I) \wedge (v dx^J)) \\ &= d(uv dx^I \wedge dx^J) \\ &= (v du + u dv) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (du \wedge dx^I) \wedge (v dx^J) + (-1)^k (u dx^I) \wedge (dv \wedge dx^J) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \end{aligned}$$

Per provare la terza proprietà consideriamo prima il caso in cui abbiamo 0-forme, ossia funzioni a valori reali. In tal caso,

$$\begin{aligned} d(du) &= d\bigg(\frac{\partial u}{\partial x^j}dx^j\bigg) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}\right)dx^i \wedge dx^j = 0. \end{aligned}$$

Per il caso generale, usiamo quanto appena visto con la seconda proprietà per ottenere

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\big(\sum_J{}' d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}\big) \\ &= \sum_J{}' d(d\omega_J) \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \\ &+ \sum_J{}' \sum_{i=1}^{k}(-1)^i d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge d(dx^{j_i}) \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} = 0. \end{aligned}$$

Infine, per provare l'ultima proprietà, è ancora sufficiente considerare $\omega = udx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. Per una tale forma abbiamo che il membro a sinistra dell'uguaglianza da mostrare è

$$\begin{aligned} F^*(d(udx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})) &= F^*(du \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &= d(u \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_k} \circ F). \end{aligned}$$

Invece, il membro a destra è

$$\begin{aligned} d(F^*(udx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})) &= d((u \circ F)\ d(x^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_k} \circ F)) \\ &= d(u \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_k} \circ F). \end{aligned}$$

Pertanto sono uguali. □

Questi risultati ci permettono di trasferire la nozione di derivata esterna a varietà differenziabili generiche.

Teorema 1.10 (Esistenza ed Unicità della Derivazione Esterna). *Sia M una varietà differenziabile con o senza bordo. Allora, per ogni k, esiste un unico operatore $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ chiamato* ***derivazione esterna****, che soddisfa le seguenti proprietà:*

- *d è lineare su $\mathbb{R}$;*

- *Se* $\omega \in \Omega^k(M)$ *e* $\eta \in \Omega^l(M)$, *allora*
$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta;$$

- $d \circ d = 0$;

- *Per* $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, df *è il differenziale di* f, *dato da* $df(X) = Xf$.

In ogni carta locale, d *è data dalla definizione di derivata esterna su un aperto* $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Prima di tutto, mostriamo l'esistenza. Sia $\omega \in \Omega^k(M)$, vorremmo definire d usando la definizione con l'aperto di $\mathbb{R}^n$ e le carte locali. Dunque, sia (U, φ) una carta locale per M, e poniamo
$$d\omega = \varphi^* d(\varphi^{-1^*}\omega).$$
Per vedere che è ben definita, osserviamo che per ogni altra carta locale (V, ψ), la mappa $\varphi \circ \psi^{-1}$ è un diffeomorfismo, pertanto dalla proposizione precedente segue che
$$(\varphi \circ \psi^{-1})^* \, d(\varphi^{-1^*}\omega) = d((\varphi \circ \psi^{-1})^* \varphi^{-1^*}\omega) = d(\psi^{-1^*}\omega),$$
da cui otteniamo che $\varphi^* d(\varphi^{-1^*}\omega) = \psi^* d(\psi^{-1^*}\omega)$, e quindi $d\omega$ è ben definita. Soddisfa la prima e la quarta condizione in virtù della proposizione precedente.

Per provare l'unicità, supponiamo che d sia un operatore che soddisfa la prima e la quarta proprietà. allora, se ω_1 e ω_2 sono k-forme che coincidono su un aperto $U \subseteq M$, allora mostriamo che $d\omega_1 = d\omega_2$ su U. Sia $p \in U$ e $\eta = \omega_1 - \omega_2$, e sia $\psi \in C^\infty$ una funzione di test identicamente 1 in un intorno di p e supportata in U. Così $\psi\eta$ è identicamente nulla, e la prima e la quarta proprietà implicano che $0 = d(\psi\eta) = d\psi \wedge \eta + \psi d\eta$. Valutando ciò in p, ed usando il fatto che $d\psi_p = 0$, otteniamo che $d\omega_1|_p - d\omega_2|_p = d\eta_p = 0$.

Sia ora $\omega \in \Omega^k(M)$ arbitraria, e sia (U, φ) una carta locale su M. Possiamo scrivere ω in coordinate come $\sum_I{}' \omega_I dx^I$ su U. Per ogni $p \in U$, utilizzando funzioni di test, possiamo costruire una forma globale $\widetilde{\omega_I}$ e $\widetilde{x}^i$ su M che coincidono con ω_I e x^i in un intorno di p. Per le osservazioni di prima, in virtù della prima e quarta proprietà, ne segue che, per arbitrarietà di p, d deve essere uguale a quella che abbiamo definito sopra. □

Un altro fatto importante sulla derivazione esterna è che commuta con tutti i pullbacks:

Proposizione 1.11. *Se* $F : M \to N$ *è un diffeomorfismo di varietà differenziabili, allora per ogni* k *la mappa di pullback* $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ *commuta con* d, *ossia, per ogni* $\omega \in \Omega^k(N)$,
$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Dimostrazione. Se (U, φ) e (V, ψ) sono due carte locali per M ed N rispettivamente, applichiamo le proprietà della derivata esterna a $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$. Usando due volte la relazione $d\omega = \varphi^* d(\varphi^{-1^*}\omega)$, introdotta nella dimostrazione precedente, possiamo calcolare in $U \cap F^{-1}(V)$ come segue:

$$\begin{aligned} F^*(d\omega) &= F^*\psi^* d(\psi^{-1^*}\omega) = \varphi^* \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^* d(\psi^{-1^*}\omega) \\ &= \varphi^* d((\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^* \psi^{-1^*}\omega) = \varphi^* d(\varphi^{-1} F^*\omega) = d(F^*\omega). \end{aligned}$$

□

Diremo che una forma differenziale $\omega \in \Omega^k(M)$ è **chiusa** se $d\omega = 0$, mentre diremo che è **esatta** se esiste una $(k-1)$-forma η su M, che chiameremo primitiva, tale che $\omega = d\eta$. Il fatto che $d \circ d = 0$ implica che ogni forma differenziale esatta sia anche chiusa. Il viceversa non è sempre vero. Un classico esempio di forma chiusa che non è esatta è il seguente: consideriamo $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, e sia $\omega \in \Omega^1(M)$ definita da

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Come si può osservare, tale forma è chiusa, ma non ammette una primitiva definita su tutto M.

1.4 Orientamenti di Varietà

Ricordiamo che, dato V spazio vettoriale reale n-dimensionale, e considerate due sue basi ordinate $(e_1, \cdots, e_n)$ e $(\widetilde{e_1}, \cdots, \widetilde{e_n})$, se A è la matrice di cambiamento di base, che porta la prima nella seconda, allora si dice che le due basi sono **equiorientate**, o hanno stesso orientamento, se $\det A > 0$, mentre hanno orientamento opposto se $\det A < 0$. Ciò definisce due classi di equivalenza tra le basi ordinate di V, e la scelta di una delle due determina un **orientamento** per V. Fissato un orientamento su V, ossia scelta una base ordinata $(e_1, \cdots, e_n)$ per V, diremo che un'altra base $(\widetilde{e_1}, \cdots, \widetilde{e_n})$ è **orientata positivamente** se è equiorientata rispetto a $(e_1, \cdots, e_n)$, mentre diremo che è **orientata negativamente** se non lo è.

Osserviamo anche che, scelto un elemento non nullo di $\Lambda^n(V^*)$, questo induce un orientamento su V: le due classi di equivalenza citate prima saranno rispettivamente costituite dalle basi $(e_1, \cdots, e_n)$ tali che $\omega(e_1, \cdots, e_n) > 0$ e da quelle tali che $\omega(e_1, \cdots, e_n) < 0$. Basta infatti osservare che se $(e_1, \cdots, e_n)$ e $(\widetilde{e_1}, \cdots, \widetilde{e_n})$ sono due basi ordinate di V, e A è la matrice che porta la prima nella seconda, allora $\omega(\widetilde{e_1}, \cdots, \widetilde{e_n}) = (\det A)\ \omega(e_1, \cdots, e_n)$, e quindi $\omega(\widetilde{e_1}, \cdots, \widetilde{e_n})$ e $\omega(e_1, \cdots, e_n)$ hanno stesso segno se e solo se le due basi sono equiorientate. Data una tale forma ω, diremo che una base $(e_1, \cdots, e_n)$ è orientata positivamente, (rispettivamente negativamente) rispetto a ω se $\omega(e_1, \cdots, e_n) > 0$, (rispettivamente $\omega(e_1, \cdots, e_n) < 0$).

Vogliamo trasportare questi concetti su varietà differenziabili generiche. Consideriamo un **frame locale** per M, ossia una n-upla di campi vettoriali $(E_1, \cdots, E_n)$, definita in un aperto $U \subseteq M$, tale che $(E_1|_p, \cdots, E_n|_p)$ è base per T_pM. Allora diremo che tale frame locale è orientato (positivamente o negativamente) se $(E_1|_p, \cdots, E_n|_p)$ base di T_pM orientata (positivamente o negativamente) per ogni $p \in U$. Questo ci consente di dare un **orientamento puntuale** su M, ossia ad ogni punto p associamo l'orientamento di T_pM, secondo un frame locale. Diremo che un orientamento puntuale di M è continuo se ogni punto di M è nel dominio di un qualche frame locale orientato. Così, possiamo definire un **orientamento su M** come un orientamento puntuale continuo. Diremo che M è una varietà differenziabile **orientabile** se esiste un suo orientamento. Altrimenti, diremo che M è **non orientabile**.

Proposizione 1.12 (Esistenza di una Forma Orientante). *Sia M una n-varietà differenziabile con o senza bordo. Una qualsiasi n-forma ω mai nulla su M determina un orientamento su M. Viceversa, dato un orientamento su M, esiste una n-forma mai nulla su M che lo determina.*

Data una varietà differenziabile orientabile M, chiameremo **forma orientante** una n-forma che determina l'orientamento di M. Inoltre, diremo che delle coordinate locali (x^i) sono orientate positivamente, o negativamente, se il frame locale $(\partial/\partial x^i)$ è orientato positivamente, o negativamente. Vediamo ora alcuni casi notevoli in cui accade che l'orientamento di una varietà ne induce uno su un'altra varietà a cui è relazionata. L'esempio più importante sarà quello dove l'orientamento di una varietà differenziabile con bordo indurrà un orientamento sul suo bordo (detto orientamento di Stokes), e sarà cruciale nell'impostazione del teorema di Stokes, che vedremo in seguito.

Proposizione 1.13 (Orientamento Indotto dal Pullback). *Siano M ed N varietà differenziabili con o senza bordo. Se $F : M \to N$ è un diffeomorfismo, ed N è orientata, allora M ha un unico orientamento, detto **orientamento del pullback indotto da F** tale per cui F preserva l'orientamento.*

Dimostrazione. Per ogni $p \in M$ esiste un unico orientamento di T_pM tale per cui $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ preservi l'orientamento. Ciò definisce un orientamento puntuale su M, e si vede che è continuo osservando che scelta ω forma orientante per N, allora $F^*\omega$ è forma orientante per M. □

Proposizione 1.14. *Sia M una n-varietà differenziabile orientabile con o senza bordo, S un'ipersuperficie immersa in M, e N un campo vettoriale su S, mai tangente ad S. Allora S ha un unico orientamento tale che per ogni $p \in S$, $(E_1, \cdots, E_{n-1})$ è base orientata per T_pS se e solo se $(N, E_1, \cdots, E_{n-1})$ lo è per T_pM. Se ω è una forma orientante per M, allora $\iota_S^*(N \lrcorner \omega)$ è una forma orientante per S rispetto a tale orientamento, dove $\iota_S : S \hookrightarrow M$ è l'inclusione.*

Dimostrazione. Sia ω una forma orientante per M, e sia $\sigma = \iota_S^*(N \lrcorner\, \omega)$. Così σ è una $(n-1)$-forma su S, ed è una forma orientante per S se mostriamo che non si annulla mai. Ora, data $(E_1, \cdots, E_{n-1})$ base per T_pS, il fatto che N sia mai tangente ad S implica che $(N, E_1, \cdots, E_{n-1})$ sia una base per T_pM, ed il fatto che ω sia mai nulla porge che

$$\sigma_p(E_1, \cdots, E_{n-1}) = \omega_p(N_p, E_1, \cdots, E_{n-1}) \neq 0,$$

e visto che $\sigma_p(E_1, \cdots, E_{n-1}) > 0$ se e solo se $\omega_p(N_p, E_1, \cdots, E_{n-1}) > 0$, l'orientamento determinato da σ è quello definito nell'asserto. □

Proposizione 1.15 (Orientamento Indotto sul Bordo). *Sia M una n-varietà differenziabile orientabile con bordo, con $n \geq 1$. Allora ∂M è orientabile, ed ogni campo vettoriale su ∂M rivolto verso l'esterno determina lo stesso orientamento su ∂M, detto* ***orientamento indotto****, o* ***orientamento di Stokes****.*

Dimostrazione. Sia ω forma orientante per M, e sia N un campo vettoriale su ∂M rivolto verso l'esterno. La $(n-1)$-forma $\iota_{\partial M}^*(N \lrcorner\, \omega)$ è una forma orientante per ∂M, come visto nella proposizione precedente, quindi ∂M è orientabile.

Per mostrare che l'orientamento è indipendente dalla scelta di N, consideriamo $p \in \partial M$ arbitrario, e (x^i) coordinate per M in un intorno di p. Se N e $\widetilde{N}$ sono due differenti campi vettoriali su ∂M rivolti verso l'esterno, allora le loro ultime componenti $N^n(p)$ e $\widetilde{N}^n(p)$ sono entrambe negative. Pertanto sia $(N_p, \partial/\partial x^1|_p, \cdots \partial/\partial x^{n-1}|_p)$ che $(\widetilde{N}_p, \partial/\partial x^1|_p, \cdots \partial/\partial x^{n-1}|_p)$ sono basi per T_pM, e la matrice di cambiamento di base avrà determinante uguale a $N^n(p)/\widetilde{N}^n(p) > 0$. Così, entrambe le basi determinano lo stesso orientamento per T_pM, e dunque sia N che $\widetilde{N}$ determinano lo stesso orientamento per $T_p\partial M$. □

1.5 Integrazione su Varietà

In questa sezione vogliamo definire l'integrazione su varietà differenziabili in modo che sia indipendente dalle coordinate, ovvero che sia invariante per diffeomorfismi che preservano l'orientamento. Non è possibile fare ciò con l'integrale di una funzione, tuttavia le forme differenziali sono oggetti che hanno le giuste caratteristiche per definire intrinsecamente un integrale.

Diremo che un **dominio di integrazione** in $\mathbb{R}^n$ un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^n$ la cui misura del bordo è nulla. Allora, dato $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio di integrazione, e $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ n-forma su $\bar{D}$, con f funzione continua, definiamo l'**integrale di $\boldsymbol{\omega}$ su $\boldsymbol{D}$** come

$$\int_D \omega = \int_D f dV.$$

In modo più suggestivo, possiamo riscrivere ciò nei seguenti termini:

$$\int_D f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_D f dx^1 \cdots dx^n.$$

Più generalmente, dato $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e ω n-forma a supporto compatto e contenuto in U, possiamo definire

$$\int_U \omega = \int_D \omega,$$

dove $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio di integrazione contenente $\mathrm{supp}(\omega)$, ed ω è estesa a D ponendo a zero i punti complementari al supporto.

Proposizione 1.16. *Siano D ed E domini di integrazione aperti in $\mathbb{R}^n$, e $G : \bar{D} \to \bar{E}$ una mappa C^∞ che si restringe ad un diffeomorfismo da D in E che o preserva o cambia l'orientamento. Se ω è una n-forma su $\bar{E}$, allora*

$$\int_D G^*\omega = \begin{cases} \int_E \omega & \text{se } G \text{ preserva l'orientamento,} \\ -\int_E \omega & \text{se } G \text{ cambia l'orientamento.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Siano $(y^1, \cdots, y^n)$ coordinate in E e $(x^1, \cdots, x^n)$ coordinate in D, e $\omega = f dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$. Supponiamo che G preservi l'orientamento. Allora dalla formula del cambiamento di variabili e dalla Proposizione 1.8, segue che

$$\begin{aligned} \int_E \omega = \int_E f dV = \int_D (f \circ G)|\det DG| dV = \int_D (f \circ G)(\det DG) dV \\ = \int_D (f \circ G)(\det DG) dx^1 \cdots dx^n = \int_D G^*\omega. \end{aligned}$$

Se G cambia l'orientamento, il calcolo è analogo, ma introducendo un segno negativo quando si rimuove il valore assoluto. □

Estendiamo questo risultato a n-forme a supporto compatto definite su aperti di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 1.17. *Siano U e V aperti di $\mathbb{R}^n$, e $G : U \to V$ un diffeomorfismo che o preserva o cambia l'orientamento. Se ω è una n-forma a supporto compatto su V, allora*

$$\int_V \omega = \pm \int_U G^*\omega,$$

con segno positivo se G preserva l'orientamento, negativo se lo cambia.

Dimostrazione. Sia E un dominio aperto di integrazione tale che $\mathrm{supp}(\omega) \subseteq E \subseteq \bar{E} \subseteq V$. Visto che diffeomorfismi mandano interni in interni, bordi in bordi e insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla, allora $D = G^{-1}(E) \subseteq U$ è un dominio di integrazione aperto contenente $\mathrm{supp}(G^*\omega)$, ed il risultato segue dalla proposizione precedente. □

Usando questi risultati, possiamo definire l'integrale di una forma lungo una varietà orientata. Sia, dunque, M una n-varietà differenziabile orientata, e ω una n-forma su M. Supponiamo dapprima che ω sia a supporto compatto, contenuto in una singola carta locale (U, φ) che sia orientata positivamente o negativamente. Definiamo allora l'**integrale di $\boldsymbol{\omega}$ lungo $\boldsymbol{M}$** come

$$\int_M \omega = \pm \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega,$$

dove il segno è positivo se la carta è orientata positivamente, negativo altrimenti. Tale integrale è ben definito perché $(\varphi^{-1})^*\omega$ è una n-forma a supporto compatto e contenuto nell'aperto $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Inoltre, $\int_M \omega$ non dipende dalla scelta della carta locale il cui dominio contiene $\mathrm{supp}(\omega)$.

Per definire l'integrale su un'intera varietà, dobbiamo combinare la definizione precedente con l'utilizzo della partizione dell'unità. Sia, dunque, M una n-varietà differenziabile, e ω una n-forma a supporto compatto, contenuto in M. Sia $\{U_i\}$ ricoprimento aperto di $\mathrm{supp}(\omega)$, formato da domini di carte locali orientate positivamente o negativamente, e sia $\{\psi_i\}$ partizione dell'unità associata. Definiamo allora l'**integrale di $\boldsymbol{\omega}$ lungo $\boldsymbol{M}$** come

$$\int_M \omega = \sum_i \int_M \psi_i \omega.$$

Tale integrale è ben definito, visto che per ogni i, la n-forma $\psi_i \omega$ è a supporto compatto e contenuto in U_i. Inoltre, tale definizione non dipende dalla scelta del ricoprimento o dalla scelta della partizione dell'unità associata al ricoprimento.

Per convenzione, definiamo l'integrale di una 0-forma f a supporto compatto su una 0-varietà M come la somma

$$\int_M f = \sum_{p \in M} \pm f(p),$$

dove, ancora una volta, prendiamo il segno positivo quando l'orientamento è positivo, e viceversa negativo. Ancora una volta, poiché f è a supporto compatto, assume valori non nulli solo per finiti punti di M, e dunque la sommatoria scritta ha senso, non avendo problemi di divergenza.

Proposizione 1.18 (Proprietà dell'Integrale di Forme Differenziali). *Siano M ed N n-varietà differenziabili orientate con o senza bordo, e ω e η n-forme a supporto compatto su M. Allora valgono le seguenti proprietà:*

- *Linearità: Se $a, b \in \mathbb{R}$, allora*
$$\int_M a\omega + b\eta = a \int_M \omega + b \int_M \eta;$$
- *Cambio di Orientamento: Se $-M$ denota M con orientamento opposto,*
$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega;$$
- *Positività: Se ω è una forma orientante, che induce orientamento positivo, allora*
$$\int_M \omega > 0;$$
- *Invarianza per Diffeomorfismi: Se $F : N \to M$ è un diffeomorfismo che preserva o cambia l'orientamento, allora*
$$\int_M \omega = \begin{cases} \int_N F^*\omega & \textit{se } F \textit{ preserva l'orientamento,} \\ -\int_N F^*\omega & \textit{se } F \textit{ cambia l'orientamento.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Le prime due proprietà discendono sostanzialmente dalle definizioni. Per la terza prendiamo ω una forma orientante per M, che induce orientamento positivo. Allora se (U, φ) è una carta locale orientata positivamente, così $(\varphi^{-1})^*\omega$ è una funzione positiva moltiplicata per $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, per una carta orientata negativamente una funzione negativa moltiplicata per $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Così ogni termine della somma con cui è definito l'integrale è non negativo, e vi è almeno un termine strettamente positivo.

Per provare l'ultima proprietà è sufficiente assumere che ω sia a supporto compatto e contenuto nel dominio di una carta locale orientata o positivamente o negativamente, perché con la partizione dell'unità ogni n-forma a supporto compatto può essere scritta come somma finita di tali forme. Sia allora (U, φ) una tale carta. Se F conserva l'orientamento, allora $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ è una carta locale per N, orientata positivamente, con dominio contenente il supporto di $F^*\omega$. Dunque il risultato segue dalla Proposizione 1.17. Il caso in cui la carta sia orientata negativamente, o F cambi l'orientamento è analogo, e si mostra sfruttando la seconda proprietà. □

Nonostante le definizioni che abbiamo dato siano molto convenienti per fini teorici, non consentono di sviluppare calcoli in maniera agevole. Diamo allora un risultato che caratterizza in maniera pratica il calcolo di integrali di forme differenziali su varietà.

Proposizione 1.19 (Integrazione su Parametrizzazioni). *Sia data M una n-varietà differenziabile orientata con o senza bordo, e ω una n-forma a supporto compatto in M. Siano $D_1, \cdots, D_k$ domini di integrazione aperti in $\mathbb{R}^n$, e siano $F_i : \bar{D}_i \to M$ mappe C^∞ per $i = 1, \cdots, k$ tali che*

- *F_i si restringe ad un diffeomorfismo che preserva l'orientamento da D_i ad un aperto $W_i \subseteq M$;*
- *$W_i \cap W_j = \varnothing$ quando $i \neq j$;*
- *$supp(\omega) \subseteq \bar{W}_1 \cup \cdots \cup \bar{W}_k$.*

Allora vale che

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{D_i} F_i^* \omega.$$

Andiamo ora a presentare un risultato centrale della teoria dell'integrazione su varietà: il Teorema di Stokes. In qualche modo, è una generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo. Pur avendo un enunciato molto conciso ed elegante, necessita di alcune precisazioni: ∂M ha l'orientamento indotto sul bordo (ed ecco perché, nella sezione precedente lo abbiamo chiamato *di Stokes*), inoltre, la forma ω che comparirà nel membro di destra sarà da intendersi come $\iota_{\partial M}^* \omega$. Diamo ora l'enunciato.

Teorema 1.20 (Teorema di Stokes). *Sia M una n-varietà differenziabile orientata con bordo, e sia ω una $(n-1)$-forma a supporto compatto su M. Allora vale che*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Dimostrazione. La tesi chiaramente vale se $\partial M = \varnothing$ e se $n = 1$. Proseguiamo la trattazione considerando un caso speciale: supponiamo che M sia il semi-spazio superiore $\mathbb{H}^n = \{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n,\ x^n \geq 0\}$. Allora, visto che ω è a supporto compatto, esiste un reale $R > 0$ tale per cui supp(ω) è contenuto in $A = [-R; R] \times \cdots \times [-R; R] \times [0; R]$. Possiamo scrivere ω in coordinate standard come segue

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

dove $\widehat{dx^i}$ indica che dx^i è stato omesso. Pertanto,

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i=1}^{n} d\omega_i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.
\end{aligned}$$

Così, possiamo trovare che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_A \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x)\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.
\end{aligned}$$

Potendo cambiare l'ordine di integrazione per ogni termine della sommatoria, integriamo prima rispetto a x^i. Così dal teorema fondamentale del calcolo, per $i \neq n$ ci si riduce a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x)\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x)\ dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \big[\omega_i(x)\big]_{x^i=-R}^{x^i=R}\ dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n = 0,
\end{aligned}$$

visto che abbiamo scelto R sufficientemente grande, in modo che $\omega = 0$ quando $x^i = \pm R$. Il termine rimanente è quello per $i = n$, ed abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= (-1)^{n-1} \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \int_0^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x)\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \\
&= \int_{\mathbb{H}^n} d\omega = (-1)^{n-1} \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \big[\omega_n(x)\big]_{x^n=0}^{x^n=R}\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \\
&= \int_{\mathbb{H}^n} d\omega = (-1)^{n} \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \omega_n(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0)\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1},
\end{aligned}$$

visto che $\omega_n = 0$ quando $x^n = R$.

Per confrontare ciò con il membro di destra, osserviamo che

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega = \sum_i \int_{A\cap\partial\mathbb{H}^n} \omega_i(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0)\ dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Visto che x^n si annulla su $\partial\mathbb{H}^n$, il pullback di dx^n al bordo è identicamente nullo. Così, il solo termine non nullo è quello per $i = n$, che diventa

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega = \int_{A\cup\mathbb{H}^n} \omega_n(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0)\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}.$$

Considerando il fatto che le coordinate $(x^1, \cdots, x^{n-1})$ sono orientate positivamente per $\partial\mathbb{H}^n$ quando n è pari, e orientate negativamente quando n è dispari, troviamo che tale espressione è uguale a quella trovata per il membro di sinistra.

Consideriamo ora un altro caso speciale: $M = \mathbb{R}^n$. In questo caso, il supporto di ω sarà contenuto in un cubo della forma $A = [-R; R]^n$, per un certo $R > 0$. Per il membro di sinistra eseguiamo esattamente lo stesso calcolo di prima, tranne per il caso $i = n$, per cui otteniamo che anche tale termine si annulla. Dunque, il membro di sinistra è nullo. Anche il membro di destra è nullo, essendo $\partial M = \varnothing$. Pertanto il teorema è valido anche in questo caso.

Sia ora M un'arbitraria varietà differenziabile con bordo, e consideriamo una $(n-1)$-forma ω a supporto compatto e contenuto nel dominio di una singola carta locale (U, φ) orientata positivamente o negativamente. Assumendo che φ sia una carta del bordo orientata positivamente, otteniamo che

$$\int_M d\omega = \int_{\mathbb{H}^n} (\varphi^{-1})^* d\omega = \int_{\mathbb{H}^n} d\big((\varphi^{-1})^*\big) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} (\varphi^{-1})^* \omega,$$

dove $\partial\mathbb{H}^n$ ha l'orientamento indotto. Poiché $d\varphi$ manda vettori rivolti verso l'esterno su $\partial\mathbb{H}^n$ in vettori rivolti verso l'esterno su $\mathbb{H}^n$, ne segue che $\varphi|_{U\cap\partial M}$ è un diffeomorfismo che preserva l'orientamento su $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n$, e così $\int_{\partial\mathbb{H}^n} (\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\partial M} \omega$, da cui $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$. Per carte di bordo orientate negativamente, si applica lo stesso argomento con un segno negativo su ogni lato dell'uguaglianza. Per carte interne si svolge lo stesso conto, sostituendo $\mathbb{H}^n$ con $\mathbb{R}^n$.

Infine, sia ω è un'arbitraria $(n-1)$-forma differenziale. Consideriamo un ricoprimento aperto di $\mathrm{supp}(\omega)$, composto da domini di carte locali orientate o positivamente o negativamente $\{U_i\}$, e scegliamo una partizione dell'unità $\{\psi_i\}$ ad esso associata. Applicando il precedente argomento a $\psi_i\omega$ per ogni i, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} \omega &= \sum_i \int_{\partial M} \psi_i\omega = \sum_i \int_M d(\psi_i\omega) = \sum_i \int_M d\psi_i \wedge \omega + \psi_i d\omega \\ &= \int_M d\Big(\sum_i \psi_i\Big) \wedge \omega + \int_M \Big(\sum_i \psi_i\Big) d\omega = 0 + \int_M d\omega,\end{aligned}$$

dal momento che $\sum_i \psi_i = 1$, e la tesi è mostrata. $\square$

Da questo importante teorema seguono immediatamente numerosi risultati. Vediamo i principali.

Corollario 1.21 (Integrale di Forme Esatte). *Se M è una varietà differenziabile compatta ed orientabile senza bordo, allora l'integrale su M di ogni forma esatta è nullo.*

Dimostrazione.
$$\int_M d\omega = 0 \quad \text{se } \partial M = \varnothing.$$
□

Corollario 1.22 (Integrale sul Bordo di Forme Chiuse). *Sia M una varietà differenziabile compatta ed orientabile con bordo. Se ω è una forma chiusa su M, allora l'integrale di ω su ∂M è nullo.*

Dimostrazione.
$$\int_{\partial M} \omega = 0 \quad \text{se } d\omega = 0 \text{ su } M.$$
□

Corollario 1.23 (Teorema di Green). *Sia D un dominio regolare e compatto in $\mathbb{R}^2$, e siano P e Q funzioni a valori reali su D. Allora*
$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx - Qdy.$$

Dimostrazione. Si applica il teorema di Stokes alla 1-forma $Pdx + Qdy$. □

Si tenga presente che spesso si incontrano oggetti geometrici come quadrati, triangoli, cubi, simplessi e altre varietà topologiche con bordo che però non sono differenziabili, perché hanno degli "angoli". Tali oggetti vengono chiamati *varietà con angoli*, e sono caratterizzati sostanzialmente dal fatto di avere, per ogni punto, un intorno aperto omeomorfo a
$$\mathbb{R}^n_{\geq 0} = \{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n,\ x^i \geq 0 \ \text{ per } i = 1, \cdots, n\}.$$

Ebbene, è possibile mostrare che la tesi del Teorema di Stokes rimane valida anche quando si considerano questo tipo di varietà.

Capitolo 2

Coomologia di de Rham

Nel capitolo precedente abbiamo definito cosa intendiamo per forme differenziali *chiuse* ed *esatte*, osservando che, poiché $d \circ d = 0$, ogni forma esatta è anche chiusa. In questo capitolo esploreremo le implicazioni della domanda opposta: ogni forma differenziale chiusa è anche esatta? La risposta, come abbiamo già visto, è negativa. Andremo quindi a definire, per ogni varietà differenziabile, dei gruppi, noti come *gruppi di coomologia di de Rham*, che mostreremo essere invarianti topologici, ottenuti come il quoziente delle k-forme differenziali chiuse per le k-forme differenziali esatte. Come è intuibile, tali gruppi misurano la presenza di k-forme differenziali in M che sono chiuse ma non sono esatte.

La conoscenza di quali forme chiuse sono anche esatte, ossia quali forme sono il differenziale di un'altra forma, ha molte conseguenze importanti, tra cui, un po' imprecisamente, la misurazione degli estremi in cui il Teorema Fondamentale del Calcolo fallisce in dimensioni superiori e varietà generiche, oppure la possibilità di discutere o meno l'esistenza di soluzioni globali di equazioni differenziali del tipo $\omega = d\eta$, con ω ed η forme differenziali.

Vedremo alcuni esempi di calcolo dei gruppi di coomologia, ed un importante risultato, il *Teorema di Mayer-Vietoris*, che ci consentirà di facilitare tale calcolo decomponendo una varietà in due aperti, e analizzando i gruppi di tali aperti e della loro intersezione, con uno spirito simile a quello del *Teorema di Seifert-Van Kampen* per il calcolo del gruppo fondamentale.

Con una costruzione analoga, infine, definiremo i gruppi di coomologia considerando solo forme differenziali a supporto compatto, che si riveleranno essere, in generale, differenti dai primi, ma legati a questi tramite una sorprendente relazione di dualità, nota come *dualità di Poincaré*.

2.1 Gruppi di Coomologia di de Rham

Sia M una varietà differenziabile con o senza bordo, e sia p un intero non negativo. Poiché la derivazione esterna $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ è un'applicazione lineare, il suo nucleo e la sua immagine sono sottospazi vettoriali rispettivamente di $\Omega^p(M)$ e di $\Omega^{p+1}(M)$.

Pertanto, ha senso definire:

$$\mathcal{Z}^p(M) = \ker(d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)) = \{p\text{-forme chiuse su } M\}$$

$$\mathcal{B}^p(M) = \operatorname{im}(d : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)) = \{p\text{-forme esatte su } M\}$$

Per convenzione, si considera $\Omega^p(M) = \langle 0 \rangle$, spazio vettoriale banale, quando $p < 0$ e quando $p > n = \dim(M)$.

Poiché ogni forma esatta è anche chiusa, $\mathcal{B}^p(M) \subseteq \mathcal{Z}^p(M)$. Pertanto, è ben definito il **p-esimo gruppo di coomologia di de Rham** (o il **gruppo di coomologia di de Rham di grado p**) **di M** come lo spazio vettoriale quoziente

$$H^p_{dR}(M) = \frac{\mathcal{Z}^p(M)}{\mathcal{B}^p(M)}.$$

Tale oggetto, in verità, è uno spazio vettoriale reale, che è in particolare un gruppo con l'operazione di somma vettoriale. Poiché la maggior parte delle altre teorie coomologiche producono gruppi, tradizionalmente lo si appella come *gruppo*, tenendone comunque presente la sua natura di spazio vettoriale.

Chiaramente, si ha che $H^p_{dR}(M) = 0$ per $p < 0$ o $p > n = \dim(M)$, poiché in tali casi $\Omega^p(M) = 0$. Invece, per $0 \leq p \leq n$, si ha che $\Omega^p(M) = 0$ se e solo se ogni p-forma chiusa su M è anche esatta.

Per ogni p-forma ω su M, denoteremo con $[\omega]$ la classe di equivalenza di ω in $H^p_{dR}(M)$, che chiameremo **classe di coomologia di $\boldsymbol{\omega}$**. Se $[\omega] = [\omega']$, ossia se ω e ω' differiscono per una forma esatta, diremo che ω e ω' sono **coomologhe**.

In generale, una somma diretta di spazi vettoriali indicizzata da interi $C^* = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} C^q$ è detta **complesso differenziale** se esistono degli omomorfismi

$$\cdots \xrightarrow{d} C^{q-1} \xrightarrow{d} C^q \xrightarrow{d} C^{q+1} \xrightarrow{d} \cdots$$

tali che $d \circ d = 0$. Tale d è chiamato **operatore differenziale** del complesso C^*. Una tale sequenza di omomorfismi e spazi vettoriali si dice che è una **sequenza esatta** se l'immagine di ogni applicazione d è uguale al nucleo della successiva, e il **p-esimo gruppo di coomologia di C^*** è il quoziente

$$H^p(C^*) = \frac{\ker(d : C^p \to C^{p+1})}{\operatorname{im}(d : C^{p-1} \to C^p)}.$$

Pertanto, il p-esimo gruppo di coomologia può essere pensato come la misura di quanto, in C^P, il complesso differisce dall'essere esatto.

Nel nostro caso, data una n-varietà differenziabile M, il suo **complesso di de Rham** è

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^p(M) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \xrightarrow{d} 0$$

e i gruppi di coomologia sono i gruppi di de Rham di M.

Nell'ambito della topologia algebrica, ci si riferisce all'oggetto appena definito come **complesso di cocatene**, mentre si usa il termine **complesso di catene** per riferirsi ad uno oggetto analogo, ma con le mappe che vanno nella direzione degli indici decrescenti:

$$\cdots \to A_{p+1} \xrightarrow{\partial} A_p \xrightarrow{\partial} A_{p-1} \to \cdots ,$$

ed in tal caso si parla di **omologia** invece che di coomologia.

Andremo ora a mostrare che i gruppi di de Rham sono invarianti per diffeomorfismi.

Proposizione 2.1 (Mappa Indotta sulla Coomologia). *Per ogni diffeomorfismo $F : M \to N$ tra varietà differenziabili con o senza bordo, il pullback $F^* : \Omega^p(N) \to \Omega^p(M)$ manda $\mathcal{Z}^p(N)$ in $\mathcal{Z}^p(M)$, e $\mathcal{B}^p(N)$ in $\mathcal{B}^p(M)$. Ne discende un'applicazione lineare, denotata ancora con F^*, da $H^p_{dR}(N)$ a $H^p_{dR}(M)$, chiamata* ***mappa indotta sulla coomologia****, definita da $F^*[\omega] = [F^*\omega]$, che soddisfa le seguenti proprietà:*

(a) Se $G : N \to P$ è un altro diffeomorfismo, allora

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* : H^p_{dR}(P) \to H^p_{dR}(M).$$

(b) Vale che $(id_M)^* = id_{H^p_{dR}(M)}$.

Dimostrazione. Se ω è una p-forma chiusa, allora $d(F^*\omega) = F^*(d\omega) = 0$, ossia anche $F^*\omega$ è chiusa. Se $\omega = d\eta$ è una p-forma esatta, allora $F^*\omega = F^*(d\eta) = d(F^*\eta)$, ossia anche $F^*\omega$ è esatta.

La mappa indotta sulla coomologia $F^* : H^p_{dR}(N) \to H^p_{dR}(M)$ è ben definita, poiché, per ogni p-forma chiusa ω, se $\omega' = \omega + d\eta$, allora $[F^*\omega'] = [F^*\omega + F^*(d\eta)] = [F^*\omega + d(F^*\eta)] = [F^*\omega]$.

Le proprietà (a) e (b) seguono dalle analoghe proprietà del pullback di forme differenziali. □

Corollario 2.2 (Invarianza per Diffeomorfismi della Coomologia di de Rham). *Varietà differenziabili, con o senza bordo, diffeomorfe tra loro hanno gruppi di coomologia di de Rham isomorfi tra loro.*

Dimostrazione. Siano M ed N varietà differenziabili con o senza bordo, e sia $F : M \to N$ un diffeomorfismo, con inverso $G : N \to M$. Allora, dalla Proposizione 1.1, segue che $F^* : H^p_{dR}(N) \to H^p_{dR}(M)$ è un omomorfismo di gruppi, con inverso $G^* : H^p_{dR}(M) \to H^p_{dR}(N)$, da cui F^* è isomorfismo di gruppi. □

In generale, il calcolo dei gruppi di de Rham non è immediato. In alcuni casi, tuttavia, può essere calcolato in modo semplice con alcune tecniche che andiamo a trattare.

Proposizione 2.3 (Coomologia di Unioni Disgiunte). *Sia $\{M_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di n-varietà differenziabili con o senza bordo, e sia $M = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} M_j$ unione disgiunta. Per ogni p, le mappe di inclusione $\iota_j : M_j \hookrightarrow M$ inducono un isomorfismo di $H^p_{dR}(M)$ in $\prod_{j\in\mathbb{N}} H^p_{dR}(M_j)$.*

Dimostrazione. I pullbacks $\iota_j^* : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M_j)$ inducono già un isomorfismo da $\Omega^p(M)$ a $\prod_{j\in\mathbb{N}} \Omega^p(M_j)$, dato da

$$\omega \longmapsto (\iota_1^*, \iota_2^*, \cdots) = (\omega|_{M_1}, \omega|_{M_2}, \cdots).$$

Tale mappa è iniettiva, perché ogni p-forma la cui restrizione ad ogni M_j è zero deve essere per forza la forma nulla su M; ed è suriettiva perché dando un'arbitraria p-forma ω_j su ogni M_j per ogni j, si definisce una forma ω su M che viene mappata in $(\omega_1, \omega_2, \cdots)$. Ne segue la tesi. □

Grazie a tale risultato, visto che il gruppo di de Rham di varietà disconnesse è il prodotto dei corrispondenti gruppi delle componenti connesse, possiamo concentrarci solamente nel calcolo dei gruppi di de Rham di varietà differenziabili connesse.

Proposizione 2.4 (Coomologia di Grado Zero). *Se M è una varietà differenziabile connessa, con o senza bordo, allora $H^0_{dR}(M)$ è uguale allo spazio delle funzioni costanti, e quindi è 1-dimensionale.*

Dimostrazione. Poiché non vi sono (-1)-forme, $\mathcal{B}^0(M) = 0$.
Inoltre, le 0-forme chiuse sono le funzioni f a valori reali tali che $df = 0$, e visto che M è connessa, ciò accade se e solo se f è costante su tutta M. Pertanto, $H^0_{dR}(M) = \mathcal{Z}^0(M) = \{f : M \to \mathbb{R},\ f \text{ costante}\}$, ossia $H^0_{dR}(M) \cong \mathbb{R}$. □

Corollario 2.5 (Coomologia di Zero-Varietà). *Sia M una varietà di dimensione 0. Allora H^0_{dR} è il prodotto di spazi vettoriali 1-dimensionali, uno per ogni punto di M, e tutti gli altri gruppi di coomologia di de Rham di M sono zero.*

Dimostrazione. L'asserto su H^0_{dR} segue dalle Proposizioni 2.3 e 2.4, mentre i gruppi di coomologia di grado diverso da zero sono nulli per motivi dimensionali. □

2.2 Invarianza per Omotopia

In questa sezione generalizziamo il risultato del Corollario 2.2, ossia l'invarianza per diffeomorfismi, mostrando che i gruppi di coomologia di de Rham sono invarianti per omotopia, e quindi, in particolare, sono degli invarianti topologici.

Sia M una n-varietà differenziabile, e consideriamo la varietà prodotto $M \times \mathbb{R}$. Abbiamo, quindi, l'applicazione di proiezione $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ tale che $(x; a) \mapsto x$ e, fissato $a \in \mathbb{R}$, la sezione $s_a : M \to M \times \mathbb{R}$, data da $x \mapsto (x; a)$. A tali applicazioni corrispondono le relative mappe indotte sulla coomologia nel modo seguente:

$$\begin{tikzcd} M \times \mathbb{R} \arrow[d, bend left, "\pi"] \\ M \arrow[u, bend left, "s_a"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^p_{dR}(M \times \mathbb{R}) \arrow[d, bend right, "s_a^*"'] \\ H^p_{dR}(M) \arrow[u, bend right, "\pi^*"'] \end{tikzcd}$$

Teorema 2.6. *Sia M una n-varietà differenziabile con o senza bordo, e p intero non negativo. Allora $\pi^* : H^p_{dR}(M) \to H^p_{dR}(M \times \mathbb{R})$ e $s_a^* : H^p_{dR}(M \times \mathbb{R}) \to H^p_{dR}(M)$, definite come sopra, sono l'una l'inversa dell'altra. In particolare,*

$$H^p_{dR}(M \times \mathbb{R}) \cong H^p_{dR}(M)$$

Dimostrazione. Poiché, com'è evidente, $\pi \circ s_a = id_M$, si ha che $s_a^* \circ \pi^* = id^*_{H^p_{dR}(M)}$, pertanto rimane da dimostrare che $\pi^* \circ s_a^* = id^*_{H^p_{dR}(M \times \mathbb{R})}$. L'idea principale è quella di usare l'**operatore di omotopia**, ossia una mappa $K : \Omega^k(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^{k-1}(M \times \mathbb{R})$, con la proprietà che:

$$id^*_{H^p_{dR}(M \times \mathbb{R})} - \pi^* \circ s_a^* = \pm(d \circ K - K \circ d).$$

Ora, il punto è che, se esiste un tale K, allora $d \circ K - K \circ d$ manda forme chiuse in forme esatte, pertanto $\pm(d \circ K - K \circ d)$ induce sulla coomologia la mappa nulla, e da ciò ricaviamo che $id^*_{H^p_{dR}(M \times \mathbb{R})} - \pi^* \circ s_a^*$ è la mappa nulla, da cui $id^*_{H^p_{dR}(M \times \mathbb{R})} = \pi^* \circ s_a^*$. Mostriamo, dunque, l'esistenza di tale operatore.

Indichiamo con ∂_t l'ovvio campo vettoriale relativo alle coordinate standard su $\mathbb{R}$ sotto la proiezione $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ed indichiamo con i_{∂_t} il prodotto interno rispetto a ∂_t. Definiamo òa mappa K su $\Omega^k(M \times \mathbb{R})$ come segue:

$$K(\omega) = (-1)^{k-1} \int_a^t \pi^* s_\tau^*(i_{\partial_t}\omega) d\tau = (-1)^{k-1} \int_a^t (s_\tau \circ \pi)^*(i_{\partial_t}\omega) d\tau.$$

Più esplicitamente, per $v_1, \cdots, v_{k-1} \in T_{(q;t)}(M \times \mathbb{R})$,

$$K(\omega)|_{(q;t)}(v_1, \cdots, v_{k-1}) = \int_a^t \omega\big(D\tau \circ D\pi(v_1), \cdots, Ds_\tau \circ D\pi(v_{k.1}), \partial_t|_\tau\big) d\tau.$$

Questo operatore e d sono entrambi $\mathbb{R}$-lineari, quindi se $id^*_{H^p_{dR}(M\times\mathbb{R})} - \pi^* \circ s^*_a = \pm(d \circ K - K \circ d)$ è vero in coordinate, allora è vero in generale. Così possiamo assumere che M sia un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Per ogni $\omega \in \Omega^k(U \times \mathbb{R})$, abbiamo una coppia di funzioni $f_1(x;t)$ e $f_2(x;t)$ tali che:

$$\omega = f_1(x;t)\pi^*\alpha + f_2(x;t)\pi^*\beta \wedge dt$$

per qualche forma $\alpha \in \Omega^k(U)$ e $\beta \in \Omega^{k-1}(U)$. Tale decomposizione è unica nel senso che se $f_1(x;t)\pi^*\alpha + f_2(x;t)\pi^*\beta \wedge dt = 0$, allora $f_1(x;t)\pi^*\alpha = 0$ e $f_2(x;t)\pi^*\beta \wedge dt = 0$.

In quanto seguirà useremo un lieve abuso di notazione: se denotiamo con x^i le coordinate standard su U, allora al posto di π^*x^i scriveremo semplicemente x^i. In tal modo, se t è la coordinata standard su $\mathbb{R}$, denoteremo le coordinate su $U \times \mathbb{R}$ con $(x^1, \cdots, x^n, t)$. Usando la decomposizione sopra, si ha che $K(f_1(x;t)\pi^*\alpha) = 0$, e, pertanto,

$$K : \omega \longmapsto \left(\int_a^t f_2(x;\tau)d\tau \right) \times \pi^*\beta.$$

Tale mappa è la nostra candidata per essere l'operatore di omotopia.

Verifichiamo che tale K gode delle proprietà richieste. Chiaramente, dobbiamo studiare l'azione di K separatamente su forme del tipo $f_1(x;t)\pi^*\alpha$, e su forme del tipo $f_2(x;t)\pi^*\beta \wedge dt = 0$.

Caso 1 (forme del tipo $f(x;t)\pi^*\alpha$). Se $\omega = f(x;t)\pi^*\alpha$, allora $K\omega = 0$, come detto prima, e dunque $(d \circ K - K \circ d)\omega = -K(d\omega)$. Allora si ha che:

$$\begin{aligned}
K(d\omega) &= K(f(x;t)\pi^*\alpha) \\
&= K\big(df(x;t) \wedge \pi^*\alpha + (-1)^k f(x;t)\pi^*d\alpha\big) \\
&= K\left(\sum_{i=1}^n \big(\frac{\partial f_1}{\partial x^i} dx^i \wedge \pi^*\alpha\big) + \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge \pi^*\alpha + (-1)^k f(x;t)\pi^*d\alpha \right) \\
&= (-1)^k K\left(\frac{\partial f}{\partial t}(x;t)\pi^*\alpha \wedge dt \right) \\
&= (-1)^k \int_a^t \frac{\partial f}{\partial t}(x;\tau)d\tau \times \pi^*\alpha \\
&= (-1)^k (f(x;t) - f(x;a))\pi^*\alpha.
\end{aligned}$$

D'altra parte, poiché

$$\begin{aligned}
\pi^*s_a^*f(x;t)\pi^*\alpha &= \pi^*[f(x;a)(s_a^* \circ \pi^*)\alpha] \\
&= \pi[(f \circ s_a)\alpha] = (f \circ s_a \circ \pi^*)\pi^*\alpha = f(x;a)\pi^*\alpha,
\end{aligned}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned}(id^*_{H^p_{dR}(M\times\mathbb{R})} - \pi^* \circ s_a^*)\omega &= (id^*_{H^p_{dR}(M\times\mathbb{R})} - \pi^* \circ s_a^*) f(x;t)\pi^*\alpha \\ &= f(x;t)\pi^*\alpha - f(x;a)\pi^*\alpha \\ &= (f(x;t) - f(x;a))\pi^*\alpha,\end{aligned}$$

esattamente come sopra. Per tal motivo, come volevamo, abbiamo ottenuto che, in questo primo caso,

$$(d \circ K - K \circ d)\omega = \pm(id^*_{H^p_{dR}(M\times\mathbb{R})} - \pi^* \circ s_a^*)\omega.$$

Caso 2 (forme del tipo $f(x;t)\pi^*\beta \wedge dt$). Abbiamo che

$$\begin{aligned}d \circ K(\omega) = d \circ K(f(x;t)\pi^*\beta \wedge dt) &= d\left(\pi^*\beta \int_a^t f(x;\tau)d\tau\right) \\ &= \pi^* d\beta\left(\int_a^t f(x;\tau)d\tau\right) + (-1)^{k-1}\pi^*\beta \wedge f(x;t)dt \\ &+ (-1)^{k-1}\pi^*\beta \wedge \sum_{i=1}^n \left(\int_a^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(x;\tau)d\tau\right)dx^i\end{aligned}$$

inoltre abbiamo che

$$\begin{aligned}K \circ d\omega &= Kd(f\pi^*\beta \wedge dt) = Kd(\pi^*\beta \wedge f dt) \\ &= K\big(\pi^* d\beta \wedge f dt + (-1)^{k-1}\pi^*\beta \wedge df \wedge dt\big) \\ &= K\left(\pi^* d\beta \wedge f dt + (-1)^{k-1}\pi^*\beta \wedge \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dt\right) \\ &= \left(\int_a^t f(x;\tau)d\tau\right)\pi^* d\beta + (-1)^{k-1}\pi^*\beta \wedge \sum_{i=1}^n \left(\int_a^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(x;\tau)d\tau\right)dx^i.\end{aligned}$$

Così $(d\circ K - K\circ d)\omega = (-1)^{k-1}\pi^*\beta \wedge f(x;t)dt = (-1)^{k-1}\omega$. D'altra parte, visto che $s_a^* dt = 0$, abbiamo anche che $(id^*_{H^p_{dR}(M\times\mathbb{R})} - \pi^* \circ s_a^*)\omega = \omega$, e pertanto ne otteniamo che

$$(d \circ K - K \circ d)\omega = \pm(id^*_{H^p_{dR}(M\times\mathbb{R})} - \pi^* \circ s_a^*)\omega.$$

Come spiegato all'inizio della dimostrazione, questo basta per affermare che π^* e s_a^* sono l'una l'inversa dell'altra, e pertanto $H^p_{dR}(M \times \mathbb{R}) \cong H^p_{dR}(M)$. □

Corollario 2.7. *Se $F : M \to N$ e $G : M \to N$ sono mappe C^∞ omotope, allora le mappe indotte sulla coomologia $F^* : H^p_{dR}(N) \to H^p_{dR}(M)$ e $G^* : H^p_{dR}(N) \to H^p_{dR}(M)$ sono uguali.*

Dimostrazione. Sia $H : M \times \mathbb{R} \to N$ un'omotopia tra F e G. Possiamo assumere che $H(x,t) = F(x)$ per $t \leq 0$ e che $H(x,t) = G(x)$ per $t \geq 1$. Allora, poste le applicazioni $s_0(x) = (x;0)$ e $s_1(x) = (x;1)$, si ha che $F = H \circ s_0$ e $G = H \circ s_1$. Ma allora, otteniamo che

$$F^* = s_0^* \circ H^* \text{ e } G^* = s_0^* \circ H^*.$$

Poiché, com'è evidente, s_0^* e s_1^* sono inverse di π^*, e, come visto nel teorema precedente, π^* è un isomorfismo, otteniamo che $s_0^* = s_1^*$ nella coomologia, e pertanto deduciamo che $F^* = G^*$ □

Vogliamo utilizzare questo risultato per mostrare l'invarianza per omotopia della coomologia di de Rham. Tuttavia, poiché tale risultato è applicabile solo a mappe C^∞, riusciremmo a concludere solo l'invarianza nel caso di equivalenze omotopiche che siano C^∞. Ci dovremmo servire del seguente teorema di approssimazione.

Teorema 2.8 (Teorema di Approssimazione di Whitney). *Siano M ed N varietà differenziabili, e $g : M \to N$ un'applicazione continua. Allora esiste un'applicazione $\widetilde{g} : M \to N$ di classe C^∞ che sia omotopa a g.*

Grazie a tale risultato riusciamo ad ottenere quanto volevamo.

Teorema 2.9 (Invarianza per Omotopia della Coomologia di de Rham). *Se M e N sono varietà differenziabili omotopicamente equivalenti con o senza bordo, allora per ogni intero p si ha che $H^p_{dR}(M) \cong H^p_{dR}(N)$. Gli isomorfismi sono indotti da una qualsiasi equivalenza omotopica $F : M \to N$ che sia C^∞.*

Dimostrazione. Sia $F : M \to N$ un'equivalenza omotopica, con inversa omotopica $G : N \to M$. Allora, per il teorema di approssimazione di Whitney, esistono $\widetilde{F} : M \to N$ e $\widetilde{G} : N \to M$ funzioni C^∞, omotopicamente equivalenti, rispettivamente, a F e a G. Poiché l'omotopia è preservata dalla composizione, abbiamo che $\widetilde{F} \circ \widetilde{G} \sim F \circ G \sim id_N$ e, analogamente, $\widetilde{G} \circ \widetilde{F} \sim G \circ F \sim id_M$.

Dal Corollario 2.7 otteniamo che, nella coomologia,

$$\widetilde{F}^* \circ \widetilde{G}^* = (\widetilde{G} \circ \widetilde{F})^* = (id_M)^* = id_{H^p_{dR}(M)}.$$

Lo stesso argomento mostra che anche $\widetilde{G}^* \circ \widetilde{F}^* = id_{H^p_{dR}(N)}$, pertanto ne ricaviamo che $\widetilde{F}^* : id_{H^p_{dR}(N)} \to id_{H^p_{dR}(M)}$ è un isomorfismo. □

Corollario 2.10 (Invarianza Topologica della Coomologia di de Rham). *I gruppi di coomologia di de Rham sono invarianti topologici: se M e N sono varietà differenziabili omeomorfe con o senza bordo, allora i loro gruppi di coomologia di de Rham sono isomorfi.*

Dimostrazione. Ogni omeomorfismo è un'equivalenza omotopica, pertanto il risultato segue dal teorema precedente. □

Sfruttando l'invarianza per omotopia, è possibile calcolare i gruppi di de Rham di alcune varietà differenziabili come segue.

Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice **contraibile** se id_X, mappa identità su X, è omotopa ad una mappa costante.

Teorema 2.11 (Coomologia di Varietà Contraibili). *Se M è una varietà differenziabile contraibile con o senza bordo, allora $H^p_{dR} = 0$ per ogni $p \geq 1$.*

Dimostrazione. Poiché X è contraibile, esiste un punto $q \in M$ tale per cui id_M è omotopa alla mappa costante $c_q : M \to M$, che manda ogni punto di M in q. Se $\iota_q : \{q\} \hookrightarrow M$ è l'inclusione, ne segue che $c_q \circ \iota_q = id_{\{q\}}$, e $\iota_q \circ c_q$ è omotopa a id_M, pertanto ι_q è un'equivalenza omotopica, e quindi M e $\{q\}$ sono omotopicamente equivalenti. Ora, poiché $\{M\}$ è una 0-varietà, $H^p_{dR} = 0$ $\forall p \geq 1$, e dall'invarianza per omotopia segue che anche $H^p_{dR} = 0$ $\forall p \geq 1$. □

Teorema 2.12 (Lemma di Poincaré). *Se U è un aperto stellato di $\mathbb{R}^n$ o di $\mathbb{H}^n$, allora $H^p_{dR} = 0 \quad \forall p \geq 1$.*

Dimostrazione. Se U è stellato rispetto a c, allora è contraibile per la seguente omotopia:

$$H(x,t) = c + t(x - c)$$

e la tesi segue dal teorema precedente. □

Corollario 2.13. *Sia M una varietà liscia con o senza bordo. Allora ogni punto di M possiede un intorno in cui ogni forma chiusa è esatta.*

Dimostrazione. Ogni punto di M possiede un intorno diffeomorfo ad una palla aperta in $\mathbb{R}^n$ o ad una semi-palla aperta in $\mathbb{H}^n$, ambedue stellate. La tesi segue dal Lemma di Ponicaré e dall'invarianza per omotopia della coomologia di de Rham. □

Corollario 2.14 (Coomologia dello Spazio e del Semi-spazio Euclideo). *Per tutti gli interi $n \geq 1$ e $p \geq 1$, $H^p_{dR}(\mathbb{R}^n) = 0$ e $H^p_{dR}(\mathbb{H}^n) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbb{R}^n$ che $\mathbb{H}^n$ sono insiemi stellati, dunque il risultato segue immediatamente dal Lemma di Poincaré. □

Un altro caso un cui è possibile ottenere una buona informazione sulla coomologia di de Rham è al grado 1. Supponiamo, infatti, che M sia una varietà differenziabile connessa, e q un punto di M. Denotiamo con $\mathrm{Hom}(\pi_1(M,q);\mathbb{R})$

l'insieme degli omomorfismi dal primo gruppo fondamentale di M di punto fondamentale q a $\mathbb{R}$ come gruppo additivo. Tale insieme, dotato delle operazioni di somma puntale e prodotto per costante puntuale, è uno spazio vettoriale.

Definiamo un'applicazione lineare $\Phi : H^1_{dR}(M) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M,q);\mathbb{R})$, che, ad una classe di coomologia $[\omega] \in H^1_{dR}(M)$, associa $\Phi[\omega] : \pi_1(M,q) \to \mathbb{R}$, definita nel seguente modo:

$$\Phi[\omega][\gamma] = \int_{\widetilde{\gamma}} \omega,$$

dove $[\gamma] \in \pi_1(M,q)$, e $\widetilde{\gamma}$ è una qualsiasi curva C^∞ a tratti, rappresentante della stessa classe di omotopia di γ.

Teorema 2.15. *Sia M una varietà differenziabile connessa. Per ogni $q \in M$, l'applicazione lineare $\Phi : H^1_{dR}(M) \to$ Hom$(\pi_1(M,q);\mathbb{R})$ è ben definita ed iniettiva.*

Dimostrazione. Data $[\gamma] \in \pi_1(M,q)$, il teorema di approssimazione di Whitney implica l'esistenza di una curva chiusa $\widetilde{\gamma} \in C^\infty$ nella stessa classe di omotopia di γ, e, visto che integrali di una forma chiusa su cammini omotopi sono uguali tra loro, abbiamo che $\int_{\widetilde{\gamma}} \omega$ fornisce lo stesso risultato per ogni curva $\widetilde{\gamma}$ che sia C^∞ a tratti nella stessa classe di omotopia.
Inoltre, se $\widetilde{\omega}$ è un'altra 1-forma nella stessa classe di coomologia di γ, allora $\widetilde{\omega} - \omega = df$ per una qualche $f \in C^\infty$. Ciò implica che

$$\int_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{\omega} - \int_{\widetilde{\gamma}} \omega = \int_{\widetilde{\gamma}} df = f(q) - f(q) = 0,$$

pertanto Φ è ben definita. Segue, poi, dalle proprietà dell'integrale di linea, che $\Phi[\omega]$ è un omomorfismo di gruppi da $\mathrm{Hom}(\pi_1(M,q))$ a $\mathbb{R}$, e dalla linearità dell'integrale di linea segue che Φ stessa è un'applicazione lineare.

Per vedere che Φ è iniettiva, supponiamo che $\Phi[\omega]$ sia l'omomorfismo nullo. Ciò significa che $\int_{\widetilde{\gamma}} \omega = 0$ per ogni $\widetilde{\gamma}$ cappio in q, C^∞ a tratti. Se σ è un qualche altro cappio in $q' \in M$, C^∞ a tratti, possiamo scegliere il cammino C^∞ a tratti α da q in q', in modo tale che il prodotto di cammini $\alpha \cdot \sigma \cdot \bar{\alpha}$ (ove $\bar{\alpha}$ è il cammino inverso di α, ovvero la sua parametrizzazione inversa) sia un cappio in q. Ne segue allora che

$$0 = \int_{\alpha \cdot \sigma \cdot \bar{\alpha}} \omega = \int_\alpha \omega + \int_\sigma \omega - \int_\alpha \omega = \int_\sigma \omega.$$

Pertanto, $[\omega]$ è una forma esatta, e dunque è lo zero in $H^1_{dR}(M)$.
Abbiamo quindi provato che Φ è iniettiva. □

Per la verità, l'applicazione Φ del teorema appena dimostrato non è solo iniettiva, ma è anche un isomorfismo. Tale risultato seguirà dal Teorema di de Rham, che presenteremo nel prossimo capitolo.

Corollario 2.16. *Se M è una varietà differenziabile connessa con gruppo fondamentale finito, allora $H^1_{dR}(M) = 0$.*

Dimostrazione. Non esistono omomorfismi che non siano quello banale da un gruppo finito in $\mathbb{R}$, dunque, per toerema precedente, $H^1_{dR}(M) = 0$. □

2.3 Il Teorema di Mayer-Vietoris

In questa sezione presenteremo il Teorema di Mayer-Vietoris, un risultato che consente di calcolare il gruppo di coomologia di de Rham di molte varietà, esprimendole come unione di sottovarietà aperte con coomologia più semplice.

Siano A^* e B^* due complessi, una **mappa di cocatene da $\boldsymbol{A^*}$ a $\boldsymbol{B^*}$**, denotata con $F : A^* \to B^*$, è una famiglia di applicazioni lineari $F : A^p \to B^p$ (con un abuso di notazione, le indichiamo tutte con lo stesso simbolo F), tali che il seguente diagramma commuti per ogni p:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A^p & \xrightarrow{d} & A^{p+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & {\scriptstyle F}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B^p & \xrightarrow[d]{} & B^{p+1} & \longrightarrow & \cdots . \end{array}$$

Poiché $F \circ d = d \circ F$, ogni mappa di cocatene induce una mappa lineare sulla coomologia $F^* : H^p(A^*) \to H^p(B^*)$, proprio come nel caso della coomologia di de Rham.

Una **sequenza esatta corta di complessi** è il dato di tre complessi A^*, B^* e C^* con delle mappe di cocatene

$$0 \to A^* \xrightarrow{F} B^* \xrightarrow{G} C^* \to 0$$

tali che la sequenza

$$0 \to A^p \xrightarrow{F} B^p \xrightarrow{G} C^p \to 0$$

sia esatta per ogni p. Dall'esattezza di tale sequenza se ne deduce che F deve essere iniettiva, e G deve essere suriettiva.

Lemma 2.17 (Lemma Zigzag). *Data una sequenza corta esatta di complessi come sopra, per ogni p esiste un'applicazione lineare*

$$\delta : H^p(C^*) \to H^{p+1}(A^*)$$

chiamata ***omomorfismo di connessione****, tale che*

$$\begin{array}{l} H^p(A^*) \xrightarrow{F^*} H^p(B^*) \xrightarrow{G^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\delta} \\ \qquad H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{F^*} H^{p+1}(B^*) \xrightarrow{G^*} H^{p+1}(C^*) \end{array}$$

sia una sequenza esatta.

Dimostrazione. Dalle ipotesi si ha che il seguente diagramma è commutativo e le righe orizzontali sono esatte:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^p \arrow[r, "F"] \arrow[d, "d"] & B^p \arrow[r, "G"] \arrow[d, "d"] & C^p \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{p+1} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "d"] & B^{p+1} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "d"] & C^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{p+2} \arrow[r, "F"] & B^{p+2} \arrow[r, "G"] & C^{p+2} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Sia $c \in C^p$ rappresentante di una classe di coomologia, ossia tale che $dc = 0$. Poiché $G : B^p \to C^p$ è suriettiva, esiste un $b \in B^p$ tale che $G(b) = c$. La commutatività del diagramma implica che $G(db) = dG(b) = dc = 0$, quindi $db \in \ker(G) = \mathrm{im}(F)$, e allora esiste un unico $a \in A^{p+1}$ tale che $F(a) = db$. Inoltre, si ha che $F(da) = dF(a) = d(db) = 0$, ed essendo F iniettiva, ne deduciamo che $da = 0$, ossia $a \in A^{p+1}$ è rappresentante di una classe di coomologia. Vogliamo quindi definire $\delta[c] = [a]$, con $[a]$ scelto come appena descritto, ossia tale che $F(a) = db$, con $G(b) = c$.

Mostriamo che tale definizione di $[a]$ come immagine di $[c]$ dipende solo da c e non dalla scelta intermedia di b. Sia $b' \in B^p$ un altro elemento tale che $G(b') = c$, e sia $a' \in A^{p+1}$ quell'unico elemento tale che $F(a') = db'$. Siccome $G(b - b') = 0$, esiste un unico $a'' \in A^p$ tale che $b - b' = F(a'')$. Quindi si ha che $db' = db + dF(a'') = F(a + da'')$, da cui segue che $a' = a + da''$. Pertanto, $a' - a$ è la classe di coomologia nulla in $H^{p+1}(A^*)$, e quindi la classe di $[a] \in H^{k+1}(A^*)$ dipende solo da $[c]$, e non dalla scelta di $b \in B^p$.

La linearità di δ discende dal fatto che l'elemento immagine di $[a]$, detto $[c]$, deve soddisfare che $F(a) = db$, con $G(b) = c$, e le applicazioni F, G e d sono tutte lineari.

Mostriamo che l'applicazione è ben definita sulle classi di coomologia, ossia che se $[c] = 0$ $c = dc'$ per qualche $c' \in C^{p-1}$, allora $\delta[c] = [a] = 0$. Si ha che $c' = G(b'')$ per qualche $b'' \in B^{p-1}$, pertanto $c = dG(b'') = G(db'')$, e allora possiamo prendere $b = db''$ per la costruzione di $\delta[c]$. Ne segue che $db = 0$, e quindi $a = 0$, come voluto.

Abbiamo quindi definito un omomorfismo $\delta : H^p(C^*) \longrightarrow H^{p+1}(A^*)$ per ogni $p \in \mathbb{N}$. Rimane da verificare l'esattezza della sequenza.

Mostriamo l'esattezza in $H^p(B^*)$. Sia $[b] \in H^p(B^*)$, tale che $G^*([b]) = 0$, ossia tale che $G(b) = dc$ $\exists c \in Cp - 1$, ove b è un qualsiasi rappresentante di $[b]$. Per la suriettività di G, esiste $b' \in B^{p-1}$ tale che $G(b') = c$. Poiché $G(db') = dG(b') = dc = G(b)$, ne otteniamo che $b - db' \in \ker(G) = \mathrm{im}(F)$, e dunque esiste $a \in A^p$ tale che $b - db' = F(a)$. Inoltre, $F(da) = dF(a) = db - ddb' = 0$, da cui $da = 0$, ossia a è rappresentante di una classe di coomologia. Mettendo tutto insieme, abbiamo che $[b] = F^*([a])$, ossia $\ker(G^*) \subseteq \operatorname{im}(F^*)$. Viceversa, se $a \in A^p$, tale che $da = 0$, ossia è rappresentante di una classe di coomologia, allora $G(F(a)) = 0$, e quindi $\operatorname{im}(F^*) \subseteq \ker(G^*)$, come volevamo.

Mostriamo l'esattezza in $H^p(C^*)$. Se $[c] = G^*([b])$ con b tale che $db = 0$, la costruzione del morfismo di connessione implica che $\delta[c] = 0$, cioè $\operatorname{im}(G^*) \subseteq \ker(\delta)$. Viceversa, se $[c] \in H^k(C^*)$ è tale che $\delta[c] = 0$, necessariamente si deve avere che $c = G(b)$ per qualche $b \in B^k$ rappresentante di una classe di coomologia. Quindi $[c] = G^*([b])$, per cui $\ker(\delta) \subseteq \operatorname{im}(G^*)$, come volevamo.

Mostriamo l'esattezza in $H^{p+1}(A^*)$. Se $[a] = \delta[c] \in H^{p+1}(A^*)$, per costruzione si ha che $F(a) = db$ per qualche $b \in B^{p+1}$, ossia $F^*([a]) = 0$, e dunque $\operatorname{im}(\delta) \subseteq \ker(F^*)$. Consideriamo, infine, $[a] \in H^{p+1}(A^*)$ tale che $F^*([a]) = 0$. Ciò significa che $F(a) = db$ per qualche $b \in B^p$. Sia allora $c = G(b)$. Siccome $dc = dG(b) = G(db) = G(F(a)) = 0$, abbiamo che c è rappresentante di una classe di coomologia in C^k, e per costruzione $\delta[c] = [a]$. Pertanto $\ker(F^*) \subseteq \operatorname{im}(\delta)$, e ciò conclude la trattazione. $\square$

Andiamo ora a presentare il Teorema di Mayer-Vietoris.

Sia M una varietà differenziabile con o senza bordo, e siano U, V aperti di M tali che $U \cup V = M$. Si hanno le ovvie inclusioni i, j, k e l

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "k"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & M, \\ & V \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

che inducono sia le rispettive mappe di pullback su spazi di forme differenziali

$$\begin{tikzcd} & \Omega^p(U) \arrow[dr, "i^*"] & \\ \Omega^p(M) \arrow[ur, "k^*"] \arrow[dr, "l^*"'] & & \Omega^p(U \cap V), \\ & \Omega^p(V) \arrow[ur, "j^*"'] & \end{tikzcd}$$

sia le rispettive mappe sulla coomologia. Osserviamo che tali mappe di pullback sono semplicemente delle restrizioni, ossia $k^*\omega = \omega|_U$. Consideriamo la seguente sequenza di mappe:

$$0 \to \Omega^p(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \xrightarrow{i^* - j^*} \Omega^p(U \cap V) \to 0$$

dove

$$(k^* \oplus l^*)\omega = (k^*\omega, l^*\omega),$$
$$(i^* - j^*)(\omega, \eta) = i^*\omega - j^*\eta.$$

Poiché i pullbacks commutano con d, tali applicazioni inducono mappe sui corrispondenti gruppi di coomologia di de Rham.

Teorema 2.18 (Teorema di Mayer-Vietoris). *Sia M una varietà differenziabile con o senza bordo, e siano U e V aperti di M tali che $U \cup V = M$. Per ogni p esiste una mappa lineare $\delta : H^p_{dR}(U \cap V) \to H^{p+1}_{dR}(M)$ tale che la seguente sequenza, detta **sequenza di Mayer-Vietoris** per il ricoprimento aperto $\{U, V\}$, sia esatta:*

$$\begin{tikzcd} H^p_{dR}(M) \arrow[r, "k^* \oplus l^*"] & H^p_{dR}(U) \oplus H^p_{dR}(V) \arrow[r, "i^* - j^*"] & H^p_{dR}(U \cap V) \arrow[dll, "\delta"] \\ H^{p+1}_{dR}(M) \arrow[r, "k^* \oplus l^*"] & H^{p+1}_{dR}(U) \oplus H^{p+1}_{dR}(V) \arrow[r, "i^* - j^*"] & H^{p+1}_{dR}(U \cap V) \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Si tratta solamente di mostrare che la sequenza

$$0 \to \Omega^p(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \xrightarrow{i^* - j^*} \Omega^p(U \cap V) \to 0$$

è esatta per ogni p. Infatti, dimostrato ciò, visto che i pullbacks commutano con d, tale sequenza definisce una sequenza esatta corta di complessi, e la tesi del teorema segue immediatamente dal Lemma Zigzag.

Mostriamo l'esattezza in $\Omega^p(M)$, ossia verifichiamo che $k^* \oplus l^*$ è iniettiva. Sia $\sigma \in \Omega^p(M)$ tale che $(k^* \oplus l^*)\sigma = (\sigma|_U, \sigma|_V) = (0, 0)$. Affinché ciò avvenga, visto che $\{U, V\}$ è un ricoprimento di M, serve che σ sia 0, e ciò prova l'iniettività di $k^* \oplus l^*$.

Mostriamo l'esattezza in $\Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V)$. Osserviamo che

$$(i^* - j^*) \circ (k^* \oplus l^*)(\sigma) = (i^* - j^*)(\sigma|_U, \sigma|_V) = \sigma|_{U \cap V} - \sigma|_{U \cap V} = 0$$

dimostra che $\operatorname{im}(k^* \oplus l^*) \subseteq \ker(i^* - j^*)$. Viceversa, supponiamo che $(\eta, \eta') \in \ker(i^* - j^*)$. Ciò significa che $\eta|_{U \cap V} = \eta'|_{U \cap V}$, pertanto esiste una ben definita p-forma definita globalmente su M nel modo seguente:

$$\sigma = \begin{cases} \eta & \text{su } U \\ \eta' & \text{su } V \end{cases}$$

Chiaramente, $(\eta, \eta') = (k^* \oplus l^*)\sigma$, e quindi $\ker(i^* - j^*) \subseteq \operatorname{im}(k^* \oplus l^*)$

Mostriamo l'esattezza in $\Omega^p(U \cap V)$, ossia verifichiamo che $i^* - j^*$ è suriettiva. Sia $\omega \in \Omega^p(U \cap V)$, vanno trovati $\eta \in \Omega^p(U)$ e $\eta' \in \Omega^p(V)$ tali che

$$\omega = (i^* - j^*)(\eta, \eta') = i^*\eta - j^*\eta' = \eta|_{U\cap V} - \eta'|_{U\cap V}.$$

Sia $\{\varphi, \psi\}$ una partizione dell'unità sottostante al ricoprimento aperto $\{U, V\}$ di M, e definiamo $\eta \in \Omega^p(U)$ come:

$$\eta = \begin{cases} \psi\omega & \text{su } U \cap V \\ 0 & \text{su } U \setminus \operatorname{supp}(\psi) \end{cases}$$

Osserviamo che ove le due definizioni di η si sovrappongono, ovvero nell'insieme $(U \cap V) \setminus \operatorname{supp}(\psi)$, entrambe valgono 0, pertanto tale η è una ben definita p-forma su U. Similmente, definiamo $\eta' \in \Omega^p(V)$ come:

$$\eta = \begin{cases} -\varphi\omega & \text{su } U \cap V \\ 0 & \text{su } V \setminus \operatorname{supp}(\varphi) \end{cases}$$

Allora ne otteniamo che

$$\eta|_{U\cap V} - \eta'|_{U\cap V} = \psi\omega - (-\varphi\omega) = (\psi + \varphi)\omega = \omega,$$

che era quanto dovevamo mostrare. □

Una caratterizzazione dell'omomorfismo di connessione che tornerà utile nel seguito è la seguente:

Corollario 2.19. *L'omomorfismo di connessione $\delta : H^p_{dR}(U \cap V) \to H^{p+1}_{dR}(M)$ della sequenza di Mayer-Vietoris, è definito come segue. Per ogni $\omega \in \mathcal{Z}^p(U \cap V)$, vi sono delle p-forme $\eta \in \Omega^p(U)$ e $\eta' \in \Omega^p(V)$ tali che $\omega = \eta|_{U\cap V} - \eta'|_{U\cap V}$; e dunque $\delta[\omega] = [\sigma]$ dove σ è la $(p+1)$-forma un M che è uguale a $d\eta$ su U e a $d\eta'$ su V. Se $\{\varphi, \psi\}$ è una partizione dell'unità sottostante a $\{U, V\}$, possiamo prendere $\eta = \psi\omega$ e $\eta' = -\varphi\omega$, entrambe estese a 0 fuori dai supporti di ψ e di φ.*

Dimostrazione. Una caratterizzazione dell'omomorfismo di connessione è contenuta nel Lemma Zigzag. Dettagliando tale caratterizzazione nel contesto del Teorema di Mayer-Vietoris, otteniamo che $\delta[\omega] = [\sigma]$, se esistono $(\eta, \eta') \in \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V)$ tali che

$$i^*\eta - j^*\eta' = \omega, \qquad (k^*\sigma, l^*\sigma) = (d\eta, d\eta').$$

Come nella dimostrazione del Teorema di Mayer-Vietoris, se $\{\varphi, \psi\}$ è una partizione dell'unità sottostante a $\{U, V\}$, allora si possono definire $\eta \in \Omega^p(U)$ e $\eta' \in \Omega^p(V)$ come visto, ed in tal modo soddisfano che $i^*\eta - j^*\eta' = \omega$. Inoltre, date tali forme η ed η', il fatto che ω sia chiusa implica che $d\eta = d\eta'$ in $U \cap V$. Pertanto, esiste una $(p+1)$-forma σ su M che è uguale a $d\eta$ su U ed a $d\eta'$ su V, e soddisfa, quindi, anche che $(k^*\sigma, l^*\sigma) = (d\eta, d\eta')$. □

Usare il Teorema di Mayer-Vietoris rende molto più semplice calcolare il gruppo di coomologia di de Rham delle sfere n-dimensionali.

Teorema 2.20 (Coomologia delle Sfere). *Per $n \geq 1$, i gruppi di coomologia di de Rham della superficie sferica $\mathbb{S}^n$ sono*

$$H^p_{dR}(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & se\ p = 0\ o\ p = n \\ 0 & se\ 0 < p < n \end{cases}$$

e la classe di coomologia di una qualsiasi forma orientante di $\mathbb{S}^n$ è una base per $H^p_{dR}(\mathbb{S}^n)$.

Dimostrazione. La Proposizione 2.4 già ci descrive il caso $p = 0$, mostrandoci che $H^0_{dR}(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R}$, pertanto vanno mostrati i casi per $p \geq 1$.

Procediamo per induzione su n. Per $n = 1$ si ha che una qualsiasi forma orientante su $\mathbb{S}^1$ ha integrale non nullo, pertanto non è esatta. Ne segue che $\dim(H^1_{dR}(\mathbb{S}^1)) \geq 1$. Tuttavia $H^1_{dR}(\mathbb{S}^1)$ si inietta in $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbb{S}^1, 1); \mathbb{R})$, che è 1-dimensionale. Dunque, $H^1_{dR}(\mathbb{S}^1)$ ha dimensione esattamente 1, ed è generato dalla classe di coomologia di una qualsiasi forma orientante di $\mathbb{S}^1$.

Poi, supponiamo $n \geq 2$ ed assumiamo che la tesi sia vera per $\mathbb{S}^{n-1}$. Poiché $\mathbb{S}^n$ è semplicemente connessa, $H^1_{dR}(\mathbb{S}^n) = 0$ per il Corollario 2.16. Invece, per $p > 1$, usiamo il Teorema di Mayer-Vietoris come segue. Siano N ed S rispettivamente polo nord e sud di $\mathbb{S}^n$, e siano $U = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ e $V = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$. Tali U e V sono diffeomorfi a $\mathbb{R}^n$ tramite proiezione stereografica, e $U \cap V$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Una parte della sequenza di Mayer-Vietoris per $\{U, V\}$ è:

$$H^{p-1}_{dR}(U) \oplus H^{p-1}_{dR}(V) \to H^{p-1}_{dR}(U \cap V) \to H^p_{dR}(\mathbb{S}^n) \to H^p_{dR}(U) \oplus H^p_{dR}(V).$$

Poiché U e V sono entrambi diffeomorfi a $\mathbb{R}^n$, i gruppi alle estremità sono il gruppo banale per $p > 1$. Ciò implica che il morfismo centrale sia iniettivo e suriettivo, da cui $H^p_{dR}(\mathbb{S}^n) \cong H^{p-1}_{dR}(U \cap V)$, e visto che $U \cap V$ è omotopicamente equivalente a $\mathbb{S}^{n-1}$, ne otteniamo che $H^p_{dR}(\mathbb{S}^n) \cong H^{p-1}_{dR}(\mathbb{S}^{n-1})$ per $p > 1$, e la tesi è dimostrata per induzione. Come nel caso $n = 1$, naturalmente, una qualsiasi forma orientante per $\mathbb{S}^n$ determina una classe di coomologia non nulla, e pertanto genera tutto $H^n_{dR}(\mathbb{S}^n)$. □

Corollario 2.21 (Coomologia del Piano Euclideo Punturato). *Sia $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $M = \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$. Gli unici gruppi di de Rham non banali di M sono $H^0_{dR}(M)$ e $H^{n-1}_{dR}(M)$, entrambi 1-dimensionali. Una $(n-1)$-forma chiusa η su M è esatta se e solo se $\int_S \eta = 0$ per qualche (e quindi ogni) sfera $(n-1)$-dimensionale $S \subseteq M$ centrata in x.*

Dimostrazione. Sia $S \subseteq M$ una qualsiasi sfera $(n-1)$-dimensionale centrata in x. Visto che l'inclusione $\iota : S \hookrightarrow M$ è un'equivalenza omotopica, $\iota^* : H^p_{dR}(M) \to$

$H^p_{dR}(S)$ è un isomorfismo per ogni p, pertanto l'asserto sulla dimensione di $H^p_{dR}(M)$ segue dal teorema precedente.

Se η è una $(n-1)$-forma chiusa su M, ne segue che η è esatta se e solo se $\iota^*\eta$ è esatta su S, il qual fatto è vero se e solo se $\int_S \eta = \int_S \iota^*\eta = 0$. □

Corollario 2.22. *Sia $n \geq 2$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme aperto, e $x \in U$. Allora $H^{n-1}_{dR}(U \setminus \{x\}) \neq 0$.*

Dimostrazione. Poiché U è aperto, vi è una sfera $(n-1)$-dimensionale S, centrata in x tale che $S \subseteq U \setminus \{x\}$. Sia $\iota : S \hookrightarrow U \setminus \{x\}$ l'inclusione, e $r : U \setminus \{x\} \to S$ la proiezione radiale su S. Si ha che sia ι che r sono C^∞, e $r \circ \iota = id_S$. Ciò implica che $\iota^* \circ r^* = id_{H^{n-1}_{dR}(S)}$, e quindi $r^* : H^{n-1}_{dR}(S) \to H^{n-1}_{dR}(U \setminus \{x\})$ è iniettiva. Poiché $H^{n-1}_{dR}(S) \neq 0$, ne segue la tesi. □

2.4 Coomologia a Supporto Compatto

Per alcuni propositi è utile definire una generalizzazione dei gruppi di coomologia di de Rham, usando solo forme a supporto compatto. Sia, dunque, M una varietà differenziabile con o senza bordo, e sia $\Omega^p_c(M)$ lo spazio vettoriale delle p-forme su M a supporto compatto. Poiché la restrizione della derivazione esterna alle forme differenziali con supporto compatto $d : \Omega^p_c(M) \to \Omega^{p+1}_c(M)$ è ancora un operatore differenziale sul complesso graduato $\Omega^*_c(M)$, è sensato definire il **p-esimo gruppo di coomologia di de Rham a supporto compatto di $\boldsymbol{M}$** come

$$H^p_c(M) = \frac{\ker(d : \Omega^p_c(M) \to \Omega^{p+1}_c(M))}{\operatorname{im}(d : \Omega^{p-1}_c(M) \to \Omega^p_c(M)}.$$

Naturalmente, nel caso M fosse una varietà differenziabile compatta, tale impianto teorico si riduce ad essere l'ordinario gruppo di coomologia di de Rham. Tuttavia, per varietà non compatte, tali due gruppi possono essere differenti.

Lemma 2.23 (Lemma di Poincaré con Supporto Compatto). *Siano $1 \leq p \leq n$, e sia ω una p-forma a supporto compatto su $\mathbb{R}^n$. Se $p = n$, supponiamo anche che $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$. Allora esiste una $(p-1)$-forma η su $\mathbb{R}^n$ a supporto compatto tale che $d\eta = \omega$.*

Dimostrazione. Per $n = p = 1$, possiamo scrivere che $\omega = f dx$ per qualche $f \in C^\infty_c$. Definiamo allora $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Dal Teorema Fondamentale del Calcolo segue che $dF = F'dx = fdx = \omega$. Scegliamo $R > 0$ tale che $\mathrm{supp}(f) \subseteq [-R; R]$. Così, quando $x < -R$, $F(x) = 0$, e quando $x > R$, il fatto che $\int_{\mathbb{R}} \omega = 0$ implica che

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0,$$

quindi, di fatto $\mathrm{supp}(F) \subseteq [-R; R]$ è compatto. Ciò completa la dimostrazione per $1 \leq p \leq n$.

Supponiamo ora che $n \geq 2$, e siano $B, B' \subseteq \mathbb{R}^n$ delle palle aperte con centro nell'origine, tali che $\mathrm{supp}(\omega) \subseteq B \subseteq \bar{B} \subseteq B'$. Dal Lemma di Poincaré nella sua versione ordinaria segue che esiste una $(p-1)$-forma η_0 (a supporto non necessariamente compatto) su $\mathbb{R}^n$, che sia C^∞, tale che $d\eta_o = \omega$. Ciò implica, in particolare, che $d\eta_0 = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}$. Per completare la dimostrazione, consideriamo tre casi.

Caso 1: $p = 1$. In questo caso η_0 è una funzione C^∞. Poiché $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}$ è connesso quando $n \geq 2$, ne segue che in tale insieme η_0 è uguale ad una costante c. Ponendo $\eta = \eta_0 - c$ abbiamo che η è a supporto compatto e soddisfa che $d\eta = \omega$, come richiesto.

Caso 2: $1 < p < n$. Ora la restrizione di η_0 a $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}$ è una $(p-1)$-forma chiusa. Poiché $H^{p-1}_{dR}(\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}) = 0$ (infatti $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}$ si retrae per deformazione a $\mathbb{S}^{n-1}$, pertanto sono omotopi e dunque hanno stessi gruppi di coomologia), esiste una $(p-2)$-forma γ su $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}$ tale che $d\gamma = \eta_0$ su tale insieme. Se ψ è una funzione di test C^∞ con supporto in $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}$ e uguale a 1 in $\mathbb{R}^n \setminus B'$, allora $\eta = \eta_0 - d(\psi\gamma)$ è C^∞ su tutto $\mathbb{R}^n$ e soddisfa che $d\eta = d\eta_0 - d(d(\psi\gamma)) = \omega$. Poiché $d(\psi\gamma) = d\gamma = \eta_0$ su $\mathbb{R}^n \setminus B'$, η è a supporto compatto.

Caso 3: $p = n$. In questo caso non è possibile usare l'argomento del Caso 2, in quanto $H^{p-1}_{dR}(\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}) \neq 0$. Comunque, dal Corollario 2.21 segue che la restrizione di η_0 a $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}$ è esatta se il suo integrale su qualche sfera centrata nell'origine e contenuta in $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}$ è nullo. Usando il Teorema di Stokes, otteniamo che:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\bar{B}'} \omega = \int_{\bar{B}'} d\eta_0 = \int_{\partial \bar{B}'} \eta_0.$$

Così abbiamo provato che η_0 è esatta su $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}$, e la dimostrazione procede esattamente come nel Caso 2. $\square$

Teorema 2.24 (Coomologia a Supporto Compatto di $\mathbb{R}^n$). *Per $n \geq 1$, i gruppi di coomologia a supporto compatto di $\mathbb{R}^n$ sono*

$$H^p_c(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & se\ p = n \\ 0 & se\ 0 \leq p < n \end{cases}$$

Dimostrazione. Per $p = 0$, poiché non vi sono (-1)-forme, e le 0-forme chiuse sono le funzioni f a valori reali tali che $df = 0$, e, visto che $\mathbb{R}^n$ è connesso, ciò accade se e solo se f è costante su tutta $\mathbb{R}^n$. Ma affinché f sia anche a supporto compatto, serve che $f = 0$ su tutto $\mathbb{R}^n$. Pertanto $H_c^0(\mathbb{R}^n) = 0$.

Per $0 < p < n$, concludiamo subito in forza del Lemma precedente che per ogni p-forma chiusa a supporto compatto ω, esiste una $(p-1)$-forma a supporto compatto η, tale che $d\eta = \omega$. Pertanto $H_c^p(\mathbb{R}^n) = 0$.

Per $p = n$, sia f una funzione di test a supporto compatto in $\mathbb{R}^n$, e consideriamo la n-forma $\omega = f dx^1 \cdots dx^n$. Supponiamo che $\omega = d\eta$ per qualche $(n-1)$-forma η. Allora, grazie al teorema di Stokes, si ha che, considerando una regione $\mathscr{D}$ tale che $\mathrm{supp}(f) \subseteq \mathrm{int}(\mathscr{D})$,

$$0 = \int_{\partial \mathscr{D}} \eta = \int_{\mathscr{D}} d\eta = \int_{\mathscr{D}} \omega > 0.$$

Tale assurdo prova che ω è chiusa ma non esatta, e quindi $H_c^n(\mathbb{R}^n) \neq 0$. Considerando, ora, l'applicazione $\Phi : H_c^n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ tale che $[\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \omega$. Tale applicazione è ovviamente ben definita, perché l'integrale di forme esatte è nullo e l'integrale di forme a supporto compatto è finito. Se $\omega \in \ker(\Phi)$, allora $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$, e dunque, dal lemma precedente, esiste una $(p-1)$-forma η su $\mathbb{R}^n$ a supporto compatto tale che $d\eta = \omega$. Ciò prova che ω è una forma esatta, e quindi Φ è iniettiva. Abbiamo quindi provato che $H_c^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$. □

In generale, data una mappa $F : M \to N$ che sia C^∞, e una forma differenziale $\omega \in \Omega_c^*(N)$, il pullback $F^*\omega$ non è necessariamente una forma differenziale a supporto compatto. Lo è solamente nel caso in cui F sia una **mappa propria**, ossia se è tale che la controimmagine di un compatto è un compatto. In tal caso, dunque, se $F : M \to N$ è mappa propria, vi è una mappa indotta sulla coomologia $F^* : H_c^p(N) \to H_c^p(M)$ per ogni p.

Proprio per tale motivo, la coomologia a supporto compatto, in generale, non è invariante per omotopia. Si noti, infatti, che nel teorema precedente abbiamo trovato che $H_c^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, sebbene $\mathbb{R}^n$ sia omotopo ad un punto p, e $H_c^n(\{p\})$ sia evidentemente il gruppo banale. La coomologia di de Rham a supporto compatto risulta, invece, invariante nel caso dell'**omotopia propria**, ovvero quando l'omotopia è una mappa propria. In tal caso, infatti, similmente a quanto visto per la coomologia di de Rham "ordinaria", è possibile mostrare che se due mappe sono omotopicamente equivalenti con omotopia propria, inducono mappe uguali nelle coomologie a supporto compatto. Osserviamo che ogni diffeomorfismo è una mappa propria, pertanto varietà differenziali diffeomorfe hanno stessi gruppi di coomologia a supporto compatto.

Traendo spunto dalla dimostrazione del teorema precedente, è possibile generalizzare il ragionamento svolto nel modo seguente. Sia M una n-varietà differenziabile orientata. Consideriamo la mappa lineare $I : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$ data dall'integrazione su M:

$$I(\omega) = \int_M \omega.$$

Poiché ogni n-forma su una n-varietà è chiusa, e l'integrale della derivazione esterna di una $(n-1)$-forma a supporto compatto è nullo, I induce un'applicazione lineare, denotata con lo stesso simbolo, di $H_c^n(M)$ in $\mathbb{R}$.

Teorema 2.25 (Coomologia di Grado Superiore, Caso Orientabile a Supporto Compatto). *Sia M una n-varietà differenziabile connessa e orientata. Allora la mappa di integrazione $I : H_c^n(M) \to \mathbb{R}$ è un isomorfismo, quindi $H_c^n(M)$ è 1-dimensionale.*

Dimostrazione. Il caso della 0-varietà è immediato per il Corollario 2.5, pertanto assumiamo $n \geq 1$. Sia $(U, (x^i))$ una carta locale con coordinate orientate su M, e sia f una funzione di test a supporto compatto contenuto in U. Allora la n-forma definita da

$$\theta_0 = \begin{cases} f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n & \text{in } U \\ 0 & \text{in } U^c \end{cases}$$

è C^∞, a supporto compatto in M, e soddisfa che $I(\theta_0) > 0$. Pertanto, I è suriettiva, e ciò che rimane da mostrare è l'iniettività. In altre parole, va mostrato che se ω è una n-forma a supporto compatto in M, tale che $\int_M \omega = 0$, allora esiste una $(n-1)$-forma η a supporto compatto tale che $d\eta = \omega$.

Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento numerabile di M composto da aperti diffeomorfi a $\mathbb{R}^n$, e sia $M_k = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ per ogni k. Poiché M è connessa, se necessario rinumerando la sequenza, è possibile supporre che $M_k \cap U_{k+1} \neq \varnothing$ per ogni k. Poiché ogni n-forma a supporto compatto è supportata in M_k per qualche valore di k, è sufficiente mostrare che se $\omega \in \Omega_c^n(M_k)$ ha integrale nullo, allora $\omega = d\eta$ per qualche $\eta \in \Omega_c^{n-1}(M_k)$, e poi estendiamo η a 0 per ottenere una forma a supporto compatto su M. Proveremo ciò per induzione su M.

Per $k = 1$, poiché $M_1 = U_1$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$, l'asserto è vero per il Lemma 2.23. Assumiamo, ora, che quanto enunciato valga per qualche $k \geq 1$, e supponiamo che ω sia una n-forma a supporto compatto su $M_{k+1} = M_k \cup U_{k+1}$, tale che $\int_{M_{k+1}} \omega = 0$.

Sia $\theta \in \Omega_c^n(M_{k+1})$ una forma ausiliaria con supporto in $M_k \cap U_{k+1}$, tale che $\int_{M_{k+1}} \theta = 0$ (e tale forma si costruisce con una funzione di test, come sopra). Sia $\{\varphi, \psi\}$ partizione dell'unità per M_{k+1} associata al ricoprimento $\{M_k, U_{k+1}\}$, e sia $c = \int_{M_{k+1}} \varphi\omega$. Osserviamo, quindi, che $\varphi\omega - c\theta$ è a supporto compatto in M_k e ha integrale nullo. Ora, per l'ipotesi induttiva, esiste una $(n-1)$-forma α su M_k tale che $d\alpha = \varphi\omega - c\theta$. Similmente, $\psi\omega + c\theta$ è a supporto compatto in U_{k+1}, e il suo integrale è

$$\int_{U_{k+1}} (\psi\omega + c\theta) = \int_{M_{k+1}} (1-\varphi)\omega + c\int_{M_{k+1}} \theta = \int_{M_{k+1}} \omega - \int_{M_{k+1}} \varphi\omega + c = 0.$$

Così, dal Lemma 2.23, esiste un'altra $(n-1)$-forma β, a supporto compatto in U_{k+1}, tale che $d\beta = \psi\omega + c\theta$. Sia α che β possono essere estese a 0 per diventare forme a supporto compatto in M_{k+1}. Avremo, quindi, che:

$$d(\alpha + \beta) = (\varphi\omega - c\theta) + (\psi\omega + c\theta) = (\varphi\psi)\omega = \omega,$$

che conclude la dimostrazione. □

Teorema 2.26 (Coomologia di Grado Superiore, Caso Compatto Orientabile). *Se M è una n-varietà differenziabile connessa, compatta e orientabile, allora $H^n_{dR}(M)$ è 1-dimensionale, ed è generato dalla classe di coomologia di una qualsiasi forma orientante.*

Dimostrazione. Segue dal precedente teorema, visto che, se M è compatta, allora $H^n_{dR}(M) = H^n_c(M)$, e l'integrale di una qualsiasi forma orientante su M è non nullo. □

Proposizione 2.27 (Coomologia del Toro). *I gruppi di coomologia del toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ sono*

$$H^p_{dR}(\mathbb{T}) = \begin{cases} \mathbb{R} & se\ p = 0\ o\ p = 2 \\ \mathbb{R}^2 & se\ p = 1 \end{cases}$$

Dimostrazione. Notiamo intanto che $H^0_{dR}(\mathbb{T}) = \mathbb{R}$, poiché il toro è una varietà connessa, e $H^2_{dR}(\mathbb{T}) = \mathbb{R}$ per il risultato precedente. Per il gruppo di coomologia di primo grado decomponiamo il toro $\mathbb{T}$ nell'unione di due aperti U e V, entrambi diffeomorfi a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. L'intersezione $U \cap V$ sarà diffeomorfa all'unione disgiunta di due copie di $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Poiché $\mathbb{S}^1$ è un retratto per deformazione di $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, abbiamo che $H^p_{dR}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) = H^p_{dR}(\mathbb{S}^1)$. Pertanto, $H^0_{dR}(U) = H^0_{dR}(V) = \mathbb{R}$ e $H^0_{dR}(U \cap V) = \mathbb{R}^2$. Inoltre, $H^1_{dR}(U) = H^1_{dR}(V) = \mathbb{R}$ e $H^1_{dR}(U \cap V) = \mathbb{R}^2$, ed infine $H^2_{dR}(U) = H^2_{dR}(V) = H^2_{dR}(U \cap V) = 0$ Da ciò, per il Teorema di Mayer-Vietoris, ne ricaviamo che la sequenza

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to H^1_{dR}(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \to 0 \to 0$$

è esatta. Ciò implica che $H^1_{dR}(\mathbb{T}) = \mathbb{R}^2$. □

Enunciamo ora una versione del Teorema di Mayer-Vietoris per la coomologia a supporto compatto, che tornerà utile nel seguito. Osserviamo che, data M una varietà differenziabile, e U un suo aperto, l'inclusione $\iota : U \to M$ induce una mappa $\iota_* : \Omega^p_c(U) \to \Omega^p_c(M)$, definita da

$$\iota_*(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{su } U \\ 0 & \text{su } U^c \end{cases}$$

cioè l'estensione di $\alpha \in \Omega^p_c(U)$ a zero al di fuori di $\mathrm{supp}(\alpha)$. Tale operazione è lecita perché il supporto di una forma $\omega \in \Omega^p_c(U)$, essendo compatto, non "raggiunge" il bordo di U, e pertanto ω può essere estesa a zero in tutto M maniera differenziabile. Consideriamo allora le inclusioni i, j, k, l come nel Teorema di Mayer-Vietoris per la coomologia ordinaria, e le relative mappe indotte i_*, j_*, k_*, l_*.

Teorema 2.28 (Teorema di Mayer-Vietoris per la Coomologia a Supporto Compatto). *Sia M una varietà differenziabile con o senza bordo, e siano U e V aperti di M tali che $U \cup V = M$. Per ogni p esiste una mappa lineare $\widetilde{\delta} : H^p_c(M) \to H^{p+1}_c(U \cap V)$ tale che la seguente sequenza sia esatta:*

$$\begin{tikzcd} H^p_c(U \cap V) \arrow[r, "i_* \oplus -j_*"] & H^p_c(U) \oplus H^p_c(V) \arrow[r, "k_* + l_*"] & H^p_c(M) \arrow[dll, "\widetilde{\delta}"'] \\ H^{p+1}_c(U \cap V) \arrow[r, "i_* \oplus -j_*"] & H^{p+1}_c(U) \oplus H^{p+1}_c(V) \arrow[r, "k_* + l_*"] & H^{p+1}_c(M) \end{tikzcd}$$

dove si ha che

$$(i_* \oplus -j_*)\omega = (i_*\omega, -j_*\omega)$$

$$(k_* + l_*)(\omega, \eta) = k_*\omega + j_*\eta.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella del Teorema di Mayer-Vietoris per la coomologia ordinaria: si mostra che la sequenza

$$0 \to H^p_c(U \cap V) \xrightarrow{i_* \oplus -j_*} H^p_c(U) \oplus H^p_c(V) \xrightarrow{k_* + l_*} H^p_c(M) \to 0$$

è esatta e si applica il Lemma Zigzag. □

Dettagliamo ora il comportamento dell'omomorfismo di connessione $\widetilde{\delta}$. Se $[\omega] \in H^p_c(M)$, allora, usando una partizione dell'unità relativa a $\{U, V\}$, scriviamo $\omega = k_*\omega_U + l_*\omega_V$. Pertanto, $dk_*\omega_U = -dl_*\omega_V$ su $U \cap V$, e allora

$$\widetilde{\delta}[\omega] = dk_*\omega_U|_{U \cap V} = -dl_*\omega_V|_{U \cap V}.$$

2.5 Dualità di Poincaré

Sia M una n-varietà differenziabile. Per ogni intero k, è ben definita l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned}\Omega^k(M) \times \Omega_c^{n-k}(M) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto \int_M \omega_1 \wedge \omega_2,\end{aligned}$$

perché $\omega_1 \wedge \omega_2$ è a supporto compatto. Inoltre, visto che, date $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^l(M)$ si ha $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, il prodotto esterno di due forme chiuse è ancora una forma chiusa, e il prodotto esterno di una forma chiusa per una forma esatta, è una forma esatta. Pertanto, tale applicazione bilineare definisce la seguente sulla coomologia

$$\begin{aligned}H_{dR}^k(M) \times H_{dR}^{n-k}(M) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ ([\omega_1], [\omega_2]) &\longmapsto \int_M \omega_1 \wedge \omega_2.\end{aligned}$$

Come è noto, tale mappa induce l'omomorfismo $\mathscr{P} : H_{dR}^k(M) \to H_{dR}^{n-k}(M)^*$, definito da

$$\mathscr{P}([\omega_1])([\omega_2]) = \int_M \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Il nostro obiettivo sarà mostrare che tale mappa è un isomorfismo. Pur restando vero per ogni varietà differenziabile orientabile, proveremo tale fatto solo per varietà orientabili che ammettono un **buon ricoprimento finito**, ossia un ricoprimento aperto finito $\{U_1, \cdots U_n\}$ tale che per ogni scelta di (finiti) $i_1, \cdots i_m$, l'insieme $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_m}$ o è vuoto o è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Si osservi che se i gruppi di coomologia sono infinito-dimensionali, in generale $H_{dR}^k(M)^* \neq H_c^{n-k}(M)$, dal momento che, in tale contesto, $V^* \cong W$ non implica necessariamente $V \cong W^*$.

Introduciamo un risultato algebrico utile ai nostri scopi:

Lemma 2.29 (Lemma dei Cinque). *Si consideri il seguente diagramma, commutativo a meno del segno (ossia, per esempio, $h_1' \circ \alpha = \pm\beta \circ h_1$)*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h_3"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "h_4"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\ A' \arrow[r, "h_1'"] & B' \arrow[r, "h_2'"] & C' \arrow[r, "h_3'"] & D' \arrow[r, "h_4'"] & E' \end{tikzcd}$$

Se le righe orizzontali sono esatte, e α, β, δ ed ε sono degli isomorfismi, allora anche la mappa centrale γ è un isomorfismo.

Se $\{U, V\}$ è un ricoprimento per la n-varietà differenziabile orientata M, consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}_{dR}(U) \oplus H^{k-1}_{dR}(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{k-1}_{dR}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{k}_{dR}(M) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
H^{n-k+1}_{c}(U)^* \oplus H^{n-k+1}_{c}(V)^* \arrow[r] & H^{n-k+1}_{c}(U \cap V)^* \arrow[r] & H^{n-k}_{c}(M)^* \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^{k}_{dR}(U) \oplus H^{k}_{dR}(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{k}_{dR}(U \cap V) \arrow[d] \\
{} \arrow[r] & H^{n-k}_{c}(U)^* \oplus H^{n-k}_{c}(V)^* \arrow[r] & H^{n-k}_{c}(U \cap V)^*
\end{tikzcd}$$

dove la riga in alto è la sequenza esatta di Mayer-Vietoris per la coomologia di de Rham ordinaria, e la riga in basso è la sequenza delle mappe duali della sequenza di Mayer-Vietoris per la coomologia di de Rham a supporto compatto, anch'essa esatta. Le mappe verticali sono tutte $\mathscr{P}$, o loro somme dirette.

Lemma 2.30. *Il diagramma sopracitato commuta a meno del segno.*

Dimostrazione. Innanzitutto dimostriamo che il seguente quadrato del diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^{k}_{dR}(M) \arrow[r, "k^* \oplus l^*"] \arrow[d, "\mathscr{P}"'] & H^{k}_{dR}(U) \oplus H^{k}_{dR}(V) \arrow[d, "\mathscr{P} \oplus \mathscr{P}"] \\
H^{n-k}_{c}(M)^* \arrow[r, "(k_* + l_*)^t"'] & H^{n-k}_{c}(U)^* \oplus H^{n-k}_{c}(V)^*
\end{tikzcd}$$

Per mostrare che $(\mathscr{P} \oplus \mathscr{P}) \circ (k^* \oplus l^*) = ((k_*)^t + (k_*)^t)) \circ \mathscr{P}$, è sufficiente mostrare che $\mathscr{P} \circ k^* = (k_*)^t \circ \mathscr{P}$ e che $\mathscr{P} \circ l^* = (l_*)^t \circ \mathscr{P}$.
Data $[\omega] \in H^k_{dR}(M)$, la forma lineare $\mathscr{P} \circ k^*([\omega])$ manda un elemento $[\theta] \in H^k_{dR}(U)$ in $\int_U k^*\omega \wedge \theta$. E, d'altra parte, $(k_*)^t \circ \mathscr{P}([\omega])$ manda $[\theta]$ in $\int_M \omega \wedge k_*\theta$. Tuttavia, $\omega \wedge k_*\theta$ e $k^*\omega \wedge \theta$ hanno entrambe supporto contenuto in U, e, in tale insieme, sono uguali. Ne segue che i due integrali sono uguali. La trattazione di $\mathscr{P} \circ l^* = (l_*)^t \circ \mathscr{P}$ è analoga.

Consideriamo ora quest'altro quadrato del diagramma

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}_{dR}(U \cap V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathscr{P}"'] & H^{k}_{dR}(M) \arrow[d, "\mathscr{P}"] \\
H^{n-k+1}_{c}(U \cap V)^* \arrow[r, "\widetilde{\delta}^t"'] & H^{n-k}_{c}(M)^*
\end{tikzcd}$$

e mostriamo che commuta a meno del segno.

Sia $\{\varphi, \psi\}$ partizione dell'unità associata a $\{U, V\}$. Se $[\omega] \in H^{k-1}_{dR}(U \cap V)$, allora $\delta[\omega]$ è rappresentata da una forma, che denoteremo con $\delta\omega$, con le seguenti proprietà:

$$\delta\omega|_U = d(\psi\omega) \text{ su } U,$$
$$\delta\omega|_V = -d(\varphi\omega) \text{ su } V.$$

D'altro canto, se $[\tau] \in H^{n-k}_{dR}(M)$, allora $\widetilde{\delta}[\tau]$ è rappresentata da una forma $\widetilde{\delta}\tau$ con le seguenti proprietà:

$$i_*\widetilde{\delta}\tau = d(\varphi\omega) \text{ su } U,$$
$$-j_*\widetilde{\delta}\tau = d(\psi\omega) \text{ su } V.$$

Poiché ω è chiusa, abbiamo che

$$\begin{aligned}\mathscr{P} \circ \delta([\omega])([\tau]) &= \int_M \delta\omega \wedge \tau = \int_{U\cap V} \delta\omega \wedge \tau \\ &= \int_{U\cap V} -d(\varphi\omega) \wedge \tau = -\int_{U\cap V} d\varphi \wedge \omega \wedge \tau,\end{aligned}$$

ove abbiamo usato il fatto che $\delta\omega \wedge \tau$ ha supporto in $U \cap V$. Poi,

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}^t \circ \mathscr{P}([\omega])([\tau]) &= \int_{U\cap V} \omega \wedge \widetilde{\delta}\tau = \int_{U\cap V} \omega \wedge d(\varphi\tau) \\ &= \int_{U\cap V} \omega \wedge d\varphi \wedge \tau.\end{aligned}$$

da cui si ha che i due integrali sono uguali a meno del segno. Gli altri due quadrati (che sono lo stesso quadrato, uno aumentato di indice rispetto all'altro) sono di simile trattazione. □

Teorema 2.31 (Teorema di Dualità di Poincaré). *Sia M una n-varietà differenziabile orientata con un buon ricoprimento finito. Allora per ogni k intero la mappa $\mathscr{P} : H^k_{dR}(M) \to (H^{n-k}_c(M))^*$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Sia M una n-varietà differenziabile che ammette un buon ricoprimento con al più N aperti. Dimostriamo l'asserto per induzione su N.

Per $N = 1$, $M = U_1$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$, e i Lemmi di Poincaré per entrambe le coomologie già ci assicurano che $H^k_{dR}(U) \cong (H^{n-k}_c(U))^*$.
Supponiamo che la tesi sia verificata se la n-varietà in oggetto ammette un buon ricoprimento di N aperti, e supponiamo che M sia una n-varietà, con $\{U_1, \cdots U_{N+1}\}$ buon ricoprimento. Poniamo $M_N = U_1 \cup \cdots \cup U_N$ e usiamo la sequenza di Mayer-Vietoris come descritta nel lemma precedente con $U = M_N$, $V = U_{N+1}$ e $U \cup V = M$. Allora, per l'ipotesi induttiva, $\mathscr{P}$ è un isomorfismo per U, V e

$U \cap V$, pertanto sono soddisfatte le ipotesi del Lemma dei Cinque, e ne otteniamo che l'omomorfismo centrale $\mathscr{P} : H^k_{dR}(M) \to H^{n-k}_c(M)^*$ è un isomorfismo, come volevamo mostrare. □

Osserviamo, inoltre, che in dimensione finita abbiamo

$$H^k_{dR}(M) \cong (H^{n-k}_c(M))^* \cong H^{n-k}_c(M).$$

Capitolo 3

Teorema di de Rham

L'invarianza topologica dei gruppi di de Rham suggerisce che vi sia un modo puramente topologico di calcolarli. In effetti, ciò è vero, ed in questo capitolo analizzeremo il profondo legame tra la coomologia di de Rham e le proprietà topologiche di una varietà differenziabile.

Inizieremo la trattazione esponendo l'*Omologia Singolare*, che associa ad uno spazio topologico dei gruppi che ne misurano la quantità di buchi k-dimensionali, generalizzando il concetto di gruppo fondamentale. Intuitivamente, possiamo pensare che un *buco k-dimensionale* in una varietà differenziabile venga individuato dalla presenza di una sottovarietà k-dimensionale che non è il bordo di nessuna sottovarietà $(k+1)$-dimensionale. Un esempio ne è la superficie sferica $\mathbb{S}^2$, che non ha buchi 1-dimensionali (è semplicemente connessa), ma ha evidentemente un buco 2-dimensionale, che viene individuato dal fatto che $\mathbb{S}^2$ stessa non è il bordo di alcuna sottovarietà di $\mathbb{S}^2$. L'Omologia Singolare formalizza questa intuizione, sviluppando, in modo simile a quanto visto per la coomologia, un complesso, il cui operatore è la mappa che manda un oggetto al suo bordo.

Dopo aver accennato brevemente ai gruppi di coomologia singolare, strettamente legati ai gruppi di omologia singolare, proveremo il celebre Teorema di Georges de Rham del 1931, che determina un isomorfismo tra la coomologia singolare e quella di de Rham, dato dall'integrazione di forme differenziali.

L'importanza di tale risultato, che gioca un ruolo fondamentale nella geometria differenziale, si deve al fatto che esprime una profonda connessione tra le proprietà topologiche e differenziali di una varietà. In particolare, afferma che la possibilità di trovare delle k-forme differenziali su una varietà che siano chiuse ma non esatte dipende solo dalle caratteristiche topologiche dello spazio, ed, in particolare, solamente dalla presenza di buchi k-dimensionali in tale varietà.

3.1 Omologia Singolare

Dati $p+1$ punti nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, essi si dicono **in posizione generale** se non sono contenuti in alcun sottospazio affine $(p-1)$-dimensionale. Dati $v_o, \cdots, v_p$ punti in posizione generale, un ***p*-simplesso geometrico** è l'inviluppo convesso di tali punti, ovvero il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ della forma

$$\left\{ \sum_{i=0}^{p} t_i v_i, \text{ con } 0 \leq t_i \leq 1, \text{ e } \sum_{i=0}^{p} t_i = 1 \right\},$$

che denoteremo con $v_o, \cdots, v_p$. L'intero p è detto **dimensione** del simplesso, i punti $v_o, \cdots, v_p$ sono detti **vertici** del simplesso geometrico. I simplessi i cui vertici sono un sottoinsieme non vuoto di $\{v_o, \cdots, v_p\}$ sono detti **facce** del simplesso, e le facce $(p-1)$-dimensionali sono dette **facce di bordo**. Osserviamo che vi sono esattamente $p+1$ facce di bordo, ognuna ottenuta omettendo uno dei $p+1$ vertici da $[v_o, \cdots, v_p]$. In particolare, chiameremo l'i-esima faccia di bordo $[v_o, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, v_p]$, ove indichiamo con $\widehat{v_i}$ il fatto che v_i è omesso, **faccia opposta a $\boldsymbol{v_i}$**, la denoteremo con $\partial_i[v_o, \cdots, v_p]$. Chiameremo ***p*-simplesso standard** il simplesso $\Delta_p = [e_o, e_1, \cdots, e_p] \subseteq \mathbb{R}^p$, dove $e_0 = 0$ e gli e_i sono i vettori della base canonica.

Sia M uno spazio topologico, una mappa continua $\sigma : \Delta_p \to M$ è un ***p*-simplesso singolare in *M***. Definiamo, dunque, il **gruppo catena singolare di *M* di grado *p***, denotato con $C_p(M)$, come il gruppo abeliano libero generato da tutti i p-simplessi singolari di M. Quindi, un oggetto di tale gruppo, detto ***p*-catena singolare**, è una combinazione lineare formale finita di p-simplessi singolari in M, a coefficienti in $\mathbb{Z}$.

Un caso particolare, che si presenta frequentemente, è quello in cui M è un sottoinsieme convesso di un qualche spazio euclideo $\mathbb{R}^m$. In tal caso, per ogni $(p+1)$-tupla ordinata di punti $(w_o, \cdots, w_p)$ in M, non necessariamente in posizione generale, vi è un'unica mappa da $\mathbb{R}^p$ in $\mathbb{R}^m$ che manda e_i in w_i per $i = 0, \cdots, p$ (basta considerare l'applicazione lineare che manda e_i in $w_i - w_0$ per $i = 1, \cdots, p$, e traslare per w_0). La restrizione di tale mappa affine a Δ_p, denotata con $A(w_0, \cdots, w_p)$, è detta **simplesso singolare affine in *M***.

Per ogni $i = 0, \cdots, p$, definiamo la **mappa dell'*i*-esima faccia in $\boldsymbol{\Delta_p}$** come il $(p-1)$-simplesso affine $F_{i,p} : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$, definito da

$$F_{i,p} = A(e_o, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_p).$$

Quest'applicazione mappa Δ_{p-1} omeomorficamente nella faccia di bordo $\partial_i \Delta_p$. Esplicitamente, è l'unica mappa affine che manda $e_j \mapsto e_j$ se $j < i$, e $e_j \mapsto e_{j+1}$ se $j \geq i$.

Possiamo quindi definire il **bordo** di un p-simplesso singolare $\sigma : \Delta_p \to M$ come la $(p-1)$-catena $\partial\sigma$ definita da

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ F_{i,p}.$$

Estendendo tale applicazione per linearità alle somme formali, e ponendo, per convenzione, che $\partial\Delta_0 = 0$, ne otteniamo un omomorfismo di gruppi $\partial : C_p(M) \to C_{p-1}(M)$, detto **operatore di bordo**.

Lemma 3.1. *Dati $j<i$, le mappe delle facce soddisfano che*

$$F_{i,p} \circ F_{j,p-1} = F_{j,p} \circ F_{i-1,p-1}.$$

Dimostrazione. Valutiamo le mappe su ogni vertice e_k.

Per $j < i \le k$:
$e_k \xmapsto{F_{j,p-1}} e_{k+1} \xmapsto{F_{i,p}} e_{k+2}$
$e_k \xmapsto{F_{i-1,p-1}} e_{k+1} \xmapsto{F_{j,p}} e_{k+2}$
Per $k \le j-1 < j < i$:
$e_k \xmapsto{F_{j,p-1}} e_k \xmapsto{F_{i,p}} e_k$
$e_k \xmapsto{F_{i-1,p-1}} e_k \xmapsto{F_{j,p}} e_k$
Per $k = j < i-1 < i$:
$e_k \xmapsto{F_{j,p-1}} e_{k+1} \xmapsto{F_{i,p}} e_{k+1}$
$e_k \xmapsto{F_{i-1,p-1}} e_k \xmapsto{F_{j,p}} e_{k+1}$

Per $k = j = i-1 < i$:
$e_k \xmapsto{F_{j,p-1}} e_{k+1} \xmapsto{F_{i,p}} e_{k+2}$
$e_k \xmapsto{F_{i-1,p-1}} e_{k+1} \xmapsto{F_{j,p}} e_{k+2}$
Per $j < k < i-1 < i$:
$e_k \xmapsto{F_{j,p-1}} e_{k+1} \xmapsto{F_{i,p}} e_{k+1}$
$e_k \xmapsto{F_{i-1,p-1}} e_k \xmapsto{F_{j,p}} e_{k+1}$
Per $j < k = i-1 < i$:
$e_k \xmapsto{F_{j,p-1}} e_{k+1} \xmapsto{F_{i,p}} e_{k+2}$
$e_k \xmapsto{F_{i-1,p-1}} e_{k+1} \xmapsto{F_{j,p}} e_{k+2}$

In ogni caso risulta evidente la veridicità dell'asserto. □

Lemma 3.2. *Se c è una catena singolare, allora $\partial(\partial c) = 0$*

Dimostrazione. Prendiamo n intero positivo. Visto che $C_{n+1}(M)$ è generato da tutti i $(n+1)$-simplessi σ, è sufficiente verificare che $\partial(\partial\sigma) = 0$ per ogni tale σ. Abbiamo che:

$$\begin{aligned}
\partial(\partial\sigma) &= \partial\left(\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \sigma F_{j,n+1}\right) = \sum_{j;k} (-1)^{j+k} \sigma F_{j,n+1} F_{k,n} \\
&= \sum_{j \le k} (-1)^{j+k} \sigma F_{j,n+1} F_{k,n} + \sum_{j>k} (-1)^{j+k} \sigma F_{j,n+1} F_{k,n} \\
&= \sum_{j \le k} (-1)^{j+k} \sigma F_{j,n+1} F_{k,n} + \sum_{j>k} (-1)^{j+k} \sigma F_{k,n+1} F_{j-1,n},
\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato il risultato del lemma precedente. Nella seconda sommatoria, cambiamo gli indici nel seguente modo: poniamo $p = k$ e $q = j - 1$. In tal modo, la scrittura di prima diventa

$$\sum_{j \leq k} (-1)^{j+k} \sigma F_{j,n+1} F_{k,n} + \sum_{p \leq q} (-1)^{p+q+1} \sigma F_{p,n+1} F_{q,n}.$$

Ora, ogni termine del tipo $\sigma F_{p,n+1} F_{q,n}$ appare due volte: nella prima sommatoria con segno $(-1)^{j+k}$ e nella seconda con segno opposto $(-1)^{j+k+1}$. Dunque tutti i termini si elidono, e ne rimane che $\partial(\partial \sigma) = 0$, come volevamo. $\square$

Una p-catena singolare c tale che $\partial c = 0$ è chiamata **ciclo**, mentre una p-catena singolare c tale che $c = \partial b$, per una qualche $(p+1)$-catena singolare b, si dice **bordo**. Denotiamo con $Z_p(M)$ l'insieme dei p-cicli, e con $B_p(M)$ l'insieme dei p-bordi.

Ora, ∂ è un omomorfismo di gruppi, e $Z_p(M)$ e $B_p(M)$ sono sottogruppi di $C_p(M)$ tali che $B_p(M) \subseteq Z_p(M)$, visto che $\partial \circ \partial = 0$. Pertanto, è ben definito il ***p*-esimo gruppo di omologia singolare** di M, come il gruppo quoziente

$$H_p(M) = \frac{Z_p(M)}{B_p(M)}.$$

In altre parole, abbiamo che la seguente sequenza di gruppi abeliani e morfismi

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_{p+1}(M) \xrightarrow{\partial} C_p(M) \xrightarrow{\partial} C_{p-1}(M) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

è un complesso, detto **complesso catena singolare**, e, per ogni p, il gruppo $H_p(M)$ è il p-esimo gruppo di omologia del complesso, ossia

$$H_p(M) = \frac{\ker(\partial : C_p(M) \to C_{p-1}(M))}{\operatorname{im}(\partial : C_{p+1}(M) \to C_p(M))}$$

Una classe di equivalenza di un p-ciclo c in $H_p(M)$ è detta **classe di omologia**, denotata con $[c]$. Diremo che due p-cicli sono **omologhi** se differiscono per un bordo.

Osserviamo che una mappa continua $F : M \to N$ induce un omomorfismo $F_\# : C_p(M) \to C_p(M)$ in ogni gruppo catena singolare, definito da $F_\#(\sigma) = F \circ \sigma$ per ogni simplesso singolare σ, ed esteso per linearità alle catene.

Lemma 3.3. *Sia $F : M \to N$ una funzione continua tra spazi topologici, e sia $F_\# : C_p(M) \to C_p(M)$ come sopra. Allora $\partial \circ F_\# = F_\# \circ \partial$.*

Dimostrazione. Si ha che

$$F_\#(\partial\sigma) = F_\#\big(\sum_i (-1)^i \sigma \circ F_{i,p}\big) = \sum_i (-1)^i F_\#(\sigma \circ F_{i,p}) = \sum_i (-1)^i F \circ \sigma F_{i,p}$$

e, d'altro canto,

$$\partial(F_\#\sigma) = \partial(F \circ \sigma) = \sum_i (-1)^i F \circ \sigma \circ F_{i,p}.$$

□

Il lemma appena presentato garantisce che $\partial \circ F_\# = F_\# \circ \partial$, pertanto $F_\#$ è una mappa catena. Osserviamo, inoltre che $F_\#$ manda cicli in cicli e bordi in bordi. Infatti, se c è un ciclo, $\partial F_\#(c) = F_\#\partial(c) = F_\#(0) = 0$, e, invece, se $c = \partial b$ è un bordo, $F_\#(c) = F_\#(\partial b) = \partial F_\#(b)$, ossia è ancora un bordo. Dunque, $F_\#$ induce un omomorfismo sui gruppi di omologia singolare, denotato con $F_* : H_p(M) \to H_p(M)$. Poiché si ha anche che $(F \circ G)_*[c] = [F(G(c))] = F_*[G(c)] = (F_* \circ G_*)[c]$, e $(id_M)_*[c] = [c] = id_{H_p(M)}[c]$, spazi topologici omeomorfi hanno gruppi di omologia singolare isomorfi tra loro.

Proposizione 3.4 (Proprietà dei Gruppi di Omologia Singolare). *Per i gruppi di omologia singolare valgono le seguenti proprietà:*

- *Per ogni spazio topologico del tipo $\{q\}$, $H_0(\{q\})$ è il gruppo ciclico infinito generato dalla classe di omologia dell'unico 0-simplesso singolare che mappa Δ_0 in q, ossia $H_0(\{q\}) \cong \mathbb{Z}$. Invece, $H_p(\{q\}) = 0$ per ogni altro $p \neq 0$.*
- *Sia $\{M_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di spazi topologici, e sia $M = \sqcup_j M_j$ unione disgiunta. Allora le mappe di inclusione $\iota_j : M_j \hookrightarrow M$ inducono un isomorfismo di $H_p(M)$ in $\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} H_p(M_j)$.*
- *Spazi topologici omotopicamente equivalenti hanno gruppi di omologia singolare isomorfi tra loro.*

Dimostrazione. Per gli ultimi due punti diamo solo dei cenni per la dimostrazione, i cui argomenti sono simili a quelli visti per la coomologia.

- Nello spazio topologico $\{q\}$, per ogni intero $p > 0$, vi è un solo p-simplesso singolare, $\sigma_p : \Delta_n \to \{q\}$, dato dalla mappa costante. Pertanto,

$$\partial\sigma_p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma_p F_{i,p} = \left[\sum_{i=0}^{p} (-1)^i\right] \sigma_{p-1},$$

visto che $\sigma_p F_{i,p}$ è un $(p-1)$-simplesso, e σ_{p-1} è l'unico esistente. Allora

$$\partial\sigma_p = \begin{cases} 0 & \text{se } p \text{ è dispari o } p = 0 \\ \sigma_{p-1} & \text{se } p \neq 0 \text{ è pari} \end{cases}$$

Dunque, $\partial : C_p(\{q\}) \to C_{p-1}(\{q\})$ è il morfismo nullo quando p è dispari o $p = 0$, ed è un isomorfismo quando $p \neq 0$ è pari.

Pertanto, se $p = 0$ abbiamo che $H_0(\{q\}) = \ker(\partial : C_0(\{q\}) \to 0)$, visto che $\partial : C_1(\{q\}) \to C_0(\{q\})$ è nullo. Ma poiché $\partial : C_0(\{q\}) \to 0$ è nullo a sua volta, $H_0(\{q\}) \cong \mathbb{Z}$, cioè è isomorfo al gruppo abeliano libero generato dall'unico 0-simplesso.

Poi, se $p > 0$, consideriamo la sequenza

$$C_{p+1}(\{q\}) \xrightarrow{\partial} C_p(\{q\}) \xrightarrow{\partial} C_{p-1}(\{q\}).$$

Se p è dispari, il secondo morfismo è nullo, ed il primo è, in particolare, suriettivo: ne deduciamo che $H_p(\{q\}) = 0$. Se p è pari, il primo morfismo è nullo, ed il secondo è, in particolare, iniettivo: ne deduciamo ancora che $H_p(\{q\}) = 0$.

- L'asserto è vero, perché le mappe di inclusione ι_j inducono l'isomorfismo $\oplus_j C_p(M_j) \cong C_p(M)$ già a livello delle catene.
- Il passo principale è costruire per ogni spazio topologico M un operatore di omotopia $h : C_p(M) \to C_{p+1}(M \times I)$ tale che $h \circ \partial + \partial \circ h = (i_1)_\# - (i_0)_\#$, dove $i_k(x) = (x, k)$, e si procede in maniera simile a quanto fatto per la coomologia.

□

In aggiunta a quanto visto, per l'omologia singolare vale anche la seguente versione del teorema di Mayer-Vietoris. Sia M uno spazio topologico, e $U, V \subseteq M$ due aperti la cui unione è M. Il solito diagramma delle inclusioni induce sull'omologia i seguenti omomorfismi:

$$\begin{tikzcd} & H_p(U) \arrow[dr, "k_*"] & \\ H_p(U \cap V) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & H_p(M) \\ & H_p(V) \arrow[ur, "l_*"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 3.5 (Teorema di Mayer-Vietoris per Omologia Singolare). *Sia M uno spazio topologico e U, V due aperti di M la cui unione è tutto M. Per ogni p esiste un omomorfismo di connessione $\partial_* : H_p(M) \to H_{p-1}(U \cap V)$, tale che la seguente sequenza è esatta:*

$$\begin{tikzcd}
H_p(U \cap V) \arrow[r, "\alpha"] & H_p(U) \oplus H_p(V) \arrow[r, "\beta"] & H_p(M) \arrow[dll, "\partial_*"] \\
H_{p-1}(U \cap V) \arrow[r, "\alpha"] & H_{p-1}(U) \oplus H_{p-1}(V) \arrow[r, "\beta"] & H_{p-1}(M)
\end{tikzcd}$$

dove si pongono

$$\alpha[c] = (i_*[c], -j_*[c]), \qquad \beta([c],[c']) = k_*[c] + l_*[c'],$$

e $\partial_*[d] = [c]$, data l'esistenza di $f \in C_p(U)$ e $f' \in C_p(V)$ tali che $k_\# f + l_\# f'$ è omologo a d, e $(i_\# c, -j_\# c) = (\partial f, \partial f')$.

Vediamo con un esempio come si può calcolare l'omologia di una varietà differenziabile usando il teorema di Mayer-Vietoris.

Proposizione 3.6 (Omologia delle Sfere). *Per $n \geq 1$, i gruppi di coomologia di de Rham della superficie sferica sono*

$$H_p(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{N} & se\ p = 0\ o\ p = n \\ 0 & se\ 0 < p < n \end{cases}$$

Dimostrazione. Osserviamo che, per $n \geq 1$ e $p = 0$ abbiamo che $H_p(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$, poiché il gruppo di omologia singolare di grado zero sostanzialmente conta le componenti connesse per archi. Inoltre, $H_1(\mathbb{S}^n) \cong 0$ per ogni $n \geq 2$, perché $\mathbb{S}^n$ è semplicemente connessa.

Cosi, supponiamo la tesi valga per $\mathbb{S}^{n-1}$. Consideriamo N ed S rispettivamente polo nord e sud della sfera $M = \mathbb{S}^n$, e siano $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ e $V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. Tali aperti U e V sono omeomorfi a $\mathbb{R}^n$, ed $U \cap V$ è omeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$. Dal teorema di Mayer-Vietoris otteniamo che la seguente sequenza è esatta per $p > 1$

$$H_p(U) \oplus H_p(V) \to H_p(M) \to H_{p-1}(U \cap V) \to H_{p-1}(U) \oplus H_{p-1}(V),$$

ma poiché $H_p(U) \cong H_p(V) \cong 0$ per $p > 1$, ne deduciamo che, sempre per $p > 1$, $H_p(\mathbb{S}^n) \cong H_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1})$. La tesi, dunque, segue per induzione.

$\square$

3.2 Coomologia Singolare

In aggiunta ai gruppi di omologia singolare, fissato un gruppo abeliano G, è possibile definire una sequenza di gruppi $H^p(M,G)$, detti **gruppi di coomologia singolare a coefficienti in G**, nel modo seguente. Dato un complesso catena singolare

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_{p+1}(M) \xrightarrow{\partial} C_p(M) \xrightarrow{\partial} C_{p-1}(M) \xrightarrow{\partial} \cdots,$$

consideriamo la sequenza dei suoi gruppi duali, cioè

$$\cdots \xleftarrow{\partial^*} \mathrm{Hom}(C_{p+1}(M),G) \xleftarrow{\partial^*} \mathrm{Hom}(C_p(M),G) \xleftarrow{\partial^*} \mathrm{Hom}(C_{p-1}(M),G) \xleftarrow{\partial^*} \cdots,$$

dove $\partial^* : \mathrm{Hom}(C_p(M),G) \to \mathrm{Hom}(C_{p+1}(M),G)$ è la mappa duale di ∂, cioè quella tale che $\partial^*(\alpha) = \alpha \circ \partial$ per ogni $\alpha \in \mathrm{Hom}(C_p(M),G)$. Allora, definiremo il p-esimo gruppo di coomologia singolare a coefficienti in G, $H^p(M,G)$, come il p-esimo gruppo di coomologia di tale complesso.

Un importante teorema della topologia algebrica, chiamato **teorema dei coefficienti universali**, asserisce che i gruppi di coomologia singolare in un gruppo arbitrario possono essere ottenuti dai gruppi di omologia singolare. Pertanto, i gruppi di coomologia singolare non codificano ulteriori informazioni, rispetto ai gruppi di omologia singolare, ma le organizzano in maniera differente, che, a volte, si rivela più agevole per raggiungere alcuni risultati. In particolare, se G è un campo allora tale teorema procura un isomorfismo canonico tra $H^p(M,G)$ e $\mathrm{Hom}(H_p(M),\mathbb{R})$. Nelle sezioni a seguire considereremo il caso in cui $G = \mathbb{R}$, e, dunque, varrà che $H^p(M,\mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(H_p(M),\mathbb{R})$.

Osserviamo che una mappa continua $F : M \to N$ induce una mappa lineare $F^* : H^p(N) \to H^p(M)$, definita da $F^*\gamma[c] = \gamma(F_*[c])$ per ogni $\gamma \in H^p(N,\mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(H_p(N),\mathbb{R})$, e per ogni p-catena singolare $c \in H^p(M)$. Come per la coomologia di de Rham, vale che $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ e che $(id_M)^* = id_{H^p(M,\mathbb{R})}$.

Proposizione 3.7 (Proprietà della Coomologia Singolare). *Per i gruppi di coomologia singolare valgono le seguenti proprietà:*

- *Per ogni spazio topologico del tipo $\{q\}$, $H^p(\{q\},\mathbb{R})$ è il gruppo banale, tranne nel caso $p = 0$, in cui è 1-dimensionale.*
- *Sia $\{M_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di spazi topologici, e sia $M = \sqcup_j M_j$ unione disgiunta. Allora le mappe di inclusione $\iota_j : M_j \hookrightarrow M$ inducono un isomorfismo di $H^p(M,\mathbb{R})$ in $\prod_{j\in\mathbb{N}} H^p(M_j,\mathbb{R})$.*
- *Spazi topologici omotopicamente equivalenti hanno gruppi di coomologia singolare isomorfi tra loro.*

Dimostrazione. Tutte queste proprietà seguono immediatamente dalla definizione di $H^p(M,\mathbb{R})$ come $\mathrm{Hom}(H_p(M),\mathbb{R})$ e dalla Proposizione 3.4. $\square$

Anche per la coomologia singolare vale una versione del teorema di Mayer-Vietoris, che tornerà utile nel seguito. Dati M spazio topologico, e $U, V \subseteq M$ aperti la cui unione è M, ricordiamo l'ovvio diagramma commutativo della coomologia singolare, indotto dalle mappe di inclusione:

$$\begin{tikzcd} & H^p(U,\mathbb{R}) \arrow[dr, "i^*"] & \\ H^p(M,\mathbb{R}) \arrow[ur, "k^*"] \arrow[dr, "l^*"'] & & H^p(U\cup V,\mathbb{R}), \\ & H^p(V,\mathbb{R}) \arrow[ur, "j^*"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 3.8 (Teorema di Mayer-Vietoris per la Coomologia Singolare). *Sia M uno spazio topologico e $U, V \subseteq M$ aperti tali che la loro unione è M. Per ogni p esiste un omomorfismo di connessione $\partial^* : H^p(U\cap V,\mathbb{R}) \to H^{p+1}(M,\mathbb{R})$ tale che la seguente sequenza è esatta:*

$$\begin{tikzcd} H^p(M,\mathbb{R}) \arrow[r, "k^*\oplus l^*"] & H^p(U,\mathbb{R})\oplus H^p(V,\mathbb{R}) \arrow[r, "i^*-j^*"] & H^p(U\cap V,\mathbb{R}) \arrow[dll, "\partial^*"'] \\ H^{p+1}(M,\mathbb{R}) \arrow[r, "k^*\oplus l^*"] & H^{p+1}(U,\mathbb{R})\oplus H^{p+1}(V,\mathbb{R}) \arrow[r, "i^*-j^*"] & H^{p+1}(U\cap V,\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

dove

$$(k^*\oplus l^*)\gamma = (k^*\gamma, l^*\gamma) \qquad \forall \gamma \in H^p(M,\mathbb{R})$$

$$(i^*-j^*)(\gamma,\delta) = i^*\gamma - j^*\delta \qquad \forall\gamma\in H^p(U,\mathbb{R}),\ \forall\delta\in H^p(V,\mathbb{R})$$

e ∂^* è definito da $\partial^*(\gamma)=\gamma\circ\partial_*$, con ∂_* come l'omomorfismo di connessione del Teorema di Mayer-Vietoris per l'omologia singolare.

3.3 Omologia Singolare C^∞

La connessione che vogliamo stabilire tra la coomologia singolare e quella di de Rham verrà sviluppata mediante l'integrazione di forme differenziali su catene singolari. Più precisamente, data una p-catena singolare σ in una varietà M, ed una p-forma ω su M, vorremmo integrare su Δ_p il pullback di ω tramite σ. Tuttavia, si presenta un problema: i pullback sono definiti solo per mappe C^∞, mentre i simplessi singolari, per come li abbiamo definiti, sono solamente continui. Dobbiamo quindi studiare come varia la teoria omologica che abbiamo considerato, se ci limitiamo a lavorare con dei simplessi C^∞. Per la verità, per definire un pullback basterebbe considerare mappe meramente C^1, ma, come vedremo, trattare il caso più restrittivo C^∞ non nuocerà ai nostri scopi.

Sia M una varietà differenziabile, un $\boldsymbol{p}$**-simplesso** $\boldsymbol{C^\infty}$ **in** $\boldsymbol{M}$ è una mappa $\sigma : \Delta_p \to M$ che è C^∞, nel senso che ammette un'estensione C^∞ in un intorno di ogni punto. Il sottogruppo di $C_p(M)$ generato dai simplessi C^∞ è il **gruppo catena** $\boldsymbol{C^\infty}$ **di** $\boldsymbol{M}$ **di grado** $\boldsymbol{p}$. Elementi di questo gruppo sono detti **catene** $\boldsymbol{C^\infty}$. Poiché il bordo di un p-simplesso C^∞ è un $(p-1)$-simplesso C^∞, ha senso definire il $\boldsymbol{p}$**-esimo gruppo di omologia singolare** $\boldsymbol{C^\infty}$ **di** $\boldsymbol{M}$ come il quoziente

$$H_p^\infty(M) = \frac{\ker(\partial : C_p^\infty(M) \to C_{p-1}^\infty(M))}{\operatorname{im}(\partial : C_{p+1}^\infty(M) \to C_p^\infty(M))}$$

La mappa di inclusione $\iota : C_p^\infty(M) \to C_p(M)$ commuta con l'operatore di bordo, pertanto induce una mappa sull'omologia $\iota_* : H_p^\infty(M) \to H_p(M)$ data da $\iota_*[c] = [\iota(c)]$.

Teorema 3.9 (Omologia Singolare e Singolare $\boldsymbol{C^\infty}$). *Per ogni varietà differenziabile M, la mappa $\iota_* : H_p^\infty(M) \to H_p(M)$, indotta dall'inclusione $\iota : C_p^\infty(M) \to C_p(M)$, è un isomorfismo.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo fatto è molto tecnica, ne diamo solo un'idea generale. Con il Teorema di approssimazione di Whitney va costruito un operatore "regolarizzante" $s : C_p(M) \to C_p^\infty(M)$ tale che $s \circ \partial = \partial \circ s$ e in modo che $s \circ \iota = id_{C_p^\infty(M)}$, e un operatore di omotopia che mostra che $\iota \circ s$ induce l'identità su $H_p(M)$. Il cuore della dimostrazione è la costruzione sistematica di un'omotopia da ogni simplesso continuo ad un simplesso C^∞, in modo tale che rispetti la restrizione ad ogni faccia di bordo di Δ_p. $\square$

3.4 Il Teorema di de Rham

Sia M una varietà differenziabile, ω una p-forma chiusa su M, e σ un p-simplesso C^∞ in M. Definiamo l'**integrale di** $\boldsymbol{\omega}$ **su** $\boldsymbol{\sigma}$ con:

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta_p} \sigma^* \omega.$$

Osserviamo che tale scrittura ha senso, perché Δ_p è una sottovarietà di $\mathbb{R}^p$ che ne eredita l'orientamento. Invece, se $c = \sum_{i=1}^{k} c_i \sigma_i$ è una p-catena C^∞, l'integrale di ω

su c è definito con:

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^{k} c_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

Teorema 3.10 (Teorema di Stokes per le Catene). *Se c è una p-catena in una varietà differenziabile M, e ω è una $(p-1)$-forma C^∞ su M, allora*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

Dimostrazione. È sufficiente mostrare la tesi nel caso in cui c sia un simplesso $\sigma \in C^\infty$. Dal Teorema di Stokes si ha che:

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\Delta_p} \sigma^* d\omega = \int_{\Delta_p} d\sigma^*\omega = \int_{\partial\Delta_p} \sigma^*\omega.$$

Le mappe $\{F_{i,p},\ i = 0, \cdots p\}$ sono delle parametrizzazioni delle facce di bordo di Δ_p, che soddisfano le ipotesi della Proposizione 1.19 (che rimane vera anche se applicata a varietà con angoli), eccetto, eventualmente, per il fatto che potrebbero non preservare l'orientamento.

Osserviamo che ognuna delle $F_{i,p}$ è la restrizione a $\Delta_p \cap \partial\mathbb{H}^p$ del diffeomorfismo affine che manda il simplesso $[e_0, \cdots, e_p]$ in $[e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_p, e_i]$, che, chiaramente, preserva l'orientamento se e solo se $(e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_p, e_i)$ è una permutazione pari di $(e_0, \cdots, e_p)$, e ciò accade se e solo se $p-i$ è pari. Visto che le coordinate di $\partial\mathbb{H}^p$ sono orientate positivamente se e solo se p è pari, ne deduciamo che $F_{i,p}$ preserva l'orientamento per $\partial\Delta_p$ se e solo se i è pari.

Così, applicando la Proposizione 1.19, otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta_p} \sigma^*\omega &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} F_{i,p}^*\sigma^*\omega = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} (\sigma \circ F_{i,p})^*\omega \\ &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\sigma\circ F_{i,p}} \omega = \int_{\partial\sigma} \omega\end{aligned}$$

□

Usando questo teorema, ci è possibile definire una mappa lineare naturale $\mathscr{R} : H^p_{dR}(M) \to H^p(M, \mathbb{R})$, chiamata **omomorfismo di de Rham**, come segue: per ogni $[\omega] \in H^p_{dR}(M)$ e per ogni $[c] \in H_p(M) \cong H^\infty_p(M)$, definiamo

$$\mathscr{R}[\omega][c] = \int_{\widetilde{c}} \omega,$$

dove $\widetilde{c}$ è un qualsiasi p-ciclo C^∞ nella classe di omologia di c. Osserviamo che se $\widetilde{c}$ e $\widetilde{c}'$ sono cicli nella stessa classe di omologia, allora $\widetilde{c} - \widetilde{c}' = \partial\widetilde{b}$ per qualche $(p+1)$-catena $\widetilde{b}$, da cui si ha che

$$\int_{\widetilde{c}} \omega - \int_{\widetilde{c}} \omega = \int_{\partial\widetilde{b}} = \int_{\widetilde{b}} d\omega = 0.$$

Inoltre, se $\omega = d\eta$ è una forma esatta, abbiamo che

$$\int_{\widetilde{c}} \omega = \int_{\widetilde{c}} d\eta = \int_{\partial\widetilde{c}} \eta = 0,$$

ed, unitamente al fatto che $\mathscr{R}[\omega][c+c'] = \mathscr{R}[\omega][c] + \mathscr{R}[\omega][c']$, e $\mathscr{R}[\omega]$ dipende linearmente da ω, ciò mostra che $\mathscr{R}[\omega]$ è un ben definito elemento di $\mathrm{Hom}(H_p(M), \mathbb{R}) \cong H^p(M, \mathbb{R})$.

Proposizione 3.11. *Per ogni varietà differenziabile M e per ogni intero non negativo p, sia $\mathscr{R} : H^p_{dR}(M) \to H^p(M, \mathbb{R})$ il morfismo di de Rham. Allora valgono le seguenti:*

- *Se $F : M \to N$ è un diffeomorfismo, allora il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{array}{ccc} H^p_{dR}(N) & \xrightarrow{F^*} & H^p_{dR}(M) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{R}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{R}} \\ H^p(N, \mathbb{R}) & \xrightarrow[F^*]{} & H^p(M, \mathbb{R}) \end{array}$$

- *Se M è una varietà differenziabile, e $U, V \subseteq M$ aperti la cui unione è M, allora il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{array}{ccc} H^{p-1}_{dR}(U \cap V) & \xrightarrow{\delta} & H^p_{dR}(M) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{R}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{R}} \\ H^{p-1}(U \cap V, \mathbb{R}) & \xrightarrow[\partial^*]{} & H^p(M, \mathbb{R}) \end{array}$$

  dove ∂^* e δ sono gli omomorfismi di connessione della sequenza di Mayer-Vietoris per, rispettivamente, la coomologia singolare e di de Rham.

Dimostrazione. Direttamente dalle definizioni, segue che se σ è un p-simplesso in M, e ω è una p-forma su N, allora

$$\int_\sigma F^*\omega = \int_{\Delta_p} \sigma^* F^* \omega = \int_{\Delta_p} (F \circ \sigma)^* \omega = \int_{F \circ \sigma} \omega.$$

Ciò implica che

$$\mathscr{R}(F^*[\omega])[\sigma] = \mathscr{R}[\omega][F \circ \sigma] = \mathscr{R}[\omega](F_*[\sigma]) = F_*(\mathscr{R}[\omega])[\sigma],$$

e così è dimostrato il primo punto.

Per il secondo punto dobbiamo mostrare che $\mathscr{R}(\delta[\omega])[e] = (\partial^*\mathscr{R}[\omega])[e]$ per ogni $[\omega] \in H^{p-1}_{dR}(U \cap V)$ e per ogni $[e] \in H_p(M)$, che possiamo riscrivere con $\mathscr{R}(\delta[\omega])[e] = \mathscr{R}([\omega])(\partial_*[e])$. Se σ è una p-forma rappresentante per la classe di $\delta[\omega]$, e c è una $(p-1)$-catena rappresentante per $\partial_*[e]$, ciò che va mostrato è che $\int_e \sigma = \int_c \omega$. Dalla caratterizzazione di ∂_*, possiamo porre $c = \partial f$ su U e $c = \partial f'$ su V, con $f \in C_p(U)$ e $f' \in C_p(V)$ tali che $[f + f'] = [e]$. Similmente, dal Corollario 2.19, possiamo scegliere $\eta \in \Omega^{p-1}$ e $\eta' \in \Omega^{p-1}(V)$ tali che $\omega = \eta|_{U\cap V} - \eta'|_{U \cap V}$, e porre σ la p-forma uguale a $d\eta$ su U e a $d\eta'$ su V. Allora, poiché $[\partial f + \partial f'] = [\partial e] = 0$, e $d\eta|_{U\cap V} - d\eta'|_{U\cap V} = d\omega = 0$, così, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_c \omega = \int_{\partial f} \omega = \int_{\partial f} \eta - \int_{\partial f} \eta' = \int_{\partial f} \eta + \int_{\partial f'} \eta' \\ = \int_f d\eta + \int_{f'} d\eta' = \int_f \sigma + \int_{f'} \sigma = \int_e \sigma.\end{aligned}$$

Dunque il diagramma commuta. □

Siamo ora pronti a presentare il risultato più importante di questo capitolo: il Teorema di de Rham.

Teorema 3.12 (Teorema di de Rham). *Per ogni varietà differenziabile M e ogni intero non negativo p, l'omomorfismo $\mathscr{R} : H^p_{dR}(M) \to H^p(M, \mathbb{R})$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Diremo che una varietà differenziabile M è una **varietà di de Rham** se l'omomorfismo $\mathscr{R} : H^p_{dR}(M) \to H^p(M, \mathbb{R})$ è un isomorfismo per ogni p. Visto che $\mathscr{R}$, dalla proposizione precedente, commuta con qualsiasi mappa indotta sulla coomologia da un diffeomorfismo, ogni varietà diffeomorfa ad una varietà di de Rham è ancora di de Rham. Invece, diremo che un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di una varietà differenziabile M è un **ricoprimento di de Rham** se U_i è una varietà di de Rham per ogni i, e ogni intersezione finita $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$ è di de Rham. Un ricoprimento di de Rham che è anche base per la topologia di M è detto **base di de Rham** per M. Il nostro obiettivo è mostrare che ogni varietà differenziabile è di de Rham.

PASSO 1: *Se $\{M_j\}$ è una famiglia numerabile di varietà di de Rham, allora la loro unione disgiunta è di de Rham.* Dalle Proposizioni 2.3 e 3.7 (b), sia per la coomologia singolare che per quella di de Rham le inclusioni $\iota_j : M_j \to \sqcup_j M_j$ inducono un isomorfismo tra i gruppi di coomologia dell'unione disgiunta e il prodotto diretto dei gruppi di coomologia delle varietà M_j. Dalla proposizione precedente, $\mathscr{R}$ commuta con tali isomorfismi, quindi anche $\sqcup_j M_j$ è di de Rham.

PASSO 2: *Ogni aperto convesso di $\mathbb{R}^n$ è di de Rham.* Sia U un tale sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Dal lemma di Poincaré, $H^p_{dR}(U)$ è banale per $p \neq 0$. Poiché p è omotopicamente equivalente ad un punto, la Proposizione 3.7 implica che anche i gruppi di coomologia singolare di U sono banali per $p \neq 0$. In tal caso, quindi, $\mathscr{R}$ è il morfismo nullo tra due gruppi banali, che è un isomorfismo. Se invece $p = 0$, $H^0_{dR}(U)$ è lo spazio 1-dimensionale delle funzioni costanti, mentre $H^0(U, \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(H_0(U), \mathbb{R})$ è anch'esso 1-dimensionale, perché $H_p(U)$ è generato da un qualsiasi 0-simplesso singolare. Se $\sigma : \Delta_0 \to M$ è un 0-simplesso singolare (sicuramente C^∞, perché è una mappa da una 0-varietà), e f è la funzione che vale costantemente 1, allora

$$\mathscr{R}[f][\sigma] = \int_{\Delta_0} \sigma^* f = (f \circ \sigma)(0) = 1.$$

Pertanto $\mathscr{R} : H^0_{dR}(U) \to H^0(U, \mathbb{R})$ non è la mappa nulla, e dunque deve essere un isomorfismo.

PASSO 3: *Se M ha un ricoprimento di de Rham finito, allora M è di de Rham.* Supponiamo che $M = U_1 \cup \cdots \cup U_k$, con gli U_i aperti tali che la loro intersezione finita sia di de Rham. Operiamo per induzione su k. Se $k = 1$, il risultato è ovvio. Se M ha come ricoprimento di de Rham $\{U, V\}$, mettendo insieme la sequenza di Mayer-Vietoris per coomologia singolare e di de Rham, otteniamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
H^{p-1}_{dR}(U) \oplus H^{p-1}_{dR}(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p-1}_{dR}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & H^p_{dR}(M) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
H^{p-1}(U, \mathbb{R}) \oplus H^{p-1}(V, \mathbb{R}) \arrow[r] & H^{p-1}(U \cap V, \mathbb{R}) \arrow[r] & H^p(M, \mathbb{R}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^p_{dR}(U) \oplus H^p_{dR}(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^p_{dR}(U \cap V) \arrow[d] \\
{} \arrow[r] & {}^p(U, \mathbb{R}) \oplus H^p(V, \mathbb{R}) \arrow[r] & H^p(U \cap V, \mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

dove le righe orizzontali sono esatte, e le frecce verticali sono omomorfismi di de Rham. La commutatività del diagramma segue dalla proposizione precedente, e, per l'ipotesi induttiva, abbiamo che la prima, la seconda, la quarta e la quinta frecce verticali sono degli isomorfismi. Siamo nelle piene ipotesi del Lemma dei Cinque, che ci permette di concludere che anche $\mathscr{R} : H^p_{dR} \to H^p(M, \mathbb{R})$ è un isomorfismo, e dunque M è di de Rham.

Supponiamo ora che l'asserto sia vero per varietà che ammettono un ricoprimento di de Rham di $k \geq 2$ aperti, e sia M una varietà con ricoprimento di de

Rham $\{U_1, \cdots U_{k+1}\}$. Poniamo $U = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ e $V = U_{k+1}$, così per ipotesi U e V sono sono di de Rham, e anche $U \cap V$ è di de Rham, perché $\{U_1 \cap U_{k+1}, \cdots U_k \cap U_{k+1}\}$ è un suo ricoprimento di de Rham. Dunque, anche $M = U \cup V$ è di de Rham per l'argomento di prima.

PASSO 4: *Se M ammette una base di de Rham, allora M è di de Rham.* Sia $\{U_\alpha\}$ una base di de Rham per M. Sia $f : M \to \mathbb{R}$ una exhaustion function. Per ogni intero m, definiamo A_m e A'_m, sottoinsiemi di M, come:

$$A_m = \{q \in M \text{ tale che } m \leq f(q) \leq m+1\},$$

$$A'_m = \{q \in M \text{ tale che } m - \frac{1}{2} < f(q) < m + \frac{3}{2}\}.$$

Per ogni punto $q \in A_m$, esiste un aperto di base contenente q e contenuto in A'_m. L'insieme di tutti tali aperti è un ricoprimento aperto di A_m, che è compatto per le proprietà di f, pertanto ammette un sottoricoprimento finito. Sia B_m l'unione degli aperti di tale sottoricoprimento. Tale B_m, dunque, ammette un ricoprimento finito di de Rham, pertanto è di de Rham per il passo 3. Osserviamo, ora, che $B_m \subseteq A'_m$, quindi B_m può avere intersezione non vuota con $B_{\widetilde{m}}$ solo se $\widetilde{m} = m \pm 1$. Definiamo, allora,

$$U = \bigcup_{m \text{ dispari}} B_m, \qquad V = \bigcup_{m \text{ pari}} B_m.$$

Così facendo, U e V sono unioni disgiunte di varietà di de Rham, e dunque sono entrambe di de Rham per il passo 1. Infine, $U \cap V$ è di de Rham perché è unione disgiunta degli insiemi del tipo $B_m \cap B_{m+1}$, per $m \in \mathbb{Z}$, ognuno dei quali ha un ricoprimento di de Rham finito, consistente degli insiemi della forma $U_i \cap U_j$, dove U_i e U_j sono gli aperti di base utilizzati per definire B_m e B_{m+1} rispettivamente. Così, $M = U \cap V$ è di de Rham per il passo 3.

PASSO 5: *Ogni sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ è di de Rham.* Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, allora U ha una base di palle euclidee. Tali palle sono aperti convessi, quindi di de Rham, e visto che intersezioni finite di palle euclidee restituiscono ancora aperti convessi, anche le loro intersezioni finite sono di de Rham. Così, U ammette una base di de Rham, e quindi è di de Rham per il passo 4.

PASSO 6: *Ogni varietà differenziabile è di de Rham.* Ogni varietà differenziabile ammette una base di aperti coordinati, e visto che ogni aperto coordinato è diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$, come lo sono anche intersezioni finite di aperti coordinati, abbiamo che ogni varietà differenziabile ammette una base di de Rham. La tesi segue, allora, dal passo 4. $\square$

Capitolo 4

Coomologia di Fasci

L'obiettivo di questo capitolo sarà presentare un'altra dimostrazione del Teorema di de Rham con gli strumenti della Teoria dei Fasci. Andremo quindi a definire il concetto di *fascio* su uno spazio topologico X come uno strumento che, assegnando opportunamente un oggetto ad ogni aperto di X, consente di studiare le relazioni tra oggetti definiti localmente e globalmente.

La trattazione richiederà di introdurre un poco del linguaggio della *Teoria delle Categorie*, ed in tal modo si vedrà che la categoria dei fasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico X è una categoria abeliana, ed il funtore che associa ad un fascio la sua sezione globale - ossia l'oggetto assegnato ad X - è esatto a sinistra ma non a destra, in quanto un morfismo suriettivo di fasci non induce necessariamente un morfismo suriettivo nelle sezioni globali.

La *coomologia dei fasci* si occupa di studiare proprio questo difetto di suriettività attraverso l'uso di alcuni invarianti, detti *oggetti derivati*, che andremo a definire. Con il linguaggio della Teoria delle Categorie, mostreremo come tali oggetti derivati possano essere calcolati in generale, e, introducendo una serie di definizioni e risultati, andremo a mostrare che, sotto alcune ipotesi, tali invarianti nel caso di un fascio coincidono con i gruppi di coomologia della risoluzione del fascio. Questa sarà la chiave che permetterà di mostrare l'equivalenza tra la teoria coomologica di de Rham e la coomologia singolare.

Questo approccio per dimostrare l'equivalenza tra tali due coomologie, risalente agli anni '50, è molto potente, e si presta bene a svariate generalizzazioni ed applicazioni nella geometria algebrica e differenziale. Tuttavia, come vedremo, non evidenzia in maniera chiara quale sia l'esplicito isomorfismo che lega le due strutture, ossia, come abbiamo visto, l'integrazione delle forme sui simplessi.

4.1 Introduzione ai Fasci

Sia X uno spazio topologico, un **prefascio** $\mathscr{F}$ di gruppi abeliani (anelli, o moduli) su X è il dato di un gruppo abeliano (anello o modulo) $\mathscr{F}(U)$ per ogni aperto U di X, con un **morfismo di restrizione**

$$\rho_{U,V} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$$

per ogni coppia di aperti $V \subseteq U$, che sia un morfismo di gruppi abeliani (anelli o moduli). Si richiede, inoltre, che, comunque scelti tre aperti $W \subseteq V \subseteq U$ di X, valgano le seguenti condizioni:

- $\mathscr{F}(\varnothing) = \{0\}$;
- $\rho_{U,U} = id_U$;
- $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(W)$.

A seguire, denoteremo $\rho_{U,V}(\sigma)$ con $\sigma|_V$. Gli elementi di $\mathscr{F}(U)$ sono detti **sezioni** di $\mathscr{F}$ su U.

Un **fascio** di gruppi abeliani (anelli o moduli) è un prefascio che soddisfa anche il seguente **assioma di incollamento**: per ogni aperto V, e per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} U_i$ di X, la mappa naturale

$$\prod_{i \in I} \rho_{V,U_i} : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U_i)$$

induce l'isomorfismo

$$\mathscr{F}(V) \cong \{(\sigma_{U_i})_{i \in I} \text{ tali che } \sigma_{U_i}|_{U_i \cap U_j} = \sigma_{U_j}|_{U_i \cap U_j}, \forall j \in I\}$$

In altre parole, deve valere che:

- Se $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathscr{F}(X)$ sono tali che $\rho_{U_i;X}(\sigma_1) = \rho_{U_i;X}(\sigma_2)$ per ogni $i \in I$, allora $\sigma_1 = \sigma_2$;
- Scelti $\sigma_i \in \mathscr{F}(U_i)$ per ogni $i \in I$, tali che $\rho_{U_i \cap U_j, U_i}(\sigma_i) = \rho_{U_i \cap U_j, U_j}(\sigma_j)$ per ogni $j \in I$, esiste $\sigma \in \mathscr{F}(X)$ tale che $\rho_{X,U_i} = \sigma_i$ per ogni $i \in I$.

Tale condizione significa che dare una sezione di $\mathscr{F}$ su U è equivalente a dare una collezione di sezioni di $\mathscr{F}$, definita ognuna in un aperto di un ricoprimento di U, che coincidono nelle intersezioni.

Un **morfismo di prefasci** $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ è una collezione di morfismi $\phi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ per ogni aperto U di X, tali che, dato un altro aperto $V \subseteq U$, il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\rho_{U,V}"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\rho_{U,V}"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"'] & \mathscr{G}(V) \end{tikzcd}$$

Lemma 4.1. *Per ogni prefascio $\mathscr{F}$ su X, esiste un unico fascio $\mathscr{F}_f$ su X che soddisfa le seguenti condizioni:*

- *Esiste un morfismo di prefasci $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}_f$;*
- *Per ogni morfismo di prefasci $\psi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, ove $\mathscr{G}$ è un fascio, esiste un unico morfismo di fasci $\chi : \mathscr{F}_f \to \mathscr{G}$, tale che $\psi = \chi \circ \phi$.*

Dimostrazione. Prima definiamo $\mathscr{F}_1$ il prefascio $\mathscr{F}_1(U) = \frac{\mathscr{F}(U)}{\mathscr{F}_0(U)}$, in cui

$$\mathscr{F}_0(U) = \{\sigma \in \mathscr{F}(U) \text{ tali che } \sigma|_{U_i} = 0 \;\; \forall\, U_i \in \mathcal{U},\; \exists\, \mathcal{U}\},$$

dove $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ è un ricoprimento aperto di U. Poniamo

$$\mathcal{A}_{\mathcal{U}}(U) = \{(\sigma_{U_i})_{i \in I},\; \sigma_{U_i} \in \mathscr{F}_1(U_i) \text{ tale che } \sigma_{U_i}|_{U_i \cap U_j} = \sigma_{U_j}|_{U_i \cap U_j},\; \forall\, i,j \in I\}.$$

Diremo che un ricoprimento $\mathcal{U}$ di U è più fine di un altro ricoprimento $\mathcal{U}'$ di U se per ogni $U_i \in \mathcal{U}$ esiste un $U_i' \in \mathcal{U}'$ tale che $U_i \subseteq U_i'$. Tale ordinamento parziale soddisfa la condizione per cui, dati due , esiste sempre un ricoprimento più fine di entrambi, pertanto l'insieme di tutti i ricoprimenti aperti di U è un insieme diretto. Se $\mathcal{U}'$ è più fine di $\mathcal{U}$, e se abbiamo una mappa di raffinamento $\sigma : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$, tale che $U_i' \subseteq \sigma(U_i')$ per ogni $U_i' \in \mathcal{U}'$, allora si ha l'ovvia mappa di restrizione $\rho_{\mathcal{U},\mathcal{U}',\sigma} : \mathcal{A}_{\mathcal{U}} \to \mathcal{A}_{\mathcal{U}'}$. Osserviamo che, dalla definizione di $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$, tale mappa di restrizione, di fatto, non dipende da σ.

Poniamo, dunque, l'insieme

$$\mathscr{F}_f(U) = \varinjlim_{R} \mathcal{A}_{\mathcal{U}},$$

dove tale limite diretto dei gruppi $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ dotati delle mappe di restrizione $\rho_{\mathcal{U},\mathcal{U}'}$, sull'insieme diretto R dei ricoprimenti aperti di U risulta essere il gruppo

$$\{(\sigma_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U} \in R} \text{ tali che } \sigma_{\mathcal{U}'} = \rho_{\mathcal{U},\mathcal{U}'}(\sigma_{\mathcal{U}}),\;\; \exists\, \mathcal{U} \in U \text{ con } \mathcal{U}' \text{ più fine di } \mathcal{U}\}$$

quozientato con il sottogruppo

$$\{(\sigma_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}\in R} \text{ tali che } \sigma_{\mathcal{U}'} = 0, \quad \exists\, \mathcal{U} \text{ più fine di } \mathcal{U}'\}$$

Abbiamo quindi la mappa naturale $\phi_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathscr{F}_f$, data dalla restrizione e dal passaggio al quoziente.

Dato un morfismo di prefasci $\psi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, esiste ovviamente il morfismo associato $\psi_f : \mathscr{F}_f \to \mathscr{G}_f$, ove $\mathscr{G}_f$ è definito similmente. Tali morfismi sono tali che

$$\psi_f \circ \phi_{\mathscr{F}} = \psi_{\mathscr{G}} \circ \psi.$$

Ora, se $\mathscr{G}$ è un fascio, allora chiaramente $\mathscr{G} \cong \mathscr{G}_f$ tramite $\phi_{\mathscr{G}}$, e ciò assicura l'esistenza della mappa χ tale che $\phi = \chi \circ \phi$. $\square$

Dato un fascio di anelli $\mathscr{A}$ su X, un **fascio di $\mathscr{A}$-moduli** su X è un fascio $\mathscr{F}$ tale che ogni $\mathscr{F}(U)$ è munito della struttura di $\mathscr{A}(U)$-modulo, compatibile con la sua struttura di gruppo. I morfismi di restrizione $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ sono morfismi di $\mathscr{A}$-moduli, dove $\mathscr{F}(V)$ è munito di struttura di un $\mathscr{A}(U)$-modulo tramite il morfismo di restrizione $\mathscr{A}(U) \to \mathscr{A}(V)$.

Il tipico esempio di un tale fascio di moduli è dato da un fascio di sezioni di un fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\pi} X$. Se E è un fibrato vettoriale topologico, il prefascio ε dato da

$$U \mapsto \{\text{sezioni continue } \sigma : U \to E|_U\}$$

è un fascio di moduli sul fascio delle funzioni continue a valori reali.

Se $\mathscr{A}$ è un fascio di anelli, diremo che un fascio $\mathscr{F}$ di $\mathscr{A}$-moduli è un **fascio di $\mathscr{A}$-moduli liberi** se esiste un intero n tale che $\mathscr{F}$ è localmente isomorfo ad $\mathscr{A}^n$ come fascio di $\mathscr{A}$-moduli. Tale intero n si dice **rango** di $\mathscr{F}$.

La **spiga** $\mathscr{F}_x$ di un fascio o di un prefascio $\mathscr{F}$ su X in un punto $x \in X$ è

$$\varinjlim_{x\in U} \mathscr{F}(U),$$

dove tale limite diretto è preso sull'insieme di tutti gli intorni aperti di x, ordinato secondo la relazione di inclusione, in cui i morfismi $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ sono i morfismi di restrizione. Dunque, questo oggetto risulta essere l'insieme di tutti gli elementi che stanno in un certo $\mathscr{F}(U_x)$, con U_x intorno aperto di x, modulo la relazione di equivalenza di coincidere in un intorno aperto (sufficientemente piccolo) di x. Un elemento di $\mathscr{F}_x$ è chiamato **germe** di una sezione di $\mathscr{F}$ in x, e vi è un morfismo naturale $\phi : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$ che invia una sezione di $\mathscr{F}(U)$ al suo germe.

Se $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ è un morfismo di fasci, allora ϕ induce un morfismo $\phi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ per ogni punto $x \in X$. Tale morfismo si dirà **iniettivo** (o **suriettivo**) se ϕ_x è iniettivo (o suriettivo) per ogni $x \in X$.

Lemma 4.2 (Nucleo di Morfismi di Fasci). *Sia $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ morfismo di fasci. Allora il prefascio*

$$U \longmapsto ker(\phi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U))$$

è un fascio, denotato con $ker\phi$, ed è nullo se e solo se ϕ è iniettivo.

Dimostrazione. Sia $U \subseteq X$ aperto, e sia $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} U_i$ un ricoprimento aperto di U. Per ogni $i \in I$, sia $\sigma_i \in \ker(\phi : \mathscr{F}(U_i) \to \mathscr{G}(U_i))$ tale che $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}$. Allora, dall'assioma di incollamento, esiste un'unica sezione globale $\sigma \in \mathscr{F}(U)$ tale che $\sigma|_{U_i} = \sigma_i \ \ \forall i \in I$. La sezione $\phi(\sigma) \in \mathscr{G}(U)$ allora si annulla su ognuno degli U_i, e pertanto è la sezione nulla, ancora per l'assioma di incollamento. Così $\sigma \in \ker(\phi : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U))$, ed abbiamo mostrato che il prefascio è un fascio.

La seconda parte dell'asserto segue dal fatto che un fascio ha tutte le spighe nulle se e solo se è il fascio nullo. Infatti, se σ è una sezione di un tale fascio, allora σ si annulla su ogni fibra, ossia σ si annulla su un intorno di ogni punto. Allora σ è nulla per l'assioma di incollamento. Viceversa, se il fascio è nullo, banalmente, tutte le sue spighe sono nulle. □

Una costruzione analoga, tuttavia, non funziona anche per immagine e conucleo, perché in questi casi, in generale, non restituisce un fascio. Vale però il seguente:

Lemma 4.3 (Immagine di Morfismi di Fasci). *Sia $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ morfismo di fasci. Allora il fascio associato al prefascio*

$$U \longmapsto im(\phi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)),$$

denotato con $im\phi$, è uguale a $\mathscr{G}$ se e solo se ϕ è suriettiva.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{P}$ il prefascio descritto nell'enunciato. Allora, dalle proprietà di un fascio associato ad un prefascio, sappiamo esistere un morfismo di prefasci $\psi : \mathscr{P} \to \mathrm{im}\phi$. Poiché abbiamo l'ovvia inclusione di $\mathrm{im}\phi_U$ in $\mathscr{G}(U)$ per ogni U, otteniamo un morfismo iniettivo $j_0 : \mathscr{P} \to \mathrm{im}\phi$. Dunque, per la proprietà universale descritta nel Lemma 4.1, esiste una mappa naturale $j : \mathrm{im}\phi \to \mathscr{G}$. Siamo nella seguente situazione:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P} \arrow[r, hook, "j_0"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathscr{G} \\
\mathrm{im}\phi \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Mostriamo che se ϕ è suriettiva, allora la mappa j è un isomorfismo. Chiaramente j è iniettiva, perché lo è j_0. Se ϕ è suriettiva, lo sono le ϕ_x per ogni x. Dimostriamo, allora, che anche le j_x sono suriettive per ogni x. Sia $\sigma \in \mathscr{G}(U)$: per la suriettività delle ϕ_x, esiste $(U_i)_{i\in I}$ ricoprimento aperto di U, ed esistono delle sezioni $\tau_i \in \mathrm{im}(\phi(U_i))$, tali che $j(\tau_i) = \sigma|_{U_i}$. Visto che j è iniettiva, tali τ_i coincidono nelle intersezioni, così, per l'assioma di incollamento, esiste una sezione τ di $\mathrm{im}\phi$ tale che $\tau|_{U_i} = \tau_i$. Così $\sigma = j(\tau)$, e la mappa $j : \mathrm{im}\phi(U) \to \mathscr{G}(U)$ è suriettiva. Dunque, j è un isomorfismo. Il viceversa è immediato. □

In modo del tutto analogo posiamo definire il conucleo di un morfismo di fasci $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$. È il fascio associato al prefascio

$$U \longmapsto \mathrm{coker}(\phi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)).$$

Vediamo un esempio in cui, dato un morfismo di fasci $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, l'assegnazione del lemma precedente, $U \mapsto \mathrm{im}(\phi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U))$, non definisce un fascio. Sia $\mathscr{F}$ il fascio delle funzioni continue a valori complessi e $\mathscr{G}$ il fascio delle funzioni continue ed invertibili a valori complessi. Sia, infine, $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ la funzione esponenziale. Per le determinazioni del logaritmo complesso, ϕ è suriettiva, perché ogni funzione continua ed invertibile è localmente l'esponenziale di una qualche funzione, e dunque ϕ_x è suriettiva per ogni $x \neq 0$. Tuttavia, se consideriamo $X = \mathbb{C}^*$, $\phi_X : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{G}(X)$ non è suriettiva, perché, ad esempio, $z \mapsto z$ non è l'esponenziale su tutto X di una qualche funzione continua. Pertanto, il prefascio definito non è un fascio.

Siano $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ e $\mathscr{H}$ tre fasci, e siano $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ e $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ morfismi di fasci tali che $\psi \circ \phi = 0$. La sequenza

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\phi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H}$$

si dice **esatta al centro** se im(ϕ)=ker(ψ) come uguaglianza di fasci.

Un **complesso di fasci** è una collezione di fasci $(\mathscr{F}^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ con dei morfismi di fasci $d_i : \mathscr{F}^i \to \mathscr{F}^{i+1}$ tali che $d_{i+1} \circ d_i = 0$ per ogni i. Dato un fascio $\mathscr{F}$ e un complesso di fasci $(\mathscr{F}^i)_{i\in\mathbb{N}}$, e un morfismo $j : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^0$, il complesso $\mathscr{F}^*$ è detto **risoluzione** di $\mathscr{F}$ se, per ogni $i \geq 0$, la sequenza

$$\mathscr{F}^i \xrightarrow{\phi^i} \mathscr{F}^{i+1} \xrightarrow{\phi^{i+1}} \mathscr{F}^{i+2}$$

è esatta al centro e j è iniettiva con $j(\mathscr{F}) = \mathrm{ker}\phi^0$.

Osserviamo che, poiché j è iniettiva, $\mathrm{im}j \cong \mathscr{F}$.

Sia X una varietà differenziabile. Il fascio costante di spighe $\mathbb{R}$ è naturalmente incluso nel fascio delle funzioni C^∞. Sia $\mathscr{A}^k$ fascio delle forme differenziali C^∞. La derivata esterna è un morfismo di fasci

$$d : \mathscr{A}^k \to \mathscr{A}^{k+1}.$$

Per il lemma di Poincaré, una forma chiusa di grado $k > 0$ è localmente esatta, pertanto la sequenza

$$\mathscr{A}^{k-1} \xrightarrow{d} \mathscr{A}^{k} \xrightarrow{d} \mathscr{A}^{k+1}$$

è esatta al centro per $k \geq 1$. Infine, il nucleo di $d : \mathscr{A}^0 \to \mathscr{A}^1$ consiste delle funzioni localmente costanti. Con tali osservazioni, se n =dim(X), ne ricaviamo che il complesso

$$0 \to \mathscr{A}^0 \xrightarrow{d} \mathscr{A}^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathscr{A}^{n-1} \xrightarrow{d} \mathscr{A}^n \to 0$$

è una risoluzione del fascio costante $\mathbb{R}$, chiamata **risoluzione di de Rham**.

4.2 Funtori Derivati

Per proseguire con la trattazione è necessario introdurre alcuni degli elementi del linguaggio della Teoria delle Categorie.

Una **categoria** $\mathcal{C}$ è un insieme di **oggetti** con degli insiemi Hom($\cdot$,$\cdot$) di mappe, dette **morfismi**, tra gli oggetti, la composizione dei quali gode della proprietà associativa. Per ogni oggetto X, inoltre, deve esistere un elemento $id_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$, detto **identità**, che rispetta la composizione destra e sinistra di mappe. Una **categoria abeliana** $\mathcal{C}$ è una categoria tale per cui:

- Per ogni coppia di oggetti A, B di $\mathcal{C}$, Hom(A, B) è un gruppo abeliano, e la composizione di morfismi è bilineare per tali strutture di gruppo.

- Ogni morfismo $\phi : A \to B$ ammette **nucleo** e **conucleo**. Il nucleo di ϕ è un oggetto C con un morfismo $\chi : C \to A$ tale che per ogni oggetto M di $\mathcal{C}$, la composizione a sinistra con χ induca l'isomorfismo

  $$\mathrm{Hom}(M, C) \cong \{\psi \in \mathrm{Hom}(M, A) \text{ tale che } \phi \cong \psi = 0\}.$$

  Similmente, il conucleo di ϕ è un oggetto D munito di un morfismo $\chi : B \to D$, tale che, per ogni altro oggetto M di $\mathcal{C}$, la composizione a destra con χ induce l'isomorfismo

  $$\mathrm{Hom}(D, M) \cong \{\psi \in \mathrm{Hom}(B, M) \text{ tale che } \psi \cong \phi = 0\}.$$

  È possibile definire l'**immagine** di ϕ come il conucleo del suo nucleo, o come il nucleo del suo conucleo. Un morfismo si dirà **iniettivo** se Hom(kerϕ, A) = $\{0\}$.

- Esiste la somma diretta di due oggetti $A \oplus B$, ed è tale che per ogni per ogni altro oggetto M di $\mathcal{C}$ si abbia

$$\mathrm{Hom}(M, A \oplus B) = \mathrm{Hom}(M, A) \oplus \mathrm{Hom}(M, B),$$

$$\mathrm{Hom}(A \oplus B, M) = \mathrm{Hom}(A, M) \oplus \mathrm{Hom}(B, M).$$

Un **funtore** $\mathcal{F}$ da una categoria $\mathcal{C}$ ad una categoria $\mathcal{C}'$ è una mappa $A \mapsto \mathcal{F}(A)$ da oggetti di $\mathcal{C}$ ad oggetti di $\mathcal{C}'$, insieme ad una mappa $\phi \mapsto \mathcal{F}(\phi)$ da $\mathrm{Hom}(A, B)$ a $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$ compatibile con la composizione per ogni coppia di oggetti A, B di $\mathcal{C}$. Un funtore di categorie abeliane sarà tale che $\mathcal{F}$ da $\mathrm{Hom}(A, B)$ a $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$ sia morfismo di gruppi abeliani. Un tale funtore si dice **esatto a sinistra** se per ogni morfismo $\phi : A \to B$, si ha che $\ker\mathcal{F}(\phi)=\mathcal{F}(\ker\phi)$.

Alcuni esempi di categorie abeliane sono i gruppi abeliani con i loro morfismi, i moduli su un anello, e la categoria degli fasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico. In particolare, se X è uno spazio topologico, il funtore Γ, dalla categoria dei fasci di gruppi abeliani su X, che associa ad un fascio $\mathscr{F}$ la sua sezione globale $\mathscr{F}(X)$ nella categoria dei gruppi abeliani, è un funtore esatto a sinistra.

Andremo ora a dare una serie di definizioni, alcune delle quali esprimono concetti già incontrati, ma che dobbiamo reinterpretare ai sensi del linguaggio della teoria delle categorie. Dati tre oggetti A, B, C di $\mathcal{C}$, e due morfismi $\phi : A \to B$, $\psi : B \to C$, diremo che la sequenza

$$0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

è una **sequenza esatta corta** se ϕ è iniettiva, ψ è suriettiva e $\ker\psi=\mathrm{im}\phi$. Inoltre, tale sequenza esatta corta si dirà **spezzata** se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- $B \cong A \oplus C$;
- Esiste un morfismo $\phi' : B \to A$, tale che $\phi' \cong \phi = id_A$;
- Esiste un morfismo $\psi' : C \to B$, tale che $\psi \cong \psi' = id_C$;

Un oggetto I di una categoria abeliana si dice **iniettivo** se per ogni monomorfismo $j : A \to B$ e per ogni altro morfismo $\phi : A \to I$, esiste un morfismo $\psi : B \to I$ tale che $\psi \circ j = \phi$. Diremo che una categoria $\mathcal{C}$ ha **abbastanza oggetti iniettivi** se ogni oggetto A di $\mathcal{C}$ ammette un monomorfismo $j : A \to I$, con I oggetto iniettivo.

Gli oggetti iniettivi nella categoria dei gruppi abeliani sono tutti i gruppi G che sono divisibili, ossia tali che per ogni $g \in G$ e per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, esiste un $g' \in G$ tale che $ng' = g$.

Un **complesso** in una categoria abeliana è una sequenza di oggetti $(M^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ e di mappe $d^i : M^i \to M^{i+1}$ tali che $d^{i+1} \circ d^i = 0$. Un **morfismo di complessi** $\phi^* : (M^*, d_M) \to (N^*, d_N)$ è una collezione di morfismi $\phi^i : M^i \to N^i$ tali che $d_N \circ \phi^i = \phi^{i+1} \circ d_M$. Definiamo la **coomologia di i-esimo grado** di un complesso (M, d_M) come l'oggetto

$$H^i(M^*) = \mathrm{coker}(d_M^{i-1} : M^{i-1} \to \mathrm{ker} d_M^i).$$

Chiaramente, per ogni i, un morfismo di complessi $\phi^* : (M^*, d_M) \to (N^*, d_N)$ induce un morfismo $H^i(\phi^*) : H^i(M^*) \to H^i(N^*)$ sulla coomologia di grado i. Diremo che un morfismo di complessi ϕ^* è un **quasi-isomorfismo** se i morfismi indotti $H^i(\phi^*)$ sono degli isomorfismi per ogni i.

Un'**omotopia** H tra due morfismi di complessi $\phi^* : (M^*, d_M) \to (N^*, d_N)$ e $\psi^* : (M^*, d_M) \to (N^*, d_N)$ è una collezione di morfismi $H^* : M^* \to N^{*-1}$, tali che

$$H^{i+1} \circ d_M^i + d_N^{i-1} \circ H^i = \phi^i - \psi^i, \quad \forall\ i \geq 0.$$

Si osservi che se esiste un'omotopia tra due morfismi di complessi ϕ^* e ψ^*, allora i morfismi indotti $H^i(\phi^*)$ e $H^i(\psi^*)$ sono uguali.

Un complesso $(M^i)_{i\geq 0}$ è detto **risoluzione** di un oggetto A di $\mathcal{C}$ se $\mathrm{im} d^i = \mathrm{ker} d^{i+1}$ per $i \geq 0$ e se esiste un morfismo iniettivo $j : A \to M^0$ tale che $\mathrm{im} j \cong \mathrm{ker} d^0$. Diremo che una risoluzione è iniettiva se $(M^i)_{i\geq 0}$ è un complesso i cui oggetti sono tutti iniettivi.

Lemma 4.4 (Esistenza della Risoluzione Iniettiva). *Se una categoria abeliana $\mathcal{C}$ ha abbastanza oggetti iniettivi, allora ogni oggetto di $\mathcal{C}$ ammette una risoluzione iniettiva.*

Dimostrazione. Costruiamo una tale risoluzione per induzione, scegliendo, anzitutto un morfismo iniettivo $j : A \to I^0$, con I^0 iniettivo. Tale monomorfismo esiste per l'ipotesi che $\mathcal{C}$ abbia abbastanza oggetti iniettivi.

Scegliamo poi un morfismo iniettivo $j^1 : \mathrm{coker} j \to I^1$ con I^1 iniettivo, la cui esistenza, ancora una volta, è assicurata dal fatto che $\mathcal{C}$ ha abbastanza oggetti iniettivi, e $\mathrm{coker} j$ è un oggetto di $\mathcal{C}$. Possiamo allora definire d^0 come la composizione di j^1 con il morfismo naturale di proiezione $\pi : I^0 \to \mathrm{coker} j$, e abbiamo ottenuto che $\mathrm{ker} d^0 = A = \mathrm{im} j$.

Supponendo di avere costruito la risoluzione fino al livello k-esimo, scegliamo un morfismo iniettivo $j^{k+1} : \mathrm{coker} d^{k-1} \to I^{k+1}$, e definiamo $d^k : I^k \to I^{k+1}$ come la composizione del morfismo di proiezione $\pi : I^k \to \mathrm{coker} d^{k-1}$ con j^{k+1}. In tal modo costruiamo una risoluzione iniettiva di A. $\square$

Un fatto importante, che viene espresso nel prossimo risultato, è l'invarianza per omotopia di una risoluzione iniettiva.

Proposizione 4.5. *Siano I^*, $A \xrightarrow{i} I^0$ e J^*, $B \xrightarrow{j} J^0$ risoluzioni di A e B rispettivamente, e sia $\phi : A \to B$ un morfismo. Allora se la seconda risoluzione è iniettiva, esiste un morfismo di complessi $\phi^* : I^* \to J^*$ tale che $\phi^0 \circ i = j \circ \phi$. Inoltre, se abbiamo due morfismi ϕ^* e ψ^* con tali proprietà, allora esiste un'omotopia H^* tra ϕ^* e ψ^*.*

Dimostrazione. Il morfismo $\phi^0 : I^0 \to J^0$ può essere ottenuto come l'estensione di $j \circ \phi : A \to J^0$ a I^0, che esiste, in quanto J^0 è iniettivo per ipotesi. A questo punto, osservando che $d_J^0 \circ \phi^0 \circ i = d_J^0 \circ j \circ \phi = 0$, costruiamo $\phi^1 : I^1 \to J^1$ estendendo a I^1 il morfismo indotto da ϕ^0, cioè

$$d_J^0 \circ \phi^0 : \mathrm{coker} i \to J^1,$$

notando che $d_I^0 : \mathrm{coker} i \to I^1$ è iniettiva. Ciò è lecito perché J^1 è iniettivo.

In generale, osserviamo che, una volta costruita ϕ^{k-1}, abbiamo che, analogamente a prima, $d_J^{k-1} \circ \phi^{k-1} \circ d_I^{k-2} = 0$, e dunque possiamo costruire ϕ^k come estensione a I^k del morfismo

$$d_j^{k-1} \circ \phi^{k-1} : \mathrm{coker} d_I^{k-2} \to J^k,$$

e tale estensione esiste perché J^k è iniettivo.

Infine, se abbiamo due morfismi ψ^* e ϕ^* che soddisfano le condizioni sopra, possiamo costruire l'omotopia allo stesso modo: si prende come $H^1 : I^k \to J^0$ l'estensione a I^1 del morfismo $\phi^0 - \psi^0 : \mathrm{coker} i \to J^0$, considerando $\mathrm{coker} i \xhookrightarrow{d^0} I^1$. La costruzione delle H^k è analoga. □

In particolare, applicando questa proposizione al caso in cui I^* e J^* siano due risoluzioni iniettive di A, otteniamo dei morfismi $\phi^* : I^* \to J^*$ e $\psi^* : J^* \to I^*$ tali che $\psi^* \circ \phi^*$ e $\phi^* \circ \psi^*$ siano morfismi di complessi (di I^* in sé stesso e di J^* in sé stesso), entrambi omotopi all'identità. Diremo allora che ϕ^* è un'**equivalenza omotopica**. In tal modo ne deduciamo che una risoluzione iniettiva è unica a meno di equivalenza omotopica.

Considereremo ora $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ due categorie abeliane, e $\mathcal{F}$ un funtore esatto a sinistra da $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}'$. Assumiamo che $\mathcal{C}$ abbia abbastanza oggetti iniettivi.

Lemma 4.6. *Data una sequenza esatta corta in $\mathcal{C}$*

$$0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0,$$

esistono delle risoluzioni iniettive I^*, J^* e K^* di A, B e C rispettivamente, ed una sequenza esatta di complessi

$$0 \to I^* \xrightarrow{\phi^*} J^* \xrightarrow{\psi^*} K^* \to 0,$$

con $\phi^0 \circ i = j \circ \phi$, e $\psi^0 \circ j = k \circ \psi$.

Dimostrazione. Raffinando la dimostrazione della Proposizione 4.5 è possibile mostrare esistono I^* e J^* risoluzioni iniettive di A e B, e un morfismo $\phi^* : I^* \to J^*$ che sia iniettivo, e che soddisfi $\phi^0 \circ i = j \circ \phi$. Visto che il conucleo di un monomorfismo di oggetti iniettivi è iniettivo, basta porre per K^* i conuclei cokerϕ^*, che sono una risoluzione di C. □

Teorema 4.7 (Funtori Derivati ed Oggetti Derivati). *Per ogni oggetto M di $\mathcal{C}$, esistono degli oggetti $R^i\mathcal{F}(M)$, per $i \geq 0$, in $\mathcal{C}'$, determinati a meno di isomorfismo, che soddisfino le seguenti condizioni:*

- *Si ha che $R^0\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(M)$.*
- *Per ogni sequenza esatta corta in $\mathcal{C}$*

$$0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

si può costruire una sequenza esatta lunga (un complesso esatto) in $\mathcal{C}'$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^0\mathcal{F}(A) \arrow[r, "\phi"] & R^0\mathcal{F}(B) \arrow[r, "\psi"] & R^0\mathcal{F}(C) \arrow[dll, out=0, in=180] \\
 & R^1\mathcal{F}(A) \arrow[r] & R^1\mathcal{F}(B) \arrow[r] & R^1\mathcal{F}(C) \arrow[dll, out=0, in=180] \\
 & R^2\mathcal{F}(A) \arrow[r] & R^2\mathcal{F}(B) \arrow[r] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

- *Per ogni oggetto iniettivo I di $\mathcal{C}$, si ha che $R^i\mathcal{F}(I) = 0$ per $i > 0$.*

*Tali $R^i\mathcal{F}$ sono detti **funtori derivati**, mentre gli oggetti del tipo $R^i\mathcal{F}(M)$ vengono chiamati **oggetti derivati**.*

Dimostrazione. Per ogni oggetto A di $\mathcal{C}$, scegliamo una risoluzione iniettiva I^* di A, che esiste perché stiamo supponendo che $\mathcal{C}$ abbia abbastanza oggetti iniettivi. Abbiamo, quindi, un complesso $\mathcal{F}(I^*)$ in $\mathcal{C}'$. Definiamo, allora, $R^i\mathcal{F}(A)$ come l'i-esimo gruppo di coomologia di tale complesso, ossia

$$R^I\mathcal{F}(A) = H^i(\mathcal{F}(I^*)).$$

Osserviamo che se gli oggetti derivati $R^i\mathcal{F}(M)$ esistono, devono soddisfare tale relazione, come vediamo dividendo il complesso $0 \to A \to I^*$ in sequenze esatte corte. Ciò implica l'unicità degli $R^i\mathcal{F}(M)$ a meno di isomorfismo.

Essendo $\mathcal{F}$ esatto a sinistra, si ha che $R^0\mathcal{F}(A) = \ker(d^0 : \mathcal{F}(I^0) \to \mathcal{F}(I^1)) = \mathcal{F}(A)$. Inoltre, per la Proposizione 4.5 precedente, i $R^i\mathcal{F}(A)$ non dipendono, a meno di isomorfismo, dalla scelta della risoluzione iniettiva di A. Infatti, se I^* e J^* sono due risoluzioni iniettive di A, esiste un'equivalenza omotopica tra I^* e J^*, cioè dei morfismi di complessi $\phi^* : I^* \to J^*$ e $\psi^* : J^* \to I^*$ e delle omotopie $H^* : I^* \to I^{*-1}$ e $K^* : J^* \to J^{*-1}$ tra $\psi^* \circ \phi^*$ ed id e tra $\phi^* \circ \psi^*$ ed id. Il funtore $\mathcal{F}$ applicato a ϕ^* e ψ^* restituisce dei morfismi di complessi $\mathcal{F}(I^*)$ e $\mathcal{F}(J^*)$, ed applicato a H^* e a K^* restituisce un'equivalenza omotopica tra $\mathcal{F}(\phi^*)$ e $\mathcal{F}(\psi^*)$. Così i morfismi $H^i(\mathcal{F}(\phi))$ e $H^i(\mathcal{F}(\psi))$ sono l'uno inverso dell'altro, e dunque le due risoluzioni danno oggetti isomorfi.

Rimangono da vedere gli ultimi due punti del teorema. È chiaro che se I è iniettivo, allora $R^i\mathcal{F}(I) = 0$ per $i > 0$, poiché la risoluzione $I^0 = I$ e $I^i = 0$ per $i > 0$ è una risoluzione iniettiva di I.

Per mostrare che si ha una sequenza lunga come da enunciato usiamo il lemma precedente, ed osserviamo che ogni sequenza esatta corta di oggetti iniettivi $0 \to I^i \xrightarrow{\phi^i} J^i \xrightarrow{\psi^i} K^i \to 0$ è spezzata, in quanto il morfismo $I^i \xrightarrow{\phi^i} J^i$ ammette inversa sinistra σ_i, detta retrazione, ottenuta usando la proprietà degli oggetti iniettivi, usando il fatto che I^i è iniettivo. Tali retrazioni σ_i determinano, per ogni i, l'isomorfismo $J^i \cong I^i \oplus \ker\sigma_i$, con $\ker\sigma_i \cong K_i$. Segue che, applicando il funtore $\mathcal{F}$, otteniamo di nuovo una sequenza di complessi

$$0 \to \mathcal{F}(I^*) \xrightarrow{\phi^*} \mathcal{F}(J^*) \xrightarrow{\psi^*} \mathcal{F}(K^*) \to 0$$

tale che, per ogni k, la sequenza esatta corta

$$0 \to \mathcal{F}(I^k) \xrightarrow{\phi^k} \mathcal{F}(J^k) \xrightarrow{\psi^k} \mathcal{F}(K^k) \to 0$$

è spezzata, perché i funtori rispettano le somme dirette. A questo punto, è un fatto noto (Lemma Zigzag) che una tale sequenza esatta corta restituisce una sequenza esatta lunga di coomologie. Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Nella pratica, le risoluzioni iniettive sono difficili da manipolare. Il risultato a seguire mostrerà come le risoluzioni iniettive possono essere rimpiazzate da risoluzioni soddisfacenti una condizione più debole. In particolare, diremo che un oggetto M di una categoria $\mathcal{C}$ è **aciclico** per il funtore $\mathcal{F}$, o $\mathcal{F}$-aciclico, se $R^i\mathcal{F}(M) = 0$ per ogni $i > 0$.

Proposizione 4.8. *Sia $A \xrightarrow{i} M^0$, M^* una risoluzione di A, dove gli M^i sono aciclici per il funtore $\mathcal{F}$. Allora $R^i\mathcal{F}(A)$ è uguale alla coomologia $H^i(\mathcal{F}(M^*))$ del complesso $\mathcal{F}(M^*)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'asserto per induzione su i. Abbiamo la sequenza esatta corta

$$0 \to A \xrightarrow{i} M^0 \xrightarrow{d^0} B \to 0,$$

dove B è il conucleo di d^0. Inoltre, B ammette la risoluzione

$$0 \to B \xrightarrow{d^0} M^1 \to M^2 \to \cdots .$$

La prima sequenza esatta corta induce una sequenza esatta lunga di oggetti, e poiché M^0 è aciclico, ne possiamo dedurre le seguenti proprietà:

$$R^i\mathcal{F}(B) = R^{i+1}\mathcal{F}(A) \qquad \text{per } i \geq 1,$$

$$R^1\mathcal{F}(A) = \operatorname{coker}(\mathcal{F}(M^0) \to \mathcal{F}(B)).$$

Poiché $\mathcal{F}$ è esatto a sinistra, abbiamo che $\mathcal{F}(B) = \ker(d^1 : \mathcal{F}(M^1) \to \mathcal{F}(M^2))$, e pertanto, inserendo questa informazione nella seconda delle due uguaglianze, ne otteniamo proprio che

$$R^1\mathcal{F}(A) = H^1(\mathcal{F}(M^*)).$$

La prima uguaglianza ci consente di applicare l'ipotesi induttiva a B, e concludere. □

4.3 Coomologia di Fasci

D'ora in poi considereremo la categoria dei fasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico X, ed il funtore Γ, che associa ad un fascio $\mathscr{F}$ la sua sezione globale, ossia $\Gamma(X, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(X)$, nella categoria dei gruppi abeliani. Poiché la categoria dei fasci di gruppi abeliani ha abbastanza oggetti iniettivi, in quanto la categoria dei gruppi abeliani ha abbastanza oggetti iniettivi, il Teorema 4.7 assicura l'esistenza dei funtori derivati $R^i\Gamma$, che denoteremo con

$$R^i\Gamma(\mathscr{F}) = H^i(X, \mathscr{F}).$$

Osserviamo, inoltre, che possiamo immergere un fascio $\mathscr{F}$ di gruppi abeliani in un fascio iniettivo, definito da $I : U \mapsto \bigoplus_{x \in U} I_x$, dove I_x è un gruppo iniettivo contenente la spiga $\mathscr{F}_x$.

Un fascio $\mathscr{F}$ su uno spazio topologico X si dice **fiacco** se per ogni coppia di aperti $V \subseteq U \subseteq X$ la mappa di restrizione $\rho_{U,V} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ è suriettiva.

Proposizione 4.9 (Aciclicità dei Fasci Fiacchi). *Fasci fiacchi sono aciclici per il funtore* Γ.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{F}$ un fascio fiacco. Come osservato poc'anzi, $\mathscr{F}$ può essere immerso in un fascio iniettivo e fiacco I, pertanto abbiamo un fascio $\mathscr{G}$ ed una sequenza esatta corta

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} \mathscr{G} \to 0.$$

Mostriamo che per ogni $U \subseteq X$ aperto, la mappa $I(U) \to \mathscr{G}(U)$ è suriettiva. Sia σ una sezione di $\mathscr{G}(U)$. Siano V, W due aperti di U in cui esistono delle sezioni $\tau_V \in I(V)$ e $\tau_W \in I(W)$ che sollevano σ ad I. Consideriamo la differenza $\tau_V|_{V\cap W} - \tau_W|_{V\cap W} \in \mathscr{F}(V \cap W)$. Visto che $\mathscr{F}$ è fiacco, esiste una sezione $\chi_V \in \mathscr{F}(V)$ tale che $\chi_V|_{V\cap W} = \tau_V - \tau_W$. Così, se $\tau'_V = \tau_V - \chi_V$, allora $\tau'_V|_{V\cap W} = \tau_W|_{V\cap W}$. Pertanto, esiste una sezione $\tau \in I(V \cup W)$, definita da $\tau|_V = \tau'_V$ e $\tau|_W = \tau_W$, che è mandata in $\sigma|_{V\cap W}$.

Introduciamo ora una coppia (W, τ), massimale per la ovvia relazione d'ordine, dove W è un aperto di U e τ una sezione di I che solleva σ a W. A priori, σ si solleva solo localmente su I, ma grazie a quanto appena visto, abbiamo che $W = U$.

Dunque, per sequenza esatta lunga associata a quella presentata all'inizio della dimostrazione, visto che I è iniettivo, si ha che $H^k(X, I) = 0$ per $k > 0$, e da ciò $H^1(X, \mathscr{F}) = 0$, e inoltre

$$H^k(X, \mathscr{F}) = H^{k-1}(X, \mathscr{G}) \qquad \text{per} \ \ k - 1 \geq 1.$$

La suriettività della mappa $I(U) \to \mathscr{G}(U)$ implica che anche $\mathscr{G}$ sia fiacco. Per induzione, ne segue che $H^k(X, \mathscr{F}) = 0$ per $k > 0$. $\square$

Questa proposizione ci permette di introdurre la **risoluzione di Godement**, che è una risoluzione fiacca di un fascio. Si consideri, infatti, un fascio $\mathscr{F}$, e consideriamo la sua inclusione all'interno del fascio $\mathscr{F}_{God}$

$$U \mapsto \mathscr{F}_{God}(U) = \bigoplus_{x \in U} \mathscr{F}_x.$$

Tale fascio è chiaramente fiacco. Iniettiamo poi il quoziente $\mathscr{F}_{God}/\mathscr{F}$ nel fascio fiacco $(\mathscr{F}_{God}/\mathscr{F})_{God}$, e così via, ottenendo la sequenza

$$\mathscr{F} \to \mathscr{F}_{God} \to (\mathscr{F}_{God}/\mathscr{F})_{God} \to \cdots,$$

che è una risoluzione fiacca del fascio $\mathscr{F}$.

Un fascio $\mathscr{F}$ su X si dice essere un **fascio fine**, se è un fascio di $\mathscr{A}$-moduli, dove $\mathscr{A}$ è un fascio di anelli su X tale che per ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di X, esista una **partizione dell'unità** $\{f_i\}_{i\in I}$ associata a tale ricoprimento, con $\sum_i f_i = 1$, ove la somma è localmente finita. Il risultato che segue ci renderà possibile costruire risoluzioni acicliche ragionevoli per il funtore Γ.

Proposizione 4.10. *Se $\mathscr{F}$ è un fascio fine, allora $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$, $\forall\ i \geq 0$.*

Dimostrazione. Per prima cosa, $\mathscr{F}$ ammette una risoluzione fiacca $\mathscr{F} \hookrightarrow I^0$, I^*, come abbiamo visto usando la risoluzione di Godement. Ogni termine I^k di tale risoluzione è un fascio di $\mathscr{A}$-moduli, dove i differenziali sono morfismi di fasci di $\mathscr{A}$-moduli. Allora, dalla Proposizione 4.9, tale risoluzione è aciclica, e dunque, per la Proposizione 4.8, abbiamo che

$$H^k(X, \mathscr{F}) = \frac{\ker(\Gamma(I^k) \to \Gamma(I^{k+1}))}{\operatorname{im}(\Gamma(I^{k-1}) \to \Gamma(I^k))}.$$

Sia $\alpha \in \ker(\Gamma(I^k) \to \Gamma(I^{k+1}))$. L'esattezza locale del complesso I^* nei gradi maggiori di 0 ci mostra che localmente α arriva da I^{k-1}, ossia esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di X tale che $\alpha|_{U_i} = d\beta_i$, con $\beta \in I^{k-1}(U_i)$. Sia $\{f_i\}$ partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_i\}$, e poniamo

$$\beta = \sum_i f_i \beta_i,$$

dove la somma è localmente finita, e quindi ben definita. Qui $f_i\beta_i$ è una sezione di I^{k-1} su X, e il suo valore in I_x^{k-1} è nullo per x fuori da U_i. Dunque, visto che f_i ha supporto in U_i, definisce una sezione di I^{k-1}. Abbiamo, allora, $d\beta = \alpha$, visto che $\alpha = \sum_i f_i \alpha|_{U_i}$. Così,

$$\ker(\Gamma(I^k) \to \Gamma(I^{k+1})) = \operatorname{im}(\Gamma(I^{k-1}) \to \Gamma(I^k)),$$

e $H^k(X, \mathscr{F}) = 0$ per $k > 0$, come volevamo mostrare. □

Questo risultato si applica perfettamente alle varietà differenziabili.

Corollario 4.11. *Sia X una varietà differenziabile, allora*

$$H^k(X, \mathbb{R}) = \frac{ker(d : \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X))}{im(d : \Omega^{k-1}(X) \to \Omega^k(X))}.$$

Dimostrazione. Usiamo la risoluzione di de Rham di $\mathbb{R}$. La Proposizione 4.10 ci assicura che tale risoluzione sia aciclica, perché gli Ω^k sono fasci di C^∞-moduli. Dunque, la Proposizione 4.8 implica che $H^k(X, \mathbb{R})$ sia uguale alla coomologia del complesso delle sezioni globali del complesso di de Rham. Otteniamo la tesi. □

Questo corollario ci consente di identificare il k-esimo gruppo di coomologia di de Rham con il k-esimo gruppo di coomologia di X a valori nel fascio costante $\mathbb{R}$, chiamato **k-esimo gruppo di coomologia di Betti**, ossia

$$H^k_{dR}(X) = \frac{\ker(d : \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X))}{\operatorname{im}(d : \Omega^{k-1}(X) \to \Omega^k(X))} \cong H^k(X, \mathbb{R}).$$

Esiste anche un'altra nozione di coomologia di uno spazio topologico, che abbiamo introdotto nel capitolo precedente, detta **coomologia singolare** a coefficienti in $\mathbb{Z}$, indicata con $H^k_{sing}(X,\mathbb{Z})$, definita come la coomologia del complesso delle cocatene singolari $C^k_{sing}(X,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(C_k(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$, ossia il duale del complesso delle catene singolari

$$(C_k(X,\mathbb{Z}),\partial).$$

Ricordiamo, dal capitolo precedente, che il gruppo delle k-catene singolari è il gruppo abeliano libero generato dai k-simplessi singolari in X. Analogamente, come abbiamo già visto, possiamo definire la coomologia singolare a coefficienti in $\mathbb{R}$, indicata con $H^k_{sing}(X,\mathbb{R})$, come la coomologia del complesso $\mathrm{Hom}(C_k(X,\mathbb{Z}),\mathbb{R})$.

Come vedremo nel prossimo teorema, vi è una risoluzione aciclica di $\mathbb{Z}$ che ci permette di identificare la coomologia singolare con la coomologia di Betti.

Teorema 4.12. *Sia X uno spazio topologico localmente contraibile, abbiamo allora l'isomorfismo canonico*

$$H^k_{sing}(X,\mathbb{Z}) \cong H^k(X,\mathbb{Z}).$$

Lo stesso risultato vale anche se consideriamo $\mathbb{R}$ al posto di $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Consideriamo il fascio $\mathscr{C}^k_{sing}$ associato al prefascio

$$U \mapsto C^k_{sing}(U,\mathbb{Z}).$$

Il differenziale ∂, ristretto ad ogni $C^k_{sing}(U,\mathbb{Z})$, restituisce un differenziale

$$\partial : \mathscr{C}^k_{sing} \to \mathscr{C}^{k+1}_{sing}.$$

Il complesso costruito in tal modo è una risoluzione del fascio costante $\mathbb{Z}$. Infatti, il complesso $C^k_{sing}(U,\mathbb{Z})$ è esatto nei gradi positivi per ogni aperto contraibile U, visto che la coomologia di $(C^k(U,\mathbb{Z}),\partial)$ è la coomologia singolare di U, che è nulla in ogni spazio contraibile. Ciò prova che il complesso di prefasci che abbiamo definito è esatto nei gradi positivi a livello delle spighe, e dunque il complesso $\mathscr{C}^q_{sing}$ è esatto nei gradi positivi. Inoltre, visto che X è localmente contraibile, è anche localmente connesso per archi, e dunque abbiamo che

$$\ker(\partial : \mathscr{C}^0_{sing} \to \mathscr{C}^1_{sing}) = \mathbb{Z}.$$

Così, tale complesso è risoluzione del fascio costante $\mathbb{Z}$.

Per concludere, osserviamo che tale risoluzione è aciclica, essendo fiacca. Infatti, il prefascio che abbiamo definito è ovviamente fiacco, e vale che

$$\mathscr{C}^k_{sing}(U,\mathbb{Z}) = C^k_{sing}(U,\mathbb{Z})/C^k_{sing}(U,\mathbb{Z})_0,$$

dove $C^k_{sing}(U,\mathbb{Z})_0$ è l'insieme degli $\alpha \in C^k_{sing}(U,\mathbb{Z})$ tali che esiste un ricoprimento $\mathcal{V}$ di U con $\alpha|_{C_k(V,\mathbb{Z})}$ per ogni $V \in \mathcal{V}$.

Così, per la Proposizione 4.8 ne concludiamo che

$$H^k(X,\mathbb{Z}) = H^k(\Gamma(\mathscr{C}^*_{sing})).$$

Rimane da verificare che il complesso

$$\Gamma(\mathscr{C}^*_{sing}) = C^*_{sing}(X)/C^*_{sing}(X)_0$$

è quasi-isomorfo al complesso $C^*_{sing}(X)$, che è essenzialmente il teorema delle piccole catene di Spanier. $\square$

I risultati visti forniscono un'altra dimostrazione del Teorema di de Rham: combinando il Teorema 4.12 e il Corollario 4.11, e ricordando che, come abbiamo affermato nel capitolo precedente, possiamo identificare il gruppo di coomologia singolare $H^p_{sing}(X,\mathbb{R})$ con $\mathrm{Hom}(H_p(X),\mathbb{R})$, otteniamo che

$$H^k_{dR}(X) \cong H^k(X,\mathbb{R}) \cong H^k_{sing}(X,\mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(H_p(X),\mathbb{R}).$$

Osserviamo che, nonostante abbiamo provato l'isomorfismo tra tali strutture, a differenza della trattazione svolta nei capitoli precedenti, non è immediato vedere che l'isomorfismo è dato esplicitamente dall'integrazione.

Bibliografia

[1] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2013

[2] Jeffrey M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, 2009

[3] Raoul Bott, Loring W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer, 1982

[4] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology*, Springer, 1988

[5] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002

[6] Claire Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*, Cambridge University Press, 2002