



**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA**

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea in Matematica

Dimostrazione ABP della disuguaglianza isoperimetrica

**Relatore:
Prof. Roberto Monti**

**Laureando: Mattia Veronese
Matricola: 2102632**

Anno Accademico 2025/2026

25/09/2026

Indice

Introduzione	5
1 Disuguaglianza isoperimetrica	7
1.1 Disuguaglianza Media geometrica-aritmetica	7
1.2 Teorema isoperimetrico	9
2 Soluzione variazionale del problema di Neumann	15
2.1 Introduzione	15
2.2 Funzione distanza dal bordo e relativa regolarità	15
2.3 Spazi di Sobolev e teorema di compattezza debole	17
2.4 Ricerca del minimo	17
2.5 Equazione di Eulero-Lagrange e condizione di Neumann	20
2.6 Esistenza della soluzione	21
Bibliografia	25

Introduzione

La superficie di area minore che racchiude un volume fissato è la sfera.

In tale affermazione è racchiuso il cuore di questa tesi: il problema isoperimetrico. Già 2500 anni fa si conosceva questa proprietà, tuttavia bisogna attendere il XIX secolo prima di avere una vera e propria dimostrazione. Nel secolo scorso, De Giorgi riuscì a risolvere interamente il problema, generalizzandolo agli insiemi di misura finita, secondo Lebesgue. Nella dimostrazione, si utilizzano risultati di teoria della misura, funzioni a variazione limitata, insiemi simmetrici di Steiner e convessità (per ulteriori approfondimenti si consulti [4]).

Nella prima parte della tesi viene presentata una recente dimostrazione ABP, cioè Alexandrov-Bakelman-Pucci, del Teorema isoperimetrico formulata dal matematico Xavier Cabré, la quale sfrutta principalmente argomenti di equazioni differenziali alle derivate parziali, convessità e disuguaglianze aritmetico-geometriche. In particolare, dopo aver definito uno specifico problema di Neumann su un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sufficientemente regolare, si considera l'insieme (chiamato Γ_u) dei punti in cui l'iperpiano tangente al grafico della soluzione al problema, u , giace al di sotto del grafico stesso. In seguito, si prova che la palla unitaria è propriamente contenuta nell'immagine della funzione gradiente di u , ristretta proprio all'insieme Γ_u . Grazie a quest'ultimo risultato si riesce a stimare la misura della palla unitaria sfruttando il teorema del cambio di variabile per l'integrale di Lebesgue e la locale convessità di u su Γ_u . Infine si applica la disuguaglianza che lega media geometrica e media aritmetica per ottenere la disuguaglianza isoperimetrica. Per dichiarare conclusa l'intera dimostrazione, resta da mostrare che vale l'uguaglianza se e solo se l'insieme considerato è una palla. Naturalmente una delle due implicazioni è banalmente verificata, mentre l'altra si ottiene procedendo a ritroso rispetto agli ultimi passaggi precedenti, nei quali sostanzialmente si ha un'uguaglianza invece di una disuguaglianza. La tesi segue dopo aver dedotto la simmetria della matrice hessiana di u , D^2u , la quale possiede tutti gli autovalori uguali e costanti, e dopo aver dimostrato che la mappa $x \rightarrow \nabla u(x)$ è una traslazione.

Nella seconda parte della tesi, si dimostra l'esistenza della soluzione del problema di Neumann iniziale provando, preliminarmente, la regolarità della funzione distanza dal bordo di Ω , l'esistenza, e l'unicità, del minimo del funzionale $F(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + fu \right\} dx$, definito su $X = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) dx = 0\}$, ricavandone anche l'equazione di Eulero-Lagrange e la condizione al bordo di Neumann.

Capitolo 1

Disuguaglianza isoperimetrica

In questo capitolo viene presentata la dimostrazione del Teorema isoperimetrico tratta da [2]. Partendo da un insieme Ω abbastanza regolare e da uno specifico problema di Neumann si deduce che la palla unitaria è contenuta nell'insieme dei punti di Ω in cui l'iperpiano tangente al grafico della soluzione sta sotto alla soluzione. Successivamente la disuguaglianza segue stimando la misura della palla unitaria, utilizzando la disuguaglianza tra la media geometrica e quella aritmetica e la locale convessità di u . Infine si prova che si ha l'uguaglianza se e solo se l'insieme Ω è una palla.

1.1 Disuguaglianza Media geometrica-aritmetica

Teorema 1.1.1 (Disuguaglianza media geometrica-aritmetica). *Dati $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ allora*

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.1.1)$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Dimostrazione. Si consideri

$$K = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n = 1\} \subset \mathbb{R}^n.$$

K è chiuso e limitato e dunque K compatto. Sia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$x \mapsto f(x) = x_1 \cdots x_n$$

Siccome $f \in C^0(K)$ è continua, per il Teorema di Weierstrass esiste il massimo

$$\exists M = \max_{x \in K} f(x) = f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in K.$$

Risulta $M > 0$ poiché $f(x) = x_1 \cdots x_n$ non è identicamente nulla. Infatti se $x_0 = (x_1, \dots, x_n) = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \in K$, allora $f(x_0) = (\frac{1}{n})^n > 0$ e dunque $M = f(\bar{x}) \geq f(x_0) > 0$. Possiamo dunque assumere che $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n > 0$.

Per assurdo, si supponga che $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$. Sia

$$\bar{\bar{x}} = \left(\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2}, \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n \right) \in K,$$

e dunque

$$f(\bar{\bar{x}}) = \left(\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} \right)^2 \bar{x}_3 \cdots \bar{x}_n.$$

Osserviamo che vale la disuguaglianza elementare

$$\left(\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} \right)^2 > \bar{x}_1 \bar{x}_2.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2^2 &> 4\bar{x}_1\bar{x}_2 \iff \\ \bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2^2 &> 0 \iff \\ (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 &> 0, \quad \text{vero perché } \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$f(\bar{\bar{x}}) = \left(\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} \right)^2 \bar{x}_3 \cdots \bar{x}_n > (\bar{x}_1 \bar{x}_2) \bar{x}_3 \cdots \bar{x}_n = f(\bar{x}).$$

Questo è assurdo perché $f(\bar{x}) = M$ è il massimo di f in K . Concludiamo che $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Iterando il processo si ha che $\bar{x}_1 = \dots = \bar{x}_n = \frac{1}{n}$ e dunque $M = \left(\frac{1}{n}\right)^n$. Questo prova che $x_1 \cdots x_n \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n$ per ogni $x \in K$ e vale l'uguaglianza se e solo se $\bar{x}_1 = \dots = \bar{x}_n$. Ciò dimostra il Teorema 1.1.1. $\square$

1.2 Teorema isoperimetrico

Per maggior chiarezza, in seguito verranno indicati con $|\Omega|$ e $P(\Omega)$ rispettivamente la misura dell'insieme Ω e la misura del suo bordo, cioè $|\Omega| = \mathcal{L}^n(\Omega)$ e $P(\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$.

Teorema 1.2.1 (Disuguaglianza isoperimetrica). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, limitato e connesso di classe C^∞ . Allora vale la disuguaglianza*

$$\frac{P(\Omega)}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{P(B_1)}{|B_1|^{\frac{n-1}{n}}}, \quad (1.2.1)$$

dove $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ è la palla unitaria, $|\Omega| = \mathcal{L}^n(\Omega)$ e $P(\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$. Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è una palla.

Dimostrazione. Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ una soluzione del problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{P(\Omega)}{|\Omega|} & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 1 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2.2)$$

dove $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ è la derivata normale esterna di u .

La condizione necessaria di esistenza della soluzione al problema di Neumann è verificata, in quanto

$$\int_{\Omega} \frac{P(\Omega)}{|\Omega|} dx = \int_{\partial\Omega} 1 d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Si consideri l'insieme

$$\Gamma_u = \{x \in \Omega : u(y) \geq u(x) + \nabla u(x) \cdot (y - x) \quad \forall y \in \overline{\Omega}\}$$

cioè l'insieme dei punti $x \in \Omega$ in cui l'iperpiano tangente in x al grafico di u sta sotto u .

Lemma 1.2.1. *Sia $\nabla u \in C^1(\Gamma_u; \mathbb{R}^n)$ e $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ la palla unitaria centrata in 0. Allora*

$$B_1(0) \subset \nabla u(\Gamma_u).$$

Dimostrazione. Sia $p \in \mathbb{R}^n$ tale che $|p| < 1$ e sia $g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$y \mapsto g(y) = u(y) - p \cdot y.$$

Osserviamo che:

1. Siccome $u \in C^2(\overline{\Omega})$ allora $g \in C^2(\overline{\Omega})$;
2. $\overline{\Omega}$ è chiuso e limitato per ipotesi e dunque $\overline{\Omega}$ compatto.

Per il Teorema di Weierstrass esiste $x \in \overline{\Omega}$ tale che

$$x = \arg \min_{y \in \overline{\Omega}} g(y)$$

dove

$$g(x) = u(x) - p \cdot x.$$

Dimostriamo che $x \in \Omega$. Per assurdo, sia $x \in \partial\Omega$. Si consideri lo sviluppo di Taylor di $g(y)$ centrato in x e in direzione ν :

$$g(y) = g(x + t\nu) = g(x) + (\nabla g(x) \cdot \nu)t + o(|t|).$$

In questo caso $t < 0$ poiché ν è la normale esterna a Ω . Quindi si ha

$$0 \leq g(y) - g(x) = \frac{\partial g}{\partial \nu}(x)t + o(|t|).$$

Dividendo per $t < 0$ e facendo il limite $t \rightarrow 0^-$ si ottiene

$$\frac{\partial g}{\partial \nu}(x) \leq 0.$$

D'altra parte

$$\frac{\partial g}{\partial \nu}(x) = \nabla g(x) \cdot \nu = \nabla(u(x) - p \cdot x) \cdot \nu = \nabla u(x) \cdot \nu - p \cdot \nu$$

e quindi

$$\nabla u(x) \cdot \nu - p \cdot \nu \leq 0.$$

Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\nabla u(x) \cdot \nu \leq p \cdot \nu \leq |p \cdot \nu| \leq |p||\nu| = |p| < 1.$$

Questo è assurdo, poiché dal problema di Neumann si ha

$$\frac{\partial g}{\partial \nu}(x) = 1, \quad x \in \partial\Omega.$$

Il ragionamento prova che $x \in \Omega$. Siccome x è punto di minimo di g in $\overline{\Omega}$

$$0 = \nabla g(x) = \nabla u(x) - p$$

$$\iff p = \nabla u(x).$$

Inoltre si ha

$$g(y) \geq g(x) \quad \forall y \in \overline{\Omega}$$

$$\iff u(y) - p \cdot y \geq u(x) - p \cdot x, \quad y \in \overline{\Omega}$$

$$\iff u(y) \geq u(x) - p \cdot (x - y), \quad y \in \overline{\Omega},$$

ma $p = \nabla u(x)$, quindi si ottiene esattamente la condizione di appartenenza a Γ_u e dunque $x \in \Gamma_u$. Questo prova che $p \in B_1(0) \subset \nabla u(\Gamma_u)$. $\square$

Dal Lemma 1.2.1 e per la monotonia della misura si ha

$$|B_1(0)| = |B_1| \leq |\nabla u(\Gamma_u)| = \int_{\nabla u(\Gamma_u)} dp. \quad (1.2.3)$$

Γ_u è chiuso relativamente a Ω e la funzione

$$\begin{aligned} \nabla u : \Gamma_u &\rightarrow \nabla u(\Gamma_u) \\ x &\mapsto \nabla u(x) \end{aligned}$$

verifica le seguenti proprietà:

1. $\nabla u \in C^1(\Gamma_u; \mathbb{R}^n)$, perché $u \in C^2(\overline{\Omega})$;
2. ∇u suriettiva per definizione;
3. ∇u iniettiva nel sottoinsieme $D = \{x \in \Gamma_u : \det J(\nabla u(x)) \neq 0\}$.

Per il Teorema del cambio di variabile per l'integrale di Lebesgue segue:

$$\int_{\nabla u(\Gamma_u)} dp = \int_D |\det D^2 u(x)| dx,$$

dove $\det D^2 u(x) = \det J(\nabla u(x))$.

Per ogni $x \in \Gamma_u$ esiste U intorno di x in cui u è convessa, perciò $\det D^2 u(x) \geq 0$ per ogni $x \in U$. Allora, in tutto Γ_u si ha

$$\int_{\nabla u(\Gamma_u)} dp \leq \int_{\Gamma_u} \det D^2 u(x) dx. \quad (1.2.4)$$

Per il Teorema 1.1.1 (disuguaglianza media geometrica-aritmetica)

$$0 \leq \det D^2 u \leq \left(\frac{\Delta u}{n} \right)^n \quad \text{in } \Gamma_u, \quad (1.2.5)$$

dove

1. $\det D^2 u = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ dove $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ sono gli autovalori di $D^2 u$, che sono tutti non negativi perché $D^2 u$ è semidefinita positiva;
2. $\Delta u = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Per monotonia dell'integrale segue:

$$\int_{\Gamma_u} \det D^2 u(x) dx \leq \int_{\Gamma_u} \left(\frac{\Delta u}{n} \right)^n dx. \quad (1.2.6)$$

Da (1.2.2) si ha:

$$\Delta u = \frac{P(\Omega)}{|\Omega|} \quad \text{in } \Gamma_u \subset \Omega,$$

e quindi

$$\int_{\Gamma_u} \left(\frac{\Delta u}{n} \right)^n dx = \int_{\Gamma_u} \left(\frac{P(\Omega)}{n|\Omega|} \right)^n dx = \left(\frac{P(\Omega)}{n|\Omega|} \right)^n |\Gamma_u|. \quad (1.2.7)$$

Da (1.2.3), (1.2.4), (1.2.5), (1.2.6) e (1.2.7) segue che

$$|B_1| \leq \left(\frac{P(\Omega)}{n|\Omega|} \right)^n |\Gamma_u| \leq \left(\frac{P(\Omega)}{n|\Omega|} \right)^n |\Omega|, \quad (1.2.8)$$

ovvero

$$n|B_1|^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{P(\Omega)}{|\Omega|} \right) |\Omega|^{\frac{1}{n}} = \frac{P(\Omega)}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Infine, usando $P(B_1) = n|B_1|$, si trova

$$n|B_1|^{\frac{1}{n}} = n|B_1|^{\frac{1+n-n}{n}} = n|B_1|^{1-\frac{n-1}{n}} = \frac{n|B_1|}{|B_1|^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{P(B_1)}{|B_1|^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Da quest'ultima catena di uguaglianze si ottiene la disuguaglianza isoperimetrica:

$$\frac{P(B_1)}{|B_1|^{\frac{n-1}{n}}} \leq \frac{P(\Omega)}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}}. \quad (1.2.9)$$

Resta da dimostrare che vale l'uguaglianza se e solo se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è una palla.

Dimostrazione. Sia $\Omega = B_r(x)$ una palla centrata in $x \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$. Allora

1. $P(B_r(x)) = r^{n-1}P(B_1)$;
2. $|B_r(x)| = r^n|B_1|$.

Dunque si ha

$$\frac{P(B_r(x))}{|B_r(x)|^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{r^{n-1}P(B_1)}{r^n \frac{n-1}{n} |B_1|^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{P(B_1)}{|B_1|^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Proviamo l'altra implicazione: se si ha l'uguaglianza in (1.2.9), allora anche (1.2.8) diventa un'uguaglianza, e quindi

$$|B_1| = \left(\frac{P(\Omega)}{n|\Omega|} \right)^n |\Gamma_u| = \left(\frac{P(\Omega)}{n|\Omega|} \right)^n |\Omega|.$$

Questo prova che

$$\Gamma_u = \Omega, \quad (1.2.10)$$

perché $|\Gamma_u| = |\Omega|$ e $\Gamma_u \subset \Omega$ è chiuso. Precisamente $|\Omega| = |\Gamma_u| + |\Omega \setminus \Gamma_u| = |\Omega| + |\Omega \setminus \Gamma_u|$, da cui si deduce che $|\Omega \setminus \Gamma_u| = 0$.

Sappiamo che $\Omega \setminus \Gamma_u$ è aperto e di misura nulla, quindi $\Omega \setminus \Gamma_u = \emptyset$, perciò $\Omega = \Gamma_u$. Inoltre si ha l'uguaglianza

$$|B_1| = \left(\frac{P(\Omega)}{n|\Omega|} \right)^n |\Gamma_u| = \left(\frac{\Delta u}{n} \right)^n |\Gamma_u| = \int_{\Gamma_u} \left(\frac{\Delta u}{n} \right)^n dx,$$

e dunque anche (1.2.3),(1.2.6) diventano uguaglianze, cioè

$$|B_1| = |\nabla u(\Gamma_u)| = \int_{\Gamma_u} \det D^2 u(x) dx = \int_{\Gamma_u} \left(\frac{\Delta u}{n} \right)^n dx. \quad (1.2.11)$$

Per la (1.2.5) si ha

$$0 \leq \det D^2 u \leq \left(\frac{\Delta u}{n} \right)^n \quad \text{in } \Gamma_u,$$

e perciò

$$\det D^2 u = \left(\frac{\Delta u}{n} \right)^n \quad \text{per quasi ogni } x \in \Gamma_u.$$

Siccome $u \in C^2(\Gamma_u)$, le due funzioni sono continue in tutto Γ_u e dunque

$$\det D^2 u = \left(\frac{\Delta u}{n} \right)^n \quad \text{in tutto } \Gamma_u. \quad (1.2.12)$$

Se per assurdo fosse $x_0 \in \Gamma_u$ tale che

$$\det D^2 u(x_0) \neq \left(\frac{\Delta u(x_0)}{n} \right)^n,$$

allora, per continuità delle due funzioni, esisterebbe $U \subset \Gamma_u$ intorno di x_0 tale che

$$\det D^2 u(x) \neq \left(\frac{\Delta u(x)}{n} \right)^n, \quad x \in U.$$

Le due funzioni non coincidono in tutto U , con $|U| > 0$. Questo è assurdo.

Per il Teorema 1.1.1, in (1.2.5) si ha l'uguaglianza se e solo se $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e perciò

$$\det D^2 u(x) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = a^n = \left(\frac{P(\Omega)}{n|\Omega|} \right)^n.$$

Segue che $D^2 u$ è una matrice reale simmetrica (e dunque diagonalizzabile) con tutti gli autovalori uguali e costanti (indipendenti da x).

Vogliamo infine provare che la mappa $x \rightarrow \nabla u(x)$ è una traslazione. Sia $x_0 \in \Omega$. Integrando due volte $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ lungo la generica direzione x_i in un intervallo I centrato in x_0 si ottiene:

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} dx_i dx_i &= a \\ \iff \int \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i &= \frac{a}{2}(x_i - x_{0_i}) + c_i \\ \iff u(x_i) &= \frac{a}{2}(x_i - x_{0_i})^2 + c_i(x_i - x_{0_i}) + d_i, \end{aligned}$$

con $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ costanti che non dipendono da x_j , con $j \neq i$, perché le derivate seconde miste sono tutte nulle. Imponendo il passaggio per x_0 e calcolando $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)$, segue che

$$u(x_i) = \frac{a}{2}(x_i - x_0)^2 + \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_i - x_0) + u(x_0) \quad \forall x_i \in I.$$

Unendo le equazioni in ogni direzione x_i , $i = 1, \dots, n$ e prendendo $x \in U$, aperto centrato in x_0 , si ha

$$u(x) = \frac{a}{2}|x - x_0|^2 + \nabla u(x_0) \cdot (x - x_0) + u(x_0), \quad x \in U.$$

Deduciamo che

$$\nabla u(x) = a(x - x_0) + \nabla u(x_0)$$

e anche

$$\nabla u(x) - ax = \nabla u(x_0) - ax_0$$

$$\iff (\nabla u - aI_n)(x) = \nabla u(x_0) - ax_0 = \text{costante}, \quad x \in U.$$

Quindi la mappa $(\nabla u - aI_n)(x)$ è localmente costante in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, che è un aperto connesso. Concludiamo che

$$(\nabla u - aI_n)(x) = y_0 = \text{costante}, \quad x \in \Omega.$$

Dal Lemma 1.2.1 e da (1.2.10), segue

$$B_1 \subset \nabla u(\Gamma_u) = \nabla u(\Omega) = y_0 + a\Omega$$

e da (1.2.11)

$$|B_1| = |\nabla u(\Gamma_u)| = |\nabla u(\Omega)| = |y_0 + a\Omega|,$$

con $B_1, y_0 + a\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperti. Dunque $B_1 = y_0 + a\Omega$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è una palla.

Questo conclude la dimostrazione del Teorema 1.2.1

□

Capitolo 2

Soluzione variazionale del problema di Neumann

2.1 Introduzione

In questo capitolo si tratta l'esistenza della soluzione in senso debole del problema di Neumann considerato nel capitolo precedente. Inizialmente, si prova la regolarità della funzione che determina la distanza di un punto dal bordo di un insieme sufficientemente regolare Ω (la dimostrazione si trova in [5]).

In seguito, si dimostra l'esistenza e l'unicità del minimo di un funzionale definito sul sottoinsieme $X = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) dx = 0\}$ dello spazio di Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$.

L'esistenza si deduce a partire da una successione minimizzante a cui si applica la disuguaglianza di Poincaré e il teorema di compattezza debole, mentre l'unicità segue dalla convessità del funzionale considerato e, di nuovo, dalla disuguaglianza di Poincaré.

Successivamente si ricava l'equazione di Eulero-Lagrange grazie alla teoria della regolarità, qui non approfondita, e al teorema della divergenza. Da quest'ultima, si ottiene anche la condizione di Neumann, supponendo a priori la regolarità del minimo trovato in precedenza. Infine si prova l'esistenza della soluzione del problema di Neumann iniziale utilizzando tutti i risultati appena dimostrati.

2.2 Funzione distanza dal bordo e relativa regolarità

Definizione 2.2.1 (Distanza). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, limitato e connesso di classe C^k , $k \geq 2$. Allora*

$$\begin{aligned} d : \overline{\Omega} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x) = \text{dist}(x; \partial\Omega) \end{aligned}$$

è la funzione che determina la distanza di un punto $x \in \overline{\Omega}$ dalla frontiera di Ω .

Lemma 2.2.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, limitato e connesso di classe C^k , $k \geq 2$. Allora esiste $\mu(\Omega) > 0$ tale che $d \in C^k(\Gamma_\mu)$, dove*

$$\Gamma_\mu := \{x \in \overline{\Omega} : d(x) < \mu\}. \quad (2.2.1)$$

Dimostrazione. Siccome Ω è aperto, limitato e connesso, la sua frontiera $\partial\Omega$ soddisfa la condizione uniforme di palla interna, cioè per ogni $y_0 \in \partial\Omega$, esiste una palla $B_r \subset \overline{\Omega}$ tale che $\overline{B_r} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) = \{y_0\}$ e $r > c$, con $c > 0$ costante. Assumo $c = \mu > 0$, scegliendo μ tale che il suo reciproco $\frac{1}{\mu}$ limiti le curvatures principali di $\partial\Omega$, le quali non possono a priori divergere grazie all'ipotesi di limitatezza di $\partial\Omega$. Inoltre, per ogni $x \in \Gamma_\mu$, esiste un unico $y = y(x) \in \partial\Omega$ tale che $|x - y| = d(x)$ e $x = y + \nu(y)d$, dove ν indica il versore normale interno a $\partial\Omega$.

Si fissi un sistema di coordinate principali centrato in y_0 . Siano $T(y_0)$ il piano tangente a $\partial\Omega$ in y_0 e $U \subset T(y_0)$ un aperto centrato in y_0 , allora la funzione

$$g : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (y', d) \mapsto g(y', d) = y + \nu(y)d$$

è tale che:

- $g \in C^{k-1}(U \times \mathbb{R})$;

$$\bullet \quad Dg(y'_0, d) = \begin{pmatrix} 1 - k_1 d & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 - k_2 d & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 - k_{n-1} d & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ sono le curvatures principali di $\partial\Omega$ in y_0 .

Perciò il determinante jacobiano, calcolato in $(y'_0, d(x_0))$, risulta

$$\det Dg(y'_0, d(x_0)) = (1 - k_1 d(x_0)) \cdots (1 - k_{n-1} d(x_0)) \cdot 1,$$

che è strettamente positivo poiché $x_0 \in \Gamma_\mu$ e $k_i < \frac{1}{\mu}$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$. Da quest'ultima osservazione si deduce che g è un diffeomorfismo locale di classe $C^{k-1}(U \times \mathbb{R})$. Si consideri, ora, $V = V(x_0) \subset \Gamma_\mu$ un aperto centrato in x_0 . Per il teorema della funzione inversa, posso esprimere y' e d in funzione di x . Inoltre, dalla regolarità di g deduco che $y'(x) \in C^{k-1}(V)$. Infine dalla relazione

$$x = y + \nu(y)d,$$

ottengo

$$d(x) = (x - y) \cdot \nu(y).$$

Quindi

$$Dd(x) = \nu(y(x)) = \nu(y'(x)) \in C^{k-1}(V) \quad x \in V,$$

cioè $d \in C^k(V)$, da cui $d \in C^k(\Gamma_\mu)$.

□

2.3 Spazi di Sobolev e teorema di compattezza debole

Richiamiamo i concetti di base sugli spazi di Sobolev, senza dimostrazioni.

Definizione 2.3.1 (Spazio di Sobolev). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $1 \leq p \leq \infty$. Allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se $u \in L^p(\Omega)$ ed esistono $v_1, \dots, v_n \in L^p(\Omega)$ tali che*

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v_i(x) \varphi(x) dx$$

per ogni $i = 1, \dots, n$ e $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ a supporto compatto.

La funzione $\frac{\partial u}{\partial x_i} := v_i \in L^p(\Omega)$ è la derivata parziale debole di u in direzione x_i . Inoltre

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

è il gradiente debole di u . Si noti che $W^{1,2}(\Omega) = \mathcal{H}^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert.

Definizione 2.3.2 (Media). *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $u \in L^1(\Omega)$. La media di u è*

$$u_{\Omega} = \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega)} \int_{\Omega} u(x) dx.$$

Lemma 2.3.1 (Disuguaglianza di Poincaré, si veda [3], Sezione 5.8.1). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, connesso con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1 . Per ogni $1 \leq p < \infty$ esiste una costante $c = c(n, p, \Omega)$ tale che*

$$\int_{\Omega} |u - u_{\Omega}|^p dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx$$

per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.3.1 (di compattezza debole, si veda [1], Teorema 3.18). *Sia E uno spazio di Banach riflessivo e sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione limitata in E . Allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge debolmente.*

Lemma 2.3.2 (Spazi di Sobolev e di Banach, si veda [1], Proposizione 8.1). *Lo spazio $W^{1,p}$ è uno spazio di Banach per $1 \leq p \leq \infty$. $W^{1,p}$ è riflessivo per $1 < p < \infty$ e separabile per $1 \leq p < \infty$. Lo spazio $\mathcal{H}^1$ è uno spazio di Hilbert separabile.*

Non verrà qui approfondita la teoria sugli spazi di Banach riflessivi.

2.4 Ricerca del minimo

Proviamo, ora, l'esistenza e l'unicità del minimo del funzionale $F(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + fu \right\} dx$.

Teorema 2.4.1 (Esistenza e unicità del minimo). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un aperto limitato, connesso con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1 . Sia*

$$X = \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) dx = 0 \right\}.$$

Sia $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale

$$F(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + fu \right\} dx$$

con $f \in L^2(\Omega)$ fissata. Allora esiste ed è unico il minimo di F su X .

Dimostrazione. (Esistenza) Sia $\{u_h\}_{h \in \mathbb{N}} \subset X$ una successione minimizzante, cioè tale che

$$\lim_{h \rightarrow \infty} F(u_h) = \inf_{u \in X} F(u); \quad (2.4.1)$$

Cerchiamo $c \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $h \in \mathbb{N}$, $F(u_h) \leq c$.

Dato $\varepsilon > 0$, si ha che

$$\int_{\Omega} fu_h dx \geq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon} f^2 + \varepsilon u_h^2 \right) dx, \quad (2.4.2)$$

poiché

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f + \sqrt{\varepsilon} u_h \right)^2 \geq 0 \iff fu_h \geq -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} f^2 + \varepsilon u_h^2 \right)$$

e (2.4.2) segue integrando in Ω . Per la disuguaglianza di Poincaré (2.3.1), esiste una costante $c_{\Omega} > 0$ tale che

$$\int_{\Omega} |u_h|^2 dx = \int_{\Omega} |u_h - (u_h)_{\Omega}|^2 dx \leq c_{\Omega} \int_{\Omega} |\nabla u_h|^2 dx, \quad (2.4.3)$$

dove $(u_h)_{\Omega}$ è la media definita in (2.3.2), che si annulla in quanto $u_h \in X$. Quindi

$$\int_{\Omega} fu_h dx \geq -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon c_{\Omega} \int_{\Omega} |\nabla u_h|^2 dx \right\}. \quad (2.4.4)$$

In conclusione

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u_h|^2 + fu_h \right\} dx \leq c \iff \int_{\Omega} fu_h dx \leq c - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_h|^2 dx$$

Concatenando quest'ultima disuguaglianza con (2.4.4) risulta

$$c - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_h|^2 dx \geq -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon c_{\Omega} \int_{\Omega} |\nabla u_h|^2 dx \right\}$$

e dunque

$$\frac{1}{2}(1 - \varepsilon c_\Omega) \int_\Omega |\nabla u_h|^2 dx \leq c + \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Scegliendo $\varepsilon > 0$ tale che $1 - \varepsilon c_\Omega \geq \frac{1}{2}$ si riesce a trovare una costante $\bar{c} \in (0, +\infty)$ tale per cui

$$\int_\Omega |\nabla u_h|^2 dx \leq \bar{c} \quad \forall h \in \mathbb{N},$$

e di conseguenza

$$\int_\Omega u_h^2 dx \leq c_\Omega \bar{c} \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Per il Teorema di compattezza debole (2.3.1), esistono $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e $\{\hat{u}_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ sottosuccessione di $\{u_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ tali che $\hat{u}_h$ converge debolmente a u in $W^{1,2}(\Omega)$.

Per semicontinuità inferiore della norma, si ha

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla \hat{u}_h|^2 dx \quad (2.4.5)$$

e per definizione di convergenza debole in $W^{1,2}(\Omega)$:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_\Omega \hat{u}_h f dx = \int_\Omega u f dx \quad \forall f \in L^2(\Omega). \quad (2.4.6)$$

Sfruttando l'ipotesi $\hat{u}_h \in X$ e ponendo $f \equiv 1$, si ha che

$$0 = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_\Omega \hat{u}_h dx = \int_\Omega u dx,$$

perciò $u \in X$. Infine da (2.4.5) e (2.4.6) si deduce che

$$F(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + fu \right\} dx \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} |\nabla \hat{u}_h|^2 + f \hat{u}_h \right\} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} F(\hat{u}_h). \quad (2.4.7)$$

Da (2.4.1) ottengo che $F(u) \geq \lim_{h \rightarrow \infty} F(u_h)$, la quale, unita a (2.4.7), implica l'uguaglianza, cioè che u è il minimo di F su X .

(Unicità) Siano u e $\bar{u}$ due minimi. Dalla convessità di $u \mapsto F(u)$ si ha

$$F\left(\frac{u + \bar{u}}{2}\right) \leq \frac{1}{2}F(u) + \frac{1}{2}F(\bar{u})$$

e per la minimalità di u e $\bar{u}$ otteniamo l'uguaglianza, da cui

$$\int_\Omega \left| \nabla \left(\frac{u + \bar{u}}{2} \right) \right|^2 dx = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla \bar{u}|^2 dx.$$

Inoltre, dalla stretta convessità di $\xi \mapsto |\xi|^2$ segue che $\nabla u = \nabla \bar{u}$ quasi ovunque su Ω e quindi $\nabla(u - \bar{u}) = 0$ quasi ovunque su Ω .

Dalla disuguaglianza di Poincaré (2.3.1), esiste c_Ω tale che

$$\int_\Omega (u - \bar{u})^2 dx \leq c_\Omega \int_\Omega |\nabla(u - \bar{u})|^2 dx = 0$$

e questo implica che $u = \bar{u}$. □

2.5 Equazione di Eulero-Lagrange e condizione di Neumann

Ricaviamo l'equazione di Eulero-Lagrange e la condizione di Neumann.

Si consideri $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e sia $\psi := \varphi - \varphi_\Omega \in X$, dove X è definito in (2.4.1). Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}$, sia

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= F(u + \varepsilon\psi) \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u + \varepsilon \nabla \psi|^2 + f(u + \varepsilon\psi) \right\} dx \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \varepsilon \nabla u \cdot \nabla \psi + \frac{1}{2} \varepsilon^2 |\nabla \psi|^2 + f(u + \varepsilon\psi) \right\} dx \end{aligned}$$

e quindi

$$g'(0) = \int_{\Omega} \{ \nabla u \cdot \nabla \psi + f(\psi) \} dx.$$

Imponendo che u sia il minimo del funzionale e che $\nabla \psi = \nabla(\varphi - \varphi_\Omega) = \nabla \varphi$, si ottiene

$$0 = g'(0) = \int_{\Omega} \{ \nabla u \cdot \nabla \varphi + f(\varphi - \varphi_\Omega) \} dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (2.5.1)$$

Si noti che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \varphi_\Omega dx &= \int_{\Omega} f(x) \left(\frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega)} \int_{\Omega} \varphi(y) dy \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi(y) \left(\frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) dx \right) dy \\ &= \int_{\Omega} f_\Omega \varphi dx, \end{aligned}$$

perciò l'equazione (2.5.1) diventa

$$\int_{\Omega} \{ \nabla u \cdot \nabla \varphi + \varphi(f - f_\Omega) \} dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (2.5.2)$$

Per la teoria della regolarità, che non verrà qui approfondita, la condizione (2.5.2) implica che $u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega)$, cioè u possiede le derivate seconde deboli in $L_{loc}^2(\Omega)$. Dalla medesima condizione, si può estrarre l'equazione di Eulero-Lagrange, infatti usando il teorema della divergenza e il fatto che φ è a supporto compatto in Ω , si ha che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega} \varphi \Delta u dx = - \int_{\Omega} \varphi \Delta u dx \quad (2.5.3)$$

e quindi (2.5.2) diventa

$$\int_{\Omega} \{ -\Delta u + (f - f_\Omega) \} \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (2.5.4)$$

Applicando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni a (2.5.4), si ricava

$$\Delta u = f - f_\Omega \quad \text{in } L^2(\Omega), \quad (2.5.5)$$

che è l'equazione di Eulero-Lagrange.

Analogamente, è possibile ripetere i passaggi appena esplicitati partendo, però, da $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Questo implica che la condizione (2.5.3) venga modificata, trasformandosi in

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\partial\Omega} \varphi (\nabla u \cdot \nu) \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega} \varphi \Delta u \, dx,$$

di conseguenza è necessario che $\nabla u(x)$ sia definito per quasi ogni $x \in \partial\Omega$. A tal scopo, supporremo che $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

L'equazione di Eulero-Lagrange (2.5.2) diventa

$$\int_{\partial\Omega} \varphi (\nabla u \cdot \nu) \, d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\Omega} \{-\Delta u + (f - f_{\Omega})\} \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

e imponendo (2.5.5), risulta

$$\int_{\partial\Omega} \varphi (\nabla u \cdot \nu) \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\partial\Omega),$$

cioè, utilizzando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \quad (2.5.6)$$

ovvero la condizione di Neumann.

2.6 Esistenza della soluzione

Infine, uniamo i risultati precedenti per dimostrare l'esistenza della soluzione debole del problema di Neumann.

Teorema 2.6.1 (di esistenza della soluzione al problema di Neumann). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, limitato, connesso e con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^∞ . Allora esiste $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ che risolve il problema di Neumann*

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{|\Omega|} & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 1 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.6.1)$$

dove $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ è la derivata normale esterna di u .

Dimostrazione. Sia $d : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che a $x \in \overline{\Omega}$ associa la corrispondente distanza dal bordo, denotata con $\text{dist}(x; \partial\Omega) = d(x)$. Per il Lemma (2.2.1), esiste $\delta > 0$ tale che $d \in C^\infty(\{x \in \overline{\Omega} : \text{dist}(x; \partial\Omega) < \delta\})$.

Sia $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tale per cui

- $\chi(x) = 1$ se $\text{dist}(x; \partial\Omega) \leq \frac{\delta}{2}$;
- $\chi(x) = 0$ se $\text{dist}(x; \partial\Omega) \geq \delta$.

Si consideri, ora, la funzione

$$\begin{aligned} v : \overline{\Omega} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto v(x) = \chi(x)d(x), \end{aligned}$$

che verifica le seguenti proprietà:

- $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$;
- $v(x) = 0$ su $\partial\Omega$;
- $\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial d}{\partial \nu}(x) = 1$ per $x \in \partial\Omega$;
- la funzione $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x) := \Delta v(x)$ è C^∞ .

Infine, sia $X := \{w \in W^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega w(x) dx = 0\}$. Si verifica che tale insieme è uno spazio di Hilbert.

Sia $\psi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$\psi(x) := \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{|\Omega|} - \varphi(x).$$

Lemma 2.6.1. *Si ha che:*

$$\int_\Omega \psi(x) dx = 0, \quad (2.6.2)$$

cioè $\psi \in X$.

Dimostrazione. Si ha

$$\int_\Omega \psi(x) dx = \int_\Omega \left\{ \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{|\Omega|} - \Delta v(x) \right\} dx = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) - \int_\Omega \Delta v(x) dx.$$

Ora $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, quindi, applicando il teorema della divergenza, risulta:

$$\int_\Omega \Delta v(x) dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla v(x)) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

Per le proprietà di v ,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = 1 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

quindi

$$\int_\Omega \Delta v(x) dx = \int_{\partial\Omega} d\mathcal{H}^{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega).$$

Dunque

$$\int_\Omega \psi(x) dx = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) - \int_\Omega \Delta v(x) dx = 0.$$

□

Si consideri il funzionale

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \mapsto F(w) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - w\psi \right\} dx;$$

per il Teorema (2.4.1), esiste ed è unico il minimo, w , di F su X . Inoltre, da (2.5.5) si deduce che w verifica l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\Delta w = \psi - \psi_{\Omega}$$

in senso debole. Siccome $\psi \in X$, l'equazione diventa:

$$\Delta w = \psi.$$

Supponendo che $w \in C^1(\overline{\Omega})$, si ha

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

che è la condizione di Neumann, come si deduce dall'equazione (2.5.6).

Infine si consideri la funzione $u := w - v$. Allora

- $u \in W^{1,2}(\Omega)$;
- $\Delta u = \Delta w + \Delta v = \psi + \varphi = \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{|\Omega|}$ in Ω in senso debole;

perciò u è la soluzione debole al problema di Neumann (2.6.1). Dalla teoria della regolarità delle funzioni armoniche segue che $u \in C^{\infty}(\Omega)$. Dalla teoria della regolarità fino al bordo segue che $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Questa funzione u è quella usata nella dimostrazione del Teorema (1.2.1).

□

Bibliografia

- [1] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer Nature, 2011.
- [2] Xavier Cabré. Isoperimetric, Sobolev, and eigenvalue inequalities via the Alexandroff-Bakelman-Pucci method: a survey. *Chinese annals of mathematics. Serie B*, 38, 2017.
- [3] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics; v.19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [4] Nicola Fusco. The classical isoperimetric theorem, 2004. <https://hdl.handle.net/11588/335493>.
- [5] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Berlin, 2001.