Università degli Studi di Padova

Università degli studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L'insegnamento della geometria analitica nella scuola secondaria di II grado con un software di geometria dinamica

Relatore:
Prof. Francesco Ciraulo
Correlatore:
Prof. Luigi Tomasi

Laureando
Simone David Biot, 1178198

15 dicembre 2023

Anno Accademico 2022-2023

Indice

Introduzione

Le sezioni coniche costituiscono un capitolo fondamentale nella storia millenaria della matematica, e in particolare, della geometria. L'etimologia della parola *conica* ha origine dalla natura geometrica di questa famiglia di curve, che sono difatti ottenute mediante intersezioni tra un cono e un piano. Lo studio delle sezioni coniche, inaugurato nel IV secolo a.C. da Menecmo, si sviluppò ulteriormente nei secoli successivi con il contributo significativo del matematico greco Apollonio di Perga. La sua opera magistrale, le *Coniche*, rimase un punto di riferimento essenziale per la comprensione di queste curve fino alla metà del XVII secolo. Fu proprio in questo secolo che la geometria analitica fece il suo ingresso rivoluzionario, guidata dalle brillanti menti di René Descartes e Pierre de Fermat. La geometria cartesiana di Descartes, espressa in termini algebrici, e il principio fondamentale di Fermat sulla relazione tra equazioni e luoghi geometrici, sono le pietre miliari che segnano la trasformazione delle sezioni coniche da entità geometriche ad oggetti di uno studio di tipo algebrico-analitico. Attraverso questo percorso, emerge chiaramente come le sezioni coniche non siano solo una serie di curve geometriche, ma presentino un'intricata sinergia tra l'arte della costruzione geometrica e la potenza analitica dell'algebra.

La matematica, disciplina intrisa di sfide e sorprese, si pone come una chiave fondamentale per la comprensione del mondo e lo sviluppo di competenze trasversali. Oltre alla sua utilità pratica, essa stimola il pensiero critico, la risoluzione dei problemi e il pensiero creativo, fornendo un linguaggio universale che supera le barriere culturali. In quest'ottica, l'insegnamento della matematica cerca il giusto equilibrio tra astrazione e applicazione. Con le Indicazioni Nazionali si delineano i traguardi in ambito di conoscenze, abilità e competenze che ogni studente dovrebbe raggiungere alla fine di ogni percorso di studi e le nuove Linee guida per le discipline STEM si focalizzano sull'implementazione delle competenze scientifiche, tecnologiche e matematiche, con approcci interdisciplinari e l'uso di metodologie innovative. In un contesto di questo genere, l'utilizzo di ambienti digitali, come *GeoGebra*, offre opportunità dinamiche di apprendimento e amplifica l'efficacia del processo educativo.

I software di geometria dinamica permettono di strutturare progetti didattici interattivi per coinvolgere attivamente gli studenti, alimentando la loro motivazione e dunque migliorando il loro apprendimento.
Da questa esigenza nasce il progetto didattico riportato in questa trattazione. Integrando lezioni frontali con attività laboratoriali, il progetto vuole favorire l'acquisizione di competenze matematiche attraverso l'utilizzo critico di strumenti digitali. L'approccio eterogeneo, combinato con tecniche di *peer tutoring* e *cooperative learning*, mira a rendere le lezioni partecipate, coinvolgenti e motivanti. La sequenza didattica, che include sessioni laboratoriali precedute o seguite da lezioni frontali, è progettata per massimizzare l'efficacia dell'apprendimento, mantenendo la complessità degli argomenti.

Capitolo 1

Alcune linee di storia della geometria analitica

1.1 Menecmo

Le sezioni coniche rappresentano un importante capitolo nella storia della matematica e della geometria in particolare. Queste curve, che includono ellissi, parabole e iperboli, sono chiamate *coniche* perché possono essere ottenute come sezioni di un cono con un piano. Colui che per primo utilizzò tali curve definite proprio dalla costruzione sopracitata fu Menecmo (IV sec. a.C.). Il suo intento era quello di risolvere il *Problema di Delo* sulla duplicazione del cubo. In un'opera di Giovanni Filopono, filosofo e scienziato del 500 d.C., è presente la seguente testimonianza dell'impegnativo quesito:

> *...quando dio annunciò agli abitanti di Delo, attraverso l'oracolo, che, al fine di sbarazzarsi della pestilenza, essi dovessero costruire un altare doppio di quello che esisteva, i loro operai specializzati caddero in una grande perplessità nei loro tentativi di scoprire come si potesse realizzare il doppio di un solido simile...*

La soluzione che Menecmo fornisce è duplice. È da sottolineare che un approccio analitico come quello che useremo nei prossimi paragrafi non era l'approccio dello stesso Menecmo; infatti la risoluzione dei problemi non era mai posta sotto forma di espressioni letterali, bensì con proposizioni discorsive e talvolta di ardua comprensione.

1. Consideriamo le parabole di equazioni $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$. Ponendo i loro vertici nell'origine di un sistema cartesiano xOy, abbiamo che il

punto di intersezione diverso dall'origine O è tale che

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{a} \\ \left(\dfrac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax \end{cases} \implies x^3 = 2a^3 \implies x = a\sqrt[3]{2}$$

cioè l'ascissa di tale punto corrisponde al lato del cubo di volume doppio, dato un cubo iniziale di lato a.

2. Consideriamo la parabola di equazione $y^2 = \dfrac{a}{2}x$ e l'iperbole di equazione $xy = a^2$. Anche in questo caso il punto d'intersezione delle due coniche ha come ascissa

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a^2}{x}\right)^2 = \dfrac{a}{2}x \\ y = \dfrac{a^2}{x} \end{cases} \implies 2a^3 = x^3 \implies x = a\sqrt[3]{2}\ .$$

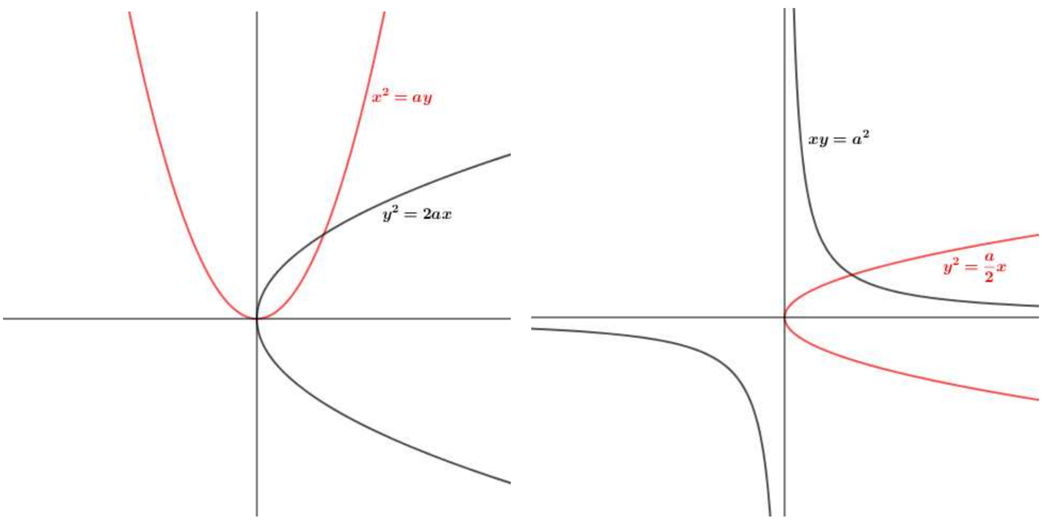


Figura 1.1: A sinistra la prima soluzione di Menecmo, a destra la seconda.

1.2 Apollonio di Perga

Contemporaneo di Menecmo fu Euclide di Alessandria (ca. 370 a.C. - ca. 280 a.C.) che nella sua opera magna *Gli Elementi*, più precisamente nel *Libro XI*, definisce il cono, solido geometrico dal quale derivano le sezioni in analisi.

> *Cono è, quando stando fermo un solo lato di quelli attorno all'angolo retto di un triangolo rettangolo, il triangolo ruotato torna di nuovo nello stesso luogo da cui aveva iniziato a muoversi, la figura circondata. E, se la retta che rimane ferma è uguale alla restante, quella che ruota intorno all'angolo retto, il cono sarà rettangolo; se minore, ottusangolo; e se maggiore, acutangolo.*

Per Euclide, ma anche per Archimede di Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.) e per Aristeo il Vecchio (ca. 370 a.C. - ca. 300 a.C.), le sezioni coniche erano il risultato dell'intersezione tra piani perpendicolari all'ipotenusa del triangolo rettangolo che genera il cono e il cono stesso: se il cono è rettangolo si ottiene una parabola (detta *ortoma*), se acutangolo un'ellisse (detta *ossitoma*) e infine con un cono ottusangolo si ottiene un ramo di iperbole (detto *amblitoma*).

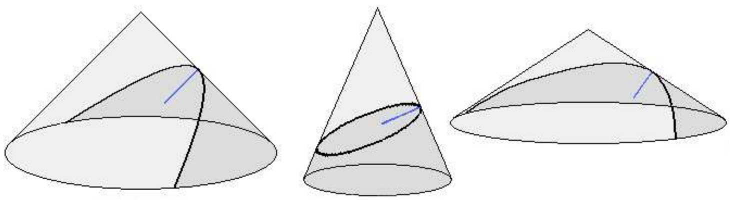


Figura 1.2: Da sinistra verso destra, *ortoma*, *ossitoma* e *amblitoma*

FRANCISCI MAVROLYCI
MESSANENSIS
EMENDATIO, ET RESTITVTIO
CONICORVM
APOLLONII PERGAEI
AD ILLVSTRISS. SENATVM
MESSANENSEM.
MESSANAE,
Typis Haeredum Petri Breae. MDCLIIII.
Superiorum Permissu.

Francesco Maurolico, *Conica*, 1654

Successivo ad Euclide fu invece Apollonio di Perga (ca. 262 a.C. - ca. 190 a.C.), matematico e astronomo greco. Il suo capolavoro, le *Coniche*, è stato l'opera di riferimento in questo ambito per più di 1500 anni, al pari de *Gli Elementi* di Euclide per la geometria sintetica.
A differenza di quanto facevano i matematici prima di lui, Apollonio genialmente non fa variare il tipo di cono per ottenere le sue sezioni, bensì varia l'inclinazione del piano che taglia l'ipotenusa del triangolo che lo genera. Inoltre dà un'ulteriore generalizzazione quando dimostra che non è necessario un cono retto, ma questo può essere anche circolare obliquo. Apollonio, infine, perfezionò ulteriormente la trattazione sulle antiche curve, introducendo una prospettiva più moderna e sostituendo il cono a una singola falda con un cono a doppia falda. In effetti, Apollonio fornì la stessa definizione di cono circolare che utilizziamo oggi:

Se una retta, prolungata all'infinito e passante sempre per un punto fisso, viene fatta ruotare lungo una circonferenza di un cerchio che non si trova nello stesso piano del punto in modo da passare successivamente attraverso ogni punto di quella circonferenza, la retta rotante traccerà la superficie di un cono doppio.

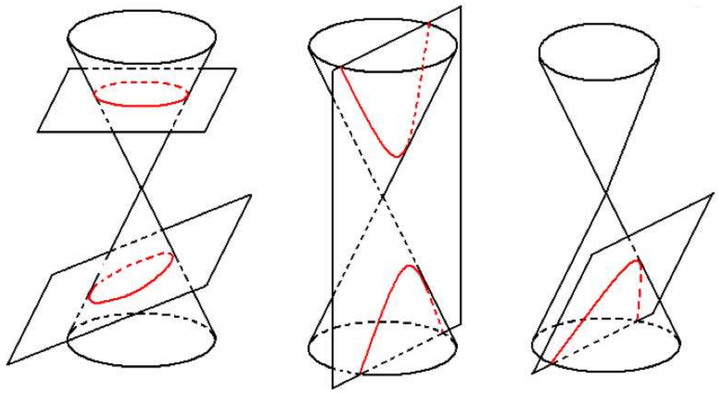


Figura 1.3: Cono a doppia falda di Apollonio

Questo cambiamento rese l'iperbole la curva a due rami che oggi conosciamo, sebbene nell'antichità i matematici fossero più propensi a considerare due iperboli, piuttosto che un'iperbole unica con due rami. Ad Apollonio si deve l'introduzione dei termini "ellisse", "parabola" e "iperbole" per indicare le sezioni coniche che tuttora portano questi nomi.

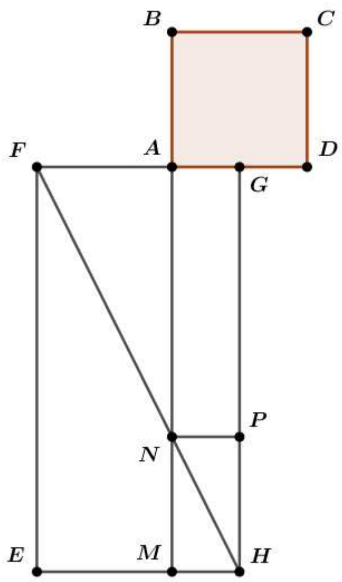


Figura 1.4

Di seguito analizziamo come Apollonio abbia "derivato" quelle che oggi chiameremo le equazioni di un'ellisse (in modo simile si trovano quelle di un'iperbole).
Consideriamo il quadrato $ABCD$ di lato y e sia $EFGH$ un rettangolo di area maggiore al quadrato, di lati $\overline{EF} = a$ e $\overline{FG} = b$, come sono rappresentati nella figura 1.4. Vogliamo cercare un rettangolo $AGHM$, con $\overline{AG} = x$ tale che, diminuito del rettangolo $PHMN$, simile a $EFGH$, otteniamo il rettangolo $AGPN$ equiesteso al quadrato $ABCD$. Per

similitudine vale

$$\overline{NM} : \overline{MH} = \overline{EF} : \overline{EH} \implies \overline{NM} = \frac{x \cdot a}{b}$$

Ma allora il rettangolo $AGPN$ ha area

$$y^2 = \overline{AB}^2 = \overline{AG} \cdot \overline{GH} - \overline{AG} \cdot \overline{NM} = x \cdot a - x \cdot \frac{x \cdot a}{b}$$

e per l'appunto otteniamo l'equazione di un'ellisse

$$y^2 = ax - \frac{a}{b}x^2$$

Questo procedimento evidenzia il carattere costruttivo che aveva nella concezione greca l'ellisse, mentre oggi, anche grazie al netto passaggio alla geometria analitica, la si pensa come curva, oggetto in sé.

L'opera magna di Apollonio consta di otto volumi e solo i primi sette sono pervenuti fino a noi, anche grazie al lavoro di traduzione di matematici postumi. È degno di nota menzionare l'importanza degli studi presenti nel *Libro V*. Questa sezione de *Le Coniche* tratta il problema geometrico dei segmenti massimi e minimi che possono essere tracciati rispetto ad una conica; riportando le parole del matematico Carl B. Boyer nel suo libro *Storia della Matematica*, "vale la pena sottolineare che quanto allora era semplicemente una bella teoria, senza alcuna prospettiva di possibile applicazione alla scienza o all'ingegneria del tempo, in seguito ha assunto un'importanza fondamentale in campi quali la dinamica terrestre e la meccanica celeste". I teoremi e le proposizioni sui massimi e minimi trattano problemi sulle tangenti e sulle normali alle sezioni coniche; senza questi risultati che per Apollonio erano meramente teorici, matematici del calibro di Newton probabilmente non sarebbero riusciti a derivare le loro teorie e senza di esse molte conseguenze "pratiche" non sarebbero state possibili.

Un importante teorema, scritto in chiave moderna e rappresentato in figura 1.5, presente nel *Libro V* è il seguente:

> *Sia V il vertice di una parabola di equazione $y^2 = 2px$ e sia A un punto sull'asse di simmetria della parabola tale che $VA > p$. Sia poi N un punto compreso tra V e A tale che $NA = p$ e si tracci perpendicolarmente all'asse il segmento NP che incontra la parabola in P. Allora PA è la retta minima da A alla curva e pertanto è normale alla parabola nel punto P.*

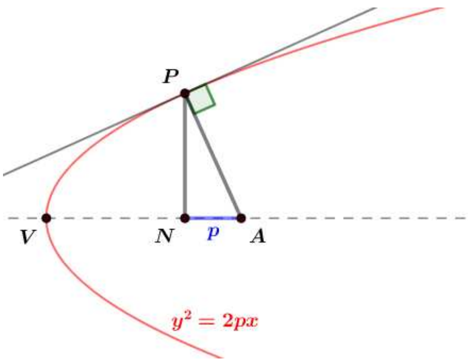


Figura 1.5

La dimostrazione che Apollonio propone è una dimostrazione indiretta, cioè dimostra che preso un punto P' qualsiasi della parabola, il segmento $P'A$ cresce man mano che si allontana da P. Le dimostrazioni successive cercano le normali ad ellissi ed iperboli e il matematico greco arriva a formulare criteri che permettono di stabilire quante normali, e quindi quante tangenti, si possono tracciare da un punto dato ad una sezione conica.

Degna di menzione infine è la *Proposizione 11* del *Libro VI* che dimostra come tutte le parabole siano simili.

La vastità e l'importanza del trattato di Apollonio suscitano sorpresa quando si notano alcune omissioni che appaiono, ai nostri occhi, come fondamentali. Nei manuali moderni, i fuochi delle coniche svolgono un ruolo di primo piano, ma il matematico greco non aveva termini specifici per descriverli e alludeva a essi in modo indiretto. È probabile che avesse una comprensione delle proprietà delle curve relative a fuochi e direttici, ma il testo delle *Coniche* non menziona questi concetti. Inoltre nell'antica trattazione delle sezioni coniche mancava il concetto numerico di eccentricità; anche se il fuoco della parabola emerge implicitamente in vari teoremi di Apollonio, non è chiaro se l'autore comprendesse appieno il ruolo della direttrice, come lo intendiamo oggi. È possibile che queste lacune fossero dovute al fatto che tali concetti fossero già trattati in opere andate perdute, scritte dallo stesso Apollonio o da altri autori. La perdita di una parte significativa della matematica antica rende purtroppo qualsiasi argomentazione su questo tema intrinsecamente incerta.

1.3 Il XVII secolo in Francia

Dopo Apollonio di Perga pochi altri matematici affrontarono ampiamente il tema delle sezioni coniche e in pochi diedero contributi importanti in tali studi. Vale la pena citare il matematico persiano Omar Khayyam (ca. 1050 - 1122) che era sulla retta via per definire uno stretto legame tra l'algebra e la geometria e che solo Cartesio cinquecento anni dopo riuscì a completare. Come già fecero altri matematici prima di lui, tra cui il greco Menecmo, nella sua vita Khayaam studiò come sfruttare le coniche per risolvere equazioni di secondo e terzo grado, arrivando a generalizzare questo metodo risolutivo per tutte le equazioni di terzo grado. Famose le sue parole:

> *Chiunque pensi che l'algebra sia uno stratagemma per conoscere ciò che non si sa, ha un'idea sbagliata di essa. Non si dovrebbe fare alcuna attenzione al fatto che l'algebra e la geometria presentano un aspetto così diverso. L'algebra non è altro che la dimostrazione di fatti geometrici.*

Verso la fine del XVII secolo René Descartes (in italiano Cartesio, 1596-1650) irruppe nel mondo matematico ricollegandosi alla tradizione, differentemente da quanto fece con la sua filosofia e la scienza cartesiane, rivoluzionarie nella loro rottura con il passato. La riconnessione col passato può essere attribuita all'eredità umanistica, che cercava di riscoprire una presunta "età dell'oro" del sapere. Questo potrebbe spiegare la convinzione naturale che la matematica presenta un progresso più continuo e con maggiori conseguenze rispetto ad altri campi del sapere, in cui spesso le nuove idee sostituiscono quelle precedenti.
L'elaborazione dei fondamenti della geometria analitica da parte di Descartes rappresentò un tentativo di ritorno al passato attraverso però una nuova prospettiva. Innumerevoli i suoi successi in aritmetica e geometria, tra i quali citiamo la formula di Eulero per i poliedri, che cela una storia rocambolesca; nel 1987 infatti il sacerdote e matematico francese Pierre Costabel scoprì che Leibniz (matematico vissuto nella seconda metà del XVII secolo) era riuscito a svelare la formula generale dei poliedri, ma era stata scoperta e descritta per la prima volta da Descartes e dimostrata solo all'inizio del 1800 da Cauchy. Descartes formulò progressi giganteschi e la direzione dei suoi pensieri verso il 1628, evidenziata da una lettera a un amico olandese, indicava la formulazione di una regola per la costruzione delle radici di equazioni di terzo o quarto grado mediante una parabola.


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Auec Priuilege.

Figura 1.6

Il trattato con cui Descartes fece conoscere ai suoi contemporanei i principi della sua geometria analitica fu *La géometrie*, una delle appendici del *Discours de la méthode*, la sua opera più importante in cui illustra il suo metodo filosofico. Lo scopo della geometria per Descartes era diverso dall'attuale scopo della geometria analitica; infatti, come esposto nelle prime righe del trattatello:

> *Tutti i problemi della geometria si possono facilmente ridurre a tali termini, che in seguito per costruirli basta conoscere la lunghezza di alcune rette.*

L'asserto "*lunghezza di una retta*" ci suggerisce che Descartes non considera tali enti geometrici come infiniti, rievocando un concetto di retta proprio di Euclide. Il concetto di retta non nasconde per il matematico francese un infinito attuale, e anzi, egli si schiera contro tale concetto, scrivendo nei *Principia Philophiae*:

> *...mai ci affaticheremo in discussioni intorno all'infinito. Infatti, dato che siamo finiti, sarebbe assurdo che noi stabilissimo alcunché su tale argomento e tentassimo in tal modo quasi di renderlo finito e impadronircene.*

In realtà sappiamo che la concezione di retta, una volta messa in corrispondenza biunivoca con un'equazione, che è proprio quello che Descartes fa con la sua geometria cartesiana, nasconde un concetto di infinito attuale, in quanto sono infiniti i punti che verificano l'equazione. Tuttavia, egli non discute di ciò a causa della natura finita dell'uomo, più nello specifico della mente umana, e lascia la discussione sull'argomento a *quelli che ritengono la propria mente infinita*.
Nei primi libri de *La géométrie* Descartes risolse alcuni problemi di costruzione; tuttavia, queste dimostrazioni passano in secondo piano rispetto alla tecnica risolutiva impiegata. Nella sua opera infatti non è importante la quantità e la qualità dei risultati dimostrati, ma il metodo utilizzato per farlo. La ricerca a cui mirava Descartes ha come scopo non solo la geometria in sé, ma anche quello di creare, grazie all'ausilio della matematica, uno strumento per descrivere la realtà del mondo fisico e meccanico.
Nel *Libro III* de *La géométrie* Descartes dimostra come determinare due medi proporzionali da inserire tra due assegnati valori a e b, procedimento applicabile per la risoluzione del *Problema di Delo*. Il ragionamento è il seguente: se x e y sono due medi proporzionali tra a e b, allora

$$a : x = x : y = y : b$$

da cui ricaviamo che $x^2 = ay$, $y^2 = bx$ e $xy = ab$. Se ora isoliamo y dalla prima equazione, otteniamo $y = x^2/a$ e, sostituendola nella terza, ricaviamo l'equazione della cubica $x^3 = a^2b$. In conclusione, Descartes descrive il procedimento analitico per determinare x e $y = x^2/a$ come intersezione di due parabole oppure come intersezione di una parabola e un'iperbole.
Con questo processo risolutivo, per la prima volta nella storia della matematica, in particolare della geometria, vengono superati i vecchi canoni greci, legati alla rigida costruibilità, necessari per ammettere l'esistenza stessa di una curva in ambito matematico. Con Descartes nasce infatti la possibilità di esprimere la curva in questione mediante un'equazione algebrica in due

coordinate piuttosto che solo per costruzione. Come afferma lo storico della matematica Morris Kline

> *La geometria delle coordinate cambiò faccia alla matematica. Affermando che una curva è un qualsiasi luogo descrivibile con un'equazione algebrica, Descartes ampliò enormemente in un solo colpo il dominio della matematica. Quando si considera la grande varietà di curve che hanno finito per essere accettate e usate dalla matematica e la si paragona con quelle che avevano accettato i Greci, ci si rende conto di quanto sia stato importante spazzar via le barriere erette dai Greci.*

La grandezza di Descartes sta nella sua consapevolezza di aver riassunto col suo metodo due scienze, la geometria e l'algebra, riconducendo la prima alla seconda e viceversa. Nel *Discours de la méthode* del 1637 afferma:

> *Non cercai di apprendere tutte quelle scienze particolari che sono di solito chiamate matematiche; e vedendo che, sebbene i loro oggetti siano diversi, essi tendono ad accordarsi tra loro, pensai che fosse meglio che io esaminassi soltanto queste proporzioni in generale e senza immaginarle se non nei soggetti che servissero a rendermene più agevole la conoscenza, sia pure senza limitarle a questi in alcun modo, al fine di poterle poi tanto meglio applicare a tutti gli altri a cui esse si potessero adattare.*

La prospettiva di Descartes supera notevolmente quella di un tecnico orientato a raggiungere risultati specifici. Dimostra di possedere la dimensione più elevata e profonda della speculazione matematica: la consapevolezza filosofica di chi controlla sia il metodo tecnico che il suo significato più profondo. Per Descartes, la matematica non è semplicemente un algoritmo astratto o una mera applicazione; è piuttosto un'idealità pura e reale. Per fare un paragone, come Galilei contribuisce a fondare e arricchire la scienza della natura, Descartes ne approfondisce e manifesta la vera natura scientifica.

Contemporaneo di Descartes fu Pierre de Fermat (1601-1665), altro matematico di spicco del XVII secolo. Fermat pubblicò pochissimi lavori durante la sua vita, perciò, sebbene il suo contributo sia risultato fondamentale per la geometria analitica ed egli sia riuscito a comprendere prima di Descartes le potenzialità della sintetizzazione algebrica della geometria, la paternità della geometria delle coordinate viene assegnata proprio a quest'ultimo.
Fermat si entusiasmò dell'opera di Apollonio di Perga e nel suo trattato *Ad locos planos et solidos isagoge* egli si dedicò allo studio generale dei luoghi.

All'epoca si consideravano rette e circonferenze *luoghi piani*, mentre tutte le sezioni ottenute dall'intersezione di un piano con un cono erano chiamate *luoghi solidi*. Anche se Fermat disponeva del formalismo algebrico e della geometria analitica, la sua ricerca era molto simile a quella dei geometri greci; infatti i suoi studi si mantennero sempre particolarmente vicini allo spirito della ricerca di Apollonio, al contrario del metodo di Descartes che voleva superare i metodi della matematica antica.
A fianco di Descartes, Fermat viene ricordato come uno dei progenitori della geometria analitica perché egli individua per primo il dualismo equazione-luogo (inteso come retta o curva); infatti, nell'impresa di ricostruire l'opera perduta di Apollonio *Luoghi piani*, studiando l'opera di Pappo *Collezione matematica*, nel 1636, un anno prima della pubblicazione de *La géométrie* di Descartes, Fermat enunciò il principio fondamentale della geometria analitica:

> *Ogniqualvolta in un'equazione* finale *compaiono due quantità incognite si ha un luogo, l'estremità dell'una descrivendo una linea retta o curva.*

Il punto di vista di Fermat era diverso da quello di Descartes: il primo aveva come obiettivo quello di delineare soluzioni di equazioni indeterminate, mentre Descartes si occupava della costruzione geometrica di radici di equazioni algebriche determinate. Così, Fermat mostrò che l'equazione $xy = k^2$ raffigura un'iperbole e l'equazione $xy + a^2 = bx + cy$ può essere ricondotta alla prima equazione tramite una traslazione degli assi del sistema di coordinate. L'equazione $x^2 = y^2$ rappresentava per Fermat una retta, perché egli considerava solo il primo quadrante di un "moderno" sistema cartesiano. Poi dimostrò che l'equazione $a^2 \pm x^2 = by$ rappresenta una parabola, mentre $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ rappresenta un cerchio e infine le equazioni $a^2 - x^2 = ky^2$ e $a^2 + x^2 = ky^2$ rappresentano rispettivamente un'ellisse e un'iperbole. Come epilogo del suo trattato troviamo la seguente proposizione:

> *Siano date in un piano quante si vogliano rette e si conducano ad esse da un punto altrettante rette formanti con le date angoli assegnati: se la somma dei quadrati di queste rette è uguale a un'area data, il luogo geometrico di quel punto è un determinato luogo solido* (cioè una conica).

Per concludere, in appendice Fermat aggiunse un capitolo in cui evidenzia come determinate equazioni di terzo e quarto grado possono essere risolte per mezzo di coniche, argomento dominante ne *La géométrie* di Descartes.
L'evoluzione della geometria analitica attraverso i secoli è stata segnata da

notevoli contributi, dai primi studi di Apollonio di Perga fino alle fondamentali opere di Descartes e Fermat: Apollonio aprì la strada allo studio delle sezioni coniche, Descartes, con la sua geometria analitica, riconciliò l'algebra con la geometria, e Fermat stabilì che equazioni di secondo grado del tipo $f(x, y) = 0$ raffigurano curve nel piano xy. Questa evoluzione non solo ampliò il dominio della matematica, ma presentò nuove possibilità nella comprensione matematica del mondo fisico e meccanico.

Capitolo 2

L'insegnamento della matematica nella scuola secondaria

La matematica è una disciplina che sfida continuamente le nostre aspettative e le nostre intuizioni. Ma perché la matematica è così importante per la società attuale? La risposta più naturale, ma anche più banale, è che è utile. La matematica infatti risulta essere una chiave di volta fondamentale per comprendere il mondo che ci circonda e per sviluppare una vasta gamma di competenze. Attraverso la matematica, siamo in grado di analizzare e interpretare fenomeni complessi, contribuendo così alla nostra comprensione del mondo fisico; d'altra parte, la matematica è *il linguaggio in cui è scritto il gran libro della natura*[*].

L'importanza della matematica va oltre la sua mera utilità pratica. Lo studio della matematica ad esempio incentiva lo sviluppo del pensiero critico e delle capacità di risoluzione dei problemi. Un approccio logico come quello richiesto dalla matematica contribuisce alla formazione di competenze analitiche che risultano utili e applicabili in vari contesti della vita quotidiana, motivo per cui è in mutabile e repentino cambiamento. Come sottolinea Ian Stewart, matematico e scrittore britannico contemporaneo:

> *La matematica [...] è quello che non vi aspettate che sia, vi voltate un attimo ed è già cambiata.*[†]

Altre competenze acquisite nello studio della matematica, come la capacità di risolvere problemi, la precisione, il pensiero creativo e la capacità di gestione del tempo, sono trasferibili in molte altre discipline e rientrano in quelle che prendono il nome di competenze trasversali.

---

[*] Galileo Galilei, "*Il saggiatore*"

[†] Ian Stewart, *"A cosa serve la matematica? L'irragionevole efficacia di una disciplina"*, Einaudi, 2022

La matematica costituisce in aggiunta un fondamentale alleato nell'analisi dei dati e nella formulazione di decisioni informate. Questa competenza riveste un ruolo cruciale in settori quali l'economia, la finanza e il management aziendale. L'abilità di applicare concetti matematici nella valutazione di informazioni contribuisce significativamente all'efficacia delle decisioni prese in ambiti complessi e dinamici.
Infine la matematica è una lingua universale che supera le barriere culturali e linguistiche. Essa è una forma di espressione umana che ha radici profonde nella storia di diverse civiltà e contribuisce così a creare un profondo legame tra le persone.

La definizione di matematica potrebbe variare notevolmente tra gli studenti delle scuole superiori e quelli universitari, riflettendo quindi il livello di complessità e di approfondimento delle conoscenze matematiche e il modo in cui questa viene insegnata. Il più delle volte, in un contesto scolastico, l'insegnamento della matematica si concentra su un insieme di nozioni di base, assiomi, definizioni e regole: obiettivo dell'insegnante è quello di fornire il maggior numero di concetti nel più breve tempo possibile.
La matematica si basa, di fatto, sull'equilibrio tra astrazione ed applicazione. Puntare solo sull'astrazione rende la matematica sterile e noiosa; dall'altro punto di vista, una matematica solo diretta alle applicazioni fa perdere in creatività ed innovazione. Per un insegnante risulta fondamentale saper coniugare questi due aspetti.
Infine un altro aspetto cruciale dell'insegnamento della materia è che è l'unica disciplina in cui non si ripete alla lettera quanto appreso nei cicli di studio precedenti: le conoscenze acquisite nella scuola primaria vengono poi utilizzate nella scuola secondaria di primo grado e, in seguito, utilizzate nella scuola secondaria di secondo grado. Questo a volte produce lacune profonde, che come conseguenza ultima portano ad un disamore nei confronti della materia, spesso vista come ostile e complessa.

Art. 33, Costituzione Italiana
L'arte e la scienza sono libere e libero ne è l'insegnamento.
La Repubblica detta le norme generali sull'istruzione ed istituisce scuole statali per tutti gli ordini e gradi.

L'istruzione in Italia è regolata dal Ministero dell'Istruzione e del Merito e dal Ministero dell'Università e della Ricerca con modalità diverse a seconda della forma giuridica (scuole pubbliche, scuole paritarie, scuole private). L'obbligo scolastico dura 10 anni e riguarda la fascia di età compresa tra 6 e 16 anni. Attualmente il sistema educativo è suddiviso in questo modo:

- sistema integrato zero-sei anni, non obbligatorio, della durata complessiva di 6 anni;
- primo ciclo di istruzione, obbligatorio, della durata complessiva di 8 anni, suddiviso in: scuola primaria (5 anni) e in scuola secondaria di primo grado (3 anni);
- secondo ciclo di istruzione, articolato in due tipologie di percorsi: scuola secondaria di secondo grado (5 anni) o percorsi di istruzione e formazione professionale (3 o 4 anni);
- una volta completato con successo l'iter di scuola secondaria superiore, gli studenti possono accedere all'università e frequentare corsi di laurea triennale (3 anni), magistrale (2 anni) o a ciclo unico (corsi che conducono direttamente alla laurea magistrale della durata di 5 o 6 anni).

Questa struttura garantisce un livello di apprendimento comune fino al termine della scuola dell'obbligo, che è fondamentale per assicurare una base educativa solida. Successivamente, offre agli studenti la flessibilità di scegliere percorsi educativi personalizzati che rispecchino i loro interessi, talenti e aspirazioni future.

2.1 Indicazioni nazionali

L'articolo 1 del Decreto del Presidente della Repubblica (D.P.R.) n. 89/2009 ha stabilito che, per un periodo non superiore a tre anni scolastici a partire dall'anno scolastico 2009-2010, sarebbero state applicate le Indicazioni Nazionali, come definite negli allegati da A a D del Decreto Legislativo n. 59/2004, aggiornate successivamente dalle Indicazioni per il Curricolo, come specificate nel Decreto Ministeriale del 31 luglio 2007. Le Indicazioni Nazionali forniscono una guida dettagliata sulle conoscenze, abilità e competenze che gli studenti dovrebbero acquisire al termine di ciascuna fase dell'istruzione.
Per le scuole secondarie di primo grado, queste *Indicazioni* stabiliscono in modo approfondito e dettagliato il profilo delle competenze attese al termine del primo ciclo di istruzione. Gli obiettivi di apprendimento per tutte le discipline, inclusa la matematica, sono definiti in continuità con gli obiettivi stabiliti per la scuola primaria e per l'infanzia (anche se quest'ultima non è una scuola dell'obbligo, viene comunque inclusa nel documento). Nel profilo tracciato, vengono richiamate competenze trasversali, ovvero quelle abilità e conoscenze che dovrebbero essere sviluppate attraverso il contributo di

diverse discipline. La matematica, in questo contesto, svolge un ruolo cruciale nel promuovere abilità di ragionamento, risoluzione di problemi e pensiero critico. In particolar modo, come viene riportato:

> Lo studente è in grado di iniziare ad affrontare in autonomia e con responsabilità le situazioni di vita tipiche della propria età, riflettendo ed esprimendo la propria personalità in tutte le sue dimensioni.

Nella parte invece di competenze più specifiche, per la matematica si richiede che :

> Le sue conoscenze matematiche e scientifico-tecnologiche gli consentono di analizzare dati e fatti della realtà e di verificare l'attendibilità delle analisi quantitative e statistiche proposte da altri. Il possesso di un pensiero razionale gli consente di affrontare problemi e situazioni sulla base di elementi certi e di avere consapevolezza dei limiti delle affermazioni che riguardano questioni complesse che non si prestano a spiegazioni univoche.

Tali richieste, di fatto, sono in linea con la definizione di competenza matematica contenuta nella Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006, documento che inserisce la competenza matematica tra le 8 competenze chiave per la cittadinanza attiva.
Cosa rende quindi davvero innovativo il concetto di Indicazioni Nazionali? Vi sono principalmente due aspetti chiave: il primo riguarda la definizione dei traguardi per competenza e l'esplicita affermazione che tali traguardi abbiano una priorità gerarchica rispetto agli obiettivi di apprendimento.
Il secondo aspetto distintivo, che le differenzia dai vecchi programmi ministeriali, è l'attenzione al fattore tempo: i traguardi e gli obiettivi sono stabiliti su un arco temporale più ampio, permettendo quindi di modellare i percorsi didattici in base alle esigenze specifiche della classe e del contesto educativo.
Dal punto di vista normativo quindi le Indicazioni Nazionali rappresentano una significativa evoluzione rispetto alla concezione tradizionale dei programmi scolastici, fornendo maggiore flessibilità e adattabilità nell'insegnamento, consentendo agli insegnanti di personalizzare i percorsi di apprendimento in modo efficace e su misura per ogni classe.
Le Indicazioni Nazionali per il primo ciclo rappresentano un documento unificato che guida l'insegnamento della matematica fino ai quattordici anni, fornendo una struttura coerente e standardizzata per l'istruzione matematica durante questo periodo. Lo stesso non si può dire del quadro per la scuola secondaria di secondo grado, che invece è notevolmente più variegato e complesso. Il secondo ciclo di istruzione è attualmente suddiviso in:

- Licei, suddivisi in sei categorie: artistico, classico, linguistico, musicale e coreutico, scientifico, delle scienze umane. A loro volta, alcuni tra questi, hanno più indirizzi.
- Istituti Tecnici, che sono principalmente di due tipi e ognuno dei quali con diversi indirizzi: settore economico e settore tecnologico.
- Istituti Professionali, che sono di due tipi e ognuno dei quali con diversi indirizzi: settore industria e artigianato, settore servizi.

Già da questa frammentazione, si percepisce come il quadro sia molto più complesso rispetto al primo ciclo. Naturalmente, anche i documenti di riferimento sono distinti: ci sono le *Indicazioni Nazionali per i Licei* (MIUR, 2010a), le *Linee guida per gli Istituti Tecnici* (MIUR, 2010b) e le *Linee guida per gli Istituti Professionali* (MIUR, 2010c). Seppur differenti, tutti e tre i documenti declinano gli obiettivi differenziandoli per il primo biennio, il secondo biennio e per il quinto anno della scuola secondaria di primo grado.
Gli obiettivi matematici sono distinti rispetto al primo ciclo e specifici. Essi sono:

- Aritmetica e algebra;
- Geometria;
- Relazioni e funzioni;
- Dati e previsioni;
- Elementi di informatica (previsti solo nel primo biennio dei licei).

La scelta di riferirsi ai nomi degli ambiti con i nomi di *oggetti matematici*, piuttosto che teorie, sembra quasi voler valorizzare gli oggetti con cui gli alunni devono far esperienza.

2.2 Le Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici (2010)

Le indicazioni per il liceo scientifico si differenziano naturalmente dalle altre tipologie di liceo; la parte introduttiva di queste indicazioni è pressoché identica per tutti i licei, ma la differenza principale risiede nel ruolo fondamentale e nel valore attribuito alla matematica.
Per quanto riguarda i Licei scientifici, si enfatizza che:

> *L'approfondimento degli aspetti tecnici, sebbene maggiore nel liceo scientifico che in altri licei, non perderà mai di vista l'obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina*[‡]

Inoltre, in particolare, si sottolinea l'importanza del valore culturale della matematica, considerandola come un prodotto del pensiero umano che si è sviluppato nel corso del tempo. Questa prospettiva mette in evidenza il ruolo cruciale che la matematica ha svolto nella storia della conoscenza umana e nella costruzione della cultura, aspetto che spesso e volentieri si lascia ad un approfondimento autonomo dello studente. Per la geometria nello specifico, l'oggetto matematico su cui verte la presente trattazione, si delineano i seguenti obiettivi specifici di apprendimento.

PRIMO BIENNIO
Geometria
Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli *Elementi* di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica. Al teorema di Pitagora sarà dedicata una particolare attenzione affinché ne siano compresi sia gli aspetti geometrici che le implicazioni nella teoria dei numeri (introduzione dei numeri irrazionali) insistendo soprattutto sugli aspetti concettuali. Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti. Lo studente apprenderà i principi matematici di base coinvolti nelle diverse tecniche di rappresentazione delle figure dello spazio e le relazioni tra di essi e le tecniche in uso nelle discipline grafiche e geometriche. Studierà i problemi di rappresentazione delle figure quali si presentano nel contesto artistico. La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria. Lo studente apprenderà a far uso del metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitato alla rappresentazione di punti e rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità. L'intervento dell'algebra nella rappresentazione

[‡]MIUR, 2010A, p.339

degli oggetti geometrici non sarà disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica.

SECONDO BIENNIO
Geometria
Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria. Studierà le proprietà della circonferenza e del cerchio e il problema della determinazione dell'area del cerchio. Apprenderà le definizioni e le proprietà e relazioni elementari delle funzioni circolari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica. Studierà alcuni esempi significativi di luogo geometrico. Affronterà l'estensione allo spazio di alcuni temi e di alcune tecniche della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, studierà le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità. Lo studente apprenderà i fondamenti matematici della prospettiva e approfondirà le relazioni tra le conoscenze acquisite in ambito geometrico e le problematiche di rappresentazione figurativa e artistica.

QUINTO ANNO
Geometria
Lo studente apprenderà i primi elementi di geometria analitica dello spazio e la rappresentazione analitica di rette, piani e sfere, nonché le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri).

2.3 I valori dell'insegnamento della matematica

L'insegnamento della matematica, come sottolineato da Federigo Enriques (1871-1946), eminente rappresentante della Scuola Italiana di Geometria Algebrica, nonché filosofo e storico del pensiero scientifico, riveste un ruolo essenziale nella formazione del cittadino del futuro. Non solo fornisce gli strumenti per interpretare la realtà e affrontare le sue sfide, ma assume altresì un ruolo vitale nella sfera culturale che gli è affidata.
Secondo Enriques, l'educazione matematica contribuisce in modo significativo alla formazione generale dello spirito, collaborando allo sviluppo delle capacità critiche e dell'attitudine alla ricerca. In questo contesto, il sapere scientifico non può essere trascurato in nessun tipo di percorso formativo.

Questa dualità di prospettive arricchisce la prassi didattica: da un lato, anche in un ambito di studi prevalentemente tecnico-professionale, è possibile stimolare l'interesse degli studenti per concetti e teorie astratte, allenando le loro menti a riconoscerne la bellezza e l'utilità nella risoluzione di problemi concreti. Dall'altro lato, nemmeno in un contesto come il liceo classico o artistico si possono trascurare le applicazioni pratiche della matematica; anzi, è dovere del docente ricordare agli studenti che la vita industriale ed economica delle società civili è dominata da principi matematici.
In tale ottica, la matematica, vista nei suoi risvolti strumentali, perde l'immagine di disciplina arida e ostica, diventando un soggetto di ampio interesse e fondamentale importanza. Di conseguenza, sia l'insegnamento che la ricerca rivendicano la propria libertà di costruire e trasmettere conoscenze che possono non essere necessariamente e immediatamente spendibili, contribuendo così a una formazione completa e arricchente.

2.4 Linee guida per le discipline STEM

Le Linee guida emanate ai sensi dell'articolo 1, comma 552, lettera a) della legge 197 del 29 dicembre 2022, hanno come obiettivo principale l'introduzione di azioni mirate per rafforzare lo sviluppo delle competenze matematico-scientifico-tecnologiche e digitali all'interno dei curricoli delle istituzioni scolastiche dell'infanzia, del primo e del secondo ciclo di istruzione. Queste azioni promuovono l'apprendimento delle discipline STEM, suggerendo l'utilizzo di metodologie didattiche innovative.
Le Linee guida rappresentano una concretizzazione della riforma prevista nel *PNRR - Piano nazionale di ripresa e resilienza* e contribuiscono in modo significativo al raggiungimento degli obiettivi dell'investimento denominato "Nuove competenze e nuovi linguaggi". L'obiettivo primario di questo investimento è lo sviluppo e il rafforzamento delle competenze STEM (Science, Technology, Engeenering, Mathematics), delle competenze digitali e delle competenze legate all'innovazione in tutti i cicli scolastici, con la finalità di *"sviluppare e rafforzare le competenze STEM, digitali e di innovazione in tutti i cicli scolastici, dall'asilo nido alla scuola secondaria di secondo grado, con l'obiettivo di incentivare le iscrizioni ai curricula STEM terziari, in particolare per le donne".*
L'approccio inter- e multidisciplinare, insieme alla fusione tra teoria e pratica, costituisce il fulcro dell'insegnamento delle discipline STEM. Questo approccio è particolarmente indicato per sviluppare negli allievi competenze tecniche e creative, essenziali in un mondo sempre più tecnologico e innovativo. Agli insegnanti vengono suggerite in particolar modo, tra le varie

possibili, metodologie quali l'apprendimento esperienziale, attraverso attività pratiche e laboratoriali, l'apprendimento cooperativo e l'utilizzo di risorse digitali interattive.

2.5 L'apprendimento della matematica

Tra le prime a sollevare la riflessione sui rischi di un apprendimento puramente verbale fu Emma Castelnuovo (1913-2014), insegnante e didatta della matematica italiana, che ha dato significativi contributi alla didattica della matematica, rivoluzionando completamente il modo di insegnare la materia (e in modo particolare la geometria euclidea).
Tale posizione si potrebbe riassumere nella seguente frase *"l'intuizione è costruzione e nessuna istruzione è vera ed educativa se non proviene dall'attività stessa dei fanciulli"*. Continuando con questa linea di pensiero, Castelnuovo enfatizza l'importanza di andare oltre le parole per poter riuscire a spiegare un concetto. Infatti, aggiunge anche *"Se un concetto è chiaro per me, ciò non significa che, con le parole, io lo possa rendere chiaro anche per te"*. Nella frase precedente l'autrice introduce un concetto fondamentale nella sua didattica della matematica che mostra il legame con la teoria socio-costruttivista e dell'attivismo didattico.
Per Castelnuovo i concetti matematici si sviluppano negli allievi mediante l'azione, la discussione tra pari e grazie all'utilizzo di artefatti fisici. Questa *base concreta* e *materiale*, come lei la descrive, è molto più espressiva di un disegno, perché le si può dare un carattere di mobilità.
L'avvento dei software di geometria dinamica (circa trent'anni fa) nei decenni successivi alla pubblicazione dei libri di Emma Castelnuovo, ha offerto un'altra possibilità, rispetto agli oggetti concreti che potevano essere utilizzati in passato.

2.6 Ambienti digitali per l'apprendimento della matematica

L'uso delle nuove tecnologie è ormai talmente diffuso nella vita quotidiana da diventare indispensabile come strumento di comunicazione e di rappresentazione. Per questo motivo possono essere sfruttate efficacemente nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica, tenendo sempre ben a mente anche i loro limiti, oltre alle immense potenzialità che offrono.
Quando utilizziamo ambienti digitali per l'apprendimento come insegnanti, è necessario aver chiari quali sono i nostri obiettivi didattici e, in particolar

modo, qual è l'apprendimento che intendiamo promuovere proponendo l'uso di quel particolare ambiente. Se il nostro obiettivo è sviluppare un nuovo sapere matematico, dovremmo orientarci verso quelle applicazioni costruite per questo scopo. Per esempio, ambienti di geometria dinamica come *GeoGebra*[§] possono essere utilizzati per mediare concetti geometrici, la scoperta di teoremi, ma eventualmente anche l'equivalenza tra espressioni algebriche.
Alla base quindi dell'uso di un software dinamico in classe c'è il concetto di *laboratorio di matematica*, inteso non solo come un luogo fisico ma come ambiente di apprendimento coinvolgente, un insieme strutturato di attività finalizzate alla costruzione di significato degli oggetti matematici, in cui il ruolo del docente è centrale per agire sulle conoscenze, abilità e competenze degli allievi e sulla loro motivazione ad apprendere.
Questi elementi concorrono alla crescita delle competenze professionali dei docenti, legate specialmente alla capacità di riflettere sull'agire e alla capacità di intervenire con flessibilità nell'azione didattica finalizzata ad un apprendimento significativo della matematica, che aiuti gli studenti a sviluppare competenze matematiche adeguate alle richieste della società e delle linee guida per le materie STEM citate in precedenza.
Questo approccio quindi va oltre la staticità dei tradizionali metodi di insegnamento, incorporando elementi che coinvolgono attivamente gli studenti, promuovendo l'apprendimento attraverso l'azione e la partecipazione attiva, incoraggiandoli a esplorare concetti matematici attraverso attività pratiche, *problem solving* e interazioni dinamiche con gli strumenti didattici.
Attraverso questo approccio, gli studenti hanno accesso ad una comprensione più profonda e duratura rispetto all'apprendimento passivo, oltre che ad una personalizzazione dell'attività e, se necessario, consentendo all'insegnante di fornire più facilmente un apprendimento differenziato e personalizzato.
In più l'uso dello strumento dinamico da parte dello studente permette allo stesso di sviluppare anche competenze quali pensiero critico, l'imparare ad imparare, competenza digitale, capacità di *problem solving* e la collaborazione, che risultano competenze chiave per l'apprendimento permanente.

Tra i software dinamici più diffusi nel campo della matematica spiccano oggi *GeoGebra* e *Desmos*, con una netta prevalenza del primo; tuttavia esistono anche altre risorse e strumenti che offrono approcci unici e interattivi per insegnare e apprendere la matematica. Software di geometria e algebra computazionale come *Mathematica* hanno una presenza consolidata da decenni, così come software orientati alla programmazione per la risoluzione numerica di problemi ingegneristici, come *Matlab*. Tuttavia, la complessità e i costi ele-

[§]https://www.geogebra.org/classic?lang=it

vati delle licenze di tali software possono renderli meno accessibili alle scuole secondarie.
GeoGebra, al contrario, si distingue per essere un validissimo software, gratuito e sempre più diffuso a livello globale. I software di geometria dinamica trovano impiego non solo in matematica, ma anche in fisica, scienze sperimentali, economia e altro.
Nel contesto dell'insegnamento della matematica, è possibile individuare alcune linee guida principali basate sulle caratteristiche peculiari di questi software:

- Dinamicità: la possibilità di trascinare elementi per interagire con il modello.
- Misurazione: consente la misura di lunghezze di segmenti, ampiezze di angoli, aree di figure, volumi, etc.
- Traccia, luogo e animazione: permettono di visualizzare l'evoluzione dei modelli al variare di un parametro oppure nel tempo.
- Rappresentazione di funzioni: offre la possibilità di rappresentare e investigare grafici di funzioni a livello locale o globale.
- Integrazione di registri di rappresentazione diversi: consente di modellizzare situazioni problematiche integrando registri geometrici, analitici o numerici.

Questa integrazione di strumenti dinamici non solo può arricchire l'insegnamento della matematica, ma trova applicazioni anche in fisica, scienze sperimentali, economia e geografia, rendendo questi software risorse versatili e indispensabili nell'ambito dell'istruzione.
L'obiettivo è quindi quello di favorire l'adozione di una prassi didattica più dinamica e costruttiva, in cui il processo di acquisizione della conoscenza sia valorizzato in modo quasi pari al contenuto già appreso e in cui l'allievo ha un ruolo attivo.
Se guardiamo alla storia della scienza, diventa evidente che ciò che viene trasmesso rappresenta solo un momento e un frammento della vasta conoscenza umana. Pertanto diventa chiaro che il principale scopo dell'educazione non dovrebbe limitarsi a insegnare i risultati raggiunti dai grandi pensatori del passato, ma piuttosto a guidare gli studenti affinché possano ricrearli autonomamente. Questo processo deve essere sostenuto dalla consapevolezza che la verità non è intrinseca al pensiero, ma è il frutto di sforzi, tensioni, lotte e conquiste.

Un insegnante deve stimolare l’iniziativa e la creatività degli studenti, incoraggiare lo sviluppo del loro spirito osservativo oltre al ragionamento logico e guidarli nella formazione della propria personalità. Questo implica non solo fornire informazioni, ma anche chiedere attivamente la collaborazione degli studenti, creando un ambiente educativo in cui la reciprocità tra insegnante e studente sia fondamentale.

Capitolo 3

Il progetto didattico sperimentato in classe

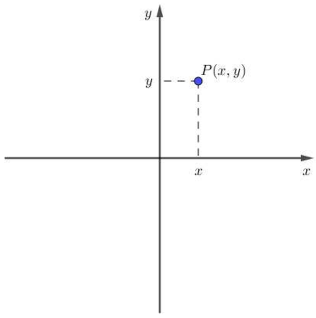
Il seguente progetto didattico integra lezioni frontali in classe con lezioni di tipo laboratoriale e ha come fine ultimo quello di migliorare l'apprendimento degli studenti, fornendo loro dei mezzi per padroneggiare ancor di più la matematica della scuola secondaria, nonché appassionandoli e motivandoli allo studio della stessa. L'acquisizione di competenze con l'ausilio di strumenti, al giorno d'oggi quasi sempre digitali, si realizza soprattutto partecipando ad attività sperimentali non solo in classe, ma anche in laboratorio. Inoltre le sessioni suggerite dal progetto sono state pensate per essere assegnate a piccoli gruppi di lavoro: grazie alle tecniche di *peer tutoring* e *cooperative learning* si favorisce infatti l'assimilazione del metodo sperimentale tipico delle materie STEM. L'adeguato utilizzo critico e ponderato degli strumenti tecnologici e informatici costituisce un supporto fondamentale per un apprendimento significativo. Questi strumenti, quando integrati nel processo educativo, favoriscono l'esecuzione di processi cognitivi quali l'indagine, l'esplorazione, la progettazione e la costruzione di modelli. Inoltre, stimolano gli studenti a riflettere e rielaborare le informazioni, contribuendo così alla costruzione collettiva di nuove conoscenze, abilità e competenze.
Le lezioni in aula e in laboratorio incentrate sul *problem solving* non possono tuttavia sostituire le consuete lezioni frontali guidate e proposte dal docente, specialmente a causa della complessità che gli argomenti nascondono il più delle volte. Ciononostante le lezioni frontali sono state talvolta precedenti le sessioni di laboratorio, altre volte si è optato per un primo approccio laboratoriale esplorativo e un seguente consolidamento con una lezione frontale. Sicuramente si è voluto dare spazio all'etereogeneità, peculiarità fondamentale per delle lezioni che siano il più possibile partecipate, coinvolgenti e motivanti; la motivazione è il motore dell'apprendimento.

Il progetto didattico è stato pensato per una classe terza di un Liceo Scientifico di Padova e verte attorno agli argomenti di geometria analitica del secondo biennio. È perciò richiesta una buona preparazione sugli argomenti di piano cartesiano del primo biennio, così da poterli integrare opportunamente con il concetto di vettore ed infine affrontare l'argomento centrale della geometria analitica: lo studio delle coniche.
Seguono una descrizione dettagliata del programma didattico svolto in classe e le schede di laboratorio.

3.1 Punti, segmenti e vettori nel piano cartesiano

Definizione. *Un piano fornito di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale prende il nome di* ***piano cartesiano*** *e ogni suo punto viene identificato con una coppia di valori reali* (x, y)*, detti* ***coordinate*** *del punto, in particolare* x *si chiama* ***ascissa****, mentre* y *si chiama* ***ordinata****.*
In linguaggio insiemistico, $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

Questa corrispondenza biunivoca tra punti del piano e coppie di numeri reali è il fondamento della geometria cartesiana, che permette di passare dalla geometria sintetica all'algebra e viceversa.



Il piano cartesiano

Definizione.

1. *La* ***distanza tra due punti*** $A(x_1, y_1)$ *e* $B(x_1, y_2)$ *aventi la stessa ascissa è uguale al modulo della differenza delle ordinate, cioè* $\overline{AB} = |y_2 - y_1|$.

2. *La* ***distanza tra due punti*** $A(x_1, y_1)$ *e* $B(x_2, y_1)$ *aventi la stessa ordinata è uguale al modulo della differenza delle ordinate, cioè* $\overline{AB} = |x_2 - x_1|$.

3. *In generale, la* ***distanza tra due punti*** $A(x_1, y_1)$ *e* $B(x_2, y_2)$ *è data da*

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3.1}$$

Dopo questo insieme di definizioni risulta utile ragionare con la classe su alcuni punti:

a) La distanza tra punti non è altro che la lunghezza del segmento che ha per estremi i punti dati. Le formule della definizione precedente constano di moduli e radici quadrate, tutti operatori matematici che restituiscono sempre valori non negativi. Le lunghezze sono perciò associate a quantità non negative e in questo contesto risulta utile, affinché gli studenti non si riducano ad un mero apprendimento mnemonico delle formule, collegare questo concetto alle misure che naturalmente si considerano nella vita quotidiana (e che loro stessi possono prendere col righello).

b) La terza formula della definizione è una generalizzazione delle prime, ma funziona anche nei due casi precedenti. Infatti, se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_1, y_2)$ hanno stessa ascissa, allora la formula 3.1 diventa

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$$

Questa applicazione diventa perciò utile per richiamare la definizione della funzione valore assoluto e vederne un'ulteriore applicazione.

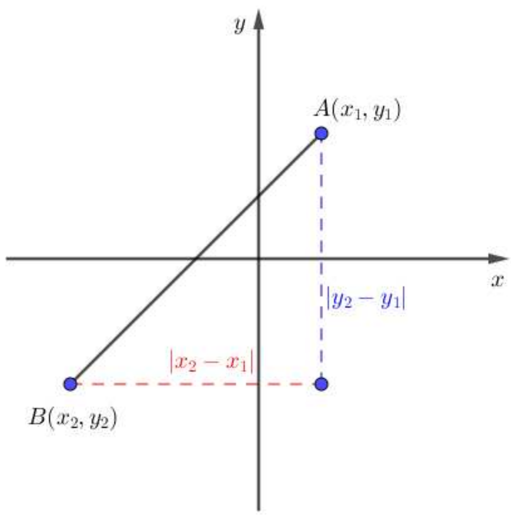


Figura 3.1: Dato un segmento è sempre possibile costruire il triangolo rettangolo che ha per ipotenusa tale segmento.

c) Riscrivendo la formula 3.1 come segue

$$\overline{AB} = \sqrt{(|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2}$$

e con l'ausilio di un opportuno disegno, come nella figura 3.1, possiamo comprendere che tale formula non è altro che l'equivalente algebrico

del teorema di Pitagora, sottolineando ancora una volta l'importanza fondamentale che questo teorema svolge tutt'ora in matematica.
Si noti che la formula suddetta non può essere usata per dimostrare il teorema di Pitagora per via analitica, in quanto crea un circolo vizioso, poiché per dimostrare la formula si è usato proprio il teorema di Pitagora. Perciò risulta necessario un approccio sintetico per dimostrare il teorema di Pitagora, che poi può essere applicato per ricavare la formula cartesiana della distanza tra due punti.

d) Infine vale la pena applicare le formule ad alcuni esercizi pratici, più o meno complessi, perché il formalismo matematico non resti un mero insieme di regole senza significato concreto, migliorando così la comprensione e la capacità di risolvere problemi reali.

Definizione. *Dati due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, il* ***punto medio*** *del segmento AB ha coordinate $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.*

Risulta interessante e intuitivo sottolineare il legame tra il punto medio di un segmento e il concetto di media aritmetica, che viene applicato nella formula del punto medio. Inoltre, con ciò, è immediato estendere la definizione di punto medio alla definizione di baricentro di un triangolo.

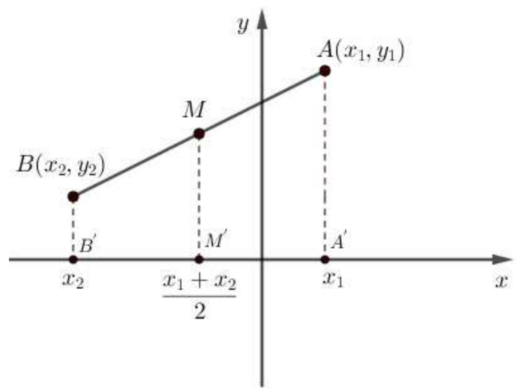


Figura 3.2: Grazie al teorema di Talete si derivano le coordinate del punto medio di un segmento.

In alternativa, o in aggiunta, è possibile anche un approccio più teorico come l'applicazione del teorema di Talete, così da richiamare quest'altro risultato fondamentale (assieme al teorema di Pitagora) di geometria sintetica, che verrà richiamato anche in seguito quando si riprenderà il concetto di retta nel piano cartesiano. Il teorema di Talete afferma che *dato un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali sussiste una relazione di proporzionalità diretta tra le lunghezze dei segmenti della prima retta e le lunghezze dei corrispondenti della seconda.* Ergo, poiché M è il punto medio di AB, e quindi $AM \cong MB$, anche $A'M' \cong M'B'$. Perciò, detta x_M l'ascissa del punto M, avremo che

$$A'M' \cong M'B' \Longrightarrow x_1 - x_M = x_M - x_2 \Longrightarrow x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Analogamente si ragiona per y_M e si estende il ragionamento al caso del baricentro del triangolo, richiamando la proprietà che questo seca le mediane del triangolo in segmenti che hanno rapporto di proporzionalità $2 : 1$.

Definizione. *Un* ***vettore*** $\vec{v}$ *è un segmento orientato. Sia dato un vettore* $\vec{v}$ *in un piano cartesiano di origine* O *con coda in* O *e punta in* $P(x, y)$. *Si dicono* ***componenti*** *di* $\vec{v}$ *le coordinate* (x, y) *del punto* P *e si indica con la notazione* $\vec{v}(x, y)$.

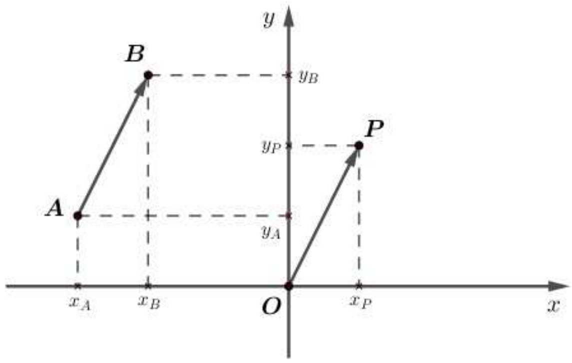


Figura 3.3: Vettori nel piano cartesiano.

Con un approccio intuitivo-induttivo, aiutati anche dalla figura 3.3, insieme agli studenti si può ragionare su alcuni aspetti.

1. Le componenti di un vettore si possono interpretare anche come proiezioni "orientate" del vettore sugli assi cartesiani. Il segno delle componenti sarà positivo se l'orientazione sarà concorde con quella degli assi, negativo se discorde.

2. In quest'ottica, con riferimento sempre alla figura 3.3, abbiamo una dimostrazione grafica del seguente asserto:

   Teorema. *Due vettori* ***uguali*** *hanno le stesse componenti.*

3. Quali sono le componenti di un vettore $\overrightarrow{AB}$ generico che ha coda in $A(x_A, y_A)$ e punta in $B(x_B, y_B)$? Sempre dall'analisi della figura 3.3 si osserva che $\overrightarrow{AB}$ ha componenti $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

4. In fisica si definisce vettore un segmento orientato caratterizzato da **modulo**, **direzione** e **verso**: il modulo corrisponde alla lunghezza del segmento, la direzione è data dall'inclinazione della retta su cui giace il vettore e il verso è dato dall'orientazione del segmento. Due vettori in fisica sono uguali quando queste tre caratteristiche sono uguali. Si può allora dimostrare che l'uguaglianza tra vettori in fisica è conseguenza del teorema enunciato al punto 2. Infatti, se due vettori hanno le stesse componenti, in fede al teorema di Pitagora ricaviamo che i moduli sono uguali. Grazie alle funzioni circolari possiamo invece determinare l'angolo di inclinazione dei vettori e quindi stabilire che anche le direzioni coincidono. Infine l'orientazione è la stessa poiché, se le componenti dei due vettori sono uguali, uguali sono anche i loro segni.

5. Sempre restando in ambito fisico, questa è un'ulteriore occasione per far notare agli studenti che due vettori non devono per forza coincidere per essere uguali e quindi possiamo scegliere sistemi di riferimento opportuni che permettono di semplificare calcoli e procedimenti, ma possiamo anche traslare i vettori nel piano cartesiano come più conviene (procedimento che si utilizza per esempio quando si applica la regola del parallelogramma per sommare due vettori).

Teorema. *Dati due vettori $\vec{u}(x_u, y_u)$ e $\vec{v}(x_v, y_v)$,valgono le seguenti proprietà:*

- *il vettore $\vec{u} + \vec{v}$ ha componenti $(x_u + x_v, y_u + y_v)$;*
- *il vettore $\vec{u} - \vec{v}$ ha componenti $(x_u - x_v, y_u - y_v)$;*
- *il vettore $k\vec{v}$ ha componenti (kx_v, ky_v), con $k \in \mathbb{R}$.*

A questo punto del programma si può inserire una prima sessione di laboratorio in cui viene assegnato alla classe lo svolgimento dei primi tre esercizi della scheda di lavoro "Vettori e loro operazioni" (vedi sezione 4.1). Col primo esercizio 4.1 si vuole semplicemente introdurre gli studenti al codice di *GeoGebra*. Il secondo esercizio 4.1 invece si sofferma ancora una volta sul concetto di vettori uguali. Infine il terzo esercizio 4.1 vuole richiamare le conoscenze di fisica e ancora una volta verificare che restituiscono gli stessi risultati dei nuovi teoremi sulle operazioni tra vettori. La maggior parte degli esercizi sono strutturati come il problema ora analizzato, perché si vuole permettere agli studenti di esplorare le innumerevoli potenzialità di *GeoGebra*.

Senza una buona padronanza degli strumenti di questo sofware di geometria dinamica e del suo codice, questi esercizi sarebbero per gli studenti quasi impossibili da svolgere.

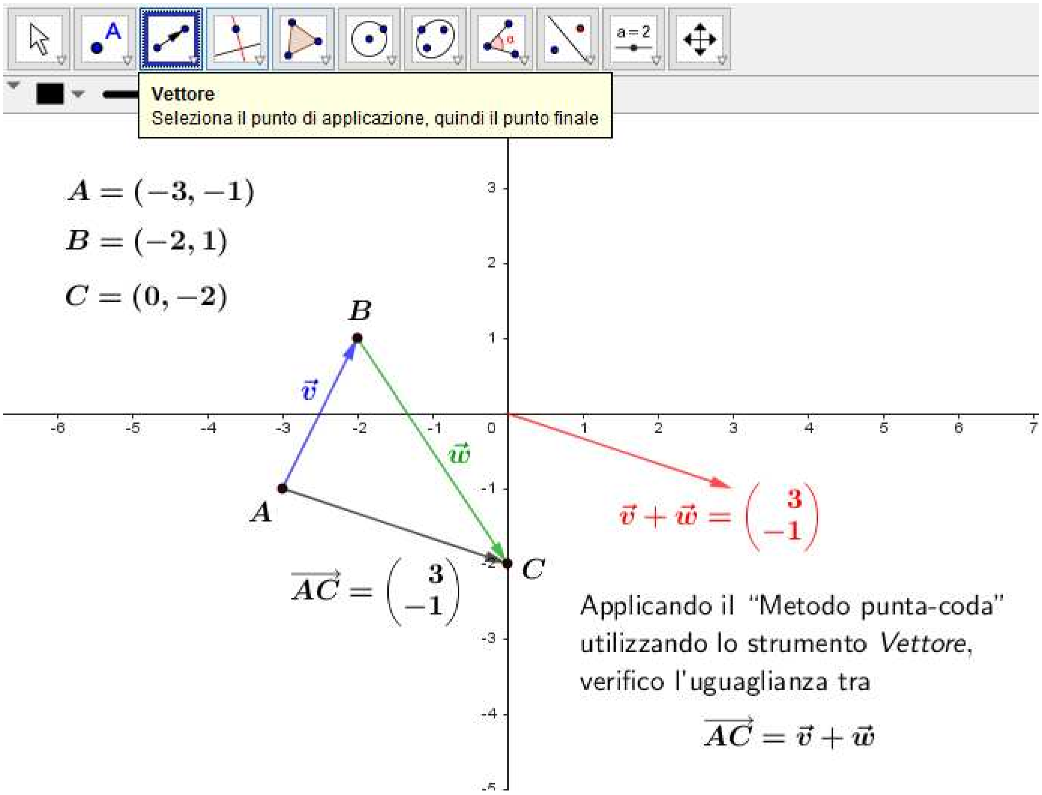


Figura 3.4: Esercizio guidato 3 - Somma e differenza di vettori 4.1

Vediamo ora come capire se due vettori sono paralleli grazie alle loro componenti.
Siano $\vec{u}(x_u, y_u)$ e $\vec{v}(x_v, y_v)$ due vettori paralleli, ossia

$$\vec{u}(x_u, y_u) = k\vec{v} = (kx_v, ky_v)$$

Da ciò ricaviamo che

$$\begin{cases} x_u = kx_v \\ y_u = ky_v \end{cases} \implies \begin{cases} k = \dfrac{x_u}{x_v} \\ k = \dfrac{y_u}{y_v} \end{cases} \implies \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v} \implies x_u y_v - y_u x_v = 0$$

Ne deriva il seguente teorema

Teorema. *Due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono* ***paralleli*** *se e solo se le loro componenti sono direttamente proporzionali, cioè se*

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = 0$$

Infine definiamo come si esegue il prodotto scalare tra due vettori, date le loro componenti.

Definizione. *Dati due vettori $\vec{u}(x_u, y_u)$ e $\vec{v}(x_v, y_v)$ il loro* ***prodotto scalare*** *è*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$$

Come dice la parola stessa, il prodotto scalare tra due vettori è uno scalare, cioè un numero. Questa operazione ci permette di caratterizzare vettori perpendicolari grazie al seguente teorema.

Teorema. *Due vettori $\vec{u}(x_u, y_u)$ e $\vec{v}(x_v, y_v)$ sono* ***perpendicolari*** *se e solo se il loro prodotto scalare è nullo, cioè*

$$x_u x_v + y_u y_v = 0$$

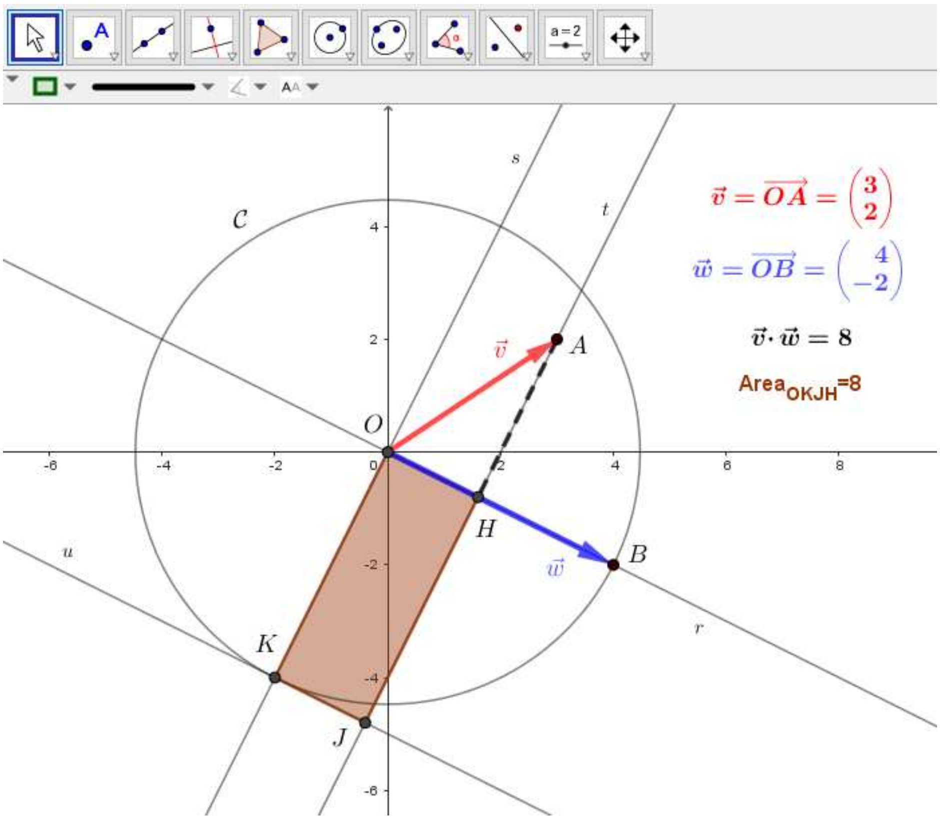


Figura 3.5: Esercizio guidato 4 - Prodotto scalare tra vettori 4.1

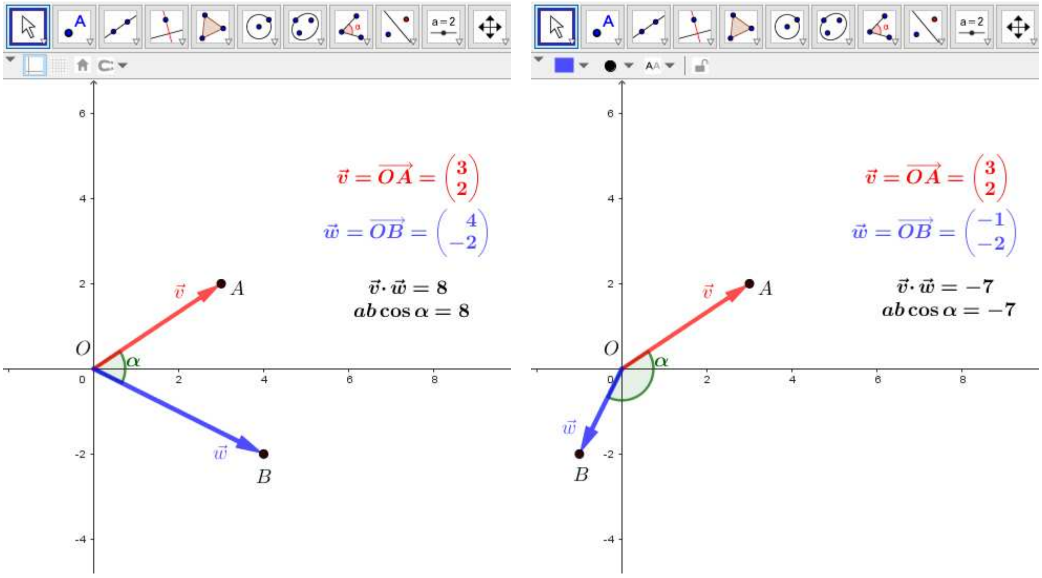


Figura 3.6: Esercizio guidato 4 - Il segno del prodotto scalare 4.1

L'ultimo esercizio 4.1 della scheda "Vettori e loro operazioni" si concentra proprio sull'operazione di prodotto scalare e vuole esplorare il significato geometrico di tale operazione. Inoltre si vogliono consolidare le nozioni teoriche che già gli studenti hanno appreso in fisica nel primo biennio.

3.2 Richiami e complementi sulla retta nel piano cartesiano

In questa sezione sono ripresi i concetti di retta nel piano cartesiano che sono già stati affrontati nel primo biennio, ma sono stati integrati con le nuove nozioni sui vettori.
Sappiamo che ad ogni retta del piano cartesiano può essere associata un'equazione di primo grado. Vediamone una dimostrazione.

Teorema. *Ogni retta del piano cartesiano può essere associata ad un'equazione del tipo*

$$ax + by + c = 0 \tag{3.2}$$

In questo caso si dice che la retta è scritta in ***forma implicita****.*

Dimostrazione

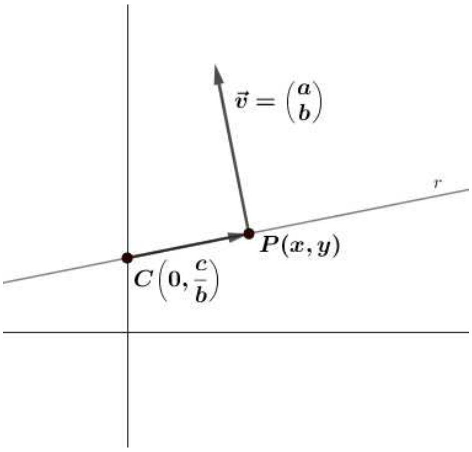


Figura 3.7

Consideriamo innanzitutto il caso di una retta non parallela all'asse y.
Sia $P(x, y)$ un generico punto sulla retta r e sia $C\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ il punto d'intersezione tra la retta e l'asse y, con opportuni b e c e b non nullo. Il vettore $\overrightarrow{CP}$ ha allora componenti $\left(x, y + \frac{c}{b}\right)$.
Sia ora $\vec{v}$ un vettore perpendicolare a $\overrightarrow{CP}$. Senza perdita di generalità, possiamo affermare che il vettore ha componenti (a, b), con $a \in \mathbb{R}$. Dall'ortogonalità dei due vettori consegue allora che

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{CP} = ax + b\left(y + \frac{c}{b}\right) = 0$$

da cui deriva l'equazione 3.2.
Per il caso della retta parallela all'asse y i ragionamenti sono analoghi. Sia sempre $P(x, y)$ un generico punto sulla retta r e sia ora $C\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ il punto d'intersezione tra r e l'asse x. Il vettore $\overrightarrow{CP}$ ora ha componenti $\left(x + \frac{c}{a}, y\right)$.
Preso anche in questo caso $\vec{v}$ un vettore perpendicolare a $\overrightarrow{CP}$ con componenti (a, b), possiamo concludere che

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{CP} = a\left(x + \frac{c}{a}\right) + by = 0$$

da cui deriva l'equazione 3.2.

Ogni retta non parallela all'asse y può essere scritta anche in un'altra forma.

Definizione. *L'equazione di una retta scritta in* ***forma esplicita*** *è la seguente*

$$y = mx + q \tag{3.3}$$

La costante m prende il nome di ***coefficiente angolare****, mentre q si chiama* ***ordinata all'origine****.*

Questa sicuramente è l'espressione più comune con cui si rappresenta una retta nel piano cartesiano. Vediamo anche in questo caso il legame che c'è tra questa equazione e la teoria sui vettori.

Sia r una retta non parallela all'asse y. Essa intersecherà l'asse delle ordinate nel punto $Q(0, q)$, per un opportuno $q \in \mathbb{R}$. Sia poi $m \in \mathbb{R}$ tale che il vettore $\vec{v} = (1, m)$ risulti *parallelo* al vettore $\overrightarrow{QP} = (x, y - q)$. Da ciò ne deriva che

$$\begin{vmatrix} x & y-q \\ 1 & m \end{vmatrix} = mx - (y - q) = 0$$

da cui si ricava proprio l'equazione in forma esplicita della retta 3.3.

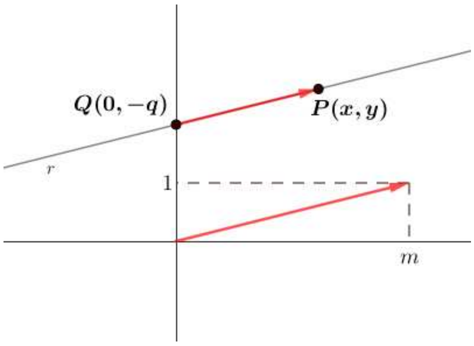


Figura 3.8

I primi due esercizi della scheda di lavoro "Rette e vettori" 4.2 sono incentrati sul legame tra vettori e rette.
Interessante l'esercizio 1 4.2, perché possiamo trovare in *GeoGebra* dei chiari riferimenti ai postulati della geometria euclidea.

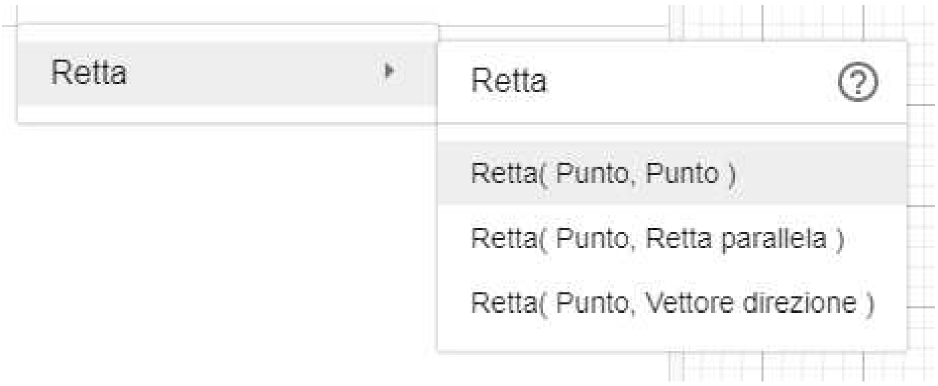


Figura 3.9: Comando che rimanda al primo postulato di Euclide

Col comando *Retta(<Punto>,<Punto>)* si riesce a determinare in maniera univoca la retta passante per due punti assegnati, in fede al primo postulato che afferma

> *Sia stato richiesto di condurre una linea retta da ogni punto a ogni punto**

Invece il comando *Retta(<Punto>,<Retta parallela>)* rimanda al quinto postulato

*Euclide, *Gli Elementi*

*E che, qualora una retta che incide su due rette faccia minori di due retti gli angoli all'interno e dalla stessa parte, le due rette prolungate illimitatamente incidano dalla parte in cui sono gli angoli minori dei due retti**

Figura 3.10: Comando che rimanda al quinto postulato di Euclide

Il secondo esercizio 4.2 invece ha un'impronta più sperimentale; infatti, con un approccio induttivo, si vuole facilitare l'assimilazione dei concetti teorici. La matematica fonda le sue radici sul ragionamento logico-deduttivo, ma, in determinati contesti, specialmente nella scuola secondaria, è utile un approccio di tipo induttivo, per evitare che aspetti teorici forse troppo astratti possano risultare ostici agli studenti. Partendo da esempi concreti, si può favorire una comprensione più immediata dei concetti e preparare così gli studenti ad affrontare in modo più agevole gli sviluppi logici e deduttivi successivi.

Passiamo ora a richiamare due risultati fondamentali sulle rette nel piano cartesiano: le condizioni di parallelismo e perpendicolarità.

Teorema. *Siano date due rette r e s non parallele all'asse y di equazioni rispettivamente $y = mx + q$ e $y = \widetilde{m}x + \widetilde{q}$. Allora:*

- *r e s sono parallele se e solo se $m = \widetilde{m}$;*
- *r e s sono perpendicolari se e solo se $m\widetilde{m} = -1$.*

Dimostrazione
La dimostrazione di questo asserto, con la teoria dei vettori, risulta davvero

*Euclide, *Gli Elementi*

veloce e brillante.
Se consideriamo le rette $r : y = mx + q$ e $s : y = \widetilde{m}x + \widetilde{q}$, queste hanno come vettori direzione rispettivamente i vettori $\vec{v}_r = (1, m)$ e $\vec{v}_s = (1, \widetilde{m})$. Allora:

- r e s sono parallele se e solo se $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ lo sono e quindi
$$(1, m) \parallel (1, \widetilde{m}) \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & \widetilde{m} \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \widetilde{m} - m = 0 \Longrightarrow \widetilde{m} = m$$
- r e s sono perpendicolari se e solo se il prodotto scalare tra $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ è nullo e quindi
$$(1, m) \cdot (1, \widetilde{m}) = 0 \Longrightarrow 1 + m\widetilde{m} = 0 \Longrightarrow m\widetilde{m} = -1$$

L'ultimo richiamo e approfondimento riguarda la distanza di un punto P da una retta r, che ricordiamo essere la minima lunghezza tra i segmenti che hanno per estremi il punto P e un generico punto di r. Tale lunghezza minima appartiene al segmento che ha come secondo estremo la proiezione di P sulla retta.

Teorema. *Data l'equazione di una retta in forma implicita $ax + by + c = 0$ e un punto $P(x_p, y_p)$, la distanza di P da r è data dalla formula*
$$d(P, r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{3.4}$$

Dimostrazione
Analizzando la retta $ax + by + c = 0$ sappiamo che essa ha come vettore normale, cioè perpendicolare al suo vettore direzione, il vettore $\vec{n} = (a, b)$ (l'abbiamo già visto nella dimostrazione a pagina 33). Chiamiamo $H(x_H, y_H)$ la proiezione di P su r e calcoliamo, in due modi diversi, quanto vale $|\overrightarrow{HP} \cdot \vec{n}|$, ricordando che questi due vettori sono paralleli perché perpendicolari alla stessa retta.

- Secondo la definizione di prodotto scalare
$$|\overrightarrow{HP} \cdot \vec{n}| = \|\overrightarrow{HP}\| \; \|\vec{n}\| \; \cos(0) = \overline{HP} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$
- Usando il prodotto scalare per vettori date le loro componenti
$$|\overrightarrow{HP} \cdot \vec{n}| = |(x_P - x_H, y_P - y_H) \cdot (a, b)| = |ax_P + by_P - (ax_H + by_H)|$$
  Essendo H un punto appartenente alla retta, quindi $ax_H + by_H + c = 0$, possiamo concludere che
$$|ax_P + by_P - (ax_H + by_H)| = |ax_P + by_P - (-c)| = |ax_P + by_P + c|$$

Eguagliando i due risultati finali ottenuti ed isolando $\overline{HP}$, ritroviamo l'equazione 3.4 del teorema.

L'ultimo esercizio 4.2 della seconda scheda di lavoro si sviluppa proprio su questo ultimo risultato: da una parte ripercorre i passaggi della dimostrazione, dall'altra vuole evidenziare come *GeoGebra* restituisca in automatico la lunghezza dei segmenti una volta tracciati.

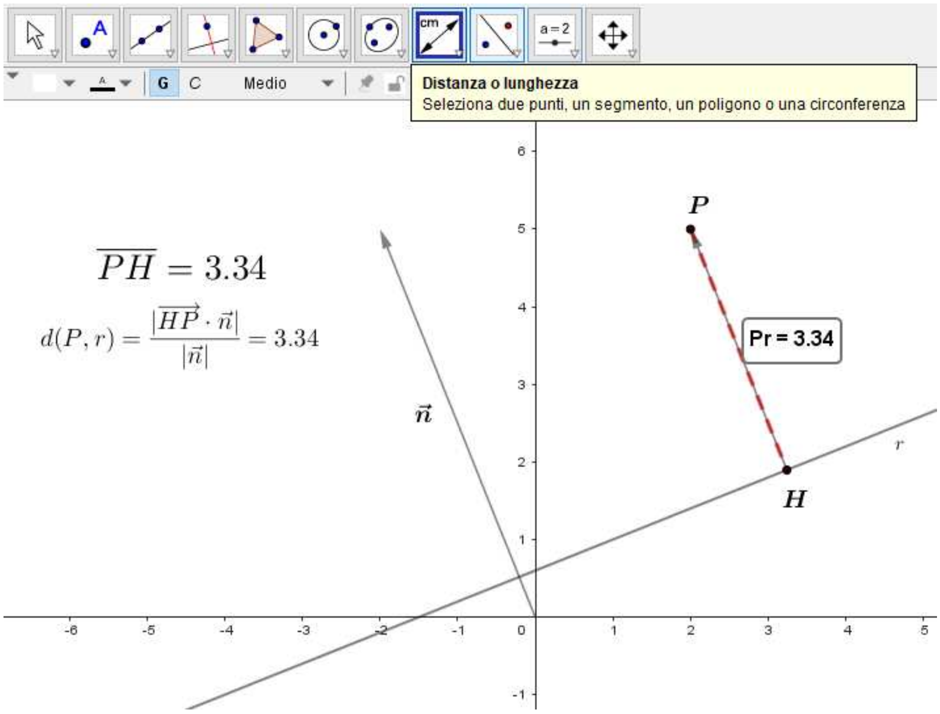


Figura 3.11: Esercizio 3 - Distanza punto-retta 4.2

3.3 Le trasformazioni del piano

L'argomento delle trasformazioni del piano è un argomento assai difficile da affrontare da un punto di vista superiore. Per farlo al meglio, sarebbero da considerare questioni di teoria dei gruppi e algebra lineare che, oltre ad essere di difficile comprensione per gli studenti, possono talvolta mettere in difficoltà anche i docenti di materia. Inoltre questa criticità è da imputare anche alla difficoltà di visualizzare le trasformazioni geometriche.
Ci sono tuttavia aspetti positivi in merito all'argomento per cui vale la pena un confronto con esso. Primo fra tutti è la capacità di impiegare un modello, cioè una rappresentazione particolarmente semplice per una classe di

equivalenza, che offre la sicurezza che ogni proprietà dimostrata valida sul modello si applichi anche a tutte le altre figure appartenenti alla stessa classe di equivalenza. Inoltre risulta un'ottima fonte di collegamenti interdisciplinari, ad esempio, col disegno tecnico e la storia dell'arte, ma anche con le scienze naturali, in particolare con lo studio dei minerali.
In questa sezione affronteremo le trasformazioni del piano da un punto di vista analitico. Anche se avremo a che fare con funzioni in due variabili, eviteremo di soffermarci in passaggi troppo tecnici per studenti di liceo. L'approccio laboratoriale accompagnerà ogni singola trasformazione del piano, così da permettere una maggiore comprensione dell'argomento e cercare di aiutare gli studenti nella visualizzazione dei contenuti.

Definizione. *Una **trasformazione geometrica del piano** è una biiezione del piano in sé, cioè una funzione biiettiva che manda punti del piano in punti dello stesso piano.*

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Da questa definizione è chiaro che, presa una qualsiasi trasformazione del piano ϕ e una qualsiasi curva γ del piano, dove tale curva è da intendersi come sottoinsieme di punti di $\mathbb{R}^2$, trovare l'immagine di γ tramite ϕ equivale a trovare l'immagine di ogni suo punto $P \in \gamma$ tramite ϕ.

Definizione. *Si chiamano **elementi uniti** di una trasformazione del piano ϕ gli elementi che hanno come immagine sé stessi. Quindi avremo che un punto P si dice **punto unito** quando $\phi(P) = P$ e analogamente una retta r si dice **unita** se $\phi(r) = r$.*

Si noti che ci possono essere due tipi di curve γ unite per una trasformazione ϕ: quelle che sono **puntualmente** unite, cioè che ogni loro punto è unito ($\phi(P) = P$, $\forall P \in \gamma$), e quelle che invece mandano punti della curva in altri punti della medesima ($\phi(P) = P'$, $\forall P, P' \in \gamma$). Le trasformazioni del piano sono proprio caratterizzate da questi elementi uniti. Vediamo nel dettaglio quali sono le principali trasformazioni del piano, partendo dalle cosiddette isometrie, cioè le trasformazioni che mantengono invariate le distanze.

Definizione. *Si definisce **traslazione** di vettore $\vec{v}$ la trasformazione del piano che associa ad ogni punto P il punto P' tale che* il vettore $\overrightarrow{PP'}$ ha stessi direzione, modulo e verso del vettore $\vec{v}$.

Teorema. *Le **equazioni**, cioè l'espressione analitica, della traslazione di vettore $\vec{v}(a, b)$ sono*

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \tag{3.5}$$

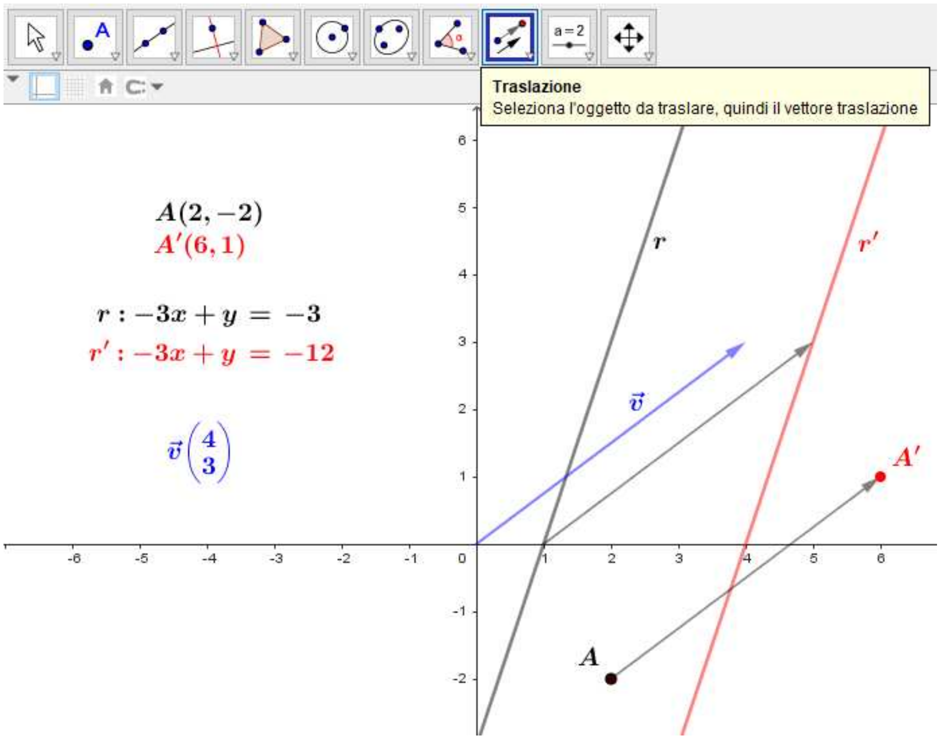


Figura 3.12: Esercizio 1 4.3 - La traslazione di vettore $\vec{v}(a, b)$

Il primo esercizio della scheda "Trasformazioni del piano - parte 1" 4.3 vuole mostrare il risultato di una traslazione. Partendo dal caso più generale possibile, grazie al sofware di geometria dinamica, si vuole arrivare a stabilire quali sono gli elementi uniti di ogni trasformazione del piano, qui nello specifico della traslazione.
Facilmente lo studente può osservare che la traslazione non ammette punti uniti (a meno che non si stia considerando il caso particolare della traslazione di vettore nullo, che coincide con la trasformazione identica, ossia la biiezione del piano che associa ad ogni punto sé stesso). Invece, una volta rappresentate la retta r del punto (2) e la sua trasformata r', se proviamo a spostare la punta del vettore $\vec{v}$ fino a renderlo parallelo alla direzione della retta r, ci rendiamo conto che quest'ultima resta unita e come essa perciò anche tutte le altre rette che hanno medesima direzione. Da ciò è possibile concludere con il seguente risultato:

Teorema. *Ogni traslazione τ di vettore $\vec{v}(a, b)$ non nullo* ***non ammette punti uniti****. Le rette unite per τ sono invece tutte e sole le rette di equazione $bx - ay + c = 0$, con $c \in \mathbb{R}$.*

Definizione. *Si definisce* ***simmetria di centro*** $G(x_G, y, G)$ *la trasformazione del piano che associa ad ogni punto* A *il punto* A' *tale che* il segmento AA' ha come punto medio il centro G.

Teorema. *Le* ***equazioni*** *di tale trasformazione sono*

$$\begin{cases} x' = 2x_G - x \\ y' = 2y_G - y \end{cases} \tag{3.6}$$

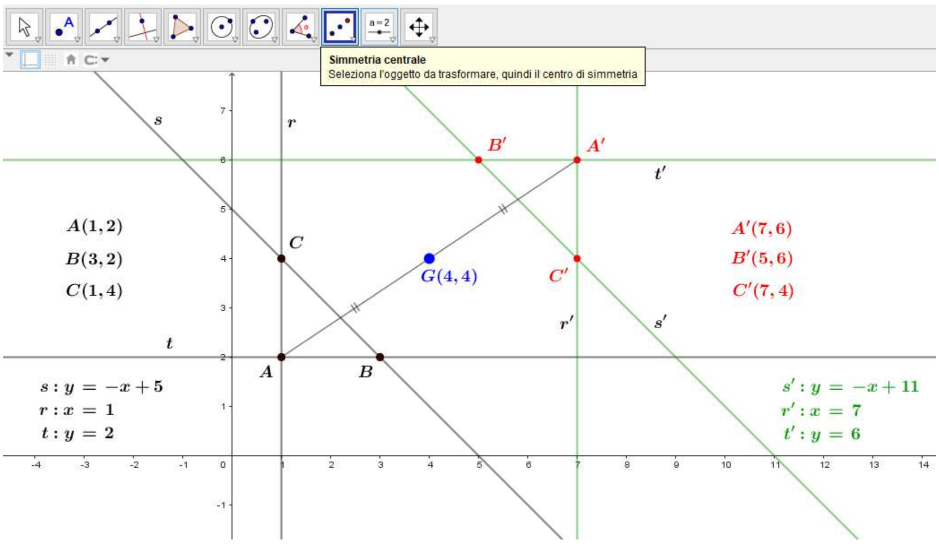


Figura 3.13: Esercizio 2 4.3 - La simmetria centrale

Il secondo esercizio della scheda "Trasformazioni del piano - parte 1" 4.3 verte attorno alle simmetrie centrali. Anche in questo caso, un approccio esplorativo mira a guidare gli studenti alla ricerca degli elementi uniti, oltre a consolidare come si comportano queste trasformazioni del piano. Alla fine dell'esercizio lo studente avrà appreso che la simmetria di centro G ha come **unico punto unito** proprio **il centro** e le rette unite, che come nel caso della traslazione non sono puntualmente unite, sono quelle appartenenti al **fascio proprio di centro** G.
L'approfondimento conclusivo dell'esercizio è un richiamo all'unità didattica delle funzioni; infatti sappiamo che ogni funzione dispari ha grafico simmetrico rispetto all'origine O del piano cartesiano. In altre parole

Teorema. *Il grafico di una funzione* f ***dispari*** *è un elemento unito per la simmetria di centro* O.

Dimostrazione
Ricordiamo che una funzione è dispari quando

$$f(-x) = -f(x)\ ,\ \text{per ogni } x \text{ del dominio di } f.$$

Le equazioni della simmetria di centro O sono

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

da cui

$$y = f(x) \iff -y' = f(-x') \iff y' = -(-f(x')) \iff y' = f(x').$$

Definizione. *Si definisce **simmetria assiale** (o riflessione) rispetto alla retta r la trasformazione del piano che associa ad ogni punto P il punto P' tale che:*

1) *il segmento PP' è perpendicolare alla retta r;*

2) *il punto d'intersezione tra la retta r e il segmento PP' corrisponde al punto medio del segmento stesso.*

Deriviamo le equazioni della simmetria assiale a partire dalla definizione. Consideriamo la retta r di equazione $y = mx+q$ e un generico punto $P(x, y)$. Sia $P'(x', y')$ il simmetrico di P rispetto alla retta r.

1) Il vettore $\overrightarrow{PP'}(x'-x, y'-y)$ è perpendicolare al vettore direzione della retta r, ossia al vettore $\vec{v}(1, m)$. Di conseguenza vale

$$\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow x' - x = -m(y' - y) \tag{3.7}$$

2) Il punto medio $M\left(\dfrac{x'+x}{2}, \dfrac{y'+y}{2}\right)$ del segmento PP' appartiene alla retta r e perciò

$$\frac{y'+y}{2} = m\left(\frac{x'+x}{2}\right) + q \tag{3.8}$$

Mettendo ora a sistema le equazioni 3.7 e 3.8 otteniamo:

$$\begin{cases} x' - x = -m(y' - y) \\ \dfrac{y'+y}{2} = m\left(\dfrac{x'+x}{2}\right) + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - my' + my \\ y' + y = m(x - my' + my + x) + 2q \end{cases} \tag{3.9}$$

Isolando y' nella seconda equazione del sistema 3.9 troviamo l'equazione di riflessione

$$y' = \frac{2mx + (m^2 - 1)y + 2q}{1 + m^2}$$

e sostituendo il risultato appena ottenuto nella prima equazione del sistema 3.9 otteniamo la prima equazione di riflessione

$$x' = \frac{2my + (1 - m^2)x - 2mq}{1 + m^2}$$

Ragionando in maniera analoga a quanto appena fatto, si ricavano anche le equazioni della riflessione rispetto a rette di equazione $x = x_0$. Riassumiamo i due casi.

Teorema. *Le* ***equazioni*** *della riflessione rispetto alla retta di equazione $y = mx + q$ sono*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2my + (1 - m^2)x - 2mq}{1 + m^2} \\ y' = \dfrac{2mx + (m^2 - 1)y + 2q}{1 + m^2} \end{cases} \tag{3.10}$$

Le ***equazioni*** *della riflessione rispetto alla retta di equazione $x = x_0$ sono*

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = y \end{cases} \tag{3.11}$$

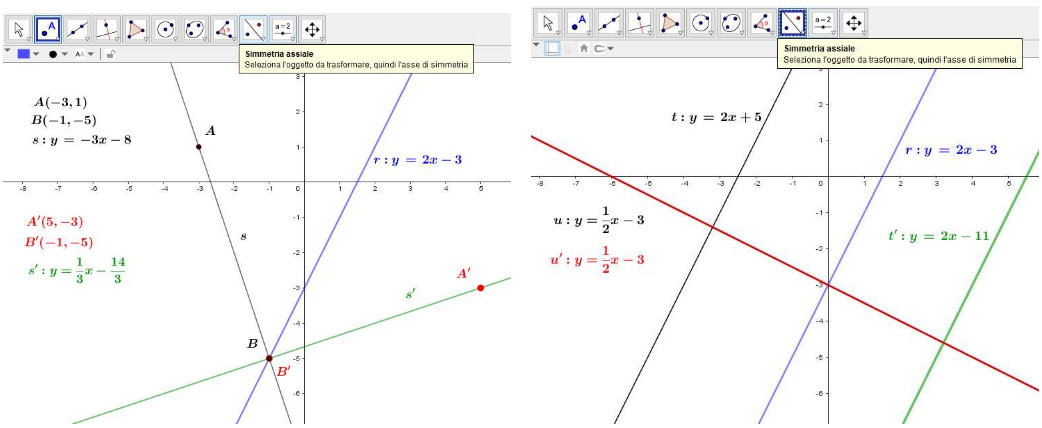


Figura 3.14: Esercizio 3 - La simmetria assiale 4.3

Il terzo e ultimo esercizio della scheda "Trasformazioni del piano - parte 1" 4.3 questa volta aiuta la ricerca degli elementi uniti della simmetria assiale. Fin

da subito ci si può accorgere che **l'asse della simmetria è puntualmente unito** e non esistono altri punti uniti. Invece sono unite (non puntualmente) tutte le **rette perpendicolari all'asse**.
Si può far notare a questo punto dell'esercizio che ci sono anche molte altre curve unite per la riflessione rispetto ad una retta r: tutte le parabole che hanno appunto come asse di simmetria la retta r, ma anche tutte le circonferenze con centro sulla retta r, oppure ellissi ed iperboli che hanno sulla retta r uno dei loro assi focali. Ovviamente un ragionamento di questo tipo può essere fatto in maniera rigorosa solo alla fine di un percorso completo di geometria analitica; tuttavia può essere anche un buon momento per incuriosire gli studenti sulle tematiche avvenire, oppure per fare dei collegamenti interdisciplinari (ad esempio con la letteratura italiana, in particolare con la *Divina Commedia*, vista la struttura simmetrica di Inferno, Purgatorio e Paradiso danteschi, ma anche con le scienze naturali e la mineralogia). E per ricollegarsi agli argomenti dell'unità didattica sulle funzioni, l'esercizio 4.3 approfondisce altri due aspetti.

- Il primo riguarda le funzioni pari.

  Teorema. *Il grafico di una funzione f* ***pari*** *è un elemento unito per la riflessione rispetto all'asse y.*

  Dimostrazione
  Ricordiamo che una funzione è pari quando

  $$f(-x) = f(x) \text{ , per ogni } x \text{ del dominio di } f.$$

  Le equazioni della simmetria assiale rispetto alla retta $x = 0$ sono

  $$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

  da cui

  $$y = f(x) \iff y' = f(-x') \iff y' = f(x').$$

- Il secondo si riferisce alle funzioni invertibili, in particolare

  Teorema. *Il grafico della funzione f^{-1},* ***inversa*** *della funzione f, è simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.*

  Dimostrazione
  Ricordiamo che se $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$ con $y = f(x)$ è una funzione biiettiva, allora è invertibile, cioè esiste una funzione

$f^{-1} \ : \ B \subset \mathbb{R} \longrightarrow A \subset \mathbb{R}$ tale che $x = f^{-1}(y)$.
Le equazioni della simmetria assiale σ rispetto alla retta $y = x$ sono

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Ma allora se applichiamo questa trasformazione al grafico di f

$$G(f) \coloneqq \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

otteniamo

$$\sigma(G(f)) = \{(f(x), x) \mid x \in A\} = \{(y, f^{-1}(y)) \mid y \in B\} = G(f^{-1})$$

Mancherebbe discutere l'ultima isometria del piano: la **rotazione** di centro un punto e angolo stabilito. Tuttavia, le equazioni della rotazione coinvolgono le funzioni circolari e complicano notevolmente la sua trattazione. Tuttavia si potrebbe sfruttare un teorema per approcciare questa trasformazione del piano.

Teorema. *Ogni rotazione è il risultato di due riflessioni rispetto a due rette che si intersecano nel centro della rotazione e formano un angolo che è metà dell'angolo di rotazione.*

Tuttavia, anche in questo caso, ritornano le misure degli angoli e dobbiamo utilizzare concetti che coinvolgono funzioni circolari. Per queste difficoltà tecniche, si rimanda lo studio della rotazione ad un altro momento.

L'ultima trasformazione del piano che andremo ad analizzare è la dilatazione, in particolare l'**omotetia**. Un'omotetia è una trasformazione, si dice, *non isometrica*, cioè in generale non mantiene invariate le distanze tra i punti del piano.

Definizione. *Si definisce **omotetia** di centro O e rapporto di omotetia k, con k reale non nullo, la trasformazione che tiene fisso il punto C e trasforma ogni punto P del piano nel punto P' tale che*

$$\overrightarrow{CP'} = k\,\overrightarrow{CP}$$

*Se $k > 0$, allora l'omotetia si dice **diretta**, altrimenti **inversa**.*

Intuitivamente un'omotetia è una trasformazione che dilata o contrae le figure nel piano, ma lascia invariata la loro forma, cioè mantiene uguali gli angoli; nel caso specifico delle omotetie inverse, prima di dilatare o contrarre, la trasformazione riflette le figure rispetto al punto C.
Facciamo alcune osservazioni.

1. L'omotetia di rapporto 1 è la trasformazione identica. L'omotetia di rapporto -1 invece coincide con la simmetria centrale di centro C.

2. Se $k \neq 1$, l'unico punto unico della trasformazione è il centro C. Invece, come nel caso della simmetria centrale, sono unite tutte le rette del fascio proprio di centro C.

3. In questa sezione possiamo richiamare il concetto di similitudine, ampiamente affrontato nel primo biennio in geometria sintetica, e tutti i risultati ad esso collegati. La similitudine infatti, non è altro che la composizione di un'omotetia con una o più isometrie, cioè una o più traslazioni, simmetrie centrali o simmetrie assiali.

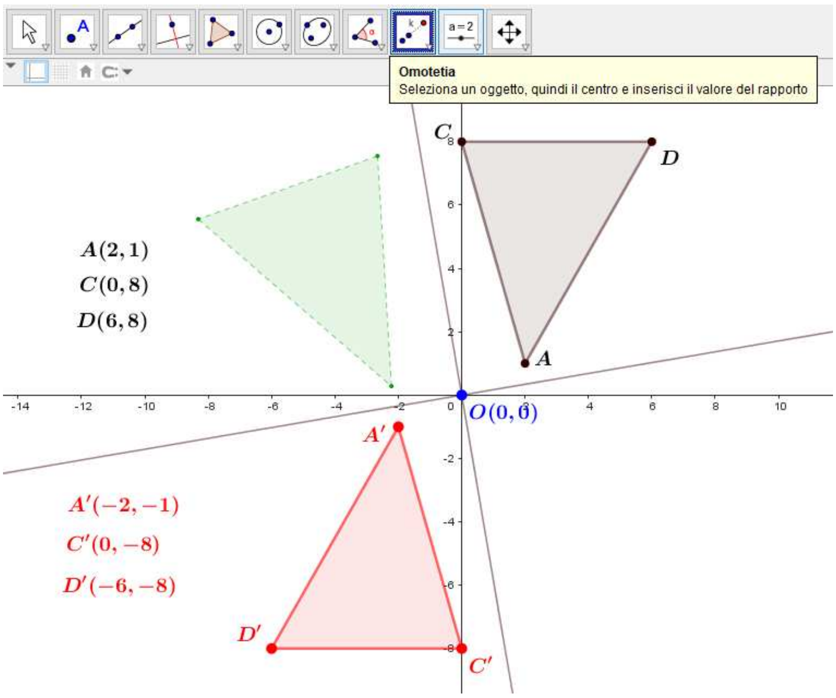


Figura 3.15: Esercizio 1 4.4 - Dilatazioni e omotetie - parte 1

Teorema. *Le equazioni dell'omotetia di centro $G(x_G, y_G)$ e rapporto k non nullo sono*

$$\begin{cases} x' = kx + x_G(1-k) \\ y' = ky + y_G(1-k) \end{cases} \tag{3.12}$$

Si noti subito che con $k = -1$ si ottengono le equazioni della simmetria centrale 3.6.

Più generale dell'omotetia è la **dilatazione**. Questa trasformazione, a differenza dell'omotetia, non mantiene invariati gli angoli. Le equazioni della dilatazione di rapporti h e k sono

$$\begin{cases} x' = hx + x_G(1-h) \\ y' = ky + y_G(1-k) \end{cases}$$

La quarta scheda di lavoro "Trasformazioni del piano - parte 2" 4.4 si concentra sull'omotetia e possiamo confermare sperimentalmente tutto ciò che precedentemente è stato esposto. In aggiunta, il punto (4) dell'esercizio 1 4.4 vuole aiutare lo studente a riconoscere che ogni simmetria centrale in realtà è la composizione di due riflessioni rispetto a due rette perpendicolari che si intersecano nel centro della simmetria.

3.4 La circonferenza nel piano cartesiano

In quest'ultima sezione studieremo la circonferenza da un punto di vista analitico, anche se talvolta richiameremo concetti di geometria sintetica studiati nel primo biennio, a partire dalla sua definizione.

Definizione. *Si dice circonferenza $\mathscr{C}$ di centro C e raggio r il luogo geometrico dei punti del piano la cui distanza da C è r.*

Deriviamo la sua equazione cartesiana.
La circonferenza che ha centro nel punto $C(x_C, y_C)$ e raggio r è formata dai punti $P(x, y)$ del piano tali per cui $\overline{PC} = r$, ossia

$$\overline{PC} = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} = r$$

Da qui, elevando al quadrato entrambi i membri dell'equazione (essendo questi sempre non negativi), abbiamo dimostrato il seguente teorema.

Teorema. *L'equazione della circonferenza di centro $C(x_C, y_C)$ e raggio r è*

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \tag{3.13}$$

Sviluppiamo ora i quadrati e otteniamo

$$
\begin{aligned}
&x^2 - 2xx_C + {x_C}^2 + y^2 - 2yy_C + {y_C}^2 = r^2 \\
\Rightarrow &x^2 + y^2 + (-2x_C)x + (-2y_C)y + {x_C}^2 + {y_C}^2 - r^2 = 0
\end{aligned}
$$

e rinominando

$$a = -2x_C \qquad b = -2y_C \qquad c = {x_C}^2 + {y_C}^2 - r^2 \tag{3.14}$$

otteniamo la seguente equazione della circonferenza in **forma normale**

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{3.15}$$

Vediamo insieme alcuni risultati attorno ai quali verte il primo esercizio della "Scheda di lavoro 5 - La circonferenza" 4.5.

1. Il terzo postulato di Euclide recita così.

   *E che con ogni centro e intervallo sia tracciato un cerchio**

   Dunque dati un punto e un "intervallo", cioè un segmento o equivalentemente la misura della sua lunghezza, riusciamo a determinare univocamente una circonferenza. I procedimenti che si annidano dietro al funzionamento di *GeoGebra* sono sicuramente di tipo algebrico-analitico; ciononostante è affascinante osservare come vengono evidenziati i fondamenti della geometria euclidea, per esempio nell'impostazione dei suoi comandi. È il caso dei primi tre comandi che permettono la rappresentazione della circonferenza raffigurati nell'immagine 3.16.

2. Diverso è invece il quarto comando, quello che richiede tre punti per determinare la circonferenza. Questo comando si fonda su un altro risultato di geometria sintetica.

   Teorema. *Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.*

   Dimostrazione
   Siano A, B e C i tre punti non allineati di partenza. Tracciamo i segmenti consecutivi non adiacenti AB e BC. A questo punto tracciamo gli assi dei due segmenti, che si intersecheranno sempre e solo in un punto O proprio perché A, B e C non sono allineati.
   L'asse di un segmento gode della proprietà che ogni suo punto è equidistante dagli estremi del segmento stesso. Perciò O risulta equidistante dai tre punti di partenza e quindi esiste, ed è unica perché O è unico, la circonferenza di centro O e passante per A, B e C (che ha raggio OA).

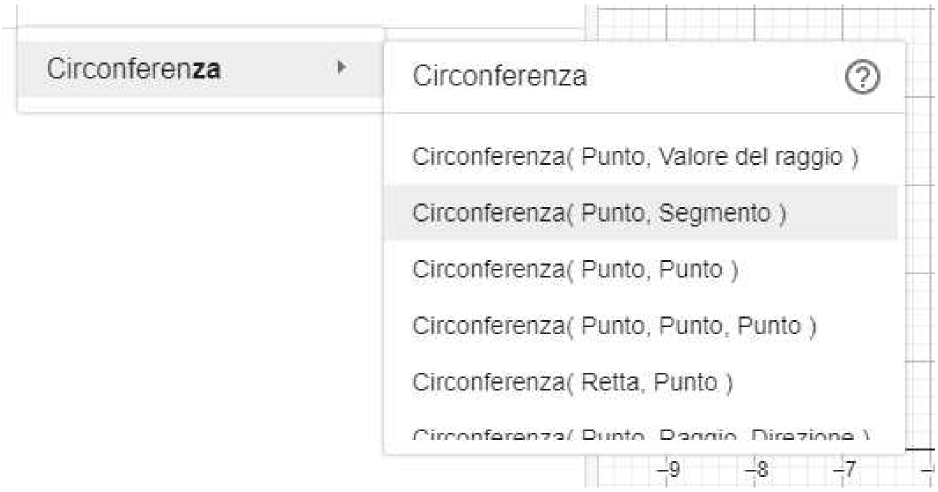


Figura 3.16: Comando che rimanda al quinto postulato di Euclide

Sorge spontaneo a questo punto della trattazione un quesito: l'equazione 3.15 rappresenta sempre una circonferenza?
Isolando x_C, y_C e r nell'equazione 3.14, otteniamo

$$x_C = -\frac{a}{2} \qquad y_C = -\frac{b}{2} \qquad r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

e l'ultima relazione non risulta sempre determinata, perché l'argomento della radice potrebbe risultare negativo. Da ciò ne deriva una condizione di esistenza per la circonferenza data la sua equazione in forma normale.

Teorema. *L'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ si riferisce ad una circonferenza se e solo se vale la seguente disuguaglianza*

$$a^2 + b^2 - 4c \geq 0$$

Nel caso in cui $a^2 + b^2 - 4c = 0$, la circonferenza è degenere e coincide con il centro $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$.

L'esercizio 2 della quinta scheda 4.5 verifica per via laboratoriale il risultato precedente, oltre a verificare alcune proprietà grafiche dei coefficienti a, b e c dell'equazione in forma normale di una circonferenza.

L'ultima parte del capitolo sarà dedicata alle relazioni tra rette e circonferenze.

*Euclide, *Gli Elementi*

Definizione. *Data una circonferenza, una retta si dice*

a) ***secante*** *se la distanza tra il centro e la retta è minore del raggio;*

b) ***tangente*** *se la distanza tra il centro e la retta è uguale al raggio;*

c) ***esterna*** *se la distanza tra il centro e la retta è maggiore del raggio.*

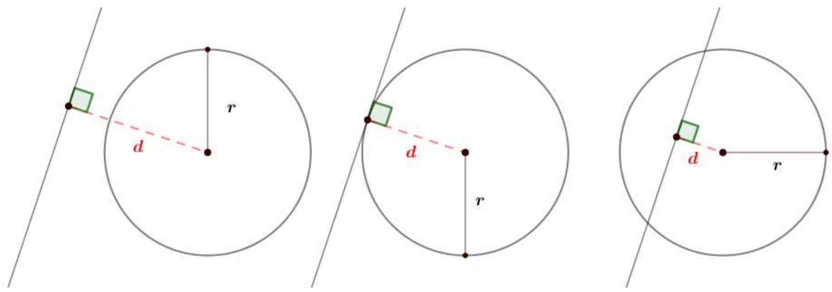


Figura 3.17: Da sinistra verso destra, i casi **esterna**, **tangente** e **secante**.

Per stabilire per via analitica la posizione reciproca tra una retta e una circonferenza, è sufficiente risolvere il sistema tra le equazioni delle due curve.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = mx + q \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x = k \end{cases} \tag{3.16}$$

In verità, per stabilire la posizione reciproca, è sufficiente osservare il segno del discriminante dell'equazione risolvente del sistema. La risoluzione completa servirà per stabilire le coordinate dei punti di intersezione. Ad ogni modo vale il seguente teorema.

Teorema. *Sia* Δ *il discriminante dell'equazione di secondo grado risolvente del sistema 3.16. Allora:*

a) se $\Delta > 0$ *allora la retta è* ***secante****;*

b) se $\Delta = 0$ *allora la retta è* ***tangente****;*

c) se $\Delta < 0$ *allora la retta è* ***esterna****.*

Uno dei problemi classici di geometria, fin dai tempi antichi, è cercare di stabilire quali sono le rette tangenti ad una curva data. Vedremo per via analitica due metodi per risolvere questo problema nel caso in cui siano forniti l'equazione di una circonferenza e un punto P appartenente alla/e retta/e tangente/i cercata/e.

1. Sia $P(x_P, y_P)$ il punto dato e sia $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ l'equazione della circonferenza di riferimento.
   Come primo passo scriviamo l'equazione del fascio di rette passanti per il punto P
   $$y - y_P = m(x - x_P)$$
   Ora mettiamo a sistema l'equazione della circonferenza con quella del fascio di rette e cerchiamo l'equazione risolvente.
   Una volta derivata, calcoliamone il suo discriminante, che sarà dipendente dal parametro m. Poiché stiamo ricercando quali sono le rette del fascio tangenti alla circonferenza, basterà imporre la condizione $\Delta = 0$ enunciata nel teorema visto qualche paragrafo sopra e risolvere l'equazione nell'incognita m che ne deriva.
   Ci sono pro e contro di questo metodo: infatti, questo procedimento è standard e si può applicare ad ogni curva del piano che restituisca un'equazione risolvente di secondo grado (cioè a tutte le coniche). Purtroppo però molto spesso abbiamo a che fare con calcoli algebrici ostici e impegnativi e facilmente si può incorrere in errori di distrazione, imputabili a errori di calcolo e/o segno.

2. Il secondo metodo invece è molto più scorrevole, ma richiede la risoluzione di un'equazione irrazionale modulare. Siano dati anche in questo caso il punto $P(x_P, y_P)$ e l'equazione della circonferenza. Determiniamo anche in questo caso l'equazione del fascio proprio di rette passanti per P, deriviamo poi le coordinate del centro della circonferenza $C(-a/2, -b/2)$ e quanto misura il suo raggio $r = \sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2 - c}$.
   A questo punto, dopo aver scritto in forma implicita l'equazione del fascio proprio di rette, applichiamo la formula della distanza punto-retta imponendo che la distanza tra la generica retta del fascio e il centro della circonferenza sia uguale al raggio. L'equazione risultante dipenderà dall'incognita m e una volta risolta, come nel caso precedente, restituirà il/i valore/i di m corrispondente/i alla/e retta/e tangente/i alla circonferenza.
   Questo metodo è preferibile perché solitamente non richiede enormi sforzi di calcolo, ma è situazionale perché applicabile solo al caso della circonferenza. Inoltre è necessario ricordare le strategie di calcolo delle equazioni modulari e irrazionali, nonché la formula della distanza punto-retta.

Per entrambi i metodi c'è una postilla da mettere in evidenza. Se l'equazione finale dipendente da m risulta di *secondo grado*, allora la/e soluzione/i dell'equazione corrisponde/ranno al/ai valore/i del/dei coefficiente/i angolare/i della/e retta/e tangente/i alla circonferenza. Se invece l'equazione finale è di *primo grado*, l'equazione della seconda retta tangente è quella della generatrice del fascio di rette parallela all'asse y, cioè sarà la retta di equazione $x = x_P$.

L'ultimo esercizio della quinta scheda è in realtà un semplice esercizio su quest'ultimo argomento in cui si fornisce però allo studente uno strumento per verificare se le soluzioni che trova sono corrette. Lo strumento *Tangenti* infatti restituisce la/le equazione/i della/e retta/e tangente/i alla circonferenza (o più in generale alla curva in analisi). Quasi sempre *GeoGebra* viene usato nelle scuole come strumento per verificare i calcoli e procedimenti svolti, ma abbiamo constatato nelle pagine precedenti che questo sofware di geometria dinamica non si limita solo a questo.

Infine facciamo un approfondimento sull'unità didattica delle funzioni. Consideriamo l'equazione 3.4 ed isoliamo l'incognita y.

$$(y - y_C)^2 = r^2 - (x - x_C)^2 \Longrightarrow y = y_C \pm \sqrt{r^2 - (x - x_C)^2}$$

Ne derivano due funzioni irrazionali

$$f_+(x) = y_C + \sqrt{r^2 - (x - x_C)^2} \qquad f_-(x) = y_C - \sqrt{r^2 - (x - x_C)^2}$$

A questo punto della trattazione riusciamo a comprendere quali sono i grafici delle due funzioni f_+ e f_-. Infatti, per il fatto che il risultato di una radice quadrata è sempre non negativo, il grafico di f_+ coinciderà con la semicirconferenza superiore di centro $C(x_C, y_C)$ e raggio r, invece il grafico di f_- coinciderà con la semicirconferenza inferiore sempre di centro C e raggio r.

Capitolo 4

Le schede di lavoro con *GeoGebra*

4.1 Scheda di lavoro 1 - Vettori e loro operazioni

Per la seguente esercitazione sono necessari carta, penna e un computer con GeoGebra Classico, fruibile gratuitamente online.

Definizioni

- Sia dato un vettore $\vec{v}$ in un piano cartesiano di origine O con coda in O e punta nel punto $P(x, y)$. Si dicono **componenti** di $\vec{v}$ le coordinate (x, y) del punto P e si indica con la notazione $\vec{v}(x, y)$.

- Dato un vettore $\vec{v}$, rappresentato dal segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ di vertici $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, le componenti di $\vec{v}$ sono date dalla differenza tra l'ascissa di B e l'ascissa di A e dalla differenza tra l'ordinata di B e l'ordinata di A: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Teorema: Due vettori sono **uguali** se hanno le stesse componenti.

Esercizio 1 - Comandi

Apri una pagina con *GeoGebra Classico* e nell'area di *Inserimento* prova a scrivere i comandi "$A = (1, 2)$" e "$a = (1, 2)$". Cosa noti?

Esercizio guidato 2 - Uguaglianza tra vettori

Considera due generici punti A e B nel piano cartesiano. Scrivi le coordinate del tuo vettore $\overrightarrow{AB}$ sul foglio di carta che hai a disposizione.

1. Seleziona lo strumento *Vettore* e, seguendo le istruzioni date da *GeoGebra*, traccia il vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ che ha coda in A e punta in B. Analizza il risultato ottenuto e confrontalo con le coordinate da te calcolate.

2. Traccia ora il vettore $\vec{w}$ **uguale**, secondo la definizione scritta sopra, al vettore $\vec{v}$, che ha coda in O, origine degli assi cartesiani, e punta nel punto che chiamerai P.

3. **Definizione:** In fisica, due vettori sono **uguali** se hanno stessi modulo, direzione e verso. Il **modulo** corrisponde alla lunghezza della freccia che rappresenta il vettore, la **direzione** è data dall'inclinazione della retta su cui giace il vettore e il **verso** è dato dall'orientazione della freccia.

   Seleziona ora lo strumento *Segmento* e traccia i segmenti AB e OP. Controlla i risultati che restituisce *GeoGebra.* Cosa possiamo dire dei due vettori?
   Seleziona infine il comando *Retta* e traccia le rette r e s su cui giacciono rispettivamente i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Controlla i risultati che restituisce *GeoGebra.* Come sono le due rette? Quali sono i loro coefficienti angolari?

Apri una nuova pagina con GeoGebra Classico ed esegui questo secondo esercizio.

Esercizio guidato 3 - Somma e differenza tra vettori

Considera tre generici punti A, B e C del piano cartesiano.

1. Traccia i vettori $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$. Annota sul tuo foglio le loro componenti.

2. Nell'area di *Inserimento* scrivi l'operazione $v + w$. Osserva il risultato ottenuto.

   (a) Nota che il risultato dell'operazione è un vettore.
   (b) Quali sono le componenti del vettore? Calcola le componenti del vettore $\vec{v} + \vec{w}$ sul tuo foglio e verifica che coincidono con quelle restituite da *GeoGebra.*
   (c) In fisica, la somma di due vettori è data dalla cosiddetta "Regola del parallelogramma" oppure dall'equivalente "Metodo punta-coda". Se non li ricordi, ricerca online questi due metodi; poi con *GeoGebra* verifica graficamente questi due metodi.

3. Deseleziona tutti gli oggetti che compaiono sul tuo piano cartesiano ad eccezione dei punti A, B e C e dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Nell'area di *Inserimento* ora scrivi l'espressione $-v$. Cosa cambia rispetto a $\vec{v}$? Cosa possiamo dire delle componenti di $-\vec{v}$ rispetto a quelle di $\vec{v}$?

4. Ripeti le operazioni del punto (3) con le espressioni $2v$ e $w - v$.

Apri una nuova pagina con GeoGebra Classico ed esegui questo terzo esercizio.

Esercizio guidato 4 - Prodotto scalare tra vettori

Considera due generici punti A e B. Per semplicità prendete i punti nel primo quadrante. Traccia i vettori $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$.

1. Nell'area di *Inserimento* scrivi l'operazione $v \cdot w$ (scrivi "$v * w$"). Il risultato che restituisce *GeoGebra* è il prodotto scalare tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

2. Abbiamo visto che dati due vettori $\vec{v}(x_v, y_v)$ e $\vec{w}(x_w, y_w)$, il prodotto prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ è dato da $\vec{v} \cdot \vec{w} = x_v x_w + y_v y_w$. Verifica con carta e penna che l'operazione porta allo stesso risultato di *GeoGebra*.

3. Andiamo ora a verificare il significato geometrico del prodotto scalare di due vettori.

   (a) Traccia la retta r su cui giace il vettore $\vec{w}$.

   (b) Con lo strumento *Retta perpendicolare* traccia la retta t ortogonale ad r passante per A (segui le istruzioni date da *GeoGebra*).

   (c) Con lo strumento *Intersezione* trova il punto H. Esso corrisponde alla proiezione del punto A sulla retta r.

   (d) Deseleziona le rette r e t e traccia il segmento AH. Disegnalo con un segno tratteggiato (seleziona il segmento, col tasto destro premi su *Impostazioni* e vai su *Stile*).

   (e) Traccia la retta s perpendicolare a r e passante per O.

   (f) Traccia la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro O e passante per B con lo strumento *Circonferenza - centro e punto.*

   (g) Trova il punto K di intersezione tra la retta s e la circonferenza $\mathcal{C}$.

   (h) Traccia la retta u parallela a r e passante per K, poi trova il punto di intersezione J tra u e t.

(i) Con lo strumento *Poligono*, disegna il rettangolo $OKJH$. *GeoGebra* restituisce un valore numerico. Confrontalo col risultato ottenuto al punto (1) e trai le giuste conseguenze.

4. **Il segno del prodotto scalare**
Nel punto precedente abbiamo osservato qual è il significato geometrico del prodotto scalare. L'area di un poligono è sempre un numero positivo (o nullo nel caso di figure degeneri). Il prodotto scalare può essere negativo?

   (a) Deseleziona tutti gli elementi costruiti nel punto (3) e lascia sulla schermata i vettori $\vec{v}$, $\vec{w}$ e i punti A, B ed O.

   (b) Con lo strumento *Angolo* disegna l'angolo convesso $B\widehat{O}A$ seguendo le istruzioni di *GeoGebra*.

   (c) Ora traccia i segmenti OA e OB e rinominali rispettivamente con a e b.

   (d) Nell'area di *Inserimento* scrivi l'operazione "$a * b * \cos(\alpha)$". Poi, sotto, ricalcola il prodotto scalare tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
   Cosa osservi? Sposta il punto B e osserva come variano i risultati al variare dell'angolo α. Cosa possiamo concludere sul segno del prodotto scalare tra due vettori al variare dell'angolo tra essi compreso?

4.2 Scheda di lavoro 2 - Rette e vettori

Per la seguente esercitazione sono necessari carta, penna e un computer con GeoGebra Classico, fruibile gratuitamente online.

Esercizio 1 - Il comando *Retta*

Apri un nuovo file *GeoGebra*. Nell'area di *Inserimento* scrivi la parola *Retta*.

1. La prima opzione che il sofware offre è *Retta(<Punto>,<Punto>)*. Rappresenta i punti $A(1,3)$ e $B(-2,0)$. Col comando appena descritto, rappresenta la retta r passante per A e B.

2. Il secondo comando è *Retta(<Punto>,<Vettore direzione>)*. Rappresenta la retta s passante per A che ha vettore direzione $\vec{v}(2,-5)$.

3. Infine col comando *Retta(<Punto>,<Retta parallela>)* rappresenta la retta t passante per B e parallela alla retta s.

Esercizio 2 - Rette e vettori

Apri un nuovo file *GeoGebra.*

1. Rappresenta la retta r di equazione $-5x + 4y = 0$ e il vettore $\vec{v} = (-5, 4)$. Cosa puoi notare?

2. Rappresenta ora la retta s di equazione $3y - 1 = 0$ e il vettore $\vec{w} = (0, 3)$. Cosa puoi notare?

3. Rappresenta la retta t di equazione $2x + 5 = 0$ e il vettore $\vec{u} = (2, 0)$. Cosa puoi notare?

4. Rappresenta la retta p di equazione $y = -2x + 3$ e il vettore $\vec{m} = (1, -2)$. Cosa puoi notare? Osserva inoltre qual è il punto di intersezione tra la retta p e l'asse delle ordinate.

5. **Esploriamo *GeoGebra*** - Il sofware predispone un comando che restituisce il vettore direzione di una retta. Nell'area di *Inserimento* scrivi il comando *Direzione* e verifica graficamente che i vettori che *GeoGebra* restituisce corrispondono alle direzioni delle rette analizzate nei punti precedenti dell'esercizio.

Esercizio 3 - Distanza punto-retta

Traccia la retta r passante per i punti $A(1, 1)$ e $B(6, 3)$. Rappresenta poi il punto $P(2, 5)$.

1. Rappresenta graficamente il segmento PH, dove H corrisponde alla proiezione ortogonale di P sulla retta r. Disegna tale segmento in rosso con uno stile tratteggiato. Inoltre rappresenta anche un angolo retto che retta e segmento formano.

2. Osserva cosa restituisce *GeoGebra* in corrispondenza del segmento PH. Sul tuo foglio di carta calcola la distanza di P da r con la formula

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

   Verifica che i due valori corrispondano (usa *GeoGebra* come calcolatrice).

3. Per dimostrare in classe la formula precedente, abbiamo utilizzato il modulo del prodotto scalare tra i vettori $\overrightarrow{HP}$ e $\vec{n}$, dove quest'ultimo

rappresenta la direzione normale (cioè perpendicolare) alla retta r. Nell'area di *Inserimento* calcola ancora una volta la distanza tra P e r, sfruttando l'operatore valore assoluto che, su *GeoGebra*, restituisce sia il valore assoluto di un numero che il modulo di un vettore.

4. **Esploriamo *GeoGebra*** - Il software predispone lo strumento *Distanza o lunghezza* (si trova nella stessa sezione riservata alla rappresentazione grafica degli angoli) per calcolare direttamente la distanza fra due oggetti (per esempio fra due punti, fra due rette, fra una retta e un piano, ...). Usa il comando per trovare direttamente la distanza di P da r.

4.3 Scheda di lavoro 3 - Trasformazioni del piano - parte 1

Per la seguente esercitazione sono necessari carta, penna e un computer con GeoGebra Classico, fruibile gratuitamente online.

Definizione: Si chiamano **elementi uniti** di una trasformazione del piano ϕ gli elementi che hanno come immagine sé stessi, per esempio se dato un punto P vale che $\phi(P) = P$, questo si dice **punto unito**. Analogamente una retta r si dice **unita** se $\phi(r) = r$.

Esercizio 1 - La traslazione di vettore $\vec{v}(a, b)$

Definizione: Si definisce **traslazione di vettore** $\vec{v}$ la trasformazione del piano che associa ad ogni punto P il punto P' tale che il vettore $\overrightarrow{PP'}$ ha stessi direzione, modulo e verso del vettore $\vec{v}$. Le **equazioni** della traslazione di vettore $\vec{v}(a, b)$ sono

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Apri un nuovo foglio *GeoGebra*.

1. Rappresenta il punto $A(2, -2)$ e il vettore $\vec{v}(4, 3)$. Con lo strumento *Traslazione* trova il punto A' che corrisponde alla traslazione di A.

2. Rappresenta la retta r di equazione $-3x + y = -3$. Analogamente a quanto fatto prima, trova la retta r' che corrisponde alla traslazione di r di vettore $\vec{v}$.

3. Trova la retta s', traslazione della retta s di equazione $-3x + 4y = 0$ di vettore $\vec{v}$.

4. Scrivi sul tuo foglio le equazioni del vettore $\vec{v}$ e, facendo i calcoli, verifica che le rette r' ed s' sono le traslate di r ed s rispettivamente.

5. Esistono punti uniti per una generica traslazione?

6. Aiutandoti con quanto osservato nei punti precedenti, esistono rette unite? Se sì, scrivi la generica equazione esplicita di una di queste rette.

Esercizio 2 - La simmetria centrale

Definizione: Si definisce **simmetria di centro** $G(x_G, y_G)$ la trasformazione del piano che associa ad ogni punto P il punto P', simmetrico di P rispetto a G. Le **equazioni** di tale trasformazione sono

$$\begin{cases} x' = 2x_G - x \\ y' = 2y_G - y \end{cases}$$

Apri un nuovo foglio *GeoGebra*.

1. Rappresenta il punto $G(4, 4)$. Con lo strumento *Simmetria centrale* trova il punto A' simmetrico di $A(1, 2)$ rispetto a G. Sposta poi A ed osserva come si modifica A'.

2. Ci sono punti uniti? Riesci a trovare le loro coordinate?

3. Rappresenta i punti $B(3, 2)$ e $C(1, 4)$. Traccia le tre rette su cui giacciono i lati del triangolo ABC, poi rappresenta le loro simmetriche rispetto a G. Cosa puoi concludere?

4. Deseleziona tutti gli enti geometrici precedentemente rappresentati ad esclusione dei punti A e G. Traccia la retta passante per questi due punti e trova la sua simmetrica rispetto a G. Poi prova a spostare il punto A. Cosa noti?

5. Dall'analisi precedente, esistono rette unite? Se sì, scrivi la generica equazione esplicita di una di queste rette.

6. **Parentesi funzioni:** Considera ora la simmetria di centro $O(0, 0)$. Scrivi le equazioni della trasformazione. Traccia poi il grafico della funzione $y = f(x) = x^3$.

- Scrivi l'espressione analitica della sua simmetrica rispetto ad O.
- Rappresenta con *GeoGebra* il grafico di $f'(x)$ che corrisponde al simmetrico di $y = f(x)$ rispetto a O. Cosa puoi concludere?

Esercizio 3 - La simmetria assiale

Definizione: Si definisce **simmetria assiale** (o riflessione) rispetto alla retta r la trasformazione del piano che associa ad ogni punto P il punto P', simmetrico di P rispetto a r. Le **equazioni** della riflessione rispetto alla retta di equazione $y = mx + q$ sono

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2my + (1 - m^2)x - 2mq}{1 + m^2} \\ y' = \dfrac{2mx + (m^2 - 1)y + 2q}{1 + m^2} \end{cases}$$

Le **equazioni** della riflessione rispetto alla retta di equazione $x = x_0$ sono

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = y \end{cases}$$

Apri un nuovo foglio *GeoGebra*.

1. Rappresenta la retta r di equazione $y = 2x - 3$ e i punti $A(-2, 1)$ e $B(-1, -5)$. Con lo strumento *Simmetria assiale* trova i punti A' e B' simmetrici rispettivamente di A e B rispetto a r.
2. Ci sono punti uniti? Quali sono?
3. Rappresenta ora la retta s passante per i punti A e B. Traccia la retta s' simmetrica rispetto a r. Sposta i punti A e B e osserva i cambiamenti.
4. Traccia una retta t parallela alla retta r e poi rappresenta la sua simmetrica rispetto a r.
5. Traccia una retta u perpendicolare alla retta r e poi rappresenta la sua simmetrica rispetto a r.
6. Ci sono rette unite? Se sì, scrivi la generica equazione esplicita di una di queste rette.
7. **Parentesi funzioni:** Considera ora la riflessione rispetto all'asse y. Scrivi le equazioni della trasformazione. Traccia poi il grafico della funzione $y = f(x) = x^4 - x^2$.

- Scrivi l'espressione analitica della sua simmetrica rispetto all'asse y.
- Rappresenta con *GeoGebra* il grafico di $f'(x)$ che corrisponde al simmetrico di $y = f(x)$ rispetto all'asse y. Cosa puoi concludere?

8. **Parentesi funzioni bis:** Considera ora la riflessione rispetto alla bisettrice del I e III quadrante. Scrivi le equazioni della trasformazione. Considera ancora una volta la retta r di equazione $y = 2x - 3$.

   - Scrivi l'espressione analitica della sua simmetrica r' rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.
   - Rappresenta con *GeoGebra* tale retta sfruttando lo strumento *Simmetria assiale.*
   - Trova la funzione inversa della funzione $f(x) = 2x - 3$. Cosa puoi concludere?

4.4 Scheda di lavoro 4 - Trasformazioni del piano - parte 2

Per la seguente esercitazione sono necessari carta, penna e un computer con GeoGebra Classico, fruibile gratuitamente online.

Definizione: Si chiamano **elementi uniti** di una trasformazione del piano ϕ gli elementi che hanno come immagine sé stessi, per esempio se dato un punto P vale che $\phi(P) = P$, questo si dice **punto unito**. Analogamente una retta r si dice **unita** se $\phi(r) = r$.

Esercizio 1 - Dilatazioni e omotetie - parte 1

Definizione: Dati due numeri reali h e k, diversi da zero, si dice **dilatazione con centro nell'origine** e rapporti h e k la trasformazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = hx \\ y' = ky \end{cases}$$

Le dilatazioni con centro nell'origine che ingrandiscono o riducono una figura secondo la medesima scala lungo entrambi gli assi, cioè dilatazioni con $h = k$, si chiamano **omotetie**. Le omotetie trasformano una figura in una figura *simile* a quella originaria.

Apri un nuovo foglio *GeoGebra.*

1. Rappresenta il punto $A(2,1)$. Con lo strumento *Omotetia* trova i punti omotetici di A rispetto all'origine O del piano, che chiamerai A', A'', A''', rispettivamente di rapporto 2, 1/2, 3.
2. Sempre con lo strumento *Omotetia* trova i punti omotetici di A rispetto all'origine O del piano, che rinominerai B' e B'', rispettivamente di rapporto -3 e -1. Cosa noti sull'omotetia di centro l'origine e rapporto -1? Scrivi le equazioni di quest'ultima trasformazione e confrontale con quelle che già conosci.
3. Esistono punti uniti per una generica omotetia di centro l'origine?
4. Considera ora il triangolo ACD con $C(0,8)$ e $D(6,8)$. Rappresenta il triangolo simile $A'C'D'$ ottenuto grazie all'omotetia di centro O e rapporto 2. Fai lo stesso per $B''C''D''$, triangolo omotetico di ACD di rapporto -1. Riesci a trovare due trasformazioni che composte danno lo stesso risultato?
5. Rappresenta infine la retta passante per i punti A e C''. Trasformala con lo strumento *Omotetia* utilizzando vari rapporti. Cosa ottieni? Ci sono rette unite? Se sì, riesco a scrivere la generica equazione di tali rette?

Esercizio 2 - Dilatazioni e omotetie - parte 2

Una dilatazione con centro $C(x_C, y_C)$ ha equazioni

$$\begin{cases} x' = hx + x_C(1-h) \\ y' = kx + y_C(1-k) \end{cases}$$

È un'omotetia se $h = k$.

Apri un nuovo foglio *GeoGebra.* Esegui gli stessi passaggi del punto precedente considerando ora come centro il punto $T(-1,2)$.

4.5 Scheda di lavoro 5 - La circonferenza

Per la seguente esercitazione sono necessari carta, penna e un computer con GeoGebra Classico, fruibile gratuitamente online.

Definizione: La **circonferenza** è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto **centro**. Un segmento che congiunge un punto qualsiasi della circonferenza col suo centro prende il nome di **raggio**.

Esercizio 1 - Come definire una circonferenza con *GeoGebra*

La costruzione di una circonferenza con *GeoGebra* si basa su due importanti fatti di geometria euclidea. Il primo è il **terzo postulato di Euclide** che recita così

E che con ogni centro e intervallo sia tracciato un cerchio.

Il secondo è invece il teorema di esistenza e unicità della circonferenza passante per tre punti non allineati.

Apri un nuovo foglio *GeoGebra*.

1. Rappresenta il punto $C(1,2)$. Con lo strumento *Circonferenza - centro e raggio* traccia la circonferenza γ_1 di centro C e raggio 5. Osserva il risultato restituito da *GeoGebra* e nota che l'equazione della circonferenza viene scritta nella forma

   $$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

   dove (x_C, y_C) corrisponde al centro della circonferenza ed r al raggio.

   Rileggendo il terzo postulato di Euclide sopra riportato, nota che anche con *GeoGebra*, come con qualsiasi compasso, è sufficiente avere un punto e un numero (che coincide con la lunghezza del raggio) per determinare completamente una circonferenza.

2. Rappresenta ora i punti $A(-1,4)$ e $B(-2,2)$. Con lo strumento *Circonferenza - tre punti*, rappresenta la circonferenza passante per A, B e C. Osserva il risultato restituito da *GeoGebra* e stabilisci quali sono il centro e il raggio di γ_2 con carta e penna. Una volta determinati, con lo strumento del punto (1) verifica che sono corretti.

3. Con i comandi *Centro(<Conica>)* e *Raggio(<Conica>)* verifica ancora una volta i risultati relativi a γ_2 trovati al punto (2).

Esercizio 2 - L'equazione generale di una circonferenza

Apri un nuovo foglio *GeoGebra*.

1. Con lo strumento *Slider* definisci tre slider chiamati rispettivamente a, b e c che abbiano come valore minimo -5, come valore massimo 5 e incremento 0.5.

   Nell'area di *Inserimento* scrivi l'equazione della circonferenza γ

   $$x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

2. Osserviamo come cambia la posizione della circonferenza γ al variare dei parametri a, b e c. Rappresenta il centro P della circonferenza γ. Imposta infine $a = -3$, $b = 2$ e $c = -3$.

   (a) Tenendo fissi b e c, fai variare a. Cosa puoi notare? Come varia P? Ci sono dei punti fissi? In particolare, se $a = 0$, cosa noti?

   (b) Sia ora $a = -2$. Tieni fissi a e c, fai variare b. Cosa puoi notare? Come varia P? Ci sono dei punti fissi? In particolare, se $b = 0$, cosa noti?

   (c) Sia ora $a = -2$ e $b = 1$, fai variare c. Cosa puoi notare? Ci sono dei punti fissi? In particolare, se $c = 0$, cosa noti? Se $c > 1$ cosa succede?

Esercizio 3 - Rette tangenti

Apri un nuovo foglio *GeoGebra*.

1. Rappresenta la circonferenza di centro $C(3, 1)$ e passante per il punto $P(1, 5/2)$. Nel tuo quaderno trova l'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto P.

   Con lo strumento *Tangenti* verifica che la soluzione trovata per via algebrica sia la stessa restituita da *GeoGebra*.

2. Considera ora il punto $Q(1/2, 1)$ e ripeti i passaggi fatti nel punto precedente.

3. Considera ora il punto $R(13/2, 3/2)$ e ripeti i passaggi fatti al punto (1).

Capitolo 5

Risultati e conclusioni

Il progetto didattico è stato svolto in una classe terza di un Liceo Scientifico di Padova nell'anno scolastico 2022-2023. La classe era composta da 25 studenti, di cui 11 femmine e 14 maschi, e 5 di loro frequentavano la classe terza liceo scientifico per la seconda volta, ma durante l'anno scolastico precedente erano iscritti in altri licei del territorio.
La classe si presentava come una classe partecipativa durante le lezioni, con uno spiccato senso critico e ha dato più volte prova di tenere al proprio percorso di studi. Anche se ancora prematuro, la maggior parte della classe era orientata ad un percorso universitario di tipo scientifico, con particolare riferimento a facoltà ingegneristiche, economiche e medico-sanitarie.
La scuola metteva a disposizione degli studenti, per due ore in due pomeriggi a settimana, delle aule dedicate alle materie STEM. Durante questi incontri, gli studenti, organizzati in piccoli gruppi di studio autonomo, avevano la possibilità di studiare, approfondire e svolgere esercizi sotto la supervisione di due docenti di materia e alcuni studenti tutor selezionati dagli insegnanti stessi. Avendo a disposizione anche dei computer, per gli studenti questa si è rivelata un'ottima occasione per svolgere gli esercizi delle schede di laboratorio e analizzare nel dettaglio gli esercizi proposti.
Nello stesso istituto c'era un'altra classe terza Liceo Scientifico che è stata utilizzata come classe di controllo. Anche questa classe era composta da 25 studenti, di cui 5 femmine e 20 maschi.

Prima di cominciare il progetto didattico, si è deciso di assegnare ad entrambe le classi un test preliminare, che si trova nella pagina successiva, sui principali concetti di piano cartesiano e calcolo vettoriale appresi nel primo biennio in matematica e fisica. Il test è suddiviso in cinque quesiti.

Q1. Il primo quesito è incentrato su distanza tra punti e punto medio di un segmento.

Q2. Il secondo quesito verte sul calcolo vettoriale per componenti, argomento affrontato solo in fisica nel primo biennio.

Q3. Il terzo quesito analizza le conoscenze sul tema della retta nel piano cartesiano.

Q4. Il quarto quesito è un esercizio standard che richiede di calcolare l'equazione di due rette nel piano cartesiano.

Q5. Col quinto quesito si vogliono esaminare le competenze degli studenti in ambito di concetti matematici quali l'appartenenza di un punto ad una curva e l'intersezione di due curve nel piano cartesiano.

Il test è stato assegnato alle classi senza preavviso ed eseguito individualmente in maniera anonima. I risultati sono stati raccolti nella tabella 5.1.
Dall'analisi dei risultati è emerso che le classi, nella loro globalità, non avevano consolidato gli argomenti studiati nel primo biennio e solo 7 studenti della classe di riferimento hanno risposto in maniera corretta almeno al 50% delle richieste nel test e si può affermare che le classi partivano dallo stesso livello di conoscenze e competenze in ambito di geometria analitica. Prima di procedere con il programma curricolare, si è deciso di riprendere e ripassare alcuni concetti fondamentali in entrambe le classi per poter affrontare al meglio il programma didattico di terza liceo di geometria analitica.

Test Preliminare di Geometria Analitica

Quesito 1. Considera i punti $A(1,3)$, $B(5,2)$ e $C(1,-2)$ nel piano cartesiano.

- La **distanza** tra A e C vale: ...
- La **distanza** tra A e B vale: ...
- Il **punto medio** del segmento BC è: $M(\dots,\dots)$

Quesito 2. Considera i punti $A(-2,3)$ e $B(3,2)$ nel piano cartesiano di origine O.

- Il vettore $\vec{v}$ che ha come coda l'origine O e come punta il punto A è: $\vec{v}(\dots,\dots)$
- Il vettore $\vec{w}$ che ha come coda l'origine O e come punta il punto B è: $\vec{w}(\dots,\dots)$
- Il vettore $\vec{s}=\vec{v}+\vec{w}$ ha componenti $\vec{s}(\dots,\dots)$
- Il vettore $\vec{d}=\vec{v}-\vec{w}$ ha componenti $\vec{d}(\dots,\dots)$
- Il vettore $\vec{m}=5\vec{v}$ ha componenti $\vec{m}(\dots,\dots)$
- Quanto vale il **prodotto scalare** $\vec{v}\cdot\vec{w}$? Cosa possiamo dire di $\vec{v}$ e $\vec{w}$?

Quesito 3. Considera la retta r di equazione $4x-2y+1=0$.

- Verifica se il punto $P(1,2)$ appartiene alla retta r.

- Trova due punti che appartengano alla retta r.

- Il **coefficiente angolare** della retta r è $m=\dots$
- La retta r interseca l'asse y nel punto $(0,\dots)$
- Le rette r e $s: y=2x$ sono **parallele**? Se sì, perché?

- Le rette r e $t: y=-\frac{1}{2}x+2$ sono **perpendicolari**? Se sì, perché?

- La **distanza** del punto $P(0,-2)$ dalla retta r è ...

Quesito 4. Trova l'**equazione della retta** r passante per i punti $A(-3,0)$ e $B(1,2)$. Poi trova l'**equazione della retta** s passante per i punti B e $C(1,5)$. (Svolgi l'esercizio sul retro del foglio)

Quesito 5. Una piccola anticipazione (ne siamo proprio sicuri!?).

- L'equazione $x^2+y^2-2x+3y-6=0$ rappresenta la **circonferenza** $\mathcal{C}$.
  Verifica se i punti $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$ e $Q(4,-1)$ appartengono a $\mathcal{C}$.

- L'equazione $y=3x^2-5x+1$ rappresenta la **parabola** $\mathcal{P}$.
  Trova i punti di **intersezione** tra $\mathcal{P}$ e la retta di equazione $y=1$.

---

	classe di riferimento						classe di controllo					
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	R%	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	R%
Max	3	5	7	2	2		3	5	7	2	2	
S01	3	0	2	0.5	1	34%	2	2	4	0	0	42%
S02	0	0	0	0	0	0%	1	0	0	0	0	5%
S03	1	0	0	0	0	5%	0	3	0	0	0	16%
S04	2	0	0	0	0	11%	1	0	1	0	0	11%
S05	2	4	3	0	0	47%	3	1	2	0	0	32%
S06	3	3	4	0	0	53%	0	0	0.5	0	0.5	5%
S07	3	0	6	1	0	53%	1	4	0	0	0	26%
S08	2	0	4	0	0	32%	2	0	0	0.5	1	18%
S09	3	0	3	0	0.5	34%	2	3.5	2	0	0	39%
S10	3	0	3	0	0	32%	2	2	0	0	0	21%
S11	1	4	3	0	0	42%	2	0	3	0	0	26%
S12	2	0	0	0	0	11%	1	1	3	0	0	26%
S13	1	0	3	0.5	0	24%	3	4	1	0	1	47%
S14	3	0	4	0.5	0	39%	3	4	2	0	0	47%
S15	0	0	3	0	0	16%	1	3.5	1	0	1.5	37%
S16	2	0	5	0	0	37%	0	4	0	0	0	21%
S17	3	0	4	0	0	37%	1	2	0	0	0	16%
S18	2	0	1	0.5	0	18%	2	4	1	0	0	37%
S19	1	0	3	0	2	32%	2	4	0.5	0	0	34%
S20	2	0	0	0	0	11%	0	0	2	0	0	11%
S21	3	4.5	7	2	2	97%	0	0	1	0	0	5%
S22	3	2.5	6	2	2	82%	1	3	0	0	0	21%
S23	3	3.5	4	1	1.5	68%	1	0	0	0	0	5%
S24	3	1	6	1	0.5	61%	2	0	5	0	1.5	45%
S25	2	4	7	0.5	1	76%	1	1	2	0	0	21%
Media	2.12	1.06	3.24	0.38	0.42	38%	1.36	1.84	1.24	0.02	0.22	25%

Tabella 5.1: Tabella coi risultati del test preliminare

Dopo il test preliminare, si è iniziato il programma didattico esposto nel Capitolo 3, integrato opportunamente con richiami ed esercizi. Dopo aver affrontato in classe e in laboratorio le prime due sezioni del capitolo, si è optato per intervallare ore di lezione in cui si proseguiva con la parte di programma dedicata alle trasformazioni del piano con ore in cui si è fatto sostenere ad ogni studente della classe di riferimento una prova orale. Tale test di valutazione consisteva nel sottoporre ad ogni allievo un problema costituito da quattro quesiti ciascuno. La difficoltà dei quesiti era crescente.
La prova veniva così eseguita: un gruppo di tre studenti riceveva simultaneamente tre problemi diversi. Gli studenti avevano a disposizione cinque minuti di tempo per leggere e analizzare le prime due richieste del loro problema. Finito il tempo a disposizione, lo studente che si sentiva più pronto per iniziare la discussione del problema iniziava la prova, mentre gli altri potevano sfruttare i minuti di esposizione del compagno per finire di esaminare le richieste. Gli alunni avevano inoltre in dotazione un computer con *GeoGebra*, un foglio di carta e una penna. L'obiettivo principale di ogni allievo era quello di saper comprendere il testo, per poi individuare una strategia risolutiva adeguata e argomentare la soluzione proposta utilizzando il software di geometria dinamica. Una volta esposti i punti dell'esercizio, la parola passava ad un altro studente e via così fino a completamento di tutti e quattro i quesiti dei tre problemi. Non si è mai data particolare importanza all'esecuzione corretta dei calcoli nei procedimenti risolutivi, per dare maggiore enfasi ad acquisizione dei contenuti, capacità di collegare le conoscenze assimilate, capacità argomentative e padronanza lessicale.
Seguono alcuni dei problemi assegnati agli studenti.

Problema. Considera i punti $A(-2,3)$, $B(1,1)$ e $C(0,-1)$.

1. Trova l'equazione dell'altezza AH.
2. Quali sono le equazioni della simmetria rispetto all'asse y? Ci sono rette unite? Se sì, qual è la loro generica equazione?
3. Trova le coordinate del punto D tale che il poligono $ABCD$ sia un parallelogramma. Qual è la sua area?
4. Quanto vale $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$. Verifica con *GeoGebra* il risultato.

Problema. Considera il vettore $\vec{v}(-5,4)$.

1. Trova il punto B che corrisponde alla punta del vettore $\vec{v}$ se applicato al punto $A(0,3)$. Qual è l'equazione della retta r passante per A e B?

2. Trova un punto C sulla retta s di equazione $5x - 4y = -12$ tale che $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. È unico?

3. Trova le coordinate del punto F tale che il poligono $ABDF$ sia un quadrato, con D sulla retta s. Sono unici F e D?

4. Scrivi le equazioni della traslazione γ di vettore $\vec{v}$. Quali sono i punti uniti di γ? Ci sono rette unite? Se sì, scrivi le loro equazioni.

Problema. Considera la retta r di equazione $x - 2y - 1 = 0$.

1. Qual è il suo vettore direzione $\vec{v}$? Calcola $\vec{v} \cdot \vec{u}$, con $\vec{u} = (1, 4)$.

2. Scrivi le componenti di un vettore $\vec{w}$ perpendicolare a $\vec{v}$ che ha coda C nel punto di intersezione tra la retta r e l'asse y.

3. Esiste una trasformazione del piano che tiene ferma sia la retta r che la retta s perpendicolare a r e passante per C?

4. La trasformazione precedente è unica?

Nella pagina successiva è riportata la rubrica di valutazione fornita ad ogni studente per una prima autovalutazione e poi utilizzata dal docente per assegnare il voto finale della prova orale, dato da 1/4 del punteggio totale assegnato alla prova.
La tabella sottostante 5.2 invece riporta gli esiti delle 25 valutazioni ottenute dagli studenti della classe di riferimento e la loro media complessiva.

	Voto		Voto		Voto		Voto		Voto
S01	6.75	S06	9	S11	5.75	S16	7.75	S21	8.5
S02	6	S07	7.75	S12	6.5	S17	6	S22	6.5
S03	4.5	S08	8.5	S13	6.75	S18	5.75	S23	6.5
S04	6	S09	5.75	S14	9.25	S19	5.25	S24	10
S05	7	S10	10	S15	5.5	S20	10	S25	6.25
Media: 7.1, Moda: 5.75, Mediana: 6.5									

Tabella 5.2: Tabella coi voti della prova orale

RUBRICA DI VALUTAZIONE

Indicatori	Livelli	Descrittori	Punti	Punteggio
Acquisizione dei contenuti e dei metodi della disciplina	1	Non ha acquisito i contenuti e i metodi della disciplina o li ha acquisiti in modo estremamente frammentario e lacunoso.	0-2	
	2	Ha acquisito i contenuti e i metodi in modo parziale e incompleto, utilizzandoli in modo non sempre appropriato.	3-5	
	3	Ha acquisito i contenuti e utilizza i metodi in modo corretto e appropriato.	6-8	
	4	Ha acquisito i contenuti in maniera completa e approfondita, utilizzando con piena padronanza i loro metodi.	9-10	
Capacità di utilizzare le conoscenze acquisite e di collegarle tra loro	1	Non è in grado di utilizzare e collegare le conoscenze acquisite o lo fa in modo del tutto inadeguato.	0-2	
	2	È in grado di utilizzare e collegare le conoscenze acquisite con difficoltà e in modo stentato.	3-5	
	3	È in grado di utilizzare correttamente le conoscenze acquisite.	6-8	
	4	È in grado di utilizzare correttamente le conoscenze acquisite in maniera ampia e approfondita.	9-10	
Capacità di argomentare e rielaborazione dei contenuti acquisiti	1	Non è in grado di argomentare i procedimenti oppure argomenta in modo superficiale e disorganico.	0-2	
	2	È in grado di argomentare solo a tratti e solo in relazione a specifici argomenti.	3-5	
	3	È in grado di formulare semplici argomentazioni, con corretta rielaborazione dei contenuti acquisiti.	6-8	
	4	È in grado di formulare ampie e articolate argomentazioni, rielaborando, talvolta con originalità, i contenuti acquisiti.	9-10	
Ricchezza e padronanza lessicale e semantica, con riferimento al linguaggio tecnico	1	Si esprime in modo scorretto e stentato, utilizzando un lessico inadeguato.	0-2	
	2	Si esprime in modo non sempre corretto, utilizzando un lessico, talvolta tecnico, parzialmente adeguato.	3-5	
	3	Si esprime in modo corretto e preciso utilizzando un lessico adeguato, anche tecnico, vario e articolato.	6-8	
	4	Si esprime con ricchezza e piena padronanza lessicale e semantica, anche in riferimento al linguaggio tecnico.	9-10	
PUNTEGGIO TOTALE DELLA PROVA				

Prima di passare all'ultima serie di dati sul percorso svolto, viene riportato un elenco di alcuni errori comuni commessi e difficoltà percepite dagli studenti in sede di valutazione orale e non. Tali difficoltà talvolta sono state da imputare ad uno scarso studio individuale, che invece avveniva solo in gruppo o con l'ausilio di qualche supporto didattico esterno alla scuola, altre volte ad una imprecisa comprensione dei concetti, altre volte ancora all'ansia da prestazione accusata nel momento della prova.

1. Molto comune è stata una mispercezione del concetto di uguaglianza tra vettori. Difficile è stato infatti per alcuni studenti concepire uguali vettori di uguali lunghezza e verso, ma che giacciono su rette parallele e non per forza coincidenti. L'aiuto per chiarire questo errore è stato richiamare il teorema che afferma che l'uguaglianza di vettori si ha quando questi hanno stesse componenti.

2. Altre incoerenze sono state il parlare di "equazione di un vettore" o "somma di punti", diverse dalle imprecisioni lessicali come le "coordinate di un vettore" o le "componenti di un punto".

3. Si è verificata essere di difficile comprensione la trattazione sulle trasformazioni del piano, come già avevamo annunciato nel Capitolo 3. Tuttavia, le esperienze di laboratorio sono state quasi sempre illuminanti e hanno permesso una migliore assimilazione dei risultati. Questo fatto è emerso anche da un sondaggio a cui la classe ha risposto alla fine delle lezioni sulle trasformazioni del piano.

4. Infine, nel prosieguo delle lezioni, in occasione della risoluzione di alcuni esercizi, sono emerse delle lacune di geometria sintetica, come per esempio le differenze tra altezza, mediana e asse di un triangolo, nonché i teoremi di Talete ed Euclide.

Si conclude questa trattazione con l'ultima raccolta di valutazioni, fatta grazie ad una prova scritta che verteva sull'argomento della circonferenza nel piano cartesiano. Tale compito scritto è stato svolto sia dalla classe di riferimento che dalla classe di supporto, così da poter mettere a confronto i risultati dei due gruppi di studenti e cercare di intuire se l'aver lavorato con un software di geometria dinamica sia risultato maggiormente efficace e vantaggioso rispetto ad approccio didattico esclusivamente frontale. La classe di riferimento ha svolto il compito in laboratorio e ogni studente aveva la possibilità di utilizzare *GeoGebra*. Il docente ha accuratamente vigilato sugli studenti, controllando che non avessero accesso ad altre fonti esterne oltre al programma di geometria dinamica.

Nelle pagine seguenti sono presenti la traccia del compito e la scheda di valutazione fornite agli studenti. Il compito constava di due esercizi. Questi problemi sono stati strutturati in modo tale che gli studenti, nel caso in cui non fossero stati capaci di risolvere un punto della traccia, riuscissero comunque a proseguire nello svolgimento del compito, talvolta sfruttando *GeoGebra* stesso.
Gli esercizi erano di natura diversa: il primo verteva sulla circonferenza come conica del piano cartesiano ed era a tutti gli effetti un esercizio di geometria analitica. Il secondo invece era collegato con le funzioni irrazionali e la risoluzione di equazioni e disequazioni irrazionali.
I risultati del compito svolto dalle due classi sono raccolti nella tabella 5.3.

CLASSE DI RIFERIMENTO									
	Voto		Voto		Voto		Voto		Voto
S01	6.5	S06	4	S11	5	S16	5	S21	5
S02	4.5	S07	4.5	S12	5	S17	5	S22	7
S03	5.5	S08	8.5	S13	5	S18	4	S23	4
S04	4	S09	6.5	S14	10	S19	7	S24	10
S05	4	S10	4	S15	4	S20	5	S25	4
Media: 5.48, Moda: 4, Mediana: 5									
CLASSE DI CONTROLLO									
	Voto		Voto		Voto		Voto		Voto
S01	5.75	S06	9.5	S11	10	S16	6.75	S21	9.5
S02	4	S07	5.5	S12	6.5	S17	9.25	S22	4
S03	8	S08	8	S13	4	S18	4.75	S23	5.25
S04	6.25	S09	4	S14	6.75	S19	5	S24	4.5
S05	4.75	S10	6.5	S15	5.5	S20	5	S25	5.25
Media: 6.17, Moda: 4, Mediana: 5.5									

Tabella 5.3: Tabella coi voti della prova scritta finale

I dati raccolti dall'ultima prova di valutazione mostrano che il secondo esercizio è stato maggiormente penalizzante rispetto al primo. In entrambi, il criterio di comprensione e conoscenza è stato quello col punteggio più alto, all'argomentazione quello più basso.
Dall'analisi incrociata dei voti delle due classi è emerso che la classe di con-

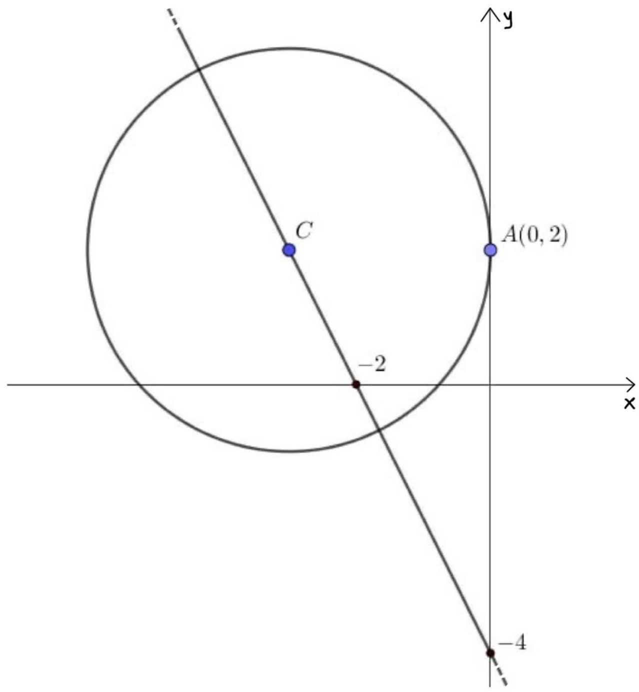
trollo, sebbene non abbia mai fatto attività di laboratorio con *GeoGebra*, ha avuto una situazione complessiva migliore rispetto alla classe di riferimento. Questo, con buona probabilità, non è da attribuire all'inefficacia del progetto didattico sviluppato, poiché sarebbero dovute essere sulla stessa riga anche le valutazioni orali, quanto piuttosto ad una superficialità nella preparazione da parte degli studenti stessi, scaturita dall'idea che lo svolgimento del compito fosse più semplice, perché si aveva la possibilità di usare in sede di verifica uno strumento "innovativo" e ricco di risorse come *GeoGebra*.

In conclusione, l'analisi dei risultati delle prove orali ha rivelato una comprensione più approfondita e una padronanza concettuale crescente, evidenziando il successo della metodologia adottata. Le esperienze di laboratorio hanno dimostrato di essere d'aiuto specialmente per la trattazione delle trasformazioni del piano, contribuendo al processo di assimilazione dei contenuti.
L'ultimo confronto tra la classe di riferimento e quella di controllo, attraverso la prova scritta sulla circonferenza nel piano cartesiano, ha rivelato che nonostante la classe di riferimento abbia utilizzato *GeoGebra* come supporto, la classe di controllo ha ottenuto una performance complessiva migliore. Tuttavia, si sottolinea che questo non riflette necessariamente sull'efficacia del progetto didattico, ma potrebbe derivare tra gli altri da una carente attenzione allo studio.
Il progetto didattico ha così contribuito a migliorare le competenze degli studenti in geometria analitica, sottolineando l'importanza di un approccio integrato e dinamico che coinvolge diverse metodologie didattiche. Ulteriori ricerche potrebbero esplorare le modalità di utilizzo ottimale degli strumenti digitali nell'apprendimento matematico e valutare l'impatto a lungo termine di tali approcci innovativi.

Verifica di Matematica
Classe 3AL, 19 aprile 2023

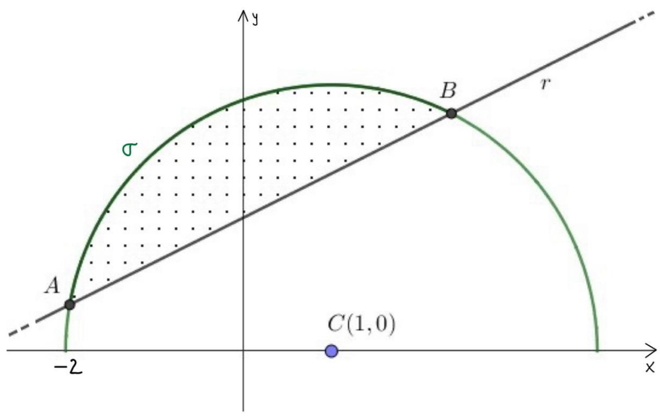
Nome Cognome

Esercizio 1.



(1) Scrivi l'equazione della circonferenza γ rappresentata in figura.
(2) Una volta stabilito che γ ha equazione $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$, determina l'equazione della retta r tangente alla circonferenza γ, passante per il punto $B(0, 3)$ e diversa dall'asse y.
(3) Determina le coordinate del punto T di intersezione tra la retta r e γ e calcola perimetro e area del poligono $ACTB$.

Esercizio 2.



(1) Scrivi l'espressione analitica della semicirconferenza σ di centro C rappresentata in figura.
(2) Risolvi graficamente le seguenti equazioni/disequazioni

$$\text{a) } \sqrt{8 - x^2 + 2x} = 2 - \frac{x}{2} \qquad \text{b) } \sqrt{8 - x^2 + 2x} \geq 2 - \frac{x}{2}$$

(3) Sia r la retta passante per i punti $(-1, 1)$ e $(3, 3)$. Sia S la regione del piano punteggiata, delimitata da r e σ. Descrivi in maniera esaustiva S.

$$S = \{(x, y) |\ x, y \in \mathbb{R} \wedge \dots\}$$

Scheda di valutazione

	CRITERI	PUNTEGGI			P.T.
		1.1	1.2	1.3	
	COMPRENSIONE E CONOSCENZA *Comprensione della richiesta* *Conoscenza dei contenuti matematici*	(0-4)	(0-4)	(0-4)	
	ABILITÀ LOGICHE E RISOLUTIVE *Abilità di analisi* *Uso del linguaggio appropriato* *Scelta di strategie risolutive adeguate*	(0-5)	(0-5)	(0-5)	
	CORRETTEZZA DELLO SVOLGIMENTO *Correttezza nei calcoli* *Correttezza nell'applicazione di tecniche e procedure grafiche*	(0-3)	(0-3)	(0-3)	
	ARGOMENTAZIONE *Giustificazione e commenti nelle scelte effettuate*	(0-3)	(0-3)	(0-3)	
	Punteggio totale	(0-15)	(0-15)	(0-15)	(0-45)

	CRITERI	PUNTEGGI			P.T.
		2.1	2.2	2.3	
	COMPRENSIONE E CONOSCENZA *Comprensione della richiesta* *Conoscenza dei contenuti matematici*	(0-3)	(0-4)	(0-4)	
	ABILITÀ LOGICHE E RISOLUTIVE *Abilità di analisi* *Uso del linguaggio appropriato* *Scelta di strategie risolutive adeguate*	(0-6)	(0-5)	(0-5)	
	CORRETTEZZA DELLO SVOLGIMENTO *Correttezza nei calcoli* *Correttezza nell'applicazione di tecniche e procedure grafiche*	(0-3)	(0-3)	(0-3)	
	ARGOMENTAZIONE *Giustificazione e commenti nelle scelte effettuate*	(0-3)	(0-3)	(0-3)	
	Punteggio totale	(0-15)	(0-15)	(0-15)	(0-45)

Tabella di conversione dal punteggio grezzo al voto in decimi

≤35	36-40	41-45	46-49	50-53	54-58	59-62	63-70	68-71	72-76	77-80	81-85	86-90
4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10

Bibliografia

[1] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori, 1990.

[2] Bruno D'Amore, Silvia Sbaragli, *La matematica e la sua storia, I. Dalle origini al miracolo greco*, Edizioni Dedalo, 2017.

[3] Bruno D'Amore, Silvia Sbaragli, *La matematica e la sua storia, II. Dal tramonto greco al Medioevo*, Edizioni Dedalo, 2018.

[4] Bruno D'Amore, Silvia Sbaragli, *La matematica e la sua storia, III. Dal Rinascimento al XVIII secolo*, Edizioni Dedalo, 2019.

[5] A. B. Frank, P. Di Martino, R. Natalini, G. Rosolini, *Didattica della matematica*, Mondadori Università, 2018.

[6] V. Villani, *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria)*, Pitagora Editrice Bologna, 2006.

[7] L. Sasso, C. Zanone, *Colori della Matematica edizione BLU, seconda edizione, volume 3γ*, D Scuola, 2021.

Sitografia

[8] EUCLIDE, *Gli Elementi*, `https://www.scienzaatscuola.it/euclide/libro5.html`.

[9] EUCLIDE, *Euclid's Elements*, `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookIII/bookIII.html`.

[10] RENÉ DESCARTES, *THE GEOMETRY, translation from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham*, Dover Publications, Inc. New York, 1954, `https://download.tuxfamily.org/openmathdep/geometry_analytic/The_Geometry-Descartes.pdf`

[11] *Corso di Storia ed epistemologia della matematica*, `http://adriani.altervista.org/school/stuff/epistemologia_04.pdf`.

[12] *Leonardo da Vinci e la duplicazione del cubo*, `https://www.saperescienza.it/rubriche/matematica/leonardo-da-vinci-e-la-duplicazione-del-cubo-11-05-2019/`.

[13] MINISTERO DELL'ISTRUZIONE E DEL MERITO, `https://www.miur.gov.it/liceo-scientifico`