

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Trasferimento Radiativo nelle Atmosfere degli Esopianeti

Laureando:
Alessandro Magon
Matricola: 1070230

Relatore:
Prof. **Francesco Marzari**

Anno Accademico 2016-2017

Indice

1	Intensità e Flusso	3
1.1	Intensità	3
1.2	Flusso	4
1.3	Flusso di Superficie	4
1.4	Intensità e Flusso di Corpo Nero	5
2	Trasferimento Radiativo: Fondamentali	7
2.1	Opacità	7
2.1.1	Coefficiente di Estinzione: Assorbimento e Scattering	8
2.1.2	Coefficiente di Emissione: Emissione Termica e Scattering	8
2.1.3	Opacità Medie	9
2.2	Profondità Ottica	10
2.3	Equilibrio Termodinamico Locale (LTE)	11
2.3.1	Legge di Kirchhoff	11
2.4	Funzione Sorgente	11
2.5	Le Equazioni del Trasferimento Radiativo	12
2.5.1	Approssimazione di Piani Paralleli	12
2.5.2	Soluzione Formale	13
2.5.3	Soluzione Formale per Quota Arbitraria	14
3	Trasferimento Radiativo: Soluzioni	17
3.1	Descrizione dello Spettro Emergente	17
3.2	La Formazione delle Linee	18
3.2.1	Atmosfera Isoterma	19
3.2.2	Atmosfera con Gradiente di Temperatura	20
3.2.3	Spettri e Struttura Verticale Temperatura-Pressione	21
3.3	Soluzioni Approssimate per Piani Paralleli	21
3.3.1	Trasmissione	22
3.3.2	Emissione Termica	22
3.3.3	Scattering	24
3.4	Approssimazione di Diffusione	25

Introduzione

A differenza di molti altri settori della fisica, l'astrofisica studia oggetti extraterrestri e fenomeni astronomici che sono così remoti da rendere spesso impossibile ogni tipologia di misurazione *in situ*. La maggior parte dell'informazione che otteniamo da questi oggetti, arriva a noi sotto forma di radiazione elettromagnetica. Per cui la sfida di un astrofisico oggi è decifrare l'informazione che ci arriva attraverso la radiazione: è per questo necessario studiare i processi che producono e modificano questa radiazione all'interno dell'oggetto, come, nello specifico, nelle atmosfere planetarie.

Il problema della trasmissione della radiazione in un'atmosfera viene posto per la prima volta da Lord Rayleigh nel 1871, nello studio della luce solare. La questione è stata poi ripresa poi nel 1905 da Schuster, quando sono state osservate linee di emissione ed assorbimento negli spettri stellari.

Recentemente questo ambito di ricerca ha suscitato molto interesse e potenzialità. Nel 2015 è stato scoperto un pianeta non molto più grande della Terra, Kepler-452b, che orbita attorno ad una stella ad una distanza simile a quella a cui la Terra orbita attorno al Sole: infatti l'anno su questo pianeta dura solamente circa 20 giorni in più. Di questo, come delle altre centinaia di pianeti scoperti di recente, conosciamo però solamente dettagli basilari: massa, raggio e qualche parametro dell'orbita. Ma le domande che aspettano ancora risposta sono molte: di cosa sono fatti, quali sono le caratteristiche dei loro climi e, la più esotica di tutte, se possono ospitare vita.

Lo stato della nostra scarsa conoscenza può presto cambiare con lo studio degli spettri degli esopianeti. A tal proposito nel 2018 sarà lanciato il *James Webb Space Telescope* (JWST) della NASA che permetterà lo studio di pianeti, che con gli strumenti attuali sarebbe impossibile osservare. JWST sarà inoltre in grado di misurare spettri di molecole chiave per la conoscenza della composizione chimica dell'atmosfera: acqua, anidride carbonica e metano.

Esistono diversi metodi con cui gli esopianeti vengono rivelati: alcuni dei primi pianeti sono stati scoperti osservando le linee spettrali stellari e lo *shift* di lunghezza d'onda che avviene quando la stella si muove allontanandosi o avvicinandosi dalla Terra: questo movimento sarebbe conseguenza della presenza di uno o più pianeti che vi orbitano attorno. Altri metodi possono invece utilizzare un *imaging* diretto del pianeta, in cui si oscura la luce diretta della stella, o sfruttare la curvatura del raggio di luce proveniente dalla stella quando passa in prossimità del pianeta.

Il metodo con cui è stata scoperta la maggior parte dei pianeti (quasi il 78%) è però l'*occultazione*: quando un pianeta passa davanti alla stella, crea una piccola flessione della quantità di luce stellare misurata dai telescopi. Con lo scopo di applicare questo tipo di osservazione, sono in cantiere due progetti: *COROT* il telescopio europeo e *Kepler*, statunitense, per "dare la caccia" ad esopianeti direttamente dallo spazio, in modo da evitare l'effetto che avrebbe l'atmosfera terrestre sulla radiazione prima che questa venga misurata.

Ad oggi, 22/11/2017, il numero di esopianeti noti e confermati ammonta a 3558 pianeti di cui 881 terrestri¹.

¹Dati tratti da <https://exoplanets.nasa.gov/>

Il secondo passo che si compie nello studio degli esopianeti è lo studio degli spettri della radiazione. Questa radiazione può avere diversi principi: solitamente quella studiata è la radiazione stellare che attraversa e viene trasmessa nell'atmosfera, o altrimenti può essere emessa direttamente dal pianeta, se questo è abbastanza caldo. Nel primo caso, per evitare di misurare caratteristiche dell'atmosfera stellare piuttosto che di quella planetaria, viene paragonato lo spettro della stella durante il transito del pianeta con quello quando il pianeta non vi si trova direttamente di fronte.

Studiare lo spettro di un pianeta può fornire diverse informazioni: può rivelare di cosa è fatta l'atmosfera, le sue dimensioni e temperatura, le condizioni in cui si è formato il pianeta e se c'è la possibilità che possa ospitare vita.

In questo lavoro presentiamo il tema del *trasferimento radiativo* in atmosfera e l'obiettivo è una presentazione delle basi teoriche di questo ambito di ricerca, che poi trovano applicazione in moderni sistemi di metodi computazionali utilizzati parallelamente a diversi dati realmente misurati. Si pone l'attenzione su diverse approssimazioni e casi fisici specifici che vengono considerati per la soluzione delle equazioni fondamentali, con particolare interesse nel caso di atmosfere planetarie.

La notazione e le definizioni usate seguono fedelmente [11].

Capitolo 1

Intensità e Flusso

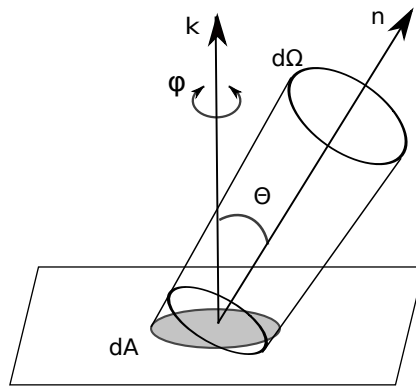


Figura 1.1: Intensità specifica

1.1 Intensità

Iniziamo con una presentazione dei principi e delle definizioni che si utilizzano nello studio della radiazione nelle atmosfere degli esopianeti.

La radiazione viene descritta come un fascio di fotoni identici che viaggiano nello spazio e attraverso l'atmosfera e interagiscono con questa. Mentre il fascio attraversa la materia, i fotoni vengono assorbiti dal fascio o emessi nello stesso. Ciò che viene misurato e studiata, ovvero la grandezza di interesse in questa analisi, è l'*intensità* I , un parametro macroscopico a cui contribuiscono tutti i processi microscopici che avvengono durante l'interazione. Formalmente l'intensità è definita come la quantità di energia che attraversa una superficie dA in una certa posizione \mathbf{x} e in direzione $\hat{\mathbf{n}}^1$, all'interno di un angolo solido $d\Omega$ centrato attorno ad $\hat{\mathbf{n}}$, per unità di frequenza e di tempo

$$dE(\nu, t) = I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} d\Omega dA d\nu dt \quad (1.1)$$

In unità del SI, I viene espressa in $J m^{-2} sr^{-1} s^{-1} Hz^{-1}$.

La seguente grandezza di interesse che viene utilizzata è l'intensità media: l'intensità mediata su un angolo solido Ω

$$J(\mathbf{x}, \nu, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) d\Omega \quad (1.2)$$

¹ I è una quantità scalare, di cui però si evidenzia la direzionalità.

1.2 Flusso

Il *flusso* è la quantità di energia che attraversa una superficie arbitrariamente orientata dA , su cui è definito un versore normale $\hat{\mathbf{n}}$, per intervallo di frequenza per unità di tempo. Il flusso \mathbf{F} è definito in ciascuna posizione \mathbf{x} nell'atmosfera planetaria ed è calcolato dall'intensità nella direzione $\hat{\mathbf{n}}$, integrata sull'angolo solido Ω .

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \nu, t) = \int_{\Omega} I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) \hat{\mathbf{n}} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) \hat{\mathbf{n}} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (1.3)$$

Si misura in $J m^{-2} s^{-1} Hz^{-1}$. Il flusso è un vettore e possiamo perciò riscriverlo in termini delle sue componenti:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \nu, t) = F_i(\mathbf{x}, \nu, t) \hat{\mathbf{i}} + F_j(\mathbf{x}, \nu, t) \hat{\mathbf{j}} + F_k(\mathbf{x}, \nu, t) \hat{\mathbf{k}} \quad (1.4)$$

In astrofisica, le quantità di interesse sono spesso vincolate ad una direzione preferenziale, di solito quella verso l'osservatore, che in questo caso identifichiamo con $\hat{\mathbf{k}}$. Quindi possiamo considerare solamente il modulo di questa componente, $F_k(\mathbf{x}, \nu, t)$:

$$\begin{aligned} F_k(\mathbf{x}, \nu, t) &= \frac{dE(\nu, t)}{dAd\nu dt} = \int_{\Omega} I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) \cos \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (1.5)$$

1.3 Flusso di Superficie

Nello studio delle atmosfere esoplanetarie ciò a cui siamo interessati è il flusso emergente attraverso una superficie, quella del pianeta o in altri casi quella stellare, e attraverso lo strato superiore dell'atmosfera, convenzionalmente identificato con la quota in cui le interazioni tra la radiazione e il gas o le particelle solide dell'atmosfera sono minime.

Come nel caso precedente, consideriamo solamente la grandezza scalare del flusso uscente. Usiamo le coordinate polari (r, θ, ϕ) , in cui definiamo θ la latitudine² e ϕ la longitudine. Inoltre, siccome consideriamo l'intensità uscente da una superficie sferica (o quasi), possiamo considerare $r = R_p$, costante. Usiamo quindi (θ, ϕ) al posto di \mathbf{x} e introduciamo due ulteriori angoli (θ_n, ϕ_n) che indicano la direzione $\hat{\mathbf{n}}$ e hanno origine in $\hat{\mathbf{n}}$, quindi scriviamo l'intensità come $I_S(\theta, \phi, \theta_n, \phi_n, \nu, t)$. Quindi, denotando $\hat{\mathbf{k}}$ come la direzione dell'osservatore, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \cos \phi_n \cos \theta_n$. Il flusso di superficie è

$$F_S = \int_{\Omega_n} I_S(\theta, \phi, \theta_n, \phi_n, \nu, t) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} d\Omega_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I_S(\theta, \phi, \theta_n, \phi_n, \nu, t) \cos \phi_n \cos^2 \theta_n d\theta_n d\phi_n \quad (1.6)$$

Questo flusso calcolato è una quantità scalare e corrisponde al flusso di superficie nella posizione (θ, ϕ) che viaggia in direzione $\hat{\mathbf{k}}$.

Per un pianeta in cui l'intensità è uniforme su tutta la superficie $I_S(\theta, \phi, \nu, t) = I_S(\nu, t)$, il flusso può essere facilmente calcolato

$$F_S(\nu, t) = \pi I_S(\nu, t) \quad (1.7)$$

Il flusso totale, che raccoglie tutte le frequenze, si ottiene integrando

$$F_S(t) = \int_0^{\infty} F_S(\nu, t) d\nu \quad (1.8)$$

²Si sottolinea che θ è definito in modo diverso rispetto alle sezioni precedenti.

viene definito anche *flusso bolometrico*, quantità che non dipende da ν .

Il flusso che viene osservato dalla Terra o rilevato dal detector ha la seguente relazione con il flusso uscente dal pianeta

$$F_{mis}(\nu, t) = \left(\frac{R_p}{D}\right)^2 F_S(\nu, t) \quad (1.9)$$

per considerazioni geometriche sul flusso, in cui R_p descrive il raggio del pianeta e D la distanza tra questo e il detector.

Nello stesso modo, se vogliamo considerare il flusso di radiazione stellare incidente sul pianeta,

$$F_{inc}(\nu, t) = \left(\frac{R_p}{a}\right)^2 F_{S*}(\nu, t) = \left(\frac{R_p}{a}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{S*}(\theta, \phi, \nu, t) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.10)$$

in cui D è stato sostituito da a , semiasse maggiore dell'orbita del pianeta attorno alla stella.

1.4 Intensità e Flusso di Corpo Nero

Un corpo a temperatura T può emettere un valore massimo di flusso di radiazione pari a $M_{bb} = \sigma T^4$, in cui σ è una costante, secondo la legge di Stefan-Boltzmann. Tale materiale è detto *corpo nero* (*blackbody*). Un corpo nero è un assorbitore "perfetto" che assorbe tutta la radiazione incidente e ne riemette in uno spettro di frequenze che dipende solamente dalla temperatura T . La distribuzione angolare di radiazione è costante, cioè la radiazione è isotropa: $B(T, \nu)$.

L'intensità della radiazione è descritta dalla legge di Planck

$$B(T, \nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1.11)$$

L'intensità totale è ottenuta integrando la legge di Planck su tutte le frequenze

$$B(T) = \sigma T^4 \quad (1.12)$$

in cui la costante di Stefan-Boltzmann $\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60h^3 c^2} \approx 5.67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$.

Il flusso può essere facilmente calcolato usando l'isotropia dell'intensità: per esempio, il flusso di radiazione di corpo nero uscente da un emisfero sarà $F_S(T, \nu) = \pi B(T, \nu)$.

Nonostante il concetto di "corpo nero" sia un puro modello, le atmosfere planetarie e stellari possono essere approssimate a corpi neri con temperature che vanno da 60 a 2000K nel primo caso o da 3000 a 6000K nel secondo.

Capitolo 2

Trasferimento Radiativo: Fondamentali

Con trasferimento radiativo si intende lo studio dell'insieme dei processi che avvengono durante la trasmissione della radiazione in un mezzo in cui viaggia, cambiando. L'interesse è rivolto verso l'interazione tra radiazione e materia più che al movimento dei fotoni e per questo il termine "trasferimento" potrebbe essere fuorviante. Verrà assunto che la luce viaggia attraverso il mezzo in una scala di tempo molto minore rispetto ai cambiamenti che avvengono all'interno del mezzo stesso.

La radiazione che emerge dall'atmosfera sarà il risultato di una grande varietà di processi di assorbimento ed emissione da parte di atomi, molecole e particelle solide. Nello spettro emergente di questa radiazione è contenuta molta informazione, tra cui indizi su temperatura, pressione e composizione dell'atmosfera del pianeta.

L'equazione del trasferimento radiativo descrive come varia il fascio di radiazione mentre percorre una distanza s all'interno di un volume di gas. I contributi a questa variazione possono essere riassunti in due termini:

-un termine di attenuazione $\kappa(\mathbf{x}, \nu)I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu)$, dove κ è il coefficiente di estinzione e I l'intensità e

-un termine di addizione $\epsilon(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu)$, in cui ϵ è il coefficiente di emissione.

Quindi sommando i due termini per un'atmosfera in condizioni statiche, le cui proprietà non cambiano nel tempo, l'equazione del trasferimento radiativo è la variazione dell'intensità della radiazione lungo il tratto di cammino ds :

$$\frac{dI(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu)}{ds} = -\kappa(\mathbf{x}, \nu)I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) + \epsilon(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) \quad (2.1)$$

L'equazione del trasferimento è stata per la prima volta scritta in questa forma da Schwarzschild.

2.1 Opacità

L'opacità è una delle più importanti quantità dell'atmosfera che influenza il trasferimento di radiazione: è la misura di quanto sia difficile per la radiazione passare attraverso una sostanza. Lo studio dell'opacità di un'atmosfera consiste nella determinazione dei coefficienti di estinzione ed emissione e i diversi fenomeni fisici che vengono coinvolti. I principali parametri da cui dipende sono la densità numerica di particelle nell'atmosfera, la temperatura, la pressione e la frequenza (o equivalentemente la lunghezza d'onda). Quindi radiazioni di diversa lunghezza d'onda interagiscono in modo diverso con l'atmosfera e le relative intensità vengono trasmesse in quantità diverse.

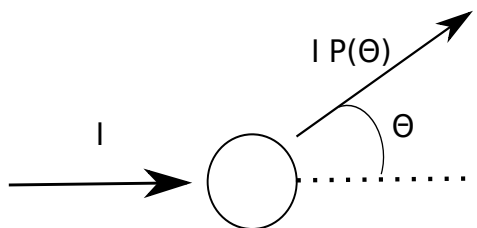


Figura 2.1: Angolo di scattering

2.1.1 Coefficiente di Estinzione: Assorbimento e Scattering

Il coefficiente di estinzione monocromatico $\kappa(\mathbf{x}, \nu)$ descrive la quantità di energia rimossa dal fascio di radiazione da un volumetto dV ad un angolo solido $d\Omega$ per unità di tempo e di frequenza:

$$dE = \kappa(\mathbf{x}, \nu) I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) dV d\Omega d\nu dt \quad (2.2)$$

κ si misura in m^{-1} o in cm^{-1} ed include i processi che contribuiscono negativamente all'energia del fascio di radiazione. Questo coefficiente ha segno positivo, avendo scritto il contributo all'intensità come $-\kappa I$. Il coefficiente di estinzione κ è la somma di due contributi

$$\kappa(\mathbf{x}, \nu) = \alpha(\mathbf{x}, \nu) + \sigma_s(\mathbf{x}, \nu) \quad (2.3)$$

in cui α rappresenta il coefficiente di "vero assorbimento", il processo in cui il fotone viene distrutto (per esempio assorbito dalla particella e convertito in energia cinetica), e σ_s il coefficiente di scattering. Nello scattering, un fotone che viaggia con frequenza ν in direzione $\hat{\mathbf{n}}$ entra in contatto con un atomo che viaggia con velocità \mathbf{v} e causa eccitazione di questo, il quale si disecciterà e tornerà allo stato iniziale emettendo un fotone di frequenza ν' in direzione $\hat{\mathbf{n}}'$. In generale $\hat{\mathbf{n}}' \neq \hat{\mathbf{n}}$ e quindi $\nu' \neq \nu$ a causa dello shift Doppler.

L'estinzione è isotropa perchè assorbimento e scattering sono indipendenti dalla direzione da cui arriva il fotone, perciò κ non dipende da $\hat{\mathbf{n}}$.

Il coefficiente di estinzione contiene le informazioni sulle densità dei gas ed è simile ad una sezione d'urto, quindi i coefficienti di assorbimento e scattering possono essere scritti come la somma della densità numerica n di particelle moltiplicata per le sezioni d'urto specifiche di assorbimento o scattering:

$$\alpha(\mathbf{x}, \nu) = \sum_j \alpha_j(\mathbf{x}, \nu) = \sum_j \sum_i n_{ji}(\mathbf{x}) \sigma_{ji}(\mathbf{x}, \nu) \quad (2.4)$$

in cui l'indice j si riferisce a differenti specie molecolari e atomiche e i a diversi stati (energia,...).

2.1.2 Coefficiente di Emissione: Emissione Termica e Scattering

Il coefficiente di emissione monocromatica $\epsilon(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu)$ descrive la quantità di energia dE emessa in un volume dV entro una direzione e un angolo solido $d\Omega$ nell'intervallo di tempo dt e nella banda di frequenze $d\nu$

$$dE = \epsilon(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) dV d\Omega d\nu dt \quad (2.5)$$

e si misura in $Jm^{-3}sr^{-1}s^{-1}Hz^{-1}$. Per definizione ϵ deve sempre essere minore o uguale ad 1. Localmente il contributo dell'emissione alla radiazione è $dI(s) = \epsilon(s)ds$, in cui s misura la lunghezza geometrica nel fascio.

Il coefficiente di emissione è la somma di due contributi:

-l'emissione termica, che può essere descritta dalla legge di Kirchhoff sulla radiazione termica (valida in condizioni di equilibrio termodinamico locale)

$$\epsilon_{therm}(\mathbf{x}, \nu) = \alpha(\mathbf{x}, \nu)B(\mathbf{x}, \nu) \quad (2.6)$$

in cui B è la radiazione di corpo nero;

-termine di puro scattering

$$\epsilon_{scat}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \sigma_s(\mathbf{x}, \nu) \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} P(\Theta) I((\mathbf{x}', \hat{\mathbf{n}}', \nu)) d\Omega' \quad (2.7)$$

in cui Ω è l'angolo di scattering ($\Theta = \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}'$). In generale le quantità con l'indice primo si riferiscono alla direzione di incidenza e quelle senza indice a quella di scattering. Lo scattering in questo caso di emissione, a differenza del termine termico, può essere anisotropo: per questo motivo viene introdotta $P(\Theta)$, la funzione di fase adimensionale e normalizzata, la quale descrive la probabilità direzionale di scattering. Per scattering isotropo, $P(\Theta) = 1$ e

$$\epsilon_{scat}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \sigma_s(\mathbf{x}, \nu) J(\mathbf{x}, \nu) \quad (2.8)$$

in cui J è l'intensità media.

Notiamo quindi che lo scattering può avere un contributo sia positivo che negativo sull'andamento dell'energia del fascio nell'atmosfera del pianeta e che il coefficiente di emissione in generale può dipendere da $\hat{\mathbf{n}}$.

2.1.3 Opacità Medie

Spesso può essere conveniente utilizzare l'opacità media, così da poter mediare le equazioni sulla frequenza (o lunghezza d'onda). Una semplice media dell'opacità, però, potrebbe non essere utile, o addirittura fuorviante. Per esempio, considerando il flusso di un pianeta con alta opacità a frequenze UV, dove praticamente non c'è flusso, ma opacità quasi nulla per gli altri valori delle frequenze per cui c'è la maggior parte dell'intensità, l'opacità media non sarebbe rappresentativa, ma anzi un'opacità nulla darebbe migliore descrizione del sistema.

Ciò che ci interessa è la quantità di flusso che viene bloccata (o lasciata passare) nell'atmosfera a diverse frequenze dalle particelle emettenti o assorbenti. Quindi opacità medie utili sono quelle pesate da funzioni dell'intensità. L'intensità del pianeta è ciò che cerchiamo, perciò è sconosciuta, quindi spesso si usa l'intensità di corpo nero.

L'opacità media di Planck, valida soprattutto in regimi ottici trasparenti, è definita come l'opacità pesata dall'intensità di corpo nero ad una certa temperatura T :

$$\kappa_P(T, P, \nu) = \frac{\int_0^\infty \kappa(T, P, \nu) B(T, \nu) d\nu}{\int_0^\infty B(T, \nu) d\nu} \quad (2.9)$$

Altrimenti si usa l'opacità media di Rosseland

$$\frac{1}{\kappa_R(T, P, \nu)} = \frac{\int_0^\infty [\kappa(T, P, \nu)]^{-1} [dB(T, \nu)/dT] d\nu}{\int_0^\infty [dB(T, \nu)/dT] d\nu} \quad (2.10)$$

che è pesata sulla derivata dell'intensità di corpo nero rispetto alla temperatura. La media di Rosseland è utile in casi particolari, diversamente da quella di Planck, perchè assegna una media più elevata alle frequenze con piccole opacità rispetto a quelle con opacità maggiore: questo rappresenta la situazione fisica in cui più radiazione viaggia nell'atmosfera a frequenze per cui l'opacità è piccola. In generale entrambe le medie possono variare di diversi ordini di grandezza, visto che κ nelle atmosfere assume valori entro un range molto ampio, e la forma delle due funzioni utilizzate per pesare l'opacità non è molto diversa: cambia però il modo in cui le due medie sono definite.

2.2 Profondità Ottica

La profondità ottica τ è una misura della trasparenza e descrive il grado di opacità di una sezione dell'atmosfera nei confronti di una radiazione che l'attraversa. Rappresenta il numero di volte che il fotone percorre una lunghezza pari al cammino libero medio. Un mezzo completamente trasparente ha profondità ottica nulla e si definisce un mezzo opaco (otticamente spesso) se $\tau > 1$, mentre trasparente (otticamente sottile) se $\tau < 1$, cioè quando l'interazione tra fotone e materia avviene raramente.

Come il coefficiente di estinzione, la profondità ottica dipende dalla frequenza e dalla collocazione spaziale: $\tau(\mathbf{x}, \nu)$. Lungo un cammino unidimensionale s , la profondità ottica monocromatica misurata lungo il fascio in uno strato spesso ds è definita adimensionale come

$$d\tau(s, \nu) = -\kappa(s, \nu)ds \quad (2.11)$$

Il segno negativo è giustificato dal fatto che per convenzione si pone $\tau = 0$ sulla superficie dell'atmosfera. Siccome l'osservatore guarda da fuori, verso l'interno dell'atmosfera, fino alla quota z_{max} ,

$$\tau(z_{max}, \nu) = - \int_{z=0}^{z_{max}} \kappa(z', \nu)dz' \quad (2.12)$$

L'integrale è calcolato sul cammino percorso dal fascio. Per semplicità sarà denotata come τ_ν e la dipendenza da z posta come implicita.

La probabilità che un fotone incidente venga fermato in una porzione di atmosfera di altezza dz e superficie A^2 in cui la densità di particelle è n , sarà il rapporto tra l'area netta delle molecole sull'area della porzione:

$$P(z) = \frac{n\sigma A^2 dz}{A^2} = n\sigma dz \quad (2.13)$$

ed essendo l'attenuazione di intensità

$$dI = -\kappa Idz = -n\sigma Idz \quad (2.14)$$

possiamo definire il libero cammino medio del fotone come

$$l = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{\kappa} \quad (2.15)$$

e

$$d\tau = \frac{1}{l} dz \quad (2.16)$$

Da $dI = -\kappa Idz$,

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dz}{l} \quad (2.17)$$

che ha soluzione

$$I = I_0 e^{-z/l} \quad (2.18)$$

Se vogliamo calcolare la probabilità che un fotone sia assorbito tra $z + dz$ e z

$$dP(z) = \frac{I(z + dz) - I(z)}{I_0} = -\frac{1}{l} e^{-z/l} dz \quad (2.19)$$

usando l'approssimazione $e^{-x} = 1 - x + \dots$

Il valore di aspettazione della distanza percorsa è quindi

$$\langle z \rangle = \int_0^\infty z dP(z) = \int_0^\infty \frac{z}{l} e^{-z/l} dz = l \quad (2.20)$$

come ci potevamo aspettare.

2.3 Equilibrio Termodinamico Locale (LTE)

Si parla di equilibrio termodinamico quando un materiale è in equilibrio termico, chimico e meccanico, quindi non possono avvenire cambiamenti termici senza l'intervento di forze esterne. Nello studio dell'atmosfera ci aspettiamo invece enormi differenze di temperatura e pressione. Bisogna infatti considerare la condizione di assenza di un bordo definito esterno dell'atmosfera. LTE è quindi valido localmente dove tutti i gradienti di temperatura, pressione e chimico sono trascurabili rispetto al libero cammino medio del fotone. Viene assunta localmente la validità delle distribuzioni statistiche per l'equilibrio termodinamico alla data temperatura. Utilizzando questa approssimazione, possiamo quindi facilmente conoscere come sono popolati i diversi livelli di atomi e molecole, che sono necessari per calcolare i coefficienti di assorbimento ed emissione e dipendono solamente dalla temperatura locale e dalla pressione: per queste si possono usare le relazioni della meccanica statistica di equilibrio (tra cui l'equazione di Boltzmann). Nonostante le condizioni di LTE vengano comunemente usate nella trattazione di atmosfere planetari, ci sono alcune regioni in cui non sono valide: per esempio negli strati superiori dell'atmosfera, in cui il gas è rarefatto, la radiazione scappa facilmente a causa dell'assenza di un bordo definito e risulta quindi molto diversa da quella del corpo nero.

2.3.1 Legge di Kirchhoff

La legge di Kirchhoff sulla radiazione, valida localmente in condizioni LTE, afferma che in condizioni di equilibrio termico l'emissività di un corpo eguaglia la sua assorbività, la radiazione è omogenea, non polarizzata e isotropa.

Consideriamo un gas in equilibrio termico alla temperatura T con coefficiente di estinzione κ all'interno di una cavità e trascuriamo i contributi di scattering. Quindi, che sia il gas trasparente od opaco, $I = B$ cioè per mantenere l'equilibrio tutta la radiazione assorbita dev'essere riemessa. Segue che $dI/ds = 0$ e

$$0 = \frac{dI(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu)}{ds} = -k(\mathbf{x}, \nu)I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) + \epsilon(\mathbf{x}, \nu) = -\alpha(\mathbf{x}, \nu)B(T, \nu) + \epsilon_{therm}(\mathbf{x}, \nu) = 0 \quad (2.21)$$

Da qui la legge di Kirchhoff

$$\epsilon_{therm}(\mathbf{x}, \nu) = \alpha(\mathbf{x}, \nu)B(\mathbf{x}, \nu) \quad (2.22)$$

ciò significa che l'emissione termica in una posizione \mathbf{x} dell'atmosfera è la radiazione di corpo nero pesata per le proprietà assorbitive del gas: quando un fotone viene assorbito dal gas in LTE, l'energia sarà riemessa come radiazione, la cui quantità e lunghezza d'onda dipendono dalla funzione di Planck pesata sul coefficiente di assorbimento.

2.4 Funzione Sorgente

La *funzione sorgente* è un parametro caratteristico dell'atmosfera definito come il rapporto del coefficiente di emissione per quello di estinzione:

$$S(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \frac{\epsilon(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu)}{\kappa(\mathbf{x}, \nu)} \quad (2.23)$$

ed ha le stesse dimensioni di un'intensità. Localmente, dove sono valide le condizioni LTE e la legge di Kirchhoff, e per emissione isotropa, si può scrivere

$$S(\mathbf{x}, \nu) = \frac{\alpha(\mathbf{x}, \nu)B(\mathbf{x}, \nu) + \sigma_s(\mathbf{x}, \nu)J(\mathbf{x}, \nu)}{\alpha(\mathbf{x}, \nu) + \sigma_s(\mathbf{x}, \nu)} \quad (2.24)$$

in cui viene inclusa una leggera deviazione dalla LTE a causa dei termini di scattering, quindi non troviamo, come ci aspetteremmo in LTE, $S(\mathbf{x}, \nu) = B(\mathbf{x}, \nu)$.

2.5 Le Equazioni del Traferimento Radiativo

Consideriamo per completezza equazioni con dipendenza dal tempo.

Per materiali in movimento, i coefficienti di estinzione κ ed emissione ϵ hanno una dipendenza dall'angolo, dovuta allo *shift Doppler* che causa cambiamenti di direzione (e di angoli). Scegliamo un sistema inerziale di coordinate e studiamo il flusso di energia lungo un cammino s in una direzione $\hat{\mathbf{n}}$ all'interno di un angolo solido $d\Omega$. Il fascio viaggia in un volumetto di lunghezza ds e sezione d'urto dA normale ad $\hat{\mathbf{n}}$ in un intervallo di tempo dt . Quindi aggiungiamo le perdite e i guadagni che contribuiscono al fascio lungo il cammino, considerandoli come funzioni del tempo:

$$\begin{aligned} [I(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t + \Delta t) - I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t)]dAd\Omega d\nu dt = \\ = [-\kappa(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t)I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) + \epsilon(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t)]dsdAd\Omega d\nu dt \end{aligned} \quad (2.25)$$

Siccome $\Delta s = c\Delta t$, possiamo scrivere

$$[I(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t + \Delta t) - I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t)] = \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t)}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t)}{\partial s} \right) \right] ds \quad (2.26)$$

e, sostituendo quest'ultima uguaglianza nella precedente, otteniamo

$$\left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) \right] I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) = -\kappa(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t)I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) + \epsilon(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) \quad (2.27)$$

Questa equazione esprime due caratteristiche fondamentali del trasferimento radiativo: esprime il fatto che i fotoni non decadono spontaneamente e l'intensità di una radiazione cambia solamente nell'interazione con la materia, quando i fotoni vengono aggiunti o emessi dal fascio; inoltre i fotoni sono bosoni, i quali possono semplicemente aggiungersi al fascio anche con lo stesso stato di altri fotoni. In seguito considereremo quasi sempre il caso statico, in cui trascuriamo la dipendenza da t e il primo termine del membro di sinistra.

2.5.1 Approssimazione di Piani Paralleli

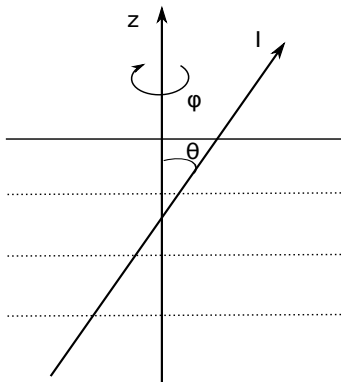


Figura 2.2: Atmosfera a piani paralleli 1D

Possiamo descrivere un'atmosfera a piani paralleli come una sovrapposizione di strati piani in cui ogni strato ha proprietà omogenee, tra cui T , P e ρ (densità). Questa approssimazione è valida se la profondità radiale dell'atmosfera è molto minore del raggio del pianeta.

Assumendo simmetria radiale e chiamando z la coordinata verticale,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad (2.28)$$

Questa approssimazione equivale a considerare il problema di un'atmosfera unidimensionale, in cui l'unica coordinata interessante è la quota, su cui assegnamo un valore a tutte le variabili. Definiamo

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \cos \theta \equiv \mu \quad (2.29)$$

I raggi uscenti avranno quindi $\mu > 0$ mentre quelli entranti $\mu < 0$.

In un'atmosfera a piani paralleli l'intensità media e il flusso possono essere riscritti dalle definizioni (1.2) e (1.5) considerando la simmetria azimutale come

$$J(z, \nu) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I(z, \mu, \nu) d\mu d\phi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(z, \mu, \nu) d\mu \quad (2.30)$$

$$F(z, \nu) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mu I(z, \mu, \nu) d\mu d\phi = 2\pi \int_{-1}^1 \mu I(z, \mu, \nu) d\mu \quad (2.31)$$

L'equazione di trasferimento radiativo per piani-paralleli, considerando la simmetria assiale e l'indipendenza da ϕ , si scrive quindi

$$\mu \frac{dI(z, \mu, \nu)}{dz} = -\kappa(z, \nu) I(z, \mu, \nu) + \epsilon(z, \mu, \nu) \quad (2.32)$$

Utilizzando le definizioni di profondità ottica e funzione sorgente, dividendo la precedente equazione per $-\kappa$,

$$\mu \frac{dI(\tau_\nu, \mu, \nu)}{d\tau_\nu} = I(\tau_\nu, \mu, \nu) - S(\tau_\nu, \mu, \nu) \quad (2.33)$$

Essendo un'equazione differenziale, per risolverla è necessario imporre alcune condizioni al contorno, conoscendo la radiazione che arriva dalla stella e stimando quella proveniente dall'interno del pianeta. Sulla superficie esterna, per $\tau_\nu = 0$, la radiazione incidente è

$$I(0, \mu, \nu) = I_*(0, \mu_0, \nu) \quad (2.34)$$

valida per $-1 \leq \mu \leq 0$, con μ_0 la direzione di incidenza della radiazione della stella, mentre la radiazione proveniente dal pianeta, per $\tau_\nu = \tau_{max}$

$$I(\tau_{max}, \mu, \nu) = I_{int}(\tau_{max}, \mu_0, \nu) \quad (2.35)$$

valida per $0 \leq \mu \leq 1$.

2.5.2 Soluzione Formale

L'equazione per il trasferimento radiativo in piani paralleli è lineare in $I(\tau_\nu, \mu, \nu)$ quindi possiamo scrivere la soluzione come somma della soluzione dell'omogenea più quella particolare, integrando tra la profondità ottica iniziale $\tau_{\nu,i}$ e quella finale $\tau_{\nu,f}$

$$I(\tau_{\nu,f}, \mu, \nu) = I(\tau_{\nu,i}, \mu, \nu) e^{-(\tau_{\nu,i} - \tau_{\nu,f})/\mu} - \frac{1}{\mu} \int_{\tau_{\nu,i}}^{\tau_{\nu,f}} S(\tau'_\nu, \mu, \nu) e^{-(\tau'_\nu - \tau_{\nu,f})/\mu} d\tau'_\nu \quad (2.36)$$

Il primo termine rappresenta l'attenuazione esponenziale dell'intensità iniziale a causa del contributo di assorbimento. Il secondo termine descrive invece l'emissione da parte dell'atmosfera. Ciò che viene misurato è il flusso emergente dall'atmosfera.

Per esempio, nel caso di un'atmosfera semi-infinita in cui $\tau_{\nu,i} = \infty$ integrando sull'intera lunghezza, $\tau_{\nu,f} = 0$, l'intensità emergente è

$$I(0, \mu, \nu) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty S(\tau'_\nu, \mu, \nu) e^{-\tau'_\nu/\mu} d\tau'_\nu \quad (2.37)$$

dove abbiamo usato il seguente limite

$$\lim_{\tau_\nu \rightarrow \infty} I(\tau_\nu, \mu, \nu) e^{-\tau_\nu/\mu} = 0 \quad (2.38)$$

Dalla (2.31), il flusso di superficie emergente è

$$F(0, \nu, t) = 2\pi \int_0^1 \int_0^\infty S(\tau_\nu, \mu, \nu) e^{-\tau_\nu/\mu} d\mu d\tau_\nu \quad (2.39)$$

Se la funzione sorgente $S(\tau, \nu, \mu)$ è nota, l'intensità e il flusso emergente possono essere computati indirettamente dalle equazioni precedenti. Nella maggior parte dei casi, invece, trovare una soluzione può essere complicato a causa della dipendenza della funzione sorgente da $I(\tau, \nu, \mu)$, la quantità per cui vogliamo risolvere le equazioni.

2.5.3 Soluzione Formale per Quota Arbitraria

Se invece vogliamo studiare l'intensità ad una quota qualsiasi, descritta dalla profondità τ_ν , dobbiamo considerare due flussi d'intensità:

-il primo in direzione verso l'interno (per $\mu < 0$)

$$I_\nu^-(\tau_\nu, \mu, \nu) = -\frac{1}{\mu} \int_0^{\tau_\nu} S(\tau_\nu, \mu, \nu) e^{-(\tau'_\nu - \tau_\nu)/\mu} d\tau'_\nu \quad (2.40)$$

-il secondo in direzione verso l'esterno (per $\mu > 0$)

$$I_\nu^+(\tau_\nu, \mu, \nu) = \frac{1}{\mu} \int_{\tau_\nu}^\infty S(\tau'_\nu, \mu, \nu) e^{-(\tau'_\nu - \tau_\nu)/\mu} d\tau'_\nu \quad (2.41)$$

con le seguenti condizioni al contorno:

$-\lim_{\tau_\nu \rightarrow \infty} S(\tau_\nu, \nu) e^{-\tau_\nu} = 0$, che presuppone l'assenza di radiazione uscente dalla superficie del pianeta (alla quota per cui $\tau_\nu = \infty$), e

$-I_\nu^-(0, \mu, \nu) = 0$, cioè non c'è radiazione entrante sulla superficie dell'atmosfera (nella direzione di osservazione).

Quindi

$$I(\tau_\nu, \mu, \nu) = \frac{1}{\mu} \int_{\tau_\nu}^\infty S(\tau'_\nu, \mu, \nu) e^{-(\tau'_\nu - \tau_\nu)/\mu} d\tau'_\nu - \frac{1}{\mu} \int_0^{\tau_\nu} S(\tau'_\nu, \mu, \nu) e^{-(\tau'_\nu - \tau_\nu)/\mu} d\tau'_\nu \quad (2.42)$$

Moltiplicando per μ^n , e applicando gli integrali ad entrambi i membri

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} I(\tau_\nu, \mu, \nu) \mu^n d\mu &= \int_0^{+1} \frac{1}{\mu} \int_{\tau_\nu}^\infty S(\tau'_\nu, \mu, \nu) e^{-(\tau'_\nu - \tau_\nu)/\mu} d\tau'_\nu \mu^n d\mu - \\ &\quad - \int_{-1}^0 \frac{1}{\mu} \int_0^{\tau_\nu} S(\tau'_\nu, \mu, \nu) e^{-(\tau'_\nu - \tau_\nu)/\mu} d\tau'_\nu \mu^n d\mu \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ora, se consideriamo S isotropa, utilizzando le sostituzioni al secondo membro $\omega = 1/\mu$ nel primo termine e $\omega = -1/\mu$ nel secondo e aggiornando gli estremi di integrazione

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} I(\tau_\nu, \mu, \nu) \mu^n d\mu = \\ &= \int_{\tau_\nu}^\infty S(\tau'_\nu, \nu) d\tau'_\nu \int_\infty^1 \frac{e^{-(\tau'_\nu - \tau_\nu)\omega}}{\omega^{n+1}} d\omega + (-1)^n \int_0^{\tau_\nu} S(\tau'_\nu, \nu) d\tau'_\nu \int_{+1}^\infty \frac{e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)\omega}}{\omega^{n+1}} d\omega \\ &= \int_{\tau_\nu}^\infty S(\tau'_\nu, \nu) E_{n+1}(\tau_\nu - \tau'_\nu) d\tau'_\nu + (-1)^n \int_0^{\tau_\nu} S(\tau'_\nu, \nu) E_{n+1}(\tau'_\nu - \tau_\nu) d\tau'_\nu \end{aligned} \quad (2.44)$$

in cui gli integrali esponenziali $E_n(\tau'_\nu)$ sono definiti come segue

$$E_n(x) \equiv \int_1^\infty \frac{e^{-x\omega}}{\omega^n} d\omega = \int_0^1 \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \mu^{n-1} d\mu \quad (2.45)$$

con $n = 1, 2, \dots$ e $x > 0$ e per alti valori di x , si ottiene il risultato asintotico

$$E_n(x) = \frac{e^{-x}}{x} \left[1 - \frac{n}{x} + \frac{n(n+1)}{x^2} + \dots \right] \quad (2.46)$$

Quindi il flusso può essere scritto come

$$\begin{aligned} F(\tau_\nu, \nu) &= F^+(\tau_\nu, \nu) - F^-(\tau_\nu, \nu) \\ &= 2\pi \int_0^1 \mu I(\tau_\nu, \mu, \nu) d\mu - 2\pi \int_0^1 \mu I(\tau_\nu, \mu, \nu) d\mu \\ &= 2\pi \int_{\tau_\nu}^\infty S(\tau'_\nu, \nu) E_2(\tau_\nu - \tau'_\nu) d\tau'_\nu - 2\pi \int_0^{\tau_\nu} S(\tau'_\nu, \nu) E_2(\tau'_\nu - \tau_\nu) d\tau'_\nu \end{aligned} \quad (2.47)$$

Questo è il risultato generale del flusso scritto in termini degli integrali esponenziali.

In particolare sulla superficie, per $\tau_\nu = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} I^+(0, \mu, \nu) &= \int_0^\infty \frac{1}{\mu} S(\tau_\nu, \nu) e^{-\tau_\nu/\mu} d\tau_\nu \\ F^+(0, \nu) &= 2\pi \int_0^\infty S(\tau_\nu, \nu) E_2(\tau_\nu) d\tau_\nu = 2\pi \int_0^\infty S(\tau_\nu, \nu) \int_0^1 e^{-\tau_\nu/\mu} d\mu d\tau_\nu \end{aligned} \quad (2.48)$$

cioè un risultato simile a quello che avevamo ottenuto prima, valido per S isotropa.

Capitolo 3

Trasferimento Radiativo: Soluzioni

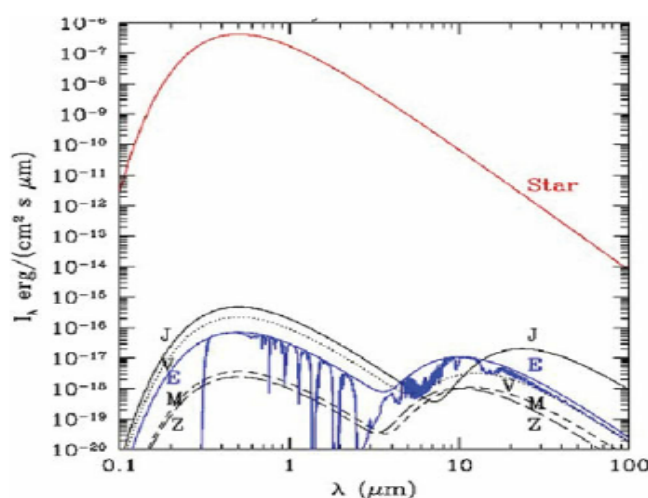


Figura 3.1: Spettri approssimati di alcuni corpi del Sistema Solare. Si nota che il Sole ha lo spettro di un corpo nero. Immagine adattata da (Kaltenegger et al. 2011)

Vogliamo trovare soluzioni esplicite alle equazioni del trasferimento radiativo. Trattiamo il caso statico di un'atmosfera omogenea in equilibrio idrostatico di cui conosciamo la struttura verticale di temperatura-pressione. Sarà utilizzata l'approssimazione di piani-paralleli.

Consideriamo i contributi di addizione ed di attenuazione al fascio considerato, quindi l'equazione del trasferimento radiativo può essere scritta come

$$\mu \frac{dI(z, \mu, \nu)}{dz} = -\kappa(z, \nu)I(z, \mu, \nu) + \epsilon(z, \mu, \nu) \quad (3.1)$$

3.1 Descrizione dello Spettro Emergente

La soluzione dell'equazione del trasferimento radiativo permette, in teoria, di ricostruire lo spettro emergente dall'atmosfera, che conterrà informazioni sulle condizioni atmosferiche: composizione chimica e distribuzioni verticali di temperatura e pressione.

Come appare in Figura 3.1, lo spettro di un pianeta presenta due massimi: un picco nel visibile dovuto alla luce scatterata della stella sulla superficie e uno infrarosso a dovuto all'emissione propria del pianeta. Questa emissione è la somma della radiazione stellare che era stata assorbita e viene riemessa e dell'energia che viene emessa dall'interno del pianeta e viaggia verso l'atmosfera e oltre. Nel caso degli *Hot Jupiters*, per esempio il contributo di

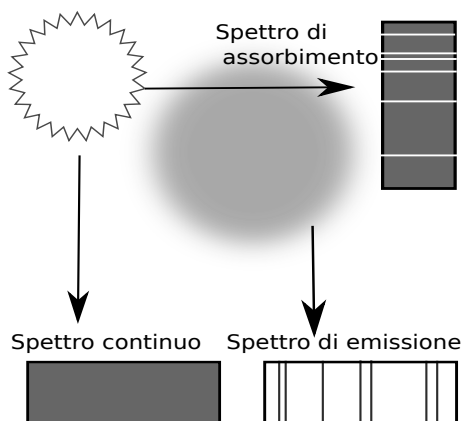


Figura 3.2: Origine delle linee spettrali.

radiazione stellare è molto maggiore di quello dell'energia interna, a causa della vicinanza del pianeta alla stella.

Gli spettri che vengono osservati possono essere di tre tipi: continui, di righe di assorbimento o di righe di emissione. Se consideriamo un corpo nero, per definizione questo emette tutta la radiazione che v'incide, quindi avrà uno spettro continuo, senza linee di assorbimento o di emissione. Se invece riveliamo lo stesso spettro dopo che la radiazione ha attraversato una nube di gas più freddo, vedremo quasi lo stesso spettro del corpo nero, ma spezzato da linee mancanti: così si presenta lo spettro delle righe di assorbimento. Queste linee sono dovute all'assorbimento di parte della radiazione nell'attraversamento della nube e le relative lunghezze d'onda dipendono dal tipo di atomi e molecole presenti nel gas. La radiazione assorbita sarà riemessa (nella maggior parte dei casi) isotropicamente, quindi di questa, una piccolissima parte sarà riemessa lungo la direzione di misura. La restante parte formerà gli spettri delle linee di emissione, misurati ad un angolo tale per cui il radiatore di corpo nero non si trova più direttamente dietro la nuvola (non apparirà quindi il suo esplicito contributo nello spettro). Quindi, senza il corpo nero in *background*, tutto ciò che si rileva sono linee di emissione.

3.2 La Formazione delle Linee

Consideriamo un'atmosfera semplificata, formata da strati concentrici ed omogenei in composizione e pressione, ma diversi in temperatura.

Se la temperatura in atmosfera cala alzandosi in quota, verso gli strati più alti, lo strato più caldo è quello inferiore a contatto con la superficie del pianeta. Questo può essere considerato come un radiatore di corpo nero. Muovendosi verso l'alto, ogni altro strato è appoggiato su uno strato di gas più caldo. Quindi nel gas più freddo dello strato successivo, parte della radiazione sarà assorbita in corrispondenza di alcune lunghezze d'onda. Lo stesso avviene in tutti gli altri strati più alti e progressivamente più freddi, in cui, in base alle proprietà locali dell'atmosfera, le lunghezze d'onda assorbite saranno diverse. Quindi da questo tipo di atmosfera, lo spettro che si osserva è uno spettro di linee di assorbimento.

Se invece l'atmosfera presenta un'*inversione di temperatura*, in cui ogni strato è più caldo di quello sottostante, ogni strato emette radiazione in modo diverso e più intenso rispetto a quelli inferiori, in quanto il coefficiente di emissione termica è proporzionale a $B(T)$. Quindi lo spettro emergente sarà composto di linee di emissione.

Per un'atmosfera isoterma, invece, non ci saranno né linee di assorbimento né di emissione e presenterà, come verrà verificato, spettro continuo: lo spettro di un corpo nero alla temperatura dell'atmosfera.

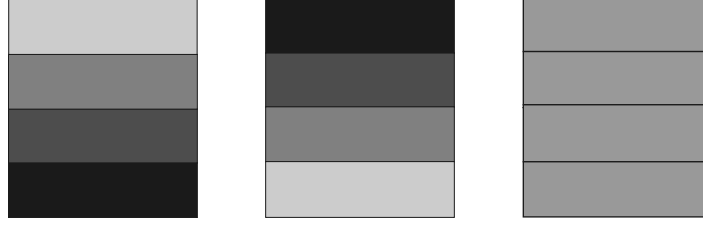


Figura 3.3: Atmosfera a strati: strati più scuri corrispondono a temperature più elevate. Adattata da [11]

Consideriamo innanzitutto spettri termici, ossia radiazioni emesse dall'atmosfera e non trasmesse o scatterate in questa, per cui i contributi di scattering ad emissione e assorbimento ϵ_{scat} e σ_s sono considerati nulli.

3.2.1 Atmosfera Isoterma

Consideriamo un'atmosfera isoterma il condizioni LTE e assumiamo che lo strato inferiore di questa sia opaco, cioè che abbia un alto valore di τ . In questo caso la radiazione si comporta come quella di corpo nero: $I = S = B$ (questo sarà dimostrato in seguito, nella sezione 3.4). Sia l'atmosfera composta da n strati e sia l' n -esimo quello inferiore:

$$\mu \frac{dI_n(z, \mu, \nu)}{dz} = \epsilon_n(z, \mu, \nu) - \kappa_n(z, \nu) I_n(z, \mu, \nu) \quad (3.2)$$

Considerando che $I_n(z, \mu, \nu) = B_n(z, \nu)$ e la legge di Kirchhoff per $\epsilon_{scat} = \sigma_s = 0$

$$\epsilon_n(z, \mu, \nu) = \epsilon_{n,therm}(z, \mu, \nu) = \alpha_n(z, \nu) B_n(z, \nu) = \kappa_n(z, \nu) B_n(z, \nu) \quad (3.3)$$

segue che

$$\mu \frac{dI_n(z, \mu, \nu)}{dz} = 0 \quad (3.4)$$

L'intensità nello strato n non cambia muovendosi lungo la verticale.

Questa condizione implica che nello strato $n - 1$

$$I_{n-1} = I_n = B_n = B_{n-1} \quad (3.5)$$

in cui l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che stiamo considerando un'atmosfera isoterma. Per questo strato l'equazione del trasferimento è

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_{n-1}(z, \mu, \nu)}{dz} &= \epsilon_{n-1}(z, \mu, \nu) - \kappa_{n-1}(z, \nu) I_{n-1}(z, \mu, \nu) = \\ &= \epsilon_{n-1}(z, \mu, \nu) - \kappa_{n-1}(z, \nu) B_{n-1}(z, \mu, \nu) \end{aligned} \quad (3.6)$$

quindi applicando la legge di Kirchhoff per lo strato $n - 1$ troviamo di nuovo

$$\mu \frac{dI_{n-1}(z, \mu, \nu)}{dz} = 0 \quad (3.7)$$

Nello stesso modo si può riapplicare lo stesso ragionamento a tutti gli altri strati, quindi

$$I_0 = \dots = I_{n-1} = I_n = B_n \quad (3.8)$$

Il risultato trovato implica che in un'atmosfera isoterma in condizioni LTE, l'intensità emergente, cioè $I_{n=0}$ è pari a quella di corpo nero alla temperatura caratteristica dell'atmosfera ed è anche pari a quella che emerge da tutti gli altri strati: la radiazione viene assorbita

e riemessa in ogni strato, ma sempre alla stessa lunghezza d'onda essendo la temperatura ovunque la stessa, quindi non risultano caratteristiche nette apprezzabili nello spettro.

Fino a qui abbiamo cercato un risultato per la radiazione di un'atmosfera isoterma facendo alcune assunzioni e manipolando l'equazione di trasferimento radiativo. La stessa conclusione può anche essere ricavata cercando direttamente una soluzione all'equazione per un'atmosfera isoterma in condizioni LTE. Come prima trascuriamo i contributi di scattering, quindi $S(\tau, \nu) = B(\tau, \nu)$ in condizioni LTE. Inoltre usiamo l'approssimazione di atmosfera semi-infinita, quindi gli estremi di integrazione sono 0 e ∞ (dalla (2.37))

$$I(0, \mu, \nu) = \int_0^\infty \frac{1}{\mu} B(\tau_\nu, \nu) e^{-\tau_\nu/\mu} d\tau_\nu = B(T(\tau_\nu), \nu) \int_0^\infty \frac{1}{\mu} e^{-\tau_\nu/\mu} d\tau_\nu \quad (3.9)$$

in cui τ_ν è la profondità ottica e viene usata come scala per l'altezza. Se consideriamo che esiste una temperatura per ogni profondità ottica (cioè ad ogni altitudine corrisponde una temperatura e come misura dell'altitudine stiamo considerando τ_ν), per un'atmosfera isoterma la temperatura è ovunque la stessa, quindi B è indipendente dalla quota e può essere portato fuori dall'integrale. Quindi, essendo l'integrale tra 0 e ∞ pari a 1

$$I(0, \mu, \nu) = B(T, \nu) \quad (3.10)$$

Dall'equazione del flusso uscente da una superficie (1.8)

$$F(0, \nu) = \pi B(T, \nu) \quad (3.11)$$

Abbiamo concluso che un'atmosfera isoterma in condizioni LTE emette radiazione di corpo nero, che ha spettro continuo: lo spettro misurato non presenta righe di assorbimento o emissione.

3.2.2 Atmosfera con Gradiente di Temperatura

Consideriamo un'atmosfera in cui la temperatura non è uniforme, ma presenta un gradiente se ci si sposta lungo la quota.

Consideriamo il primo caso in cui la temperatura decresce alzandosi nell'atmosfera: questa può essere immaginata come una serie di strati in cui ogni strato è appoggiato su uno strato di gas più caldo. Questo tipo di stratificazione produce uno spettro di assorbimento.

Consideriamo l'intensità $I(\tau_\nu, \mu, \nu)$ a due lunghezze d'onda diverse ν_1 e ν_2 tali per cui l'opacità relativa a ν_1 è maggiore rispetto a quella relativa a ν_2 , cioè $\kappa(\nu_1) > \kappa(\nu_2)$. Dalla definizione di profondità ottica $d\tau_\nu = \kappa(\nu) dz$, si trova $z_1 < z_2$. Cioè, per uno stesso valore di τ_ν l'intensità della radiazione 1 si forma più in profondità della 2. Se la temperatura decresce salendo in quota, $T_1 < T_2$, cioè $B(T_1) < B(T_2)$ e quindi $I(\tau_\nu, \mu, \nu_1) < I(\tau_\nu, \mu, \nu_2)$.

Il flusso minimo non sarà mai zero perchè c'è sempre una piccola parte di radiazione che emerge a certe lunghezze d'onda da un'atmosfera planetaria. L'intensità di questo flusso dipende dalla temperatura all'altezza in cui il flusso ha origine. Per esempio in un'atmosfera in cui la temperatura è più elevata negli strati inferiori, il flusso emergente sarà composto principalmente di lunghezze d'onda con basse opacità, in quanto, se generate al fondo dove la temperatura è più elevata, dovranno percorrere tutti gli strati prima di emergere: se a bassa opacità, la radiazione viaggia più agevolmente. Se l'opacità è elevata, invece, molto probabilmente il flusso emergente è stato generato negli strati superiori dell'atmosfera. Per questo le linee centrali di uno spettro (quelle che si rilevano con intensità maggiore) sono formate negli strati più elevati, mentre le "ali" più in profondità.

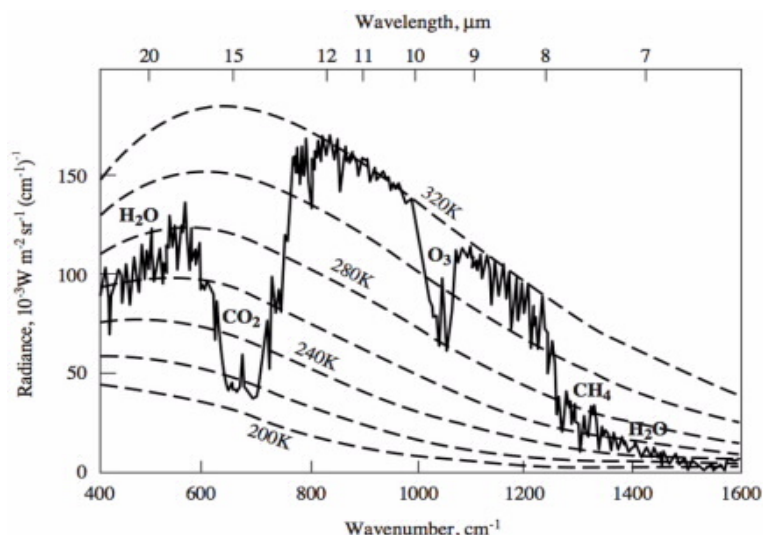


Figura 3.4: Spettro dell'atmosfera terrestre confrontato con quello di corpo nero a diverse temperature. *Credit: Data from R. A. Hanel, et al., J. Geophys. Res., 1972, 77, 2829-2841.*

3.2.3 Spettri e Struttura Verticale Temperatura-Pressione

Conoscendo il tipo di spettro che ci aspetteremmo da un'atmosfera con temperatura che aumenta o diminuisce verso gli strati superiori, possiamo usare le osservazioni di linee spettrali termiche per ricostruire la struttura della temperatura in altezza nell'atmosfera. Per esempio, studiando lo spettro della Terra osservato dallo spazio, si può dedurre come la temperatura diminuisca con l'altezza. La *troposfera* è lo stato inferiore e quello in cui si trova la maggior parte della massa e dove avvengono i fenomeni atmosferici: qui si forma gran parte della radiazione che va dal visibile all'infrarosso. La temperatura in questo strato diminuisce con l'altezza: lo spettro presenta infatti righe di assorbimento per determinate lunghezze d'onda. Se osserviamo le bande di assorbimento di O_3 e CO_2 , però, troviamo un piccolo massimo locale di intensità, ovvero un contributo di emissione dentro la banda, il quale è un indizio della presenza di un'inversione di temperatura nell'atmosfera: per un intervallo, la temperatura aumenta con l'altezza e, come abbiamo visto, per un'atmosfera con queste caratteristiche, lo spettro presenta linee di emissione. Questo avviene nel secondo strato, la *stratosfera*. Possiamo collocare questa inversione di temperatura ad una certa altitudine considerando che la densità del gas nell'atmosfera decresce esponenzialmente con l'altezza, e con la minore presenza di particelle assorbenti, sarà minore anche l'opacità. Quindi, se nello spettro osserviamo linee centrali ben marcate, ciò significa che queste righe di emissione si sono formate in regioni con bassa densità, quindi minore opacità. In questo caso la banda di emissione, quindi l'inversione di temperatura, ha origine in uno strato meno denso, più alto, rispetto alla regione in cui si forma la maggior parte della banda di assorbimento.

3.3 Soluzioni Approssimate per Piani Paralleli

Consideriamo ora l'equazione per il trasferimento radiativo nel caso di un'atmosfera a piani paralleli. Cerchiamo una soluzione considerando i tre contributi al bilancio dell'intensità del fascio separatamente: trasmissione, emissione termica e scattering.

3.3.1 Trasmissione

Nel caso di sola trasmissione della radiazione non c'è emissione o scattering, $\epsilon(z, \mu, \nu) = 0$, quindi sarà nulla anche la funzione sorgente $S(z, \mu, \nu) = \epsilon(\tau_\nu, \mu, \nu)/\kappa(\tau_\nu, \nu) = 0$. L'equazione del trasferimento radiativo diventa con questa approssimazione semplicemente

$$\mu \frac{dI(z, \mu, \nu)}{dz} = -\kappa(z, \nu)I(z, \mu, \nu) \quad (3.12)$$

equazione differenziale che può essere risolta integrando z da una posizione iniziale z_i a quella finale z_f

$$I(z_f, \mu, \nu) = I(z_i, \mu, \nu) e^{-\int_{z_i}^{z_f} \frac{1}{\mu} \kappa(z', \nu) dz'} \quad (3.13)$$

Ricordando la definizione di profondità ottica (2.11), con ds sostituito da dz , in quanto stiamo considerando un caso di totale simmetria rispetto all'asse \hat{z} , e integrando da $\tau'_\nu = 0$ a $\tau'_\nu = \tau_\nu$

$$I(\tau_\nu, \mu, \nu) = I(0, \mu, \nu) e^{-\tau_\nu/\mu} \quad (3.14)$$

3.3.2 Emissione Termica

Rispetto al caso precedente, aggiungiamo il secondo contributo, l'emissione termica: questo caso ha grande applicazione in spettri infrarossi di esopianeti, tra cui gli *Hot Jupiters* e in generale nei pianeti in cui l'emissione termica è molto maggiore dei contributi di scattering. È valida in condizioni di LTE. L'emissione termica è la trasmissione di calore con la radiazione e rappresenta il contributo positivo alla radiazione emergente oltre a quello di scattering. Può avere origine dalla radiazione stellare assorbita e poi riemessa o da quella interna propria del pianeta. Le lunghezze d'onda per cui l'emissione termica è rilevante sono quelle attorno al picco di radiazione di corpo nero: tipicamente lunghezze infrarosse.

Cerchiamo la soluzione all'equazione del trasferimento radiativo per emissione termica trascurando i termini di scattering di fotoni da o dentro il fascio di radiazione. Quindi il coefficiente di emissione ha un solo contributo $\epsilon(\tau_\nu, \mu, \nu) = \epsilon_{therm}(\tau_\nu, \mu, \nu)$ ed essendo in condizioni di LTE, $S_{therm}(\tau_\nu, \mu, \nu) = B(\tau_\nu, \nu)$ (B è la radiazione di corpo nero e dipende solo da T , attraverso τ_ν , e dalla frequenza). Essendo considerato nullo anche il contributo di assorbimento dovuto allo scattering σ_s , abbiamo usato $\kappa = \alpha$, il "vero assorbimento". Quindi, sotto queste condizioni, l'equazione diventa

$$\mu \frac{dI(\tau_\nu, \mu, \nu)}{d\tau_\nu} = -\kappa(\tau_\nu, \nu)I(\tau_\nu, \mu, \nu) + B(\tau_\nu, \nu) \quad (3.15)$$

Come abbiamo visto nella (2.37), la soluzione di questa equazione è

$$I(0, \mu, \nu) = \int_0^\infty \frac{1}{\mu} B(\tau_\nu, \nu) e^{-\tau_\nu/\mu} d\tau_\nu \quad (3.16)$$

e il flusso emergente

$$F(0, \nu) = 2\pi \int_0^1 \int_0^\infty B(\tau_\nu, \nu) e^{-\tau_\nu/\mu} d\mu d\tau_\nu \quad (3.17)$$

Il significato di quest'ultima equazione è che il flusso emergente è la radiazione di corpo nero pesata esponenzialmente dalla profondità ottica ad una certa altitudine. Questa è l'equazione che si può usare per calcolare il flusso emergente, in quanto è necessario conoscere solo la radiazione di corpo nero alla temperatura di ogni strato e le relative opacità (che può non essere facile conoscere).

Moltissimi esopianeti sono stati studiati considerando solo la loro emissione termica, per esempio i pianeti osservati dalla *Spitzer Space Telescope*, il quale misura temperature

di luminosità¹, la presenza di atomi e molecole e ricostruisce la struttura verticale della temperatura.

Funzione Sorgente Costante

Consideriamo la funzione sorgente costante in altezza: $S(\tau_\nu, \mu, \nu)$ è costante a fissata profondità ottica e lasciamo la dipendenza da μ . L'equazione (2.36) diventa quindi, potendo portare fuori S dall'integrale,

$$I(\tau_{\nu, \min}, \mu, \nu) = I(\tau_{\nu, \max}, \mu, \nu)e^{-(\tau_{\nu, \max} - \tau_{\nu, \min})} + S(\nu)(1 - e^{-(\tau_{\nu, \max} - \tau_{\nu, \min})}) \quad (3.18)$$

Il primo termine rappresenta la quantità di radiazione rimasta originale che ha attraversato la profondità ottica massima $\tau_{\nu, \max}$, esponenzialmente attenuata. Il secondo, invece, è il contributo di radiazione emesso dal fascio. Consideriamo il caso in cui $\tau_{\nu, \max} < 1$ e $\tau_{\nu, \min} = 0$, sullo strato limite, in atmosfera otticamente sottile. Si può approssimare $e^{-\tau_{\nu, \max}} \approx 1 - \tau_{\nu, \max}$. In questo caso

$$I(0, \mu, \nu) = I(\tau_{\nu, \max}, \mu, \nu) - \tau_{\nu, \max}[I(\tau_{\nu, \max}, \mu, \nu) - S(\nu)] \quad (3.19)$$

Quindi l'intensità emergente all'esterno dell'atmosfera sarà l'intensità presente negli strati inferiori ($\tau_{\nu, \max}$) diminuita o aumentata a seconda del contributo

$\tau_{\nu, \max}[I(\tau_{\nu, \max}, \mu, \nu) - S(\nu)]$:

-se $I(\tau_{\nu, \max}, \mu, \nu) > S(\nu)$, l'intensità iniziale è diminuita dal secondo fattore e nello spettro emergente ci saranno linee di assorbimento;

-se $I(\tau_{\nu, \max}, \mu, \nu) < S(\nu)$, l'intensità iniziale è aumentata dal secondo fattore e nello spettro emergente ci saranno linee di emissione.

Dove $\tau_{\nu, \max}$ è alto, sarà alto anche il coefficiente di assorbimento e le linee di assorbimento (o emissione) avranno bassa (o alta) intensità.

Approssimazione di Eddington

Consideriamo l'espansione della funzione sorgente, che è indipendente dall'angolo μ , nella profondità ottica

$$S(\tau_\nu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\nu) \tau_\nu^n \quad (3.20)$$

Quindi, utilizzando le relazioni lineari già trovate

$$I(0, \mu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n(\nu) \mu^n \quad (3.21)$$

e ricordando le (2.47), integrando τ' tra 0 e τ e tra τ e ∞ ,

$$F(\tau_\nu, \nu) = a_0 E_3(\tau_\nu) + a_1 \left[\frac{4}{3} - 2E_4(\tau_\nu) \right] + a_2 \left[\frac{8}{3} \tau_\nu + 4E_5(\tau_\nu) \right] + \dots \quad (3.22)$$

Nel caso in cui la funzione sorgente sia lineare in τ_ν , cioè la sommatoria va da 0 a 1, si trova che

$$I(0, \mu, \nu) = a_0(\nu) + a_1(\nu) \mu \quad (3.23)$$

e dalla definizione, il flusso alla superficie

$$F(0, \nu) \approx a(\nu) + \frac{2}{3} b(\nu) \equiv S(\tau_\nu = 2/3, \nu) \quad (3.24)$$

Il flusso è quello caratteristico della radiazione a $\tau_\nu = 2/3$. τ_ν dipende dalla frequenza, perciò il valore della quota fisica per cui $\tau_\nu = 2/3$ dipende da ν .

¹Con il termine "temperature di luminosità" (*brightness temperature*) ci si riferisce alla temperatura di un corpo nero che emette lo stesso valore di intensità che si è misurato. Si trova semplicemente invertendo la (1.8) ricavando la T in funzione dell'intensità misurata.

3.3.3 Scattering

Consideriamo ora l'ultimo caso, quello in cui lo scattering sia un fattore importante nel calcolo dell'intensità della radiazione. Le lunghezze d'onda per cui ciò è rilevante sono relative al visibile. Inserendo anche lo scattering nella trattazione, l'equazione del trasferimento radiativo non è più un'equazione differenziale e le soluzioni analitiche scarseggiano.

Consideriamo la radiazione di una stella incidente sull'atmosfera di un pianeta in direzione θ_0, ϕ_0 dalla normale alla superficie

$$I_*(0, \mu, \nu) = I_0 \delta(\mu - \mu_0) \delta(\phi - \phi_0) \quad (3.25)$$

Se consideriamo lunghezze d'onda per cui lo scattering domina rispetto all'emissione termica, usiamo la formula (3.16) per l'intensità trasmessa

$$I(\tau, \nu, \mu) = I_0 \delta(\mu - \mu_0) \delta(\phi - \phi_0) e^{-\tau/\mu} \quad (3.26)$$

e il flusso della stella incidente è

$$F_*(0, \mu, \nu) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 \mu I_0 \delta(\mu - \mu_0) \delta(\phi - \phi_0) d\mu d\phi = \mu_0 I_0 \quad (3.27)$$

Se consideriamo il caso estremo di un'atmosfera con solo scattering, questo contribuisce con termini di emissione ed estinzione e l'equazione del trasferimento radiativo è

$$\mu \frac{dI(\tau_\nu, \mu, \nu)}{d\tau_\nu} = I(\tau_\nu, \mu, \nu) + S_{scat}(\tau_\nu, \mu, \nu) \quad (3.28)$$

in cui la funzione sorgente di scattering è $S_{scat} = \epsilon_{scat}/\sigma_{scat}$ e

$$S_{scat}(\tau_\nu, \mu, \nu) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mu I(\tau_\nu, \mu, \nu) P(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) d\mu d\phi \quad (3.29)$$

Quindi l'equazione del trasferimento radiativo diventa

$$\mu \frac{dI(\tau_\nu, \mu, \nu)}{d\tau_\nu} = I(\tau_\nu, \mu, \nu) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mu I(\tau_\nu, \mu, \nu) P(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) d\mu d\phi \quad (3.30)$$

La forma generale della radiazione emergente è, sempre dalla (2.37),

$$\begin{aligned} I(0, \mu, \nu) &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\tau_\nu} S_{scat}(\tau'_\nu, \mu, \nu) e^{-\tau'_\nu/\mu} d\tau'_\nu = \\ &= \int_0^{\tau_\nu} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mu I(\tau'_\nu, \mu, \nu) P(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) e^{-\tau'_\nu/\mu} d\tau'_\nu d\mu d\phi \end{aligned} \quad (3.31)$$

equazione che può essere difficile da risolvere. Per cui nello studio delle atmosfere dei pianeti del sistema solare, spesso si divide il termine di scattering nella funzione sorgente in un contributo di scattering singolo e uno di scattering multiplo o diffuso. La differenza sta nella direzione in cui è scatterata la radiazione incidente: nel caso di scattering multiplo viene scatterata in molte direzioni diverse. Spesso il contributo di singolo scattering è dominante, per cui si può risolvere l'equazione in modo semplificato: per esempio questa è una buona approssimazione nelle regioni trasparenti di cirri e aerosol nell'atmosfera terrestre.

$$S_{scat, single}(\tau_\nu, \mu, \nu) = \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} I_0 e^{-\tau/\mu_0} P(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) \quad (3.32)$$

in cui $\tilde{\omega}$ rappresenta l'albedo²(per ora l'abbiamo sempre considerata pari a 1, per un'atmosfera di puro scattering). La soluzione all'equazione per lo scattering singolo diventa

$$\begin{aligned} I(0, \mu, \nu) &= \frac{\tilde{\omega}}{4\pi\mu} \int_0^{\tau\nu} I_0 P(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) e^{-\tau'\nu} \mu_0 e^{-\tau'/\mu_0} d\tau'_\nu = \\ &= \frac{\tilde{\omega}}{4\pi(\mu + \mu_0)} \mu_0 I_0 P(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) \left[1 - e^{-\tau\nu(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0})} \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Nel caso di scattering multiplo, non ci sono soluzioni semplici che si possono trovare³.

3.4 Approssimazione di Diffusione

Cerchiamo una soluzione approssimata all'equazione del trasferimento radiativo nell'atmosfera planetaria dove le condizioni di temperatura, pressione e composizione chimica cambiano lentamente sulla lunghezza di un cammino libero medio del fotone: è il caso della diffusione radiativa⁴. Questa approssimazione è la descrizione del flusso radiativo negli strati più bassi dell'atmosfera in cui $\tau \gg 1$, quindi a causa dell'alta densità di particelle che possono interagire per assorbimento e scattering, la radiazione è considerata "intrappolata". Inoltre valgono le condizioni di LTE, in quanto l'effetto dominante sono le collisioni, rispetto ai processi di radiazione, quindi $S(\tau, \mu, \nu) = B(\tau, \nu)$.

In condizioni LTE, per scattering isotropo, riprendendo la relazione (2.24) e adattandola per un'atmosfera a piani paralleli, in cui la posizione \mathbf{x} viene sostituita dalla quota, cioè l'unica coordinata rilevante, scritta in termini di τ , possiamo scrivere

$$S(\tau, \nu) = \frac{\alpha(\tau, \nu)B(\tau, \nu) + \sigma_s(\tau, \nu)J(\tau, \nu)}{\alpha(\tau, \nu) + \sigma_s(\tau, \nu)} \quad (3.34)$$

perciò S è isotropa. Se espandiamo questa funzione in serie di McLaurin in τ , attorno a τ

$$S(\tau + t, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n S}{d\tau^n} \quad (3.35)$$

che, se sostituita nella soluzione formale per $0 \leq \mu \leq 1$, la (2.41)

$$I^+(\tau, \mu, \nu) = \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{\mu} S(\tau', \nu) e^{-(\tau'-\tau)/\mu} d\tau' = \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu} S(\tau + t, \nu) e^{-t/\mu} dt \quad (3.36)$$

in cui è stato usato il cambio di variabile $\tau' - \tau = t$. Quindi, inserendo l'espressione per $S(\tau + t, \nu)$

$$I^+(\tau, \mu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n S}{d\tau^n} \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu} t^n e^{-t/\mu} dt \quad (3.37)$$

Gli integrali della forma $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = \Gamma(n+1)$ sono numeri puri che per $n > 0$ possono essere integrati per parti

$$\Gamma(n+1) = [-e^{-x} x^n]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = n\Gamma(n) \quad (3.38)$$

²L'albedo è la misura della riflettività della superficie di un pianeta e della sua atmosfera. Rappresenta il rapporto tra luce riflessa e luce incidente e dipende dalle condizioni generali (nuvolosità, frazione di superficie coperta d'acqua, ...). Nel Sistema Solare, Venere è il pianeta più luminoso: riflette fino allo 0.75 di luce incidente.

³Schuster (1905, p. 5):

"The complete investigation leads to equations of such complexity that a discussion becomes impossible"

⁴Questa approssimazione non descrive quindi il caso di atmosfera stellare, che è caratterizzata da alti gradienti di temperatura in prossimità della superficie.

inoltre $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$. Per induzione, quindi,

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (3.39)$$

Usando questi risultati, con $x = \tau/\mu$, si ottiene per $0 \leq \mu \leq 1$

$$I^+(\tau, \mu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{d^n S}{d\tau^n} \quad (3.40)$$

L'espressione per $I^-(\tau, \mu, \nu)$, dove $-1 \leq \mu \leq 0$ differisce dalla precedente per termini di ordine $e^{-\tau/\mu}$, che tendono a 0 per grandi valori di τ . Quindi anche in questo caso possiamo approssimare

$$I^-(\tau, \mu, \nu) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{d^n S}{d\tau^n} \quad (3.41)$$

Quindi dalla definizione, le intensità medie in questo caso

$$\begin{aligned} J(\tau, \nu) &\approx \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{d^n S}{d\tau^n} \approx \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{d^n S}{d\tau^n} \left[\frac{\mu^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^{+1} \\ &\approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{d^{2n} S}{d\tau^{2n}} \approx S(\tau, \nu) + \frac{1}{3} \frac{d^2 S}{d\tau^2} + \frac{1}{5} \frac{d^4 S}{d\tau^4} + \dots \end{aligned} \quad (3.42)$$

la somma contiene solo derivate pari di S . Se il gradiente di temperatura è piccolo e S varia lentamente con la quota, possiamo prendere solo il primo termine

$$J(\tau, \nu) \approx S(\tau, \nu) \quad (3.43)$$

Possiamo riscrivere la (3.35) come

$$S(\tau, \nu) \approx \frac{\alpha(\tau, \nu)B(\tau, \nu) + \sigma_s(\tau, \nu)S(\tau, \nu)}{\alpha(\tau, \nu) + \sigma_s(\tau, \nu)} \quad (3.44)$$

che ha soluzione

$$S(\tau, \nu) \approx B(\tau, \nu) \quad (3.45)$$

Quindi si possono trovare le altre quantità

$$\begin{aligned} F(\tau, \nu) &= 2\pi \int_{-1}^{+1} \mu I(\tau, \mu, \nu) d\mu \approx 2\pi \int_{-1}^{+1} \mu \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{d^n S}{d\tau^n} d\mu \\ &\approx 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n B}{d\tau^n} \left[\frac{\mu^{n+2}}{n+2} \right]_{-1}^{+1} \approx 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \frac{d^{2n+1} B}{d\tau^{2n+1}} \approx \frac{4\pi}{3} \frac{dB}{d\tau} + \frac{4\pi}{5} \frac{d^3 B}{d\tau^3} + \dots \end{aligned} \quad (3.46)$$

E se usiamo le stesse premesse di cui sopra, anche B varia lentamente con la quota e possiamo trascurare tutti i termini di ordine superiore:

$$F(\tau, \nu) \approx \frac{4\pi}{3} \frac{dB}{d\tau} \quad (3.47)$$

Per la regola della catena

$$\frac{dB}{d\tau} = \frac{dB}{dT} \frac{dT}{dz} \frac{dz}{d\tau} = -\frac{1}{\kappa} \frac{dB}{dT} \frac{dT}{dz} \quad (3.48)$$

Quindi

$$F(\tau, \nu) = \frac{4\pi}{3} \left[-\frac{1}{\kappa} \frac{dB}{dT} \right] \frac{dT}{dz} \quad (3.49)$$

che se integrato per tutte le frequenze ν e usando la definizione di intensità di corpo nero

$$F(\tau) = \frac{4\pi}{3} \left[- \int_0^\infty \frac{1}{\kappa} \frac{dB}{dT} d\nu \right] \frac{dT}{dz} = - \frac{4\pi}{3} \frac{1}{\kappa_R} \frac{dB}{dT} \frac{dT}{dz} = - \frac{16}{3} \frac{\sigma T^3}{\kappa_R(\tau, \nu)} \frac{dT}{dz} \quad (3.50)$$

che dipende solo dalla temperatura, e la sua dipendenza dalla quota, e dall'opacità di Rosseland. Ricordiamo l'opacità media di Rosseland, dalla (2.10)

$$\frac{1}{\kappa_R} \frac{dB}{dT} = \int_0^\infty \frac{1}{\kappa} \frac{dB}{dT} d\nu \quad (3.51)$$

questa è la forma di un'equazione di diffusione, da qui il nome dell'approssimazione. Concludiamo che il flusso viaggia in direzione opposta al gradiente di temperatura.

Soluzione

Considerando la funzione sorgente che cambia lentamente in una distanza τ , possiamo prendere l'espansione in serie di Taylor

$$S(\tau, \mu, \nu) \approx B(\tau', \nu) + \frac{dB(\tau', \nu)}{d\tau} (\tau - \tau') \quad (3.52)$$

in cui trascuriamo termini di ordine superiore. Quindi considerando l'equazione trovata a inizio capitolo

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \nu)}{dz} = -\kappa(\tau, \nu) I(\tau, \mu, \nu) + \epsilon(\tau, \mu, \nu) \quad (3.53)$$

dividendola per κ

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \nu)}{d\tau} = I(\tau, \mu, \nu) - S(\tau, \mu, \nu) \approx I(\tau, \mu, \nu) - B(\tau', \nu) - \frac{dB(\tau', \nu)}{d\tau} (\tau - \tau') \quad (3.54)$$

Quindi la soluzione di questa equazione è, integrando da ∞ a τ' ,

$$I(\tau, \mu, \nu) = \frac{1}{\mu} \int_\tau^\infty \left[B(\tau', \nu) + \frac{dB(\tau', \nu)}{d\tau'} (\tau - \tau') \right] e^{-(\tau - \tau')/\mu} d\tau' \quad (3.55)$$

che ha soluzione

$$I(\tau, \mu, \nu) \approx B(\tau, \nu) - \mu \frac{dB(\tau, \nu)}{d\tau} \quad (3.56)$$

Vediamo che nell'atmosfera profonda, dove τ tende a ∞ ,

$$I(\tau, \mu, \nu) = S(\tau, \mu, \nu) = B(\tau, \nu) \quad (3.57)$$

cioè, $I = B$ per una radiazione di corpo nero e $S = B$ nel caso di radiazione termica.

Conclusioni

In questo lavoro si è cercato di descrivere le basi per alcune soluzioni analitiche per il trasferimento radiativo in atmosfera planetaria. Essendo questo un problema molto ampio, che presenta molte differenze in base al contesto considerato, si sono cercate soluzioni approssimate secondo i contributi più o meno significativi alla comprensione del sistema fisico.

Partendo dal caso di atmosfera isoterma, il risultato ricavato descrive l'intensità della radiazione del pianeta pari a quella di un corpo nero che emette alla temperatura dell'atmosfera.

Se l'atmosfera presenta una struttura verticale di temperatura non banale, invece, gli spettri rilevati saranno diversi, con linee di assorbimento o emissione.

Il modello di atmosfera che viene spesso usato è quello di "piani paralleli", per cui la soluzione dell'equazione del trasferimento radiativo è essenzialmente formata da tre contributi: il termine di trasmissione della radiazione, di emissione termica e di scattering, che insieme definiscono la funzione sorgente per un'atmosfera in cui si considera la totalità dei fenomeni di assorbimento ed emissione.

Infine è stato considerato il caso di un'atmosfera planetaria in condizioni LTE, a cui si è potuta applicare l'"approssimazione di diffusione" che fornisce un risultato più generale per l'intensità e il flusso ad una quota arbitraria. La stessa approssimazione è stata anche utilizzata per dimostrare come $I = S = B$ laddove τ assume valori molto elevati, quindi negli strati inferiori di un'atmosfera planetaria.

Una volta apprese le basi teoriche del trasferimento radiativo ed aver definito un *set* di assunzioni sul sistema fisico, si ripercorrono i calcoli del trasferimento per risalire a previsioni riguardo alla struttura della temperatura e allo spettro dell'atmosfera considerata. Se si conosce lo stato fisico-chimico dell'atmosfera e la geometria delle osservazioni, un modello come questo, cioè un modello diretto⁵, può fornire una simulazione della radiazione osservata, esibendo una stima per l'intensità e lo spettro. Questo tipo di modelli possono anche essere usati per studiare l'accuratezza e la precisione delle misure e comparare la resa di diverse tecniche di misura o di diversi sensori.

Esiste anche l'approccio inverso, che prende origini dallo studio dell'atmosfera terrestre e viene chiamato *atmospheric retrieval*: si parte dalle misure degli spettri di trasmissione ed emissione per ricavare la composizione chimica e la temperatura dell'atmosfera. Nel caso dello studio delle atmosfere dei pianeti extrasolari, il metodo di osservazione di spettri più utilizzato è il transito, che permette la rilevazione dell'atmosfera in diverse configurazioni: può essere misurato lo spettro di trasmissione della regione del terminatore giorno-notte quando il pianeta si trova di fronte alla stella, o lo spettro di emissione dell'atmosfera diurna quando il pianeta è vicino alla posizione della seconda eclisse. Per un pianeta con un'atmosfera, l'intensità di radiazione bloccata durante il passaggio davanti alla stella dipende dalla lunghezza d'onda considerata: l'atmosfera, per quanto sia uno strato sottile, scherma in modo diverso la radiazione a diverse lunghezze d'onda. In genere si usa nel caso del procedimento inverso un modello parametrico in cui si definiscono il profilo di temperatura-pressione e la

⁵In inglese "forward model"

densità delle diverse specie chimiche come parametri liberi. Utilizzando un algoritmo statistico vengono generati ed esplorati diversi valori di uno spazio dei parametri, che può avere un numero notevole di dimensioni, fino a determinare un intervallo di confidenza, cioè una regione dello spazio dei parametri consistente con le misure. I valori dei parametri vengono in fine determinati con il processo di marginalizzazione, in cui ogni parametro è stimato indipendentemente dagli altri.

In entrambi i casi i metodi utilizzati devono soddisfare un buon compromesso tra accuratezza dei risultati ed efficienza computazionale.

Bibliografia

- [1] Bohm-Vitense, E. (1989), *Stellar Atmospheres, vol. II*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Buglia, J.J. (1986), *An Introduction to the Theory of Atmospheric Radiative Transfer*, Nasa Reference Publication 1156, Langley.
- [3] Chandrasekhar, S. (1950), *Radiative Transfer*, Clarendon Press, Oxford.
- [4] Conti, A., Clampin, M. (2015), *How Space Telescopes Will Find Earth 2.0*, articolo reperibile sul sito <https://spectrum.ieee.org>.
- [5] Gandhi, S., Madhusudhan, N. (2017), *Retrieval of Exoplanet Emission Spectra with HyDRA*, arXiv:1710.06433v2.
- [6] Goody, R.M., Yung, Y.L. (1989), *Atmospheric Radiation: Theoretical Basis*, Oxford University Press, Oxford.
- [7] Heng, K., Marley, M. (2017), *Radiative Transfer for Exoplanet Atmospheres*, 10.1007/978-3-319-30648-3-102-1.
- [8] Liou, K.N. (2002), *An Introduction to Atmospheric Radiation*, Second Edition, Academic Press, San Diego.
- [9] McCluney, W.R (1994), *Introduction to Radiometry and Photometry*, Artech House, Norwood.
- [10] Rutten, R.J. (2003), *Radiative Transfer in Stellar Atmospheres*, Utrecht University lecture notes, 8th edition.
- [11] Seager, S. (2010), *Exoplanet Atmosphere: Physical Processes*, Princeton University Press, Princeton.
- [12] Watson, A. (2012), *Lecture Notes*, UNAM.
- [13] <https://exoplanets.nasa.gov>