



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia Elettrica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Modellizzazione e riduzione degli errori di campo magnetico in RFX-mod upgrade

Laureando:
Dimitri Voltolina
Matricola 1081471

Relatore:
Prof. Paolo Bettini

Anno Accademico 2015-2016

Alla mia famiglia

Sommario

RFX è una macchina toroidale, costruita a Padova allo scopo di studiare le proprietà fisiche dei plasmi e il loro confinamento magnetico, specialmente in configurazione RFP. Nel corso di questi anni sono stati raggiunti risultati significativi, merito anche delle successive modifiche apportate alla macchina. Attualmente è in fase di progetto una nuova importante revisione (*RFX-mod upgrade*), il cui principale tema verte sull'eliminazione della camera da vuoto in cui è contenuto il plasma. Questa modifica permetterà di raggiungere regimi di confinamento avanzati, allo scopo di ottenere importanti risultati sul comportamento del plasma, i quali potranno dare un grande contributo allo sviluppo dei principali progetti sulla fusione nucleare (ITER, DEMO). Questo contesto ha reso possibile la rivalutazione di altri aspetti progettuali, al fine di ottimizzare le prestazioni di RFX, tra i quali la gestione dei gap delle strutture metalliche conduttrici che circondano il plasma. Al fine di raggiungere i regimi di confinamento desiderati, è fondamentale limitare gli errori di campo che derivano dalla presenza di tali gap. In questo elaborato verrà presentata, sull'appoggio di precedenti studi svolti, un'analisi elettromagnetica dei campi errore che si vengono a formare in due diverse situazioni: durante la fase di accensione del plasma, detta fase di *ramp-up* e durante la fase di *flat-top*, in presenza di un modo di plasma $m = 1$, $n = 7$ in condizioni di equilibrio dinamico. Sono stati adottati approcci numerici diversi per la soluzione dei set di equazioni che descrivono le diverse situazioni. Nel caso magnetostatico, come spesso viene adottato nella fisica dei plasmi da fusione, si è utilizzato un metodo integrale, applicando in modo ricorsivo la legge di Biot-Savart a elementi di volume e/o di superficie che modellizzano le sorgenti di campo. I problemi di correnti indotte, per lo studio degli errori di campo, sono invece stati trattati attraverso una formulazione discreta delle leggi di Maxwell (Metodo delle Celle). Nel capitolo finale viene presentato un possibile sistema di correzione locale degli errori di campo, composto da 12 bobine a sella disposte in corrispondenza dei gap poloidali. In tutte le analisi il problema è stato considerato tridimensionale, tenendo conto della toroidicità della configurazione.

Abstract

RFX is a toroidal device built in Padua to study the physical properties of plasmas and their magnetic confinement, especially in RFP configuration. In the last years relevant results have been obtained, thanks to continuous modifications of the machine as well. A major modification is currently under design (*RFX-mod upgrade*), which main topic concerns the removal of the present vacuum vessel, in order to achieve advanced confinement regimes. This will make physicists able to obtain new relevant informations about plasma's behavior, which is fundamental for the development of the main fusion's project, as ITER and DEMO. In this scenario other design aspects could be reconsidered for performance optimization of the machine, such as the the gap configurations of the conductive structures around the plasma. These gaps produce field errors which must be reduced, in order to achieve the desired confinement regimes. This thesis looks at electromagnetic analysis of field errors produced in two different scenarios: the *ramp-up* phase of the discharge, in which the plasma is formed, and the *flat-top* phase of a plasma in dynamic equilibrium characterized by a $m = 1$, $n = 7$ mode. Different numerical methods have been considered to solve the electromagnetic problem related to each scenario. The magnetostatic case has been treated by a integral approach, as often done in plasma physics: the Biot-Savart law has been applied to volume and/or surface elements that are sources of the magnetic field in the domain of the problem. As far as the eddy-current problems is concerned, that are the cause of field errors, the Cell Method has been considered, which involves the discrete formulation of Maxwell's laws. In the end a local correction system of field errors has been suggested, made of a set of 12 coils that span the poloidal gaps of the machine. In all the problems it has been taken into account the toroidicity of the machine, so the problem has been always solved by a 3D point of view.

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduzione | 1 |
| 1.1 | La fusione nucleare | 1 |
| 1.2 | Il criterio di Lawson | 2 |
| 1.3 | Il confinamento magnetico | 4 |
| 1.3.1 | Plasma e moto delle cariche elettriche | 4 |
| 1.3.2 | Sistema di riferimento toroidale | 7 |
| 1.3.3 | Equilibrio MHD | 8 |
| 1.3.4 | Equilibrio radiale | 9 |
| 1.3.5 | Equilibrio toroidale | 11 |
| 1.3.6 | Tokamak - RFP | 14 |
| 2 | Reversed Field Experiment | 17 |
| 2.1 | RFX | 17 |
| 2.2 | Sistema di confinamento magnetico | 18 |
| 2.2.1 | Avvolgimento di campo toroidale (TF) | 19 |
| 2.2.2 | Avvolgimento magnetizzante (OH) | 20 |
| 2.2.3 | Avvolgimento di campo verticale (FS) | 20 |
| 2.3 | RFX-mod | 21 |
| 2.4 | RFX-mod Upgrade | 24 |
| 2.4.1 | Vaccum Toroidal Support Structure (VTSS) | 25 |
| 2.4.2 | Passive Stabilizing Shell (PSS) | 25 |
| 2.5 | Errori di campo magnetico | 27 |
| 2.6 | Riepilogo delle configurazioni dei gap | 31 |
| 3 | Il metodo delle celle | 33 |
| 3.1 | Il concetto di cella nello spazio 3D | 33 |
| 3.1.1 | Orientazione | 34 |
| 3.1.2 | Complesso duale di celle | 37 |
| 3.2 | Matrici e numeri di incidenza | 39 |
| 3.3 | Formulazione discreta delle leggi di Maxwell | 42 |
| 4 | Analisi modale | 45 |
| 4.1 | Modi di plasma | 45 |
| 4.2 | Discretizzazione del dominio | 47 |
| 4.2.1 | Plasma | 47 |
| 4.2.2 | Punti di calcolo | 49 |
| 4.3 | Definizione delle sorgenti di campo | 49 |
| 4.4 | Campo prodotto dal plasma | 52 |
| 4.4.1 | Determinazione di W_f e ∇W_f | 54 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.4.2 | Risultati della simulazione | 56 |
| 4.5 | Risposta della shell | 57 |
| 4.5.1 | Formulazione integrale | 58 |
| 4.5.2 | Risultati della simulazione | 60 |
| 5 | Fase di <i>ramp-up</i> | 63 |
| 5.1 | Descrizione del problema | 63 |
| 5.2 | Effetto delle correnti indotte | 64 |
| 6 | Sistema di correzione locale | 69 |
| 6.1 | Calcolo del campo radiale | 71 |
| 6.2 | Flusso concatenato | 74 |
| 6.3 | Considerazioni | 77 |
| 6.4 | Esempio di compensazione | 78 |
| 6.5 | Risposta della shell | 80 |
| 7 | Conclusioni e futuri sviluppi | 87 |

Elenco delle figure

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Sezioni d'urto in funzione dell'energia del nucleo D | 3 |
| 1.2 | Curve di Lawson al variare di Q (prodotto triplo "target" corrispondente al minimo della curva) | 4 |
| 1.3 | Forza agente sulle cariche e conseguente moto di giroazione | 5 |
| 1.4 | Traiettoria di una particella carica lungo una linea di campo magnetico uniforme | 6 |
| 1.5 | Effetto di \mathbf{v}_E sulle cariche e risultante drift | 6 |
| 1.6 | Drift generato da ∇B (a) e $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift che ne consegue (b) | 7 |
| 1.7 | Sistema di riferimento toroidale ($p \equiv \theta$ e $t \equiv \phi$) | 8 |
| 1.8 | Profilo di pressione di riferimento per un plasma confinato | 9 |
| 1.9 | Superficie di flusso per \mathbf{B} e \mathbf{J} | 10 |
| 1.10 | Sistema di coordinate cilindriche | 10 |
| 1.11 | Formazione della hoop-force (a) e risultante forza toroidale (b) | 12 |
| 1.12 | Azione di equilibrio esercitata dal campo verticale esterno | 13 |
| 1.13 | Azione di stabilizzazione passiva della shell | 13 |
| 1.14 | Sistema magnetico e risultanti campi magnetici | 15 |
| 1.15 | Tipici profili di campo magnetico e pressione in un Tokamak (a) e in un RFP (b) | 16 |
| 2.1 | Elemento poloidale del vessel e FW | 17 |
| 2.2 | Camera da vuoto completamente assemblata | 18 |
| 2.3 | Andamento delle forze magnetomotrici negli avvolgimenti durante un tipico impulso in RFX | 19 |
| 2.4 | Assemblaggio completo della macchina RFX | 22 |
| 2.5 | Sezione poloidale di RFX | 22 |
| 2.6 | Assemblaggio della shell di RFX-mod | 23 |
| 2.7 | Dettaglio del gap toroidale esterno della shell | 23 |
| 2.8 | Porzione toroidale del sistema di bobine a sella | 24 |
| 2.9 | Componenti di RFX-mod (in grassetto gli elementi che verranno modificati in RFX-mod2) | 24 |
| 2.10 | Modifiche apportate al sistema di contenimento del plasma in RFX-mod2 | 25 |
| 2.11 | Realizzazione dei gap equatoriali (a) e dettaglio del giunto esterno (b) | 26 |
| 2.12 | Realizzazione dei gap poloidali (a) e dettaglio dell'assemblaggio dell'anello (b) | 26 |
| 2.13 | Riepilogo delle configurazioni dei gap nella VTSS | 26 |
| 2.14 | Sistema di fissaggio del FW e della PSS agli anelli di supporto | 27 |
| 2.15 | Composizione della shell (a) e della guida di supporto (b) | 27 |
| 2.16 | Rappresentazione concettuale delle tre alternative per il gap poloidale | 28 |
| 2.17 | Sequenza di assemblaggio prevista per RFX-mod2 (grigio: TSS, giallo: shell, arancio: FW) | 30 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.1 | Complesso di celle coordinate nei sistemi di riferimento cartesiano (a), cilindrico (b) e sferico (c) | 34 |
| 3.2 | Complesso di celle semplice | 34 |
| 3.3 | Concetto “standard” di elementi orientati | 35 |
| 3.4 | Orientazione interna (a) ed esterna (b) di una linea | 35 |
| 3.5 | Orientazione interna (a) ed esterna (b) di una superficie | 35 |
| 3.6 | Orientazione interna (a) ed esterna (b) di un volume | 36 |
| 3.7 | Orientazione interna (a) ed esterna (b) di un punto | 37 |
| 3.8 | Orientazione esterna degli elementi spaziali in 3D, 2D e 1D | 37 |
| 3.9 | Esempio di cella duale | 38 |
| 3.10 | Processo di induzione dell’orientazione esterna sulle celle del complesso duale | 39 |
| 3.11 | Relazioni tra numeri di incidenza di coppie di celle primarie/duali | 40 |
| 3.12 | Esempio di complesso orientato in 2D | 41 |
| 3.13 | Complesso duale dell’esempio | 41 |
| 4.1 | Punti individuati dalla linea di campo in seguito a successive rivoluzioni | 45 |
| 4.2 | Esempio di mesh triangolare con $n_{pol} = 3$ e $n_{tor} = 4$ | 48 |
| 4.3 | Mesh della superficie “sorgente” (per facilità di visualizzazione $n_{tor} = 70$, $n_{pol} = 10$) | 49 |
| 4.4 | Mesh rettangolare dei punti di calcolo | 50 |
| 4.5 | Sistema di riferimento locale | 50 |
| 4.6 | Andamento del potenziale ψ^{mn} per il modo $m = 1, n = 7$ ($\psi_c^{mn} = \psi_s^{mn} = 1$) | 52 |
| 4.7 | Dettaglio dei vettori \mathbf{J} su una porzione di superficie | 53 |
| 4.8 | Campo radiale prodotto dal plasma con modo $m = 1, n = 7$ | 57 |
| 4.9 | Celle del complesso primario (a) e realizzazione di una cella duale (b) | 58 |
| 4.10 | Campo radiale prodotto dalle correnti indotte sulla shell | 61 |
| 4.11 | Campo radiale risultante | 61 |
| 4.12 | Grafico vettoriale delle correnti indotte sulla shell | 62 |
| 5.1 | Dettaglio della mesh su PSS e TSS | 65 |
| 5.2 | Andamento della forza magnetomotrice sugli avvolgimenti di campo poloidale (OH + FS) | 65 |
| 5.3 | Componente di campo radiale dovuta al campo verticale esterno B_v | 66 |
| 5.4 | Grafico vettoriale delle correnti indotte sulla shell | 67 |
| 5.5 | Campo radiale $B_{rad} [mT]$ sul bordo plasma in corrispondenza del gap a $t_2 = 20 ms$ e $t_3 = 100 ms$ | 67 |
| 6.1 | Rappresentazione schematica delle 12 bobine sulla sezione poloidale del gap | 70 |
| 6.2 | Collocazione dei due set di bobine proposti (in oro la shell, in grigio la TSS) | 70 |
| 6.3 | Elemento rettilineo filiforme e principali grandezze spaziali | 72 |
| 6.4 | Modellizzazione delle bobine di compensazione (in giallo gli elementi filiformi) | 73 |
| 6.5 | Confronto dell’andamento del campo radiale prodotto dai due set di bobine | 74 |
| 6.6 | Andamento dei vettori di campo \mathbf{B} prodotti da una sola bobina di compensazione (evidenziata in giallo) | 75 |
| 6.7 | Rappresentazione schematica di un sensore e suddivisione di un lato | 76 |
| 6.8 | Visione completa del sistema di sensori (in rosso i punti di calcolo) | 77 |

| | | |
|------|--|----|
| 6.9 | Sezione poloidale in corrispondenza del gap $\phi = 93.75^\circ$ | 78 |
| 6.10 | Compensazione sinusoidale e ottimizzata del campo errore | 80 |
| 6.11 | Correnti indotte su shell e TSS dalle bobine 2-12 | 82 |
| 6.12 | Mappa di correnti indotte sulla porzione inferiore della shell | 82 |
| 6.13 | Mappa del campo radiale prodotto dalle sole bobine (a), dalle correnti indotte (c) e campo risultante (b) | 85 |

Elenco delle tabelle

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Possibili configurazioni dell'avvolgimento toroidale TF | 20 |
| 2.2 | Composizione dell'avvolgimento magnetizzante | 21 |
| 2.3 | Confronto tra le principali prestazioni delle due shell | 23 |
| 6.1 | Coordinate degli assi delle 12 bobine di correzione | 69 |
| 6.2 | Campo radiale misurato sull'asse dei sensori, dovuto ai due set di bobine (corrente di 1 A) | 73 |
| 6.3 | Flusso concatenato dai sensori, dovuto ai due set di bobine (corrente di 1 A) | 77 |
| 6.4 | Correnti di compensazione con profilo sinusoidale e dopo ottimizzazione | 80 |

Capitolo 1

Introduzione

1.1 La fusione nucleare

La fusione nucleare si basa sulla fusione di nuclei di elementi leggeri (basso numero di massa) come deuterio ($D = {}_1H^2$), trizio ($T = {}_1H^3$) ed elio (${}_2He^3$). L'energia liberata dalla fusione dei due nuclei è dovuta alla differenza di massa tra reagenti e prodotti, in accordo con il *principio di Einstein* $E = \Delta mc^2$. Esistono diverse possibili reazioni ma, per ragioni di disponibilità del combustibile e fattibilità della reazione, la ricerca scientifica si è attualmente focalizzata su due di queste: $D - D$ e $D - T$. La fusione di due nuclei di deuterio può dar luogo a due differenti insiemi di prodotti, all'incirca con la medesima probabilità [1]:



Si tratta della reazione più interessante dal punto di vista della sostenibilità ambientale di un futuro reattore, in quanto il combustibile è facilmente estraibile dall'acqua degli oceani e rappresenta una scorta di fatto infinita (si stima che l'energia estraibile potrebbe soddisfare il fabbisogno energetico mondiale attuale per 2 miliardi di anni). Tuttavia, come si vedrà in seguito, è la reazione più difficile da innescare e questo ha focalizzato la ricerca attuale sulla reazione $D - T$:



La reazione libera un'enorme quantità di energia, per contro questo processo richiede la disponibilità di trizio, che è un isotopo radioattivo dell'idrogeno con un tempo di decadimento di circa 12 anni, il che lo rende non naturalmente disponibile sulla Terra. Per questo motivo il trizio deve essere "coltivato", introducendo nei reattori delle strutture a mantello in litio, che interagiscono con i neutroni emessi dalle reazioni per produrre trizio. Altro aspetto svantaggioso è la produzione di neutroni: non essendo particelle cariche, non possono essere intrappolate dai campi magnetici di confinamento, per cui escono dal reattore e attivano radioattivamente le parti circostanti. Queste particelle dovranno quindi essere rallentate, anche per favorire la produzione del trizio, dal momento che il *Li* reagisce più facilmente con neutroni lenti.

Per poter dare luogo ad una reazione di fusione i due nuclei devono essere estremamente vicini tra loro, in modo tale che essi possano risentire della forza di attrazione nucleare. Non è facile far interagire le due particelle perché i due nuclei tenderanno ad allontanarsi a causa della forza di repulsione elettrostatica, che si intensificherà tanto

più quanto i nuclei saranno vicini tra loro. Tuttavia si osserva che, al di sotto di una certa distanza r_m (circa il diametro di un nucleo), la forza di attrazione nucleare risulta predominante sulla forza coulombiana. In altre parole per far reagire i due nuclei, questi dovranno avere un'energia cinetica superiore all'energia elettrostatica corrispondente a tale distanza, detta *barriera di Coulomb*, in modo da avvicinarsi sufficientemente. Per una reazione $D - T$:

$$r_m \simeq 5 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (1.4)$$

$$W_{Coulomb} = 288 \text{ keV} \quad (1.5)$$

La probabilità che due nuclei incorrano in una reazione di fusione è espressa dalla *sezione d'urto* σ . Il concetto di sezione d'urto nasce da un'analogia meccanica, secondo la quale due sfere rigide (i nuclei D, T) danno luogo a una reazione se si muovono l'una verso l'altra entro un volume cilindrico di sezione $\sigma = \pi d^2$, dove d è il diametro della sfera. Nel caso di una reazione $D - T$ la sezione d'urto sarà quindi nulla per energie inferiori a 288 keV e pari a πr_m^2 per energie superiori (modello classico della sezione d'urto). In realtà la corretta valutazione della sezione d'urto richiede la considerazione degli effetti della meccanica quantistica, i quali apportano 3 modifiche al modello classico:

- esiste una probabilità non nulla di avere reazioni al di sotto della barriera di Coulomb;
- se la velocità dei nuclei è troppo elevata questi possono non avere tempo sufficiente per reagire, riducendo così σ ;
- in particolari condizioni possono manifestarsi fenomeni risonanti con un incremento della probabilità di collisione.

La reazione $D - T$ presenta, per un ampio intervallo di energie, la sezione d'urto maggiore di tutte le altre possibili reazioni: è per questo motivo che la ricerca scientifica ha orientato gran parte del suo interesse attuale sulla fusione di nuclei D e T, nonostante alcuni svantaggi già visti in precedenza.

1.2 Il criterio di Lawson

L'obiettivo di un reattore a fusione, come ogni altro impianto di produzione di energia, sarà quello di generare più potenza di quanta ne viene spesa per alimentare l'impianto stesso. Il criterio di Lawson permette di ricavare i requisiti necessari per raggiungere tale obiettivo. Si consideri il bilancio di potenze nel reattore in condizioni di equilibrio:

$$P_{tot} = P_{fus} + P_{ext} - P_{out} \quad (1.6)$$

Chiaramente in condizioni di equilibrio il bilancio di potenze dovrà essere nullo: la potenza immessa nel reattore, per effetto delle reazioni di fusione interne (P_{fus}) e dai sistemi addizionali esterni di riscaldamento del plasma (P_{ext}), dovrà bilanciare la potenza uscente (P_{out}), perduta a causa di diversi fenomeni (radiazione, trasporto, convezione, conduzione,...). Con alcune ipotesi semplificative Lawson ricavò le condizioni per ottenere una produzione netta di energia da un plasma di D e T:

$$n\tau_E \geq 6 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3} \text{ s} \quad (1.7)$$

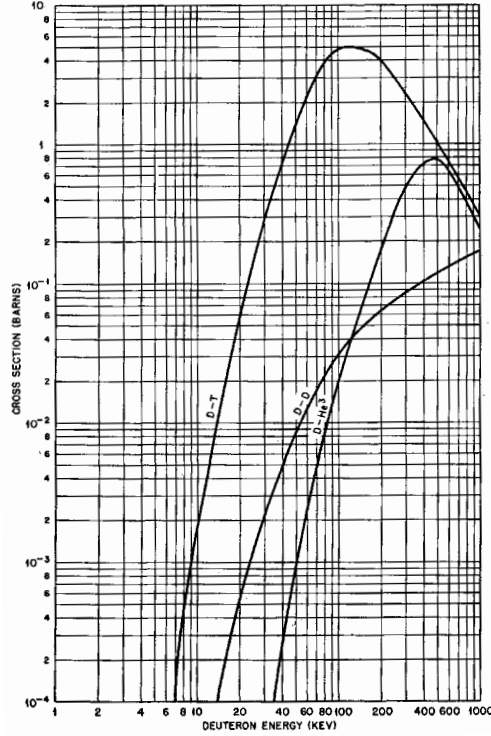


Fig. 1.1: Sezioni d'urto in funzione dell'energia del nucleo D

$$T = 20 \text{ keV} (\approx 230 \cdot 10^6 \text{ K})^* \quad (1.8)$$

dove n è la densità delle particelle (circa uguale tra ioni e elettroni), mentre τ_E è detto *tempo di confinamento* e rappresenta il tempo caratteristico di decadimento dell'energia immagazzinata nel plasma, associato ai diversi meccanismi di perdita sopra citati. Il criterio di Lawson stabilisce dunque che, affinché coppie di nuclei di D e T si fondano in un numero sufficiente da produrre un'energia da fusione maggiore di quella fornita al processo stesso, deve essere presente una pressione sufficientemente elevata (i.e. densità del gas) e i nuclei devono conservare l'energia acquisita per un tempo τ_E tale da verificare la (1.7) [2]. La seconda relazione aggiunge che tali nuclei devono possedere mediamente una temperatura di almeno 230 milioni di °C, per cui il plasma del reattore dovrà essere caratterizzato da un sufficientemente elevato *prodotto triplo*:

$$n\tau_E T \geq 1.2 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3} \text{ s keV} \quad (1.9)$$

I risultati del criterio di Lawson hanno un interesse storico per la ricerca sulla fusione, mentre al giorno d'oggi è più interessante ricavare le condizioni in termini di prodotto triplo, necessario per ottenere un certo *fattore di guadagno di plasma* definito come:

$$Q = \frac{P_{fus}}{P_{ext}} \quad (1.10)$$

*In un plasma la temperatura è associabile all'energia termica media posseduta dalle particelle. Considerando che l'energia termica media è esprimibile come $k_B T$, dove k_B è la costante di Boltzmann, allora l'energia di 1 eV corrisponde a una temperatura di circa 11600 K.

Il caso $Q = 1$ rappresenta la condizione di *pareggio energetico*, o *breakeven*, in cui la potenza generata dalle reazioni di fusione bilancia quella immessa dall'esterno. Per ottenere una produzione netta di energia il plasma dovrà fornire un $Q > 1$; la condizione ideale, cosiddetta di *ignizione*, corrisponde a $Q \rightarrow \infty$ e richiede un prodotto triplo di:

$$\begin{aligned} n\tau_E &\geq 1.5 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}\text{s} \\ T &= 20 \text{ keV} \\ n\tau_e T &\geq 3 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}\text{s keV} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Si noti che in un reale reattore si vuole avere il controllo della reazione e quindi sarà opportuno mantenere Q su valori intorno a 10. La condizione di ignizione rappresenta comunque un riferimento per il raggiungimento di un Q sufficientemente elevato.

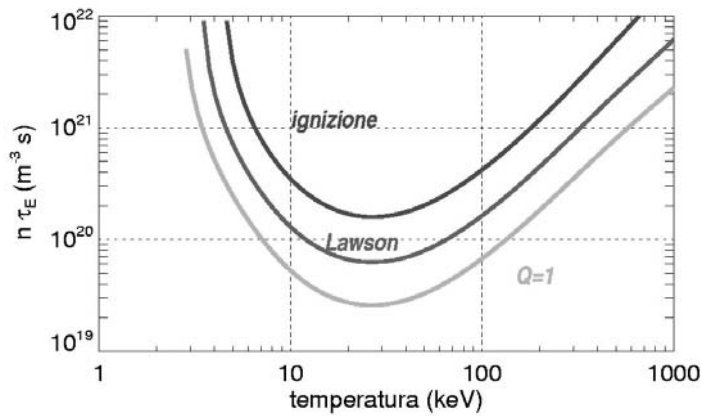


Fig. 1.2: Curve di Lawson al variare di Q (prodotto triplo “target” corrispondente al minimo della curva)

1.3 Il confinamento magnetico

1.3.1 Plasma e moto delle cariche elettriche

In un reattore a fusione un requisito fondamentale riguarda il confinamento della colonna di gas combustibile in esso contenuto: tale gas dovrà essere mantenuto lontano dalle pareti del contenitore (camera da vuoto), per non danneggiare quest'ultimo viste le elevatissime temperature in gioco e per non disperdere l'energia acquisita dalle particelle, necessaria per raggiungere le condizioni di fusione richieste. Alle temperature tipiche di un plasma da fusione, descritte nella precedente sezione, il gas di D e T si trova in uno stato della materia noto come *plasma*: senza entrare in proprietà fisiche complesse, si tratta di un gas quasi totalmente ionizzato in cui la densità ionica è pressoché uguale a quella elettronica (proprietà di *quasi-neutralità*). In questo stato il moto delle cariche elettriche presenti è prevalentemente governato dalle forze su larga scala dovute alla presenza di campi elettrici e magnetici. Il moto degli elettroni e ioni presenti nel plasma è descritto dalla *teoria del centro guida*, secondo la quale le linee di campo magnetico agiscono come linee guida per il moto delle cariche. In particolare in presenza di un campo di induzione magnetica uniforme \mathbf{B} , in direzione ortogonale a questo ioni ed elettroni risentono rispettivamente di una forza centripeta $\pm e\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}$, che tende a far

percorrere alle particelle traiettorie circolari (*moto di giroazione*) intorno alle linee di campo, con una frequenza angolare di rotazione (*frequenza di ciclotrone*) data da [3]:

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m} \quad (1.12)$$

dove m è la massa della particella considerata (ione o elettrone), q la carica elettrica posseduta e B l'ampiezza del campo di induzione magnetica.

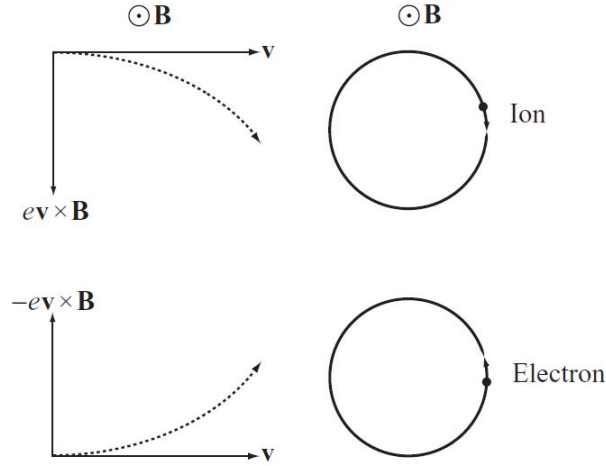


Fig. 1.3: Forza agente sulle cariche e conseguente moto di giroazione

Il raggio di curvatura che descrive questa traiettoria è detto *raggio di Larmor*:

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \quad (1.13)$$

dove v_{\perp} indica l'ampiezza della componente del vettore velocità \mathbf{v} ortogonale al campo \mathbf{B} . Con i parametri tipici di un plasma da fusione tale raggio assume valori intorno a qualche decina di μm per gli elettroni, e di pochi mm per gli ioni, valori molto piccoli rispetto ai tipici raggi di plasma: si può quindi concludere che le particelle risultano ben confinate in direzione ortogonale alle linee di campo. Parallelamente alle linee di campo invece le cariche non risentono di alcun effetto dovuto a \mathbf{B} e sono quindi libere di muoversi (il prodotto $\mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{B}$ è identicamente nullo per come definita \mathbf{v}_{\parallel}). La combinazione dei due moti parallelo e ortogonale determina una traiettoria elicoidale delle particelle attorno alle linee di campo magnetico, che agiscono appunto come linee guida per il movimento delle particelle. Questo risultato è molto importante per la geometria del reattore: infatti, per impedire la perdita di particelle, si dovranno utilizzare geometrie toroidali con linee di campo che si “avvolgono” attorno la superficie senza però incidere sulle pareti. Tuttavia questo non è l'unico moto a cui possono essere soggette le cariche. La presenza di un campo elettrico \mathbf{E} uniforme, ortogonale al campo \mathbf{B} , causa una *deriva* delle particelle in direzione ortogonale sia a \mathbf{B} che a \mathbf{E} . Se si considera il moto in direzione ortogonale al campo magnetico, si osserva la presenza di una nuova componente di velocità $\mathbf{v}_{\mathbf{E}}$, detta appunto *velocità di deriva*:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (1.14)$$

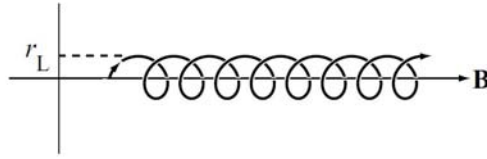


Fig. 1.4: Traiettoria di una particella carica lungo una linea di campo magnetico uniforme

Questa si sovrappone alla velocità del moto di giroazione descritta precedentemente, aumentando la risultante velocità ortogonale per mezza semicirconfenza e riducendola per la restante parte della traiettoria: in accordo con la (1.13) si ha una variazione del raggio di Larmor e la particella tende a deviare nella direzione imposta da \mathbf{v}_E . In altre parole al moto di giroazione si combina un moto di deriva del centro guida.

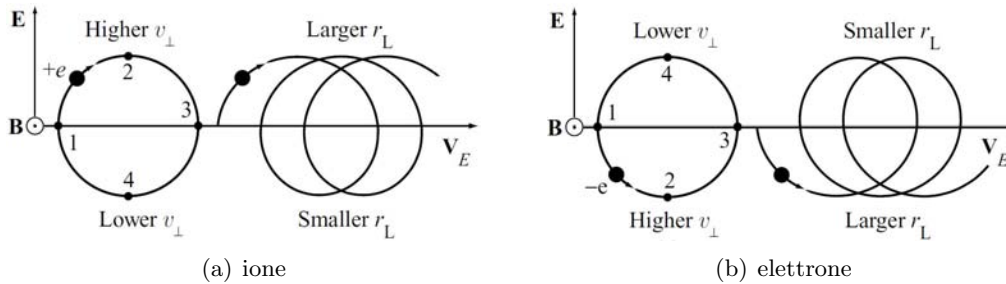


Fig. 1.5: Effetto di \mathbf{v}_E sulle cariche e risultante drift

Un altro fenomeno di deriva può manifestarsi in presenza di un gradiente di campo magnetico ∇B ortogonale al campo stesso. Osservando la (1.13) risulta chiaro che dove il campo è più intenso la particella tenderà a percorrere una traiettoria a raggio di curvatura minore, viceversa dove il campo si riduce, portando così ad un nuovo fenomeno di deriva. Percorrendo la traiettoria in direzione opposta, elettroni e ioni tenderanno a generare una separazione di carica fino alla formazione di un campo elettrico di equilibrio tale da bilanciare la deriva delle cariche. Questo fenomeno è di particolare interesse nelle configurazioni toroidali, poiché tale campo elettrico dà luogo ad un drift delle cariche secondo la relazione (1.14) che tenderà a portare le particelle contro la parete, ponendo importanti vincoli alla configurazione magnetica.

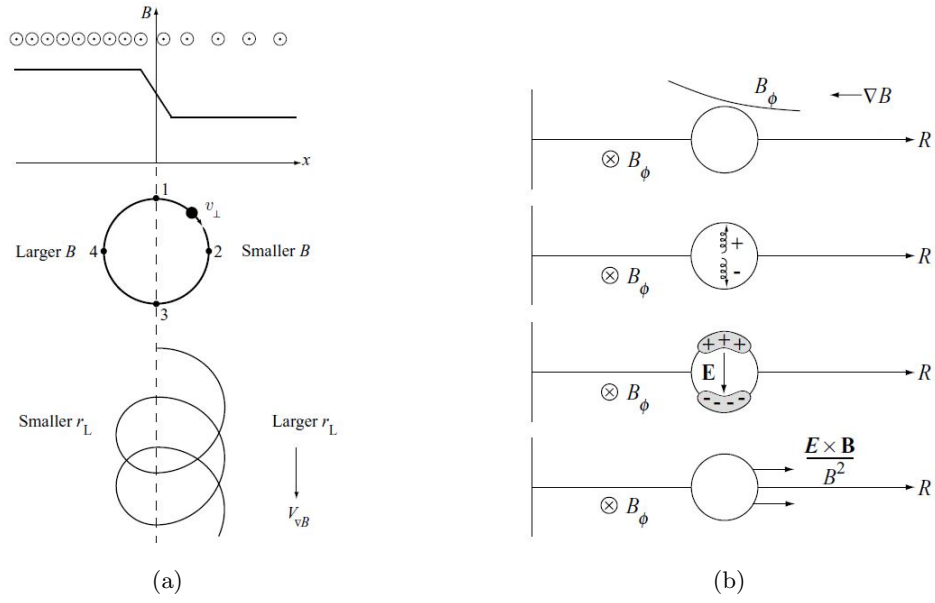


Fig. 1.6: Drift generato da ∇B (a) e $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift che ne consegue (b)

1.3.2 Sistema di riferimento toroidale

Nella precedente sezione si è motivata la necessità di adottare geometrie toroidali per limitare la collisione delle particelle con le pareti della camera da vuoto. In una geometria di questo tipo risulta conveniente scrivere le equazioni che andranno a definire il problema in esame in coordinate toroidali. Una generica superficie toroidale è parametrizzata nel sistema di riferimento cartesiano x, y, z dalle coordinate:

$$\begin{cases} x(\theta, \phi) = (R + r \cos \theta) \cos \phi \\ y(\theta, \phi) = (R + r \cos \theta) \sin \phi \\ z(\theta, \phi) = r \sin \theta \end{cases} \quad (1.15)$$

dove:

- r rappresenta la *coordinata radiale*, cioè il raggio del toro (*raggio minore*);
- R rappresenta la distanza fra il centro della superficie toroidale e l'asse del toro (*raggio maggiore*);
- θ indica l'*angolo poloidale* variabile tra 0 e 2π in direzione azimutale;
- ϕ corrisponde all'*angolo toroidale* variabile tra 0 e 2π in direzione longitudinale.

In particolare con $r = a$ si indicherà il *raggio minore* del plasma e con $R = R_0$ il *raggio maggiore*. Sfruttando le equazioni di trasformazione sopra elencate, un generico punto P definito da una terna r, θ, ϕ nel sistema toroidale, potrà essere riportato nel sistema di riferimento di assi cartesiani x, y, z . Per quanto riguarda gli avvolgimenti esterni necessari a generare i campi magnetici di confinamento si parlerà di:

- *avvolgimenti di campo poloidale* per indicare quell'insieme di bobine, percorse da una corrente toroidale, che producono un campo di induzione magnetica le cui linee giacciono su un piano poloidale;
- *avvolgimenti di campo toroidale* per indicare le bobine, percorse da corrente poloidale, che producono un campo in direzione toroidale.

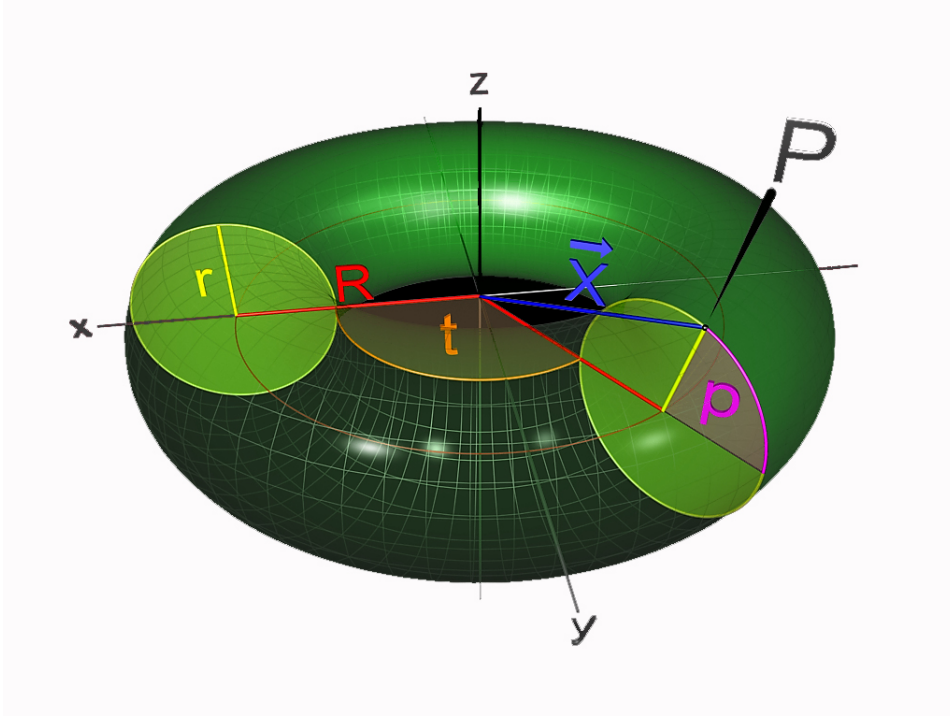


Fig. 1.7: Sistema di riferimento toroidale ($p \equiv \theta$ e $t \equiv \phi$)

1.3.3 Equilibrio MHD

Da un punto di vista macroscopico il plasma può essere visto come un unico fluido, senza alcuna distinzione sulle particelle che lo compongono. Il suo comportamento sarà descritto da un peso specifico ρ_m e da una velocità \mathbf{v} , entrambe funzioni di spazio e tempo, ottenute mediando i valori assunti da queste grandezze sulle diverse particelle (ioni ed elettroni). Applicando i principi di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia, a cui si integrano la legge di Ohm e le equazioni di Maxwell, per descrivere il comportamento dei campi elettromagnetici presenti, si giunge al set di *equazioni della magnetoidrodinamica* (MHD) che descrivono completamente il comportamento del plasma:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) = 0 \quad (1.16)$$

$$\rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (1.17)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho_m^\gamma} \right) = 0 \quad (1.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.21)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} \quad (1.22)$$

dove p è la pressione cinetica, ρ la densità di carica e η è la resistività di plasma. Il termine $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ corrispondente alla forza di Lorentz nell'equazione di conservazione della quantità di moto (1.17), anche detta *equazione di Navier-Stokes*, rappresenta il legame

tra il plasma e i campi elettromagnetici presenti. Si noti che il termine legato al campo elettrico può essere di fatto trascurato, essendo il plasma un fluido quasi-neutro ($\rho \approx 0$), segue che la (1.17) può essere riscritta come:

$$\rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (1.23)$$

L'obiettivo del confinamento magnetico è quello di mantenere il plasma lontano dalla parete della camera da vuoto: la pressione del gas nella camera dovrà essere idealmente nulla alla parete e crescere verso il centro, come mostrato in Fig.1.8.

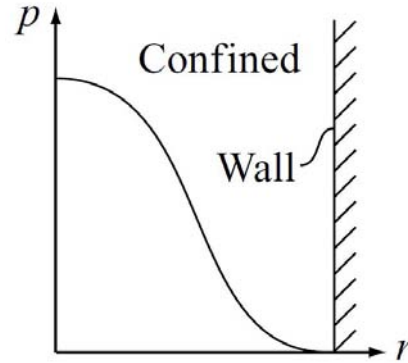


Fig. 1.8: Profilo di pressione di riferimento per un plasma confinato

Il raggiungimento di una condizione di equilibrio richiede, in geometria toroidale, la realizzazione di 2 condizioni:

- **Bilancio delle forze di pressione radiali**

In presenza di un gradiente di pressione come quello sopra descritto, il plasma tende a espandere in modo uniforme nella direzione del raggio minore r . L'interazione tra campi magnetici e correnti di plasma avrà quindi il compito di generare forze di confinamento tali da bilanciare questa espansione.

- **Bilancio delle forze toroidali**

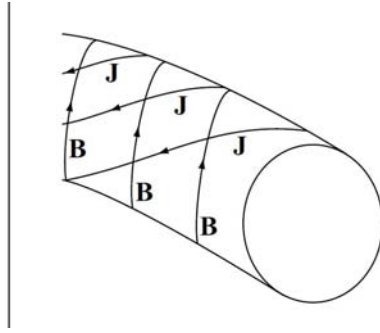
A causa della toroidicità del dominio in cui il gas è confinato, nascono delle forze che tendono a spingere il plasma verso l'esterno, nella direzione del raggio maggiore. Anche in questo caso si dovranno adottare degli opportuni sistemi di confinamento per compensare tale spostamento.

1.3.4 Equilibrio radiale

Si consideri la (1.23) e per semplicità si assuma $\mathbf{v} = 0$ (condizione di *equilibrio statico*):

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (1.24)$$

Ipotizzando che p sia isotropa (i.e. dipende solo dalla coordinata radiale), in condizioni di equilibrio il plasma sarà formato da un insieme di superfici toroidali, concentriche e iso-pressione, rispetto alle quali il ∇p è ortogonale. Si può dimostrare che queste superfici sono anche *tubi di flusso* per i campi \mathbf{B} e \mathbf{J} , in quanto tali campi vettoriali giacciono su di esse, ovvero non hanno componente ortogonale al loro contorno. Si osservi che ciò non implica il parallelismo tra i due campi, infatti l'angolo tra \mathbf{B} e \mathbf{J} dipende dalla configurazione magnetica. Un caso particolare è dato dalla configurazione

Fig. 1.9: Superficie di flusso per \mathbf{B} e \mathbf{J}

RFP, in cui il gradiente di pressione risulta praticamente nullo e i campi \mathbf{B} e \mathbf{J} sono quindi tra loro paralleli. Si consideri per ora il caso generale espresso dalla (1.24) e, introducendo la legge di Ampere-Maxwell (1.19), l'equazione di conservazione della quantità di moto diviene:

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (1.25)$$

Il primo termine a sinistra dell'equazione corrisponde alla *forza di pressione*, per unità di volume, che tende a far espandere radialmente il plasma in direzione opposta al gradiente ∇p . I secondi due termini rappresentano invece rispettivamente la densità di forza dovuta alla *pressione magnetica*, che tende a spingere il plasma verso le zone a minore induzione magnetica, in analogia con la forza di pressione, e la *tensione magnetica*, forza generata dalla curvatura delle linee di campo magnetico che agiscono come degli elastici avvolti intorno al contenitore. Il confinamento magnetico di un plasma si basa sullo sfruttamento di queste due ultime forze, al fine di bilanciare la forza di espansione del plasma. Il problema dell'equilibrio radiale può essere ben risolto studiando il sistema in coordinate cilindriche, sfruttando l'assialsimmetria della configurazione, rettificando il toroide ad un cilindro di lunghezza $l = 2\pi R_0$. Ricordando che \mathbf{B} in tal caso assume solo componente assiale (B_z , corrispondente alla componente B_ϕ in geometria toroidale) e poloidale (B_θ), l'equazione di bilancio si riduce a:

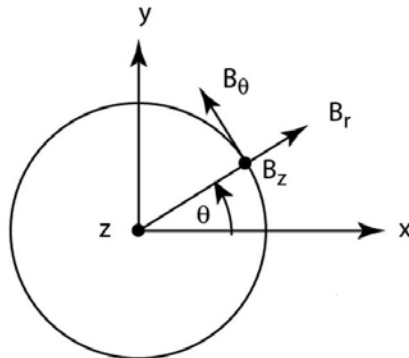


Fig. 1.10: Sistema di coordinate cilindriche

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} \quad (1.26)$$

Si mette così in evidenza che solo la presenza di un campo magnetico poloidale potrà permettere di sfruttare la tensione magnetica.

Due configurazioni magnetiche basilari che permettono di raggiungere la condizione di equilibrio radiale sono lo *z-pinch* e il *θ -pinch*.

z-pinch

Il nome di questa configurazione deriva dalla presenza di una sola componente di corrente toroidale (assiale) J_z che viene fatta circolare attraverso il plasma. L'equazione di conservazione della quantità di moto è in questo caso:

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} \quad (1.27)$$

Il campo poloidale B_θ generato, genera una forza di strizione (*pinch effect*) che tende a comprimere il plasma verso il centro della camera da vuoto. Lo *z-pinch* è caratterizzato da ottime proprietà di equilibrio: come si vedrà in seguito la toroidicità del sistema causa il sorgere di ulteriori forze di squilibrio, che possono però essere contrastate in presenza di una corrente toroidale. Tuttavia la stabilità di questa configurazione, ovvero la capacità del plasma di riportarsi in una condizione di equilibrio in seguito ad una perturbazione, è molto limitata.

θ -pinch

Complementare alla precedente, questa configurazione sfrutta una corrente poloidale per generare l'effetto di strizione. In questo caso non compare l'azione della tensione magnetica, in quanto il campo magnetico ha solo componente toroidale.

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (1.28)$$

A differenza dello *z-pinch* il *θ -pinch* ha ottime proprietà di stabilità, ma non garantisce la compensazione delle forze toroidali e non può quindi essere realmente applicato.

screw-pinch

In ragione delle caratteristiche sopra citate, nelle principali macchine a confinamento magnetico vengono sfruttate entrambe le componenti di campo, garantendo ottime proprietà in termini di equilibrio e stabilità. Un importante vantaggio di una configurazione *screw-pinch* è legato al fatto che gli avvolgimenti di campo poloidale e toroidale potranno essere comandati in modo indipendente l'uno dall'altro e il profilo di pressione sarà quindi definito dalle equazioni MHD.

1.3.5 Equilibrio toroidale

A causa della toroidicità del sistema si manifestano 3 forze toroidali, tutte dirette nella direzione del raggio maggiore R , che tendono a spingere il plasma verso la parete esterna della camera da vuoto.

- La prima di queste è detta *tire-tube force* in quanto analoga alla forza dovuta alla pressione interna in una camera d'aria, la quale tende a spingere la superficie esterna della camera più di quanto avviene sulla superficie interna. Essendo dovuta dalla pressione cinetica del gas questa forza si manifesta indipendentemente dalla configurazione magnetica adottata.

- La seconda forza toroidale è la cosiddetta *hoop-force*, forza che si manifesta in una qualunque spira percorsa da corrente. Da un punto di vista qualitativo può essere così giustificata: si immagina di dividere il toroide in due parti come mostrato in Fig.1.11 (a); le linee di campo magnetico, a causa della toroidicità del sistema, sono più fitte nella regione interna e portano quindi ad un campo di induzione magnetica più intenso rispetto alla sezione esterna; la forza dovuta alla pressione magnetica, proporzionale a $B^2 S$, sarà quindi maggiore sulla superficie interna, visto che la dipendenza da B^2 domina sulla superficie S , generando così una forza netta verso l'esterno. Si noti che questa forza è presente solo in presenza di un campo poloidale (z-pinch, screw-pinch).
- Infine, in presenza di un campo magnetico toroidale, si manifesta la $\frac{1}{R}$ force. Come intuibile dal nome, essa è dovuta al decadimento del campo toroidale nella direzione del raggio maggiore: al gradiente di pressione magnetica corrisponde una forza che tende a spingere il plasma verso la regione a campo minore, appunto quella esterna. Quest'ultima forza si manifesta solo in presenza di corrente poloidale (θ -pinch, screw-pinch).

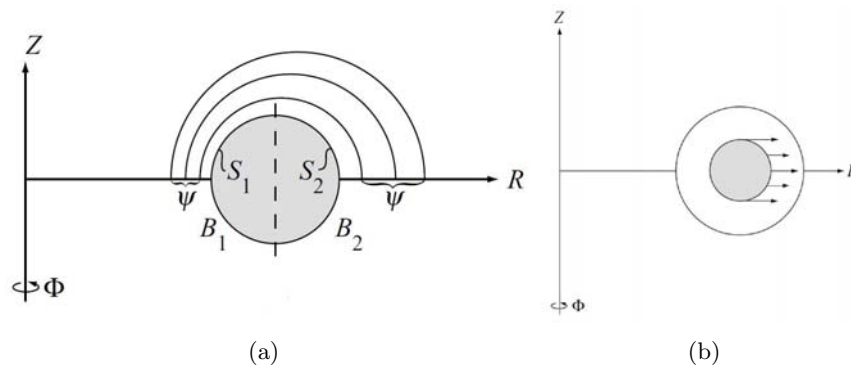


Fig. 1.11: Formazione della hoop-force (a) e risultante forza toroidale (b)

Per garantire l'equilibrio MHD di un plasma toroidale risulta quindi fondamentale indurre una forza verso l'interno, tale da compensare la totale forza toroidale di squilibrio. I due metodi principali per generare tale azione di equilibratura sono l'introduzione di un *campo verticale esterno* e l'utilizzo di una *parete ad elevata conducibilità (shell)* molto vicina al plasma.

Campo verticale - stabilizzazione attiva

L'impiego di un campo verticale esterno risulta molto efficace nel ripristino dell'equilibrio toroidale. Si consideri una corrente di plasma toroidale. Interagendo con un suddetto campo magnetico \mathbf{B}_v , orientato come in Fig.1.12, la corrente di plasma darà luogo ad una forza per unità di volume $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, orientata nella direzione opposta al raggio maggiore R . Installando degli avvolgimenti di campo verticale, opportunamente alimentati, si può quindi mantenere il plasma in posizione di equilibrio.

Shell conduttrice - stabilizzazione passiva

Si supponga che il plasma subisca uno spostamento verso l'esterno lungo la direzione del raggio maggiore. La scocca conduttrice che ingloba il plasma vedrà quindi una

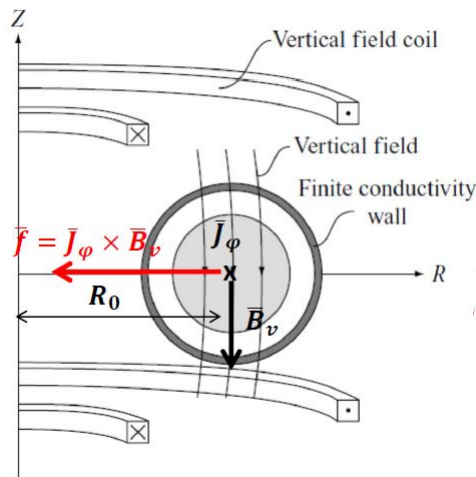


Fig. 1.12: Azione di equilibrio esercitata dal campo verticale esterno

variazione del flusso poloidale concatenato e su di essa saranno indotte correnti. Se perfettamente conduttrice la shell sarà in grado di schermare completamente la regione esterna dai campi magnetici: in altre parole il campo poloidale rimane “intrappolato” nella regione interna alla shell e tenderà a concentrarsi nella regione più esterna compresa tra shell e plasma. La maggiore induzione che si manifesta in questa regione, similmente al meccanismo della hoop-force, darà luogo ad una forza di ripristino verso l’interno. Si noti che, per poter intervenire, la shell deve “vedere” uno spostamento del plasma rispetto al centro del toroide (corrispondente al raggio maggiore R_0). Per questo motivo, una volta raggiunta la nuova posizione di equilibrio, il plasma sarà traslato rispetto a tale centro di una quantità Δ detta *spostamento di Shafranov*.

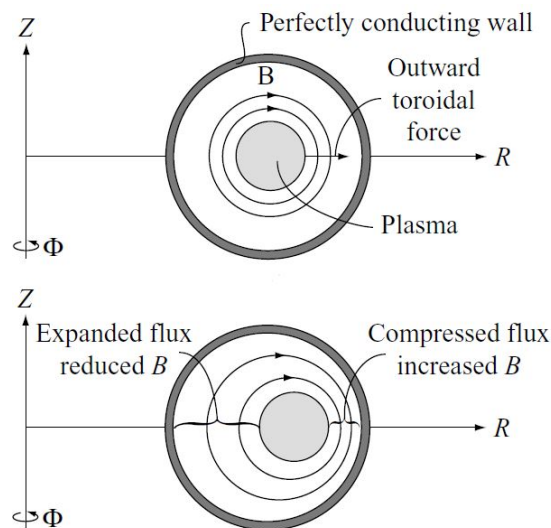


Fig. 1.13: Azione di stabilizzazione passiva della shell

La conducibilità della shell non può essere fisicamente infinita e ciò determina importanti conseguenze:

- l’ampiezza delle correnti indotte tenderà a decrescere con una certa costante di tempo τ_v . Esaurito l’effetto di tali correnti il plasma tornerà a muoversi verso

l'esterno. Possibili rimedi a questo problema possono essere la progettazione di una shell con τ_v [†] elevata (maggiore o uguale alla durata dell'impulso), oppure l'introduzione di un ulteriore sistema di equilibratura che agirà sul lungo termine, una volta svanita l'azione delle correnti indotte.

- La scocca conduttrice agisce come schermo anche per i campi esterni. Ad esempio, il campo poloidale necessario a generare la scarica nel gas, per l'accensione del plasma, verrebbe schermato dalle correnti toroidali indotte nella scocca; un altro problema è legato a quei campi esterni, per il controllo della forma del plasma, dei modi MHD, o il campo verticale di equilibrio stesso, che sarebbero pesantemente attenuati almeno per un intervallo di tempo dell'ordine della costante τ_v (per questo anche detta *costante di tempo di penetrazione del campo verticale*). Per limitare l'effetto di queste correnti la shell viene generalmente tagliata in più parti reciprocamente isolate tra loro. Si riprenderà più avanti questo concetto, trattandosi di un elemento chiave di questo elaborato.

Ci si trova quindi di fronte ad un mismatch progettuale: da un lato la realizzazione di una shell spessa con elevata costante di tempo per favorire l'effetto di stabilizzazione passiva, dall'altro l'utilizzo di una struttura più sottile, in modo tale da permettere una rapida penetrazione dei campi esterni. Si osservi che entrambe le soluzioni per l'equilibrio toroidale richiedono la presenza di un campo magnetico poloidale: è per questo motivo che la configurazione θ -pinch non è adatta a plasmi toroidali.

1.3.6 Tokamak - RFP

Considerati i diversi requisiti necessari per raggiungere le condizioni di equilibrio, si può giungere alla conclusione che, per il confinamento magnetico di un plasma, saranno necessari i seguenti elementi:

- Una **camera da vuoto** per mantenere il plasma alla pressione desiderata (valori tipici dell'Ultra-Alto-Vuoto: $p < 10^{-7}$ mbar).
- **Avvolgimento magnetizzante (poloidale interno):**
genera il flusso poloidale, che concatena il toroide e permette di indurre nel gas un campo elettrico sufficientemente elevato da iniziare la scarica (formazione del plasma); in altre parole agisce come il primario di un trasformatore, accoppiato ad un circuito secondario costituito dal plasma. Viene anche indicato come avvolgimento di *ohmic heating*, in quanto induce la corrente di plasma che riscalda per effetto Joule il gas stesso.
- **Avvolgimenti di campo poloidale esterni:**
generano il campo verticale per garantire l'equilibrio MHD a lungo termine e, in alcune configurazioni, campi radiali per il controllo della forma del plasma e dei modi MHD, al fine di raggiungere regimi di confinamento avanzati.
- **Avvolgimenti di campo toroidale** fondamentali per la stabilità MHD.
- **Shell conduttrice** per l'equilibrio MHD e stabilità a breve termine ($\Delta t \leq \tau_v$)

[†]Si può in prima approssimazione considerare la shell come un circuito ohmico-induttivo avente costante di tempo $\frac{L}{R}$, quindi proporzionale al prodotto σs , dove σ è la conducibilità e s lo spessore della shell.

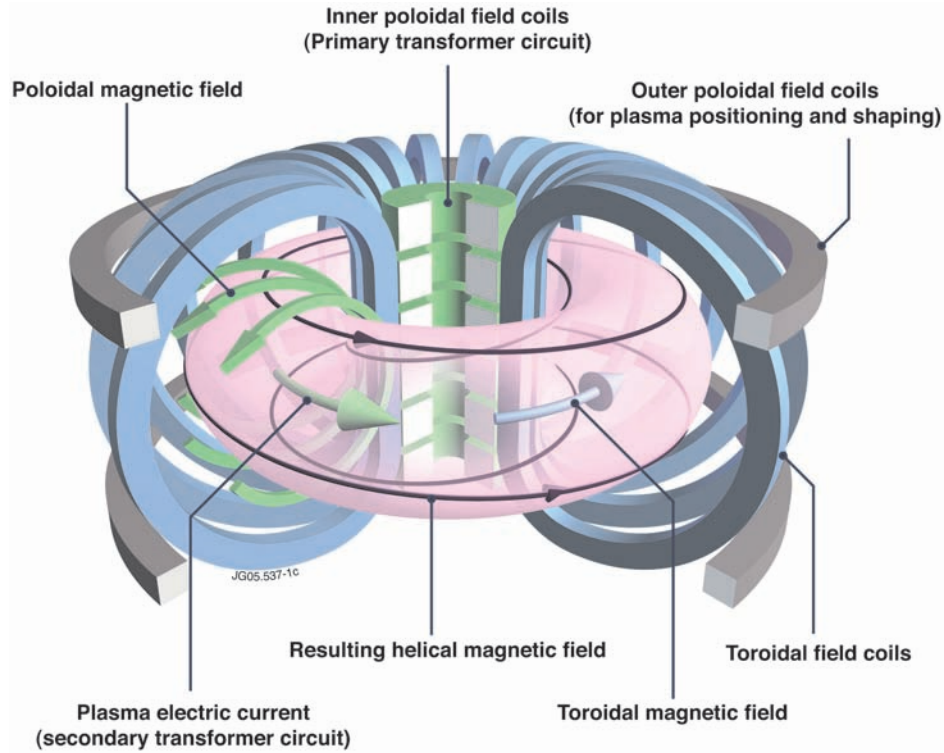


Fig. 1.14: Sistema magnetico e risultanti campi magnetici

Il set presentato di avvolgimenti permette di ottenere diverse configurazioni di confinamento magnetico. La configurazione più comune è detta *Tokamak* e sfrutta entrambe le componenti di campo magnetico poloidale e toroidale. In una configurazione screw-pinch si definisce *fattore di sicurezza* la quantità

$$q(r) = \frac{r}{R_0} \frac{B_\phi(r)}{B_\theta(r)} \quad (1.29)$$

In un Tokamak le condizioni di stabilità richiedono $q \geq 2$. La caratteristica peculiare di questa configurazione è quindi quella di avere un campo toroidale molto intenso rispetto a quello poloidale: le linee di campo magnetico appaiono come eliche con passo molto lungo, avvolte sulle superfici isopressione. Un'altra configurazione di particolare interesse è l'*RFP* (*Reversed Field Pinch*). La sua denominazione deriva dal fatto che il campo magnetico toroidale inverte il proprio verso nella regione più esterna al plasma, prossima alla parete della camera da vuoto. La formazione di tale distribuzione di campo è complessa: la teoria di Taylor ha dimostrato che la configurazione RFP corrisponde ad uno stato di minima energia a cui il plasma tende quando il *parametro di pinch* ($\Theta = B_\theta(a)/\langle B_\phi \rangle$) assume valori maggiori di 1.2 [4]. In modo sommario il fenomeno dell'inversione di campo può essere spiegato come segue: si immagina di inserire un filo percorso da corrente (plasma) in un tubo di flusso di campo magnetico, in questo caso dovuto agli avvolgimenti di campo toroidale. Il filo si trova in equilibrio instabile e può facilmente attorcigliarsi formando un'elica. Di conseguenza il campo toroidale aumenta nella regione interna all'elica, come accade in un solenoide; ma poiché il flusso toroidale deve conservarsi all'interno del tubo di flusso, allora il campo tenderà a diminuire nella regione esterna, fino ad invertirsi se la corrente di plasma è sufficientemente elevata. Il risultato è che in un RFP le due componenti di campo hanno

valori paragonabili tra loro e il campo toroidale B_ϕ risulta circa un ordine di grandezza inferiore ai valori tipici di un Tokamak. Da un punto di vista progettuale questo riduce gli sforzi sulle bobine, consentendo di realizzare un reattore meno complesso, di dimensioni ridotte e meno costoso. Un altro importante vantaggio di questa configurazione è legato all'elevata corrente toroidale di plasma necessaria per l'inversione del campo, tale da consentire il riscaldamento del gas per via ohmica fino (o quasi) alle condizioni di ignizione. Per contro l'instaurazione di una così elevata corrente richiede una variazione del flusso poloidale, in fase di accensione, molto elevata (dimensionamento più oneroso dell'avvolgimento magnetizzante). Un altro svantaggio è rappresentato dal basso campo toroidale a bordo plasma, che causa un basso fattore di sicurezza q .

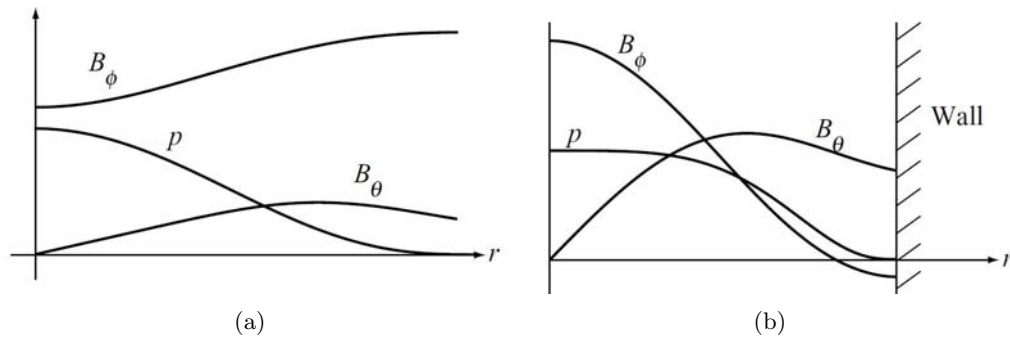


Fig. 1.15: Tipici profili di campo magnetico e pressione in un Tokamak (a) e in un RFP (b)

Capitolo 2

Reversed Field Experiment

2.1 RFX

RFX è una macchina toroidale (raggio maggiore $R_0 = 2\text{ m}$, raggio minore $a = 0.459\text{ m}$) costruita a Padova nel 1991, per lo svolgimento di esperimenti su plasmi confinati magneticamente e riscaldati dalla corrente di plasma stessa, in configurazione RFP (da cui deriva il nome dell'esperimento). La flessibilità della configurazione magnetica permette anche l'operazione come Tokamak, cosicché si possa ampliare il campo di studi. Nella sua versione originaria RFX è dotata di una camera da vuoto toroidale (*Vacuum Vessel*, VV) in INCONEL 625, dello spessore di 30 mm , formata da 72 elementi poloidali opportunamente saldati tra loro per completare un'intera rivoluzione del toroide [5]. Ciascuna porzione è formata da una struttura a sandwich, con una parete interna di 2 mm e una esterna di 1 mm , collegate tra loro per mezzo di uno strato ondulato e due anelli di supporto poloidali che delimitano l'elemento. Il raffreddamento della camera da vuoto è ottenuto per mezzo di CO_2 in circolazione forzata attraverso il suddetto interspazio fra le due pareti. Per tollerare l'elevato carico termico trasportato dal plasma, la superficie interna del vessel (*First Wall*, FW) è stata ricoperta da 2016 tegoli in grafite policristallina (72 in direzione toroidale, 28 in direzione poloidale), aventi uno spessore di circa 18 mm così da mantenere il plasma il più possibile vicino alla shell esterna. Installato il FW il raggio minore corrispondente alla parete interna è di 0.459 m . La camera è dotata inoltre di diverse aperture (porte) per l'accesso dei sistemi di diagnostica, di pompaggio e raffreddamento.

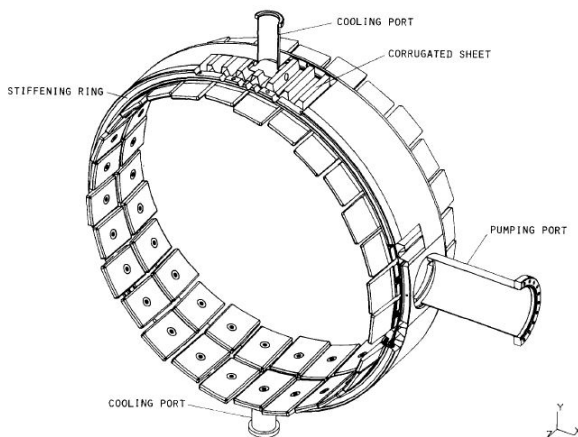


Fig. 2.1: Elemento poloidale del vessel e FW

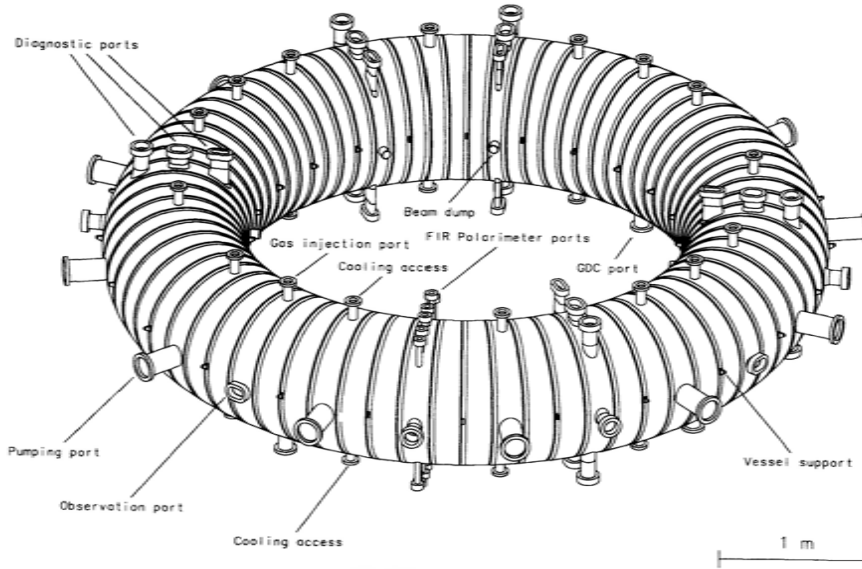


Fig. 2.2: Camera da vuoto completamente assemblata

Come già introdotto la shell, oltre a fungere da struttura di supporto meccanico inglobando il vessel a cui viene ancorata, svolge un'importante funzione di stabilizzazione passiva per effetto della correnti indotte in essa, garantendo così l'equilibrio a breve termine e rallentando la crescita di instabilità. A tale scopo si è realizzata una struttura in alluminio (*Passive Stabilizing Shell*, PSS) con uno spessore di 65 mm ($r_{shell} = 0.535\text{ m}$), ottenendo una costante di tempo di penetrazione del campo magnetico verticale di circa 400 ms , sufficientemente lunga da garantire l'azione di stabilizzazione per tutto il periodo della scarica (avente durata di qualche centinaio di ms). La shell è suddivisa in 4 parti, ciascuna avente un'estensione di 180° in direzione poloidale e di 180° in quella toroidale: per consentire la penetrazione del campo poloidale magnetizzante, necessario per accendere il plasma, le due porzioni di shell sono state reciprocamente isolate da due gap poloidali (disposti simmetricamente rispetto la direzione toroidale), così da limitare le correnti indotte in direzione toroidale; al contrario, per consentire la rapida variazione del campo toroidale, necessario per stabilire la configurazione RFP, si sono realizzati due gap equatoriali. Si vedrà in dettaglio nei capitoli successivi, come la presenza dei gap sia alla base della formazione di errori di campo magnetico in corrispondenza di questi ultimi: ciò richiede l'adozione di opportuni sistemi di correzione locale del campo magnetico. Sulla superficie esterna della struttura sono state realizzate 48 scanalature in direzione poloidale, per ospitare gli avvolgimenti di campo toroidale, in aggiunta ad altri 24 incavi per ospitare gli anelli di supporto che mantengono unite le porzioni della shell e collegano la scocca alla struttura di supporto meccanico esterna.

2.2 Sistema di confinamento magnetico

RFX è dotata di due avvolgimenti di campo poloidale e un avvolgimento di campo toroidale (*Toroidal Field Coils*, TF): i primi comprendono le bobine di magnetizzazione (*Ohmic Heating*, OH) per l'accensione del plasma e l'avvolgimento di campo verticale per l'equilibrio MHD (*Field Shaping Coils*, FS). La sequenza tipica di una scarica in configurazione RFP è la seguente [6]:

- Inizialmente, prima del tempo t_0 , l'avvolgimento di magnetizzazione accumula il flusso necessario per indurre la corrente di plasma; nello stesso intervallo di tempo il banco di condensatori che alimenta l'avvolgimento toroidale viene caricato sino alla tensione nominale; ad un certo istante il condensatore viene chiuso sui TF innescando un'oscillazione LRC.
- Al tempo t_0 , quando la corrente nei TF raggiunge il suo valore massimo, l'energia accumulata nell'induttanza di OH viene scaricata in un banco resistivo, generando così una variazione di flusso sufficiente per accendere la corrente di plasma. Contestualmente la corrente dei TF decresce fino a invertire il proprio segno, mentre la corrente nei FS cresce sino al valore nominale (fase di *ramp-up*).
- Al tempo t_1 la corrente di plasma raggiunge il valore nominale di *flat-top*. Durante questa fase viene controllato il decadimento della corrente dell'avvolgimento magnetizzante, in modo da mantenere una corrente di plasma all'incirca costante. L'avvolgimento TF viene alimentato in modo da mantenere un campo toroidale inverso e la corrente nei FS fornisce il campo di equilibrio.
- Nell'ultima fase la corrente di plasma decresce e contestualmente quella negli avvolgimenti FS e TF (fase di *decay*).

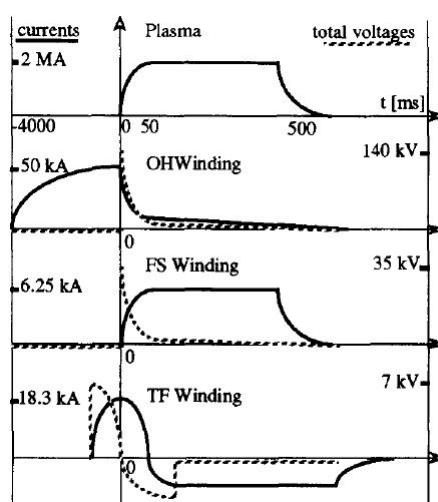


Fig. 2.3: Andamento delle forze magnetomotrici negli avvolgimenti durante un tipico impulso in RFX

2.2.1 Avvolgimento di campo toroidale (TF)

L'avvolgimento di campo toroidale fornisce un campo massimo di $0.7T$ nella fase iniziale della scarica e un campo inverso di $0.44T$ durante la fase di *flat-top*. È costituito da 48 bobine equamente distribuite su scanalature appositamente realizzate sulla superficie della PSS. Ciascuna bobina è formata da 8 spire in rame disposte su due strati, dimensionate per una corrente massima (durante la fase di *ramp-up*) di 18.3 kA , cosicché l'avvolgimento sia in grado di fornire una totale forza magnetomotrice di 7 MA . L'avvolgimento è suddiviso in 12 settori, ciascuno composto da 4 bobine (32 spire) connesse in serie, che possono essere collegati secondo 6 diverse combinazioni serie/parallelo in modo da favorire una maggior flessibilità operativa [7].

| settori in parallelo | spire in serie | auto-induttanza L [mH] |
|----------------------|----------------|------------------------------|
| 1 | 384 | 18.24 |
| 2 | 192 | 4.553 |
| 3 | 128 | 2.023 |
| 4 | 96 | 1.138 |
| 6 | 64 | 0.051 |
| 12 | 32 | 0.013 |

Tabella 2.1: Possibili configurazioni dell'avvolgimento toroidale TF

2.2.2 Avvolgimento magnetizzante (OH)

RFX richiede, nel funzionamento come RFP, una variazione di flusso poloidale di $15 Wb$. La magnetizzazione del trasformatore avviene in aria e richiede per questo un'elevata forza magnetomotrice di $10 MA$, con un campo di induzione magnetica massimo sull'asse del toro di $4.5 T$. In fase progettuale si era considerata la possibilità di utilizzare un nucleo in ferro [8] come circuito magnetizzante, ma è stata successivamente scartata a causa dell'asimmetria e della difficile accessibilità alla macchina che avrebbe causato. L'avvolgimento si compone di 40 bobine (da M1 a M20) tra loro in serie, per un totale di 200 spire, disposte simmetricamente rispetto al piano equatoriale (si distinguono con A, *above*, le bobine superiori, con B, *below*, quelle inferiori). Queste bobine sono poi reciprocamente isolate e raggruppate in diversi blocchi (I) come riassunto in Tabella 2.2*. Il solenoide centrale, posto nella parte più interna della macchina, è formato da 24 bobine (M1A-M12A, M1B-M12B) per un totale di 156 spire e genera la maggior parte del flusso, mentre le bobine più esterne (M13A-M20A, M13B-M20B) hanno il compito di guidare le linee di campo in modo da limitare l'induzione magnetica generata all'interno del volume di plasma: più linee di campo attraversano tale volume, maggiore sarà il flusso disperso non utile all'induzione del campo elettrico necessario per la scarica. Per questo motivo il posizionamento delle bobine è stato attentamente ottimizzato, con l'obiettivo di rendere minimo il campo di induzione magnetica nel plasma, ottenendo un campo disperso inferiore a $1 mT$.

2.2.3 Avvolgimento di campo verticale (FS)

L'avvolgimento di campo verticale è stato progettato per svolgere le seguenti funzioni:

- all'inizio della scarica produce un campo correttivo in corrispondenza dei gap della shell, in modo da limitare gli errori di campo;
- garantisce l'equilibrio a lungo termine del plasma, una volta svanito l'effetto di stabilizzazione passiva della shell;
- fornisce una forza magnetomotrice uguale e opposta a quella dovuta alla corrente di plasma ($2 MA$), così da ridurre la variazione di flusso richiesta all'avvolgimento di magnetizzazione.

*Tutti i blocchi comprendono una parte superiore (A) e una inferiore (B) disposte simmetricamente rispetto al piano equatoriale, ad eccezione del blocco I1 in cui tutte le bobine A ed B sono raggruppate nello stesso impregnante.

| block | coil | turns |
|-------|------|-------|
| I1 | M1 | 16 |
| | M2 | 16 |
| | M3 | 16 |
| I2 | M4 | 12 |
| | M5 | 12 |
| | M6 | 12 |
| | M7 | 12 |
| | M8 | 12 |
| | M9 | 12 |
| I3 | M10 | 12 |
| | M11 | 12 |
| | M12 | 12 |
| I4 | M13 | 8 |
| I5 | M14 | 8 |
| I6 | M15 | 8 |
| I7 | M16 | 4 |
| I8 | M17 | 2 |
| | M18 | 6 |
| I9 | M19 | 2 |
| | M20 | 6 |

Tabella 2.2: Composizione dell'avvolgimento magnetizzante

L'avvolgimento è composto da 8 coppie di bobine, ciascuna formata da due bobine identiche in serie tra loro, disposte simmetricamente rispetto al piano equatoriale (da F1A + F1B a F8A + F8B). Il supporto di queste bobine è fornito dai 24 anelli ancorati alla shell, dotati di opportune sagomature su cui vengono fissate le bobine di FS.

2.3 RFX-mod

Come visto nel capitolo introduttivo lo spessore della shell deve rispondere a due requisiti contrastanti: la necessità di fornire un'azione di stabilizzazione passiva, per favorire l'equilibrio MHD, ma al tempo stesso deve permettere la penetrazione dei campi magnetici esterni. Mentre il primo di questi aspetti richiede una shell spessa, il secondo ne risulta pesantemente penalizzato. In particolare la spessa shell in alluminio di RFX si è dimostrata, nel corso degli esperimenti, un pesante ostacolo alla possibilità di interagire attivamente con il plasma (controllo posizione, controllo modi MHD,...). Al fine di ridurre la costante di tempo di penetrazione del campo verticale, la shell in alluminio è stata sostituita con una nuova scocca in rame avente lo spessore di 3 mm. Come nella versione precedente, la shell è stata sezionata in 4 parti e si è ricercata una soluzione ottimale nella costruzione dei gap, per limitare gli errori di campo dovuti a questi ultimi [9]: in particolare un gap poloidale è stato realizzato sovrapponendo in direzione toroidale (per un'estensione di 23°) le due metà della shell (Fig.2.6), mentre al secondo gap è stata garantita la continuità elettrica. Per quanto riguarda i tagli toroidali, quello interno agisce da isolamento elettrico, mentre l'esterno è cortocircuitato per mezzo di lastre in rame fissate alla shell mediante bulloni, come visibile in Fig.2.7.

La funzione di supporto meccanico del vessel e della shell è stata ereditata da una nuova struttura toroidale (*Toroidal Support Structure*, TSS), realizzata in acciaio Inox

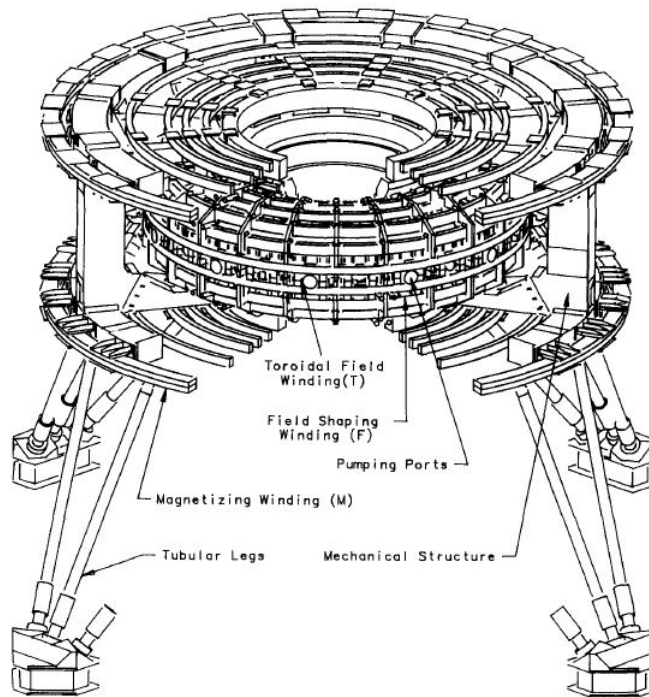


Fig. 2.4: Assemblaggio completo della macchina RFX

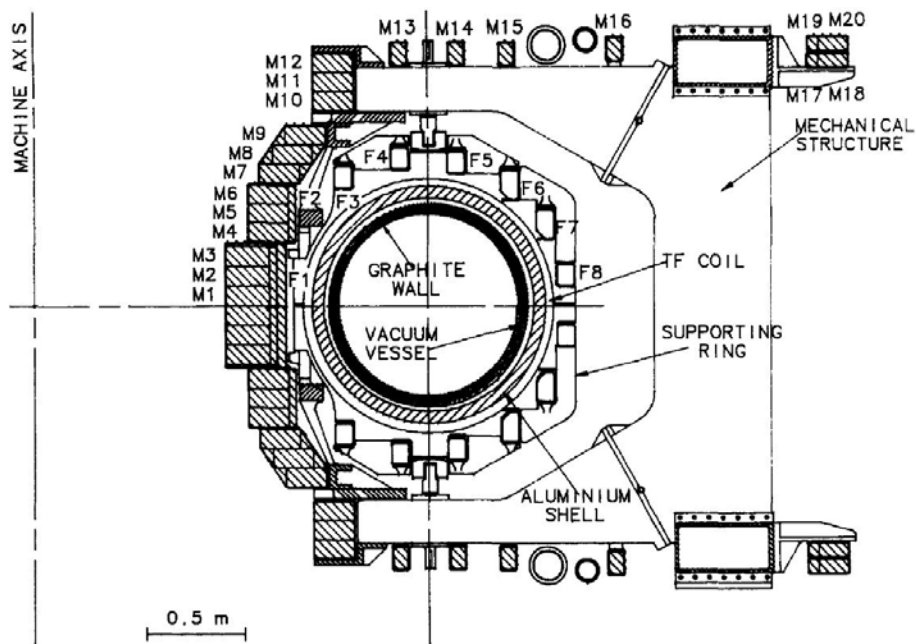


Fig. 2.5: Sezione poloidale di RFX

e avente spessore di 47 mm . Anche la TSS è stata tagliata mediante 2 gap poloidali e 2 gap toroidali, i primi isolati attraverso giunti saldati (configurazione giunti di tipo BJT, *Butt-Joint-Gap*), mentre solo l'interno degli equatoriali è cortocircuitato mediante piattelli in rame. Si è infine introdotto un sistema di controllo MHD del plasma, formato da 192 bobine a sella (*Saddle Coils*, SC), alimentate ciascuna in modo indipendente. L'estensione toroidale di queste ultime è di 7.5° e di 90° quella poloidale, per

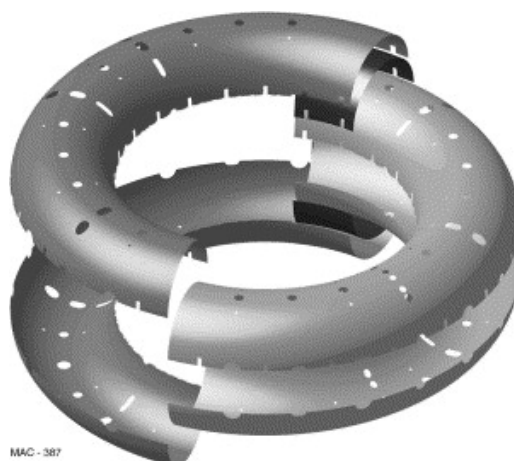


Fig. 2.6: Assemblaggio della shell di RFX-mod

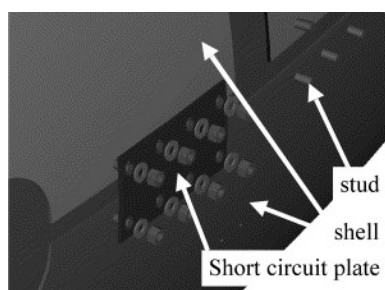


Fig. 2.7: Dettaglio del gap toroidale esterno della shell

un totale di 48×4 bobine allocate in scanalature ricavate sulla superficie esterna della TSS. I principali risultati delle modifiche che caratterizzano *RFX-mod* sono riportate nella Tabella 2.3.

| Spessore PSS | | 3 mm | 65 mm |
|--|------------------------|------|-------|
| costante di tempo di penetrazione | τ_v [ms] | 50 | 450 |
| Spostamento di Shafranov | Δ [mm] | 11 | 31 |
| rapporto raggio shell/plasma | r_{shell}/r_{plasma} | 1.11 | 1.25 |
| campo errore/campo verticale medio penetrato (10 Hz) | $B_{v,err}/B_{v,pen}$ | 1.6 | 8 |

Tabella 2.3: Confronto tra le principali prestazioni delle due shell

Si noti che, mentre nella versione precedente l'equilibrio è di fatto garantito dalla shell vista l'elevata costante di tempo τ_v , in RFX-mod le correnti indotte decadono molto rapidamente: diviene perciò fondamentale il ruolo del campo verticale esterno, il quale può ora agire molto più efficacemente, come testimonia il minor rapporto tra campo errore e campo medio penetrato. Con la nuova soluzione shell e plasma sono inoltre più vicini, consentendo una migliore risposta sul breve termine della shell, così da limitare lo spostamento del plasma in condizioni di equilibrio.



Fig. 2.8: Porzione toroidale del sistema di bobine a sella

2.4 RFX-mod Upgrade

RFX-mod ha operato per una decina di anni dalla sua principale modifica, permettendo di ottenere risultati significativi sullo studio dei plasmi sia in configurazione RFP, sia Tokamak. Attualmente sono in fase di studio nuove modifiche che cercheranno di rendere la nuova macchina (RFX-mod Upgrade, o RFX-mod2) compatibile con regimi di confinamento avanzato. Una delle modifiche più rilevanti riguarda l'eliminazione della camera da vuoto, in modo tale da ridurre la distanza plasma-shell, favorendo così l'azione di stabilizzazione passiva e l'instaurazione di equilibri elicoidali del plasma caratteristici della configurazione RFP, altrimenti limitati dalla coppia frenante esercitata dal vessel stesso [10]. Il rapporto r_{shell}/r_{plasma} è previsto ridursi dal precedente 1.11 di RFX-mod a 1.04, con conseguente aumento del raggio di plasma a 0.489 m (raggio minore della parete interna FW). Il conseguimento di questi obiettivi comporta la necessità di apportare importanti modifiche anche ad altri componenti della macchina. Si riportano in seguito le modifiche più significative, con particolare attenzione alla gestione dei gap poloidali ed equatoriali delle strutture metalliche conduttrici.

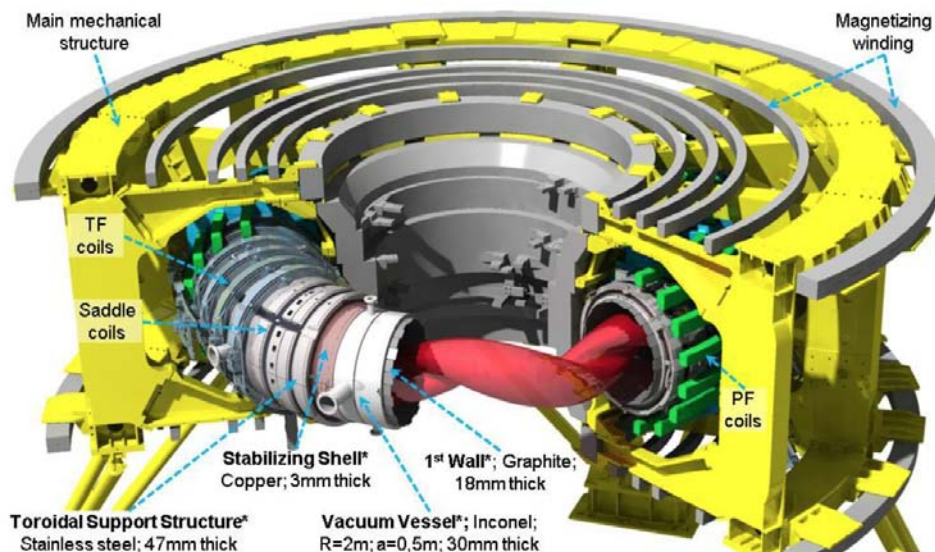


Fig. 2.9: Componenti di RFX-mod (in grassetto gli elementi che verranno modificati in RFX-mod2)

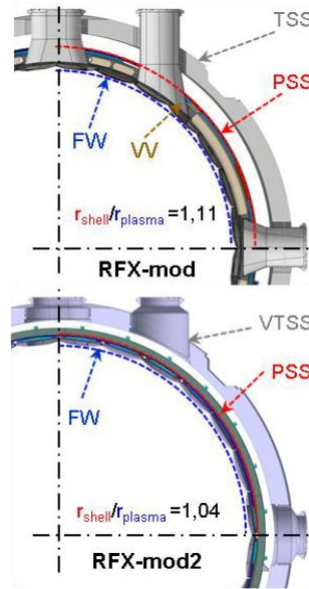


Fig. 2.10: Modifiche apportate al sistema di contenimento del plasma in RFX-mod2

2.4.1 Vacuum Toroidal Support Structure (VTSS)

La funzione di tenuta da vuoto sarà ereditata dalla struttura di supporto meccanico in acciaio già presente (per questo ora denominata VTSS), con le seguenti conseguenze:

- i gap dovranno essere sigillati, garantendo la tenuta da vuoto e, laddove desiderato, continuità elettrica o isolamento;
- le attuali aperture per le operazioni di pompaggio, diagnostica, e ancoraggio di parti meccaniche, dovranno essere chiuse e/o sostituite con nuove porte a tenuta di vuoto.

Un aspetto che richiede particolare attenzione riguarda la gestione dei gap, necessari per permettere la penetrazione dei campi magnetici esterni, ma sorgenti di errori di campo a causa della distribuzione di corrente indotta nelle loro prossimità. Il giunto equatoriale esterno sarà realizzando per mezzo della saldatura delle due parti della struttura, attraverso uno spessore di 5 mm in acciaio inossidabile (SS 304L), tale da garantire buona continuità elettrica e tenuta da vuoto. Al contrario sul lato interno lastre in Inconel 625 (spessore 0.5 mm, estensione poloidale 400 mm) saranno saldate fra le due porzioni della TSS in modo da fornire una resistenza elettrica superiore a $100\mu\Omega$. La tenuta meccanica è assicurata da uno strato di *vetronite G10* (isolante composto da fibre di vetro e resina epossidica), imbullonato alla semi-struttura inferiore. I gap poloidali forniscono entrambi isolamento elettrico e tenuta da vuoto mediante la brasatura di due anelli in allumina ad un anello ceramico, che vengono poi saldati alle porzioni di TSS come in Fig.2.12. La continuità meccanica è realizzata tramite bulloni M16 attraverso uno strato in *vetronite G10*.

2.4.2 Passive Stabilizing Shell (PSS)

In RFX-mod2 la shell sarà supportata da 72 anelli di materiale isolante (Torlon®), fissati con dei piattelli in acciaio ad un set di rotaie installate sulla TSS. I tegoli del

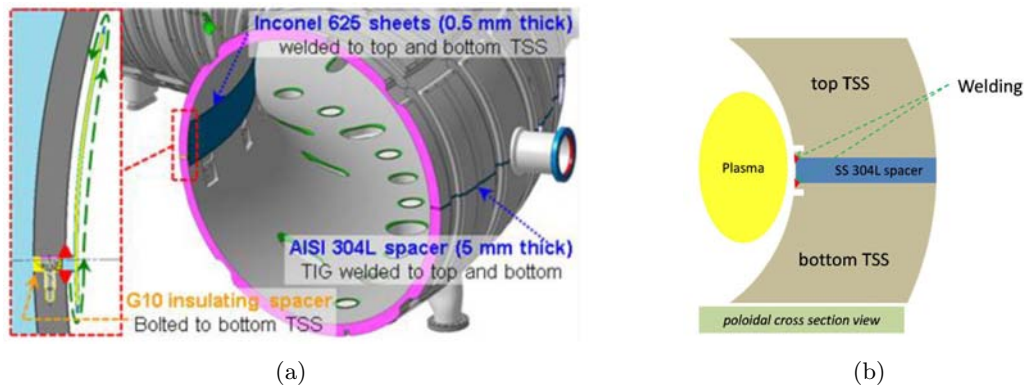


Fig. 2.11: Realizzazione dei gap equatoriali (a) e dettaglio del giunto esterno (b)

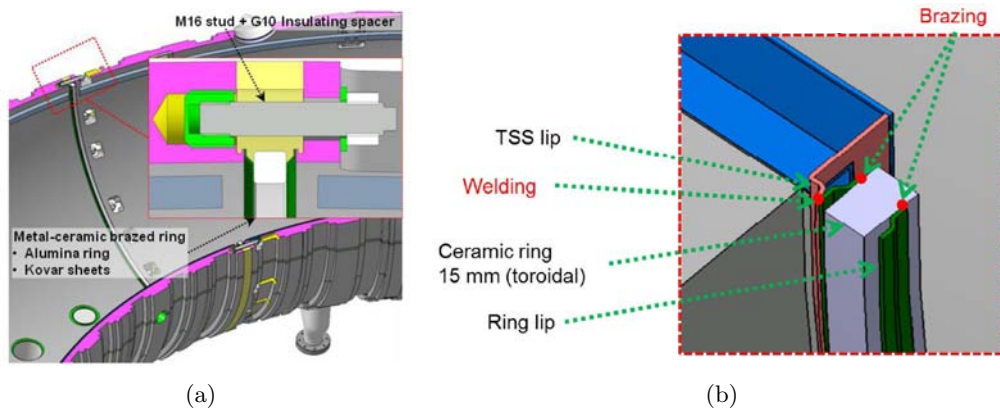


Fig. 2.12: Realizzazione dei gap poloidali (a) e dettaglio dell'assemblaggio dell'anello (b)

| gap | requisiti | configurazione giunto |
|--------------------------|---|---|
| poloidale ($\times 2$) | tenuta da vuoto isolamento elettrico | anelli metallo-ceramici brasati e saldati alla TSS BJG (<i>Butt-Joint Gap</i>) |
| toroidale interno | tenuta da vuoto isolamento elettrico | lastre resistive saldate ($R > 100 \mu\Omega$) |
| toroidale interno | tenuta da vuoto continuità elettrica | saldatura tramite strato di SS 304L |

Fig. 2.13: Riepilogo delle configurazioni dei gap nella VTSS

nuovo FW saranno fissati alla shell mediante un sistema simile a quello già utilizzato in presenza del vecchio vessel: una chiave in molibdeno verrà agganciata ad un supporto in acciaio, in modo da fissare il tegolo alla shell e quindi quest'ultima all'anello di supporto. Per quanto riguarda i gap, quelli equatoriali saranno gestiti in modo opposto alla configurazione di RFX-mod: sul lato interno verranno imbullonate delle lastre in rame (continuità elettrica), mentre nel gap esterno sarà interposto un materiale isolante. I gap poloidali, collocati simmetricamente a $\phi = 93.75^\circ$ e 273.75° saranno invece realizzati in modo analogo a quelli della TSS di RFX-mod: i giunti verranno saldati e isolati (configurazione BJJ, *Butt Joint Gap*).

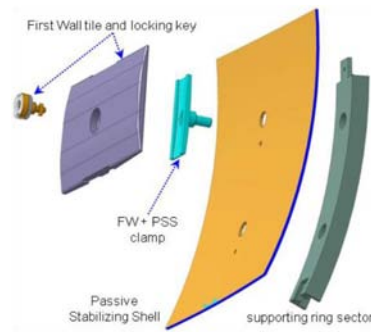
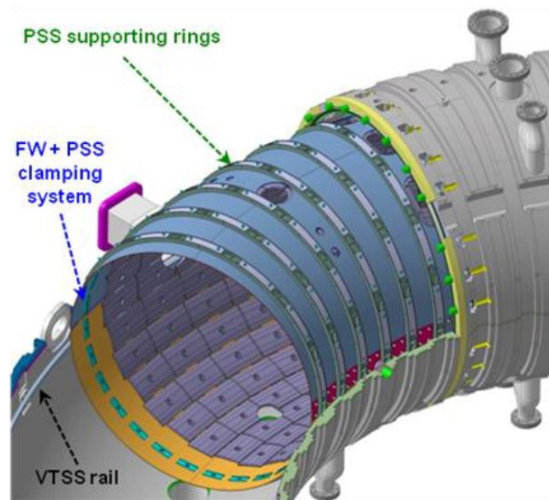
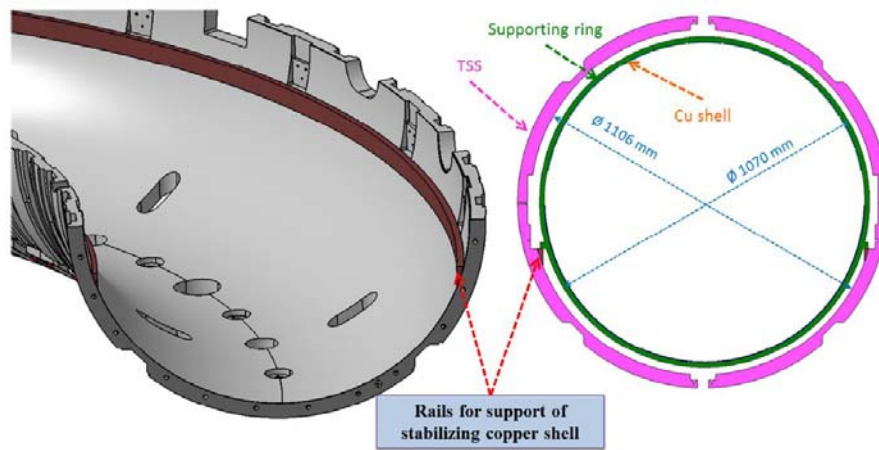


Fig. 2.14: Sistema di fissaggio del FW e della PSS agli anelli di supporto



(a)



(b)

Fig. 2.15: Composizione della shell (a) e della guida di supporto (b)

2.5 Errori di campo magnetico

Nei precedenti paragrafi si è descritta con attenzione la configurazione adottata per i giunti poloidali ed equatoriali (toroidali), i quali delimitano le porzioni delle strutture meccaniche conduttrici che circondano il plasma. La presenza di questi tagli è essenziale

per permettere la penetrazione dei campi magnetici esterni, tuttavia è responsabile di errori di campo, causati dalla risposta di queste strutture passive ai campi di equilibrio applicati dagli avvolgimenti di FS, o alla corrente di plasma durante la fase di ramp-up. Le armoniche spaziali che caratterizzano questi campi errore possono innescare instabilità MHD o impedire la rotazione del plasma rispetto al vessel, condizione necessaria per instaurare determinati regimi tipici della configurazione RFP. In RFX, per mitigare gli errori dovuti ai gap poloidali, fu introdotto un sistema di correzione locale, costituito da due set di 11 bobine a sella ciascuno, disposte a cavallo di tali gap. In RFX-mod le 192 bobine a sella di controllo MHD sono state impiegate anche per la mitigazione degli errori di campo locali, ottenendo buoni risultati anche grazie alla sovrapposizione di uno dei gap poloidali come precedentemente descritto (configurazione giunto di tipo OG, *Overlapped Gap*). Le modifiche designate per RFX-mod2 hanno portato a rivalutare la possibilità di utilizzare il sistema di correzione locale impiegato in RFX. Si sono inoltre considerate due configurazioni alternative al gap poloidale sovrapposto (OG) [11]:

- BJK (*Butt-Joint Gap*): sia nella shell che nella TSS i gap poloidali sono affacciati mediante giunti saldati (e isolati).
- SOG (*Short Overlapped Gap*): un gap poloidale della shell è sovrapposto per una ridotta estensione di 6° , mentre i gap poloidali della TSS sono realizzati con configurazione BJK.

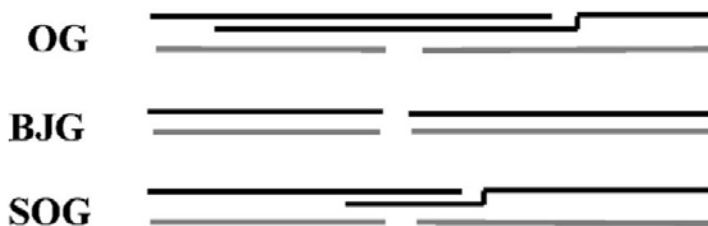


Fig. 2.16: Rappresentazione concettuale delle tre alternative per il gap poloidale

Per confrontare le diverse soluzioni si è analizzata, tramite un'analisi FEM, la risposta di tali strutture conduttrici in presenza di un campo magnetico verticale esterno e si è calcolata la forza magnetomotrice necessaria alle bobine di correzione per compensare il campo errore generato. Lo studio è stato svolto applicando alcune ipotesi semplificative, in modo da limitare il peso computazionale del problema: il dominio toroidale è stato rettificato considerando solo mezza porzione della reale macchina ed estendendo quindi i risultati all'intera geometria, considerando la presenza di un gap analogo a 180° in direzione toroidale; il campo esterno è stato ipotizzato uniforme e si sono prese in considerazione le sole 5 coppie di bobine disposte simmetricamente rispetto al piano equatoriale. In questo modo il problema risulta assialsimmetrico e può essere studiato in geometria cilindrica. L'analisi numerica, svolta a tre diverse frequenze di 10, 50, 100 Hz ha messo in evidenza i seguenti risultati:

- Dal punto di vista della penetrazione del campo esterno, la soluzione adottata in RFX-mod (OG) risulta essere la più penalizzante insieme alla SOG: per un intervallo di 23° (circa 0.8 m del toroide rettificato) e 6° rispettivamente, il campo è pesantemente attenuato a causa delle correnti indotte, che circolano su uno

spessore di fatto doppio rispetto a quello della shell. Si osserva inoltre un lieve incremento del campo (comunque inferiore in valore assoluto rispetto a quello applicato) in corrispondenza delle sezioni terminali della sovrapposizione. Nel caso BJG invece si nota una netta amplificazione del campo esterno in corrispondenza del gap, dovuto alla densità di corrente che tende a aumentare in quella zona.

- Per valutare l'errore di campo generato dalle strutture conduttrici si è scomposta la componente radiale di tale campo tramite un'analisi di Fourier bidimensionale, ricavando le componenti armoniche spaziali in direzione poloidale e in direzione toroidale. In assenza di compensazione attiva la soluzione OG mostra il minor contenuto armonico, mentre l'adozione di una configurazione SOG o BJG richiede necessariamente l'introduzione di un sistema di mitigazione degli errori di campo.
- In termini di forza magnetomotrice necessaria per la compensazione degli errori di campo si osserva che la configurazione OG risulta essere molto dispendiosa, mentre SOG e BJG richiedono un numero di amperspire minore e molto simile.

Grazie allo studio svolto si è potuto osservare come la configurazione BJG richiederebbe necessariamente l'utilizzo di un sistema di compensazione attiva degli errori di campo, mentre la sovrapposizione adottata in RFX-mod, pur attenuando i campi esterni, risulta molto vantaggiosa in termini di campo errore. Tuttavia la sequenza di assemblaggio prevista per RFX-mod2 rende molto complicata l'adozione di quest'ultima soluzione, per cui allo stato attuale del progetto si è considerata una configurazione di tipo BJG.

La sequenza di assemblaggio di RFX-mod2 è riassunta nei seguenti passaggi:

- pre-assemblaggio dei due semi-toroidi della TSS, integrazione delle porte e saldatura dei gap equatoriali;
- pre-assemblaggio dei due semi-toroidi della shell, con i designati gap equatoriali e gli anelli di supporto;
- fissaggio del FW alle due semi-shell;
- inserimento di ciascuna semi-shell nel corrispondente mezzo toro della TSS;
- sigillatura dei gap poloidali dei due semi-toroidi completamente assemblati.

La sequenza di montaggio risulta opposta a come si era precedentemente operato in RFX-mod: qui le due porzioni superiore e inferiore della TSS venivano prima assemblate separatamente; sulla parte inferiore veniva calata la semi-shell inferiore e quindi l'intero vessel; infine il toroide veniva chiuso con le parti superiori della shell prima e della TSS poi, permettendo così di sovrapporre in fase di montaggio il gap poloidale della PSS. In RFX-mod2, venendo a mancare una struttura meccanicamente continua come il vessel, il fissaggio dei tegoli del FW sulla shell risulterebbe complicato dalla regione di sovrapposizione di quest'ultima. Per questo motivo si è trascurata la possibilità di sovrapporre le porzioni di shell e ci si è orientati sulla soluzione a giunti affacciati. Ne deriva la necessità di un'approfondito studio del sistema di correzione locale dei campi magnetici e della risposta delle strutture ad esso. In questo elaborato verrà presentata una rianalisi del problema descritto in questa sezione, analizzando il sistema nella sua totale tridimensionalità e tenendo quindi conto della toroidicità della configurazione. In particolare sarà valutata la risposta delle strutture conduttrici a due diverse sorgenti: il campo di induzione magnetica generato dal plasma e la configurazione di campi di equilibrio, imposta dagli avvolgimenti esterni, durante la fase di ramp-up. Verranno

proposti due possibili set di bobine a sella: uno posto sulla superficie esterna della TSS ed uno più interno collocato sulla superficie esterna della shell.

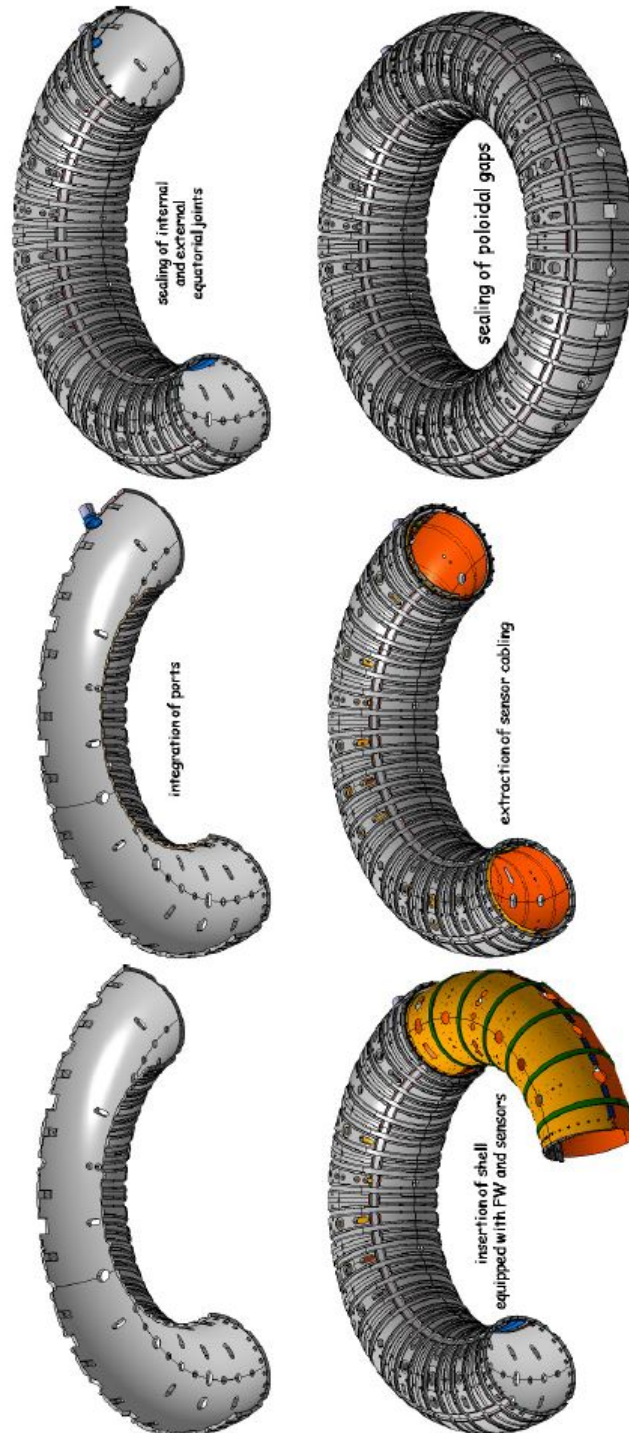


Fig. 2.17: Sequenza di assemblaggio prevista per RFX-mod2 (grigio: TSS, giallo: shell, arancio: FW)

2.6 Riepilogo delle configurazioni dei gap

Si riportano alcune tabelle di riepilogo sulla gestione dei gap nel corso dei successivi sviluppi della macchina. Si indica con gap *continuo* un giunto dove è stata garantita continuità elettrica, con gap *isolato* un gap dove invece è stato garantito l'isolamento elettrico fra le due parti metalliche a contatto.

RFX

| PSS | continuo | isolato | BGJ | OG | lastre conduttive | lastre resistive |
|----------------------------|----------|---------|-----|----|-------------------|------------------|
| equatoriale <i>interno</i> | | x | x | | | |
| equatoriale <i>esterno</i> | | x | x | | | |
| poloidale | | x | x | | | |
| poloidale <i>opposto</i> | | x | x | | | |

RFX-mod

| PSS | continuo | isolato | BGJ | OG | lastre conduttive | lastre resistive |
|----------------------------|----------|---------|-----|----|-------------------|------------------|
| equatoriale <i>interno</i> | | x | x | | | |
| equatoriale <i>esterno</i> | x | | | | x | |
| poloidale | | x | | x | | |
| poloidale <i>opposto</i> | x | | | | | |

| TSS | continuo | isolato | BGJ | OG | lastre conduttive | lastre resistive |
|----------------------------|----------|---------|-----|----|-------------------|------------------|
| equatoriale <i>interno</i> | x | | | | x | |
| equatoriale <i>esterno</i> | | x | x | | | |
| poloidale | | x | x | | | |
| poloidale <i>opposto</i> | | x | x | | | |

RFX-mod2

| PSS | continuo | isolato | BGJ | OG | lastre conduttive | lastre resistive |
|----------------------------|----------|---------|-----|----|-------------------|------------------|
| equatoriale <i>interno</i> | x | | | | x | |
| equatoriale <i>esterno</i> | | x | x | | | |
| poloidale | | x | x | | | |
| poloidale <i>opposto</i> | | x | x | | | |

| TSS | continuo | isolato | BGJ | OG | lastre conduttive | lastre resistive |
|----------------------------|----------|---------|-----|----|-------------------|------------------|
| equatoriale <i>interno</i> | | x | | | | x |
| equatoriale <i>esterno</i> | x | | | | | |
| poloidale | | x | x | | | |
| poloidale <i>opposto</i> | | x | x | | | |

Capitolo 3

Il metodo delle celle

3.1 Il concetto di cella nello spazio 3D

In molti approcci per la soluzione di problemi elettromagnetici (FEM, FDM, BEM, ...), il dominio in cui è definito il problema viene scomposto nell'insieme di elementi sufficientemente piccoli, in modo tale da rendere la soluzione il più possibile accurata: ad esempio per problemi bidimensionali lo spazio è scomposto in mesh di triangoli, rettangoli o altri poligoni, in tetraedri o altri poliedri per problemi tridimensionali. Nell'ambito dell'algebra topologica questi elementi vengono preferibilmente detti *celle* e si definisce *complesso di celle* l'insieme degli elementi, quali punti, linee, facce e volumi, che caratterizzano tale complesso. L'insieme di questi elementi fornisce un importante background per la formulazione algebrica del problema in esame. L'approccio tradizionale, basato sulla formulazione differenziale delle leggi della fisica, come ad esempio le leggi di Maxwell, porta a dover risolvere equazioni differenziali e quindi richiede l'introduzione di strumenti numerici adatti alla soluzione di queste ultime. Attraverso un approccio algebrico invece, il problema si riduce direttamente alla soluzione numerica di un sistema di equazioni algebriche [12]. Nell'ambito dell'algebra topologica, dato uno spazio di dimensione n , si parlerà di cella *p-dimensionale* o *p-cella* (con $0 \leq p \leq n$) per indicare gli elementi che discretizzano tale spazio. Il complesso di celle è detto *m-dimensionale*, indicato con \mathbf{K}^m , se le celle di maggiore dimensione sono celle di dimensione m [13]. Si osservi che non necessariamente in uno spazio di dimensione n deve essere definito un complesso \mathbf{K}^m : in generale vale $m \leq n$.

| Elemento spaziale | Simbolo | Tipo di cella | Simbolo topologico |
|-------------------|----------|------------------|--------------------|
| Punto | P | 0-cella (Nodo) | \mathbf{e}^0 |
| Linea | L | 1-cella (Lato) | \mathbf{e}^1 |
| Superficie | S | 2-cella (Faccia) | \mathbf{e}^2 |
| Volume | V | 3-cella (Cella) | \mathbf{e}^3 |

Il dominio del problema in esame può essere discretizzato da un insieme di celle definite in due diversi modi:

- Una possibilità semplice è quella di considerare l'insieme di celle che si ottengono dall'estrusione delle linee e delle superfici che caratterizzano un dato sistema di riferimento cartesiano (i.e. linee parallele agli assi x, y, z , facce parallele ai piani xy, xz, yz), cilindrico o sferico. Il "naturale" sviluppo di tali linee rende semplice definire le coordinate dei punti che delimitano punti, lati e facce di ogni cella (volume). Si otterranno così celle quadrate/rettangolari (in 2D), cubi/parallelepipedi

(in 3D), eventualmente con dei lati curvilinei se si considera un sistema di riferimento come quello cilindrico o sferico, ma comunque di forma molto semplice.

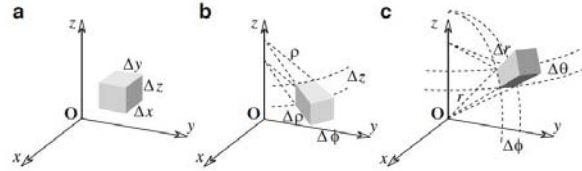


Fig. 3.1: Complesso di celle coordinate nei sistemi di riferimento cartesiano (a), cilindrico (b) e sferico (c)

- In alternativa si può, indipendentemente dal sistema di riferimento, costruire le celle imponendo che queste abbiano la forma più semplice possibile, ovvero triangoli nel caso bi-dimensionale, o tetraedri nel caso 3D. L'insieme di celle in questo caso è detto *complesso di celle semplice* e rappresenta la soluzione più frequentemente adottata.

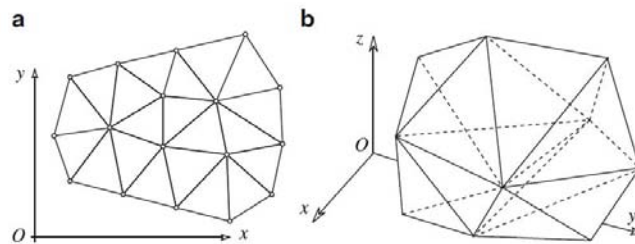


Fig. 3.2: Complesso di celle semplice

3.1.1 Orientazione

Una volta definito il complesso di celle è necessario orientare ogni elemento spaziale (punti, linee, superfici, volumi) che lo compone. Il concetto di orientazione è fondamentale nel momento in cui si vuole risolvere un determinato problema fisico: si pensi alla definizione di flusso di induzione magnetica attraverso una superficie, o alla soluzione di circuiti tramite il metodo delle correnti di anello: in ciascuno di questi casi è richiesta un'orientazione degli elementi che costituiscono lo spazio topologico in cui è definito il problema. Normalmente con il termine *orientazione* si è portati a pensare alla verso di percorrenza di una linea, alla normale entrante o uscente da una superficie, ai lati entranti o uscenti da un nodo. Questi elementi orientati rappresentano in realtà casi particolari di un concetto più sistematico di orientazione, di cui sono dotati gli elementi di un complesso di celle. Questa visione generale si basa sulle definizioni di *orientazione interna* e *orientazione esterna* degli elementi spaziali. Con in termine orientazione *interna* si intende che l'orientazione dell'elemento è definita sulla base dei soli punti che definiscono il bordo di un elemento spaziale: ad esempio se si considera una linea, orientare internamente questa significa sceglierne un verso di percorrenza, ovvero il nodo iniziale e quello finale; per una superficie si tratta di fissare un verso di percorrenza lungo il suo perimetro; in un qualche modo perciò si prendono in considerazione punti "interni" (o al più di bordo) dell'elemento considerato. Se in quest'ultimo

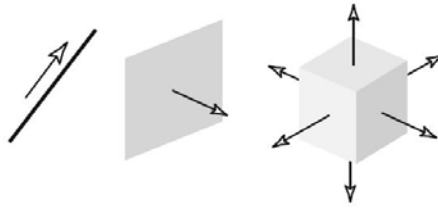


Fig. 3.3: Concetto “standard” di elementi orientati

caso invece si definisce qual è la faccia interna e quella esterna della superficie, allora si sta applicando un’orientazione *esterna*, poiché il passare dalla faccia interna a quella esterna implica dover uscire dalla superficie stessa. Si riassumono in seguito brevemente i concetti di orientazione interna ed esterna per gli elementi spaziali definibili in un complesso \mathbf{K}^3 .

Linee

Orientare *internamente* una linea significa definirne un verso di percorrenza. Una linea in un complesso di celle dotata di orientazione interna viene indicata con $\bar{\mathbf{L}}$. L’orientazione *esterna* di una linea ne definisce invece il verso di rotazione attorno all’asse passante per la linea stessa. Se viene applicata un’orientazione esterna, l’elemento verrà indicato con $\tilde{\mathbf{L}}$

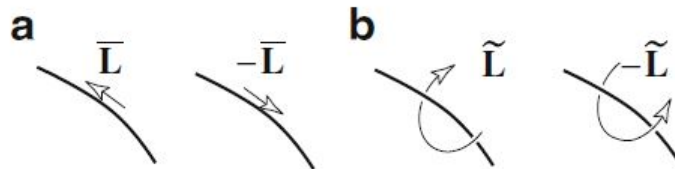


Fig. 3.4: Orientazione interna (a) ed esterna (b) di una linea

Superfici

Una superficie è dotata di orientazione *interna* se è fissato un verso di percorrenza del suo bordo (perimetro), mentre è orientata *esternamente* se si distingue una faccia interna ed una esterna (in altre parole possiamo associare un vettore normale uscente o entrante alla superficie). Rispettivamente si indica la superficie con $\bar{\mathbf{S}}$ o $\tilde{\mathbf{S}}$.

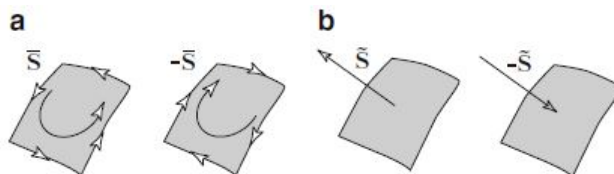


Fig. 3.5: Orientazione interna (a) ed esterna (b) di una superficie

Volumi

Un volume è dotato di un'orientazione *interna* se tutte le sue facce sono orientate internamente in modo *coerente* (o *compatibile*): questo significa che, considerate due facce adiacenti, queste devono indurre un'orientazione opposta sul lato in comune. Un volume è dotato di orientazione *esterna* se ad ogni faccia è associato un vettore normale (i.e. tutte le facce hanno orientazione esterna) coerente con le altre, in modo che tutti escano dal volume o entrino nello stesso. Si osservi che anche l'orientazione interna di una superficie corrisponde ad un'orientazione interna e coerente dei lati che formano il suo bordo: infatti fissato un verso di percorrenza del perimetro e considerati due lati di questo, ciascuno induce un'orientazione opposta sul nodo in comune.

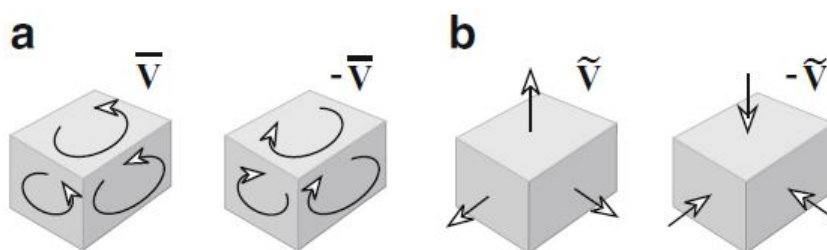


Fig. 3.6: Orientazione interna (a) ed esterna (b) di un volume

Punti

Associare ad un punto un'orientazione interna, significa definire se quel punto è considerato come un *pozzo* o una *sorgente*: ad esempio se il punto è un nodo di un grafo di un circuito elettrico, orientare quel nodo significa stabilire se tutte le correnti sono per convenzione entranti (pozzo) o uscenti (sorgente) da quel nodo. Si introduce ora una definizione che verrà ripresa nel paragrafo successivo:

in uno spazio 3D il duale di una p -cella è una $(3 - p)$ cella.

Il concetto di *elemento duale* è molto importante per le orientazioni, in quanto *l'orientazione esterna di un'elemento spaziale è l'orientazione interna dell'elemento duale*: ad esempio l'orientazione esterna di una linea corrisponde all'orientazione interna della faccia avente quella linea come normale e viceversa. Allo stesso modo si può allora definire l'orientazione interna di un punto come l'orientazione esterna del volume duale: in altre parole il punto è orientato internamente, quando le linee che sono normali delle facce del volume duale, sono tutte entranti o uscenti dal punto considerato. In modo complementare un punto sarà dotato di un'orientazione *esterna*, quando le linee che convergono in quel punto, e che sono le normali delle facce del volume in cui è contenuto, sono dotate di un verso di rotazione definito dall'orientazione interna del volume. Tramite la definizione di elemento duale e la relazione tra orientazione interna ed esterna tra i due elementi, si possono ricavare tutte le orientazioni esterne per gli elementi spaziali definiti in un generico spazio di dimensione n , come riassunto nella Fig.3.8

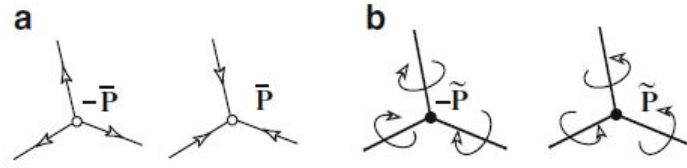


Fig. 3.7: Orientazione interna (a) ed esterna (b) di un punto

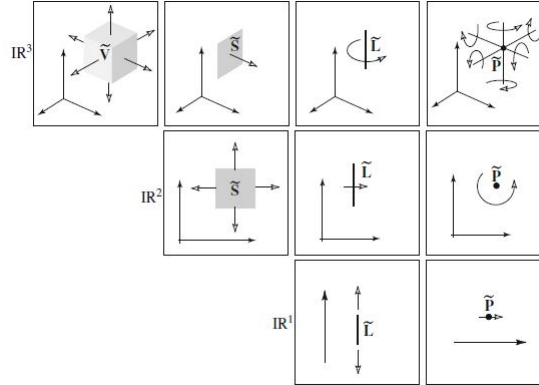


Fig. 3.8: Orientazione esterna degli elementi spaziali in 3D, 2D e 1D

3.1.2 Complesso duale di celle

Nella formulazione differenziale dei problemi elettromagnetici si ricorre all'utilizzo di operatori differenziali, quali *gradiente*, *rotore* e *divergenza* con un'importante conseguenza: nonostante si voglia conoscere il valore di una determinata funzione (scalare o vettoriale) nei punti in cui è stato discretizzato il dominio, questo processo porta alla scrittura di equazioni in cui non compare solo il punto (nodo) considerato, ma anche i suoi vicini. Si pensi ad esempio al metodo delle differenze finite (FDM) per la soluzione dell'equazione di Poisson $\nabla^2 U = g$: per ricavare il potenziale U di un generico nodo, nota la funzione scalare g (sorgente), questo viene espresso come una media pesata (con opportuni coefficienti) dei potenziali dei nodi adiacenti. L'importanza della regione "vicina" ad un dato elemento ha portato a considerare una regione ausiliaria al complesso di celle per ciascuno dei suoi nodi: l'insieme degli elementi spaziali che formano queste regioni aggiuntive costituisce il *complesso duale*.

Per fissare il concetto di complesso duale si consideri un complesso \mathbf{K}^3 formato da celle cubiche e, per ciascuna di queste celle, si colleghino i punti centrali: si otterrà un nuovo complesso, composto anch'esso da elementi la cui massima dimensione è pari alla massima per il complesso primario (in questo caso 3). Si osservi che ad ogni cubo (3D-cella) del complesso primario corrisponde nel complesso duale il punto (0D-cella) in esso contenuto e viceversa; ad ogni faccia (2D-cella) del cubo primario corrisponde una linea nel duale (1D-cella) che collega due nodi duali attraverso la faccia considerata; ogni linea del primario interseca una faccia del duale e ogni punto del complesso primario si trova al centro di una cella duale. In breve:

dato un complesso \mathbf{K}^n , ad ogni p -cella del complesso primario corrisponde una $(n - p)$ -cella nel complesso duale, che contiene, è contenuta, o interseca la cella primaria. Questa caratteristica è detta *proprietà di dualità* tra i due complessi.

In seguito si indicherà con $\bar{\mathbf{K}}$ il complesso primario, con $\tilde{\mathbf{K}}$ il duale e con $\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{V}}$ gli elementi spaziali che lo compongono. La scelta di quale dei due complessi rappresenti il primario è arbitraria, ma solitamente si considera come complesso duale quello contenente le sorgenti di campo, ad esempio i vettori densità di corrente.

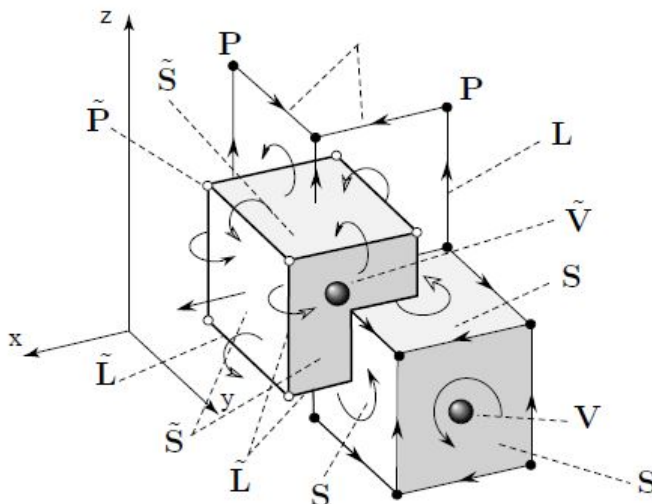


Fig. 3.9: Esempio di cella duale

Orientazione indotta

Un complesso di celle $\bar{\mathbf{K}}^n$ è detto orientato *internamente* se tutte le celle *p-dimensionali*, con $0 \leq p \leq n$, sono dotate di un'orientazione interna. Al fine di orientare correttamente il complesso si procede nel modo seguente:

- tutte le celle di *dimensione 0* (punti) devono essere dotate di un'unica orientazione interna: tutte sorgenti o tutte pozzi (scelta generalmente adottata);
- si applica ad una cella *n-dimensionale* un'orientazione interna, quindi quest'ultima viene propagata a tutte le altre *n-celle* in modo da ottenere un'orientazione coerente;
- le restanti celle di dimensione $0 < p < n$ possono essere orientate (internamente) in modo arbitrario.

Grazie al principio di dualità sopra definito, una volta dotate le celle primarie di un'orientazione interna, risulta univocamente determinata l'orientazione esterna delle celle del complesso duale corrispondenti: l'orientazione esterna di una *p-cella* di $\tilde{\mathbf{K}}$ è indotta dall'orientazione interna della $(n - p)$ -cella corrispondente di $\bar{\mathbf{K}}$. Per questo motivo si può associare equivalentemente il simbolo $\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{V}}$ ad un elemento dotato di orientazione interna e ad un elemento del complesso primario; viceversa $\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{V}}$

indicheranno in modo equivalente elementi spaziali con orientazione esterna o elementi duali.*

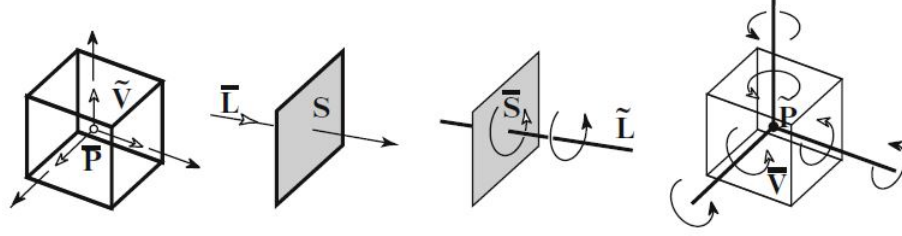


Fig. 3.10: Processo di induzione dell'orientazione esterna sulle celle del complesso duale

3.2 Matrici e numeri di incidenza

Si consideri una cella volumica (3D-cella) di un complesso di celle $\bar{\mathbf{K}}^3$. Tale volume sarà dotato di 6 facce, rappresentate nel complesso dalle celle 2D che formano il suo bordo. In generale, data una p -cella, vengono chiamate *facce* le $(p-1)$ -celle che definiscono il suo bordo. Ad esempio le facce di una superficie sono i lati che delimitano il suo periodo, mentre le facce di una linea sono costituite dai suoi due punti estremi. Il concetto di faccia gioca un ruolo chiave nella definizione di *numero di incidenza*, tra una p -cella e una $(p-1)$ -cella. Si supponga di aver assegnato ad ogni p -cella del complesso primario un indice h : in virtù del principio di dualità l'indice della h -esima p -cella del complesso primario sarà il medesimo della corrispondente h -esima $(3-p)$ -cella del duale. Il numero di incidenza q_{hk} definito tra la h -esima p -cella \mathbf{e}_h^p e la k -esima $(p-1)$ -cella \mathbf{e}_k^{p-1} di $\bar{\mathbf{K}}$ vale:

- +1 se \mathbf{e}_k^{p-1} è una faccia di \mathbf{e}_h^p e le orientazioni delle due celle sono compatibili;
- -1 se \mathbf{e}_k^{p-1} è una faccia di \mathbf{e}_h^p e le orientazioni delle due celle *non* sono compatibili;
- 0 se \mathbf{e}_k^{p-1} *non* è una faccia di \mathbf{e}_h^p

L'insieme dei numeri di incidenza può essere raccolto in una matrice (chiamata appunto *matrice di incidenza*), avente sulle righe le p -celle e sulle colonne le $(p-1)$ -celle. In un complesso $\bar{\mathbf{K}}^3$ si possono distinguere 3 diverse matrici di incidenza[†]:

- **G**: matrice di incidenza *lati/nodi*;
- **C**: matrice di incidenza *facce/lati*;
- **D**: matrice di incidenza *celle(volumi)/facce*.

Inoltre in presenza di un complesso duale $\bar{\mathbf{K}}$ sono verificate le seguenti condizioni:

- ogni $(3-p)$ -cella del complesso duale interseca, è contenuta o contiene la corrispondente p -cella del complesso primario;

* *Notazione*: nodi, facce, lati e volumi vengono spesso indicati anche con n, e, f, v , per il complesso primario e con $\tilde{n}, \tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{v}$ per il complesso duale.

[†] Nel caso bi-dimensionale saranno solo presenti le matrici **G** e **C**.

- il numero di celle n_p di dimensione p del complesso primario coincide con il numero delle corrispondenti $(n-p)$ -celle duali (i.e. si possono assegnare i medesimi indici a coppie di celle corrispondenti);
- l'orientazione della $(n-p)$ -cella duale è quella indotta dall'orientazione interna della p -cella primaria corrispondente.

In virtù di queste proprietà è verificato che: *il numero di incidenza tra una p -cella e una $(p-1)$ -cella nel complesso primario e il numero di incidenza tra le corrispondenti celle duali sono equivalenti*. Segue che, dato un complesso $\bar{\mathbf{K}}^2$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{G}} &= \bar{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \bar{\mathbf{G}}^T\end{aligned}\quad (3.1)$$

Mentre se si considera un complesso $\bar{\mathbf{K}}^3$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{G}} &= \bar{\mathbf{D}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \bar{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{D}} &= -\bar{\mathbf{G}}^T\end{aligned}\quad (3.2)$$

Rispetto al caso 2D cambiano le tipologie di elementi spaziali che formano una coppia di celle primaria/duale, per questo motivo cambiano anche le coppie di matrici di incidenza. Il segno “-” nell’ultima espressione è dovuto al fatto che, convenzionalmente, i nodi sono sempre orientati da *pozzi* e i volumi con normali *uscenti*, per cui quando si passa dal nodo primario al volume duale, l’orientazione esterna indotta è invertita rispetto alla convenzione.

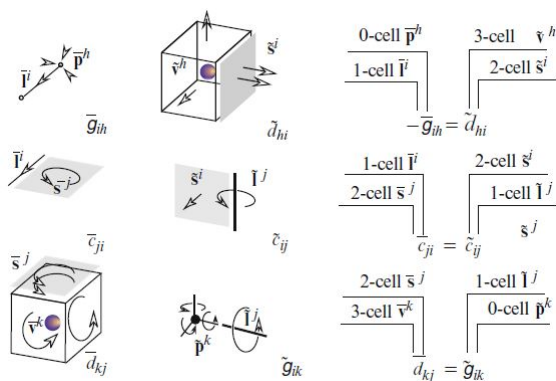


Fig. 3.11: Relazioni tra numeri di incidenza di coppie di celle primarie/duali

Esempio

Si riporta a scopo chiarificatore il seguente esempio (Fig.3.12), per un complesso $\bar{\mathbf{K}}^2$:

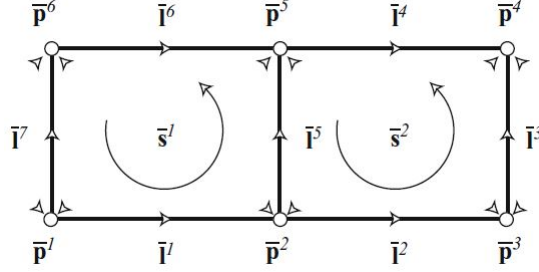


Fig. 3.12: Esempio di complesso orientato in 2D

$$\bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

dove la h -esima riga corrisponde al lato $\mathbf{l}^h = \mathbf{e}_h^1$, mentre la k -esima colonna corrisponde al punto $\mathbf{p}^k = \mathbf{e}_k^0$.

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

dove la h -esima riga corrisponde alla faccia $\mathbf{s}^h = \mathbf{e}_h^2$, mentre la k -esima colonna corrisponde al lato $\mathbf{l}^k = \mathbf{e}_k^1$. Una volta costruito il complesso duale si può facilmente

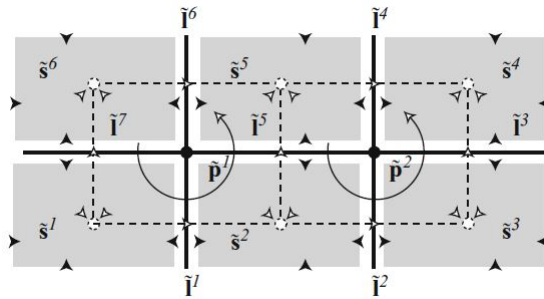


Fig. 3.13: Complesso duale dell'esempio

verificare che valgono le (3.1):

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{C}}^T \quad (3.5)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{G}}^T \quad (3.6)$$

3.3 Formulazione discreta delle leggi di Maxwell

Si supponga di voler risolvere un dato problema elettromagnetico. L'approccio differenziale adottato nei metodi come FEM (*Finite Element Method*) e FDM (*Finite Difference Method*) richiede un processo di discretizzazione delle equazioni di Maxwell in forma differenziale. Con il metodo delle celle, indicato anche con la sigla DGA (*Discrete Geometric Approach*), è possibile riformulare le equazioni di Maxwell in forma finita, ottenendo direttamente un sistema di equazioni algebriche senza dover passare per l'espressione differenziale di tali equazioni. Il metodo DGA si basa sull'utilizzo di *variabili globali*, ciascuna riferita a elementi spaziali orientati (internamente o esternamente) che compongono il complesso. Il legame tra queste variabili e i campi elettromagnetici caratteristici del problema è dato da espressioni integrali, valutati sulle linee, superfici o volumi che costituiscono gli elementi. Ad esempio ad ogni faccia orientata \mathbf{S} si può associare un il flusso di induzione magnetica Φ :

$$\Phi[\mathbf{S}] = \int_{\mathbf{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.7)$$

Si consideri quindi in *teorema di Gauss per il campo magnetico*:

$$\oint_{\partial\mathbf{V}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathbf{V}} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.8)$$

dove $\partial\mathbf{V}$ è il bordo del volume \mathbf{V} . Se tale volume è la h -esima cella \mathbf{e}_h^3 di un complesso, allora il suo bordo è composto da 6 facce \mathbf{S} , la cui somma dei flussi $\Phi[\mathbf{S}]$ deve avere valore nullo in accordo con il teorema di Gauss. Se si indica con $\Phi[\mathbf{S}]$ il vettore dei flussi di induzione magnetica associati alle m facce del complesso, allora la legge di Gauss, per la cella h -esima, può essere riscritto come:

$$d_{h1}\Phi[\mathbf{S}_1] + d_{h2}\Phi[\mathbf{S}_2] + \dots + d_{hk}\Phi[\mathbf{S}_k] + \dots + d_{hm}\Phi[\mathbf{S}_m] = 0 \quad (3.9)$$

dove $d_{h,k}$ è il numero di incidenza tra la cella h e la faccia k , il quale vale ± 1 se quest'ultima appartiene al suo bordo $\partial\mathbf{V}$, o 0 se non vi appartiene. $\Phi[\mathbf{S}]$ è una *variabile globale* del problema il cui legame differenziale con il campo \mathbf{B} è espresso dall'operatore *div*, il quale in forma discreta si traduce nella matrice di incidenza \mathbf{D} :

$$\mathbf{D}\Phi[\mathbf{S}] = 0 \quad \text{teorema di Gauss per il campo magnetico} \quad (3.10)$$

In modo simile si possono definire le altre variabili globali del sistema che vengono qui riassunte [14]:

- Φ è il vettore dei flussi magnetici associati alle facce $\bar{\mathbf{S}}$;
- $\tilde{\Psi}$ è il vettore dei flussi elettrici associati alle facce duali $\tilde{\mathbf{S}}$;
- $\tilde{\mathbf{F}}$ è il vettore delle f.m.m. associate ai lati duali $\tilde{\mathbf{L}}$;

- $\tilde{\mathbf{I}}$ è il vettore delle correnti associate alle facce duali $\tilde{\mathbf{S}}$;
- \mathbf{U} è il vettore delle f.e.m. associati ai lati primari $\bar{\mathbf{L}}$;
- \mathbf{A} è il vettore degli integrali del potenziale vettore magnetico lungo i lati primari $\bar{\mathbf{L}}$;
- $\tilde{\mathbf{Q}}$ è il vettore delle cariche contenute nei volumi duali $\tilde{\mathbf{V}}$.

Si osservi che alcune variabili sono riferite a elementi del complesso primario, mentre altre ad elementi del duale. Nel metodo delle celle queste variabili (gradi di libertà del problema) sono suddivise in due categorie: *variabili di configurazione* e *variabili di sorgente*. Tale suddivisione permette di distinguere i gradi di libertà del problema associati, rispettivamente, alla configurazione dei campi presenti e alle sorgenti di questi ultimi. È per questo motivo che si ricorre a due complessi di celle, in modo associare ad uno, ad esempio il duale, le sorgenti di campo e all'altro, il primario, l'effetto di tali variabili di sorgente[‡]. Il vantaggio di questo metodo è poi reso esplicitamente dallo stretto legame che sussiste tra le matrici di incidenza \mathbf{G} , \mathbf{C} , \mathbf{D} e gli operatori differenziali *grad*, *curl*, *div* (non a caso il nome di tali matrici fa riferimento proprio al nome degli operatori). Il legame tra operatore differenziale e matrice di incidenza si esplica nella *forma discreta delle equazioni di Maxwell*, qui in seguito riportate:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}\mathbf{U} &= -d\Phi/dt & \text{(a)} & \text{legge di Fadaray-Neumann} \\
\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{F}} &= \tilde{\mathbf{I}} + d\tilde{\Psi}/dt & \text{(b)} & \text{legge di Ampere-Maxwell} \\
\mathbf{D}\Phi &= 0 & \text{(c)} & \text{teorema di Gauss per il campo magnetico} \\
\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\Psi} &= \tilde{\mathbf{Q}} & \text{(d)} & \text{teorema di Gauss per il campo elettrico}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Si osservi che (a) e (c) fanno riferimento a variabili di sorgente, per cui compaiono le matrici di incidenza[§] relative a elementi spaziali del complesso primario $\bar{\mathbf{K}}$ (i.e. orientati internamente), mentre (b) e (d) si riferiscono a elementi del complesso duale, in quanto esprimono un legame fisico tra variabili di configurazione. Infine le *leggi costitutive dei materiali* completano il quadro delle equazioni che descrivono un dato problema elettromagnetico, fornendo il legame tra variabili di sorgente e variabili di configurazione:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}} &= \mathbf{M}_\nu \Phi & \text{(a)} \\
\tilde{\Psi} &= \mathbf{M}_\epsilon \mathbf{U} & \text{(b)} \\
\tilde{\mathbf{I}} &= \mathbf{M}_\sigma \mathbf{U} & \text{(c)}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

dove \mathbf{M}_ν , \mathbf{M}_ϵ e \mathbf{M}_σ sono matrici quadrate dipendenti dalla geometria e dai materiali in gioco.

[‡]L'associazione di un insieme di variabili ad un complesso è del tutto arbitraria; le espressioni presentate in questo paragrafo rappresentano solo uno dei due possibili casi di associazione.

[§]Per semplicità di notazione le matrici di incidenza relative al complesso primario vengono spesso indicate omettendo l'apice⁻.

Capitolo 4

Analisi modale

4.1 Modi di plasma

Nel capitolo 1 si è motivata la necessità di adottare configurazioni di tipo *screw-pinch* per garantire l'equilibrio MHD: le linee dei campi densità di corrente \mathbf{J} e induzione magnetica \mathbf{B} si avvolgono attorno al plasma formando profili elicoidali. Si consideri una generica sezione poloidale individuata dall'angolo $\phi = \phi^*$, appartenente ad una superficie di flusso: si supponga che la linea di campo individui su tale sezione un punto P_0 ; a causa dell'andamento elicoidale, dopo una completa rivoluzione del toroide la linea di campo avrà subito uno spostamento poloidale $\Delta\theta$, individuando un nuovo punto P_1 , non necessariamente corrispondente al punto di partenza [15].

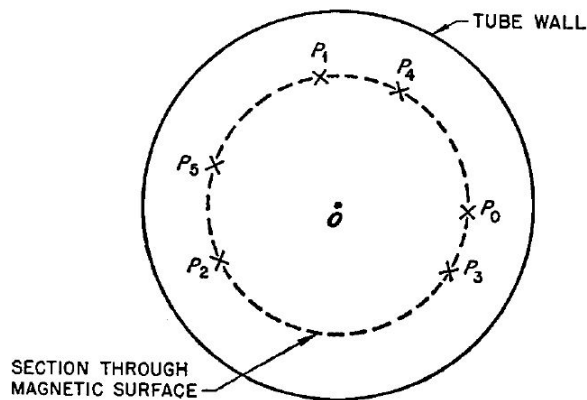


Fig. 4.1: Punti individuati dalla linea di campo in seguito a successive rivoluzioni

L'angolo poloidale medio, definito su un numero infinito di rivoluzioni toroidali, coperto dalla linea di campo durante un completo giro toroidale è definito come *trasformata rotazionale*:

$$\iota = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Delta\theta_j \quad (4.1)$$

dove $\Delta\theta_j$ è l'angolo individuato dalla linea di campo tra il j -esimo e il $(j+1)$ -esimo transito sulla sezione considerata. In generale una generica linea di campo impiegherà N giri completi del toroide per tornare al punto di partenza, ovvero per completare un giro poloidale. In questo caso le linee di campo saranno chiuse e ι assume un valore

dato da:

$$\iota = \frac{2\pi}{N} \quad (4.2)$$

Il numero N corrisponde alla grandezza definita nel capitolo 1 come *fattore di sicurezza*, q :

$$q(r) = \frac{2\pi}{\iota} = \frac{r}{R_0} \frac{B_\phi(r)}{B_\theta(r)} \quad (4.3)$$

Il fattore di sicurezza fornisce quindi un'importante indicazione sul passo dell'elica formata dalle linee di campo: più q è grande (i.e. ι piccolo) più il passo dell'elica è ampio e viceversa.

Si prenda ora in considerazione il campo densità di corrente \mathbf{J} definito dal plasma e si consideri una generica superficie toroidale individuata dal raggio minore $r = r^*$. L'andamento spaziale di \mathbf{J} lungo tale superficie può essere espresso, sfruttando la scomposizione di Fourier, come:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(r^*) e^{j(m\theta + n\phi)} \quad (4.4)$$

dove \mathbf{r} è il generico punto lungo la superficie individuato dalle coordinate (r^*, θ, ϕ) . I coefficienti m e n vengono chiamati rispettivamente *numero d'onda poloidale* e *numero d'onda toroidale*: una configurazione magnetica, in condizioni di equilibrio, è caratterizzata da un determinato *modo di plasma* a seconda dei valori assunti dai numeri d'onda m e n . Il fattore di sicurezza (4.3) può essere riscritto come:

$$q = \frac{m}{n} \quad (4.5)$$

I modi di plasma caratterizzati da un elevato m sono perciò costituiti da eliche di corrente molto allungate, che richiedono molti giri toroidali per completare un giro poloidale. Queste configurazioni modali sono tipiche dei Tokamak dove, per ragioni di stabilità, si cerca di mantenere un elevato fattore di sicurezza (maggiore di 2). La configurazione RFP è invece molto più flessibile dal punto di vista modale: la presenza di modi con $m \neq 0$ e $n \neq 0$ è spesso accompagnata dall'insorgere di instabilità nel plasma, le quali però contribuiscono al mantenimento della configurazione RFP secondo un meccanismo noto come *effetto dinamo* [4].

In RFX-mod, anche grazie all'introduzione delle bobine di controllo MHD, è stato possibile operare stabilmente con diversi modi di plasma, con $m = 1$ e $n = 0 \div 20$; un modo tipico, ad esempio, è quello descritto da $m = 1$ e $n = 7$. Con riferimento a tale configurazione si è valutato, in primo luogo, il campo di induzione magnetica prodotto dal solo plasma sulla superficie interna del FW. Si è adottato un approccio integrale per la soluzione numerica del problema: questo risulta vantaggioso in presenza di un dominio molto vasto dove però solo una parte di questo, la superficie del FW e il plasma, devono essere discretizzati, a differenza di un approccio FEM che richiederebbe di meshare l'intero dominio. Come sorgente di campo si è considerata una superficie toroidale avente raggio minore pari a $0.3 m$. In secondo luogo si è considerato l'effetto delle strutture conduttrici, in modo tale da valutare gli errori di campo ai gap dovuti alle correnti indotte in esse. La presenza di queste correnti indotte è dovuta al fatto che la colonna di plasma non si trova in equilibrio statico, ma ruota all'interno del vessel nella direzione toroidale. Il campo magnetico risultante dal plasma dunque sarà caratterizzato da una certa distribuzione spaziale, come quella di (4.4), rotante nello spazio: le strutture metalliche conduttrici che circondano il plasma vedranno un campo variabile nel tempo, il che porta all'induzione di correnti le quali, a loro volta, eserciteranno una coppia frenante tale da rallentare la rotazione del plasma. Questo fenomeno

è molto simile a quanto accade nei motori a induzione, nei quali le correnti indotte nel rotore (i.e. shell) tendono a portare il campo magnetico di rotore alla medesima velocità di rotazione di quello di eccitazione (plasma).

4.2 Discretizzazione del dominio

4.2.1 Plasma

La superficie di plasma (i.e. la sorgente di campo magnetico) è stata discretizzata attraverso elementi triangolari, su cui si è ipotizzato un valore di densità di corrente uniforme. Tramite questa superficie si vuole riprodurre una possibile superficie iso-pressione del plasma, su cui le linee di campo \mathbf{J} giacciono senza aver alcuna componente normale (i.e. radiale). Per la realizzazione della mesh è stato definito un numero discreto di punti sulla superficie: trattandosi di punti aventi tutti la medesima coordinata radiale ($r = 0.3m$), si può immaginare la mesh come una griglia orientata secondo i due assi θ e ϕ . Si sono considerati n_{pol} punti in direzione poloidale e n_{tor} punti in quella toroidale, per un totale di $n_{nodes} = n_{pol} \times n_{tor}$ nodi (si osservi che i lati superiore/inferiore e sinistro/destro della griglia coincidono, trattandosi in realtà di una superficie toroidale e non di una griglia piana). Considerato il generico indice di riga k_ϕ (con $k_\phi = 1 \div n_{tor}$) e il generico indice di colonna k_θ (con $k_\theta = 1 \div n_{pol}$), le coordinate del punto (k_ϕ, k_θ) sono espresse come:

$$\begin{cases} r = 0.3 \\ \theta = (k_\theta - 1) \Delta\theta & \text{se } k_\phi \text{ dispari} \\ \theta = \Delta\theta/2 + (k_\theta - 1) \Delta\theta & \text{se } k_\phi \text{ pari} \\ \phi = (k_\phi - 1) \Delta\phi \end{cases} \quad (4.6)$$

con $\Delta\theta = \frac{2\pi}{n_{pol}}$ e $\Delta\phi = \frac{2\pi}{n_{tor}}$. La distinzione della coordinata poloidale a seconda della riga occupata dai punti è necessaria se si vuole ottenere una mesh di triangoli isosceli, per cui un punto della riga k_ϕ dovrà trovarsi sulla mezzeria (in termini di componente θ) rispetto a due punti della riga precedente. Un generico nodo può essere individuato, sia tramite gli indici di riga e di colonna come appena descritto, sia da un indice globale j (con $j = 1 \div n_{nodes}$), ordinato ad esempio secondo la sequenza adottata in Fig.4.2 (si scorre la k_ϕ -esima riga nel verso positivo delle θ per poi passare alla riga $k_\phi + 1$). Si ottiene così la seguente relazione tra indici riga/colonna e indici globali:

$$j = (k_\phi - 1) n_{pol} + k_\theta \quad (4.7)$$

Una volta numerati i nodi della mesh si può costruire una matrice di dimensioni $n_{nodes} \times 3$, avente su ogni riga le coordinate del corrispondente nodo j -esimo*:

$$NN = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_j & y_j & z_j \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n_{nodes}} & y_{n_{nodes}} & z_{n_{nodes}} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

*Le coordinate, una volta ricavate in geometria toroidale secondo le (4.6), saranno convertite nel riferimento di assi cartesiani x, y, z sfruttando le (1.15).

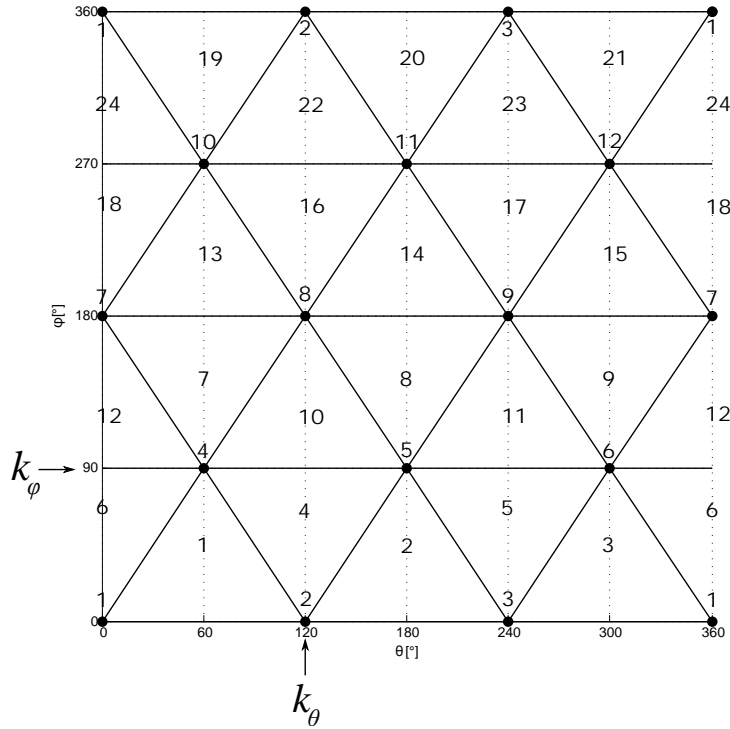


Fig. 4.2: Esempio di mesh triangolare con $n_{pol} = 3$ e $n_{tor} = 4$

Per poter svolgere le operazioni che verranno descritte in seguito, è necessario conoscere quali nodi appartengono ad un generico elemento triangolare t (dove t è l'indice globale con cui possono essere ordinati i vari elementi). Si può così definire una *matrice facce/nodi*, avente tante righe quanti i triangoli della mesh ($n_{tri} = 2n_{nodes}$), e per ogni riga gli indici globali dei 3 nodi (j_{t1}, j_{t2}, j_{t3}) corrispondenti ai vertici del triangolo t considerato:

$$F = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ j_{t1} & j_{t2} & j_{t3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ j_{n_{tri}1} & j_{n_{tri}2} & j_{n_{tri}3} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Il verso con cui vengono ordinati i nodi di un triangolo è arbitrario (orario o antiorario), purché coerente per tutti gli elementi. Noti i vertici di ciascun triangolo e le corrispondenti coordinate la mesh è completamente definita. Da un punto di vista numerico, maggiore è il numero di elementi scelti più accurata sarà la valutazione dei campi, ma maggiore diventerà l'onere computazionale. Inoltre, dovendo analizzare un modo di plasma $m = 1$, $n = 7$ in cui il periodo delle grandezze in direzione toroidale è 7 volte quella in direzione poloidale, se si vuole mantenere la stessa risoluzione spaziale nelle due direzioni si dovrà scegliere $n_{tor} = 7n_{pol}$. Nel caso in esame il plasma di RFX è stato modellizzato tramite 16200 nodi ($n_{pol} = 45$, $n_{tor} = 360$) e 32400 elementi triangolari.

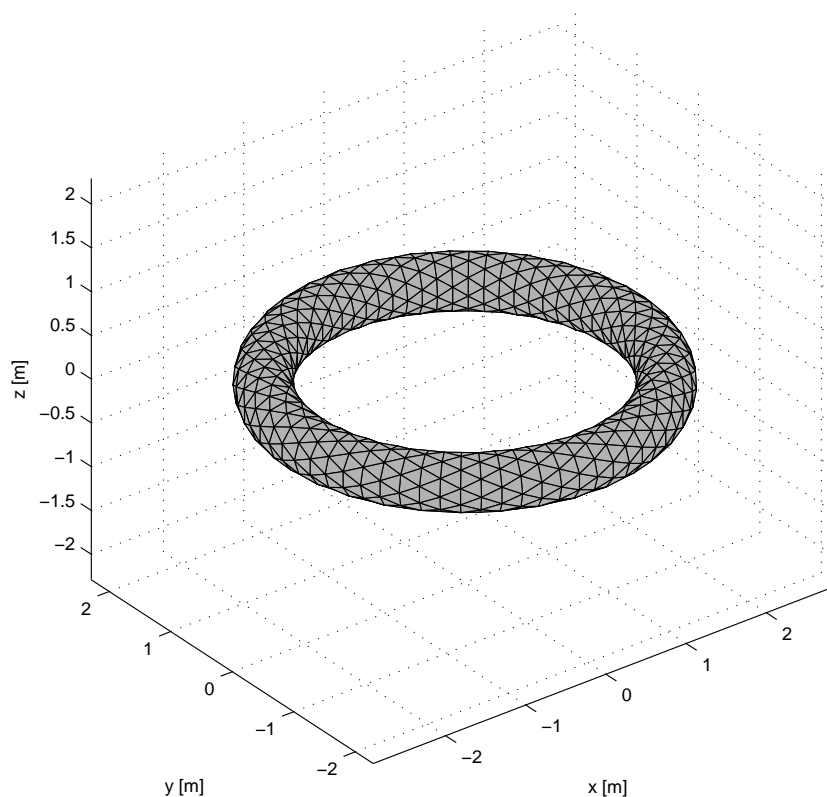


Fig. 4.3: Mesh della superficie “sorgente” (per facilità di visualizzazione $n_{tor} = 70$, $n_{pol} = 10$)

4.2.2 Punti di calcolo

Il campo di induzione magnetica, generato dalla distribuzione di corrente sulla superficie sopra descritta, è stato valutato su una griglia di punti collocata su di una superficie toroidale corrispondente alla parete interna del FW ($r = a = 0.489 \text{ m}$). Si è realizzata una mesh simile alla precedente, costituita da 720 nodi in direzione toroidale e 180 in quella poloidale, per un totale di 129600 elementi rettangolari.

4.3 Definizione delle sorgenti di campo

A ciascun elemento triangolare deve essere associato un vettore densità di corrente \mathbf{J} , il quale viene assunto uniforme sulla superficie del triangolo. Considerato l’elemento t -esimo è possibile associare a questo un sistema di riferimento locale, costituito da due assi ortogonali u, v giacenti sul piano del triangolo e un terzo asse w normale a quest’ultimo. In particolare, una volta numerati i nodi in senso antiorario rispetto all’asse w e indicati con ∂T_i i lati opposti al nodo N_i , si considera con u l’asse passante per ∂T_3 .

Indicato con \mathbf{r}_i il vettore posizione per il nodo N_i nel sistema di riferimento globale

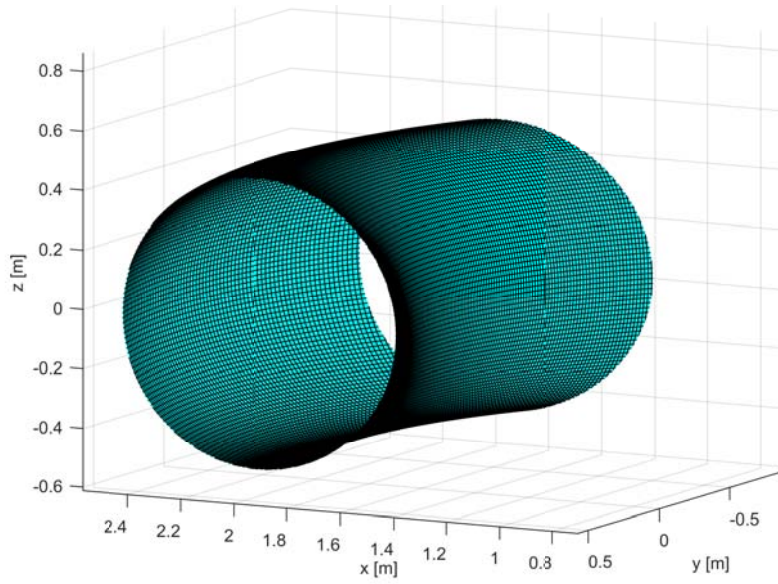


Fig. 4.4: Mesh rettangolare dei punti di calcolo

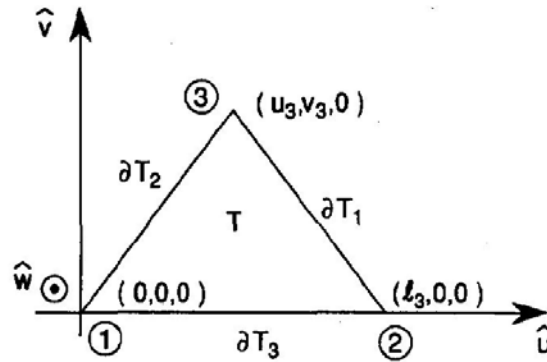


Fig. 4.5: Sistema di riferimento locale

(x, y, z) , si indica con \mathbf{e}_j il vettore associato al lato j -esimo e con l_j il corrispondente modulo:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 \quad (4.10)$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

$$l_j = \|\mathbf{e}_j\| \quad (4.11)$$

Si possono così ricavare i versori corrispondenti ai 3 assi $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{v}}$, $\hat{\mathbf{w}}$ con le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{e}_3 / l_e \\ \hat{\mathbf{w}} &= (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) / \|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1\| \\ \hat{\mathbf{v}} &= \hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Una volta individuato correttamente il sistema di riferimento locale ciascun nodo potrà essere espresso in termini di coordinate (u, v, w) :

$$\begin{aligned} N_1 &= (0, 0, 0) \\ N_2 &= (l_3, 0, 0) \\ N_3 &= (u_3, v_3, 0) \end{aligned} \quad (4.13)$$

con $u_3 = -\mathbf{e}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}$ e $v_3 = -\mathbf{e}_2 \cdot \hat{\mathbf{v}}$.

Risulta conveniente, piuttosto che dover adottare una formulazione vettoriale come in (4.4), definire il vettore densità di corrente attraverso la relazione:

$$\mathbf{J} = \nabla\psi^{mn} \times \hat{\mathbf{w}} \quad (4.14)$$

dove ψ^{mn} è una funzione scalare avente dominio nel piano (u, v) e definita nei nodi dell'elemento triangolare (*stream function*), la quale può essere definita come combinazione lineare delle coordinate di un generico punto del piano locale:

$$\psi^{mn}(u, v) = a + bu + cv \quad (4.15)$$

Al fine di riprodurre un modo di plasma caratterizzato da numeri d'onda m, n si può assumere un'espressione di ψ^{mn} simile alla (4.4):

$$\psi^{mn}(r^*, \theta, \phi) = \psi_c^{mn} \cos(m\theta + n\phi) + \psi_s^{mn} \sin(m\theta + n\phi) \quad (4.16)$$

dove ψ_c^{mn} e ψ_s^{mn} sono dei coefficienti dipendenti dal modo di plasma considerato. Tramite questa espressione, assegnati i coefficienti ψ_c^{mn} , ψ_s^{mn} ed essendo note le coordinate θ, ϕ ($r = r^* = \text{cost}$) dei nodi che compongono il triangolo, si possono calcolare i corrispondenti potenziali $\psi_1^{mn}, \psi_2^{mn}, \psi_3^{mn}$. Applicando la definizione di gradiente alla (4.15) si ottiene:

$$\nabla\psi^{mn} = \frac{\partial\psi^{mn}}{\partial u} \hat{\mathbf{u}} + \frac{\partial\psi^{mn}}{\partial v} \hat{\mathbf{v}} = b\hat{\mathbf{u}} + c\hat{\mathbf{v}} \quad (4.17)$$

Quindi la (4.14) può essere riscritta, svolgendo il prodotto vettore, come:

$$\mathbf{J}(u, v, w) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{u}} & \hat{\mathbf{v}} & \hat{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial\psi^{mn}}{\partial u} & \frac{\partial\psi^{mn}}{\partial v} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial\psi^{mn}}{\partial v} \hat{\mathbf{u}} - \frac{\partial\psi^{mn}}{\partial u} \hat{\mathbf{v}} = c\hat{\mathbf{u}} - b\hat{\mathbf{v}} \quad (4.18)$$

Si noti che per come è stato definito, \mathbf{J} è un vettore giacente sul piano u, v del triangolo e uniforme su di esso se b e c vengono considerati costanti. In altre parole, definiti i potenziali su ogni nodo, la combinazione dei parametri a, b, c che fornisce una densità di corrente uniforme, sarà quella che verifica il sistema di equazioni lineari dato da:

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1^{mn} \\ \psi_2^{mn} \\ \psi_3^{mn} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

dove u_i, v_i, w_i sono le coordinate locali del nodo N_i . Risolvendo il sistema nelle incognite a, b, c sarà univocamente determinato il vettore densità di corrente di quell'elemento triangolare. Infine il vettore \mathbf{J} può essere riportato nel sistema di riferimento globale applicando la matrice di rotazione R :

$$R = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{w}} \cdot \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{w}} \cdot \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{z}} & \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{z}} & \hat{\mathbf{w}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{J}(x, y, z) = [R \mathbf{J}(u, v, w)]^T \quad (4.20)$$

Si riporta in seguito il plot della mappa di potenziale ψ^{mn} per il modo di plasma considerato: dall'immagine risulta evidente come l'elica di corrente impieghi $1/7$ di giro toroidale per completare una rotazione completa in direzione poloidale.

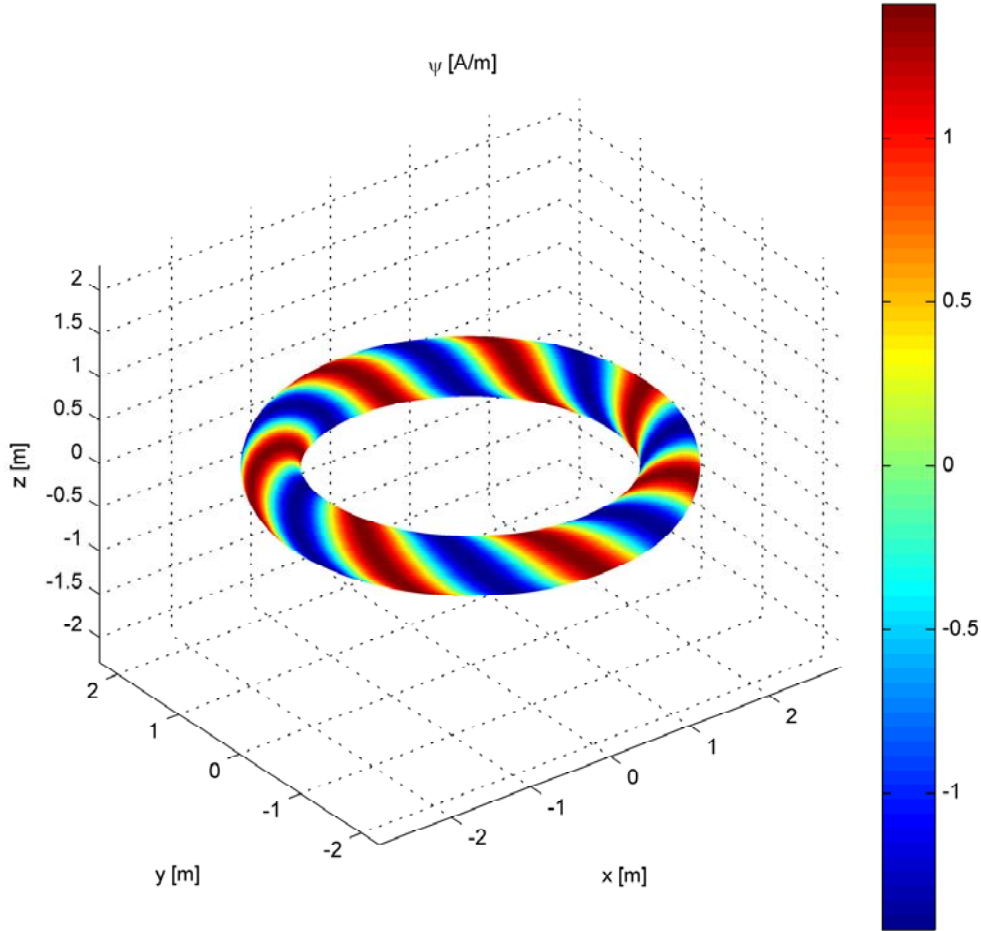


Fig. 4.6: Andamento del potenziale ψ^{mn} per il modo $m = 1, n = 7$ ($\psi_c^{mn} = \psi_s^{mn} = 1$)

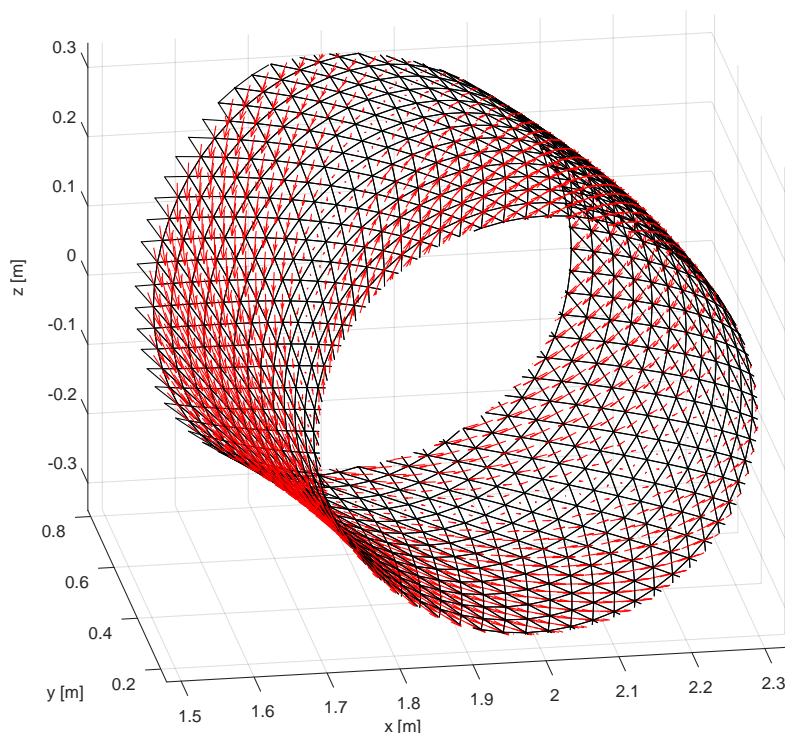
4.4 Campo prodotto dal plasma

Considerata l'assenza di correnti indotte nelle strutture conduttrici, il calcolo del campo generato dal plasma risulta un problema magnetostatico in cui il dominio è caratterizzato da un materiale uniforme ($\mu = \mu_0 = cost$). Il problema è descritto dal seguente set di equazioni:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases} \quad (4.21)$$

Essendo il campo vettoriale \mathbf{B} solenoidale, allora può essere espresso come il rotore di un campo vettoriale \mathbf{A} , ricordando l'identità vettoriale $\nabla \cdot \nabla \times = 0$:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.22)$$

Fig. 4.7: Dettaglio dei vettori \mathbf{J} su una porzione di superficie

\mathbf{A} è detto *potenziale vettore magnetico*. Si osservi che tale campo è definito a meno del gradiente di un campo scalare Ψ :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi \quad (4.23)$$

Esiste perciò una famiglia di infiniti campi potenziale vettore \mathbf{A}' che forniscono \mathbf{B} , essendo $\nabla \times \nabla\Psi = 0$. In altre parole un campo vettoriale non è univocamente determinato se non viene specificato, oltre al suo rotore, anche la sua divergenza: questa operazione è detta *gauging* e nel caso in esame risulta conveniente imporre che $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (*Gauge di Coulomb*). Combinando la (4.22), la terza e la prima equazione di (4.21), si ottiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.24)$$

Grazie al gauge imposto si ottiene:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (4.25)$$

La (4.25) è formalmente analoga all'*equazione di Poisson* per il caso elettrostatico, che lega il potenziale elettrostatico ϕ alla densità volumica di carica δ , quindi si può dedurre

che la sua soluzione sarà [16] †:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (4.26)$$

dove \mathbf{r} è il vettore posizione (x, y, z) del punto in cui viene valutato il potenziale vettore magnetico, mentre $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ indica la posizione della sorgente di campo \mathbf{J} (d^3r' indica l'elemento volumico infinitesimo di integrazione). Questa espressione rappresenta di fatto la *legge di Biot-Savart* per il vettore potenziale magnetico, applicata ad un elemento di volume V . A differenza di quanto sopra descritto, nel caso in esame il vettore sorgente giace su un elemento triangolare di superficie S_f e non su un elemento volumico, inoltre la densità di corrente è uniforme su di esso; l'espressione (4.26) si riduce a:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}_f W_f(\mathbf{r}) \quad (4.27)$$

dove $W_f(\mathbf{r})$ è una funzione scalare definita dall'integrale di superficie dell'inverso della distanza $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, fra la sorgente \mathbf{J} e il punto di osservazione in cui viene valutato il campo \mathbf{A} , mentre $\hat{\mathbf{n}}_f$ indica il versore normale uscente dalla superficie S_f . Si ha:

$$W_f(\mathbf{r}) = \int_{S_f} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2r' \quad (4.28)$$

con S_f superficie dell'elemento triangolare della mesh considerato. Per il vettore di induzione magnetica si ottiene:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}_f) \times \nabla W_f(\mathbf{r}) \quad (4.29)$$

Il calcolo dei campi \mathbf{A} e \mathbf{B} nel punto di osservazione \mathbf{r} si traduce quindi nel calcolo di due espressioni integrali, rispettivamente legate a $1/R$ e al gradiente $\nabla(1/R)$. Si osservi che, nel caso in esame, il vettore \mathbf{J} giace per definizione sul piano del triangolo, per cui $\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{n}}_f \equiv \mathbf{J}$.

4.4.1 Determinazione di W_f e ∇W_f

Le funzioni W_f e ∇W_f dipendono, come si può dedurre dall'espressione (4.28), dalla superficie di integrazione: l'integrale darà quindi risultati diversi, a parità di distanza R , a secondo del tipo di poligono che definisce la forma degli elementi di mesh. Tuttavia entrambe le espressioni sono indipendenti dall'orientazione di $\hat{\mathbf{n}}_f$, rendendo insensibile il calcolo dell'integrale dal verso di percorrenza con cui verranno considerati i lati e i vertici. Seguendo [17] la funzione W_f può essere riscritta come:

$$W_f(\mathbf{r}) = \oint_{\partial S_f} \frac{\hat{\mathbf{n}}_f \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_e d^1r}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_f \int_{S_f} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_f d^2r'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} = W'_f(\mathbf{r}) + W''_f(\mathbf{r}) \quad (4.30)$$

W_f risulta dato dalla somma di due contributi:

† per il caso elettrostatico si ha $\nabla^2 \phi = -\frac{\delta}{\epsilon}$, dove $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$

- il primo termine è costituito dall'integrale sulla linea chiusa ∂S_f dell'elemento, con $\hat{\mathbf{u}}_e$ versore tangente a tale bordo. Questo contributo può quindi essere scomposto nella somma discreta degli integrali di linea valutati lungo ciascun lato $l_e \in \partial S_f$:

$$W'_f = \sum_{l_e \in \partial S_f} \int_{l_e} \hat{\mathbf{n}}_f \times \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \cdot \hat{\mathbf{u}}_e d^1r \quad (4.31)$$

Dal momento che ciascun integrale è valutato su tratti rettilinei, il termine $\hat{\mathbf{n}}_f \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_e$ è costante su l_e e può quindi essere portato fuori dall'integrale, considerando con \mathbf{r}_e un generico punto lungo il lato *e-esimo*, ad esempio il primo nodo seguendo il verso di orientazione rispetto a $\hat{\mathbf{n}}_f$ definito per il poligono. La (4.31) diviene:

$$W'_f = \sum_{l_e \in \partial S_f} \hat{\mathbf{n}}_f \times (\mathbf{r}_e - \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_e w_e(\mathbf{r}) \quad (4.32)$$

con

$$w_e(\mathbf{r}) = \int_{l_e} \frac{d^1r}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \ln \frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}| + |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| + |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}| + |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| - |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (4.33)$$

dove $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1$ indicano rispettivamente i vettori posizione dei nodi finale e iniziale del lato l_e . Quest'ultima funzione scalare è analoga a W_f , ma il dominio di integrazione diviene ora monodimensionale e dipende dal lato l_e , ma non dall'orientazione di $\hat{\mathbf{u}}_e$: si può considerare un qualsiasi ordine per i nodi terminali senza modificarne il risultato.

- Per quanto riguarda il secondo termine il prodotto $(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_f$ è costante su tutto l'elemento poligonale, dal momento che rappresenta la distanza, in direzione ortogonale al piano, tra un generico punto $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_f$ appartenente all'elemento e il punto di osservazione. Anche in questo caso allora, si potrà considerare un qualsiasi nodo del poligono per valutare \mathbf{r}_f . Il termine integrale rappresenta l'angolo solido $\Omega_f(\mathbf{r})$ sotteso dal poligono in corrispondenza del punto \mathbf{r} . Nel caso di elementi triangolari, indicate con $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ le posizioni dei 3 vertici, si ha:

$$\Omega_f(\mathbf{r}) = 2 \operatorname{atan} \left[\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r})}{D} \right] \quad (4.34)$$

con

$$D = \begin{aligned} & |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}| |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}| \quad + \\ & |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}| (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \quad + \\ & |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}| (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}) \quad + \\ & |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Concludendo si ottiene:

$$W''_f(\mathbf{r}) = -(\mathbf{r}_f - \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_f \Omega_f(\mathbf{r}) \quad (4.36)$$

In modo simile si può determinare anche il termine ∇W_f , che risulta:

$$\nabla W_f(\mathbf{r}) = \sum_{l_e \in \partial S_f} \hat{\mathbf{n}}_f \times \hat{\mathbf{u}}_e w_e(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{n}}_f \Omega_f(\mathbf{r}) \quad (4.37)$$

In conclusione il calcolo delle espressioni integrali $W_f, \nabla W_f$ si riconduce alla determinazione di parametri strettamente legati alla geometria dell'elemento sorgente e delle coordinate del punto di calcolo; queste informazioni sono note una volta definita la

mesh superficiale del plasma e la griglia dei punti di calcolo. A questo punto, una volta assegnato ad ogni elemento triangolare il vettore \mathbf{J} corrispondente, si è potuto svolgere numericamente le operazioni sopra descritte, ottenendo \mathbf{A} e \mathbf{B} su tutta la griglia di osservazione. Lo svantaggio di questo approccio è dovuto alle singularità delle formulazioni integrali: si osservi, ad esempio, che la (4.33) diverge nel momento in cui \mathbf{r} appartiene ad uno dei lati del triangolo (risulta infatti $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}| + |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$), come accade alla (4.34) ogni qualvolta si consideri un punto su di uno dei vertici. Al fine di evitare errori numerici in fase computazionale, specialmente in caso di valutazione del campo su punto molto vicini alle sorgenti, è preferibile sostituire alla norma euclidea $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ la norma modificata:

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|_\epsilon = \sqrt{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2 + \epsilon^2} \quad (4.38)$$

L'errore introdotto da questa modifica dipende dal valore del parametro ϵ : più ϵ è piccolo, minore è l'errore rispetto alla soluzione analitica del problema. Tuttavia si osservi che l'influenza di ϵ si manifesta solo per punti molto vicini all'elemento triangolare, mentre è di fatto trascurabile se $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \gg \epsilon$.

Un altro metodo per il calcolo di W_f e ∇W_f è stato proposto da [18] per lo specifico caso di elementi triangolari.

4.4.2 Risultati della simulazione

L'approccio numerico sopra descritto è stato implementato in uno script MATLAB, in modo da ricavare l'andamento del campo di induzione magnetica prodotto sulla parete interna del FW da un plasma con $m = 1, n = 7$ e assumendo $\psi_c^{mn} = \psi_s^{mn} = 1$. Una volta ottenuti i vettori \mathbf{B} del FW, questi sono stati proiettati nelle direzioni r, θ, ϕ , in modo da ottenere le componenti di induzione magnetica dovuta al plasma nel riferimento toroidale:

$$\begin{cases} B_{rad}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ B_\theta(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ B_\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{cases} \quad (4.39)$$

dove $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ sono i versori corrispondenti alle direzioni radiale, poloidale e toroidale, valutati nel punto \mathbf{r} secondo le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= (-\sin\theta\cos\phi, -\sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Si riporta infine la mappa del campo B_{rad} generato dal modo $m = 1, n = 7$ di RFX: come si può osservare dalla Fig.4.8 anche il campo di induzione magnetica segue un profilo elicoidale, mantenendo la stessa relazione tra il periodo poloidale m e quello toroidale n .

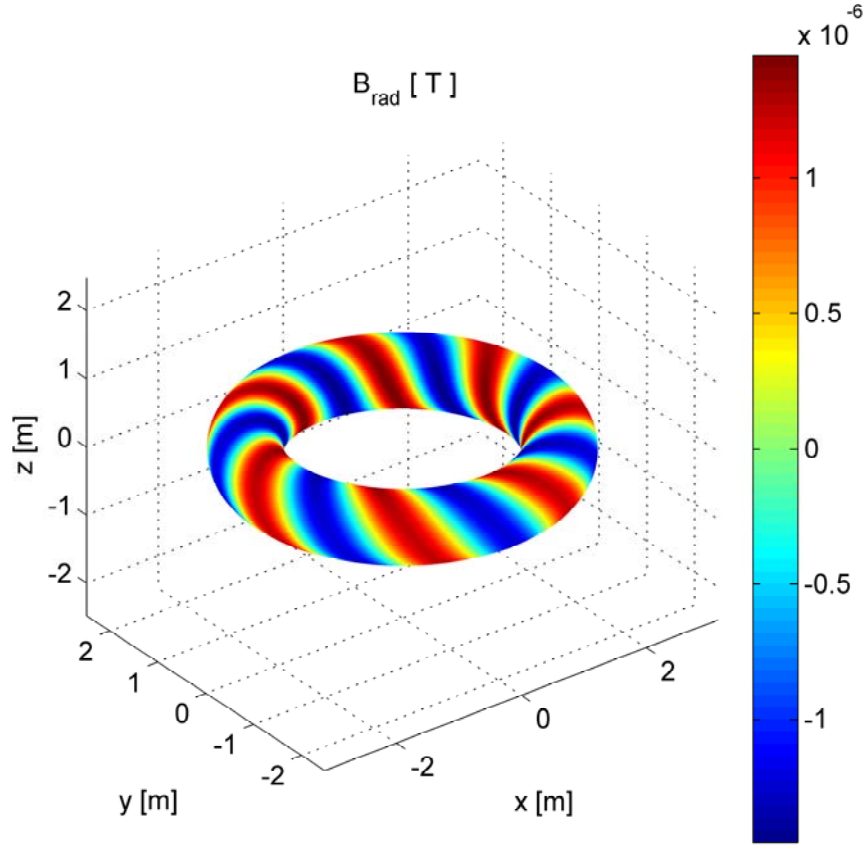


Fig. 4.8: Campo radiale prodotto dal plasma con modo $m = 1, n = 7$

4.5 Risposta della shell

Il plasma di RFX, come in altri esperimenti sul confinamento magnetico e la fusione nucleare, è in rotazione rispetto alla parete. Come conseguenza la distribuzione spaziale di corrente, esprimibile attraverso la funzione ψ^{mn} , risulta variare non solo in funzione delle coordinate spaziali θ, ϕ , ma anche del tempo. Ipotizzando, in prima approssimazione, un'oscillazione periodica con frequenza angolare ω della distribuzione di corrente, allora si può esprimere la (4.16) come:

$$\psi^{mn}(r^*, \theta, \phi, t) = \psi_c^{mn} \cos(m\theta + n\phi - \omega t) + \psi_s^{mn} \sin(m\theta + n\phi - \omega t) \quad (4.41)$$

In RFX la frequenza di rotazione del plasma è di qualche decina di Hz (nel caso in esame si è considerata $f = 20 Hz$). Ne segue un'induzione magnetica variabile nel tempo: le strutture conduttrici che circondano il plasma vedranno una variazione del flusso di induzione magnetica e saranno sede di correnti indotte. In questa sezione viene presentata un'analisi elettromagnetica svolta al fine di risolvere il problema di correnti indotte enunciato, con particolare attenzione all'effetto di queste in prossimità dei gap.

4.5.1 Formulazione integrale

La shell di RFX-mod2 ha uno spessore di 3 mm , il quale risulta inferiore allo spessore di penetrazione del campo magnetico alla frequenza di interesse. Per il rame infatti si ha:

$$\delta [\text{mm}] = \frac{66}{\sqrt{f}} \Big|_{f=20\text{ Hz}} = 14.7\text{ mm} \quad (4.42)$$

Si può quindi assumere la corrente indotta uniforme su tutto lo spessore della shell [19], permettendo di adottare un approccio integrale di superficie per la soluzione del problema: la shell è stata discretizzata mediante una mesh di elementi triangolari, formata da N nodi n_i (con $i = 1 \div N$), E lati e_j (con $j = 1 \div E$) e F facce triangolari f_k (con $k = 1 \div F$). Questi elementi spaziali formano un complesso semplice di celle $\bar{\mathbf{K}}^2$ a cui corrisponde un complesso duale $\tilde{\mathbf{K}}^2$ formato da F nodi \tilde{n}_k , E lati \tilde{e}_j e N facce \tilde{f}_i . Le celle che compongono il complesso duale sono state ricavate collegando i baricentri di ciascun triangolo primario ai punti intermedi dei lati che formano il corrispondente bordo (suddivisione *baricentrica* delle celle).

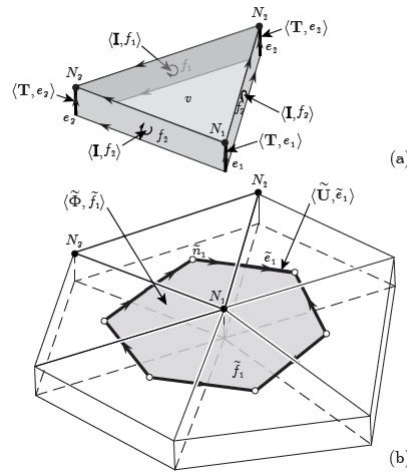


Fig. 4.9: Celle del complesso primario (a) e realizzazione di una cella duale (b)

Seguendo quanto descritto nel paragrafo 3.3 vengono definite le seguenti variabili globali:

- \mathbf{I} : vettore delle correnti incognite, avente sulla k -esima riga la corrente associata alla faccia $f_k \in \bar{\mathbf{K}}$;
- \mathbf{T} : vettore corrispondente all'integrale di linea del potenziale vettore elettrico su ogni lato e_j del complesso primario;
- $\tilde{\mathbf{U}}$: vettore delle forze elettromotrici (integrale di linea del campo elettrico) su ogni lato \tilde{e}_j del complesso duale;
- $\tilde{\Phi}$: vettore del flusso di campo magnetico attraverso le facce \tilde{f}_i del complesso duale, prodotto dalle correnti indotte;
- $\tilde{\mathbf{A}}_s$: vettore corrispondente all'integrale di linea del potenziale vettore magnetico su ogni lato \tilde{e}_j del complesso duale, dovuto alle correnti sorgenti (i.e. corrente di plasma).

Si osservi che le correnti incognite sono state definite per le sole facce “interne”, ovvero per quelle facce che non compongono il bordo del complesso, mentre per gli elementi $f_k \in \partial\bar{\mathbf{K}}$ si impone un valore di corrente nullo: attraverso questa condizione di contorno si impedisce alla corrente di uscire dal dominio definito dalla shell. Come conseguenza anche i coefficienti di \mathbf{T} , relativi a lati appartenenti a $\partial\bar{\mathbf{K}}$, verranno forzati ad essere nulli. \mathbf{T} viene anche indicata come *stream function*: ogni sua riga corrisponde ad un potenziale scalare (integrale del potenziale vettore elettrico lungo il lato e_j) e permette di definire la corrente associata a ciascuna faccia $f_k \in \bar{\mathbf{K}} - \partial\bar{\mathbf{K}}$. Dal momento che \mathbf{I} è solenoidale questa può essere espressa come [20]:

$$\mathbf{I} = \mathbf{C}\mathbf{T} + \mathbf{H}\mathbf{i} \quad (4.43)$$

dove \mathbf{i} è il vettore delle *correnti indipendenti* definito in accordo con [21], mentre in \mathbf{H} sono contenuti i generatori rappresentativi di un opportuno gruppo coomologico. Vista la complessità topologica della shell, dovuta alla presenza di gap e porte di apertura, la definizione di \mathbf{H} non è triviale ed è stata introdotta da P. Bettini e R. Specogna in [22].

Considerato un elemento \tilde{f}_i e ipotizzando una variazione delle sorgenti di campo con frequenza angolare ω , la *f.e.m.* indotta sul bordo di tale faccia può essere espressa come (*legge di Faraday-Neumann*):

$$\oint_{\partial\tilde{f}} \vec{E} \cdot d\mathbf{l} = -i\omega\tilde{\phi} - i\omega\tilde{\phi}_s \quad (4.44)$$

dove $\tilde{\phi}$ è il flusso concatenato dalla faccia e dovuto alle correnti indotte, mentre $\omega\tilde{\phi}_s$ rappresenta il contributo dovuto alle correnti sorgenti (plasma). Quest’ultimo termine, ricordando la (4.22) e applicando il teorema di Stokes, può essere riscritto come:

$$\omega\tilde{\phi}_s = \omega \int_{\tilde{f}_i} \vec{B}_s \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial\tilde{f}_i} \vec{A}_s \cdot d\mathbf{l} \quad (4.45)$$

dove \vec{A}_s è il potenziale vettore magnetico dovuto alle correnti di plasma[†] La legge di Faraday-Neumann, applicando l’associazione $\nabla \rightarrow \mathbf{G}$, $\nabla \times \rightarrow \mathbf{C}$, $\nabla \cdot \rightarrow \mathbf{D}$, può essere riscritta in forma discreta come:

$$\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{U}} + i\omega\tilde{\Phi} = -i\omega\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}_s \quad (4.46)$$

In modo analogo a quanto visto per il flusso dovuto alle correnti di plasma, si può esprimere anche $\tilde{\Phi}$ in funzione dell’integrale di linea del potenziale vettore magnetico $\tilde{\mathbf{A}}$ sul bordo delle facce \tilde{f} , dovuto alle correnti indotte sulla shell:

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}} \quad (4.47)$$

Introducendo le *matrici di resistenza* \mathbf{R} e di *riluttanza* \mathbf{M} [23] si ottengono le leggi costitutive in forma discreta:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} &= \mathbf{R}\mathbf{I} \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{M}\mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.48)$$

[†]NB: \vec{A}_s si riferisce al potenziale vettore magnetico calcolato in un punto, mentre $\tilde{\mathbf{A}}_s$ è una delle variabili globali del problema definita come sopra citato. Si è adottata la notazione vettoriale \vec{x} per distinguere il vettore definito nel punto considerato dalla variabile globale.

Sostituendo (4.43), (4.48) e (4.47) in (4.46) si ottiene:

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C}) \mathbf{T} + (\mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{H}) \mathbf{i} = -i\omega \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{A}}_s \quad (4.49)$$

dove si è introdotta $\mathbf{K} = \mathbf{R} + i\omega \mathbf{M}$ e l'identità $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^T$ in accordo con (3.2). La (4.46) è stata applicata agli elementi di bordo delle facce \tilde{f} , i quali sono duali a lati e del complesso primario: ogni riga di $\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{U}}$ contiene la *f.e.m.* indotta lungo il bordo dell'elemento \tilde{f}_i corrispondente. Si osservi che la legge di Faraday sarà quindi estendibile a un generico percorso (ciclo) formato da una combinazione di questi lati. Tuttavia il toro non rappresenta un dominio a connessione lineare semplice e non permette di applicare la (4.49) a qualunque percorso: ad esempio se si considerasse un ciclo tra due elementi appartenenti al bordo $\partial\tilde{\mathbf{K}}$, la funzione \mathbf{T} risulterebbe identicamente nulla su di essi, impedendo la valutazione di $\mathbf{C}\mathbf{T}$ [24]. Per ovviare a questo problema si sfruttano opportuni generatori coomologici, definendo per tali cicli una nuova equazione:

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{K} \mathbf{C}) \mathbf{T} + (\mathbf{H}^T \mathbf{K} \mathbf{H}) \mathbf{i} = -i\omega \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{A}}_s \quad (4.50)$$

4.5.2 Risultati della simulazione

Le (4.49) e (4.50) costituiscono due equazioni algebriche le quali, una volta fissate le variabili forzanti del problema, possono essere risolte nelle incognite \mathbf{T} e quindi, tramite la (4.43), si ottiene la distribuzione delle correnti indotte \mathbf{I} nella shell. I termini riga di $\tilde{\mathbf{A}}_s$ vengono determinati, una volta fissata la distribuzione di corrente \mathbf{J} sulla mesh superficiale di plasma, applicando la (4.27) ai lati \tilde{e} . La shell è stata discretizzata tramite 24404 elementi triangolari, corrispondenti a 12728 nodi. Si osservi in Fig.4.12 come il pattern delle correnti indotte tenda a seguire un profilo elicoidale, come di fatto ci si attende visto l'andamento del campo di induzione magnetica prodotto dal plasma. Tuttavia in corrispondenza dei gap, sia equatoriali che poloidali, quest'elica è interrotta dalla presenza dell'isolamento: ciò porta ad una modifica nella distribuzione delle correnti indotte, le quali tendono a concentrarsi in prossimità dei gap. Gli effetti di questa distribuzione di corrente sono visibili in Fig.4.10, dove è riportato il campo di induzione radiale $B_{rad,eddy}$ prodotto da queste ultime: il campo radiale tende a seguire un profilo elicoidale come quello di Fig.4.8 ma, in prossimità dei gap poloidali e toroidali, la presenza delle correnti indotte causa un'alterazione nella distribuzione del campo magnetico. In altre parole se si scomponesse $B_{rad,eddy}$ nelle sue armoniche spaziali, si troverebbe che questo non è più descritto dalle sole due armoniche in seno e coseno aventi $m = 1, n = 7$; di conseguenza la reazione di indotto non agisce in modo uniforme sul campo prodotto dal plasma e il campo risultante ($B_{rad,tot} = B_{rad,pla} + B_{rad,eddy}$) non corrisponde più ad un effettivo modo $m = 1, n = 7$. Si può osservare in Fig.4.11 come le correnti indotte hanno ridotto in modo uniforme il campo radiale su tutto il toroide ad eccezione dei gap, dove al contrario si nota una netta amplificazione del campo. La disuniformità di campo introdotta dai gap può innescare instabilità nel plasma o impedirne la rotazione. Per questo motivo è richiesta l'adozione di un sistema di correzione locale degli errori di campo magnetico, il quale verrà discusso nell'ultimo capitolo di questo elaborato.

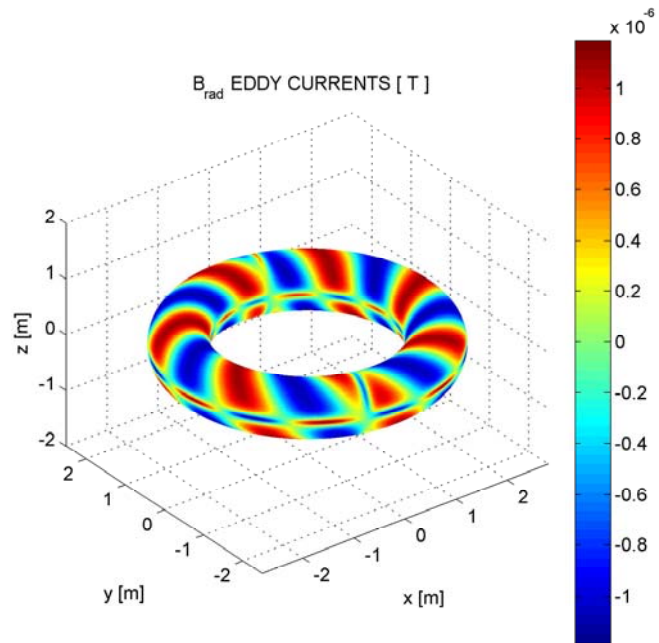


Fig. 4.10: Campo radiale prodotto dalle correnti indotte sulla shell

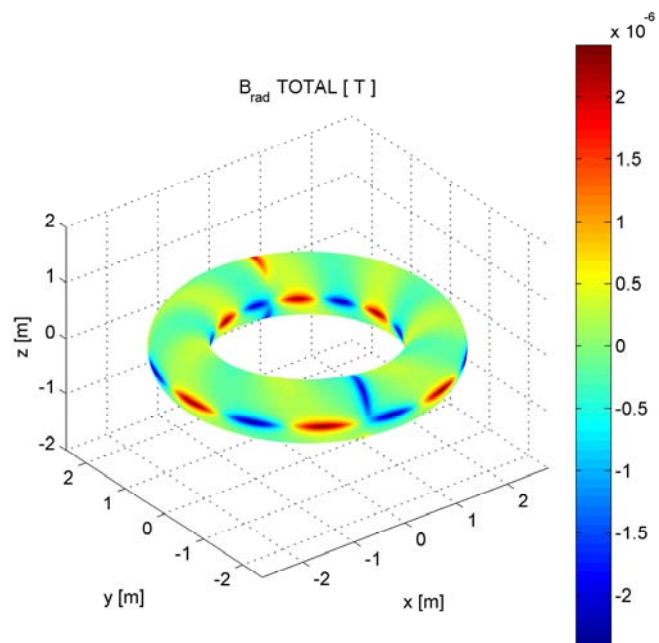


Fig. 4.11: Campo radiale risultante

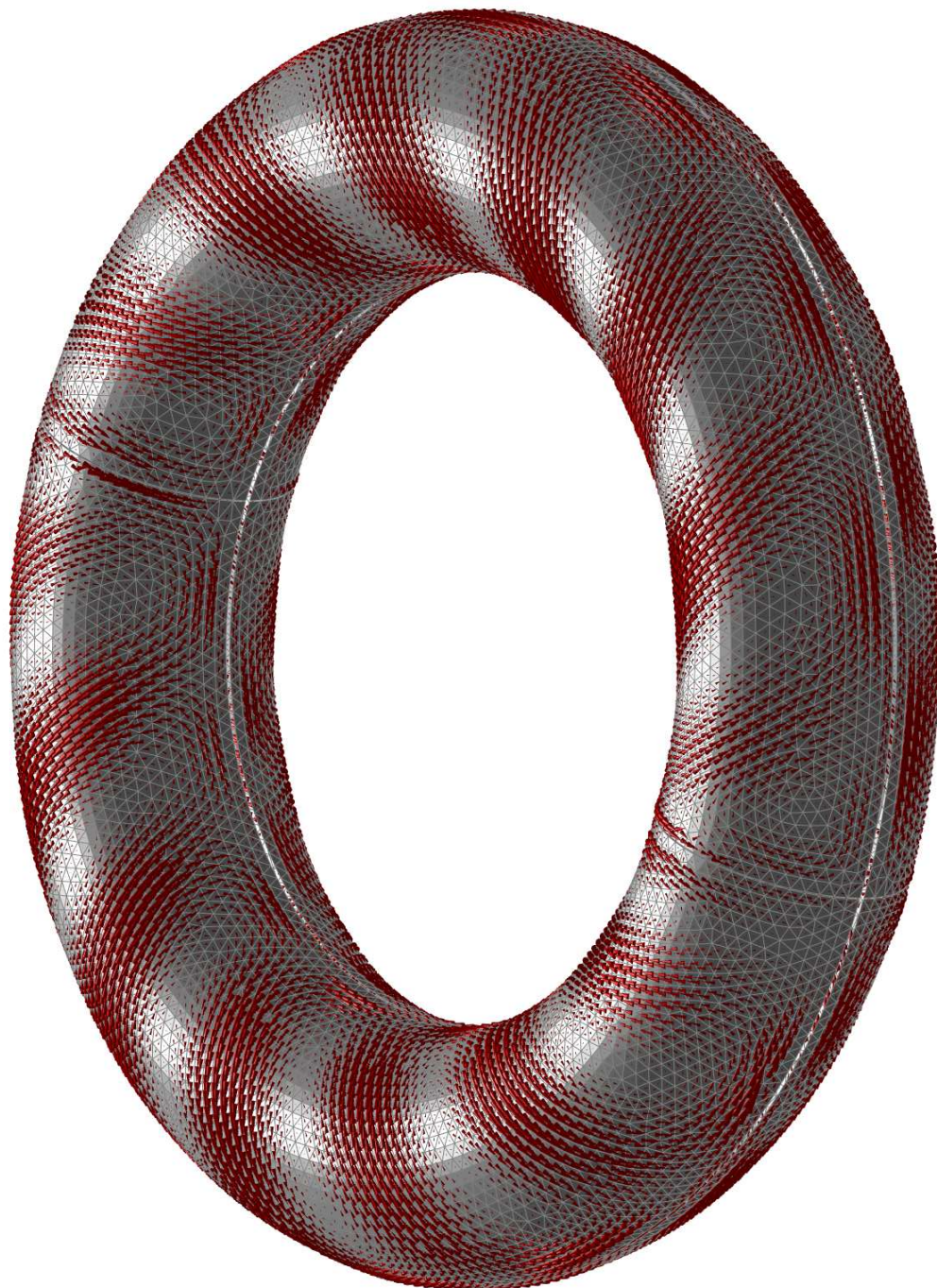


Fig. 4.12: Grafico vettoriale delle correnti indotte sulla shell

Capitolo 5

Fase di *ramp-up*

5.1 Descrizione del problema

Un'altra situazione di interesse per la valutazione degli errori di campo è costituita dalla fase di *ramp-up*, durante la quale il plasma viene acceso e viene portata la sua corrente sino al valore di *flat-top*. Durante questa fase tutti gli avvolgimenti di campo esibiscono un andamento temporale variabile della forza magnetomotrice, il che porta alla generazione di campi magnetici variabili nel tempo, quindi all'induzione di correnti nelle strutture metalliche conduttrici. La risposta di tali strutture, in particolare della shell vista la sua prossimità al plasma, è fondamentale per poter portare quest'ultimo ad una situazione di equilibrio stabile e con le proprietà fisiche volute: la presenza di errori di campo rispetto alla configurazione ideale può, ad esempio, innescare instabilità o impedire la rotazione del plasma rispetto alla parete (effetto di *braking torque*). Il problema di correnti indotte è stato risolto sfruttando il metodo delle celle presentato nel Capitolo3: il dominio tridimensionale D è stato discretizzato mediante un complesso $\bar{\mathbf{K}}^3$ di celle tridimensionali a forma di esaedro, da cui si è ricavato il complesso duale $\tilde{\mathbf{K}}^3$ mediante una suddivisione baricentrica delle facce delle celle primarie. Il dominio D è stato suddiviso in 3 sottoinsiemi: la regione passiva D_c formata dalle strutture conduttrici che circondano il plasma, la regione in aria non conduttiva D_a e la regione formata dalle sorgenti di campo (plasma e avvolgimenti esterni) D_s :

$$D = D_c \cup D_a \cup D_s \quad (5.1)$$

Il plasma è stato modellizzato mediante 12 correnti filamentari equivalenti, collocate in posizioni fisse rispetto al centro della macchina ($R = R_0, r = 0$). L'andamento temporale della corrente di plasma e degli avvolgimenti esterni è stata ricavata dal codice *MAXFEA* [25], il quale simula la configurazione magnetica RFP di equilibrio per una plasma a *2MA*. In questo caso si è considerata una configurazione assialsimmetrica, per cui le correnti equivalenti di plasma possono essere ricondotte ad un modo $n = 0$. L'insieme di queste correnti definisce la variabile globale *forzante* del problema $\tilde{\mathbf{I}}_s$, vettore che contiene la corrente associata ad ogni faccia duale $\tilde{f} \in D_s$. Le altre variabili globali del problema sono elencate in seguito:

- Φ vettore flussi magnetici associati alle facce $f \in D$
- $\tilde{\mathbf{F}}$ vettore forze magnetomotrici associate ai lati duali $\tilde{e} \in D$
- \mathbf{A} vettore degli integrali del potenziale vettore magnetico lungo i lati $e \in D$ (5.2)
- $\tilde{\mathbf{I}}$ vettore delle correnti associate alle facce duali $\tilde{f} \in D_c$
- \mathbf{U} vettore forze elettromotrici associate ai lati $e \in D_c$

Con riferimento alle 3 regioni in cui è stato scomposto il dominio, la *legge di Ampere* (3.11)* diventa:

$$\begin{cases} (\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{F}})_e = \mathbf{0} & e \in D_a \\ (\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{F}})_e = (\tilde{\mathbf{I}}_s)_e & e \in D_s \\ (\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{F}})_e = (\tilde{\mathbf{I}})_e & e \in D_c \end{cases} \quad (5.3)$$

La *legge di Faraday* in forma discreta di (3.11) può essere espressa in termini di vettore potenziale magnetico, se si considera l'espressione del flusso magnetico attraverso le facce f come già visto in (4.47):

$$(\mathbf{C}\mathbf{U})_f = -\frac{d}{dt}(\Phi)_f = -\frac{d}{dt}(\mathbf{C}\mathbf{A})_f \quad \text{con } f \in D_c \quad (5.4)$$

da cui si ottiene, una volta premoltiplicati ambo i membri per \mathbf{C}^{-1} :

$$(\mathbf{U})_e = -\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_e \quad \text{con } e \in D_c \quad (5.5)$$

Infine, introducendo le leggi costitutive (3.12) (a) e (c) nelle (5.3) e ricordando (3.2) si ottiene:

$$\begin{cases} (\mathbf{C}^T\mathbf{M}_\nu\mathbf{C}\mathbf{A}(t))_e = \mathbf{0} & e \in D_a \\ (\mathbf{C}^T\mathbf{M}_\nu\mathbf{C}\mathbf{A}(t))_e = \tilde{\mathbf{I}}_s(t) & e \in D_s \\ (\mathbf{C}^T\mathbf{M}_\nu\mathbf{C}\mathbf{A}(t))_e + (\mathbf{M}_\sigma\frac{d}{dt}\mathbf{A}_c(t))_e = \mathbf{0} & e \in D_c \end{cases} \quad (5.6)$$

dove $\mathbf{A}_c(t)$ rappresenta la restrizione di $\mathbf{A}(t)$ ai soli lati $e \in D_c$. Il vettore $\tilde{\mathbf{I}}_s(t)$ può essere espresso come $\tilde{\mathbf{I}}_s(t) = \tilde{\mathbf{I}}_s \cdot s(t)$, dove $\tilde{\mathbf{I}}_s$ è un vettore di termini costanti (si veda [26] per la sua computazione), mentre $s(t)$ ne descrive l'andamento temporale. Risulta inoltre conveniente riscrivere il vettore \mathbf{A} come $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_r$, così da distinguere il contributo dovuto alle correnti sorgenti presenti in D_s (\mathbf{A}_0), da quello dovuto alle correnti indotte presenti in D_c (\mathbf{A}_r). Le (5.6), dopo alcuni passaggi algebrici, possono essere riscritte come:

$$\begin{cases} (\mathbf{C}^T\mathbf{M}_\nu\mathbf{C}\mathbf{A}_r(t))_e = \mathbf{0} & e \in D_a \cup D_s \\ (\mathbf{C}^T\mathbf{M}_\nu\mathbf{C}\mathbf{A}_r(t))_e + (\mathbf{M}_\sigma\frac{d}{dt}\mathbf{A}_{rc}(t))_e = -(\mathbf{w}(t))_e & e \in D_c \end{cases} \quad (5.7)$$

dove $(\mathbf{w}(t))_e = \mathbf{M}_\sigma\mathbf{A}_{0c}\frac{ds(t)}{dt}$. Ogni riga di \mathbf{A}_{0c} corrisponde all'integrale di linea del potenziale vettore magnetico \vec{A}_0 , lungo il lato $e \in D_c$, dovuto alle correnti sorgente in D_s :

$$(\mathbf{A}_{0c})_e = \int_e \vec{A}_0 \cdot d\mathbf{l} \quad (5.8)$$

Definite le correnti sorgenti e calcolato il vettore \mathbf{A}_{0c} , sfruttando ad esempio l'espressione di Biot-Savart (4.26), può essere risolto il sistema di equazioni algebriche (5.7).

5.2 Effetto delle correnti indotte

Il problema di correnti indotte è stato risolto numericamente, scomponendo la regione conduttiva formata da shell e TSS in un totale di 310768 esaedri, di cui 135864 per

*Il termine associato alla variazione del campo elettrico può essere trascurato dal momento che la frequenza con cui variano i campi è relativamente bassa.

la prima e 174904 per la seconda. Sono state meshate anche le altre due regioni, D_s e D_a , per un totale di 1781088 elementi volumici e 1791196 nodi. Dato l'andamento delle amperspire negli avvolgimenti di campo poloidale e nel plasma, fornito dal codice MAXFEA, si sono considerati 3 istanti temporali durante la scarica completa simulata (circa 500 ms): $t_1 = 5\text{ ms}$, $t_2 = 20\text{ ms}$, durante il *ramp-up* e $t_3 = 100\text{ ms}$ nella fase di *flat-top*.



Fig. 5.1: Dettaglio della mesh su PSS e TSS

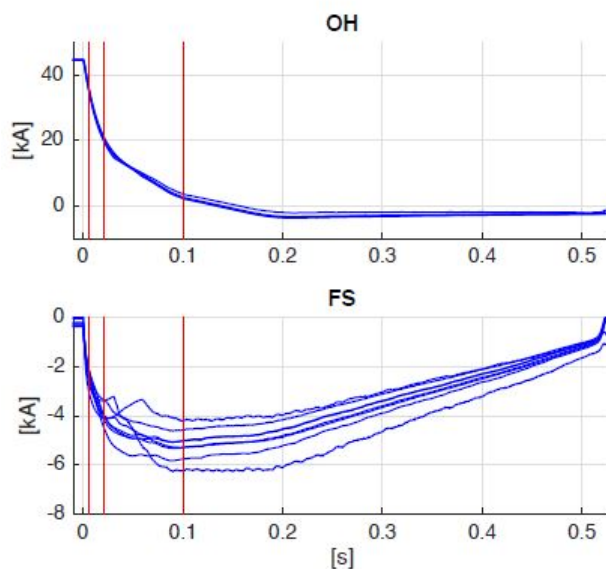


Fig. 5.2: Andamento della forza magnetomotrice sugli avvolgimenti di campo poloidale (OH + FS)

L'analisi elettromagnetica svolta ha permesso di valutare l'effetto delle correnti indotte in termini di campo errore ai gap. Come si può vedere dalla Fig.5.5 (a), il campo radiale in corrispondenza del gap poloidale a $\phi = 93.75^\circ$, valutato sulla superficie interna del FW ($a = 0.489\text{ m}$), assume un'andamento all'incirca sinusoidale. Se si considerano le diverse sorgenti di campo (plasma, avvolgimenti PF, shell) si può esprimere tale componente radiale come la somma dei contributi dovuti a queste diverse sorgenti:

$$B_{rad,FW} = B_{rad,pla} + B_{rad,PF} + B_{rad,shell} \quad (5.9)$$

Nell'ipotesi in cui il plasma sia perfettamente centrato nella shell, allora la parete interna del FW corrisponde ad una superficie di flusso e, come visto nel capitolo iniziale, il plasma non fornisce alcuna componente B_{rad} normale a tale superficie. Se si considera l'istante t_2 allora il contributo dato dall'avvolgimento magnetizzante è quasi esaurito (Fig.5.2), per cui sarà sostanzialmente il campo verticale imposto dagli avvolgimenti di equilibrio a determinare la componente radiale e, considerato un campo verticale uniforme, si potrà esprimere $B_{rad,FW}$ come segue:

$$B_{rad,FW}(\theta) = -B_v \sin\theta + B_{rad,shell} \quad (5.10)$$

dove B_v indica l'ampiezza del campo verticale esterno, orientato come in Fig.5.3.

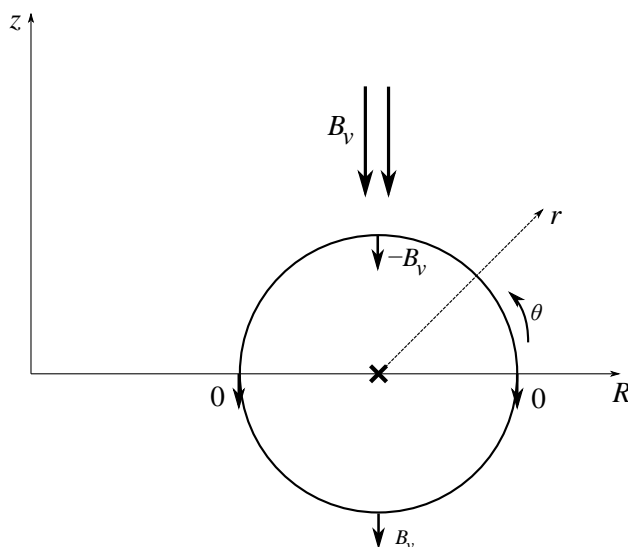


Fig. 5.3: Componente di campo radiale dovuta al campo verticale esterno B_v

Tuttavia, a causa delle correnti indotte nella shell, l'andamento del campo radiale risulta nettamente amplificato in corrispondenza del gap poloidale, con il massimo scostamento per $\theta = 90^\circ$ e $\theta = 270^\circ$ (circa $\pm 50 mT$). Raggiunta la fase di *flat-top*, a $t_3 = 100 ms$, le correnti indotte sono quasi completamente decadute, come dimostra l'andamento del campo radiale, il quale si discosta molto meno ($\Delta B_{rad,max} = \pm 10 mT$) dal riferimento e la mappa di campo torna ad assumere un andamento di fatto uniforme (Fig.??). Nonostante le correnti indotte decadano molto rapidamente (si ricorda $\tau_v = 50 ms$), durante la fase di *ramp-up* si hanno errori di campo non trascurabili: un sistema di correzione locale di tali errori è inevitabilmente richiesto se si vogliono raggiungere i traguardi fissati.

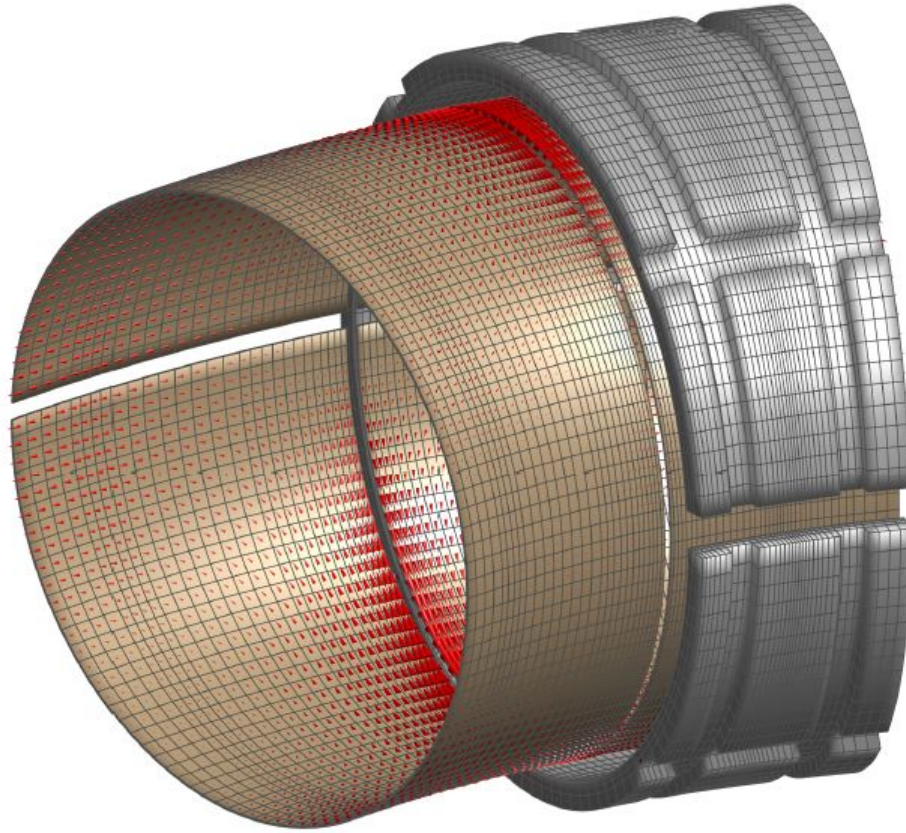
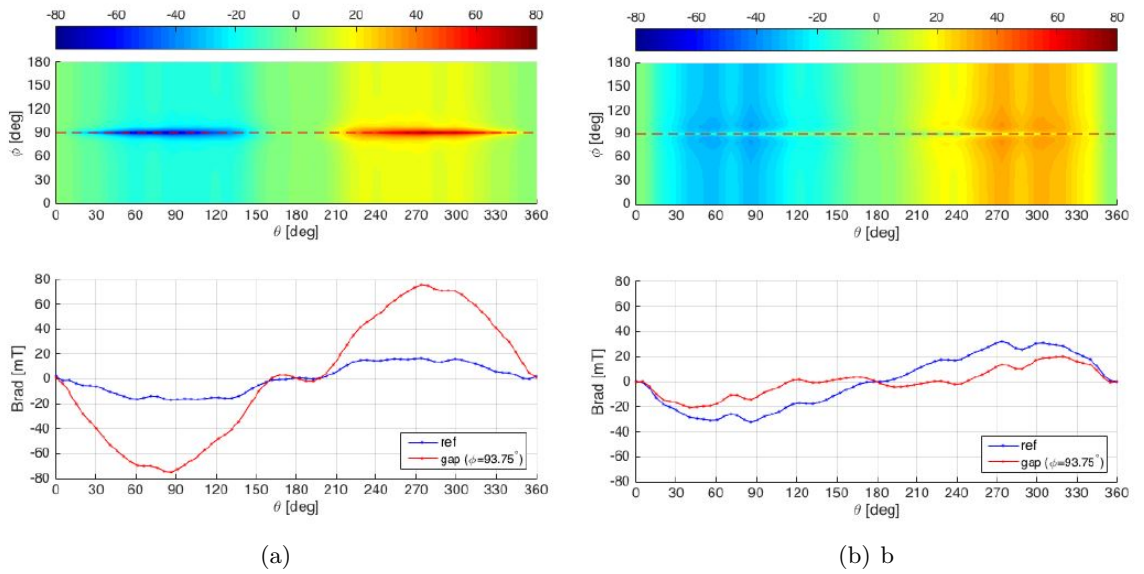


Fig. 5.4: Grafico vettoriale delle correnti indotte sulla shell

Fig. 5.5: Campo radiale B_{rad} [mT] sul bordo plasma in corrispondenza del gap a $t_2 = 20$ ms e $t_3 = 100$ ms

Capitolo 6

Sistema di correzione locale

Il sistema di correzione locale proposto è costituito da due set di bobine a sella disposte a cavallo dei gap poloidali, in modo tale che l'asse delle bobine si trovi allineato con il gap stesso. Ciascun set è composto da un totale di 12 bobine, numerate da 1 a 12 secondo il verso positivo dell'angolo poloidale. Ogni bobina si estende per $\Delta\theta = 30^\circ$ in direzione poloidale e per $\Delta\phi = 7.5^\circ$ in quella toroidale, ha una sezione di $24 \times 12 \text{ mm}^2$ ed è separata dall'adiacente da uno spessore di 2 mm di materiale isolante. Si sono prese in considerazione due possibili alternative: un set A di bobine collocate sulla superficie esterna della TSS (come già adottato per le bobine di controllo MHD in RFX-mod) e un set B più vicino al plasma, collocato sulla superficie esterna della shell. L'asse della i -esima bobina ($i = 1 \div 12$) occupa quindi una posizione individuata, in coordinate toroidali, dalla terna (r^*, θ, ϕ) come riportato in tabella:

| set bobine | $r [m]$ | $\theta [^\circ]$ | $\phi [^\circ]$ |
|------------|---------|---------------------|-----------------|
| A1 | 0.62 | $(k-1)\Delta\theta$ | 93.75 |
| A2 | 0.62 | $(k-1)\Delta\theta$ | 273.75 |
| B1 | 0.53 | $(k-1)\Delta\theta$ | 93.75 |
| B2 | 0.53 | $(k-1)\Delta\theta$ | 273.75 |
| sensori | 0.489 | $(k-1)\Delta\theta$ | 93.75 |

Tabella 6.1: Coordinate degli assi delle 12 bobine di correzione

Si noti che, a causa della toroidicità della macchina, le bobine non sono tra loro tutte uguali, come invece si avrebbe in geometria cilindrica, ma sono a coppie simmetriche rispetto all'asse equatoriale (2–12, 3–11, 4–10, 5–9, 6–8) ad eccezione della 1 e della 7. In prima analisi si sono confrontate le prestazioni dei due set proposti trascurando la risposta delle strutture metalliche conduttrici. A tale scopo si è svolta un'analisi in regime stazionario, ipotizzando di alimentare ciascuna bobina con una corrente continua di 1 A . Sono stati realizzati 12 sensori fittizi, ottenuti proiettando le linee guida delle 12 bobine su una superficie toroidale corrispondente al bordo plasma ($a = 0.489 \text{ m}$), quindi è stato calcolato il flusso concatenato da ciascun sensore e il campo radiale in corrispondenza del proprio asse.

*raggio medio: distanza radiale media dal centro della sezione poloidale.

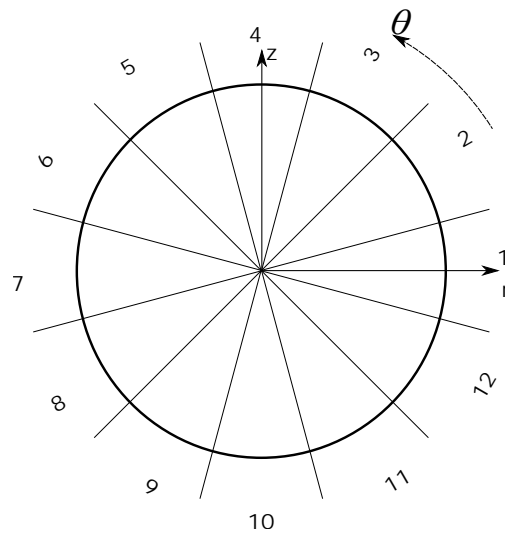


Fig. 6.1: Rappresentazione schematica delle 12 bobine sulla sezione poloidale del gap

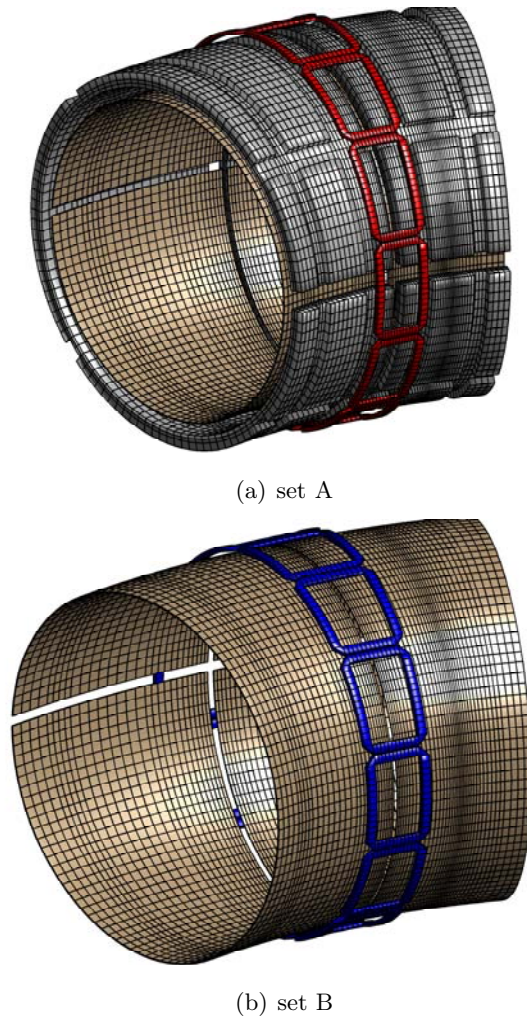


Fig. 6.2: Collocazione dei due set di bobine proposti (in oro la shell, in grigio la TSS)

6.1 Calcolo del campo radiale

Il calcolo del campo di induzione magnetica \mathbf{B} e del potenziale vettore \mathbf{A} , generato da una generica bobina di compensazione, può essere svolto approssimando la spira tramite una sequenza discreta di elementi rettilinei filiformi, ciascuno portante la medesima corrente, connessi l'uno con l'altro in modo da formare un poligono chiuso. Indicati con \mathbf{B}_k e \mathbf{A}_k i contributi di campo dovuti all'elemento k -esimo della bobina, il totale campo prodotto da quest'ultima sarà dato da:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n_{sticks}} \mathbf{A}_k(\mathbf{r}) \quad (6.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n_{sticks}} \mathbf{B}_k(\mathbf{r}) \quad (6.2)$$

dove n_{sticks} indica il numero totale di elementi ("bastoncini", *sticks*) in cui è suddivisa la bobina e \mathbf{r} il vettore posizione nel punto di calcolo. Chiaramente maggiore è n_{sticks} maggiore è l'accuratezza, ma comporta anche un maggior onere computazionale. In questo modo si possono calcolare i campi prodotti da bobine di forme complesse, con buona efficienza computazionale.

Si consideri un generico elemento della bobina, avente origine in $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ e fine in $\mathbf{r}_f = (x_f, y_f, z_f)$ [†]. Si definiscono:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' & \text{ vettore sorgente di corrente } \mathbf{J} \text{ lungo il segmento} \\ L = |\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i| & \text{ lunghezza segmento} \\ \hat{\mathbf{e}} = (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i) / L & \text{ versore orientato lungo il segmento} \\ \mathbf{R}_{i(f)} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{i(f)} & \text{ vettore tra estremi elemento e punto di calcolo} \\ R_{i(f)} = |\mathbf{R}_{i(f)}| & \text{ modulo del precedente vettore} \\ R_{i(f)\parallel} = \mathbf{R}_{i(f)} \cdot \hat{\mathbf{e}} & \text{ componente di } \mathbf{R}_{i(f)} \text{ parallela al segmento} \end{aligned}$$

Il vettore \mathbf{r}' può essere parametrizzato lungo il segmento come:

$$\mathbf{r}'(\lambda) = \mathbf{r}_i + \lambda(\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i) = \mathbf{r}_i + \lambda L \hat{\mathbf{e}} \quad (6.3)$$

con $0 < \lambda < 1$. Il contributo di campo dato dall'elemento può essere ricavato applicando la *legge di Biot-Savart*, la cui espressione in termini di potenziale vettore è data dalla (4.26), che considerata la (6.3) diventa:

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^1 \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') L \hat{\mathbf{e}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i - \lambda L \hat{\mathbf{e}}|} d\lambda \quad (6.4)$$

Assumendo che $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ sia costante lungo l'elemento filiforme (i.e. lungo λ) si ottiene:

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} L \hat{\mathbf{e}} \int_0^1 \frac{d\lambda}{|\mathbf{R}_i - \lambda L \hat{\mathbf{e}}|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} L \hat{\mathbf{e}} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{R_i^2 - 2\lambda L R_{i\parallel} + \lambda^2 L^2}} \quad (6.5)$$

[†]Le equazioni in seguito presentate valgono per un sistema di riferimento di assi cartesiani: le coordinate delle sorgenti di campo e dei punti di calcolo, note nel sistema di riferimento toroidale, saranno trasformate nelle corrispondenti coordinate cartesiane tramite le (1.15).

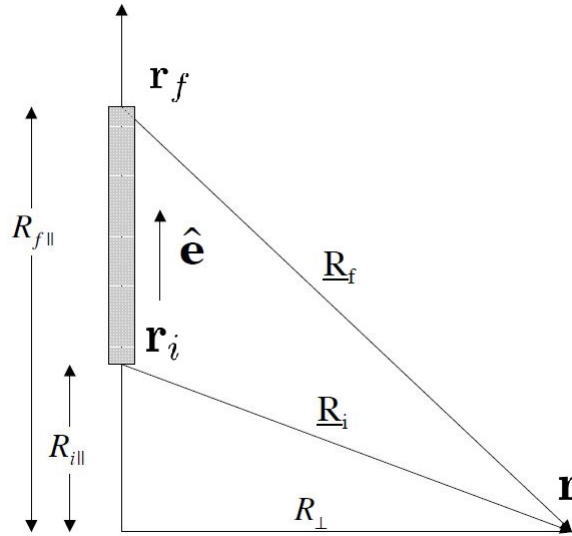


Fig. 6.3: Elemento rettilineo filiforme e principali grandezze spaziali

dove I è la corrente totale lungo il segmento filiforme considerato. Tralasciando i successivi passaggi analitici [27] si giunge all'espressione per il potenziale vettore e il campo di induzione magnetica:

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \right) \hat{\mathbf{e}} \quad (6.6)$$

$$\mathbf{B}_k(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\epsilon}{(1 - \epsilon^2) R_i R_f} \hat{\mathbf{e}} \times \mathbf{R}_i \quad (6.7)$$

dove $\epsilon = \frac{L}{R_i + R_f}$. Si osservi che per $\epsilon = 1$ l'integrale diverge: ciò si verifica quando il punto di calcolo \mathbf{r} giace sull'elemento, da cui deriva che $L = R_i + R_f$, non permettendo di determinare \mathbf{A} e \mathbf{B} in corrispondenza di tali punti. L'espressione (6.7) è stata implementata in uno script *MATLAB* e si è calcolato il campo di induzione magnetica radiale negli assi dei 12 sensori, aventi le coordinate \mathbf{r}_{axis} indicate nell'ultima riga della Tabella 6.1, sommando il contributo di tutte le bobine di compensazione interne e esterne separatamente:

$$B_{rad}(\mathbf{r}_{axis}) = \sum_{i=1}^{12} \sum_{k=1}^{n_{sticks}} \mathbf{B}_{i,k}(\mathbf{r}_{axis}) \cdot \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{r}_{axis}) \quad (6.8)$$

dove $\mathbf{B}_{i,k}$ è il contributo del k -esimo elemento della i -esima bobina e $\hat{\mathbf{r}}$ è il versore orientato secondo la direzione radiale nel punto \mathbf{r}_{axis} considerato. Ciascuna bobina è stata modellizzata tramite n_{stick} parallelepipedi di sezione uguale a quella della bobina stessa, suddivisi in n_{pol} elementi lungo ciascun lato poloidale (tratto della spira giacente su un piano a ϕ costante) e in n_{tor} lungo ciascun lato toroidale (formato da punti a $\theta = cost$). Quindi ogni spira è stata approssimata da una sequenza di segmenti filiformi, aventi come estremi i baricentri delle facce che delimitano tali parallelepipedi.

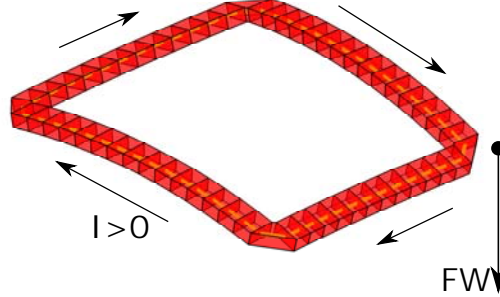


Fig. 6.4: Modellizzazione delle bobine di compensazione (in giallo gli elementi filiformi)

I risultati della simulazione sono riportati nella Tabella 6.2[‡]: tutti i sensori rilevano una componente radiale negativa (i.e. entrante rispetto alla superficie del FW) in accordo con la convenzione di segno assunta per la corrente sulle bobine (vedi Fig. 6.4). Si può osservare come l'ampiezza del campo generato dalle bobine del set A risulti, dall'82% al 196% circa, inferiore rispetto a quella dovuta alle bobine del set B. Questa ampia differenza è giustificata dalla maggiore distanza delle bobine più esterne dal bordo plasma rispetto a quelle più interne. Con riferimento ai dati in Tabella 6.1 la distanza radiale media tra bobine e FW risulta di 0.13 m per il set A, circa 3 volte quella per il set B (0.041 m). Si noti che i valori riportati sono uguali a coppie alterne, in accordo con la simmetria delle bobine rispetto al piano equatoriale.

| sensor | $B_{rad} A [T]$ | $B_{rad} B [T]$ | $\Delta B_{rad} [\%]$ |
|--------|-----------------|-----------------|-----------------------|
| 1 | -1.5603288e-06 | -2.8534141e-06 | -82.873 |
| 2 | -1.5645882e-06 | -2.9094297e-06 | -85.955 |
| 3 | -1.5685361e-06 | -3.0765867e-06 | -96.144 |
| 4 | -1.5489258e-06 | -3.3431321e-06 | -115.836 |
| 5 | -1.4862510e-06 | -3.6606174e-06 | -146.299 |
| 6 | -1.4011611e-06 | -3.9264934e-06 | -180.231 |
| 7 | -1.3594868e-06 | -4.0298511e-06 | -196.424 |
| 8 | -1.4011611e-06 | -3.9264934e-06 | -180.231 |
| 9 | -1.4862510e-06 | -3.6606174e-06 | -146.299 |
| 10 | -1.5489258e-06 | -3.3431321e-06 | -115.836 |
| 11 | -1.5685361e-06 | -3.0765867e-06 | -96.144 |
| 12 | -1.5645882e-06 | -2.9094297e-06 | -85.955 |

Tabella 6.2: Campo radiale misurato sull'asse dei sensori, dovuto ai due set di bobine (corrente di 1 A)

$$^{\ddagger} \Delta B_{rad} = \frac{B_{rad,A} - B_{rad,B}}{B_{rad,A}} \cdot 100$$

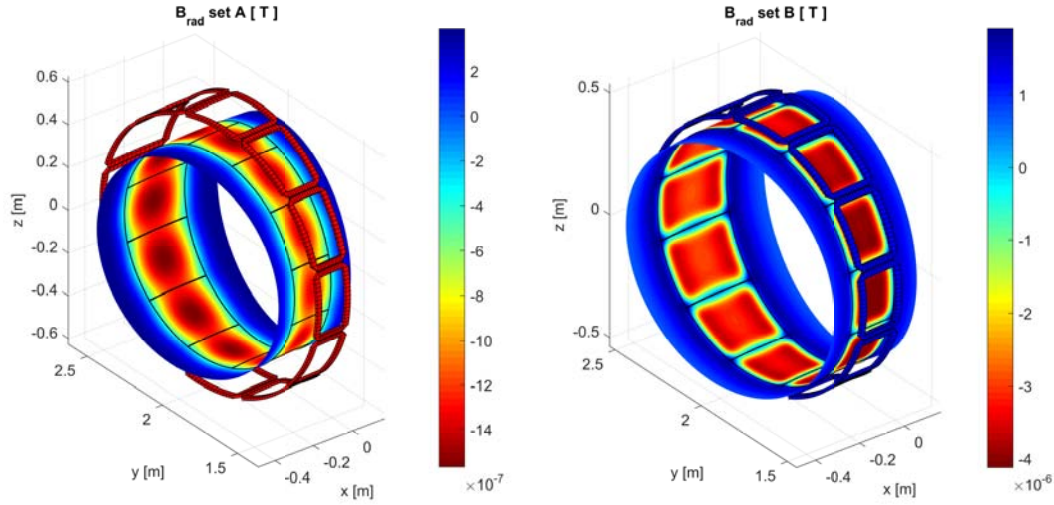


Fig. 6.5: Confronto dell'andamento del campo radiale prodotto dai due set di bobine

Dal confronto di Fig.6.5[§] si può notare che, con il set B, il campo radiale assume i valori più elevati su una regione spaziale più ampia rispetto a quanto avviene con il set A: le linee di campo \mathbf{B} divergono molto non appena ci si allontani dal centro della bobina, come visualizzato in Fig.6.6, portando ad una riduzione del campo radiale già dopo pochi centimetri dalla superficie toroidale su cui giace il set di bobine.

6.2 Flusso concatenato

In secondo luogo si sono confrontati i due set di bobine in termini di flusso concatenato. Si sono considerati dei sensori ideali, formati da tratti filiformi, aventi un'estensione poloidale $\Delta\theta = 30^\circ$ e un'estensione toroidale $\Delta\phi = 7.5^\circ$, in modo da riprodurre la forma delle bobine proiettata su una superficie toroidale di raggio minore pari a $0.489m$ (si è trascurato in questo caso lo spessore di isolamento tra una sonda e l'altra). Si consideri la definizione di flusso di induzione magnetica:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.9)$$

dove \mathbf{n} è il versore normale alla superficie S del sensore. Considerando la (4.22) e applicando il teorema di Stokes l'espressione di Φ diviene:

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl \quad (6.10)$$

dove \mathbf{t} è il versore tangente al bordo ∂S del sensore. Il calcolo dell'integrale di linea (6.10) può essere svolto scomponendo il bordo in 4 tratti, sfruttando la geometria del sensore: 2 di questi, indicati con *pol1* e *pol2*, sono composti da punti a $\phi = cost$, mentre i restanti 2, *tor1* e *tor2*, sono caratterizzati da punti a $\theta = cost$. L'espressione (6.10)

[§]La mappa di campo B_{rad} è stata ottenuta dalla valutazione del campo \mathbf{B} su una mesh rettangolare, disposta sulla superficie interna del FW.

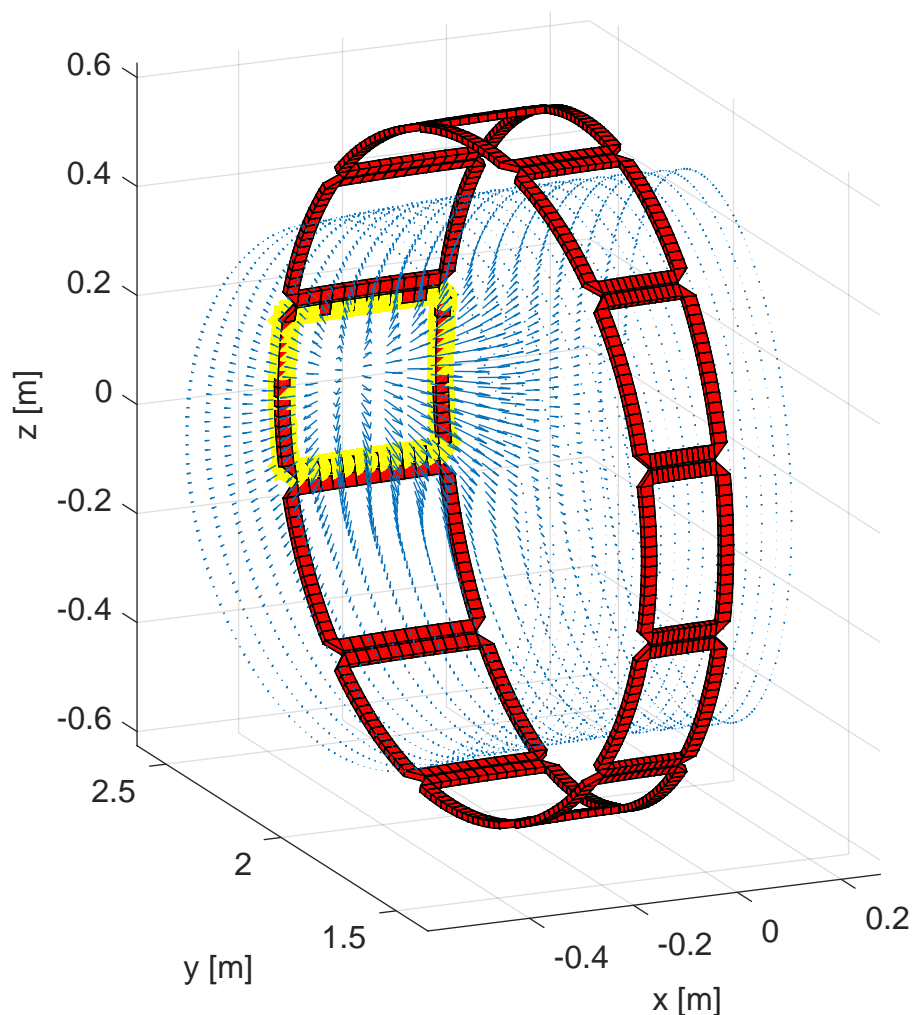


Fig. 6.6: Andamento dei vettori di campo \mathbf{B} prodotti da una sola bobina di compensazione (evidenziata in giallo)

viene così scomposta in:

$$\Phi = - \int_{pol1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_e dl - \int_{tor1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_e dl + \int_{pol2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_e dl + \int_{tor2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_e dl \quad (6.11)$$

dove ora \mathbf{t}_e indica il vettore unitario tangente al lato considerato (*edge*) e orientato nel verso positivo della direzione θ o ϕ su cui si sviluppa quel lato. Assumendo come orientazione del bordo ∂S quella per cui il flusso Φ risulta positivo se uscente, allora il versore \mathbf{t} sarà orientato come in Fig.6.7; di conseguenza il segno degli integrali lungo *pol1* e *tor1* dovrà essere invertito (in altre parole $\mathbf{t} = \mathbf{t}_e$ lungo *pol2* e *tor2*, mentre $\mathbf{t} = -\mathbf{t}_e$ lungo *pol1* e *tor1*).

Si osservi che, per i lati in direzione poloidale, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_e$ rappresenta la componente A_θ del potenziale vettore magnetico, mentre per i lati in direzione toroidale tale quantità

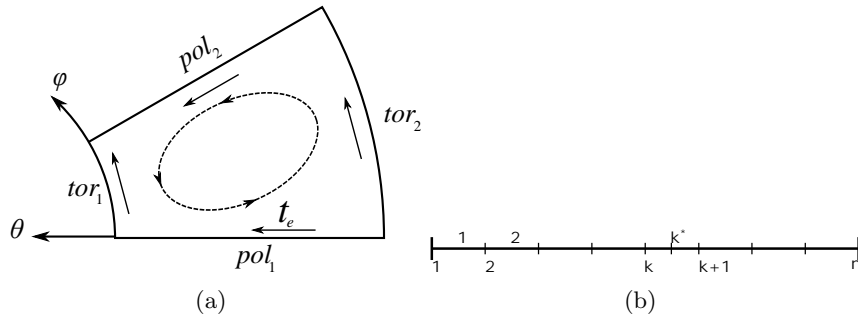


Fig. 6.7: Rappresentazione schematica di un sensore e suddivisione di un lato

corrisponde alla componente A_ϕ :

$$\Phi = - \int_{pol1} A_\theta dl - \int_{tor1} A_\phi dl + \int_{pol2} A_\theta dl + \int_{tor2} A_\phi dl \quad (6.12)$$

Da un punto di vista computazionale il calcolo di ciascun integrale può essere svolto in forma discreta, considerando n punti equamente spazati per il generico lato l_e , i quali a loro volta delimitano $n - 1$ tratti di uguale lunghezza Δl . Assumendo che il vettore potenziale magnetico assuma un valore costante lungo il tratto k -esimo, l'integrale di linea lungo un generico lato l_e viene approssimato come segue:

$$\int_{l_e} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_e \simeq \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{t}_e \Delta l \quad (6.13)$$

dove \mathbf{A}_k è il potenziale vettore magnetico associato al k -esimo elemento e calcolato nel punto medio \mathbf{r}_{k*} tra i punti estremi \mathbf{r}_k e \mathbf{r}_{k+1} . Si noti che per i lati $pol1$ e $pol2$, essendo questi caratterizzati da punti aventi tutti le medesime coordinate toroidali r, ϕ si avrà:

$$\mathbf{r}_{k*} = \left(0.489, \frac{\theta_k + \theta_{k+1}}{2}, \phi_0 - \frac{\Delta\phi}{2} \right) \quad pol1 \quad (6.14)$$

$$\mathbf{r}_{k*} = \left(0.489, \frac{\theta_k + \theta_{k+1}}{2}, \phi_0 + \frac{\Delta\phi}{2} \right) \quad pol2 \quad (6.15)$$

In modo complementare le coordinate dei punti lungo i lati $tor1$ e $tor2$ saranno:

$$\mathbf{r}_{k*} = \left(0.489, \theta_0 + \frac{\Delta\theta}{2}, \frac{\phi_k + \phi_{k+1}}{2} \right) \quad tor1 \quad (6.16)$$

$$\mathbf{r}_{k*} = \left(0.489, \theta_0 - \frac{\Delta\theta}{2}, \frac{\phi_k + \phi_{k+1}}{2} \right) \quad tor2 \quad (6.17)$$

Si riportano in seguito i flussi concatenati dai sensori e stimati con il metodo precedentemente descritto:

anche in questo caso si può osservare come le bobine più esterne diano un contributo nettamente inferiore in termini di flusso ai sensori, con una riduzione percentuale tra il set B e il set A che oscilla dal 100% al 170% circa.

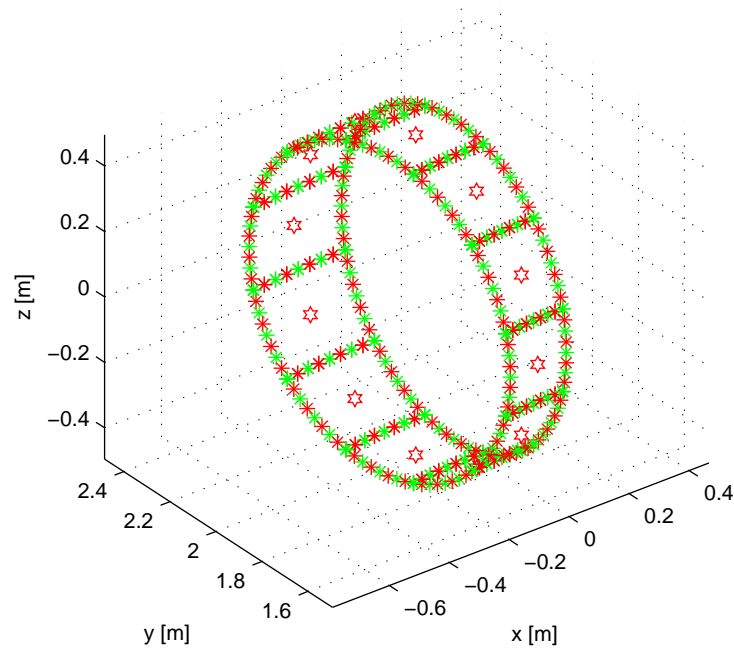


Fig. 6.8: Visione completa del sistema di sensori (in rosso i punti di calcolo)

| sensor | $\Phi A [Wb]$ | $\Phi B [Wb]$ | $\Delta\Phi [\%]$ |
|--------|----------------|----------------|-------------------|
| 1 | -8.9840608e-08 | -1.8010170e-07 | -100.468 |
| 2 | -8.7443905e-08 | -1.7731325e-07 | -102.774 |
| 3 | -8.0609046e-08 | -1.6931513e-07 | -110.045 |
| 4 | -7.0530400e-08 | -1.5735089e-07 | -123.097 |
| 5 | -5.9495537e-08 | -1.4390622e-07 | -141.877 |
| 6 | -5.0757582e-08 | -1.3288620e-07 | -161.806 |
| 7 | -4.7414988e-08 | -1.2855542e-07 | -171.128 |
| 8 | -5.0757582e-08 | -1.3288620e-07 | -161.806 |
| 9 | -5.9495537e-08 | -1.4390622e-07 | -141.877 |
| 10 | -7.0530400e-08 | -1.5735089e-07 | -123.097 |
| 11 | -8.0609046e-08 | -1.6931513e-07 | -110.045 |
| 12 | -8.7443905e-08 | -1.7731325e-07 | -102.774 |

Tabella 6.3: Flusso concatenato dai sensori, dovuto ai due set di bobine (corrente di 1 A)

6.3 Considerazioni

Le prestazioni dei due set di bobine confrontati sono nettamente a favore del set B, vista la sua maggiore prossimità al FW. Questo ha un'importante impatto in termini di consumo energetico: essendo il circuito magnetico costituito da materiali lineari come aria e rame, (i.e. la riluttanza del circuito magnetico equivalente è indipendente dai valori di induzione magnetica) allora la forza magnetomotrice necessaria per compensare un dato campo radiale di errore $B_{rad,err}$ cresce linearmente con la sua ampiezza. In altre parole se $B_{rad,1}$ è il campo ottenuto con una *f.m.m.* di 1 A, le amperspire I_{comp}

necessarie per compensare un campo $B_{rad,err}$ sono date da:

$$I_{comp} = \frac{-B_{rad,err}}{B_{rad,1}} \quad (6.18)$$

Considerato il caso peggiore (vedi Tabella6.2), per ottenere il medesimo campo di compensazione $B_{comp} = -B_{rad,err}$, la bobina di correzione 7 del set A richiede una *f.m.m.* quasi 3 volte superiore a quella assorbita dalla corrispondente bobina del set B. Tuttavia la realizzazione di bobine sulla superficie estera della shell presenta diversi ostacoli progettuali, tra cui il limitato spazio tra shell e PSS per la collocazione delle spire. Per questo motivo il set A risulta quello più verosimilmente considerabile per una successiva fase di progettazione. Inoltre è prevista l'installazione di 11 bobine su 12, in quanto la numero 7, posizionata a cavallo del gap equatoriale interno, non trova uno spazio sufficiente per l'installazione.

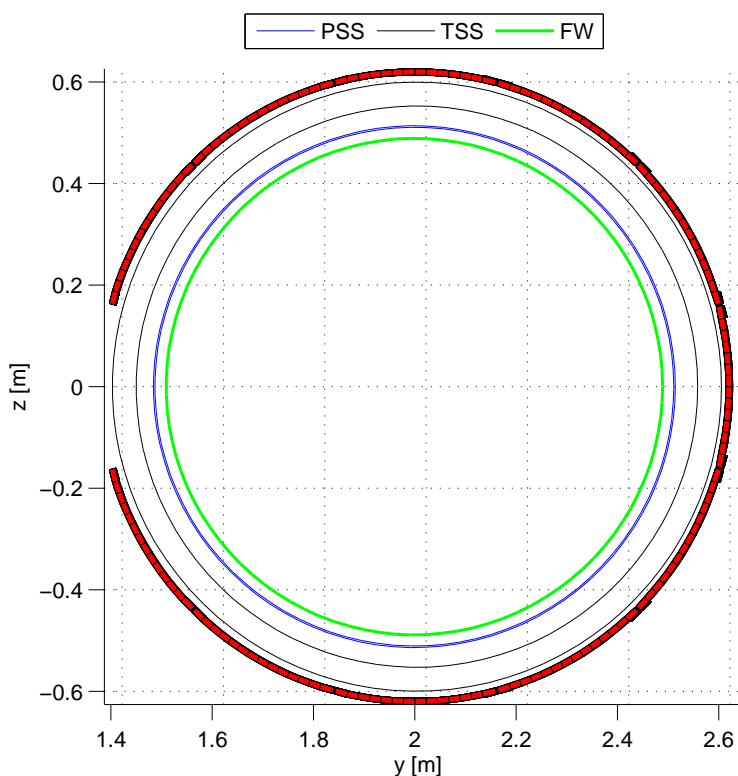


Fig. 6.9: Sezione poloidale in corrispondenza del gap $\phi = 93.75^\circ$

6.4 Esempio di compensazione

Con riferimento a quanto visto nel Capitolo5, nell'ipotesi di una configurazione magnetica assialsimmetrica, il campo radiale d'errore ha un andamento all'incirca sinusoidale e, una volta raggiunta la fase di *flat-top*, rimangono da compensare pochi *mT* rispetto alla fase di *ramp-up*. In questo paragrafo si è considerata la possibilità di compensare un campo errore (sulla parete del FW) avente un'andamento sinusoidale di ampiezza

pari a 1 mT :

$$B_{rad,err}(\theta) = B_{err,max} \cdot \sin\theta \quad (6.19)$$

con $B_{err,max} = -1 \text{ mT}$.

Una possibile soluzione è quella di alimentare le 11 bobine a sella del set A con correnti che seguano un profilo sinusoidale, tale da approssimare un campo radiale al FW avente forma d'onda uguale, ma segno contrario, rispetto a quella di $B_{rad,err}$:

$$I_i = I_{comp,max} \cdot \sin(\theta_i) \quad (6.20)$$

dove I_i è la corrente con cui verrà alimentata la i -esima bobina avente asse in θ_i (si veda Tabella 6.1) e $I_{comp,max}$ è l'ampiezza massima fra le correnti di compensazione, corrispondente alle bobine 4 e 10. Si osservi che, per compensare un'andamento come quello di (6.19), la $I_{comp,max}$ dovrà avere segno negativo: in questo modo le bobine, in accordo con la convenzione di segno per le correnti di Fig. 6.4, produrranno un campo radiale di segno opposto rispetto a quello di errore. Per ottenere una prima stima del set di correnti di compensazione si è proceduto nel seguente modo:

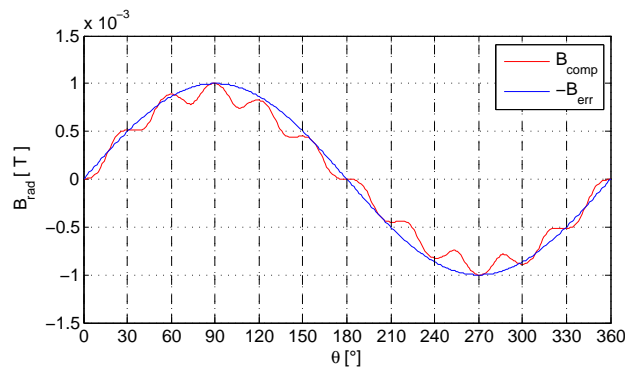
- si è calcolato il campo prodotto dalla bobina 4 ($B_{rad,1})_{i=4}$, quando questa viene alimentata con $I_{comp,max} = 1 \text{ A}$, imponendo per le altre una corrente che segua la (6.20);
- si è scalato il valore di $I_{comp,max}$ in modo proporzionale al rapporto tra il campo errore da compensare e il campo prodotto con 1 A come visto in (6.18):

$$I_{comp,max} = I_4 = \frac{-B_{err,max}}{(B_{rad,1})_{i=4}} = -568.7 \text{ A} \quad (6.21)$$

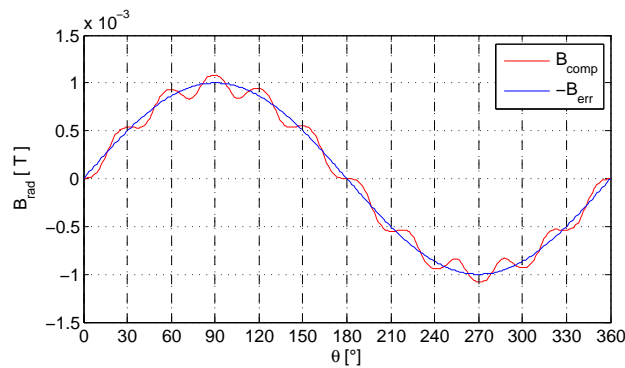
Adottando questa soluzione si è ottenuto un campo di compensazione B_{comp} avente l'andamento mostrato in Fig. 6.10 (a): il campo residuo $B_{res,\%} = (B_{rad,err} + B_{comp})/B_{rad,err}$ ha un valore medio del 18.9%. Come già visto le bobine possono essere considerate a coppie simmetriche (tranne la 1 in questo caso) rispetto al piano equatoriale: per queste bobine si prevede l'utilizzo di un unico alimentatore, per cui saranno alimentate dalla medesima corrente in ampiezza ma di segno opposto. L'applicazione di un profilo sinusoidale di corrente, al set di bobine proposto, permette di verificare tale vincolo progettuale; tuttavia, questo porta ad avere che le bobine sfasate di 180° in direzione poloidale (ad esempio 2-8, 3-9,...) abbiano la correnti di uguale ampiezza. Questa soluzione sarebbe corretta in geometria cilindrica ma non è adatta ad un toroide, in quanto le bobine che occupano il 1° e il 2° quadrante del piano (si veda Fig. 6.1) non hanno la stessa dimensione di quelle sui restanti quadranti, da cui ne deriva una configurazione asimmetrica del campo di compensazione. Per migliorare l'azione di correzione è necessario scalare in modo opportuno le correnti delle coppie di bobine, in modo da compensare la toroidicità della configurazione. La distribuzione di corrente sulle bobine è stata migliorata attraverso un algoritmo di ottimizzazione a sciame (*PSO: Particle Swarm Optimization*) considerando 6 gradi di libertà, corrispondenti alle correnti delle bobine 1,2,3,4,5,6 e una funzione obiettivo corrispondente al campo medio residuo. Il campo errore è stato così ridotto mediamente del 90% ($B_{res,\%} = 10\%$).

| Bobina | $I_{comp,sin}$ | $I_{comp,PSO}$ |
|--------|----------------|----------------|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | -284.342 | -297.537 |
| 3 | -492.495 | -520.160 |
| 4 | -568.684 | -616.760 |
| 5 | -492.495 | -562.728 |
| 6 | -284.342 | -346.522 |
| 7 | 0 | 0 |
| 8 | 284.342 | 346.522 |
| 9 | 492.495 | 562.728 |
| 10 | 568.684 | 616.760 |
| 11 | 492.495 | 520.160 |
| 12 | 284.342 | 297.537 |

Tabella 6.4: Correnti di compensazione con profilo sinusoidale e dopo ottimizzazione



(a) sinusoidale



(b) pso

Fig. 6.10: Compensazione sinusoidale e ottimizzata del campo errore

6.5 Risposta della shell

Nel caso in cui le bobine di correzione vengano alimentate con una forza magnetomotrice variabile con frequenza f , si dovrà tenere conto dell'effetto di schermatura esercitato da shell e TSS a causa delle correnti indotte. La soluzione del problema di correnti indotte segue il procedimento visto nel precedente capitolo: il dominio D è stato suddiviso in 3 regioni, con D_s ora contenente gli elementi che discretizzano le bobine di correzione. Considerando di alimentare le bobine con correnti sinusoidali aventi frequenza angolare

ω , il set di equazioni (5.7) diventa:

$$\begin{cases} (\mathbf{C}^T \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} \mathbf{A}_r)_e = \mathbf{0} & e \in D_a \cup D_s \\ (\mathbf{C}^T \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} \mathbf{A}_r)_e + j\omega (\mathbf{M}_\sigma \mathbf{A}_r)_e = -j\omega (\mathbf{M}_\sigma \mathbf{A}_0)_e & e \in D_c \end{cases} \quad (6.22)$$

Anche in questo caso \mathbf{A}_{0c} indica il vettore avente su ogni riga l'integrale del potenziale vettore magnetico, dovuto alle correnti sorgente (note) in D_s , valutato sul lato $e \in D_c$. Considerato un'andamento sinusoidale per le correnti sorgenti, allora il vettore $\mathbf{I}_s(t)$ potrà essere espresso in forma fasoriale:

$$\mathbf{I}_s(t) = \mathbf{I}_s e^{j\omega t} = \mathbf{I}_{s,\Re} + j\mathbf{I}_{s,\Im} \quad (6.23)$$

In questo modo si può risolvere il sistema di equazioni presentato, valutando distintamente l'effetto della parte reale e della parte immaginaria delle sorgenti. Una volta ricavata la distribuzione delle correnti indotte è stato possibile, applicando le formule di Biot-Savart viste in precedente, ricavare l'andamento dei campi di induzione magnetica da queste prodotto, in modo tale da valutare l'effettivo campo di correzione penetrato.

Si riportano in seguito alcune immagini rappresentanti la distribuzione della corrente indotta sulla shell e la TSS, ottenuta alimentando singolarmente le coppie di bobine 2-12, 3-11, e la sola bobina 1, con una forza magnetomotrice di 1000 A e ad una frequenza $f = 50 \text{ Hz}$. Le figure fanno riferimento alla sola componente di campo \mathbf{J}_{eddy} generata dalla parte reale della corrente delle bobine. Infine verranno presentate alcune mappe dell'induzione magnetica radiale prodotta dal campo di corrente indotta. Si possono fare le seguenti osservazioni:

- A seconda della coppia di bobine accese cambia la regione della shell sollecitata dalla maggior densità di corrente indotta. Più le bobine sono lontane dal gap equatoriale, meno quest'ultimo è interessato dalle correnti indotte; al contrario quando viene alimentata la bobina di correzione 1 è il gap equatoriale ad essere maggiormente sollecitato.
- La shell ha una conducibilità superiore alla TSS: questo giustifica la maggior densità di corrente indotta sulla shell rispetto alla struttura meccanica (si veda Fig.6.11).
- Il campo risultante tende a ridursi in modulo a causa delle correnti indotte, ad eccezione della regione in corrispondenza al gap, dove la distribuzione di corrente indotta causa anche in questo caso un'amplificazione del campo prodotto dalle bobine (si osservi la fascia di colore blu nella regione a $\phi = 93.75^\circ$ in Fig.6.13).

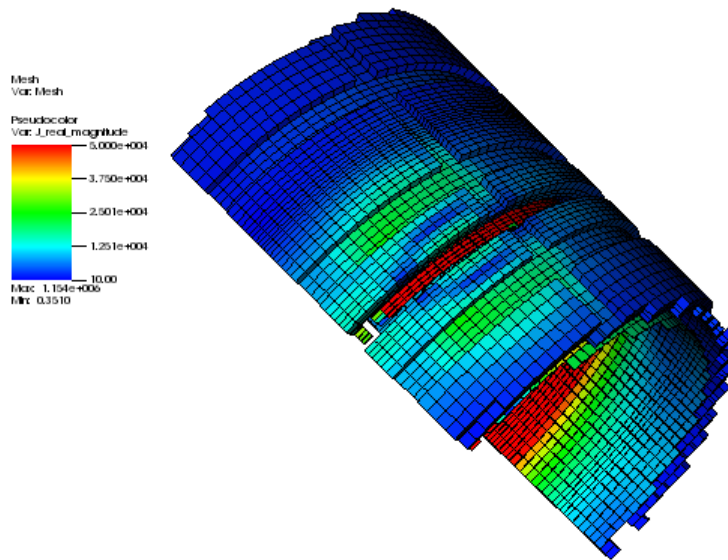
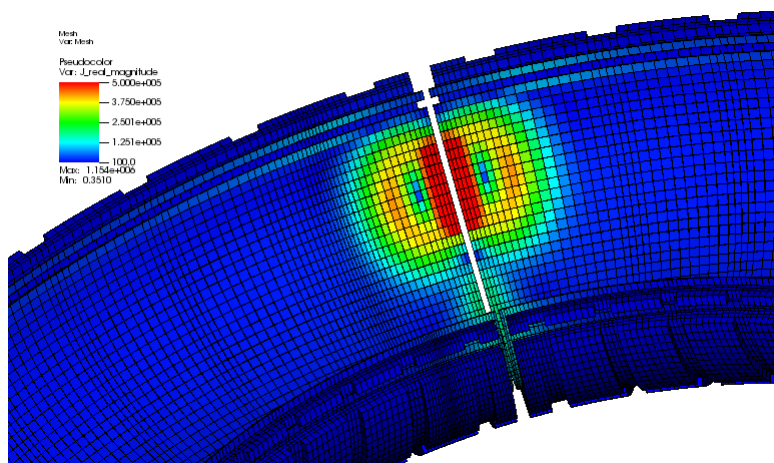
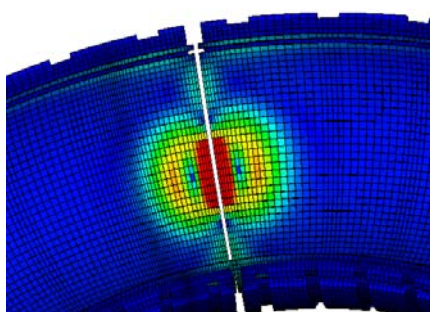


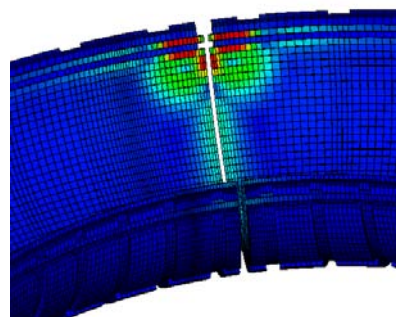
Fig. 6.11: Correnti indotte su shell e TSS dalle bobine 2-12



(a) 2-12

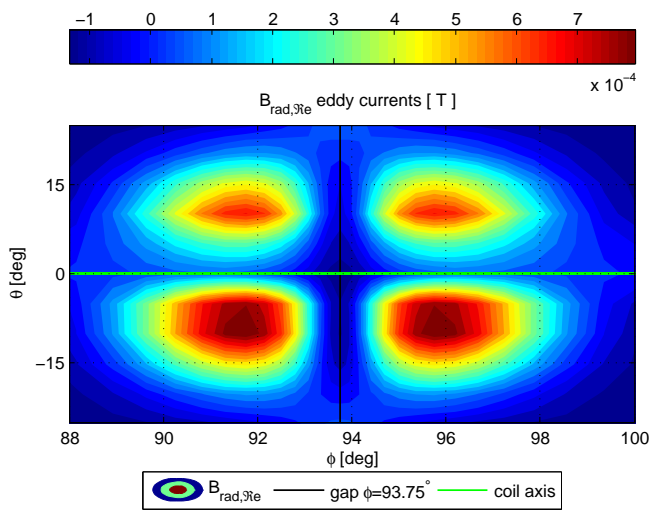
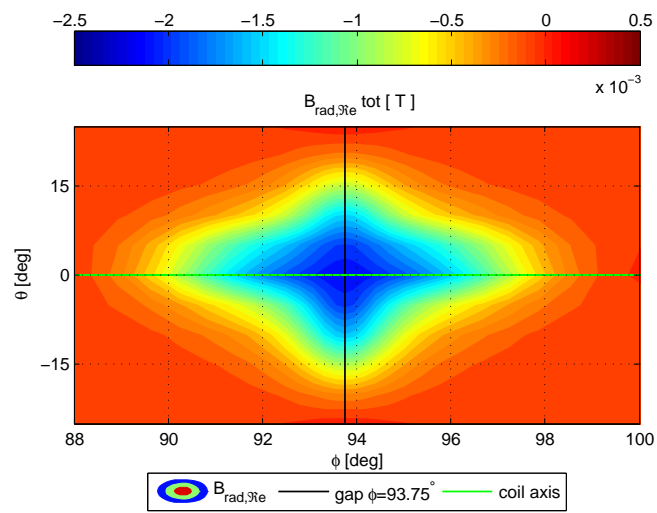
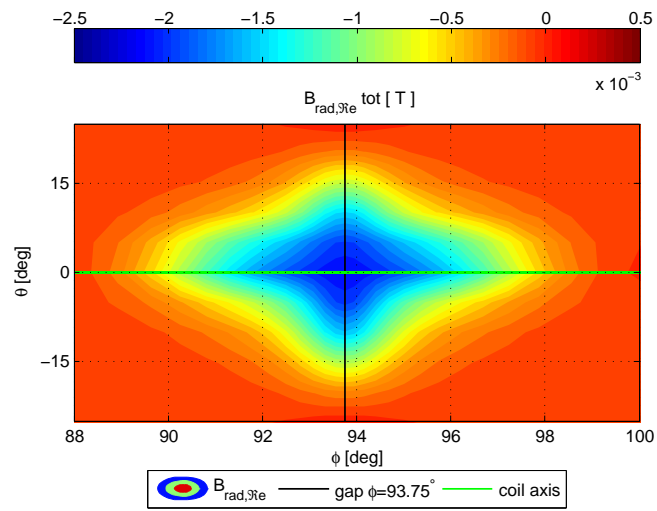


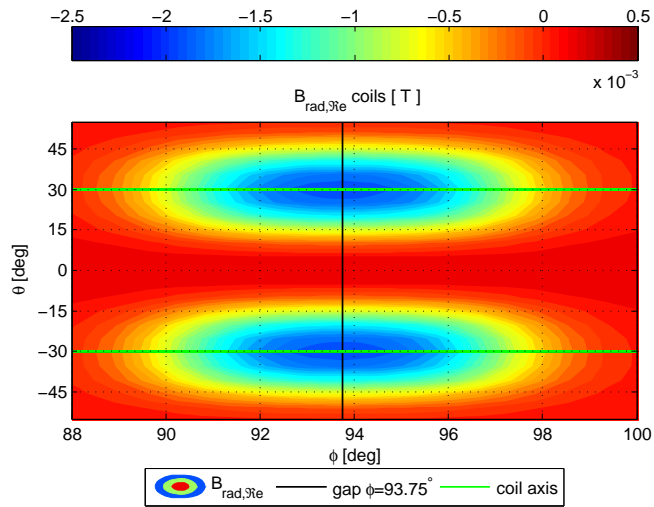
(b) 3-11



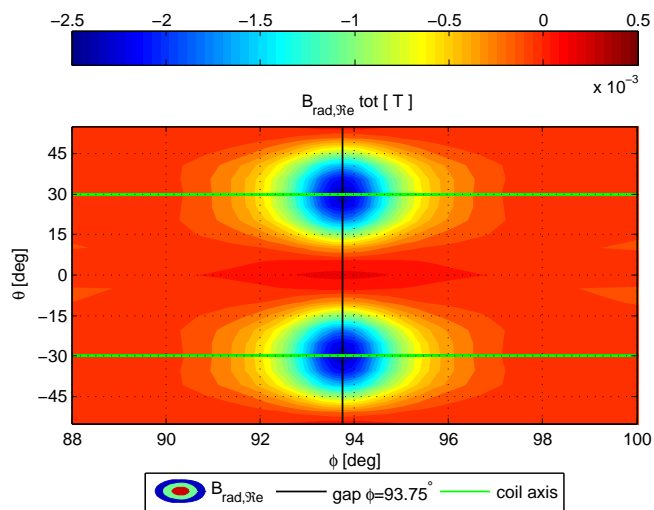
(c) 1

Fig. 6.12: Mappa di correnti indotte sulla porzione inferiore della shell

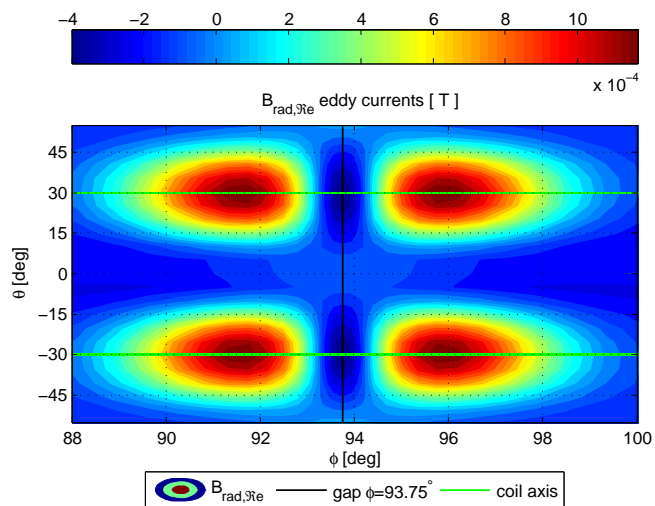




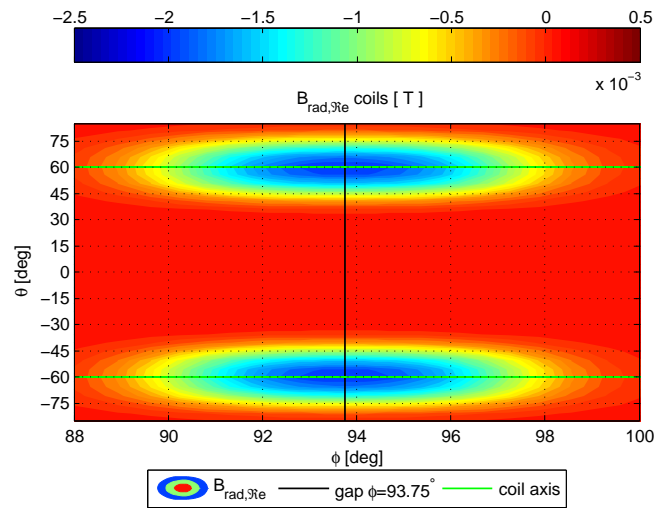
(a) 2-12



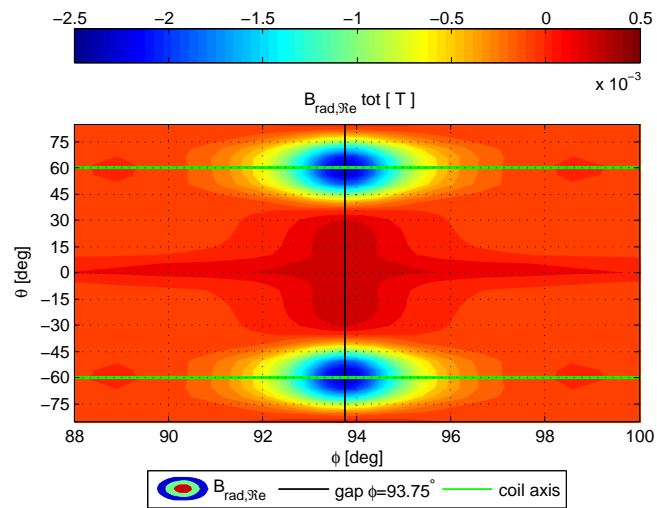
(b) 2-12



(c) 2-12



(a) 3-11



(b) 3-11

Fig. 6.13: Mappa del campo radiale prodotto dalle sole bobine (a), dalle correnti indotte (c) e campo risultante (b)

Capitolo 7

Conclusioni e futuri sviluppi

Le modifiche previste per la nuova macchina costituiscono un passaggio fondamentale per lo sviluppo di RFX, al fine di ottenere, come già accaduto per RFX-mod, un miglioramento delle prestazioni della macchina e quindi la possibilità di ricavare nuove importanti informazioni sul comportamento dei plasmi da fusione. È per questo motivo necessaria un'accurata analisi dei fenomeni fisici derivanti dalle modifiche previste per la macchina. Tra questi la gestione dei gap rappresenta un aspetto cruciale e nel passaggio da RFX-mod a RFX-mod2, nonostante i vantaggi che porterà l'eliminazione della camera da vuoto, viene quasi del tutto persa la possibilità di sovrapporre uno dei gap poloidali, soluzione che in RFX-mod si era dimostrata molto vantaggiosa in termini di campo errore generato ai gap poloidali ed equatoriali. Al contrario, l'analisi elettromagnetica di diverse situazioni, che possono caratterizzare il regime di scarica di un plasma in RFX-mod2, ha permesso di mettere in evidenza come la configurazione BJG sia sfavorevole da questo punto di vista. Si stanno valutando soluzioni alternative, ma le difficoltà rese dalla procedura di assemblaggio della shell e della TSS rendono la configurazione BJG la più considerabile. Questo richiede, inevitabilmente, l'introduzione di un sistema di correzione locale del campo errore: tra i due set proposti la soluzione A è sicuramente la più vantaggiosa in ambito meccanico, in quanto formata da un set di bobine che andrebbero a collocarsi sugli intagli presenti sulla TSS, già presenti per la sistemazione delle bobine di controllo MHD. Per quanto riguarda il set B di bobine interne, i vantaggi sul minor dispendio energetico per la loro alimentazione vengono oscurati dalle ampie difficoltà nella loro collocazione. Accanto ad aspetti prettamente costruttivi sarà poi necessaria un'accurata progettazione del sistema di alimentazione e di controllo delle bobine di correzione: per quanto riguarda il primo aspetto, il limitato spazio accessibile nella macchina vincola l'alimentazione delle bobine a coppie, complicando l'ottimizzazione del profilo di campo di compensazione da queste generato; inoltre, in caso di alimentazione in frequenza, si dovrà tenere conto dell'effetto di filtraggio esercitato dalla shell, in modo da poter mitigare, con tempi di risposta molto brevi, l'insorgente di disuniformità nel campo radiale rispetto alla configurazione di riferimento (come ad esempio visto in presenza di un modo di plasma $m = 1, n = 7$). Infine, in questo contesto di analisi è stato possibile sfruttare diversi metodi alternativi per la computazione dei campi elettromagnetici, ciascuno di essi adeguato a seconda delle caratteristiche del problema in esame, così da ottenere ottimi risultati sia in termini prettamente numerici, sia in termini di prestazioni computazionali.

Bibliografia

- [1] J. Freidberg, *Plasma Physics and Fusion Energy*. Cambridge, 2007.
- [2] C. RFX, “Fisica e ingegneria della fusione: la ricerca verso una nuova fonte di energia,” Mar. 2007.
- [3] P. Bettini, “Appunti del corso: Thermonuclear Fusion,” 2012-2013. Università degli Studi di Padova.
- [4] G. Rostagni, “RFX: an expected step in RFP research,” *Fusion Engineering and Design*, vol. 25, no. 4, pp. 301–313, 1995.
- [5] F. Gnesotto *et al.*, “The plasma system of RFX,” *Fusion Engineering and Design*, vol. 25, no. 4, pp. 335–372, 1995.
- [6] A. Maschio *et al.*, “The power supply system of RFX,” *Fusion Engineering and Design*, vol. 25, no. 4, pp. 401–424, 1995.
- [7] A. Stella *et al.*, “The RFX magnet system,” *Fusion Engineering and Design*, vol. 25, no. 4, pp. 373–399, 1995.
- [8] L. Fellin, P. Kusstatscher, and G. Rostagni, “Overall plant design, layout and commissioning,” *Fusion Engineering and Design*, vol. 25, no. 4, pp. 315–333, 1995.
- [9] P. Sonato *et al.*, “Machine modification for active MHD control in RFX,” *Fusion Engineering and Design*, vol. 66-68, pp. 161–168, 2003.
- [10] S. Peruzzo *et al.*, eds., *Design concepts of the machine upgrades for the RFX-mod experiment*, SOFT, Elsevier Ed. System for Fusion, Oct. 2016.
- [11] P. Bettini, L. Grandò, and G. Marchiori, “Feasibility study of a local active correction system of magnetic field errors in RFX-mod,” *Fusion Engineering and Design*, vol. 96-97, pp. 649–653, 2015.
- [12] P. Bettini and F. Trevisan, “Electrostatic analysis for plane problems with finite formulation,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 39, pp. 1127–1130, May. 2003.
- [13] E. Tonti, *The Mathematical Structure of Classical and Relativistic Physics*. Springer, 2013.
- [14] P. Bettini, M. Midrio, and R. Specogna, “Geometric formulation of Maxwell’s equations in the frequency domain for 3D wave propagation problems in unbounded regions,” *CMES*, vol. 66, no. 2, pp. 117–134, 2010.
- [15] S. Glasstone and R. H. Lovberg, *Controlled Thermonuclear Reactions*. World Scientific Publishing, 1975.

- [16] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. New York: Wiley, 1962. pp. 132-141.
- [17] M.Fabbri, "Magnetic flux density and vector potential of uniform polyhedral sources," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, pp. 32–36, Jan. 2008.
- [18] R. D. Graglia, "On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D green's function or its gradient on a plane triangle," *IEEE Trans. Antennas Propagation*, vol. 41, pp. 1448–1455, Oct. 1993.
- [19] P. Bettini, M. F. Palumbo, and R. Specogna, "A boundary element method for eddy-current problems in fusion devices," *Fusion Engineering and Design*, vol. 96-97, pp. 620–623, 2015.
- [20] P. Bettini *et al.*, eds., *3D electromagnetic analysis of the MHD control system in RFX-mod upgrade*, SOFT, Oct. 2016.
- [21] P. Dlotko and R. Specogna, "Cohomology in 3D magnetoquasistatic modeling," *Commun. Comput. Phys.*, vol. 14, no. 1, pp. 46–76, 2013.
- [22] P. Bettini and R. Specogna, "A boundary integral method for computing eddy currents in thin conductors of arbitrary topology," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, Mar. 2015.
- [23] A. Kameari, "Transient eddy current analysis on thin conductors with arbitrary connections and shape," *J. Comput. Phys.*, vol. 42, pp. 124–140, 1981.
- [24] B. Kapidani *et al.*, "Computation of relative 1-cohomology generators from a 1-homology basis for eddy currents boundary integral formulations," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 52, Oct. 2016.
- [25] P. Bettini, M. Cavinato, and G. Marchiori, "Two dimensional non-linear model of reversed field pinch plasma evolution," *Nuclear Fusion*, vol. 43, no. 2, pp. 119–129, 2003.
- [26] P. Dlotko, R. Specogna, and F. Trevisan, "Voltage and current sources for massive conductors suitable with the A_χ geometric formulation," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 3069–307, 2010.
- [27] J. D. Hanson and S. P. Hirshman, "Compact expressions for the Biot-Savart fields of a filamentary segment," *Phys. of Plasmas*, vol. 9, no. 4410, pp. 1448–1455, 2002.