UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L'importanza del problem solving e delle capacità metacognitive per la didattica della Matematica.

Relatore:
Prof. Francesco Ciraulo

Laureanda: Sofia Maria Zoè Venturi
Matricola: 1240728

Anno Accademico 2022/2023

data ufficiale di laurea 21 Aprile 2023

Abstract

Nella ricerca in didattica della matematica è sempre più vivo l'interesse per il problem solving cioè la risoluzione di problemi, e per il ruolo giocato dalle capacità metacognitive degli studenti, cioè quelle legate alla consapevolezza e gestione della conoscenza e alla pianificazione. Lo scopo di questo lavoro, sviluppato durante un'esperienza di insegnamento, è di studiare l'importanza del risolvere problemi, capirne i benefici e capire il ruolo e lo sviluppo delle suddette abilità metacognitive. Per farlo è stato ideato un percorso finalizzato al miglioramento nel problem solving, che al contempo valutasse anche un eventuale miglioramento della metacognizione.

Il percorso si è articolato in due momenti successivi. Prima sono stati analizzati l'analizzati la percezione e l'approccio degli studenti coinvolti verso la matematica. Per fare ciò sono state raccolte ed analizzate le risposte di quarantacinque studenti, appartenenti a due classi prime di uno stesso liceo Artistico, ad un questionario appositamente costruito.

In un secondo momento è stata avviata l'attività sulla risoluzione di problemi vera e propria, con una classe prima di ventiquattro studenti. In questa trattazione viene descritto tale attività in ogni sua fase, dalle strategie adottate, ispirate da *How to solve it* di Pólya, ai problemi scelti e gli esiti ottenuti. In questa attività, alla somministrazione di problemi, spiegazioni e correzioni è stata affiancata un'indagine volta a valutare e cogliere un eventuale miglioramento delle capacità metacognitive. Ciò è stato eseguito sottoponendo agli studenti dei questionari autovalutativi, indicati come pre-test e post-test, cui gli studenti hanno dovuto rispondere rispettivamente prima di cimentarsi nella risoluzione di ogni singolo problema e dopo aver concluso.

Dalla ricerca emerge come molti studenti percepiscano negativamente la matematica principalmente perché hanno enormi difficoltà di comprensione. D'altro canto, un percorso dedicato specificamente alla risoluzione di problemi può contribuire ad un netto miglioramento, sia delle capacità direttamente coinvolte: comprensione del problema ed elaborazione di una strategia risolutiva, sia delle abilità metacognitive come autovalutazione, autoregolamento e autocontrollo, che molteplici ricerche dimostrano essere fondamentali nelle prestazioni matematiche. È stato inoltre riscontrato un effetto positivo sull'autostima degli studenti e sull'approccio generale che essi hanno alla matematica.

Introduzione

L'obiettivo di questo studio è approfondire l'importanza che hanno la risoluzione di problemi e le capacità metacognitive, cioè quelle legate alla consapevolezza e gestione della conoscenza e alla pianificazione, nel contesto della didattica della matematica. È possibile allenare gli studenti a risolvere problemi? Miglioreranno nel farlo? In cosa di preciso miglioreranno? Anche le capacità metacognitive legate alla risoluzione di problemi saranno migliorate? Quali sono i benefici che è possibile trarne?

L'esigenza di rispondere a questi quesiti è nata da un'esperienza di insegnamento della Matematica a tre classi prime di un Liceo Artistico. Sin da subito sono infatti parse evidenti le enormi difficoltà degli studenti e la loro avversione nei confronti della materia, comunemente ritenuta ostica e complicata. Alla luce di questa situazione è quindi stato necessario progettare un approccio per l'interruzione del circolo vizioso di frustrazione, disprezzo ed incapacità degli studenti.

Partendo quindi dal presupposto che l'avversione degli studenti derivi principalmente dalla loro mancanza di comprensione della disciplina si è cercato di capire come agevolare questa comprensione. Comprensione da non declinare soltanto nella corretta gestione o esecuzione dei meccanismi e delle procedure di calcolo, ma anche nella profonda consapevolezza della loro necessarietà per una visione analitica della realtà. Sotto quest'ottica la risoluzione di problemi è lo strumento perfetto, che coniuga la corretta esecuzione di procedure alla loro applicazione in situazioni reali. La risoluzione di problemi, inoltre, secondo quanto riportato in numerosi studi di settore, coinvolge l'esercizio delle capacità metacognitive, di cui gli studenti sembrano essere particolarmente carenti, con conseguenze negative anche sulle altre applicazioni della disciplina.

L'esperienza di insegnamento, oltre ad aver ispirato la necessità di questo approfondimento è stata l'occasione ideale per effettuarlo. Si è deciso infatti di progettare un percorso che coinvolgesse le classi, con lo scopo didattico primario di migliorarne le capacità nella risoluzione di problemi, e che rispondesse ai quesiti posti. Il percorso è stato articolato in due momenti distinti. Il primo è stato un momento di indagine sull'approccio che gli studenti hanno con la matematica, per mettere luce sugli aspetti più critici e sulle maggiori potenzialità di miglioramento. Il secondo è invece stata l'attività vera e propria di risoluzione di problemi, sulla quale è stata basata un'approfondita analisi per rispondere ai quesiti.

La progettazione dell'attività di potenziamento delle abilità risolutive degli studenti è stata ispirata a *How to solve it* di Pólya (1945), in cui viene proposto un percorso iterativo a quattro fasi per risolvere i problemi

La trattazione del tema si sviluppa attraverso tre capitoli principali, ciascuno che costituisce un elemento essenziale per comprendere la questione. Il primo capitolo presenta l'assetto teorico e spiega nel dettaglio i principali concetti coinvolti nell'indagine: cos'è un problema, quali sono le teorie di didattica della matematica circa la risoluzione di problemi, cos'è di preciso la metacognizione e quale è il suo ruolo nella matematica, riassume poi come sono considerati i problemi nel quadro normativo di riferimento per un docente di matematica di liceo. Il secondo capitolo riporta i dettagli dello studio che è stato fatto sulla percezione della matematica, i risultati di questo studio sono fondamentali per apprezzare la portata di quanto ottenuto con il percorso di potenziamento sulla risoluzione di problemi. Il terzo capitolo, infine, descrive il percorso nella sua totalità: contesto, finalità, struttura, raccolta delle informazioni e dettagliata analisi, giungendo così alle conclusioni, oggetto della ricerca.

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Quadro teorico

1.1 Problemi e problem solving

1.1.1 Cosa si intende per problema

Molto probabilmente ad ogni lettore, nel corso della propria formazione scolastica, sono stati assegnati "problemi matematici" da risolvere. L'espressione è di uso comune e sembra non necessitare ulteriori spiegazioni. In realtà, va chiarita la distinzione fra problemi ed esercizi.

Per non creare ambiguità viene adottato il punto di vista di Badger et al. (2012) per i quali un esercizio è una domanda la cui risposta prevede solamente l'utilizzo di procedure di routine. Avendo già appreso le tecniche rilevanti uno studente sarà poi in grado di seguire una strategia che gli è ovvia. Invece, un problema è una domanda per la quale il processo di risposta non è già chiaro allo studente. Un aspetto contraddistintivo dei problemi è quindi la non ovvietà delle soluzione, la difficoltà che un problema pone. Per Pólya (1945), risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile.

Si noti che non è possibile classificare a priori una domanda o una consegna come problema od esercizio: dipende dalla persona a cui è posta. Come spiegano bene D'Amore e Fandiño Pinilla (2006) da una stessa *situazione problematica* possono avere luogo un problema o un esercizio, a seconda del contesto e della situazione didattica. Se ad esempio si dà ad un allievo un disco circolare perché ne misuri la lunghezza del contorno, questo sarebbe molto probabilmente un problema per un allievo di prima elementare, sarebbe invece un esercizio per uno studente di terza media.

Altri aspetti per cui una particolare consegna potrebbe essere considerata esercizio o problema sono l'atteggiamento di chi deve rispondere alla domanda e la vicinanza che sente di avere con le situazioni problematiche proposte. Spesso infatti gli esercizi scolastici sono completamente fittizi e non generano in chi deve risolverli immedesimazione e la conseguente curiosità. Una domanda la cui risposta prevede uno stesso procedimento matematico può essere formulata agli allievi sia in modo che essi eseguano un esercizio, sia che essi risolvano un problema.

La differenza fra problemi ed esercizi è sostanziale anche in quelli che sono gli scopi didattici degli uni e degli altri. Gli esercizi tipicamente sono assegnati agli studenti per consolidare un argomento già introdotto. Forniscono pratica su un particolare procedimento matematico che spesso è appena stato spiegato. È frequente che siano ripetitivi e servono all'assimilazione da parte degli studenti di certi argomenti. Per risolvere esercizi, anche quando a scuola vengono chiamati "problemi", spesso non è fondamentale ragionare per individuare la procedura giusta da svolgere, in quanto già la si conosce. Di solito, basta ripassare tale procedura per farla propria, che spesso è l'unico obiettivo didattico, comunque molto importante, di un esercizio. Da questo punto di vista gli obbiettivi di un esercizio rientrano chiaramente nelle categorie di rafforzamento o, in altri casi, di verifica.

Contrariamente, sono molteplici i motivi per cui può essere utile assegnare un problema. Ad esempio può essere strutturata un'intera modalità didattica "per problemi", in cui essi vengono utilizzati per introdurre argomenti nuovi. In tal caso le eventuali spiegazioni, necessarie in base al grado di maturità matematica degli studenti, sono riservate alle lezioni successive. Nel frattempo gli studenti sono invitati a ragionare e proporre le proprie idee, che non sanno già se porteranno ad una soluzione o no. Per D'Amore e Fandiño Pinilla (2006), molto spesso a una domanda corrisponde un problema nel caso in cui per rispondere lo studente debba utilizzare più regole o nozioni, non per forza già esplicitate, o la successione di più operazioni la cui individuazione e pianificazione è un atto strategico, talvolta creativo dello studente.

Dedicarsi alla risoluzione di problemi può inoltre aver benefici intrinsechi, non legati ad un obiettivo didattico o argomento matematico specifico. Come argomentano Badger et al. (2012), nel risolvere i problemi, gli studenti imparano ad applicare le loro abilità matematiche in modi nuovi; essi sviluppano una comprensione più profonda delle idee matematiche e riescono, anche in un contesto agevolato come quello scolastico, ad avere un assaggio dell'esperienza di *essere un matematico* e *fare della matematica*. In caso di successo provano poi un senso di realizzazione, persino di divertimento, e forse un appetito, iniziano a provare gusto nel fare matematica. La pratica ripetuta aumenta la loro fiducia, rafforza la loro resistenza e premia la loro perseveranza, oltre a permettergli ovviamente di immagazzinare molteplici esperienze utili per un eventuale uso futuro.

1.1.2 Il problem solving: le strategie individuate da Pólya e il conseguente sviluppo storico

Per capire appieno in cosa consiste il problem solving, ossia l'abilità di risolvere problemi e perché sia così importante e delicata ne va ripercorso lo sviluppo storico. I problemi e la risoluzione degli stessi sono stati parte integrante dell'apprendimento matematico degli studenti sin dall'antichità, tuttavia, come spiega Schoenfeld (2016) la concezione in chiave moderna del problem solving dipende da Pólya, in particolare dal suo lavoro più largamente conosciuto dalla comunità di didattica della matematica: *How to solve it* (1945). Il matematico è tuttora il più noto per la sua concettualizzazione della matematica come risoluzione di problemi e per il suo lavoro nel rendere la risoluzione dei problemi il fulcro dell'insegnamento della matematica. In effetti, tutto il lavoro che nei decenni è seguito poggia le basi su quanto teorizzato da Pólya. *How to solve it* può essere considerato il primo testo in cui la risoluzione dei problemi è trattata come disciplina a sé stante e si tenta di offrire un processo per risolvere i problemi matematici. In particolare, Pólya suggerisce un processo iterativo articolato in quattro fasi per trovare soluzioni, e al contempo, grazie alla pratica e alla riflessione, migliorare nel trovarle.

Il primo passo che Pólya raccomanda è comprendere il problema. Deve essere compresa la formulazione verbale del problema e quali sono le parti principali che lo compongono: dati, condizioni ed incognita. Parti che vanno analizzate con attenzione, più volte e da più punti di vista differenti. Se rilevante in questa fase lo studente dovrebbe poi essere in grado di utilizzare una figura, indicando correttamente le parti principali ed introdurre notazioni adatte.

La seconda fase individuate dall'esperto è elaborare un piano. Questa fase potrebbe essere la più complessa e tortuosa. Infatti, spiega l'esperto che l'idea di un piano può emergere gradualmente, oppure, dopo prove apparentemente infruttuose e un periodo di esitazione, può verificarsi improvvisamente, in un lampo, come una "idea brillante". In ogni caso è difficile avere una buona idea se si ha poca conoscenza dell'argomento, ed è impossibile averla se non si ha alcuna conoscenza. Le buone idee si basano sull'esperienza passata e sulle conoscenze acquisite in precedenza. Per esempio, possono rilevarsi estremamente utili problemi precedentemente risolti.

La terza fase consiste nell'eseguire il piano, facendo attenzione alla correttezza di ogni passaggio. In questa fase il rischio maggiore che l'autore individua è che uno studente si dimentichi del piano elaborato, il che può accadere molto più facilmente nel caso in cui non sia stato lui ad elaborarlo, ma sia stato suggerito da un'autorità esterna, come l'insegnante.

Infine, l'ultimo passaggio che Pólya raccomanda, e sicuramente uno dei più dibattuti successivamente, è il guardare indietro, cioè ricontrollare e riesaminare la soluzione proposta e il percorso effettuato. Facendo ciò egli spiega che gli studenti hanno la possibilità di consolidare le conoscenze acquisite e sviluppare ulteriormente la propria capacità di risolvere problemi anche futuri.

Al fruttuoso lavoro di Pólya sono conseguiti ulteriori sviluppi e critiche. Come riporta Schoenfeld (2016), la critica principale mossa alle strategie elencate in *How to Solve It* è che fossero caratterizzate in maniera descrittiva piuttosto che prescrittiva. Cioè che permettessero di riconoscere le strategie quando venivano utilizzate da un risolutore ma non fornissero la quantità di dettagli necessari a qualcuno di inesperto, come uno studente, privo di familiarità con tali strategie, di implementarle. Silver (1979, 1981), ad esempio, ha dimostrato che "sfruttare problemi correlati" è molto più complesso di quanto sembri a prima vista.

Recentemente, Lesh et Zawojewski (2007) sintetizzano la situazione affermando che nell'educazione matematica, le strategie di risoluzione dei problemi come quelle proposte da Pólya, cioè disegnare un'immagine, lavorare all'indietro, cercare un problema simile o identificare i dati e la richiesta, sono state a lungo considerate abilità importanti da sviluppare per gli studenti. Ciò nonostante, e anche se gli esperti utilizzano spesso questi termini nel fornire spiegazioni a posteriori circa i propri processi, o i ricercatori le utilizzano per descrivere i processi attuati dai risolutori che osservano, l'insegnamento di queste strategie non risulta collegato ad un miglioramento delle prestazioni nella risoluzione di problemi.

Come riportano Badger et al. (2012), dopo Pólya lo sviluppo e la ricerca di strategie per la risoluzione dei problemi sono continuati, tuttavia gli esperti che vi si sono dedicati hanno spesso affrontato un'insidia comune: più una strategia era specifica, meno largamente applicabile diventava e cioè si avvicinava di più alla risoluzione dei problemi basata sull'analisi dei casi. Begle (1979) ad esempio, esaminando la letteratura empirica esistente sui vari processi di risoluzione di problemi è giunto alla conclusione che non vi siano indicazioni chiare per l'educazione matematica. Egli ritiene infatti che spesso le strategie di risoluzione dei problemi siano talmente specifiche, sia del problema sia dello studente da suggerire che sia troppo semplicistico sperare di trovare una, o almeno poche strategie da poter insegnare alla maggior parte degli studenti. Tuttavia, sempre secondo Badger e al. (2012) questo non dovrebbe sorprendere; infatti, se qualcuno sviluppasse una procedura o una serie di linee guida che consentissero agli studenti di risolvere una particolare famiglia di problemi, così come vengono insegnate loro le tecniche per l'integrazione, il calcolo delle aree, o qualsiasi altra tecnica specifica, allora quei problemi verrebbero trasformati in esercizi. Ciò illustra, ancora una volta, l'importanza del contesto per la nozione adottata di "problema".

1.2 Il ruolo della metacognizione

1.2.1 Il concetto di metacognizione

Un aspetto rilevante per quanto riguarda le prestazioni di risoluzione di problemi sono le capacità metacognitive di chi vi si cimenta. Il concetto di metacognizione è alquanto complesso e tuttora dibattuto. Il termine è stato introdotto per primo da Flavell (1976), per il quale la metacognizione si riferisce alla conoscenza che qualcuno ha riguardo i propri processi cognitivi o a qualsiasi cosa ad essi correlata, come ad esempio le proprietà rilevanti per l'apprendimento di informazioni o dati. Egli cerca di spiegare il concetto con degli esempi: si attuano processi metacognitivi quando si rileva che si ha più difficoltà nell'apprendere un concetto rispetto ad un altro; quando di fronte ad un compito con domande a risposta multipla si ritiene di dover analizzare ogni risposta prima di decidere quale sia la migliore e rispondere. Fra le altre cose, la metacognizione riguarda il monitoraggio attivo del proprio apprendimento e la conseguente regolazione e orchestrazione dei processi in relazione agli oggetti cognitivi o ai dati su cui si basano, di solito al servizio di qualche scopo o obiettivo concreto, come in questo caso la risoluzione di problemi.

Uno dei motivi di confusione, come spiegano Garofalo e Lester (1985) è che non è sempre facile distinguere tra ciò che è metacognitivo e ciò che è cognitivo. Un modo intuitivo per intendere la relazione tra cognizione e metacognizione è che la cognizione è coinvolta nel fare, mentre la metacognizione è coinvolta nella scelta e nella pianificazione di cosa fare e nel monitoraggio di ciò che viene fatto. Per chiarire questa confusione Brown & Palincsar (1982) individuano due aspetti fondamentali della metacognizione: la conoscenza della cognizione e la regolazione della cognizione.

Il primo aspetto, la conoscenza della cognizione, riguarda ciò che qualcuno sa delle capacità, delle risorse e dei processi cognitivi in relazione all'esecuzione di specifici compiti cognitivi. La "conoscenza" in questo contesto includerebbe anche le proprie convinzioni, reali o meno. In effetti, Norman (1981) considera le convinzioni personali come un tipo di conoscenza soggettiva e sostiene che esse esercitano un'influenza importante sul resto del comportamento cognitivo. Flavell & Wellman (1977) spiegano come la conoscenza della cognizione è spesso classificata in base al fatto che riguardi l'influenza che fattori personali, legati alla consegna, o strategici hanno sull'esecuzione. I fattori personali riguardano ciò che si crede di sé stessi e degli altri come esseri cognitivi. Quelli legati al compito o alla consegna includono la conoscenza del campo di applicazione e dei requisiti dei compiti, nonché la conoscenza dei fattori e delle condizioni che rendono alcuni compiti più difficili di altri. Infine, i fattori legati alle strategie riguardano la conoscenza delle strategie cognitive generali e specifiche insieme alla consapevolezza della loro potenziale utilità per l'approccio e lo svolgimento di determinati compiti. L'aspetto metacognitivo di tale conoscenza sta nel sapere dove può essere utilizzato e nel sapere quando e come applicarlo. L'uso puramente meccanico della strategia, sebbene implichi la cognizione, non implica la metacognizione. Questo rende evidente, come nel risolvere problemi, piuttosto che esercizi, le capacità metacognitive siano fondamentali, in quanto la pianificazione di una strategia e non l'applicazione della stessa rientra nell'ambito della metacognizione.

Garofalo & Lester (1985) riportano come questa conoscenza non sia sufficiente agli studenti che mancano delle competenze necessarie per un corretto uso della conoscenza, che riguarda la regolazione della cognizione. Questo secondo aspetto, coinvolge una varietà di decisioni e attività strategiche in cui ci si potrebbe impegnare durante il corso dell'elaborazione di un compito o problema cognitivo. Esempi di tali attività includono la selezione di strategie per agevolare la comprensione della natura di un compito o di un problema, la pianificazione di processi d'azione, la selezione di strategie adeguate a realizzare piani, il monitoraggio delle attività di esecuzione durante l'implementazione delle strategie, la valutazione dei risultati di strategie e piani e, quando necessario, la revisione o l'abbandono di strategie e piani improduttivi.

1.2.2 Il ruolo della metacognizione in ambito matematico

Come spiegato, la metacognizione è un concetto introdotto ufficialmente sul finire degli anni settanta. Per quanto riguarda l'ambito matematico, o più specificamente della risoluzione dei problemi, il ruolo che hanno i processi metacognitivi emerge, ovviamente solo in maniera implicita, anche nel lavoro di Pólya e nella procedura a quattro fasi che egli propone (si veda 1.1.2). Egli per esempio afferma in *How to solve it* che tale manuale non può fornire una chiave magica in grado di aprire ogni porta e risolvere ogni problema, bensì offre buoni esempi da imitare e molte opportunità di pratica. Invita quindi chi desidera ottenere il massimo profitto dal proprio sforzo a cercare quelle caratteristiche del problema risolto che possono essere utili per gestire problemi a venire. Questo identificare determinate caratteristiche, per esempio, rientra nei fattori legati alla conoscenza della cognizione, e può permettere una pianificazione strategica che rientra invece nella regolazione della cognizione. Più in generale, come riportano Veenman et al. (2006) l'orientarsi durante la risoluzione dei problemi comprende la lettura della consegna del problema, l'attivazione delle conoscenze pregresse e lo stabilire quali sono i dati e cosa viene chiesto, che sono tutte attività raccomandate da Pólya.

In seguito all'introduzione del concetto, vari esperti si sono concentrati sul ruolo della metacognizione per quanto riguarda le prestazioni matematiche, sancendo che sono particolarmente rilevanti sia i comportamenti regolatori, specialmente nelle risoluzione di problemi (Schoenfeld, 1981, 1983; Silver, 1982), sia la conoscenza della cognizione, declinata in fattori personali, del compito e strategici (Garofalo & Lester , 1982; Schoenfeld, 1983; Silver, 1982).

Come riportano Garofalo & Lester (1985), in ambito matematico, le interazioni tra persona e compito includono la stima che qualcuno fa della difficoltà di un compito e la preferenza per un particolare tipo di compito. Le interazioni tra persona e strategia includono la familiarità e la fiducia della persona in strategie potenzialmente utili. La consapevolezza che tutti i problemi in una particolare classe possono essere risolti utilizzando una certa euristica o che lunghi problemi verbali richiedono tipicamente più di una lettura sono invece esempi di interazioni tra compito e strategia. Si può affermare che tutte e tre le tipologie di variabili interagiscono in una certa misura durante qualsiasi situazione di risoluzione dei problemi, ma in molte situazioni l'interazione tra due tipologie è particolarmente evidente. Le interazioni della conoscenza della persona, del compito e della strategia possono quindi avere un'influenza sulla decisione di regolare la propria attività. Ad esempio, se uno studente è consapevole di essere incline a commettere errori di calcolo, specialmente quando esegue calcoli complessi o con poca pratica o quando lavora velocemente, è probabile che lo studente si impegni in uno dei processi di monitoraggio sopra menzionati ed è più probabile che verifichi i risultati. Inoltre, se uno studente è a conoscenza delle strategie delle parole chiave, crede che tutti i problemi verbali possano essere risolti semplicemente applicando le operazioni suggerite dalle parole chiave e crede di aver avuto e continuerà ad avere successo nel risolvere problemi verbali con questo approccio, è probabile che lo studente utilizzi tale metodo, anche quando è inappropriato. È anche molto probabile che lo studente rinunci a qualsiasi tentativo di comprendere le relazioni espresse nella formulazione del problema, di supervisionare le proprie azioni e di valutare la ragionevolezza di una soluzione finale.

Sempre secondo Garofalo & Lester (1985) gli studenti spesso sono purtroppo particolarmente carenti nelle capacità metacognitive legate alla matematica, possiedono convinzioni limitate sulla disciplina e nozioni errate sulle prestazioni matematiche. Risultano inoltre spesso particolarmente carenti nelle capacità di regolamentazione, del monitoraggio e della valutazione. Ognuna di queste abilità è molto importante in tutte le prestazioni matematiche, ma soprattutto nella risoluzione dei problemi. Questa infatti è un'attività complessa che coinvolge una varietà di operazioni cognitive, ognuna delle quali deve essere gestita singolarmente e coordinata nell'insieme. Per esempio, Lester & Garofalo (1982) hanno scoperto che gli studenti elementari non analizzano abitualmente le informazioni sui problemi, non monitorano i progressi e non valutano i risultati. Schoenfeld (1981) invece ha rilevato come anche gli studenti delle scuole secondarie, siano molto fragili nelle abilità che chiama manageriali. Egli infatti individua due diversi tipi di comportamenti nella risoluzione dei problemi, che chiama tattico e manageriale. Per comportamento tattico intende "cose da implementare", come gli algoritmi e la maggior parte delle euristiche.

Nel comportamento manageriale di carattere matematico include invece decisioni circa la selezione di strutture per risolvere un problema, decidere quale direzione prendere per l'auspicata soluzione di fronte a una scelta, decidere se, alla luce di nuove informazioni, debba essere abbandonato un percorso già intrapreso, decidere cosa conservare dall'esperienza di tentativi precedenti o percorsi non ancora presi, e tante altre abilità.

1.2.3 Valutazione delle capacità metacognitive

Come attestano Pellegrino et al. (2002) parallelamente al progredire dell'interesse scientifico per il concetto di metacognizione sono stati sviluppati diversi metodi per attestarla e descriverla. Veenmann et al. (2006) riportano dell'utilizzo di questionari, interviste, analisi dei protocolli di pensiero ad alta voce, osservazioni, richiamo stimolato, registrazione online di file informatici e registrazione del movimento oculare. Ciascuno di questi metodi presenta chiaramente vantaggi e svantaggi. Ad esempio, i questionari sono facili da somministrare a grandi gruppi, mentre i protocolli per pensare ad alta voce richiedono valutazioni individuali. Inoltre, alcuni metodi di valutazione possono essere più intrusivi di altri. Ciascun metodo inoltre è più adatto ad attestare un'attività metacognitiva piuttosto che un'altra. Ad esempio, troppo spesso si dà per scontato che l'attività metacognitiva o l'uso della strategia possano essere valutati mediante questionari, mentre i punteggi su questi questionari difficilmente corrispondono a misure comportamentali effettive durante l'esecuzione del compito (Veenman, 2005; Veenman, Prins & Verheij, 2003).

Un'interessante distinzione nei metodi di valutazione riguarda i metodi offline rispetto a quelli online (Van Hout-Wolters, 2000; Veenman, 2005). I metodi offline vengono presentati prima o dopo l'esecuzione dell'attività, mentre le valutazioni online vengono ottenute durante l'esecuzione dell'attività. I metodi online sembrano essere più predittivi delle prestazioni di apprendimento rispetto ai metodi offline, anche quando questi ultimi sono somministrati retrospettivamente alla performance del compito (Veenman, 2005).

1.3 Il "problem posing" in relazione alle risoluzione di problemi

La terminologia "problema posing", cioè la posizione di problemi ha un duplice significato. Essa è usata sia per riferirsi alla riformulazione di problemi dati (Silver, 1994), sia per riferirsi, letteralmente, alla generazione di problemi ex novo. In entrambi i casi c'è uno stretto legame con la risoluzione di problemi.

Il primo tipo di problem posing, spesso indicato anche come formulazione o riformulazione del problema, si verifica all'interno del processo di risoluzione di un problema complesso, quando un risolutore ribadisce o ricrea il problema in qualche modo per renderne la soluzione più accessibile. Questo è la forma di problem posing a cui si riferisce Duncker (1945) quando ritiene che il problem solving consista in successive riformulazioni di un problema iniziale. Il problem posing, in questo caso, può avere luogo anche dopo aver risolto un problema particolare, nel momento in cui si riesaminano le condizioni del problema per generare problemi correlati alternativi. Quest'ultima forma di problem posing è associata alla fase di "Looking Back" del problem solving discussa da Pólya (1957), e attiva meccanismi metacognitivi.

Il problem posing dal significato letterale, quello che riguarda la generazione di nuovi problemi è anch'esso considerato un'attività di classe importante sia dal punto di vista cognitivo che metacognitivo. Come afferma Bonotto (2010) L'espressione delle idee matematiche da parte dei bambini attraverso la creazione dei loro problemi matematici dimostra non solo la loro comprensione e il loro livello di sviluppo dei concetti, ma anche la loro percezione della natura della matematica (Ellerton et al, 1996) e il loro atteggiamento verso questa disciplina. La posizione di problemi inoltre è un aspetto importante sia della matematica pura che di quella applicata ed è parte integrante dei cicli di modellazione che richiedono l'idealizzazione matematica dei fenomeni del mondo reale (Christou et al. 2005). Per questo motivo, il problem posing è di importanza centrale nella disciplina della matematica e nella natura del pensiero matematico ed è un compagno importante per la risoluzione dei problemi.

Recentemente molti insegnanti di matematica si sono resi conto che sviluppare la capacità di porre problemi di matematica è tanto importante, dal punto di vista educativo, quanto lo sviluppo della capacità di risolverli e hanno sottolineato la necessità di incorporare attività di proposizione di problemi nelle classi di matematica.

Data l'importanza delle attività di problem-posing nella matematica scolastica, alcuni ricercatori hanno iniziato a indagare su vari aspetti dei processi di problem-posing. Diversi studi hanno riportato approcci per incorporare la posizione di problemi nella didattica. Questi studi hanno dimostrato che questa pratica può migliorare la capacità degli studenti di risolvere i problemi matematici (Leung, 1996; Silver, 1994) e aiuta a comprendere i concetti e i processi matematici (English, 1997a; English, 2003). Inoltre, gli studenti che praticano il "problem posing" hanno una migliore percezione della materia, più entusiasmo e motivazione (English, 1998; Mestre, 2002; Silver, 1994; Winograd, 1991). In particolare, English (1997a, 1998) sostiene che il problem posing migliora la capacità di pensiero, di problem solving, l'atteggiamento e la fiducia degli studenti nei confronti della matematica e della risoluzione di problemi matematici, contribuendo a una più ampia comprensione dei concetti matematici. Kilpatrick (1987) ha teorizzato che la qualità dei problemi che gli studenti propongono sia una variabile importante per prevedere la loro capacità di risolvere problemi. Questo ha portato a ulteriori studi sulla relazione tra problem solving e problem posing. Ad esempio, Cai (1998) ha trovato una forte correlazione tra problem posing e problem solving, mentre Silver e Cai (1996) hanno dimostrato che le prestazioni degli studenti nella risoluzione di problemi sono fortemente correlate alle prestazioni nel problem posing. Più recentemente, si è iniziato a studiare la relazione tra problem posing e la competenza matematica in generale. Mestre (2002) ha utilizzato il problem posing come strumento per studiare i processi cognitivi degli studenti e ha concluso che questo metodo può essere utilizzato per investigare il trasferimento di concetti attraverso i contesti e per identificare la conoscenza, il ragionamento e lo sviluppo concettuale degli studenti. Tuttavia, nonostante l'importanza del problem posing nella comprensione concettuale della matematica, rimane poco chiaro quali siano i processi di pensiero alla base di questa pratica e come si possa analizzare e valutare il problem posing matematico degli studenti.

1.4 Documenti di riferimento per la pianificazione didattica dei docenti

In questa sezione, vengono presentati e discussi alcuni punti salienti di due documenti di cui gli insegnanti devono tenere conto nel momento in cui pianificano la propria impostazione didattica: le Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento, redatte dal Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca nel 2010 e la Raccomandazione relativa alle competenze chiave per l'apprendimento, redatta dal Consiglio Europeo nel 2018. Il fine è di fornire un quadro delle aspettative riguardo l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie, come i licei, e indagare nello specifico il focus che un docente può o deve mettere sulla risoluzione di problemi.

Nel testo delle indicazioni viene specificato come esse debbano essere considerate, cioè come "l'intelaiatura" sulla quale le istituzioni scolastiche disegnano il proprio piano dell'offerta formativa, i docenti costruiscono i propri percorsi didattici e gli studenti sono messi in condizione di raggiungere gli obiettivi di apprendimento e di maturare le competenze proprie dell'istruzione liceale e delle sue articolazioni.

Come spiegato sempre nel testo, per ogni disciplina sono previste sia delle linee generali che descrivono le competenze attese al termine del percorso scolastico, sia degli obiettivi specifici di apprendimento articolati per nuclei disciplinari relativi a ciascun biennio e al quinto anno. Gli obiettivi didattici nel caso specifico della Matematica sono Aritmetica e Algebra, Geometria, Relazioni e Funzioni, Dati e Previsioni e per quanto riguarda il primo biennio Elementi di Informatica.

Va inoltre specificato che le indicazioni appositamente non dettano alcun modello didattico-pedagogico. Al fine di favorire la sperimentazione e lo scambio di esperienze metodologiche, valorizzare il ruolo dei docenti e delle autonomie scolastiche nella loro libera progettazione. Viene quindi ribadita la libertà didattica del docente. Essa "si esplica nella scelta delle strategie e delle metodologie più appropriate, la cui validità è testimoniata non dall'applicazione di qualsivoglia procedura, ma dal successo educativo".

Per quanto riguarda le indicazioni per il liceo classico, artistico, linguistico, musicale coreutico e delle scienze umane, quindi, anche per la scuola in cui si svolge l'esperienza oggetto di studio, i problemi o la risoluzione degli stessi vengono citati esplicitamente in quattro occasioni.

Nella parte che stabilisce le competenze attese alla fine del ciclo di studi soltanto una volta, e con funzione descrittiva di un'altra competenza, cioè quella di saper utilizzare gli strumenti informatici riconoscendone i limiti:

"L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale."

"Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, verranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi."

Per quanto riguarda gli obiettivi specifici di apprendimento invece il riferimento alla risoluzione di problemi compare cinque volte. Questo avviene prevalentemente nella sezione dedicata al primo biennio, dove ci sono ben quattro riferimenti.

Nel nucleo tematico di Aritmetica e Algebra si trova: "Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un'equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica."

Mentre per quanto riguarda Relazioni e Funzioni, ci sono due riferimenti: "lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni", e: "Lo studente studierà le funzioni del tipo f(x) = ax + b, f(x) = |x|, f(x) = a/x, f(x) = x2 sia in termini strettamente matematici sia in funzione della descrizione e soluzione di problemi applicativi."

Infine, sempre nel primo biennio i problemi vengono citati all'interno del nucleo Elementi di Informatica: "Un tema fondamentale di studio sarà il concetto di algoritmo e l'elaborazione di strategie di risoluzioni algoritmiche nel caso di problemi semplici e di facile modellizzazione."

Nel secondo biennio vengono nominati problemi specifici, come: "problema della formalizzazione dei numeri reali", "problematica dell'infinito matematico" e " problema della determinazione dell'area del cerchio". Viene nominata la risoluzione di problemi in termini più generici poi nel nucleo tematico Relazioni e Funzioni: "Lo studente apprenderà lo studio delle funzioni quadratiche; a risolvere equazioni e disequazioni di secondo grado e rappresentare e risolvere problemi utilizzando equazioni di secondo grado."

Per quanto riguarda il quinto anno non si fa cenno alla risoluzione di problemi, ma soltanto ad alcune *problematiche* che forniscono il contesto per la nascita di altri concetti, che sono il vero obbiettivo di apprendimento: "Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale – in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità – anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi)."

Con questa impostazione, l'importanza che la risoluzione di problemi avrà nel percorso scolastico degli studenti è lasciata nelle mani dei docenti che incontreranno. Sicuramente, come riportato, non mancano i riferimenti alla soluzione di problemi, ma si tratta di saper risolvere problemi circostanziati ad obiettivi di apprendimento specifici. Il che è realizzabile anche tramite la classica impostazione didattica di spiegazione di un argomento, seguita da esercizi fra cui "problemi" per il consolidamento dell'argomento stesso, che, come precedentemente spiegato, fa sì che gli studenti perfezionino l'argomento specifico, ma non la capacità ragionare e risolvere problemi di cui non conoscono a priori la strategia risolutiva. Nelle linee generali, infatti, non viene mai esplicitata la capacità di risolvere problemi come competenza attesa. Qualche docente potrebbe decidere, grazie alla già menzionata libertà didattica di cui dispone, di farne una metodologia. Si potrebbe ad esempio porre un problema per introdurre un argomento, allenando così gli studenti alla risoluzione dei problemi anche senza sapere che metodi usare. Va ribadito comunque, che come afferma il documento "l'ampio spettro dei contenuti che saranno affrontati dallo studente richiederà che l'insegnante sia consapevole della necessità di un buon impiego del tempo disponibile.", argomento che potrebbe scoraggiare alcuni docenti dal voler dedicarsi anche alla risoluzione di problemi, quando essa non è una competenza attesa.

Un riferimento molto più esplicito e vincolante alla risoluzione di problemi è presente nel documento stilato dal Consiglio Europeo nel 2018, fra i cui obiettivi risulta il fornire uno strumento di riferimento al servizio del personale didattico. La competenza matematica stessa è descritta come “la capacità di sviluppare e applicare il pensiero e la comprensione matematici per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane”. Inoltre, “Partendo da una solida padronanza della competenza aritmetico-matematica, l’accento è posto sugli aspetti del processo e dell’attività oltre che sulla conoscenza. La competenza matematica comporta, a differenti livelli, la capacità di usare modelli matematici di pensiero e di presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, diagrammi) e la disponibilità a farlo.” In questo caso, non ci sono dubbi circa all’importanza del saper risolvere problemi, almeno relativamente alla sfera quotidiana, in quanto rientra a pieno titolo fra “le competenze chiave necessarie per l’occupabilità, la realizzazione personale e la salute, la cittadinanza attiva e responsabile e l’inclusione sociale”. Un percorso focalizzato proprio alla risoluzione dei problemi è quindi perfettamente in linea con lo spirito del documento.

Capitolo 2

Il questionario sulla percezione della matematica

2.1 Premessa

Quando si pensa alla matematica comunemente la si ritiene una disciplina ostica, talvolta inutile ed in generale spiacevole. Per ottenere un quadro preciso sulle reali percezione degli allievi delle classi prese in considerazione, fruibile anche a chi non li conosce direttamente da insegnate, è stato proposto loro un questionario, visibile in appendice, il cui scopo era ottenere risposte dirette e anonime, per le quali quindi gli studenti non si sentissero giudicati e quindi auspicabilmente prive di filtri volti all'accettazione sociale. In questa sezione saranno analizzate le risposte a tale questionario.

2.2 Il questionario e la metodologia d'analisi

Il questionario, è stato proposto in forma cartacea a due classi prime, i cui studenti hanno età comprese fra i 13 e i 14 anni, 15 nel caso di studenti ripetenti. In totale sono stati compilati 45 questionari, ma non ogni studente ha risposto a tutte le domande o vi ha risposto in maniera pertinente. Le risposte mancanti o palesemente non pertinenti sono state conteggiate come "non disponibili" e come tali sono state riportate nei grafici. Quando sono state calcolate percentuali invece, se non diversamente specificato, sono state calcolate sul totale di risposte pertinenti, ignorando quindi le "non disponibili".

Nel questionario, su un totale di diciotto domande, tre erano a risposta multipla secca, due a risposta multipla da giustificare e tredici a risposta aperta. Di queste ultime, tre domande prevedevano come risposta esplicitamente una parola o una lista di parole, le altre prevedevano una breve frase esplicativa o non ponevano alcun vincolo. Questa impostazione è stata scelta per lasciare più libertà d'espressione possibile agli studenti, non volendo in qualche modo suggerire loro cosa rispondere. Ha comportato però un intenso lavoro di rielaborazione e analisi, e ha possibilmente aumentato il numero di risposte mancanti o non pertinenti.

Nell'analisi una sottosezione specifica è dedicata a ciascuno dei quesiti 2, 3, 4 con 5, 10 con 11, 13, 14 con 15, 16 e 18, tenendo anche conto dei relativi quesiti di supporto, che richiedevano soltanto ulteriori motivazioni o spiegazioni ed esplicitavano l'interpretazione di risposte che sarebbero state altrimenti ambigue.

Altre sottosezioni sono dedicate ad aspetti, come lo studio delle differenze di genere e la crucialità della comprensione della matematica, che sono emersi solto in seguito all'analisi, incrociando le risposte a più quesiti, ogni volta specificando chiaramente quali.

Le prime domande analizzate sono quelle che prevedevano di rispondere con una lista di parole. L'analisi che rispettasse il carattere qualitativo delle risposte è stata effettuata grazie allo strumento delle "nuvole di parole", nelle quali vengono riportate tutte le risposte date, colorandole allo stesso modo in base al significato, e con le dimensioni dipendenti dal numero di occorrenze.

In un secondo momento e per le altre risposte è stata effettuata un'analisi quantitativa. Le risposte sono state rielaborate, raggruppandole sempre per significato, identificando per esempio sinonimi, diminutivi e superlativi. Di volta in volta sono specificate le categorie scelte. Ciò ha permesso di incrociare i dati e mettere in luce anche ulteriori aspetti. Questa analisi e i relativi grafici sono stati realizzati con il software Excel.

Le domande che richiedevano una breve spiegazione sono state di supporto nell'interpretare le altre risposte, permettendo di raggruppare parole appartenenti a diverse aree semantiche, sotto l'ombrello del significato comune che gli studenti volevano dargli, oppure, al contrario, permettendo di distinguere il significato che studenti diversi hanno dato a due sinonimi. Nel rispondere alla domanda 5 per esempio, due studenti hanno descritto il proprio rapporto con la matematica usando come "complicato" e "complesso", nella risposta precedente hanno però dato spiegazioni opposte, facendo conteggiare i due aggettivi con accezione negativa in un caso e positiva nell'altro.

2.3 L'analisi

2.3.1 Gli aggettivi che descrivono la matematica

Sin da una prima visione dei dati emerge la tristemente nota ostilità che gli studenti provano nei confronti della Matematica. Di seguito, nella figura 2.1, sono riportate le risposte al quesito numero 2, su quali fossero gli aggettivi da associare alla matematica.

In questo caso si è deciso di distinguere 8 categorie corrispondenti ad altrettanti colori: aggettivi inerenti la difficoltà in rosso, aggettivi inerenti la noia in verde oliva, sgradevolezza e fastidio in arancio, l'inutilità in marrone. Queste, cioè le categorie con un significato prettamente negativo corrispondono in totale al 65% delle risposte date. Ci sono poi le categorie di apprezzabilità in blù, 13%, utilità in viola al 4%, caratteristiche impersonali, cioè quelle caratteristiche attribuibili alla matematica, che la descrivono senza riferimenti emozionali, come per esempio "logica", "sintetica" o "rigida", in azzurro corrispondenti all'11% delle risposte e "altri", cioè aggettivi che non è stato ritenuto opportuno cercare di classificare ulteriorirmente, come strana, catotica e intensa, in verde, corrispondenti al 7% delle risposte.

Figura 2.1: Nuvola di aggettivi che descrivono la Matematica, risposte alla domanda 2.

2.3.2 Le emozioni che suscita la matematica

Figura 2.2: Nuvola di emozioni associate alla Matematica, risposte alla domanda 3.

Un lavoro analogo a quello sugli aggettivi è stato fatto per le emozioni, visibile in figura 2.2. In questo caso i dati sono ancora più allarmanti. Le categorie individuate sono quelle di rabbia in rosso, ansia in arancione e disgusto in marrone. La somma di queste categorie corrisponde al 70% del totale fra le risposte disponibili. Solo l'11% associa felicità, colorata in azzurro. Un altro 11%, colorato in viola, non associa emozioni e il restante 7% in verde associa noia.

2.3.3 Il rapporto con la matematica

Nella nuvola riguardante il rapporto che gli studenti hanno con la matematica, in figura 2.3 si è deciso di distinguere per colore solo 3 macrocategorie: negativo in rosso, positivo in blù e variabile in verde. Gli studenti con un rapporto fortemente negativo sono ancora la netta maggioranza del totale, in questo caso quasi il 56%, contro il 25% che ha un rapporto variabile e il 19% positivo. Colpisce inoltre il registro linguistico scelto dagli studenti. Mentre nella categoria di rapporto negativo rientrano parole estreme ed inequivocabili, come "orribile", "schifo", "osceno" e "disgusto". nella categoria di rapporto positivo rientrano parole come "complesso", "stabile" e "lavoro", che non hanno una marcata connotazione emotiva o positiva, e sono state inserite in questa categoria solo grazie alle risposte alla domanda numero 4, che ne esplicitava l'interpretazione. Non è chiaro se questa asimmetria dipenda solo da una maggiore timidezza nell'ammettere di apprezzare la matematica o se effettivamente chi non ha un buon rapporto con la matematica provi sensazioni decisamente più forti; è ben evidente comunque come nelle classi intervistate nessuno degli studenti affermi di avere un rapporto decisamente positivo con la matematica.

Figura 2.3: Nuvola di parole che descrivono il rapporto con la Matematica, risposte alla domanda 5.

2.3.4 Indagine sulle differenze di genere

Nell'analisi del questionario si è voluta prendere in considerazione anche una prospettiva di genere, per verificare se ci fossero effettive differenze nell'approccio e nella considerazione della matematica fra maschi e femmine. Prima di procedere con i risultati, va riportato il contesto.

Il liceo Artistico in cui è stata effettuata l'indagine è una scuola prevalentemente femminile, le ragazze sono circa i due terzi del totale degli studenti. Nel questionario era la prima domanda a chiedere di identificarsi come maschio, femmina o se si preferisse non rispondere. Va segnalato che una grande percentuale di intervistati, presumibilmente per un maggior senso di privacy, ha preferito non rispondere alla domanda, cioè il 25%. Avendo però a disposizione i dati sull'effettiva composizione delle classi, emerge che il numero di intervistati che si è dichiarato maschio corrisponde esattamente al numero effettivo di ragazzi appartenenti alle classi in esame. Supponendo quindi che nessuno abbia mentito è lecito ritenere che siano le ragazze a non aver voluto dichiarare il proprio genere. In ogni caso, per trasparenza, i dati vengono riportati così come sono stati ricavati, distinguendo comunque fra ragazze e chi non ha dichiarato il proprio genere. Se il lettore ritiene valida la supposizione per cui nessuno ha mentito, può autonomamente sommare le due categorie.

Puntualizzato questo, le differenze che emergono sono in generale molto lievi. Di seguito vengono riportati i grafici relativi alle domande sugli aggettivi da associare alla matematica, in figura 2.4, sulle emozioni suscitate dalla matematica, in figura 2.5 e sul rapporto con la matematica, in figura 2.6. In questi grafici le risposte sono ripartite in base al sesso che i rispondenti hanno dichiarato.

Come si può notare, in risposta ad ognuno dei quesiti, rispetto alla composizione effettiva delle classi, sono molti i maschi a non aver fornito risposte pertinenti, indicate con "ND". Per esempio i ragazzi a non aver fornito risposte sugli aggettivi sono ben quattro, un terzo dei ragazzi totali. Come risultato, in ogni altra categoria sono leggermente di più le ragazze e chi non ha voluto dichiarare il proprio genere. Si può notare inoltre che nessun maschio ha ritenuto di attribuire aggettivi riguardanti l'utilità o l'inutilità della matematica e che mentre molti maschi hanno dichiarato di non associare alcuna emozione alla matematica nessuno ha ritenuto di associargli la noia, anche se quattro l'hanno descritta come noiosa. Va notato infine che solo un ragazzo ha dichiarato di avere un rapporto positivo con la matematica, mentre l'hanno fatto quattro ragazze e due persone che hanno preferito non indicare il proprio genere. In ultimo, si può notare come siano prevalentemente le ragazze ad associare ansia alla matematica, emozione menzionata da un solo ragazzo.

In generale si rileva quindi qualche piccola differenza ma nulla di sostanziale, che faccia pensare che gli appartenenti ad un genere siano più bendisposti verso la matematica degli altri. Questo fatto in realtà non sorprende, essendo perfettamente allineato con i dati relativi al profitto degli studenti: la media dei voti ottenuti dalle ragazze nelle classi in questione è $6,4$, mentre quella dei ragazzi $6,1$. Differenze quindi molto lievi, imputabili forse anche alla ristrettezza del campione.

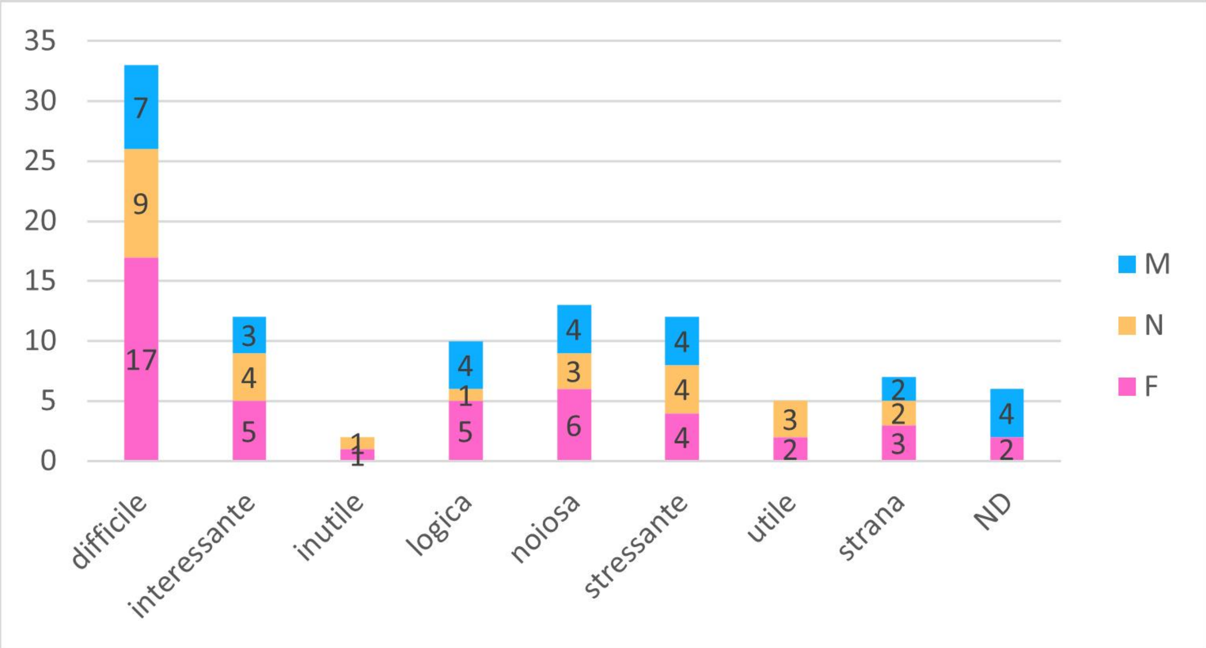


Figura 2.4: Grafico relativo alle categorie di aggettivi che descrivono la matematica, ripartite in base al sesso dei rispondenti.

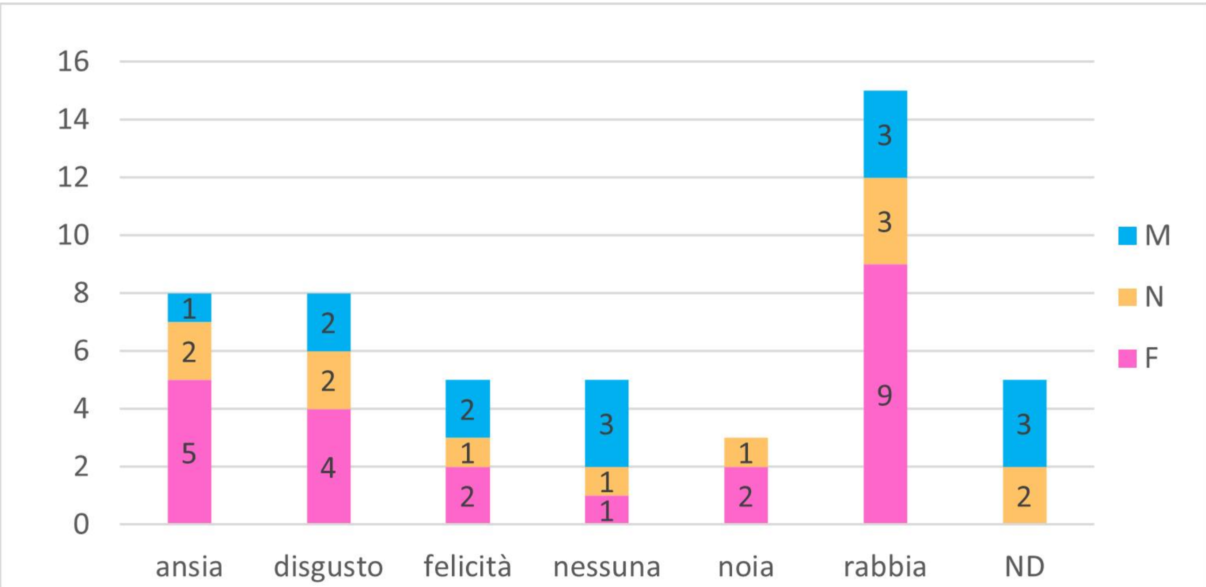


Figura 2.5: Grafico relativo alle categorie di emozioni suscitate dalla matematica, ripartite in base al sesso di chi le ha menzionate.

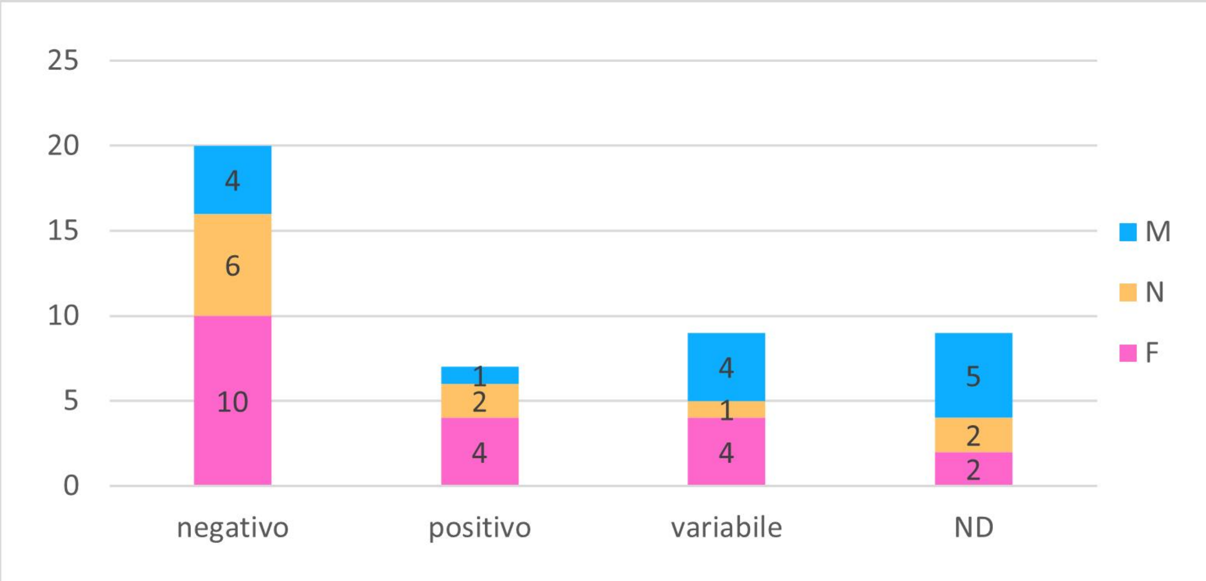


Figura 2.6: Grafico relativo alle tre categorie di rapporto con la matematica, ripartite in base al sesso di chi ha risposto.

2.3.5 Il periodo migliore e peggiore con la matematica

Di seguito vengono analizzate le risposte alle domande 10 e 11 del questionario, che chiedevano quali fossero i periodi in cui la matematica è stata apprezzata meno, in figura 2.7, o di più, in figura 2.8.

Mentre nell'analisi del rapporto con la matematica si è scelto di individuare tre fasce: "negativo", "positivo" e "variabile" con questi quesiti gli studenti sono stati forzati a scegliere un periodo migliore e peggiore, e a considerare quindi tale rapporto come variabile nel tempo.

A prima vista emerge chiaramente come la scuola secondaria di primo grado, nel questionario colloquialmente indicata come "scuola media" sia il periodo peggiore per la maggioranza degli studenti, il $51,16\%$ di chi ha dato una risposta. Analogamente, il 50% dei rispondenti ha individuato nella scuola primaria, "scuola elementare" il periodo migliore. La scuola secondaria di secondo grado, cioè la "scuola superiore" è stata nominata sia in negativo ($34,88\%$), sia in positivo ($30,95\%$).

Questa asimmetria nei risultati potrebbe dipendere anche da fattori completamente estranei alla matematica. Va ricordato infatti che le classi cui è stato sottoposto il questionario hanno vissuto, proprio nel periodo della scuola media, quasi due anni scolastici di didattica a distanza a causa del Covid. Per questo motivo è facile immaginare una loro maggiore disaffezione.

In ogni caso è significativo il fatto che la scuola superiore sia stata largamente citata. Questo sembrerebbe sconfessare l'idea, largamente condivisa da studenti, insegnanti e famiglie, per cui alle superiori sia tardi per avere un impatto su studenti che "ormai hanno un atteggiamento negativo verso la matematica".

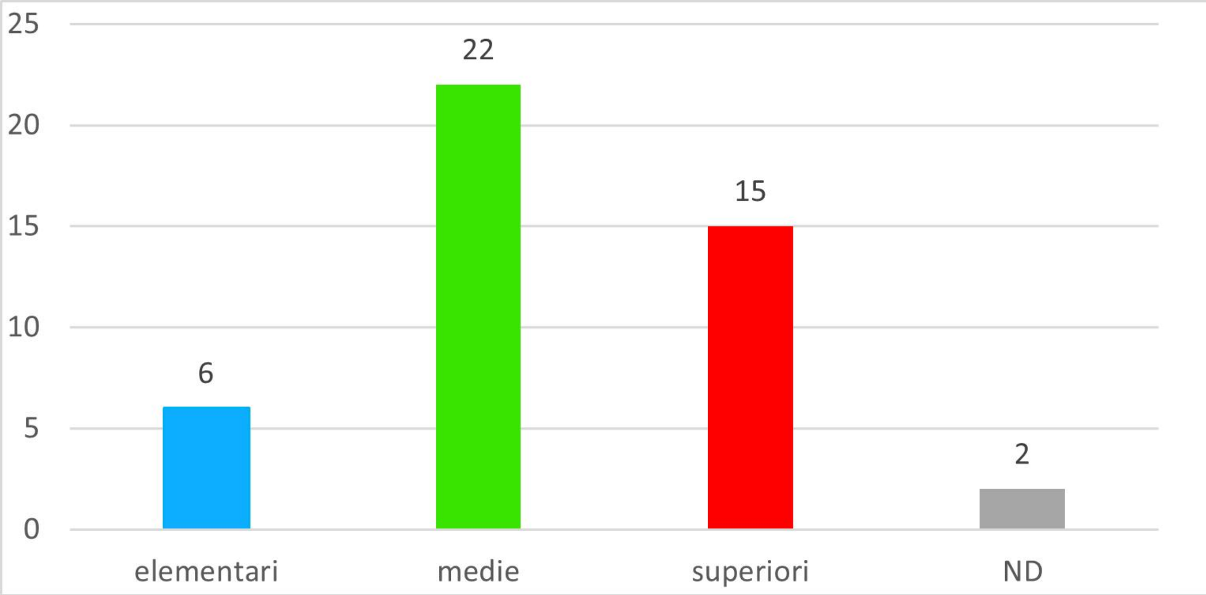


Figura 2.7: Grafico sui periodi in cui la matematica è stata apprezzata meno. Risposte alla domanda 10.

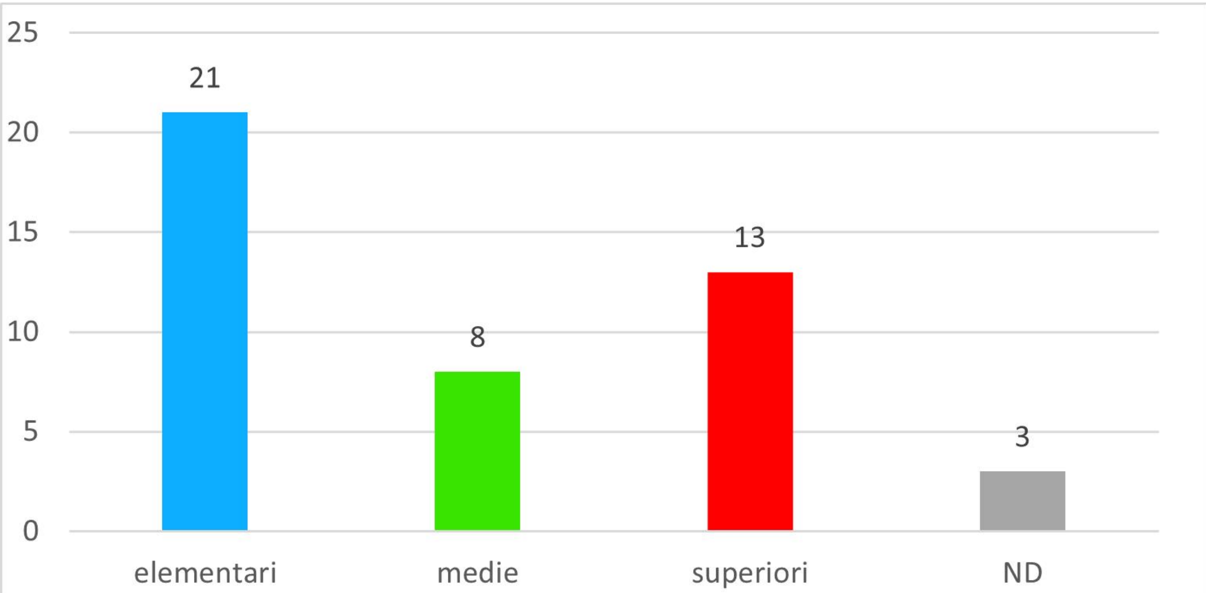


Figura 2.8: Grafico sui periodi in cui la matematica è stata apprezzata di più. Risposte alla domanda 11.

2.3.6 Cosa distingue la matematica

Le risposte al quesito numero 13 sono riportate nel grafico in figura 2.9. Come si può notare la maggior parte degli studenti ritiene che la matematica sia diversa dalle altre discipline perché coinvolge, nel senso che richiede ed esercita, capacità di ragionamento, $34,21\%$ delle risposte disponibili, o più genericamente perché è più difficile $23,68\%$.

C'è poi una parte di studenti che distingue la matematica perché oggettiva, cioè il 20% degli studenti che hanno risposto. Ed altri che vedono come unica differenza il fatto che la matematica riguardi i numeri e i calcoli, 16%.

Lo stesso numero di rispondenti, sempre il 16% ritiene che la matematica non abbia alcuna caratteristica in particolare rispetto alle altre materie.

Interessanti alcune risposte singole, che per questioni di leggibilità del grafico sono indicate come "altro". In particolare, una persona ritiene che la matematica a differenza di altre discipline sia inutile; a questo proposito la questione è stata approfondita nella sottosezione seguente. Un'altra persona ha risposto evidenziando come nella matematica serve commettere errori per migliorare (il che a titolo squisitamente personale non è una differenza rispetto ad altre materie). Infine, l'ultima risposta ritiene che la matematica sia diversa perché comporta una serie di pregiudizi sociali. Tematica che spesso rischia di essere sottovalutata, e che nelle risposte a questo questionario riemerge a più riprese.

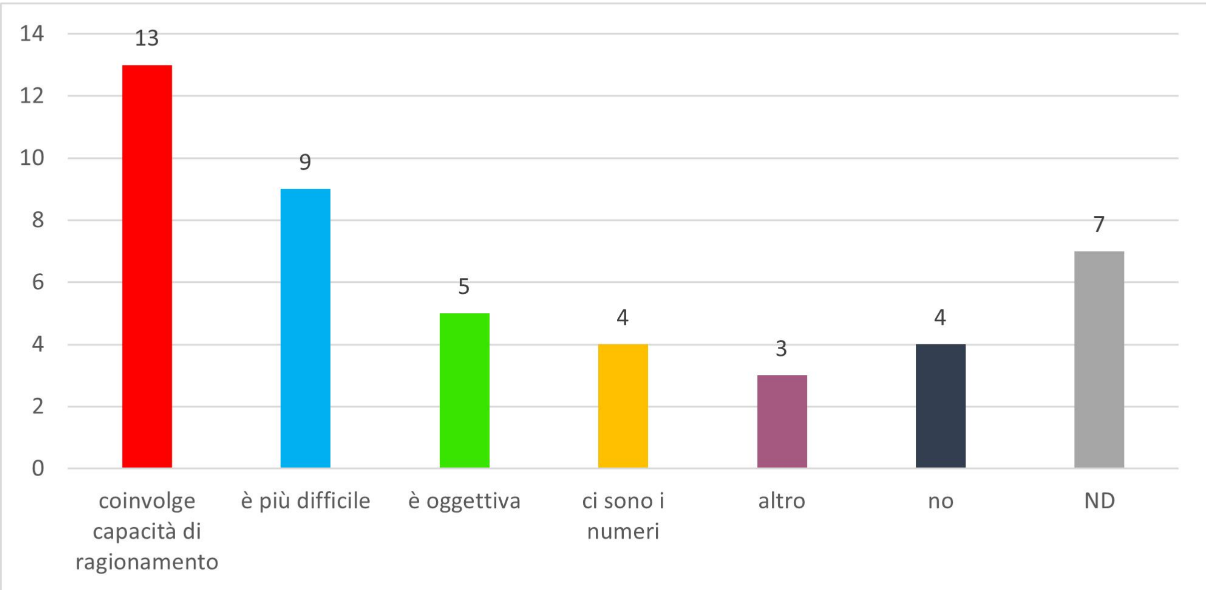


Figura 2.9: Grafico su quali eventuali caratteristiche distinguono la matematica dalle altre discipline. Risposte alla domanda 13.

2.3.7 A cosa serve la matematica?

La domanda, a volte oziosa o retorica, è una di quelle che gli insegnanti si sentono rivolgere più spesso e a cui è difficile dare una risposta esaustiva e sintetica. La tentazione potrebbe essere di rispondere per frasi fatte: "La matematica serve a far volare gli aerei", "senza la matematica non avremmo i telefonini" o il sempreverde "a non sbagliare i conti al supermercato". Anche se non sempre l'allievo che pone la domanda vuole una risposta vera, queste sono comode non-risposte, che sviliscono la vera utilità della matematica, sicuramente non limitata al fare i conti al supermercato, o che non spiegano quale sia il ruolo effettivo della matematica, *come mai è importante che qualcuno la conosca perché gli aerei volino?*, *quale è il nesso fra la conoscenza della matematica e la capacità di far volare gli aerei?*, rendendo il tutto quasi un atto di fede.

Nel questionario la domanda è stata rimbalzata agli studenti, articolandola in due quesiti: "La matematica che studi o che hai studiato prima, ti è mai stata utile nella vita quotidiana?", "In generale, pensi che sia importante che le persone studino la matematica?". Le risposte a tali quesiti si trovano nei grafici seguenti, rispettivamente in 2.10 e in 2.11, entrambe a pagina 25.

Come si può notare una grandissima percentuale di chi ha risposto ai quesiti considera utile la matematica e importante che venga studiata, rispettivamente $79,55\%$ e $86,64\%$ di chi ha fornito una risposta. Può sorprendere il fatto che la percentuale di chi ritiene importante che la matematica venga studiata sia più alta della percentuale di chi l'ha trovata utile nel vissuto quotidiano. Questo fatto potrebbe però essere spiegato andando ad indagare le motivazione che gli studenti hanno riportano, sempre visibili nei grafici 2.10 e 2.11. La maggioranza assoluta di chi ha trovato utile la matematica studiata finora ha specificato che solo saper svolgere i "calcoli di base" gli è stato veramente utile. Inoltre, ben 6 studenti hanno citato esplicitamente situazioni come fare la spesa al supermercato, saper contare il resto e non sbagliarsi nei negozi. Anche queste situazioni tutte risolvibili con le quattro operazioni elementari e forse risposte frutto del sentito dire più che del vero vissuto quotidiano degli studenti. Il dato è inoltre coerente col fatto che anche fra chi ritiene importante che la matematica venga studiata in generale una buona fetta di persone, cioè il 41%, limita comunque l'importanza alla matematica di base.

Va comunque menzionato che fra gli studenti che ne riconoscono l'importanza molti hanno anche dato motivazioni più ampie. Il $20,51\%$ dichiara che la matematica è importante per la "comprensione della realtà", il $17,95\%$ menziona il "contesto professionale", il $12,82\%$ afferma che è importante in quanto allena la mente e solo uno studente, cioè il $2,56\%$ cita lo sviluppo di nuove tecnologie.

La situazione che emerge è dunque che gli studenti riconoscono l'importanza della matematica nella società ma molti la scollegano dalla propria esperienza personale, nel loro vissuto basta una matematica di base, di sopravvivenza. Forse per questo molti a scuola non riescono a cogliere il punto di perché debbano studiare quelli che percepiscono come argomenti inutilmente complicati, che servono solo a certe persone in certi contesti lavorativi.

2.3.8 Cosa serve per "essere bravi" in matematica

I dati relativi al quesito numero 16 sono riportati in figura 2.12.

Interessante notare come la risposta più comune, data dal $46,15\%$ degli studenti, sia che per essere bravi in matematica servano studio e concentrazione, mentre per un'altra grande fetta, cioè il $30,77\%$, servano predisposizione e capacità logiche. Le due categorie di studenti sono contrapposte. I primi vedono nell'impegno un mezzo per la riuscita, mentre i secondi relegano le possibilità di successo ad una predisposizione, che incrociando i dati con le altre risposte fornite, spesso sentono di non avere. Per questo motivo, è facile immaginare che gli studenti della seconda categoria siano scoraggiati e non sufficientemente motivati a mettersi in gioco e provare ad applicarsi in matematica. C'è quindi il rischio che inneschino una profezia autoavverante, o un circolo vizioso, in cui non essendo loro adatti alla matematica non vale la pena che si esercitino, arrivando ad ottenere così risultati negativi che gli confermano il non essere adatti.

Da questo punto di vista è estremamente positivo e forse sorprendente che siano in maggioranza le risposte per le quali lo studio e l'impegno sono una possibilità di riuscita. Chiaramente sugli studenti che la pensano in questo modo l'insegnante ha un margine di lavoro più ampio, non dovendoli prima convincere delle loro possibilità di miglioramento.

Per quanto riguarda le altre categorie individuate nel grafico, ci sono gli studenti per cui bisogna imparare le regole, cioè quelli che vedono nella matematica un insieme di leggi o regole che basti *sapere*. Il rischio per questi studenti, che sono il $12,82\%$, è che credano sia sufficiente studio mnemonico molto approfondito, e nel fare un esercizio cerchino di riprodurne i passaggi senza cercare di capirli.

Ci sono infine gli studenti per cui per essere bravi in matematica serve la passione, $5,13\%$ o altri fattori esterni all'individuo, sempre il $5,13\%$. Questi ultimi allievi in particolare hanno citato esplicitamente uno la calcolatrice e l'altro l'aiuto dell'insegnante.

2.3.9 La comprensione della matematica come base per l'apprezzamento

Analizzando ulteriormente le risposte emerge chiaramente e senza stupire che per apprezzare la matematica è necessario comprenderla.

Fra gli studenti che alla domanda numero 3, su quale emozione suscitasse la matematica hanno risposto con emozioni fortemente negative, riconducibili alle aree semantiche di rabbia, disgusto e ansia ben il 65% ha citato l'aggettivo "difficile" o un suo sinonimo nel rispondere alla domanda numero 2. Dato che scende drasticamente al 31% fra gli studenti che hanno associato qualsiasi altro tipo di emozione (felicità, sicurezza, noia, assenza di emozioni...).

Ciò è inoltre confermato dalle risposte alle domande 6, 7, 8 e 9, il cui scopo non era tanto entrare nel merito di quali argomenti o aspetti della matematica fossero più o meno apprezzabili, ma forzare gli studenti a trovarne *alcuni* apprezzabili, e spiegare le proprie ragioni. In questo caso ben un quinto degli studenti ha risposto con quello che è stato considerato un "rifiuto totale" della materia. Fra gli altri, escludendo chiaramente le risposte non disponibili, oltre il 78% degli studenti ha motivato il non apprezzamento dello specifico argomento con ragioni riconducibili alla "non comprensione". Solo uno studente (che corrisponde circa al 3%) ha affermato di non apprezzare l'algebra perché "è inutile" e un altro ha dichiarato di non apprezzare svolgere esercizi alla lavagna per un senso di disagio e vergogna. I restanti 5 studenti (circa il 15%) hanno spiegato di non apprezzare certi argomenti per un senso di frustrazione o noia che provano nel commettere errori semplici.

Analizzando invece le motivazioni del perché certi argomenti siano piaciuti e sempre non tenendo conto di chi ha espresso un rifiuto totale e di chi non ha fornito risposte, emerge che al 51% degli intervistati (16 ragazzi) basta comprendere un dato argomento per apprezzarlo. 3 studenti, cioè più del 9%, hanno apprezzato solo il saper fare calcoli di base perché ne riconoscono l'utilità. 10 studenti (32%) apprezzano certi argomenti perché li trovano "interessanti", "divertenti" o "soddisfacenti" e 2 apprezzano il carattere logico di alcuni argomenti in particolare.

Un'ulteriore conferma di questo aspetto arriva dalle risposte alla domanda 18, che chiedeva di proporre suggerimenti per l'insegnante. In questo caso, poco più della metà degli studenti (il 52%) desidererebbe dall'insegnante una maggiore semplificazione degli argomenti, più tempo dedicato al ripasso o una maggiore dedizione individuale agli studenti. Tutte richieste che riportano ad un desiderio di maggiore comprensione. Circa un quarto (27%) degli studenti suggerirebbe invece un approccio più stimolante o di mostrare maggiormente l'utilità della materia. Infine, per completezza il 15% non darebbe alcun consiglio e il 6% vorrebbe un approccio che incutesse "meno paura".

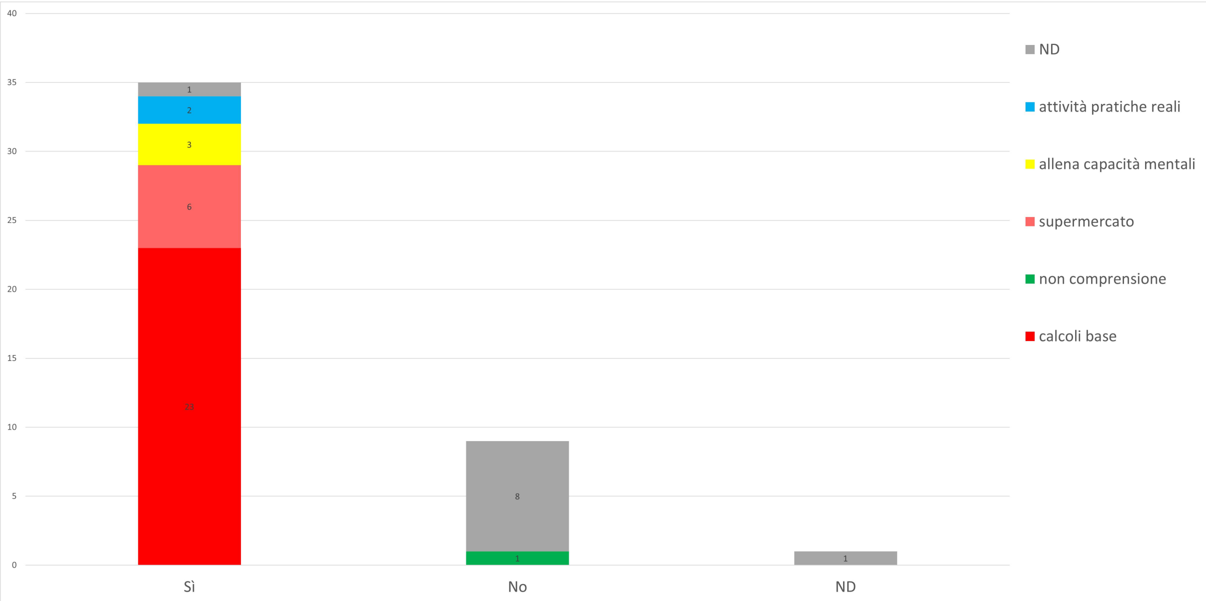


Figura 2.10: Grafico sull'utilità della matematica nel quotidiano, risposte alla domanda 14.

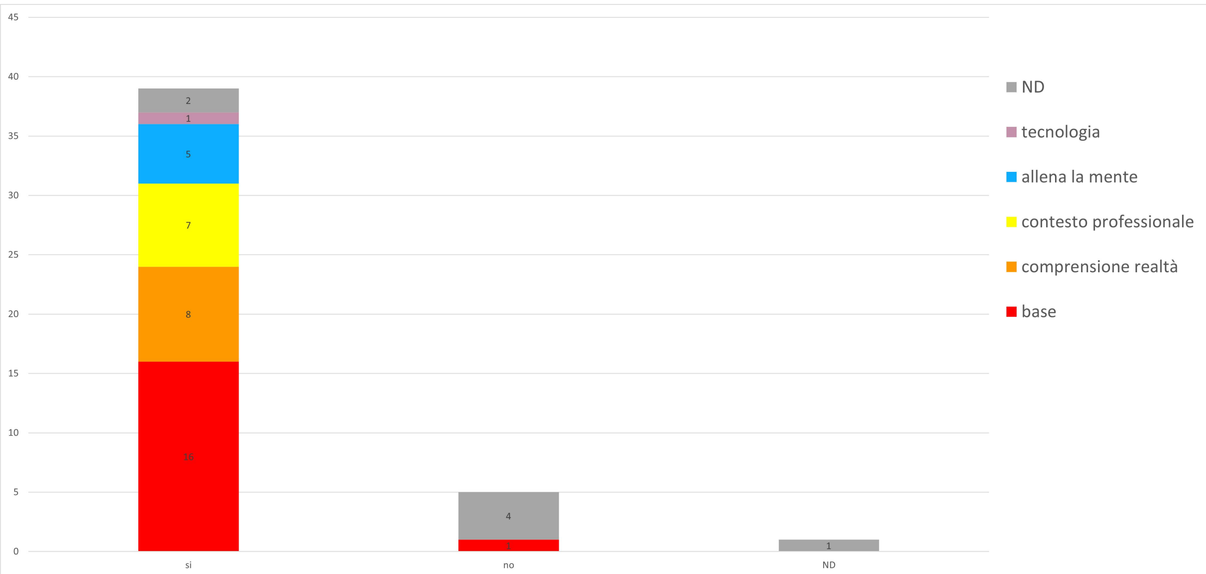


Figura 2.11: Grafico sull'utilità della matematica in generale, risposte alla domanda 15.

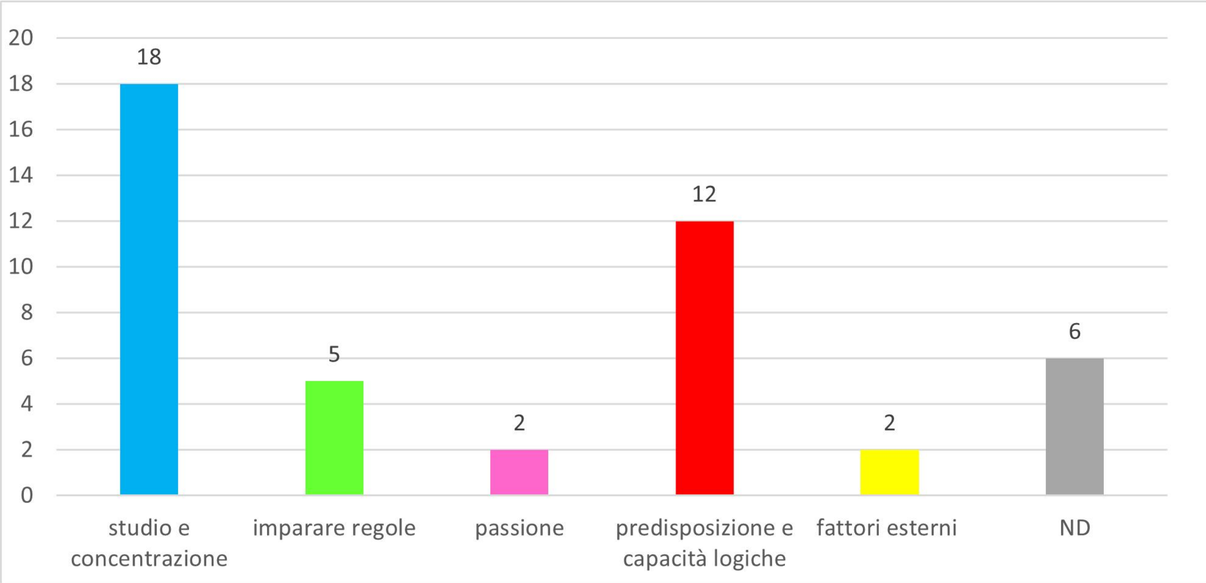


Figura 2.12: Grafico su cosa servirebbe per "essere bravi" in matematica, risposte alla domanda 16.

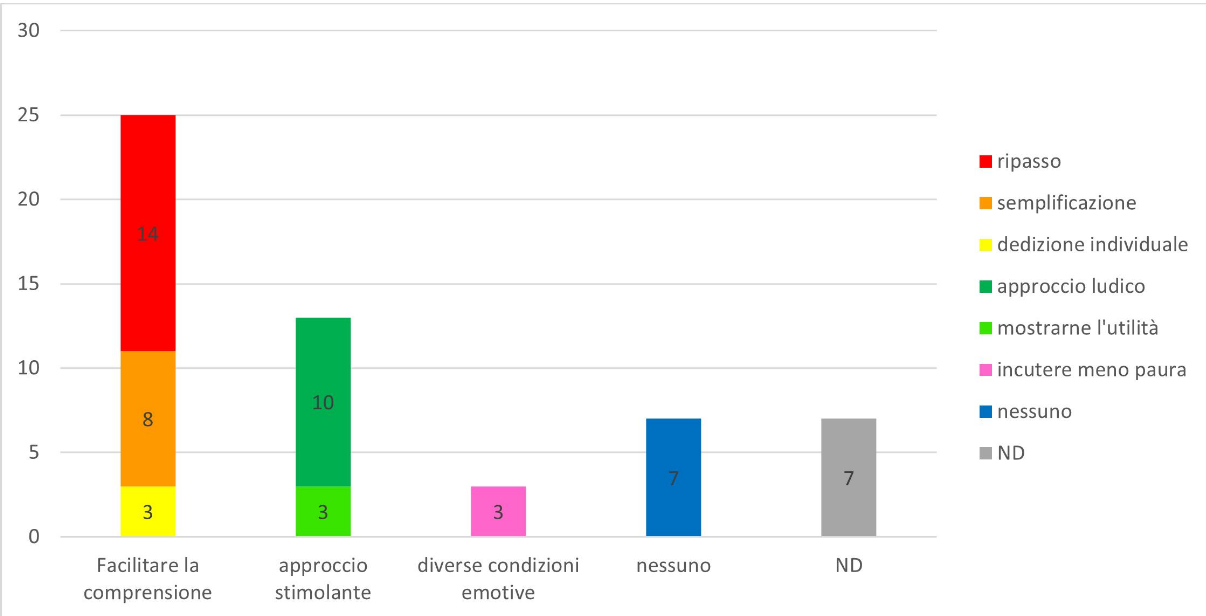


Figura 2.13: Grafico sui suggerimenti che gli intervistati darebbero all'insegnate, risposte alla domanda 18.

Capitolo 3

Attività sui problemi

3.1 Obiettivi dell'attività

L'attività svolta in classe aveva tre obiettivi. Il primo e più importante è di carattere esclusivamente didattico: introdurre ed allenare gli allievi alla risoluzione dei problemi, facendogli fare pratica e fornendogli tecniche ed impostazioni di ragionamento, con lo scopo di migliorarne le performance.

Gli altri due obiettivi, oggetto di questa analisi e strettamente connessi fra loro, sono di potenziare le capacità metacognitive degli studenti e di valutarne le performance nella risoluzione di problemi. In particolare, l'intero percorso è stato finalizzato al cercare di rispondere alle seguenti domande:

D1 La capacità degli studenti di risolvere problemi, può essere migliorata con un percorso specifico?

D2 Con essa, evolvono anche le capacità metacognitive degli studenti? Essi miglioreranno nell'essere consapevoli delle proprie conoscenze, utilizzarle per pianificare strategie e valutare l'efficacia di tali strategie?

3.2 Descrizione dell'attività

3.2.1 Il contesto in cui è stata svolta

L'attività sui problemi è stata svolta contemporaneamente in tre classi prime, nelle ultime sei settimane dell'anno scolastico, quando la maggior parte degli argomenti programmati ad inizio anno scolastico era già coperta.

Le tre classi prime prese in esame sono quelle di cui si è abbondantemente parlato nel capitolo precedente, dove è stato analizzato il loro rapporto conflittuale con la matematica e la percezione che ne hanno.

Nonostante l'obiettivo didattico dell'attività sia stato portato avanti in tutte e tre le classi prime, i dati, per limiti di tempo ed imprevisti di vario genere, più che comuni nell'ambiente scolastico, sono stati raccolti in maniera completa e strutturata soltanto per una delle tre classi prime. Per questo motivo solo i risultati di tale classe vengono presi in esame.

La classe in questione è composta di ventiquattro studenti, diciannove femmine e cinque maschi. All'interno della classe sono presenti tre alunni con bisogni educativi speciali, fra cui due con disturbi specifici dell'apprendimento. Queste persone hanno comunque completato l'attività in ogni sua parte, con le agevolazioni previste dal proprio piano didattico personalizzato. I loro risultati sono inclusi in quelli della classe, senza ulteriori specifiche. Lo stesso approccio è stato tenuto nei confronti di due studenti di origine straniera, con un livello di lingua italiana minimo. Per quanto per questi due studenti la comprensione delle consegne, dei testi e di ogni richiesta fosse molto più difficoltosa e non sia sempre riuscita, nonostante i vari tentativi di facilitazione, i loro risultati sono inclusi insieme a quelli di tutta la classe, senza specifiche ulteriori. La scelta di includere queste cinque persone nella raccolta di dati è stata ponderata alla luce del fatto che la presenza di alunni BES o non madrelingua riproduce una situazione classe reale, tutt'altro che rara.

Infine, occorre una premessa che chiarisca il contesto emotivo con cui gli studenti hanno affrontato l'attività. Per stimolare la loro partecipazione attiva a tutto il percorso e non rischiare di inibirli, come spesso accade con le consegne matematiche, è stato loro chiarito che durante l'attività sui problemi non avrebbero ricevuto voti sulle loro performance, ma soltanto sul loro impegno e la loro serietà. Questa impostazione ha fatto si che, a sorpresa, alcuni degli alunni che durante l'anno scolastico si erano dimostrati a varie riprese quantomeno riluttanti, partecipassero con una certa convinzione ed entusiasmo.

3.2.2 Il ruolo dell'insegnante

Nelle varie fasi dell'attività l'insegnate ha ricoperto uno o più dei seguenti ruoli, a seconda di cosa la situazione richiedesse e cercando di intromettersi sempre meno nei processi risolutivi degli allievi:

- Modello di buon risolutore di problemi, il quale per esempio risolve problemi alla lavagna pensando ad alta voce. Mostrando anche come sia possibile imboccare vicoli ciechi e strade che non portano alla soluzione

- Facilitatore, il quale orienta talvolta la classe talvolta i singoli studenti al superamento di situazioni di stallo, innescando meccanismi di ragionamento. Ponendo domande col duplice scopo di favorire la soluzione del problema specifico e di far si che la classe e i singoli allievi imparino a porsi le domande giuste per favorire la soluzione di problemi futuri, più o meno simili.

- Osservatore esterno, cioè colui che osserva senza interferenze nel processo risolutivo, ma raccoglie informazioni sugli studenti, lasciandoli liberi di esprimersi, fare tentativi e talvolta confrontarsi senza sentirsi giudicati.

3.2.3 I problemi assegnati

Di seguito è riportata la lista completa e in ordine cronologico dei problemi assegnati (disponibile anche in appendice B). I problemi sono stati riadattati ispirandosi libera-mente a varie fonti, fra cui "How to solve it", di G. Pólya, I "Giochi di Archimede" di varie edizioni, in questo caso impostandoli con domande aperte anziché risposte multiple, manuali scolastici e/o di preparazione alle prove INVALSI. Nella selezione dei problemi si è cercato di garantire una certa eterogeneità, sia per quanto riguarda la complessità della soluzione, sia per quanto riguarda il tipo di ragionamento e gli argomenti matematici necessari a ricavarla, cercando comunque di rispettare il principio suggerito da Pólya per cui un problema non dovrebbe essere né palesemente troppo semplice né palesemente troppo complesso, per non inibire l'interesse del potenziale risolutore, che come egli afferma deve *desiderare* la soluzione.

P1 Un orso, partendo dal punto P, percorre un chilometro verso sud. Poi cambia direzione e cammina per un altro chilometro verso est. Poi, girando ancora verso sinistra percorre un altro chilometro verso nord. Arriva così esattamente al punto P di partenza. Di che colore è l'orso?

P2 Roberto vuole comprare un terreno, perfettamente livellato, che abbia quattro linee di confine. Due linee lungo la direzione esatta nord-sud, le altre due esattamente in direzione est-ovest, e ogni linea di confine che misuri esattamente 100 metri. Roberto può comprare un terreno di questo tipo in Italia?

P3 Un motore elettrico fa 3000 giri al minuto. Di quanti gradi gira al secondo?

P4 Se un pneumatico ruota a 400 giri al minuto quando l'auto viaggia a 72 km/h, qual è la circonferenza del pneumatico?

P5 Tanto tempo fa in India, un'anziana donna si recava tutti i giorni a prendere l'acqua al pozzo, mettendosi sulle spalle un bastone con alle estremità appesi due secchi. Ogni giorno riempiva i secchi con 6 litri di acqua ciascuno e lentamente tornava a casa. Uno dei due secchi, però, essendo rotto, perdeva 1 dl di acqua ogni 100 m e quando l'anziana donna tornava a casa il secchio rotto era sempre pieno solo a metà. Quanto era distante la casa dal pozzo?

P6 Il lato maggiore della cornice di un quadro è i $\frac{5}{4}$ del lato minore. La cornice ha tutti i lati dello stesso spessore. Nel quadro all'interno della cornice il lato maggiore misura 32 cm e il minore 24 cm. Di quanti centimetri quadrati è l'area del rettangolo delimitato dal bordo esterno della cornice?

P7 A un pittore viene commissionato un dipinto per il quale si vuol far costruire una bella cornice spessa 5 cm. La tela originale è di forma rettangolare ed è noto che l'altezza è i 5/9 della base, mentre la differenza fra base ed altezza è 28 cm. Quanto misura l'area della cornice?

P8 Nadia affitta una macchina. La sua compagnia le fa pagare una tariffa di 50 euro al giorno più 0, 40 euro al chilometro. Aldo si affida ad un'altra compagnia che fa pagare 70 euro al giorno più 0, 30 euro al chilometro. Per quanti chilometri Nadia e Aldo devono guidare il primo giorno per pagare la stessa cifra?

P9 Nell'isola dove vivono solo cavalieri (che dicono sempre il vero) e furfanti (che dicono sempre il falso), l'ufficio postale è piuttosto affollato. Ci sono quattro file agli sportelli: una con 12 persone, una con 11, una con 15 e una con 14 persone. Ognuno dei presenti (tranne i primi due di ciascuna fila) dice questa frase: "tra le persone davanti a me nella mia fila ci sono almeno due furfanti". Quanti sono in tutto i cavalieri all'ufifcio postale?

(Aiutati con una qualche rappresentazione, schema, diagramma, schizzo, tabella, ecc.)

P10 Sia Luca che Claudia hanno in mano una carta rossa e una nera. Luca pesca una carta a caso dalla mano di Claudia e la aggiunge alle proprie. A questo punto, Claudia pesca una carta dalla mano di Luca. Qual è la probabilità che ciascuno dei due venga a trovarsi con due carte in mano dello stesso colore (uno con due carte rosse, uno con due carte nere)?

(Se volete aiutatevi con una qualche rappresentazione, schema, diagramma, schizzo, tabella, ecc.)

P11 Francesco vuole ripiastrellare l'area esterna al bordo della sua piscina. Ha a disposizione 650 mattonelle, tutte quadrate e col lato di 20 cm. Sapendo che la piscina è di forma rettangolare, con i lati di 4 e 7 metri. Quanto deve essere spessa l'area piastrellata, se Francesco vuole che essa sia tutta dello stesso spessore e con le mattonelle accostate perfettamente, ignorando quindi lo spazio per le fughe?

P12 Uscendo di casa Federica ha speso un quinto dei suoi soldi in cartoleria e la metà del rimanente in una libreria. Al termine dei suoi acquisti le sono rimasti 20 euro. Quanti soldi aveva in partenza?

P13 Un giardino rettangolare nella casa della signora Verdi ha una lunghezza di 100 metri e una larghezza di 50 metri. All'interno del giardino è prevista la realizzazione di una piscina quadrata. Trova la lunghezza di un lato della piscina se l'area rimanente (non occupata dalla piscina) è uguale alla metà dell'area del giardino rettangolare.

3.2.4 Come era articolata l'attività

L'attività è stata un percorso continuo, svolto in parte in classe e in parte a casa dagli studenti. Per semplicità, a seconda di quale fossero gli obiettivi principali, o le consegne date agli studenti possono essere distinte sette fasi.

Introduzione alla soluzione di problemi e linee guida da seguire: La prima fase, di carattere introduttivo e durata poco più di un'ora, è l'unica in cui non sono stati risolti, o proposti, problemi. È stato spiegato agli studenti, a grandi linee, in cosa sarebbe consistita l'attività. È stato loro detto che non sarebbero stati giudicati nelle performance ma nell'impegno, e soprattutto sono state date loro indicazioni generali su come risolvere un problema.

Tali indicazioni, consultabili in appendice C, sono tratte da "How to solve it di Pólya. L'autore articola il processo di risoluzione di un problema in quattro fasi consecutive: capire il problema, elaborare un piano, attuare il piano e ricontrollare. Per ognuna di queste fasi elenca inoltre delle domande o delle brevi istruzioni che un buon risolutore di problemi dovrebbe assimilare ed imparare a porsi o applicare, per far scattare un ragionamento utile alla risoluzione. Durante la lettura di tali indicazioni per ogni domanda e per ogni breve istruzione sono stati proposti o richiesti agli studenti degli esempi adeguati.

In questa fase il ruolo dell'insegante è stato esclusivamente quello di Modello , limitatamente agli esempi che venivano fatti.

Soluzione collettiva dei primi problemi: Nella seconda fase sono stati risolti in classe i primi due problemi. Il primo in assoluto, P1, è stato scelto proprio per la sua originalità, per stupire i ragazzi, coinvolgerli, incuriosirli ed allontanarli subito dalla concezione di problema-esercizio a loro tanto familiare. Il problema è stato risolto collettivamente dalla classe, con l'ausilio un alunno volontario che annotava alla lavagna tutte le idee che gli altri proponevano, *formalizzandole* su loro indicazione.

Sotto indicazione dell'insegnante, con il ruolo di Facilitatore e di Osservatore, gli alunni per cimentarsi nella risoluzione hanno seguito le linee guida fornite loro nella fase iniziale. La risoluzione collettiva è stato un pretesto per mostrare ed esplicitare molti dei concetti che in fase introduttiva sono stati visti solo tramite brevi esempi, come l'importanza di capire tutti i dati, chiedersi quale fosse il nesso fra il problema e i dati, eventualmente cercare di riformulare il problema. Questo punto in particolare è stato eseguito con l'aiuto dell'insegnante. Per agevolare la risposta a "di che colore è l'orso?", ed evidenziare un potenziale nesso è stato chiesto agli studenti di ragionare sull'informazione richiesta, l'incognita. Nello specifico, è stato chiesto loro "Da che cosa dipende il colore degli orsi?", per cercare di esplicitare un possibile legame fra dati e condizioni ed incognita. Alla fine, dopo che qualcuno degli studenti più brillanti ha individuato la risposta corretta gli è stato chiesto di spiegarla alla classe finché tutti ne fossero convinti.

Per il secondo dei problemi, P2, si è seguito un procedimento analogo, sempre soluzione collettiva alla lavagna. P2 è stato il pretesto per mostrare come ciascuna delle quattro fasi fosse importante. In particolare è stata rimarcata l'importanza dell'ultima fase, quella di ricontrollo. Per la soluzione di questo problema il ruolo dell'insegnante è stato di

Osservatore, Facilitatore, nel porre la domanda: "Avete risolto problemi simili? e di Modello, nel mostrare come certe linee di ragionamento fossero errate.

Un primo problema da risolvere individualmente: Nella terza fase gli studenti sono stati invitati per la prima volta a risolvere autonomamente un problema, il P3. La soluzione è stata svolta in classe l'insegnate svolgeva il ruolo di Osservatore e di Facilitatore, in certi casi indirizzando gli studenti più in difficoltà, in altri casi esortandoli a porsi alcune delle domande fornitegli in precedenza. Dopo una ventina di minuti alcune delle soluzioni sono state viste e commentate alla lavagna, sempre con lo scopo di rafforzare l'importanza di alcuni passaggi di ragionamento.

Problemi da risolvere in autonomia, con pre- e post-test di autovalutazione: In questa fase, che può essere considerata il fulcro di tutta l'attività, gli studenti sono stati invitati a risolvere in autonomia i problemi P4, P5, P6, P7, P8 e P9. Per ciascuno dei problemi agli studenti sono stati assegnati anche un pre-test, da compilare dopo aver letto la consegna del problema e prima di cimentarsi nella risoluzione vera e propria, e un post-test, da compilare dopo aver cercato di risolvere al meglio il problema. Questi test, visibili in appendice, servivano a raccogliere dati circa la capacità di autovalutazione, e di valutazione delle proprie competenze, componenti della metacognizione, ed il loro eventuale evolversi.

La risoluzione di alcuni di questi problemi, in particolare del P4 e del P6, è stata assegnata agli allievi come compito a casa, e con essa la compilazione dei relativi test di autovalutazione. Tutti gli altri problemi sono invece stati risolti in classe. Ognuno di questi problemi, in seguito alla risoluzione, o al tentativo di risoluzione è stato risolto e commentato alla lavagna.

In questa fase il ruolo dell'insegnante era quasi essenzialmente quello di Osservatore esterno, in rarissimi casi di Facilitatore, soltanto nel ribadire agli studenti di imparare a porsi le domande fornitegli nelle linee guida e già ampiamente discusse in classe. I tre studenti BES e i due non madrelingua hanno ricevuto un supporto maggiore, ciascuno in accordo con il proprio piano didattico personalizzato.

In questa fase si è deciso di sottoporre agli studenti problemi di vario genere, alcuni più semplici, altri più complessi per il loro livello, alcuni la cui soluzione richiamasse quella di altri problemi già visti e altri "nuovi". Nel primo caso l'obiettivo era di verificare le loro abilità di riconoscimento e auspicabilmente facilitargli la soluzione, ricalcando quanto fatto per i primi due problemi. Era questo il caso per esempio del problema P4 e dei due problemi consecutivi P6 e P7. Nel caso di problemi "nuovi", al contrario, si è cercato di allargare il bacino di argomenti matematici e di tipo di ragionamento coinvolti, per non rischiare di indurre gli studenti a credere che esistano soluzioni standardizzate.

Un problemi da risolvere da risolvere a coppie: Nella quinta fase del percorso si è deciso di formare coppie omogenee, cioè in cui i due componenti avessero circa la stessa attitudine alla matematica, e di assegnare loro la soluzione del problema P10, da ricercare in classe. In questa fase il ruolo dell'insegnante è stato esclusivamente di

Osservatore esterno, che passa fra i banchi e raccoglie informazioni. Anche il pre-test e il post-test sono stati compilati dalla coppia.

Cercare di porre un problema: In questa parte del percorso gli studenti sono stati messi alla prova con il problem posing, attività che, come ampiamente descritto in sezione 1.3, è strettamente connessa al problem solving. La consegna, volutamente non restrittiva e che non desse suggerimenti in particolare era di inventare un problema, che sarebbe poi stato eventualmente sottoposto ad una delle altre classi prime. Si è deciso di assegnare questa consegna soltanto a questo punto in modo che gli allievi avessero a disposizione un campionario di almeno nove problemi differenti, e fossero così auspicabilmente scoraggiati a proporre la fotocopia di uno dei problemi visti. L'obiettivo della consegna era indurli ad uno sforzo di fantasia, dopo aver avuto difficoltà nel risolvere qualche problema saper riconoscere cosa era stata per loro tale difficoltà e saperla riproporre ad altri, ma in forma differente. Durante quest'attività il ruolo dell'insegnante era prettamente di Osservatore esterno.

Gli ultimi problemi da risolvere: Nell'ultima fase, svoltasi esclusivamente a scuola, agli studenti è stato chiesto nuovamente di risolvere autonomamente alcuni problemi, il P13, P14 e P15, e di compilare i relativi pre-test e post-test. L'insegnante ha esclusivamente ricoperto il ruolo di Osservatore esterno, sempre con le eccezioni degli alunni BES e non madrelingua. Il problema P13 era stato inventato in una delle altre classi prime in precedenza, gli altri due sono stati leggermente modificati, prendendoli uno da un manuale di preparazione alla prova INVALSI, l'altro dal libro di testo degli studenti. È stata una scelta effettuata affinché i problemi non risultassero estremamente complessi, come alcuni dei precedenti potevano sembrare e per far si che una porzione maggiore di studenti potesse risolverli o si sentisse comunque meno scoraggiata nel provarci.

3.3 Raccolta dati e metodologia di analisi

3.3.1 I problemi e le soluzioni

Di ogni problema sono stati raccolti i tentativi di soluzione di tutti gli studenti. Sul conteggio delle soluzioni effettive è stata basata una semplice analisi quantitativa volta a determinare un miglioramento nella capacità di risolvere i problemi. A questa analisi si accompagnano le osservazioni raccolte in classe, la cui sintesi descrive il cambiamento progressivo della classe durante l'attività.

Viene inoltre effettuata una disamina dei tentativi di soluzione degli studenti, con l'obiettivo di valutare, per quanto possibile, la comprensione del problema, esplicitata dall' individuazione delle informazioni chiave e dalla loro corretta espressione matematica, l'eventuale impostazione di un ragionamento corretto basato su queste informazioni, e la correttezza dell'esecuzione del piano ideato, cercando così di capire se e quanti studenti riescano nelle prime tre fasi suggerite da Pólya. Va evidenziato inoltre che il problema è stato considerato risolto sulla base della correttezza di esecuzione.

Un'attenzione particolare è rivolta alle rappresentazioni grafiche o schematiche con cui gli studenti hanno ritenuto di facilitarsi. In alcuni problemi questo era addirittura suggerito nella consegna, essendo però tali immagini presenti solo a discrezione del singolo studente non è stato possibile effettuare un'analisi che determinasse un'eventuale evoluzione nel corso del tempo. Si è cercato però, quando presenti, di categorizzare le immagini in base al tipo di informazioni in esse contenute, distinguendo rappresentazioni più "descrittive" da rappresentazioni con un maggiore livello di astrazione. Questa distinzione è stata poi messa in relazione con il successo che lo studente ha avuto nel trovare una soluzione. Questo approccio ha il fine di verificare, anche in questo contesto, il legame fra la metacognizione e l'abilità di risolvere problemi.

Anche per l'esercizio di problem posing, essendo esso unico, non è stato possibile indagare un eventuale progresso nel tempo. Ne vengono comunque riportati alcuni esempi significativi che riassumo l'approcciarsi degli studenti a tale esercizio, e che forniscono una fotografia, da una diversa prospettiva, della situazione della classe.

3.3.2 Test predittivi e test postdittivi

I dati circa le capacità metacognitive degli studenti sono stati raccolti tramite la somministrazione di un test predittivo, cui rispondere subito in seguito all'assegnazione di ogni problema, e di un test postdittivo, cui rispondere una volta conclusa la soluzione o il tentativo di soluzione del problema. I test sono visibili nelle appendici D ed E.

Del test predittivo è stata svolta una semplice analisi quantitativa, contando problema dopo problema quante previsioni fossero verificate ed assegnando un punteggio di +1 ad ogni previsione corretta.

Per quanto riguarda il test predittivo, il conteggio delle risposte alla prima domanda è avvenuto in seguito ad una tripartizione delle stesse. Si è deciso di contare le post-valutazioni corrette, errate ed incerte. Le valutazioni corrette sono state ottenute sommando le valutazioni positive corrette e negative corrette, corrispondenti rispettivamente a chi avendo effettivamente risolto il problema si diceva "Completamente" e "Abbastanza" sicuro della soluzione e a chi a seguito di una mancata soluzione si riteneva "Poco" o "Per niente" sicuro della stessa. Per le valutazioni errate è stato applicato lo stesso principio, mentre chiunque si dicesse "Non molto" sicuro della soluzione è stato conteggiato come post-valutazione incerta.

A seguito dei conteggi, per confrontare con immediatezza i risultati relativi all'inizio del percorso con quelli relativi all'ultimo problema è stato assegnato un punteggio. Sia nel caso del pre-test, sia nel caso del post-test, ogni valutazione corretta ha ottenuto un punteggio di +1, ogni valutazione errata un punteggio di -1 e nel caso delle post-valutazioni incerte non è stato assegnato alcun punteggio.

In entrambi i test erano incluse anche domande circa le motivazioni degli studenti. Purtroppo, non sempre gli studenti hanno fornito risposte e anche quando l'hanno fatto non sempre hanno aggiunto informazioni particolarmente rilevanti. Non è stato possibile fare quindi un'analisi quantitativa di queste risposte, sebbene in certi casi siano state utili per una maggiore chiarezza sulla situazione dei singoli studenti.

3.4 Analisi dei risultati

3.4.1 Le soluzioni dei problemi

I dati relativi a quanti studenti abbiano risolto ciascuno dei problemi sono visibili nel grafico 3.1. Come si può notare le performance complessive sono progressivamente migliorate. Se solo undici studenti hanno saputo risolvere il problema P3, ben sedici sono riusciti con il P13, un dato incrementato dell'oltre 45% fra il primo problema e l'ultimo. Vanno comunque evidenziati alcuni casi particolari.

Il problema P5, riuscendo a diciassette studenti è stato il più risolto in assoluto. Ciò non dovrebbe stupire, in quanto era probabilmente il più facile fra quelli selezionati, e sicuramente quello che gli studenti hanno trovato più facile. Infatti, ben tredici studenti l'hanno trovato facile o facilissimo, contro una media generale di 4,6 e solo uno studente l'ha trovato difficilissimo, contro una media di $6,2$.

Anche il problema P10 è stato risolto da ben sedici studenti. Questo dipende chiaramente dal fatto che il problema sia sto risolto da coppie di studenti, per quanto possibile, con lo stesso livello di preparazione e predisposizione alla matematica . Ciò suggerisce come la collaborazione sia proficua nel migliorare le performance dei singoli.

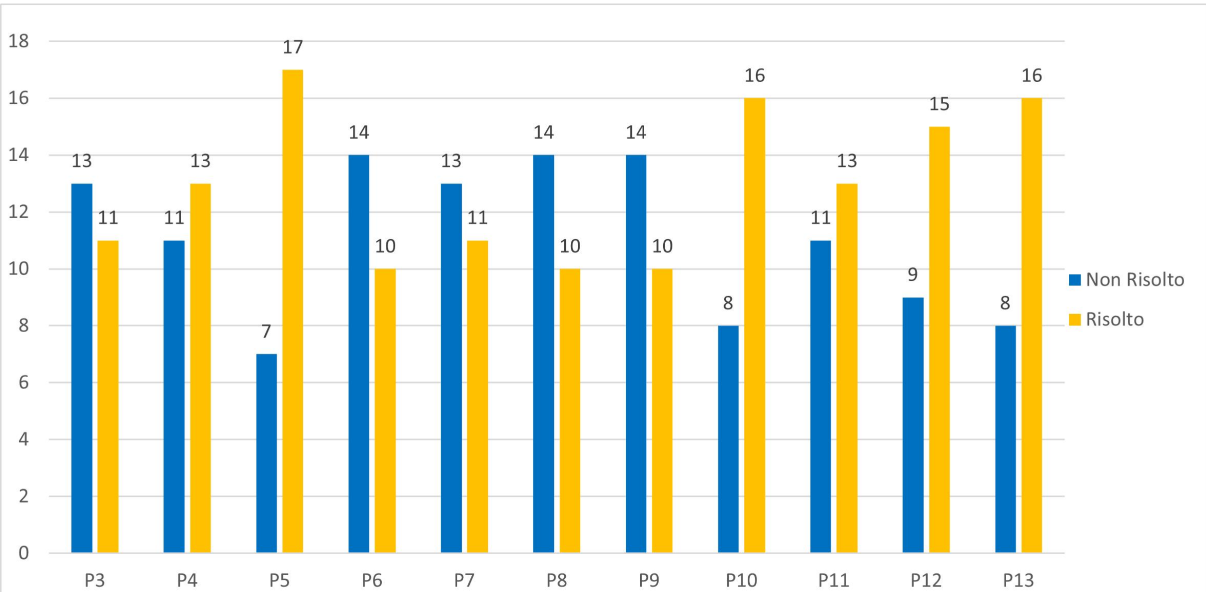


Figura 3.1: Grafico che illustra quanti studenti hanno risolto o meno ciascuno dei problemi.

Questi dati, che indicano un miglioramento generale, concordano con quanto è stato osservato in classe. Se all'inizio infatti la maggior parte degli studenti si dimostrava estremamente riluttante e spaesata, non sapendo come approcciare un problema, nel corso dell'attività molti hanno acquisito sempre più confidenza. La classe è passata da un clima di scoraggiamento e rassegnazione ad un clima di partecipazione attiva.

Specialmente nei momenti di correzione si è notato un entusiasmo crescente. Inizialmente erano pochi gli ad aver trovato una soluzione e ancora meno a volerne parlare alla classe. In seguito per ognuno dei problemi, sempre più studenti volevano parlare dei loro personali approcci, evidenziando e discutendo eventuali differenze. Anche fra gli studenti che ascoltavano le soluzioni proposte, non avendone trovata una, è stato osservato un cambiamento d'atteggiamento. Se per i primi problemi molti accettavano semplicemente la soluzione degli altri, riscrivendola sul quaderno come generalmente fanno quando un argomento viene spiegato dall'insegnante, in seguito hanno iniziato a fare sempre più domande, chiedere il chiarimento di alcuni passaggi specifici ed avere un atteggiamento più attivo. Questo probabilmente li ha aiutati nel rielaborare quelle soluzioni per poterle più o meno direttamente riutilizzare in seguito.

Un entusiasmo ed una dinamica simile a quella ottenuta nei momenti di correzione, si sono potuti osservare durante l'esecuzione del problema in coppia. Gli studenti proponevano infatti le proprie idee, cercando di eseguirle per giungere alla soluzione, o di trovarne le fallacie. La collaborazione è stata vissuta con spontaneità e con un certo slancio, portando, come evidenziato, ad un risultato positivo.

Entrando nel dettaglio dei tentativi di soluzione realizzati di volta in volta dagli studenti sono apprezzabili ulteriori miglioramenti, come visibile nel grafico in figura 3.2. Sono conteggiati gli studenti che hanno saputo individuare ed indicare correttamente le informazioni presenti nel testo, quelli che hanno saputo elaborare un ragionamento, una strategia corretti, e quelli che hanno saputo eseguire correttamente le strategia. Come si può notare queste categorie di studenti son man mano aumentate, sempre con l'eccezione del problema P5 che è risultato particolarmente facile.

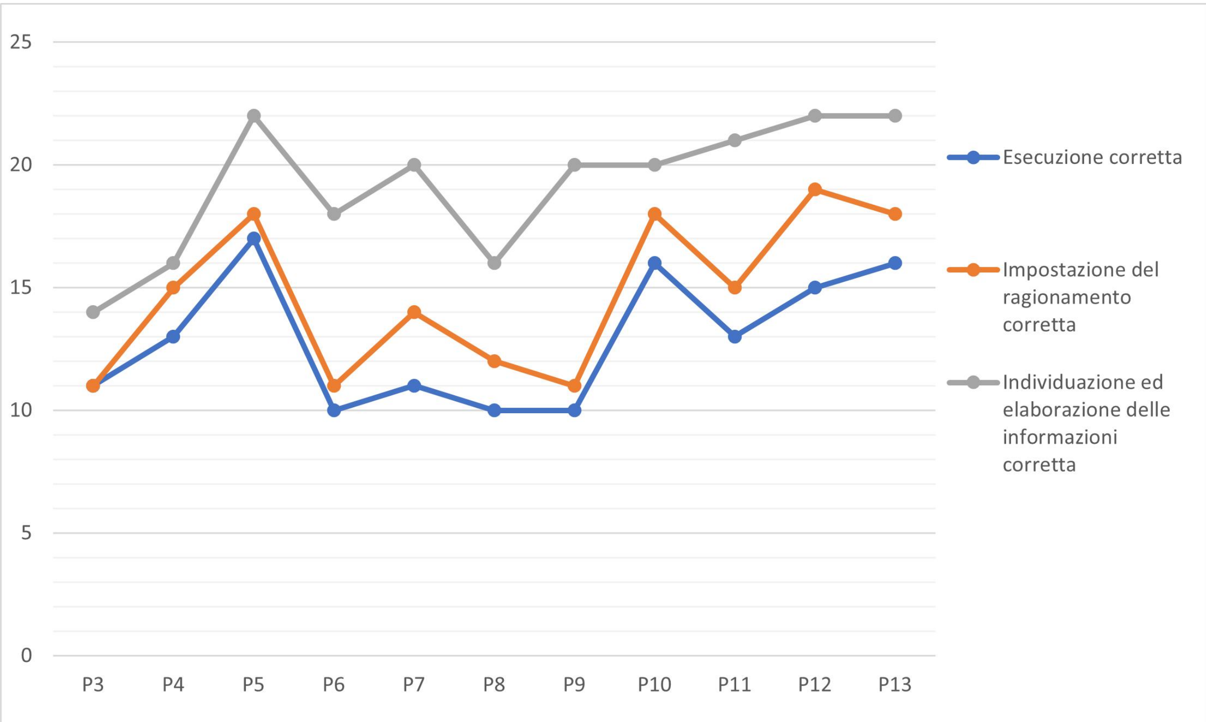


Figura 3.2: Grafico che illustra in quali parti della risoluzione sono riusciti gli studenti per ciascuno dei problemi

Per quanto riguarda i tentativi di soluzione veri e propri, per i primi problemi era più frequente che gli studenti non cogliessero neanche tutte le informazioni. Spesso infatti erano riportati soltanto i dati prettamente numerici, senza nulla che indicasse quali fossero le relazioni, per esempio geometriche, fra i vari dati. Questo fenomeno si è progressivamente ridotto, arrivando all'ultimo dei problemi in cui soltanto due studenti non sono riusciti ad individuare ed esprimere le informazioni chiave.

Come si può notare in alcuni problemi la differenza fra studenti che hanno implementato correttamente la strategie e quelli che l'hanno soltanto pianificata è più bassa che in altri casi. Nel problema P9 per esempio solo uno studente ha elaborato un piano corretto che poi non ha eseguito bene, si è trattato di un semplice errore di calcolo. In altri casi non corretta esecuzione è dipesa da errori ed imprecisioni molto più rilevanti, come la mancata trasformazione di ore in minuti (o viceversa) nello svolgimento di calcolo. In ogni caso, osservando il grafico, pare che sia più complicato il passaggio dall'individuazione e delle informazioni chiave all'elaborazione del piano, che il passaggio successivo all'attuazione del piano elaborato. Spesso infatti per gli studenti era chiaro quali fossero le informazioni in loro possesso e l'informazione da ricercare, talvolta neanche il possibile nesso logico fra le due, era più arduo però capire quali delle proprie conoscenze matematiche (non per tutti sufficienti allo scopo) utilizzare per esplicitare tale nesso.

3.4.2 Analisi delle rappresentazioni grafiche

Come annunciato le rappresentazioni grafiche non erano sempre presenti nelle soluzioni proposte dagli studenti. Esse sono state effettuate in particolare nei problemi P9 e P10, dove il loro utilizzo era esplicitamente suggerito nella consegna del problema.

Ogni rappresentazione è chiaramente unica e differisce dalle altre anzitutto per lo stile personale dello studente o della coppia di studenti che l'ha realizzata. Confrontandole, e soprattutto confrontandone l'interpretazione, cioè cercando di capire quali delle informazioni contenute nel testo del problema vi siano rappresentate, è possibile distinguerle in base al livello di astrazione e rielaborazione dei dati che è stato necessario per produrle, e in base al tipo di ragionamento che rappresentano.

Come primo esempio sono riportate in figura 3.3 due diverse rappresentazioni relative al problema P9. Esse sono state scelte in quanto si trovano a due estremi opposti, da un lato una rappresentazione "pittorica", dall'altro una rappresentazione che racchiude vari livelli di astrazione.

La prima immagine è sostanzialmente una descrizione visiva, dettagliata ma non accurata, della situazione raccontata nel problema. Chi l'ha eseguita ha scelto di disegnare, per quanto in maniera stilizzata, quattro gruppi di persone, specificando a quale fila appartengono. Contando le figure stilizzate si evince che i numeri corrispondono a quelli forniti dal testo del problema, viene tralasciata però un'informazione chiave per la soluzione: il concetto stesso di fila. I gruppi sono disordinati, non è possibile distinguere i primi due elementi di ogni fila e capire che anche tutti gli altri si seguono in maniera chiara e senza sovrapposizione.

La seconda immagine al contrario è molto più schematica e segue un lavoro di elaborazione e astrazione maggiore. Non sono rappresentate persone, ma soltanto il numero di componenti delle file, che era in effetti la parte rilevante di quanto scritto nel testo. Le file sono schematizzate come lunghi rettangoli in cui messi in evidenza i primi due componenti di ogni fila, da ciò si evince che il concetto di ordine è implicito nella rappresentazione.

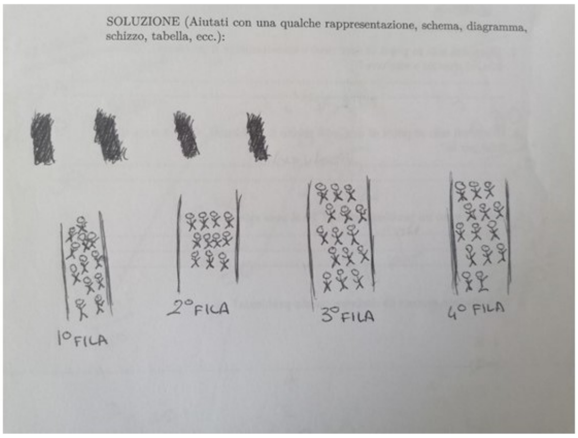
Un confronto simile può essere fatto per le immagini in figura 3.4, relative al problema P10. A prima vista le immagini sono molto diverse, cercando di interpretarle si nota come però l'impostazione di ragionamento abbia delle somiglianze.

L'immagine a sinistra non è di lettura immediata. La coppia di studenti che vi si è dedicata ha cercato di rappresentare le varie combinazioni possibili dopo i vari passaggi di pesca, che si seguono scorrendo l'immagine dall'alto verso il basso. Questa impostazione ha però favorito un errore di base, gli studenti hanno infatti da subito, ed erroneamente, creduto che le possibili combinazioni fossero solo quattro, ripartendo così lo schema in altrettante colonne e di fatto ignorando alcune delle combinazioni nel passaggio finale. Sono inoltre presenti elementi superflui all'economia dell'immagine e che ne complicano la lettura, come le sigle letterali per indicare il colore e l'appartenenza iniziale della carta. Gli studenti hanno capito che si trattava di un problema di conteggio dei casi, pur non avendo nozioni di probabilità, si sono persi però nella gestione del conteggio non arrivando così ad un risultato.

La seconda immagine necessita molte meno spiegazioni per essere compresa. Infatti, è evidente il succedersi dei passaggi, rappresentato grazie alla ramificazione delle frecce che permette di visualizzare l'alternarsi delle mosse dei due giocatori. Inoltre, le carte presentate sono distinte solamente in base al colore, il che risulta sufficiente per comprendere la dinamica del gioco e il conseguimento della condizione finale, che è simmetrica rispetto ai giocatori. In tal senso, la coppia di studenti autori di tale immagine ha dimostrato di possedere una notevole abilità nella sintesi delle informazioni, riuscendo a rappresentare in maniera sintetica ed efficace tutti gli elementi necessari per comprendere la dinamica del gioco.

Facendo un'operazione analoga per tutte le immagini fornite dagli studenti, cioè distinguendole fra "pittoriche", che descrivono letteralmente e dettagliatamente la situazione posta nel problema, senza una vera e propria interpretazione astrazione dei dati, ed "astratte", cioè quelle che sintetizzano o schematizzano le informazioni chiave, elaborandole e agevolandone la lettura, risulta evidente come le immagini del secondo tipo siano realizzate da solutori di problemi migliori. Infatti, nessuna immagine "pittorica" ha portato alla soluzione di un problema. Le immagini "astratte" invece hanno portato ad una soluzione del problema nell'oltre 80% dei casi. Quando non hanno portato alla soluzione vera e propria è stato perché gli studenti, o per una svista o per la fretta di arrivare alla soluzione hanno sbagliato i calcoli. Comunque ad ogni rappresentazione di questo tipo è seguito un'impostazione corretta di ragionamento, in qualche caso non curata ed eseguita per bene in ogni suo passaggio.

Questo dimostra ancora una volta come la metacognizione sia importante per la risoluzione di problemi. Un'immagine schematica, prodotta spontaneamente, implica infatti la scelta, la pianificazione di una strategia. Essa segue ad un'elaborazione delle informazioni ed a una decisione su quali di esse utilizzare per risolvere il problema. che come descritto nella sezione 1.2, sono componenti della metacognizione, specialmente in ambito matematico.



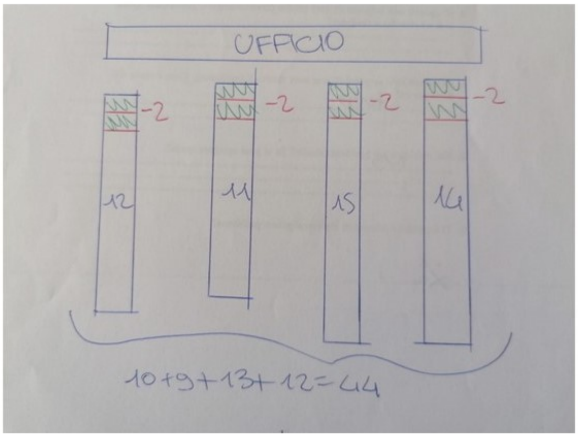
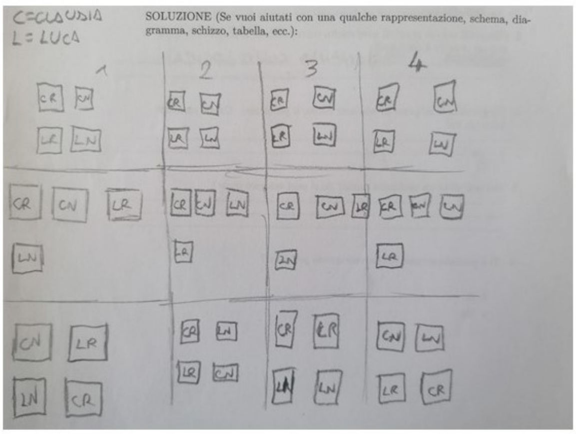


Figura 3.3: Rappresentazioni relative al P9. Nell'isola dove vivono solo cavalieri (che dicono sempre il vero) e furfanti (che dicono sempre il falso), l'ufficio postale è piuttosto affollato. Ci sono quattro file agli sportelli: una con 12 persone, una con 11, una con 15 e una con 14 persone. Ognuno dei presenti (tranne i primi due di ciascuna fila) dice questa frase: "tra le persone davanti a me nella mia fila ci sono almeno due furfanti". Quanti sono in tutto i cavalieri all'ufficio postale?



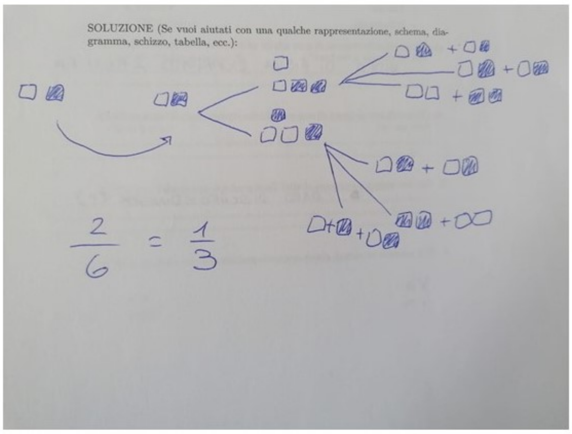


Figura 3.4: Rappresentazioni relative al P10. Sia Luca che Claudia hanno in mano una carta rossa e una nera. Luca pesca una carta a caso dalla mano di Claudia e la aggiunge alle proprie. A questo punto, Claudia pesca una carta dalla mano di Luca. Qual è la probabilità che ciascuno dei due venga a trovarsi con due carte in mano dello stesso colore (uno con due carte rosse, uno con due carte nere)?

3.4.3 Esercizio di problem posing

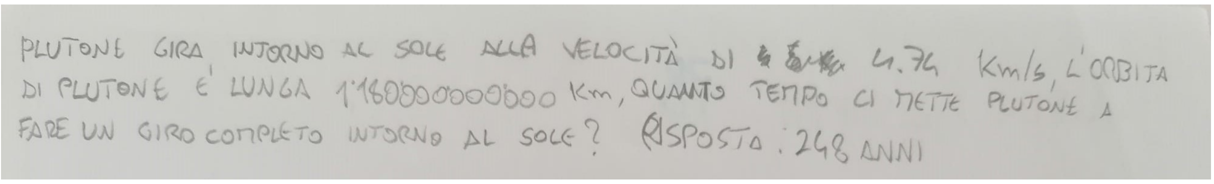
Lo scopo dell'esercizio era indurre gli studenti ad uno sforzo di creatività, che producesse come risultato un problema da proporre alle altre classi. L'obiettivo era che gli studenti, senza che gli fosse stata esplicitamente spiegata, operassero la distinzione fra problema ed esercizio, descritta in 1.1.1. Comunque, analizzando i problemi proposti, come spiegato nella sezione 1.3, si intuisce la percezione che gli studenti hanno della matematica e dei processi matematici, da cui dipende anche l'abilità di risolvere i problemi.

In figura 3.5 sono visibili alcuni esempi dei problemi proposti dagli studenti, che riflettono bene la disomogeneità della classe, di quello che gli studenti reputano difficile e di come percepiscono la materia. Si va da un problema su Plutone, di cui tutta la complessità, come ha spiegato chi l'ha creato, stava nella grandezza dei numeri e nell'operare equivalenze, a problemi più strutturati come quello sull'aiuola (aiuola circolare, come ha specificato in seguito l'autore del problema).

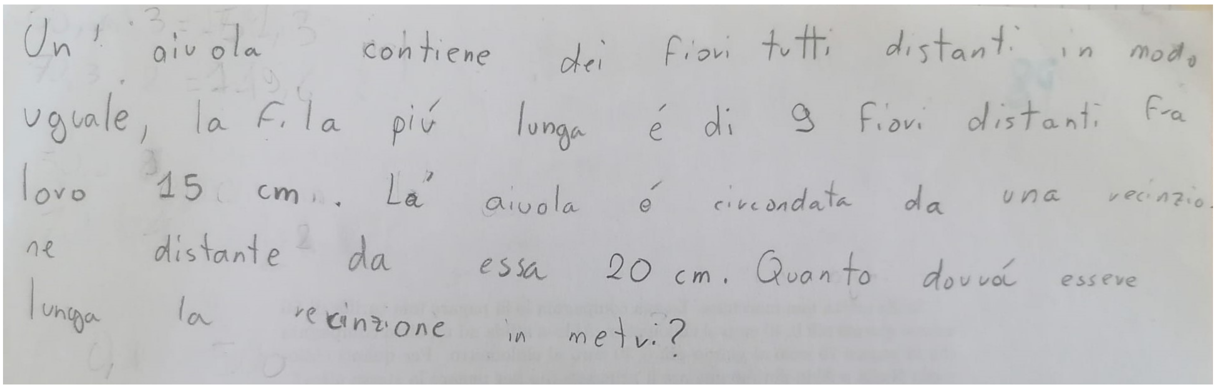
Sul totale dei problemi, quattro non ammettevano un'unica soluzione, denunciando quindi la situazione di alcuni studenti che faticano estremamente nella comprensione di processi matematici. È il caso per esempio del problema sulla musica. Riflettendo sui dati, pare plausibile che chi l'ha inventato abbia prima deciso quale fosse la risposta corretta, e su di essa abbia inventato gli altri dati facendo in modo che i conti tornassero, senza rendersi conto però che la soluzione, a meno di non fare ulteriori assunzioni, non è unica. In questo caso lo studente ha quindi dato più importanza alla correttezza di un calcolo, che alla sensatezza di un ragionamento, e non ha intuito o controllato le implicazioni di una situazione che ha inventato. Un approccio simile, ossia pensare prima alla soluzione, poi impostare il problema in modo da far tornare i conti, è stato adottato, presumibilmente, da molti altri studenti, almeno la metà della classe. Molti altri hanno però avuto un controllo maggiore della situazione e hanno proposto problemi più o meno complessi, ma di cui riuscivano a gestire il procedimento risolutivo.

Un altro dato interessante è quanto anche gli studenti fatichino a creare problemi matematici senza descrivere situazioni artificiose e di difficile immedesimazione. In questo contesto il problema su Plutone, trattando di una situazione reale, che interessava veramente chi l'ha proposto è quasi un unico. Tutti gli altri sono ripartiti in due categorie quasi equipotenti. Da un lato i problemi costruiti su situazioni matematiche ad hoc: o sulla linea del problema sull'aiuola, che descrive una situazione neutra e plausibile, o descrivendo situazioni così palesemente irrealistiche da risultare ludiche, dall'altro problemi che si basano su tematiche emotivamente vicine agli studenti ma con situazioni irrealistiche, in cui la matematica è introdotta forzosamente come nel caso della musica. Che senso ha parlare di durata e lunghezza medie se si cercano risposte precise?

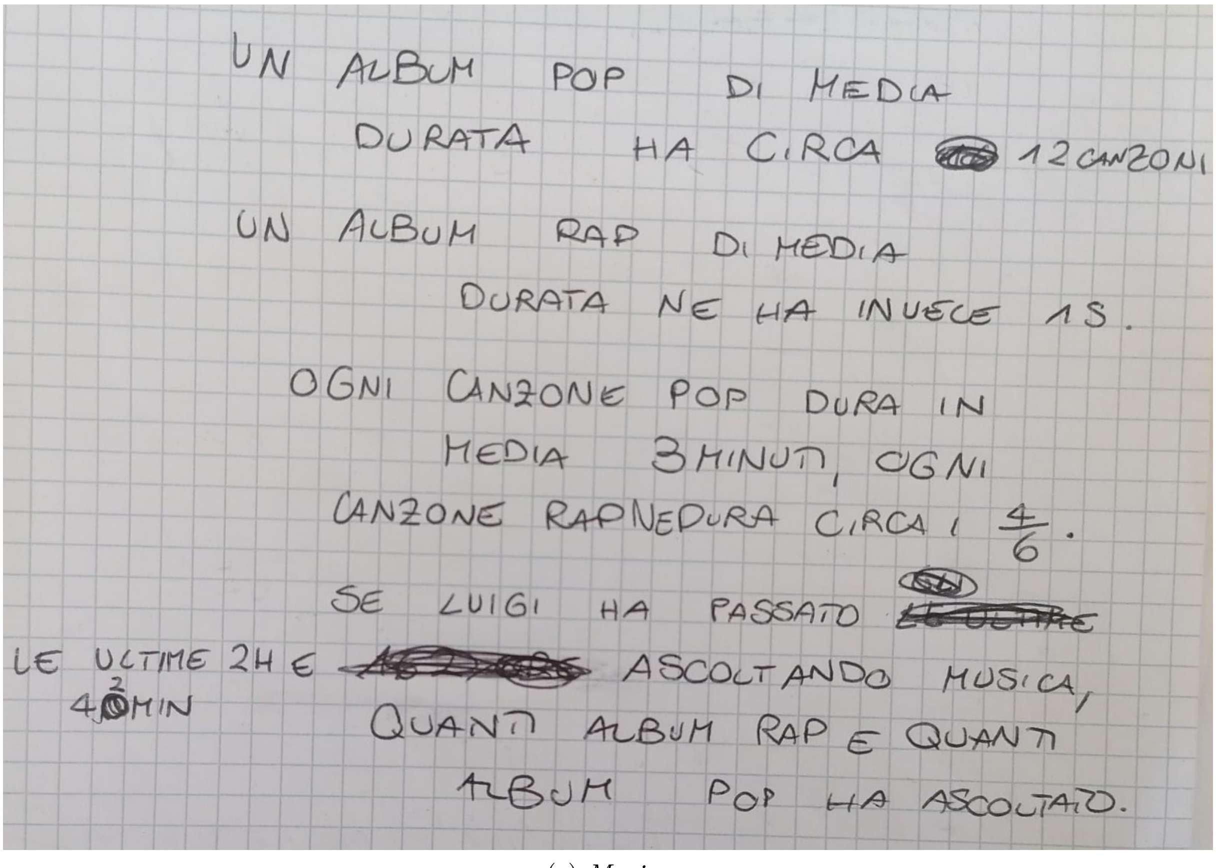
Considerando le soluzioni a questi problemi, emerge che la maggioranza degli studenti ha fatto proposte correlate ai problemi già visti. Il problema dell'aiuola richiama i problemi P6 e P7, il problema su Plutone potrebbe forse richiamare i problemi P3 e P4, anche se la sua soluzione è più diretta e richiede l'esecuzione di un solo calcolo. Il problema sulla musica richiama alcuni semplici esercizi sulle equazioni trattati in un momento diverso dell'anno scolastico. Questo è indicativo del fatto che gli studenti, pur con una certa difficoltà, riescono a rielaborare, riformulare e immergere la matematica in contesti differenti.


PLUTONE GIRA INTORNO AL SOLE ALLA VELOCITÀ DI 4.74 Km/s, L'ORBITA DI PLUTONE È LUNGA 1'180000000000 Km, QUANTO TEMPO CI METTE PLUTONE A FARE UN GIRO COMPLETO INTORNO AL SOLE? RISPOSTA: 248 ANNI

(a) *Plutone*


Un' aiuola contiene dei fiori tutti distanti in modo uguale, la fila più lunga é di 9 fiori distanti fra loro 15 cm. La' aiuola é circondata da una recinzione distante da essa 20 cm. Quanto dovrá essere lunga la recinzione in metri?

(b) *Aiuola*


UN ALBUM POP DI MEDIA DURATA HA CIRCA 12 CANZONI

UN ALBUM RAP DI MEDIA DURATA NE HA INVECE 15.

OGNI CANZONE POP DURA IN MEDIA 3 MINUTI, OGNI CANZONE RAP NE DURA CIRCA I $\frac{4}{6}$.

SE LUIGI HA PASSATO LE ULTIME 2H E 42 MIN ASCOLTANDO MUSICA, QUANTI ALBUM RAP E QUANTI ALBUM POP HA ASCOLTATO.

(c) *Musica*

Figura 3.5: Alcuni dei problemi proposti dagli studenti

3.4.4 Pre-test e post-test

I dati raccolti in merito ai test predittivo e postdittivo sono visibili rispettivamente nei grafici 3.6 e 3.7.

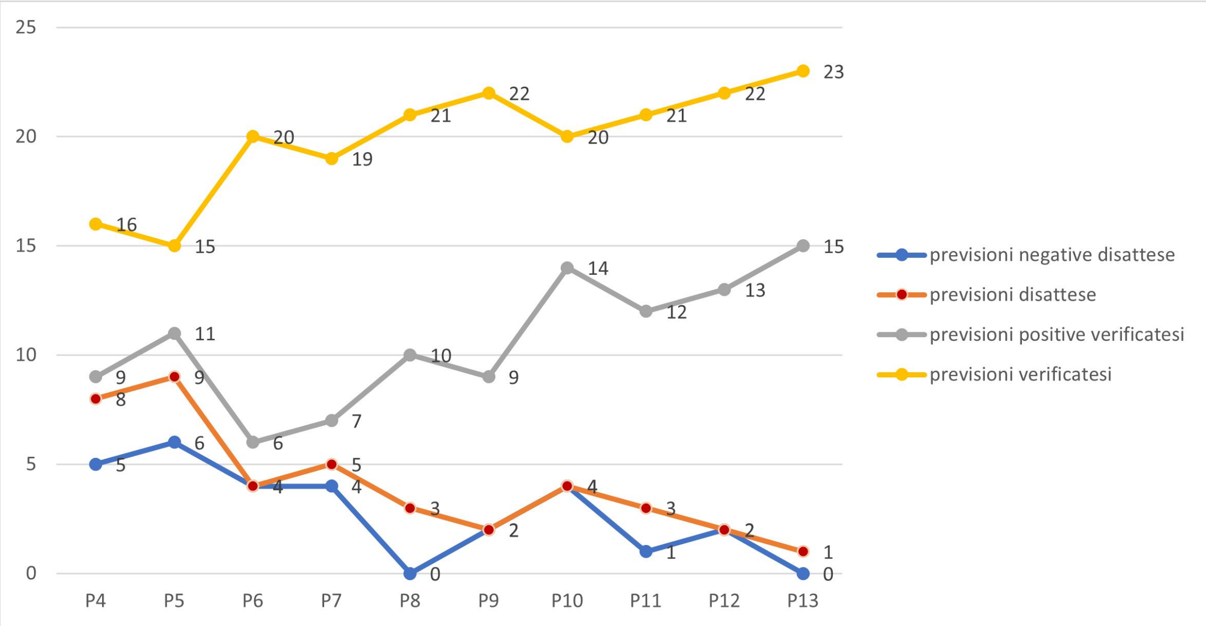


Figura 3.6: Grafico relativo ai risultati dei test predittivi.

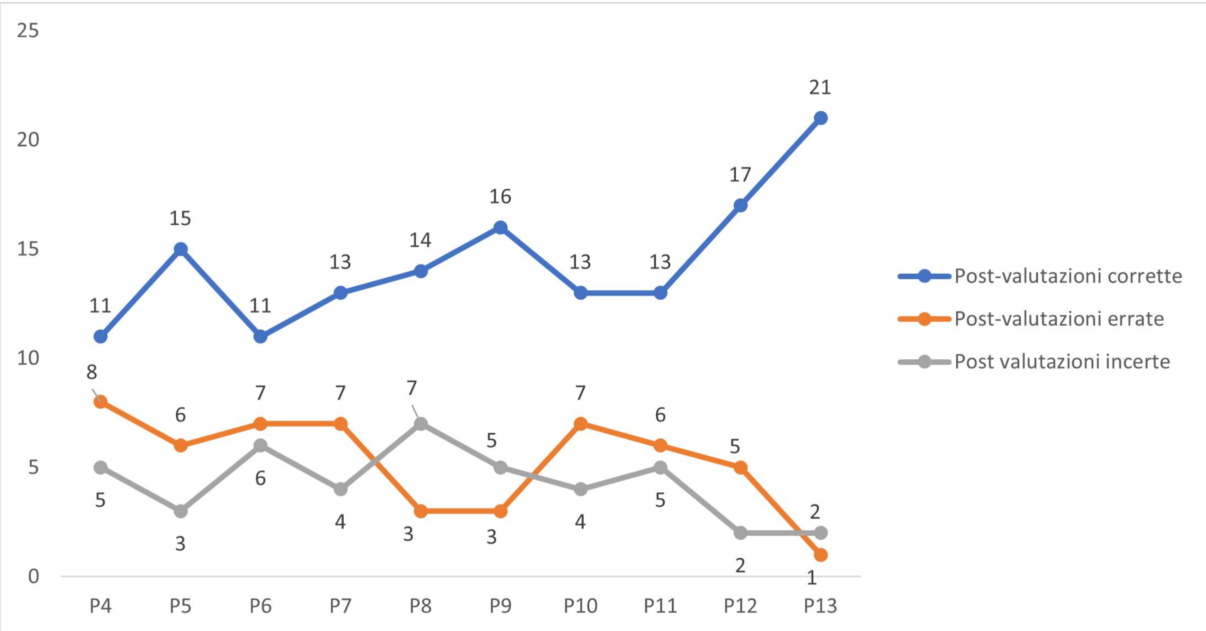


Figura 3.7: Grafico relativo ai risultati dei test postdittivi.

Per quanto riguarda il pre-test, si nota come gli studenti siano migliorati nell'autovalutare le proprie capacità prima di cimentarsi nel risolvere un problema, passando dalle sedici previsioni verificatesi iniziali, relative al problema P4, alle ventitré finali, relative al P13, per un incremento del 64%.

Nel grafico in questione si è deciso di includere i dati relativi a "previsioni negative disattese" e "previsioni positive verificatesi", che rispettivamente indicano per ciascuno dei problemi quanti studenti hanno stimato di non riuscire a risolverlo, per poi invece riuscirci, e quanti studenti hanno al contrario correttamente immaginato di poterlo risolvere. Come si può notare, le "previsioni negative disattese" diminuiscono progressivamente, accompagnando la diminuzione delle "previsioni negative". Analogamente, le "previsioni positive verificatesi", specialmente riguardo gli ultimi problemi, crescono assieme alle "previsioni verificatesi". Da ciò emerge come gli studenti all'inizio del percorso tendessero a sottovalutarsi e mancare di fiducia nelle proprie capacità. Molti erano pessimisti e tendevano a pensare di non essere in grado di risolvere problemi, che si rivelavano invece alla loro portata. Uno dei risultati corollari al percorso è stato quindi di aumentare l'autostima degli studenti, qualità che come emerso col questionario è particolarmente carente.

Anche per quanto riguarda il post-test si osserva un miglioramento nell'autovalutazione e autoconsapevolezza, passando dalle undici valutazioni a posteriori relative al problema P4, alle ventuno relative al problema P13. I dati completi sono

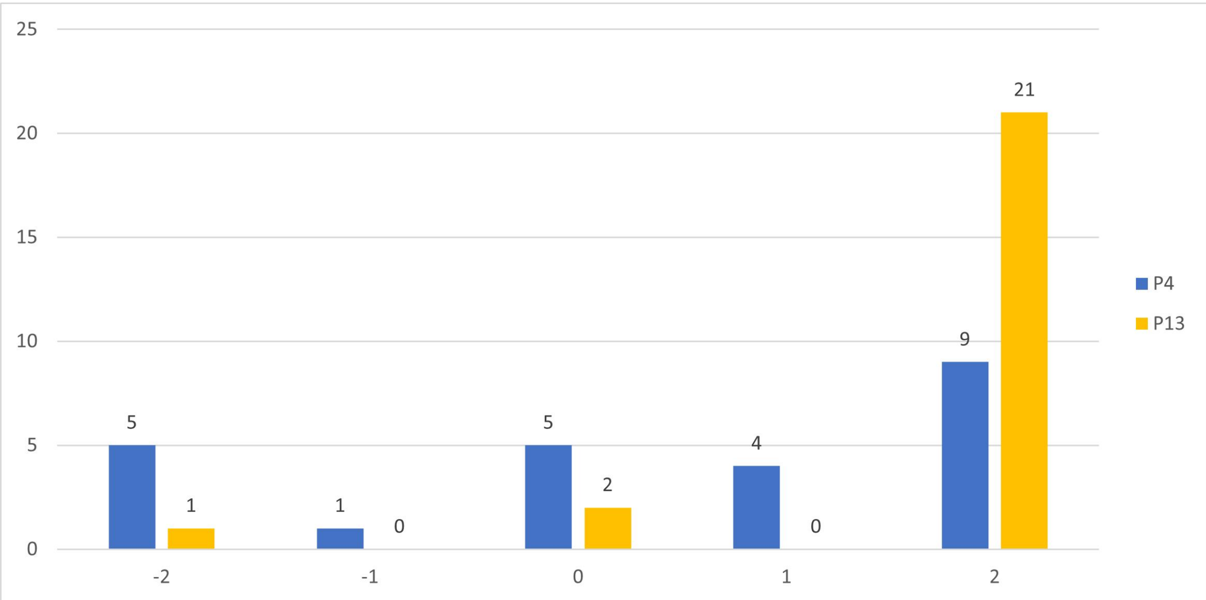


Figura 3.8: Confronto dei punteggi ottenuti dagli studenti, in P4 e P13.

Infine, i punteggi di autovalutazione complessivi, relativi al primo e ultimo problema sono disponibili nel grafico 3.8. Si nota come alla fine dell'attività gli studenti siano nettamente migliorati. Infatti, per il problema P13 solo uno studente ha ottenuto il punteggio minimo, due un punteggio nullo, tutti gli altri hanno ottenuto il punteggio massimo. La media totalizzata dalla classe è stata di 1,6. Contrariamente, per il problema iniziale, sono soltanto otto gli studenti ad aver totalizzato il punteggio massimo, e ben cinque ad aver ottenuto un punteggio minimo. Tutti gli alti studenti hanno punteggi intermedi, per una media complessiva di 0,375.

3.5 Risposte alle domande

A seguito dell'analisi è possibile rispondere alle domande che hanno guidato il percorso.

D1 Come auspicato, la capacità degli studenti di risolvere problemi può essere nettamente migliorata con un percorso specifico. Come rilevato, infatti, al termine del percorso i problemi sono stati risolti completamente da un numero maggiore di persone. È stato riscontrato un miglioramento complessivo anche nella comprensione del problema e nell'elaborazione di una strategia per risolverlo.

Fra le difficoltà maggiori riscontrate c'è quella di passare da una comprensione del problema e della logica ad esso sottesa all'elaborazione di una strategia matematica per la risoluzione. Sotto questo aspetto gli alunni, pur migliorando complessivamente, restano abbastanza carenti. Molti faticano a gestire la consapevolezza degli strumenti matematici di cui dispongono, e in alcuni casi, non ne dispongono appieno.

Si può affermare che è possibile allenare gli studenti a risolvere problemi, essi miglioreranno nel farlo e ne trarranno vari benefici, il margine di miglioramento è però limitato dalla dimestichezza che essi hanno con le procedure e gli strumenti matematici coinvolti nelle soluzioni.

D2 Dall'analisi emerge chiaramente come gli studenti siano complessivamente migliorati nel valutare sé stessi, le proprie possibilità di risoluzione, date dall'insieme delle loro conoscenze in relazione ad un problema posto, e l'efficacia delle loro strategie di risoluzione.

In particolare è stato riscontrato un aumento di fiducia nelle proprie capacità, che ha permesso ad alcuni studenti, in un primo momento non consapevoli del proprio bagaglio di conoscenze in ambito matematico, di accedervi con più facilità nel momento di risolvere un problema.

Come evidenziato, la componente della metacognitiva in cui gli studenti sono più carenti è la pianificazione di strategie adeguate. Anche questo aspetto è però stato leggermente migliorato nel corso dell'attività.

Capitolo 4

Conclusioni

La ricerca si poneva come obiettivo di determinare l'importanza del dedicarsi alla risoluzione di problemi e delle abilità metacognitive per quanto riguarda la didattica della matematica. L'idea per cui gli studenti beneficerebbero di tale attività deriva dall'ipotesi per cui essi manchino non solo della comprensione base di molte procedure matematiche, ma anche della loro possibilità di applicazione e rilevanza per contesti reali. Uno sviluppo della metacognizione, che regola molte delle fasi di risoluzione dei problemi, avrebbe benefici su tutte le competenze di tipo matematico. In particolare, si è deciso di determinare quanto fosse possibile far migliorare gli studenti nella risoluzione di problemi, in quali attività in particolare gli studenti sarebbero migliorati, se sarebbero migliorate anche le competenze di autovalutazione e di pianificazione, ed altri eventuali benefici.

La ricerca è stata articolata in due fasi consecutive. La prima fase aveva come obiettivo di stabilire la percezione che gli studenti avessero della matematica e quale fosse il loro approccio nei confronti della materia, per determinare quali fossero le maggiori criticità della disciplina e di conseguenza individuare le potenzialità di miglioramento. In questa fase, l'indagine è stata effettuata con la somministrazione di un questionario appositamente concepito a tre classi prime. Le risposte sono poi state attentamente analizzate sia quantitativamente, sia qualitativamente, per mettere luce in ogni aspetto rilevante.

La seconda fase di ricerca ne è stata il fulcro vero e proprio: il percorso con gli studenti sulla risoluzione di problemi. I dati relativi a questa attività riguardano la sola delle suddette classi prime in cui è stato possibile concludere il percorso come programmato. L'attività, e la ricerca che ne è conseguita, è stata largamente ispirata ad *How to solve it* di Pólya, e alle quattro fasi che egli raccomanda per risolvere un problema: capirlo, elaborare un piano, eseguirlo e ricontrollare. In questo percorso sono stati alternati momenti di lavoro individuale per la soluzione di problemi e correzioni collettive con la classe. Gli studenti poi, per ciascuno dei problemi che dovevano risolvere, sono stati sottoposti alla compilazione di due test, per predire e valutare a posteriori le proprie soluzioni, con lo scopo di determinare le loro capacità di autovalutazione.

Dall'analisi del questionario emerge come la maggior parte degli studenti sia ostile alla matematica perché non la capisce, innescando un circolo vizioso che li porta a risultati sempre più mediocri. Molti studenti inoltre non riconoscono alla matematica alcuna utilità al di fuori dei "calcoli di base", di fatto confermando l'ipotesi secondo cui la non comprensione delle procedure e della loro effettiva utilità li porti ad avere risultati negativi.

Risulta inoltre che molti siano scoraggiati e di conseguenza refrattari all'apprendimento. Su queste condizioni l'allenamento alla risoluzione di problemi si è dimostrato fruttuoso ed incisivo. Gli studenti sono difatti migliorati, sia nel giungere ad una soluzione completa e corretta, sia nelle fasi preliminari di comprensione dei problemi e di elaborazione di una strategia. È stato rilevato inoltre uno sviluppo delle capacità metacognitive, di valutazione e gestione delle proprie competenze e di consapevolezza delle proprie conoscenze. Come effetto secondario è stato ottenuto un aumento di fiducia nelle proprie capacità da parte degli studenti, e quindi un crescente interesse per la matematica e le sue applicazioni.

Nella classe quasi tutti gli studenti sono stati in grado di comprendere il problema alla fine del percorso, individuarne le informazioni chiave e saperle esprimere o rappresentare in linguaggio matematico. Si è rivelato più difficoltoso il passaggio dall'elaborazione delle informazioni alla pianificazione di una strategia matematica adeguata, il che rivela uno dei limiti di questo approccio: gli studenti più in difficoltà, o con particolari carenze nella preparazione erano talvolta a corto di strumenti adeguati per pensare ad una soluzione.

Nel complesso, l'approccio alla matematica tramite la risoluzione di problemi si è rivelato fruttuoso, intaccando meccanismi di auto-sabotaggio interiorizzati dagli studenti e fortificandoli nelle capacità di ragionamento e di autoconsapevolezza, da cui il ragionamento potrebbe scaturire. Per come è stata impostata in questo caso resta però una metodologia didattica di supporto, ma non sostitutiva di quella tradizionale. Gli studenti sono migliorati in tante delle loro abilità e hanno consolidato tanti meccanismi e procedure, senza però apprenderne di nuovi. Sarebbe interessante ipotizzare una didattica che introduca sempre i nuovi argomenti tramite problemi, tenendo sempre conto delle indicazioni nazionali, e degli oggettivi limiti di tempo.

Appendice A

Questionario sulla percezione della matematica

Rispondi sinceramente e in maniera completa a tutte le seguenti domande. Non pensarci troppo tempo. Il questionario è anonimo.

1. Sesso:
   - Femmina
   - Maschio
   - Preferisco non rispondere
2. Con quali aggettivi (da 1 a 3) descriveresti la matematica?
   ....
3. Quale emozione associ alla matematica?
   ....
4. Descrivi sinteticamente il tuo rapporto con la matematica.
   ....
   ....
5. Prova ora a descriverlo con una sola parola.
   ....
6. Dello studio della matematica cosa non hai apprezzato o hai apprezzato meno?
   ....
   ....
7. Spiega sinteticamente come mai.
   ....
   ....

8. Cosa hai apprezzato di più invece?
   ....
   ....

9. Anche qui spiega come mai.
   ....
   ....

10. In quale periodo hai "amato meno" la matematica?
    - Scuola elementare.
    - Scuola media.
    - Scuola Superiore.

11. In quale periodo invece l'hai "amata di più"?
    - Scuola elementare.
    - Scuola media.
    - Scuola Superiore.

12. Come mai hai dato queste risposte? (riferito a domande 10 e 11)
    ....
    ....

13. Pensi che ci sia qualche caratteristica che distingue la matematica dalle altre discipline scolastiche? Se sì, quale o quali?
    ....
    ....

14. La matematica che studi o hai studiato prima, ti è mai stata utile nella vita quotidiana?
    - Sì, ad esempio:
      ....
      ....
    - No, perché:
      ....
      ....

15. In generale, pensi che sia importante che le persone studino la matematica?
    - Sì, perché:
      ....
      ....
    - No, perché:
      ....
      ....

16. Secondo te, cosa serve per "essere bravi" in matematica?
    ....

17. Perché?
    ....
    ....

18. Che suggerimenti daresti a un'insegnante per migliorare quelli che, secondo te, sono i punti critici dello studio della matematica?
    ....
    ....
    ....
    ....

Appendice B

I problemi assegnati

P1 Un orso, partendo dal punto P, percorre un chilometro verso sud. Poi cambia direzione e cammina per un altro chilometro verso est. Poi, girando ancora verso sinistra percorre un altro chilometro verso nord. Arriva così esattamente al punto P di partenza. Di che colore è l'orso?

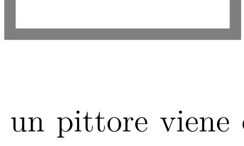
P2 Roberto vuole comprare un terreno, perfettamente livellato, che abbia quattro linee di confine. Due linee lungo la direzione esatta nord-sud, le altre due esattamente in direzione est-ovest, e ogni linea di confine che misuri esattamente 100 metri. Roberto può comprare un terreno di questo tipo in Italia?

P3 Un motore elettrico fa 3000 giri al minuto. Di quanti gradi gira al secondo?

P4 Se un pneumatico ruota a 400 giri al minuto quando l'auto viaggia a 72 km/h, qual è la circonferenza del pneumatico?

P5 Tanto tempo fa in India, un'anziana donna si recava tutti i giorni a prendere l'acqua al pozzo, mettendosi sulle spalle un bastone con alle estremità appesi due secchi. Ogni giorno riempiva i secchi con 6 litri di acqua ciascuno e lentamente tornava a casa. Uno dei due secchi, però, essendo rotto, perdeva 1 dl di acqua ogni 100 m e quando l'anziana donna tornava a casa il secchio rotto era sempre pieno solo a metà. Quanto era distante la casa dal pozzo?

P6 Il lato maggiore della cornice di un quadro è i $\frac{5}{4}$ del lato minore. La cornice ha tutti i lati dello stesso spessore. Nel quadro all'interno della cornice il lato maggiore misura 32 cm e il minore 24 cm. Di quanti centimetri quadrati è l'area del rettangolo delimitato dal bordo esterno della cornice?



P7 A un pittore viene commissionato un dipinto per il quale si vuol far costruire una bella cornice spessa 5 cm. La tela originale è di forma rettangolare ed è noto che l'altezza è i 5/9 della base, mentre la differenza fra base ed altezza è 28 cm. Quanto misura l'area della cornice?

P8 Nadia affitta una macchina. La sua compagnia le fa pagare una tariffa di 50 euro al giorno più 0, 40 euro al chilometro. Aldo si affida ad un'altra compagnia che fa pagare 70 euro al giorno più 0, 30 euro al chilometro. Per quanti chilometri Nadia e Aldo devono guidare il primo giorno per pagare la stessa cifra?

P9 Nell'isola dove vivono solo cavalieri (che dicono sempre il vero) e furfanti (che dicono sempre il falso), l'ufficio postale è piuttosto affollato. Ci sono quattro file agli sportelli: una con 12 persone, una con 11, una con 15 e una con 14 persone. Ognuno dei presenti (tranne i primi due di ciascuna fila) dice questa frase: "tra le persone davanti a me nella mia fila ci sono almeno due furfanti". Quanti sono in tutto i cavalieri all'ufficio postale?

(Aiutati con una qualche rappresentazione, schema, diagramma, schizzo, tabella, ecc.)

P10 Sia Luca che Claudia hanno in mano una carta rossa e una nera. Luca pesca una carta a caso dalla mano di Claudia e la aggiunge alle proprie. A questo punto, Claudia pesca una carta dalla mano di Luca. Qual è la probabilità che ciascuno dei due venga a trovarsi con due carte in mano dello stesso colore (uno con due carte rosse, uno con due carte nere)?

(Se volete aiutatevi con una qualche rappresentazione, schema, diagramma, schizzo, tabella, ecc.)

P11 Francesco vuole ripiastrellare l'area esterna al bordo della sua piscina. Ha a disposizione 650 mattonelle, tutte quadrate e col lato di 20 cm. Sapendo che la piscina è di forma rettangolare, con i lati di 4 e 7 metri. Quanto deve essere spessa l'area piastrellata, se Francesco vuole che essa sia tutta dello stesso spessore e con le mattonelle accostate perfettamente, ignorando quindi lo spazio per le fughe?

P12 Uscendo di casa Federica ha speso un quinto dei suoi soldi in cartoleria e la metà del rimanente in una libreria. Al termine dei suoi acquisti le sono rimasti 20 euro. Quanti soldi aveva in partenza?

P13 Un giardino rettangolare nella casa della signora Verdi ha una lunghezza di 100 metri e una larghezza di 50 metri. All'interno del giardino è prevista la realizzazione di una piscina quadrata. Trova la lunghezza di un lato della piscina se l'area rimanente (non occupata dalla piscina) è uguale alla metà dell'area del giardino rettangolare.

Appendice C

Come risolvere un problema

1. CAPIRE IL PROBLEMA:
   - Qual è l'incognita da trovare?
   - Quali sono i dati?
   - Quali sono le condizioni?
   - Le condizioni sono possibili?
   - Le condizioni sono sufficienti per determinare l'incognita?
   - Introduci notazioni appropriate, fai una figura.
   - Separa le varie parti delle condizioni. Puoi scriverle?
2. ELABORARE UN PIANO
   - Trova il nesso fra l'incognita e i dati.
   - Hai mai visto questo problema? Ne hai mai visto uno simile?
   - Guarda l'incognita! Pensa a un problema che conosci con una simile incognita.
   - Ecco un problema correlato al tuo e già risolto, puoi usarlo? Ti servono risultati ausiliari?
   - *Puoi riformulare il problema?*
   - Puoi pensare a un problema simile ma più semplice? Più specifico? Analogo? Puoi risolvere parte del problema? Tieni in considerazione solo una parte delle condizioni e ignora il resto, è più facile trovare l'incognita? Puoi cambiare l'incognita o i dati per ottenere un problema più semplice? Hai usato tutti i dati? Tutte le condizioni? Hai tenuto conto di tutte le nozioni coinvolte nel problema?
3. ATTUA IL PIANO
   - Attua il piano che hai elaborato. *Controlla ogni passaggio.* Vedi chiaramente che i passaggi sono corretti? Puoi *provare* che sono corretti?

4. RICONTROLLA
    - Puoi controllare il risultato? Puoi controllare il procedimento?
    - Puoi ottenere il risultato in un altro modo? Puoi ottenerlo *in un colpo d'occhio*?
    - Puoi usare il risultato o il metodo per altri problemi?

Appendice D

Pre-test

1. Pensi di poter risolvere questo problema?
    - Sì
    - No
2. Per favore spiega perché
   ....
   ....
   ....

Appendice E

Post-test

Rispondi alle seguenti domande:

1. Quanto sei sicuro/a di aver trovato la soluzione corretta?
    - Completamente
    - Abbastanza
    - Non molto
    - Poco
    - Per niente
2. Com'era per te questo problema?
    - Facilissimo
    - Facile
    - Medio
    - Difficile
    - Difficilissimo
3. (Rispondi solo se pensi di aver risolto correttamente il problema) Come mai sei riuscito a risolvere?
   ....
   ....
4. (Rispondi solo se pensi di non aver risolto il problema) Cosa è stato difficile per te?
   ....
   ....
5. Hai mai visto un problema simile? Se sì puoi spiegare quale?
   ....

....

....

Bibliografia

[1] Badger, M., Sangwin, C. J., Hawkes, T. O., Burn, R. P., Mason, J., & Pope, S. (2012). *Teaching problem-solving in undergraduate mathematics.* Coventry University Coventry, UK.

[2] Begle, E. G. (1979). Critical Variables in Mathematics Education: Findings from a Survey of the Empirical Literature. National Council of Teachers of Mathematics.

[3] Bonotto, C. (2010). Realistic Mathematical Modeling and Problem Posing. Springer EBooks, 399–408. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_34

[4] Brown, A. L. (1978). Knowing when, where, and how to remember: A problem of metacognition. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology 1* (pp. 77–165). Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

[5] Brown, A. L., & DeLoache, J. S. (1978). Skills, plans, and self-regulation. In R. S. Siegel (Ed.), *Children's thinking: What develops?* (pp. 3–35). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

[6] Brown, A. L., & Palincsar, A. S. (1982). Inducing strategic learning from texts by means of informed, self-control training (Tech. Rep. No. 262). Urbana: University of Illinois, Center for the Study of Reading.

[7] Cai, J. (1998). An investigation of U.S. and Chinese students' mathematical problem posing and problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 10(1), 37-50.

[8] Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis. M., Pitta-Pantazi, D., Sriraman, B. (2005). An Empirical Taxonomy of Problem Posing Processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37 (3), 149-158.

[9] Consiglio dell'Unione Europea. (2018). Raccomandazione del Consiglio del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente (2018/C 189/01). Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea, C 189/1.

[10] D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2006). Che problema i problemi! L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 6, vol. 29 AB. 645-664. Editore: Centro Morin, Paderno del Grappa (TV). ISSN: 1123-7570.

[11] Duncker, K. (1945). *On problem-solving.* Psychological Monographs, 58, (5, Whole No. 270).

[12] Ellerton, N. F., & Clarkson, P.C. (1996). Language factors in mathematics teaching. In A. J. Bishop, et al. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp.83-87). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[13] English, L. D. (1997a). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 183-217.

[14] English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83-106.

[15] English, L. D. (2003). Engaging students in problem posing in an inquiry-oriented mathematics classroom. In F. K. Jr. Lester (Ed) *Teaching Mathematics through Problem Solving: Prekindergarten-grade 6* (pp. 187-198). Reston, Virginia: NCTM.

[16] Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231–236). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum

[17] Flavell, J. H., & Wellman, H. M. (1977). Metamemory. In R. V. Kail & J. W. Hagen (Eds.), *Perspectives on the development of memory and cognition* (pp. 3-33). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

[18] Garofalo, J., Lester, F. K., & Jr. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 163-176.

[19] Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123–147). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[20] Lesh, R. and J. Zawojewski (2007). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Volume 2, Chapter Problem Solving and Modeling, pp. 763–804. National Council of Teachers of Mathematics.

[21] Lester, F. K., & Garofalo, J. (1982, March). Metacognitive aspects of elementary school students' performance on arithmetic tasks. Paper presented at the meeting of the American Educational Research Association, New York.

[22] Leung, S.K. (1996). Problem posing as assessment: reflections and reconstructions. *The Mathematics Educator*, 1, 159-171.

[23] Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). Schema di regolamento recante "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento." Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana, Serie Generale, n. 291, Suppl. Ordinario n. 275, 14 dicembre 2010.

[24] Mestre, P. J. (2002). Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. *Applied Developmental Psychology*, 23, 9-50.

[25] Norman, D. A. (1981). Twelve issues for cognitive science. In D. A. Norman (Ed.)., *Perspectives in cognitive science* (pp. 265-295). Norwood, NJ: Ablex.

[26] Pólya G. (1945). *How solve it*. [Trad. it.: Milano, Feltrinelli, 1967].

[27] Schoenfeld, A. H. (1981, April). Episodes and executive decisions in mathematical problem solving. Paper presented at the meeting of the American Educational Research Association, Los Angeles.

[28] Schoenfeld, A. H. (2011). *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics* (Reprint). University of California, Berkeley.

[29] Silver, E. A. (1979). Student perceptions of relatedness among mathematical verbal problems. Journal for research in mathematics education, 10(3), 195–210.

[30] Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Solving. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.

[31] Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539.

[32] Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S.S., & Kenney, P.A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 293- 309.

[33] Silver, E. A., & Marshall, S. P. (1989). Mathematical and scientific problem solving: Findings, issues and instructional implications. In B. F. Jones & L. Idol (Eds.), *Dimensions of thinking and cognitive instruction* (pp. 265-290). Hillsdale, NJ: Erlbaum

[34] Van Hout-Wolters, B. (2000). Assessing active self-directed learning. In R. Simons, J. van der Linden, & T. Duffy (Eds.), *New learning* (pp. 83–101). Dordrecht: Kluwer.

[35] Veenman, M. V. J. (2005). The assessment of metacognitive skills: What can be learned from multimethod designs? In C. Artelt, & B. Moschner (Eds), *Lernstrategien und Metakognition: Implikationen für Forschung und Praxis* (pp. 75–97). Berlin: Waxmann.

[36] Veenman, M. V. J., Van Hout-Wolters, B. H. A. M., & Afflerbach, P. (2006). Metacognition and learning: conceptual and methodological considerations. *Metacognition and Learning*, 1(1), 3–14. https://doi.org/10.1007/s11409-006-6893-0

[37] Winograd, K. (1991). Writing, solving, and sharing original math story problems: Case Studies of Fifth Grade Children's Cognitive Behavior. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago.