

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA ED ASTRONOMIA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN
FISICA

**Ottimizzazione di una sorgente di fotoni entangled
tramite lo studio dell'accoppiamento in fibra**

Relatore:

PROF. GIUSEPPE VALLONE

Laureando:

GIOSUÈ SARDO INFIRRI
1226210

Correlatori:

DOTT. GIULIO FOLETTTO
DOTT. LORENZO COCCIA
DOTT. MATTEO PADOVAN

Anno Accademico 2021/2022

Abstract

In questo lavoro di tesi il candidato ha avuto modo di esplorare il funzionamento di una sorgente di fotoni correlati quantisticamente in polarizzazione e di implementare direttamente un apparato per misurare le proprietà dei prodotti della sorgente. Questo lavoro è composto principalmente da due parti: la prima si prefigge di essere una breve ma esaustiva spiegazione, nei suoi aspetti principali, della sorgente presente in laboratorio e del suo funzionamento. Il secondo mira invece ad effettuare un'analisi dei risultati sperimentali, raccolti dal candidato in laboratorio tramite la modifica delle componenti dell'apparato. La sorgente presente nei laboratori del DEI è basata su un interferometro Sagnac, un apparato strumentale che permette di creare una coppia di fotoni polarization-entangled sfruttando la Spontaneous Parametric Down-Conversion (SPDC). Scopo del presente lavoro è dunque quello di migliorare l'efficienza della sorgente tramite l'inserimento di diverse lenti, andando a misurare, attraverso un apparato ad hoc costruito e calibrato dal candidato, la qualità dell'entanglement prodotto.

Indice

1	Elementi di ottica e di informazione quantistica sperimentale	4
1.1	Qubit	4
1.2	Entanglement	5
1.3	Disuguaglianze di Bell	7
1.4	Spontaneous Parametric Down Conversion (SPDC)	7
1.5	Fascio luminoso	8
1.6	Variazione del fascio luminoso attraverso le componenti ottiche	9
1.6.1	Fascio entrante in un materiale	10
1.6.2	Fascio uscente da un materiale	11
1.6.3	Fascio entrante ed uscente da un materiale	11
2	Sorgente di fotoni polarization-entangled	13
2.1	Interferometro Sagnac	13
2.2	Stati generati dall'interferometro Sagnac	16
2.3	Setup di analisi	16
2.4	Elettronica di acquisizione	18
3	Preparazione dell'apparato sperimentale	20
3.1	Allineamento	20
3.2	Calibrazione	21
4	Analisi dei dati	23
4.1	Misure effettuate	23
4.2	Procedure di misura	23
4.3	Presentazione ed analisi dei risultati	24
5	Conclusioni	28

Introduzione

La produzione di fotoni caratterizzati da un entanglement in polarizzazione è molto importante per la fisica moderna per un duplice motivo: l'entanglement è un ingrediente fondamentale di molti protocolli di comunicazione quantistica ed, attraverso i fotoni, la polarizzazione si conserva bene nello spazio libero. L'informazione infatti può essere codificata negli stati quantistici dei fotoni prodotti e trasmessa con semplicità: grazie a questi fotoni ad esempio avviene la procedura di Quantum Key Distribution, fondamentale per scambiare informazioni in maniera sicura.

Questo lavoro di tesi verte sulla produzione di fotoni tramite Spontaneous Parametric Down-Conversion attraverso il passaggio della luce in un Interferometro Sagnac [4]. Questo tipo di sorgente permette di creare entanglement in polarizzazione di alta qualità.

Il processo su cui si basa la creazione di questi fotoni è probabilistico e raro: la SPDC è infatti causata dal termine di secondo grado nella relazione di polarizzabilità di un materiale, che è tipicamente piccolo. Questo implica che, anche lavorando con dei laser ad elevata potenza, il numero di fotoni creati è limitato. Per questo motivo sono molti gli esperimenti che cercano di capire come aumentare il numero di fotoni prodotti e correttamente osservati. Tuttavia un aumento del numero di fotoni che arrivano sui rivelatori non implica un miglioramento nella qualità dell'entanglement. Per questo motivo è necessario controllare costantemente il numero totale di fotoni misurati e stimare con accuratezza l'entanglement presente tra i fotoni prodotti. A conferma di queste stime risulta utile effettuare delle ulteriori misure per verificare che il fenomeno in studio non abbia una spiegazione classica, attraverso la violazione di una disuguaglianza di Bell come la CHSH.

Il presente lavoro segue questa linea di pensiero ed in particolare si prefigge di comprendere se l'accoppiamento in fibra ottica può migliorare la quantità di fotoni misurati. Inoltre si vuole vedere se dei cambiamenti nell'accoppiamento in fibra ottica migliorano o peggiorano la qualità dell'entanglement dei fotoni prodotti. In questa ottica, la tesi si inserisce in un lavoro di ricerca, effettuato dai ricercatori del DEI, che mira ad ottimizzare una sorgente di fotoni polarization-entangled. La sorgente, già presente nei laboratori del DEI, è stata allineata e calibrata; per effettuare delle misure è stato invece costruito un setup di analisi.

Il lavoro è diviso come segue: il primo capitolo illustra i concetti teorici utili alla comprensione dei successivi capitoli. Nel secondo capitolo viene presentata la strumentazione e si spiega il funzionamento dettagliato della sorgente e del setup di analisi: le procedure di preparazione alla misura sono quindi illustrate e commentate nel terzo capitolo. Nell'ultimo si presentano i dati raccolti e si procede con un commento, seguito da alcuni suggerimenti su come migliorare i risultati ottenuti.

1 Elementi di ottica e di informazione quantistica sperimentale

Prima di iniziare, serve introdurre alcuni concetti teorici fondamentali che permettono di comprendere gli esperimenti ed in generale gli argomenti che verranno trattati. A tale scopo bisogna prima di tutto definire cos'è un qubit e come si stima l'entanglement sia in generale che per il particolare caso di due fotoni.

1.1 Qubit

In meccanica quantistica il qubit è un qualsiasi sistema che può essere descritto da uno spazio di Hilbert bidimensionale \mathcal{H} . Si contraddistingue dal bit classico di informazione, perché nella teoria dell'informazione classica un bit può assumere solamente due valori, che normalmente vengono identificati con 0 ed 1. In informazione quantistica, invece, il qubit è rappresentato da una combinazione degli elementi della base di \mathcal{H} , che chiamiamo $|0\rangle$ ed $|1\rangle$: ogni stato è quindi scrivibile come:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1)$$

dove α, β sono numeri complessi che soddisfano la condizione di normalizzazione:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2)$$

che permette di ottenere uno stato normalizzato $\|\psi\|^2 = 1$. Da questa definizione di qubit si possono implementare algoritmi quantistici, computazionali o di crittografia, che forniscono un vantaggio rispetto a quelli classici.

Nel seguito vedremo la realizzazione fisica di qubit nel contesto dell'Ottica Quantistica. In questo ambito, i qubit sono realizzati sfruttando i vari gradi di libertà di fotoni, quali polarizzazione, frequenza, fase e modo spaziale.

In particolare, negli esperimenti di cui ci interesseremo verrà sfruttata la polarizzazione della luce, in quanto semplice da manipolare tramite l'utilizzo di appositi elementi ottici. In queste condizioni conviene rappresentare gli stati non più con una base qualsiasi $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, bensì attraverso la base ortonormale fornita dalla polarizzazione, ovvero la base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$, nella quale i vettori rappresentano la componente orizzontale ($|H\rangle$) e quella verticale ($|V\rangle$) della polarizzazione. A causa della descrizione matematica delle componenti ottiche risulta infine utile ragionare attraverso la rappresentazione del qubit all'interno della sfera di Bloch: in particolar modo si riparametrizzano i coefficienti α, β con altri due parametri più facilmente visualizzabili su una superficie sferica. Secondo questa rappresentazione qualsiasi stato assunto dal qubit è scrivibile come:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|H\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|V\rangle e^{i\phi} \quad (3)$$

ed è rappresentabile attraverso un punto su una sfera i cui parametri sono i due angoli $\theta \in [0 : \pi]$ e $\phi \in [0 : 2\pi]$, come rappresentato in Figura 1.

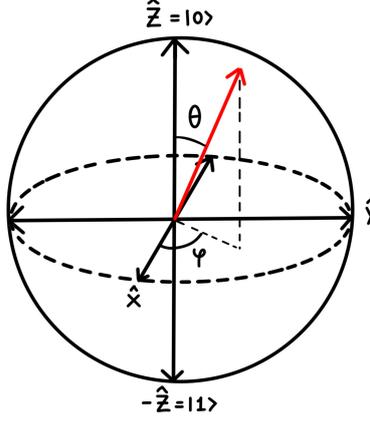


Figura 1: Sfera di Bloch, in cui sono stati evidenziati gli stati che intersecano gli assi

Risulta utile notare come, in questa rappresentazione, i tre assi spaziali cartesiani intersechino la sfera in dei punti con una polarizzazione ben precisa, che noi chiameremo: lineare orizzontale $|H\rangle$ e verticale $|V\rangle$ per l'asse \hat{z} , lineare diagonale $|D\rangle$ ed antidiagonale $|A\rangle$ per l'asse \hat{x} ed circolare sinistra $|L\rangle$ e destra $|R\rangle$ per l'asse \hat{y} , la cui rappresentazione è:

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) \quad |A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle) \quad (4)$$

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + i|V\rangle) \quad |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - i|V\rangle) \quad (5)$$

dove la denominazione "lineare" indica una sovrapposizione coerente in cui i vettori di base hanno coefficienti reali, mentre "circolare" denomina tutte le altre possibili.

Il qubit così formulato descrive uno stato puro, ovvero uno stato quantistico in cui si ha una completa conoscenza del sistema quantistico. Purtroppo non sempre si ha questa conoscenza esatta: spesso si può solamente associare una combinazione di probabilità a cui contribuiscono più stati puri. In questo caso si tratta di stati misti. Per trattare stati misti è utile passare al formalismo della matrice densità attraverso le matrici di Pauli:

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

In questa descrizione, una volta definiti i vettori di base come:

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

è possibile scrivere qualsiasi stato misto oppure puro attraverso il parametro $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$, che rappresenta la posizione all'interno della sfera di Bloch. Infatti tutti gli stati puri sono descritti dai punti della superficie sferica, ovvero corrispondente ad $|\mathbf{r}| = 1$, mentre quelli misti dai punti all'interno della stessa. Il legame tra la matrice densità e la posizione all'interno della sfera è dato dalla formula:

$$\rho = \frac{\mathbb{1}_2 + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \quad (8)$$

dove $\boldsymbol{\sigma}$ è il tensore di Pauli.

1.2 Entanglement

L'entanglement è un fenomeno previsto dalla meccanica quantistica, che permette, ad un sistema di due particelle quantistiche di avere delle correlazioni più forti di quelle classiche. In particolare

questo fenomeno prevede che il risultato ottenuto dalla misura di una certa proprietà di una delle due particelle influenzi i possibili risultati per la stessa misura, effettuata sull'altra particella.

Un sistema di due particelle quantistiche è descritto dal prodotto tensore dei due spazi di Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Se consideriamo le basi ortonormali di \mathcal{H}_1 ed \mathcal{H}_2 che sono $\{|0\rangle_1, |1\rangle_1, \dots\}$ ed $\{|0\rangle_2, |1\rangle_2, \dots\}$ rispettivamente, e consideriamo due vettori normalizzati $|\psi_1\rangle$ ed $|\psi_2\rangle$ che vivono nei rispettivi spazi, ovvero che rispettano:

$$|\psi_1\rangle = a_0 |0\rangle_1 + a_1 |1\rangle_1 + a_2 |2\rangle_1 + \dots \quad \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 = 1 \quad (9)$$

$$|\psi_2\rangle = b_0 |0\rangle_2 + b_1 |1\rangle_2 + b_2 |2\rangle_2 + \dots \quad \sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^2 = 1 \quad (10)$$

allora nello spazio \mathcal{H} , per come è definito il prodotto tensore, lo stato $|\psi_{12}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ possiede una serie di termini misti e può essere scritto come:

$$|\psi_{12}\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j |i\rangle_1 |j\rangle_2 \quad (11)$$

dove di solito lo stato composto si scrive $|i\rangle_1 |j\rangle_2 = |ij\rangle$.

Tuttavia un generico stato dello spazio \mathcal{H} può essere scomposto nei vettori della base composta appena ridefinita $|ij\rangle$:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} |ij\rangle \quad (12)$$

Il problema è però che non sempre questo generico stato è scrivibile tramite prodotto tensore; questo accade ogni volta che non si riescono a riscrivere gli α_{ij} come prodotto $a_i b_j$. Chiamiamo dunque stati entangled tutti quegli stati generici $|\psi\rangle$ che non possono essere scritti tramite prodotto tensore, ovvero tali che $\nexists |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ tali che $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$.

Di solito sperimentalmente trattiamo l'entanglement tra due qubit, per cui tutti i precedenti discorsi vanno adattati al caso di spazi di Hilbert bidimensionali. In questo caso speciale risulta evidente una importante qualità dell'entanglement, riscontrabile quando si effettuano delle misure su una parte del sistema. Infatti, in seguito ad una misura sul primo fotone, il sistema collassa su un autospazio: questo collasso è in grado di modificare le probabilità dei possibili valori attesi per una misura successiva del secondo fotone.

Questo vuol dire che, considerando ad esempio uno stato di Bell descritto da:

$$|\psi_{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |HH\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |VV\rangle \quad (13)$$

una misura del primo qubit permette di affermare con certezza il valore che verrà trovato da una successiva misura del secondo qubit. Infatti, prima della misura del primo qubit, il secondo qubit poteva risultare con una probabilità del 50% nello stato $|H\rangle$ e del 50% in $|V\rangle$, mentre, a seguito della misura del primo qubit, il sistema deve collassare in uno dei due stati: $|\psi_1\rangle = |HH\rangle$ oppure $|\psi_2\rangle = |VV\rangle$. Questo vuol dire che, una volta misurato il primo qubit, si conosce già il valore del secondo, perchè la probabilità di trovare il secondo qubit nello stesso stato in cui è stato trovato il primo è pari al 100%.

Esistono molti modi per stimare l'entanglement, a seconda della fattura dei qubit ed in funzione del loro numero. In particolare per una coppia di i fotoni entangled una possibile misura è la visibilità, che verrà presentata successivamente.

1.3 Disuguaglianze di Bell

Le disuguaglianze di Bell sono dei limiti matematici che permettono di discriminare se i risultati di alcune misure possano essere descritti o meno da una teoria realistica e locale: più precisamente, se le disuguaglianze sono violate, si può escludere l'esistenza di una teoria realistica e locale in grado di riprodurre i risultati ottenuti. Si può dunque andare a vedere se esiste una spiegazione dovuta alla meccanica quantistica che prevede una tale violazione.

La disuguaglianza di Bell più importante che utilizzeremo è la cosiddetta CHSH, che prende il nome dalle iniziali dei quattro fisici che la hanno, per primi, descritta. La CHSH ha forma:

$$S_{CHSH} = \langle A_0 B_0 \rangle - \langle A_0 B_1 \rangle + \langle A_1 B_0 \rangle + \langle A_1 B_1 \rangle \quad (14)$$

dove $\langle K \rangle$ indica il valore atteso dell'operatore K sullo stato considerato. In particolare, lavorando con una coppia di qubit, gli operatori A_i agiscono sullo spazio di Hilbert del primo, mentre i B_j sul secondo. Si ricava inoltre che, per una coppia di fotoni, il set di operatori che massimizza il valore di S_{CHSH} è:

$$A_0 = \sigma_z \quad B_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_z + \sigma_x) \quad (15)$$

$$A_1 = \sigma_x \quad B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_z - \sigma_x) \quad (16)$$

dove le σ_i sono le matrici di Pauli.

Per ogni teoria locale deve valere $S_{CHSH} \leq 2$, ma esistono degli operatori che invece restituiscono valori maggiori di due nel caso quantistico. Infatti ottenere delle stime di $S_{CHSH} > 2$ è una conferma del fatto che si stanno valutando degli stati entangled: in particolare più alto è il valore, più si può essere confidenti dell'entanglement prodotto.

1.4 Spontaneous Parametric Down Conversion (SPDC)

Lo *Spontaneous Parametric Down Conversion* è un fenomeno consentito dalla meccanica quantistica che prevede l'interazione di un fascio luminoso, chiamato usualmente "pompa", con un cristallo non lineare e la successiva creazione di due fasci uscenti, chiamati rispettivamente "signal" ed "idler". In seguito ci riferiremo a questo processo con l'acronimo SPDC.

Questo fenomeno è causato dalla presenza di termini non lineari nella relazione tra polarizzazione P del cristallo e campo elettrico applicato. Indicando in apice il contributo lineare, quadratico, etc..., si può infatti scrivere la polarizzazione come:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \chi^{(3)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (17)$$

$$= \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (18)$$

dove $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ indica l'operatore di campo elettrico, mentre il termine di interesse è quello del secondo ordine. Infatti con questa scrittura è possibile scrivere il contributo alla hamiltoniana del campo elettromagnetico dato dal secondo ordine della suscettività elettrica $\chi^{(2)}$. Seguendo [2], si ottiene che questo contributo può essere scritto come integrale sul volume:

$$H(t) = \epsilon_0 \int_V \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r} \quad (19)$$

nel quale poi bisogna imporre le condizioni di polarizzazione dovute all'uso di un determinato tipo di cristallo. In tutti i casi valgono però le condizioni di phase matching: la conservazione dell'energia $\omega_p = \omega_i + \omega_s$ e del momento, o meglio del vettore d'onda $k_p = k_i + k_s$.

Esistono due tipi di SPDC: quella di Tipo I prevede che la pompa abbia polarizzazione perpendicolare a quella sia di idler che di signal, che sono polarizzati nella stessa maniera, mentre quella

di Tipo II prevede che signal ed idler abbiano una polarizzazione perpendicolare tra di loro. In particolare, ci si occuperà solamente di SPDC di Tipo II, per cui riserviamo qualche dettaglio utile a questo caso specifico. In particolare, proseguendo i conti, si ricava che le condizioni date dal cristallo permettono di riscrivere il contributo all'Hamiltoniana come:

$$H(t) = \epsilon_0 \int_V \left(\chi^{(2)} \mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^-(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^-(\mathbf{r}, t) + \text{H.c.} \right) d^3\mathbf{r} \quad (20)$$

dove $\mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^-(\mathbf{r}, t)^\dagger$ indica la componente dell'operatore di campo elettrico per frequenze positive, mentre H.c. serve a contare il coniugato hermitiano. In particolare, in un lavoro di Bennink [1], assunto di lavorare con dei fasci gaussiani, si trovano delle condizioni tali per cui la densità spettrale, ovvero la probabilità di emettere il signal e l'idler data dal modulo quadro della loro funzione d'onda $|\Psi(\omega_s, \omega_i)|^2$, è massimizzata. Questo accade quando, per i parametri focali, definiti come $\xi_j \equiv \frac{L}{k_j W_j^2}$, con L lunghezza del cristallo ed W_j waist del fascio j -esimo, vale la relazione $\xi_p = \xi_s = \xi_i$. Da questa uguaglianza tra le varie ξ_j , e considerando che le lunghezze d'onda di signal e idler sono doppie rispetto alla pompa, si ricava la condizione ottimale sui waist:

$$W_p = \frac{W_i}{\sqrt{2}} = \frac{W_s}{\sqrt{2}} \quad (21)$$

1.5 Fascio luminoso

Per studiare l'andamento della luce all'interno dell'apparato sperimentale, che descriveremo nel capitolo 3.1, è necessario valutare anche la struttura spaziale della stessa, oltre alle caratteristiche date dalla polarizzazione: sulla base di queste infatti sono stati pensati ed ottimizzati i vari componenti dell'apparato. Partiamo dal presupposto che un fascio luminoso uscente dal laser presenta un particolare "modo", ovvero il profilo di intensità su un piano perpendicolare alla direzione di propagazione: in particolare per il laser che verrà utilizzato questo profilo ha la caratteristica di essere gaussiano. Questo vuol dire che l'intensità della luce diminuisce con un andamento gaussiano all'allontanarsi dall'asse che identifica la direzione di propagazione del fascio. Ovvero l'intensità varia secondo la legge $I \propto e^{-(\Delta x)^2}$, dove con Δx si indica la distanza dall'asse.

I fasci gaussiani sono soluzioni approssimate dell'equazione di Helmholtz:

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0 \quad (22)$$

L'approssimazione prevede di lavorare con onde la cui ampiezza complessa varia di poco per delle distanze dell'ordine della lunghezza d'onda. Ovvero, per un cambiamento di $\Delta z = \lambda$, si deve avere che $\Delta A \ll A$. Un modo per far valere questa condizione di onda parassiale è quello di prendere una onda piana e cambiare l'ampiezza complessa lentamente al variare della posizione, ovvero sfruttare una onda del tipo:

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{ikz} \quad (23)$$

dove si è supposto che l'onda si propaghi lungo l'asse \hat{z} .

Imponendo le condizioni:

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k^2 A \quad (24)$$

si ottiene la Equazione di Helmholtz parassiale:

$$\nabla_T^2 A + i 2k \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (25)$$

dove $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ è il laplaciano trasverso.

Una delle soluzioni di questa equazione è il fascio gaussiano, che in coordinate cartesiane assume forma:

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_0}{q(z)} \exp \left[-i k \frac{\rho^2}{2 q(z)} \right] \quad (26)$$

dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ è la distanza dall'asse di propagazione, mentre $q(z)$ è una funzione che tiene conto le caratteristiche di divergenza del fascio e si può riscrivere $q(z) = z - i z_0$, con z_0 che viene chiamato "range di Rayleigh", Un fascio gaussiano è completamente ben descritto dai due parametri λ, z_0 , mentre la sua intensità viene determinata dal valore del parametro A_0 .

Può essere utile riparametrizzare il fascio gaussiano, presentato all'equazione 26 introducendo le quantità:

$$\begin{cases} W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \\ R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \right] \\ W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \\ \zeta(z) = \tan^{-1} \frac{z}{z_0} \end{cases} \quad (27)$$

il cui significato fisico è ben descritto in [3]. Qui ci limitiamo ad osservare che $W(z)$ rappresenta la larghezza del fascio al variare di z , che W_0 è il waist, ovvero la larghezza minima del fascio, $R(z)$ il raggio di curvatura ed infine $\zeta(z)$ il ritardo della fase rispetto ad un'onda piana.

Questo è quello che ci si aspetta teoricamente, ma in pratica vi sono molte sorgenti di errore, che contribuiscono alla creazione di un fascio che è solamente simile a quello atteso, poichè formato dalla sovrapposizione di molti modi di propagazione diversi. Per evidenziare quindi il modo gaussiano, ci si avvale dello sviluppo in termini di funzioni di Hermite-Gauss: questo set di funzioni funge infatti da base e permette di descrivere qualsiasi fascio luminoso che risolve l'equazione di Helmholtz in approssimazione parassiale.

La descrizione del fascio luminoso tramite un modo gaussiano è sì veritiera, ma anche utile perchè permette di sfruttare una serie di componenti ottici e di semplificarne i conti teorici. Per effettuare tale descrizione, è infatti sufficiente l'utilizzo di soli due parametri del fascio: la lunghezza d'onda λ , ed il range di Rayleigh z_0 , rappresentante il rate a cui il fascio si disperde lungo il suo tragitto in aria. Tramite questi due parametri è dunque semplice effettuare anche i conti con tutte le componenti ottiche, sfruttando un numero limitato di gradi di libertà.

1.6 Variazione del fascio luminoso attraverso le componenti ottiche

Si vogliono ottimizzare le lenti e le distanze all'interno dell'apparato sperimentale, alla luce della relazione tra i waist formulata in Equazione 21. Per far questo è necessario studiare come varia il fascio luminoso passando attraverso le componenti ottiche ed in particolare nel passaggio all'interno del cristallo.

Si assume quindi di lavorare con un fascio luminoso gaussiano, dato dall'utilizzo di un laser che immette un fascio con questo modo, allora si possono sfruttare delle particolari proprietà nello sviluppo dei conti. In particolare, per un fascio gaussiano, il passaggio attraverso le lenti oppure tra due superfici a contatto con diversi indici di rifrazione non modifica la natura di fascio gaussiano. Per questo motivo ognuna di queste transizioni cambia soltanto i parametri del fascio e lo fa seguendo la regola ABCD, ben descritta nel libro di Saleh e Teich [3]. Questa legge permette di descrivere una qualsiasi delle transizioni prima citate, semplicemente usando una matrice M , descritta da quattro parametri.

La matrice agisce come trasformazione nello spazio dei parametri (y, θ) , dove y è la posizione sul piano perpendicolare alla direzione di propagazione del fascio, mentre θ è l'angolo che il fascio forma con l'asse ottico. Una trasformazione è quindi definita come:

$$\begin{pmatrix} y' \\ \theta' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} \quad (28)$$

Questa descrizione è importante perchè riesce a legare tra di loro i parametri del fascio gaussiano prima e dopo la transizione: in particolare le componenti reale e complessa del parametro $q(z) = z + i z_0$ sono legate dall'equazione:

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (29)$$

con q' che descrive completamente le caratteristiche del fascio gaussiano, dopo aver attraversato la componente ottica descritta da M .

È importante notare che, presa la concatenazione degli elementi ottici descritti dalle matrici M_1, M_2, \dots, M_N , la matrice che descrive i parametri all'uscita della serie di componenti è data dal loro prodotto:

$$M = M_N \cdot \dots \cdot M_2 \cdot M_1 \quad (30)$$

Si considerano quindi due casi particolari di transizioni che si incontrano nel percorso della luce nel caso specifico trattato in questa tesi.

1.6.1 Fascio entrante in un materiale

Il primo caso considerato è quello di un fascio gaussiano inizialmente in aria, oppure in un mezzo con indice di rifrazione unitario, che entra in un mezzo con indice di rifrazione n e che rimane in questo mezzo per una distanza d . Per la regola ABCD, si può descrivere il fascio in una posizione interna al cristallo a distanza d attraverso il calcolo della matrice:

$$M_{TOT} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1/n \end{pmatrix} \quad (31)$$

dove la prima matrice si riferisce al passaggio tra l'aria ed il mezzo, mentre la seconda si riferisce alla propagazione dello stesso all'interno del mezzo. Dalla stessa matrice si ricava che le caratteristiche del fascio gaussiano vengono mappate in altri parametri e cambiano secondo le relazioni:

$$z \rightarrow z \cdot n + d \qquad z_0 \rightarrow z_0 \cdot n \quad (32)$$

Inoltre, a causa del passaggio in un mezzo, la lunghezza d'onda viene modificata come $\lambda \rightarrow \lambda/\sqrt{n}$. In questo caso si ha che la formula del waist viene cambiata, rispetto a quella nel vuoto scritta in Formula 27, secondo il cambio di parametri appena descritto:

$$W(z)' = W_0' \sqrt{1 + \left(\frac{z'}{z_0'} \right)^2} \quad (33)$$

$$= W_0 \sqrt{1 + \left[\frac{(z + d/n)}{z_0} \right]^2} \quad (34)$$

dove i parametri contrassegnati con il ' sono riferiti al fascio gaussiano dopo l'inserimento del mezzo e si basano sul cambio descritto in Equazione 32.

1.6.2 Fascio uscente da un materiale

Per valutare l'evoluzione complessiva del fascio gaussiano bisogna guardare come questo cambia una volta uscito dal cristallo. A tal proposito bisogna utilizzare nuovamente le matrici caratterizzanti le transizioni che si trovano lungo il percorso della luce. Si ottiene che, utilizzando le due matrici in ordine, si descrive l'evoluzione del fascio gaussiano da dentro a fuori dal cristallo:

$$M_{TOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & n \end{pmatrix} \quad (35)$$

Da questa matrice si ricava nuovamente come variano i parametri caratterizzanti del fascio gaussiano: questa volta a partire dalla posizione sull'asse z e da z_C , ovvero il range di Rayleigh del fascio all'interno del cristallo. In particolare si ottiene una mappa:

$$z \rightarrow \frac{z}{n} + \frac{d}{n} \qquad z_C \rightarrow \frac{z_C}{n} \quad (36)$$

dove anche in questo caso la lunghezza d'onda viene modificata come $\lambda \rightarrow \lambda \cdot \sqrt{n}$. La mappa suggerisce che, se considero un fascio gaussiano con waist W_C all'interno del cristallo, allora l'andamento della larghezza del fascio assume forma:

$$W(z)' = W_C' \sqrt{1 + \left(\frac{z'}{z_C'}\right)^2} \quad (37)$$

$$= W_C \sqrt{1 + \left[\frac{(z+d)}{z_C}\right]^2} \quad (38)$$

dove i parametri contrassegnati con il ' sono riferiti al fascio gaussiano dopo l'inserimento del vuoto alla distanza d e si basano sul cambio in equazione 36. Viene indicizzato con W_C il waist del fascio all'interno del cristallo ed z_C il range di Rayleigh del fascio all'interno dello stesso.

1.6.3 Fascio entrante ed uscente da un materiale

Mettendo assieme i due risultati appena ricavati, si può andare a vedere come varia la posizione z in funzione della lunghezza focale della lente: in questo modo si riesce a stimare quale sia la posizione ottimale a cui avere la larghezza del fascio minima in funzione della lente utilizzata. Si può desumere che un fascio gaussiano entrante in una lente sottile esca con delle caratteristiche diverse, ma mantenendo la sua natura di fascio gaussiano: questa ipotesi viene garantita dall'approssimazione parassiale e dalla regola ABCD. Con questa assunzione ed utilizzando la regola della catena nei cambi delle variabili, si ottiene che l'inserimento del cristallo porta al cambio di parametri: $z \rightarrow z + 2d/n$ ed $z_0 \rightarrow z_0$, dove la lunghezza totale del cristallo vale $2d$, ed è centrato nella posizione con $z = 0$.

Risulta ora possibile andare a stimare come cambia il fascio luminoso dopo il passaggio attraverso una lente. Si parte dalle formule che legano il raggio di curvatura e la fase del fascio uscente alle caratteristiche del fascio entrante attraverso la lunghezza focale della lente [3]:

$$\begin{cases} kz + k\frac{\rho^2}{2R} - \zeta - k\frac{\rho^2}{2f} = kz + k\frac{\rho^2}{2R'} - \zeta \\ \frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f} \end{cases} \quad (39)$$

mentre la larghezza del fascio rimane inalterata.

Se indichiamo con z la posizione lungo l'asse \hat{z} in cui il fascio luminoso ha un minimo nella sua larghezza, che indichiamo con W_0 , allora la lente è in grado di fornire una nuova posizione z' , successiva rispetto alla lente, in cui la larghezza del fascio torna ad avere un minimo, che viene

indicato con W'_0 . Il fascio nuovamente focalizzato, le cui caratteristiche sono ricavabili risolvendo il sistema 39, viene governata dal Fattore di Magnificazione M , funzione sia di z che di f :

$$\begin{cases} W'_0 = MW_0 \\ (z' - f) = M^2(z - f) \\ 2z'_0 = M^2(2z_0) \\ 2\theta'_0 = \frac{2\theta_0}{M} \end{cases} \quad (40)$$

dove $M = M_r/\sqrt{1+r^2}$, $M_r = |f/(z-f)|$ ed $r = z_0/(z-f)$.

A partire da queste equazioni, considerando un fattore di magnificazione costante, si può ricavare una formula che lega la posizione z alla lunghezza focale f :

$$z = f \pm \sqrt{(f/M)^2 - z_0^2} \quad (41)$$

Nel nostro caso, se si considerano i cambiamenti ai parametri z ed z_0 apportati dai due comportamenti, riassumibili in $z \rightarrow z + 2d/n$ ed $z_0 \rightarrow z_0$, ottengo che, dalla formula 41, vale:

$$z = f - 2d/n \pm \sqrt{(f/M)^2 - z_0^2} \quad (42)$$

Questa formula permetterà, una volta cambiate le lenti che portano ad Alice e Bob dall'uscita del PBS, di ricavare la lunghezza ottimale del percorso luminoso, conoscendo la lunghezza focale della lente.

In Formula 21 era stato ricavato un legame tra i waist. Questo vuol dire che, prendendo in considerazione le due condizioni imposte dalle Sottosezioni 1.6.1 ed 1.6.2:

$$\begin{cases} W'_0 = W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \\ W'_C = W_C = \sqrt{\frac{2\lambda z_0}{n\pi}} \end{cases} \quad (43)$$

si possono legare i due fasci tramite l'equazione $W'_0 = CW_C$, dove il parametro C contiene in sé i fattori prima menzionati che entrano in gioco durante la SPDC. Si può dunque calcolare il valore finale di M valutato tra prima del cristallo e dopo la lente:

$$M = \frac{W'_C}{W_0} = \frac{W_C}{W_0} = \frac{W'_0/C}{W_0} = \frac{W_0/C}{W_0} = \frac{1}{C} \quad (44)$$

Fortunatamente si ha di fatto che la componente gaussiana del fascio di fononi prodotto nel cristallo ha un waist pari a $\sqrt{2}$ volte quello del fascio di pompa, come anticipato in Formula 21: in questo modo si compensa esattamente il fattore proveniente dalla differenza tra le lunghezze d'onda, dal quale si ottiene che $C = 1$.

Questo vuol dire che l'operazione di inserimento del cristallo comporta solamente l'avvicinamento della lunghezza z di una quantità pari ad $2d/n$, senza modificare il waist misurato nel vuoto prima dell'introduzione del cristallo nell'interferometro, nonostante ci sia un raddoppiamento della lunghezza d'onda dei fotoni nel fascio di nostro interesse.

Nel prosieguo si ragionerà in termini di fattore di magnificazione fissato pari ad

$$M = \frac{MFD}{2 \cdot W_0} \quad (45)$$

dove $MFD = 5.0 \pm 0.5 \mu m$ è il "Mode Field Diameter", ovvero il diametro massimo del fascio luminoso che può venire accettato dalla fibra ottica. Con diametro di un fascio gaussiano si intende la distanza massima a cui l'intensità vale $1/e^2$ rispetto al picco al centro del fascio.

2 Sorgente di fotoni polarization-entangled

Per ottenere dei fotoni entangled bisogna prima di tutto ricordare che l'entanglement esiste fintanto che sussiste il concetto di indistinguibilità: per questo motivo, nella realizzazione di una sorgente, è necessario prendere in considerazione e rendere il più possibile simili molti parametri. Per lo stesso motivo, al fine di migliorare l'entanglement, successivamente verranno usate delle determinate procedure che cercano di diminuire la distinguibilità tra le particelle.

L'idea alla base di molte sorgenti è la stessa, ovvero di sfruttare la SPDC, ed in particolare la creazione simultanea di una coppia di fotoni indistinguibili e tra i quali è presente entanglement in polarizzazione, lunghezza d'onda e modo spaziale. Cambiano però i cammini ottici e le caratteristiche che vengono selezionate.

Esistono infatti molti tipi di sorgenti attualmente in uso, che prevedono l'utilizzo di diversi materiali e cammini ottici. Tuttavia, almeno teoricamente, ci si aspetta che gli interferometri possano essere molto utili nella realizzazione di queste sorgenti. Infatti, attraverso gli interferometri, possiamo facilmente stimare le distanze, o meglio possiamo misurare precisamente le differenze tra cammini ottici: in questo modo si può massimizzare la indistinguibilità tra i fotoni prodotti, facendo loro seguire uno stesso percorso. Ci si aspetta quindi che gli interferometri abbiano delle prestazioni migliori rispetto agli altri setup.

2.1 Interferometro Sagnac

Un interferometro Sagnac è un qualsiasi insieme di specchi che permette a due fasci luminosi, partiti da uno stesso punto, di propagarsi lungo il medesimo percorso, ma in direzioni opposte, per poi tornare alla posizione iniziale. Questi interferometri, come tutti gli interferometri, si basano sul principio della composizione delle onde, ed in particolare sull'interferenza che si genera per una differenza di fase tra onde elettromagnetiche. Inventato per studiare l'*Effetto Sagnac*⁽¹⁾, assicura che i fotoni percorrano un medesimo cammino: si può infatti sempre misurare la differenza tra i percorsi dei due fotoni ed eliminarla tramite gli specchi costituenti l'interferometro.

L'interferometro Sagnac a due specchi è utilizzato per realizzare la sorgente di fotoni polarization-entangled presente nei laboratori del DEI. Tra le tante implementazioni di interferometri conosciuti, l'interferometro Sagnac è tra le più efficienti: permette infatti, grazie alla sua struttura di seguito riportata, una massima indistinguibilità tra i fotoni nello spazio percorso.

Da ora in avanti, quando si parlerà di interferometro Sagnac, si farà riferimento allo specifico caso a due specchi, ovvero alla struttura esemplificata in Figura 2, ed in particolare al triangolo formato da PBS, due specchi evidenziati in rosso, Polarizzatore ed il cristallo PPKTP.

L'interferometro Sagnac è dunque formato dalle componenti in Figura 2, che vengono elencate di seguito nell'ordine in cui il fascio luminoso prodotto le incontra:

- Pompa Laser (LD): produce un fascio luminoso che ha una lunghezza d'onda fissata di $\lambda_p = 405 \text{ nm}$ circa, con un errore di circa $\sigma_{\lambda_p} = 1.5 \text{ nm}$. Il laser modifica lo spettro in base alla sua temperatura ed alla corrente fornita per alimentarlo: le condizioni del laser sono state mantenute stabili e costantemente monitorate.

⁽¹⁾Questo effetto, scoperto da Georges Sagnac, prevede lo spostamento delle frange di interferenza al ruotare dell'interferometro, dovuto alla differenza di spazio percorso durante la rotazione dello stesso.

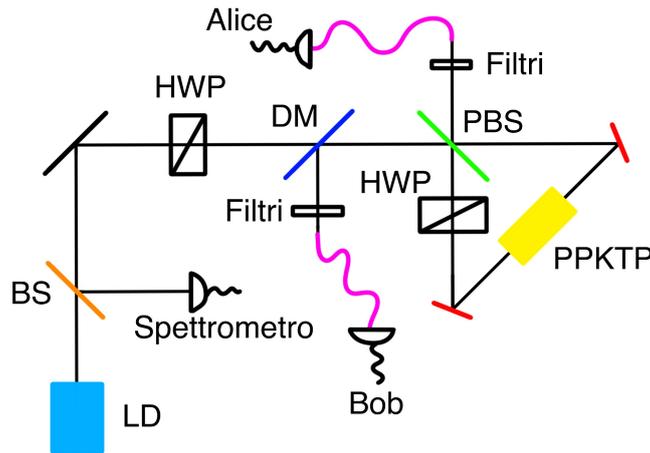


Figura 2: Schema rappresentativo dell'interferometro Sagnac

- Beam Splitter (BS): componente ottico che permette il passaggio di metà della luce entrante, mentre devia di 90° l'altra metà della luce. Serve per deviare il fascio luminoso e quindi monitorare lo spettro prima che la luce entri in altre componenti del percorso. Lo spettro della luce uscente, ricavato utilizzando questa riflessione, è presentato in Figura 3.

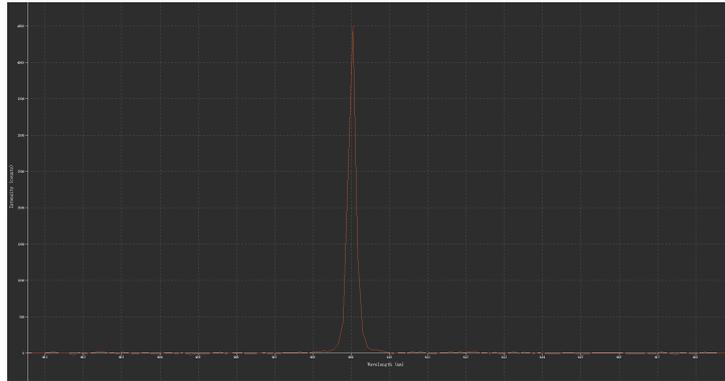


Figura 3: Spettro del laser utilizzato

- Lamina mezz'onda (HWP): elemento ottico che permette il passaggio della luce che ha una determinata polarizzazione, regolabile tramite l'orientazione dell'asse del polarizzatore stesso. Tutta la restante luce viene assorbita dal componente o riflessa indietro. Una spiegazione più dettagliata di questo componente verrà fornita in seguito.
- Specchio dicroico (DM): ha la caratteristica di avere differenti coefficienti di riflessione e trasmissione a seconda della lunghezza d'onda del fascio. Nel nostro caso lo specchio riflette il fascio di fotoni della pompa ($\lambda_p = 405 \text{ nm}$) e trasmette quello di signal ed idler ($\lambda_i = 810 \text{ nm} = \lambda_s$).
- Polarizing Beam Splitter (PBS): è un cristallo che permette alla luce polarizzata orizzontalmente ($|H\rangle$) di passare, mentre riflette la luce polarizzata verticalmente ($|V\rangle$).
- Specchi: servono ad indirizzare la luce all'interno del setup in modo da rendere più funzionale l'uso degli spazi, nonché più semplice l'allineamento delle componenti, a causa del maggior numero di gradi di libertà spaziali introdotti.

- Periodically-Poled potassium titanyl phosphate (chimicamente il materiale si indica con la formula KTiOPO_4 , ma per tener conto anche delle sue proprietà fisiche di costruzione verrà chiamato PPKTP): cristallo formato dall'accostamento di aree con segno invertito nel coefficiente non lineare che lega polarizzazione e campo elettrico. Questa costruzione permette al cristallo di fare la SPDC precedentemente descritta. In particolare il PPKTP presente nei laboratori del DEI è un cristallo progettato per realizzare SPDC di Tipo II, con fotoni di pompa con $\lambda = 405 \text{ nm}$ e fotoni generati con lunghezza d'onda 810 nm .
- Filtri per le lunghezze d'onda: dei componenti ottici che permettono il passaggio della luce di una determinata lunghezza d'onda (nel nostro caso quella da $\lambda = 810 \text{ nm}$ circa). Bloccano infatti tutti i fotoni di lunghezza d'onda diversa, all'interno di un determinato range di funzionamento.
- Fibra ottica a singolo modo (SMF): materiale che permette il passaggio solamente ai fasci luminosi che si propagano in modo gaussiano; disperde tutti gli altri modi di propagazione, tanto più quanto è lunga la fibra stessa. In particolare è utile in quanto flessibile: permette quindi un semplice indirizzamento della luce verso altre componenti del setup, variandone tuttavia la polarizzazione.

Il funzionamento dell'interferometro può essere spiegato seguendo l'evoluzione della polarizzazione dei fotoni nel loro tragitto all'interno dell'interferometro: la luce esce dal laser, passa attraverso il BS ed incontra il polarizzatore. Qui, muovendo l'asse dello stesso, si riesce a polarizzare il fascio, portandolo ad avere una polarizzazione qualsiasi, scrivibile come $(\alpha |H\rangle + \beta |V\rangle)/\sqrt{2}$. Per questioni di spazi tra la HWP ed il DM viene inserita una fibra ottica per portare la luce in un'altra area del banco ottico in cui è presente il cristallo. Per far ciò, attraverso una lente ed una coppia di specchi (vitale per semplificare la procedura di accoppiamento in fibra), il fascio luminoso viene fatto entrare in fibra.

All'uscita della fibra viene focalizzata la luce attraverso un'altra lente: si cerca di posizionare la lente in modo che il fascio abbia la larghezza minore in prossimità del cristallo. Il fascio quindi viene fatto passare attraverso un PBS, dopo il quale, in una delle due uscite, viene inserita una lamina mezz'onda, responsabile di ruotare la polarizzazione di un angolo $\theta = 90^\circ$, ovvero tale da mappare gli stati $|V\rangle$ in $|H\rangle$ e viceversa. In particolare questa lamina sarà inserita nel braccio in cui la luce entra con polarizzazione $|V\rangle$, di modo che nel cristallo vi siano due fasci incidenti con la stessa polarizzazione $|H\rangle$, ma in direzioni spaziali opposte: questo perchè la produzione di fotoni avviene quando si entra con polarizzazione $|H\rangle$.

I due fasci così separati in polarizzazione sono fatti passare attraverso il cristallo PPKTP, che permette di fare la SPDC, grazie alla quale, come illustrato al Paragrafo 1.4, vi è la creazione di due fotoni di lunghezza d'onda $\lambda = 810 \text{ nm}$ circa, uno con polarizzazione $|H\rangle$, mentre l'altro in polarizzazione $|V\rangle$, che vengono di norma chiamati rispettivamente "signal" ed "idler".

Dopo la creazione simultanea all'interno del cristallo, i fotoni prodotti sono fatti passare di nuovo attraverso il PBS e si propagano quindi in due direzioni diverse che comunemente chiamiamo Alice e Bob. Infine sono separati dagli altri fotoni di lunghezza d'onda minore, prima attraverso gli specchi dicroici, poi mediante i filtri.

All'uscita dell'interferometro è possibile trovare degli stati finali, che, visti nello spazio prodotto tensore degli stati di Alice e Bob, possono essere facilmente rappresentati nella base della polarizzazione $\{|H\rangle, |V\rangle\}$. In base alla polarizzazione impostata all'uscita del laser, che è descritta completamente da una sovrapposizione coerente degli stati $|H\rangle$ e $|V\rangle$, si troverà un diverso stato all'uscita dell'interferometro:

$$\alpha |H\rangle + \beta |V\rangle \quad \rightarrow \quad |\psi\rangle = \alpha |HV\rangle + \beta |VH\rangle \quad (46)$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

2.2 Stati generati dall'interferometro Sagnac

Dallo stato generico uscente dall'interferometro Sagnac, presentato in Formula 46, risulta utile controllare teoricamente quali di questi producono entanglement di migliore qualità. Per fare questo, riprendendo i concetti teorici della Sezione 1, bisogna stimare la visibilità. In particolare possiamo scrivere il generico stato della Formula 46 anche nella base $\{|D\rangle, |A\rangle\}$, definite nel Paragrafo 1.1:

$$\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} |D\rangle + \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} |A\rangle \quad (47)$$

da cui lo stato uscente dal Sagnac, scritto attraverso lo stesso cambio di parametri:

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} |DD\rangle + \frac{-\alpha + \beta}{\sqrt{2}} |DA\rangle + \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} |AD\rangle + \frac{-\alpha - \beta}{\sqrt{2}} |AA\rangle \quad (48)$$

La misura della visibilità interferometrica nelle due basi, per lo stato generico parametrizzato da α, β , risulta quindi essere:

$$V_{\{H,V\}} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (49)$$

$$V_{\{D,A\}} = \frac{\left| \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}} \right|^2 - \left| \frac{-\alpha+\beta}{\sqrt{2}} \right|^2 - \left| \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{-\alpha-\beta}{\sqrt{2}} \right|^2}{\left| \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{-\alpha+\beta}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{-\alpha-\beta}{\sqrt{2}} \right|^2} = \frac{2|\alpha\beta|}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = 2|\alpha\beta| \quad (50)$$

Da cui si ricava subito che, per avere una visibilità massima in entrambe le basi, bisogna lavorare con gli stati che massimizzano il prodotto $|\alpha\beta|$. Un caso particolare facilmente riconoscibile come stato massimamente entangled è uno stato di Bell, ovvero $|\psi_{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |HV\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |VH\rangle$. Esiste un altro caso estremo in cui la visibilità nella base $\{|D\rangle, |A\rangle\}$ è nulla, ovvero quando uno dei due coefficienti è nullo. Questi due casi particolari saranno di grande aiuto per effettuare la calibrazione del setup di analisi: meritano dunque una denominazione propria riassumibile in:

$$|H\rangle \rightarrow |\psi_{classico}\rangle = |HV\rangle \quad (51)$$

$$\frac{|H\rangle + |V\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow |\psi_{entangled}\rangle = \frac{|HV\rangle + |VH\rangle}{\sqrt{2}} \quad (52)$$

Una volta creato questo stato $|\psi\rangle$, è possibile effettuare una serie di procedimenti che portano a stimare la bontà degli stati e l'effettiva presenza degli stati entangled.

2.3 Setup di analisi

Gli stati generati dall'interferometro Sagnac sono del tipo $|\psi\rangle = \alpha |HV\rangle + \beta |VH\rangle$. Da questo momento però ridefiniremo gli stati del secondo fotone mappando $|H\rangle$ in $|V\rangle$ e viceversa: si userà questa notazione in quanto risulta più semplice scrivere i programmi che effettuano le misure. In questo modo lo stato uscente dall'interferometro non è più $|\psi\rangle = \alpha |HV\rangle + \beta |VH\rangle$, ma viene chiamato $|\psi\rangle = \alpha |HH\rangle + \beta |VV\rangle$.

Sperimentalmente però lo stato non sarà perfetto, perchè i componenti che costituiscono l'interferometro non rispondono esattamente come le previsioni teoriche. Inoltre tutte le componenti non saranno mai allineate perfettamente, perchè sono regolate a mano e sono soggette ad un leggero rilassamento una volta che vengono rilasciate; in più, con l'avanzare del tempo, possono muoversi leggermente a causa di vibrazioni del piano di lavoro. Infine è presente della luce di fondo, proveniente dall'ambiente circostante, che si somma a quella dei fotoni signal e idler.

Queste imperfezioni sperimentali devono essere quantificate e dunque, al fine di stimare la bontà dello stato prodotto, è necessario analizzare i fotoni che sono stati diretti in Alice e Bob. In particolare, siccome la lunghezza d'onda dei due fotoni è stata selezionata in un range piccolo grazie ai filtri, non rimane altro che misurare la polarizzazione di signal ed idler: uno dei quali sarà andato in Alice, mentre l'altro in Bob. Per analizzare i fotoni così selezionati, bisogna costruire, attraverso una serie di componenti, due setup di analisi.

L'idea alla base della costruzione del setup di analisi è quella di "allineare le basi" e successivamente selezionare la polarizzazione del fascio che si vuole misurare. La prima parte consiste nel fare in modo che lo stato prodotto dall'interferometro rimanga lo stesso anche dopo il passaggio attraverso la fibra. Questo è necessario infatti perché la fibra ottica modifica la polarizzazione dei fotoni del fascio, pur mantenendo il loro modo di propagazione. Una volta che si è certi di aver ottenuto esattamente lo stato prodotto dall'interferometro, si può selezionare la polarizzazione da misurare. Per far ciò si sfruttano le misure proiettive ed in particolare si vuole sfruttare il PBS: infatti è sufficiente mappare in $|H\rangle$ la polarizzazione del fotone che vogliamo misurare, che in generale sarà del tipo $\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$. In questo modo il PBS farà in modo che l'unica componente della luce che può essere trasmessa sia quella con polarizzazione orizzontale, ovvero $\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$ prima della mappatura.

La prima cosa da sottolineare è la necessità di fissare bene le fibre ottiche, in modo che non vengano mosse durante le procedure di calibrazione. Dopodiché, per realizzare un sistema ottico che allinei le basi e che successivamente selezioni i fotoni con una polarizzazione regolabile, bisogna introdurre degli altri componenti ottici:

- Lamina mezz'onda = Half Wave Plate (HWP): lamina che permette, a seconda della rotazione del proprio asse, di ruotare la polarizzazione del fascio. Per un fascio polarizzato linearmente, indicando con θ l'angolo tra la polarizzazione del fascio incidente e l'asse della lamina, la polarizzazione del fascio uscente viene ruotata di un angolo 2θ . Questa lamina può essere descritta tramite una matrice del tipo:

$$A_{HWP}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \quad (53)$$

- Lamina quarto d'onda = Quarter Wave Plate (QWP): lamina in grado di rendere circolare una polarizzazione lineare, se giustamente allineata. Questa può essere descritta tramite una matrice del tipo:

$$A_{QWP}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos^2(\phi) + i \sin^2(\phi) & \sin(\phi)\cos(\phi)(1 - i) \\ \sin(\phi)\cos(\phi)(1 - i) & \sin^2(\phi) + i \cos^2(\phi) \end{pmatrix} \quad (54)$$

- Cristallo liquido (LCR): ha lo stesso comportamento di una lamina mezz'onda, ma il suo asse è regolato dal voltaggio presente ai capi del cristallo.

È importante sottolineare che queste lamine lavorano sia per i fotoni del laser, che per i fotoni prodotti dal cristallo, ovvero con delle lunghezze d'onda doppie rispetto a quella del laser: ad esempio si parla di Dual-wavelength half-wave plate quando si usano lamine mezz'onda che agiscono su due lunghezze d'onda diverse.

Attraverso l'implementazione di una lamina mezz'onda seguita da una lamina quarto d'onda e da una successiva lamina mezz'onda un qualsiasi stato di un solo fotone può venire mappato in un qualsiasi altro stato. Tuttavia, per le misure di entanglement che vogliamo effettuare, dobbiamo prendere in considerazione uno stato lineare: per questo motivo, in ognuno dei setup, vengono inserite in ordine solamente una HWP ed una QWP. Si tralascia l'ultima lamina mezz'onda

perchè necessaria solamente al raggiungimento di una polarizzazione ellittica. In questo modo si riesce a mappare un qualsiasi stato del fotone dopo la fibra nello stato che aveva all'uscita dell'interferometro. Esistono quindi sempre due angoli θ, ϕ per i quali la concatenazione di HWP ed QWP trasforma uno stato qualsiasi in uno stato qualsiasi lineare.

Grazie alle due lamine si riescono a mappare i singoli qubit; tuttavia può ancora essere presente una fase tra i due possibili stati di due qubit. Per eliminare questa fase è necessario inserire in uno dei due componenti il LCR, ed in particolare nel setup di Bob. Per eliminare la fase presente tra i due stati entangled misurati, è necessario andare nella base $\{|D\rangle, |A\rangle\}$: qui infatti la fase $e^{i\theta}$ presente tra gli stati $|HH\rangle$ e $|VV\rangle$ si trasforma in un termine misto, riscontrabile proiettando sugli stati $|DA\rangle$ ed $|AD\rangle$. Dalla definizione degli stati diagonale ed antidiagonale fornita nel Paragrafo 1.1, si vede che tutta l'informazione presente nella fase può essere portata ai coefficienti dei termini misti nella nuova base:

$$|\psi\rangle = |HH\rangle + e^{i\theta} |VV\rangle \quad (55)$$

$$= \frac{1}{2} \left[(1 + e^{i\theta}) (|DD\rangle + |AA\rangle) + (1 - e^{i\theta}) (|DA\rangle + |AD\rangle) \right] \quad (56)$$

Sarà quindi sufficiente cambiare il voltaggio ai capi del cristallo e proiettare negli stati misti della base $\{|D\rangle, |A\rangle\}$ per ottenere l'eliminazione della fase nella base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$.

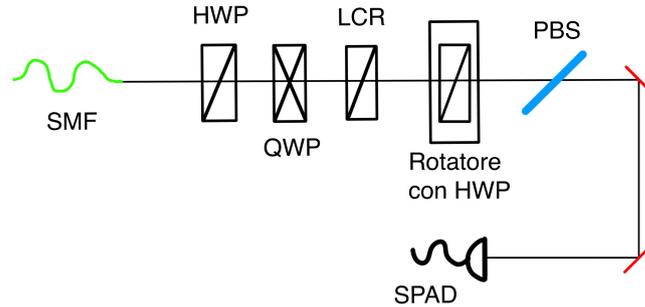


Figura 4: Setup di analisi schematizzato

Da queste considerazioni risulta ovvia la costruzione dei setup come vengono presentati in Figura 4, utilizzando in ordine: una fibra ottica per il trasferimento dei fotoni nel setup, una lente bifocale per focalizzare gli stessi una volta usciti dalla fibra, una lamina mezz'onda ed una lamina quarto d'onda, un rotatore con montata una lamina mezz'onda, un PBS ed infine due specchi necessari per l'accoppiamento in fibra.

2.4 Elettronica di acquisizione

Una volta che i fotoni sono stati generati nel cristallo e sono stati portati al setup di analisi tramite le fibre ottiche, sono pronti per essere rilevati. Tale compito è svolto da due componenti elettroniche: il Single Photon Avalanche Diode (SPAD), un rivelatore di singoli fotoni, in grado di registrare il passaggio di un singolo fotone, ed il Time to Digital Converter (TDC), capace di determinare il momento del arrivo del fotone con una precisione dell'ordine del picosecondo.

Lo SPAD è un diodo che, all'arrivo di un singolo fotone, produce un segnale elettrico. Questo dispositivo ha un funzionamento "a soglia" e non è in grado di discriminare il numero di fotoni contenuti in un impulso ottico.

Il TDC è un uno strumento in grado di misurare intervalli temporali ad una precisione elevata. Questo infatti, ricevendo degli impulsi elettrici provenienti da diversi input, riesce a stabilire la differenza temporale con una precisione di di pochi *ps*.

Queste due componenti elettroniche combinate assieme sono in grado di determinare la distanza temporale tra i momenti di arrivo di due fotoni con una precisione molto elevata. In particolare sono utili perché, ai fini dell'esperimento, si cercano i fotoni generati nello stesso momento all'interno del cristallo: questo vuol dire che ci si aspetta escano dai setup di analisi con una differenza temporale corrispondente alla differenza di tragitto percorso. È utile introdurre il concetto di "coincidenza", ovvero di due eventi avvenuti allo stesso istante all'interno di un certo range di accettazione sperimentale. Le coincidenze sono per la maggior parte causate da fotoni prodotti via SPDC e sono gli eventi che ci interessa studiare.

Tuttavia, per definire una coincidenza è necessario tener conto del ritardo temporale causato dai differenti cammini ottici dei due fotoni, e dalle diverse lunghezze dei cavi percorsi dai segnali elettrici per arrivare dagli SPAD al TDC. Per stimare questa quantità si genera un istogramma delle differenze temporali fra i segnali prodotti dai due SPAD e poi si interpola con una gaussiana, attesa a causa della distribuzione casuale. Il fit fornirà il centroide ed il range in cui si considera valida la coincidenza, tipicamente di circa ± 1 ns.

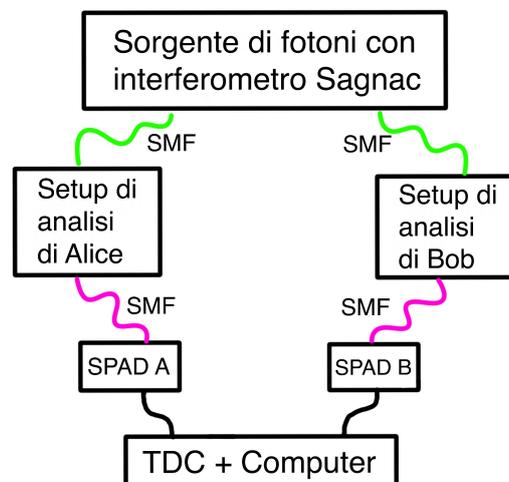


Figura 5: Schematizzazione totale dell'apparato strumentale: i fotoni vengono prodotti nella sorgente, descritta in Figura 2, selezionati attraverso i setup di analisi, schematizzati in Figura 4 ed infine rivelati attraverso gli SPAD, mandando un segnale al TDC, collegato al computer.

3 Preparazione dell'apparato sperimentale

Per lavorare con i setup ottici descritti occorre effettuare delle procedure di allineamento e di calibrazione: le prime servono per permettere alla luce di effettuare il cammino previsto, mentre le seconde garantiscono che i risultati sperimentali siano il più accurati possibile. In particolare, a causa delle vibrazioni del banco ottico, del rilassamento delle viti dei supporti che reggono le lamine e dell'involontario tocco degli operatori, spesso conviene controllare la calibrazione anche quando non sono state apportate delle modifiche volontarie al percorso della luce. Inoltre ogni volta che viene cambiato un componente il cammino ottico viene inevitabilmente deviato: pertanto bisogna ricorrere nuovamente alle procedure di allineamento e calibrazione.

3.1 Allineamento

La prima procedura da effettuare è l'allineamento. L'idea alla base è quella di impostare un percorso per la luce, ovvero di creare, attraverso gli specchi, una linea spezzata con delle determinate caratteristiche che porti il fascio luminoso dal laser agli SPAD. In particolare è conveniente che il percorso sia il più possibile parallelo al banco e che la sua altezza dal banco ottico non sia elevata; inoltre il percorso della luce deve incontrare gli specchi approssimativamente nel loro centro, affinché si possano muovere gli specchi finemente senza temere che il fascio smetta di colpirli.

Per allineare in maniera sistematica tutta la strumentazione e far sì che una porzione consistente della luce che si propaga in aria riesca ad entrare nelle fibre singolo modo, la procedura più semplice prevede l'utilizzo di due laser: l'idea è di collegare un fascio luminoso all'entrata del percorso, attaccare l'altro all'uscita e sovrapporli utilizzando gli specchi.

Per l'interferometro, una volta sovrapposti i due fasci, è necessario regolare la posizione del minimo della larghezza del fascio. Dai concetti teorici introdotti in Sezione 1.6.3 è possibile ricavare una procedura che, a partire dalla misura del waist in aria W_0 e della sua posizione z^* rispetto alla lente da cui la luce entra nell'interferometro, permette di ottenere il waist voluto all'interno del cristallo W'_0 nella posizione $z^{*'}$ voluta. Per far questo dobbiamo guardare l'uguaglianza 34, dalla quale si ricava l'algoritmo:

1. Prima dell'inserimento del cristallo bisogna posizionarsi alla coordinata $z = z^{*'}/n + d/n$, che indicheremo nel seguito come z^* , dove d è metà della lunghezza del cristallo. In questa coordinata bisogna fare in modo che ci sia il waist minimo: in questo modo, quando inseriremo il cristallo, la larghezza minima del fascio verrà spostata esattamente nel punto $z^{*'}$ voluto, come visibile in equazione 34. Per svolgere queste misure bisogna usare il metodo del coltello ⁽²⁾.
2. Modificare il waist di modo che, alla coordinata $z = z^{*'}/n + d/n$, il waist radius sia minimo e valga $W_0 = W_\alpha$, dove W_α è la quantità fissata dallo sperimentatore che si vuole ottenere per il waist all'interno del cristallo. In questo modo infatti si ottiene che, una volta inserito il cristallo, il waist radius al suo interno, valga esattamente W_α .
3. Inserire il cristallo, ottenendo che il waist radius vale W_α esattamente nella coordinata $z^{*'}$ voluta.

⁽²⁾Il metodo del coltello è una tecnica che si utilizza per effettuare le misure del waist: consiste nel posizionare una lama che si muove a passi di un decimo di micrometro lungo il piano perpendicolare alla direzione del fascio. In base all'intensità della luce che viene misurata dopo il coltello, che quindi non è stata "tagliata", si riesce a capire quanto vale la larghezza del fascio in quel punto. Muovendo il coltello lungo l'asse \hat{z} si riesce ad individuare la larghezza minima e la posizione a cui si trova.

Ora si conosce la posizione del minimo della larghezza del fascio, che in laboratorio è stata impostata ad $W_0 = 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ e posizionata esattamente al centro del cristallo. Da questo valore è importante ricavare la magnificazione, secondo la Formula 45, ottenendo $M^2 = 1/400$. Si procede dunque a modificare la distanza z' tra le lenti asferiche e l'entrata della fibra ottica: questo per avere la massima luce che viene trasmessa ai setup di analisi. È molto importante cercare di impostare la distanza giusta, perchè un lieve cambiamento di z' modifica di molto la posizione del waist minimo W'_0 : la quantità di luce che passa in fibra subisce quindi grandi variazioni. Per evidenziare questo concetto bisogna riprendere la definizione di waist fornita in Equazione 27 e ricavare quanto varia il waist per una variazione nella posizione:

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{dW(z)}{dz} = \sqrt{\frac{z^2}{z_0^2 + z^2}} \quad (57)$$

Nel caso in questione il fascio, passando attraverso la lente, ha variato la lunghezza di Rayleigh secondo la legge presentata in Equazione 40: $2z'_0 = M^2(2z_0)$.

Per un allineamento grossolano dei setup di analisi sono sufficienti i due laser, perchè il waist non è modificabile, ma viene dettato da delle lenti asferiche con distanza dalla fibra prefissata. Sarà tuttavia più difficile la calibrazione, in quanto le QWP ed HWP dovranno essere messe a posto ogni volta che la fibra ottica viene mossa.

Per entrambi si procede dunque all'allineamento fine. Per far ciò si stacca il laser dall'uscita ed al suo posto si mette un Powermeter, ovvero uno strumento in grado di rilevare la potenza del fascio luminoso che passa attraverso la fibra. Grazie a questo strumento è possibile perfezionare l'allineamento, andando alla ricerca del massimo dell'intensità luminosa che arriva sulla fibra ottica all'uscita. In questo momento si possono muovere leggermente i filtri, per assicurarsi che siano posizionati perpendicolarmente al fascio: anche per questo si guarda l'intensità luminosa alla ricerca di un massimo. Per effettuare questa procedura in maniera ancora più fine si collega agli SPAD la fibra presente all'uscita: in questo modo si può massimizzare il numero di fotoni passanti per il percorso in maniera molto precisa. Si procede quindi muovendo finemente gli specchi, grazie a dei pistoncini meccanici che spingono contro il supporto su cui è fissato lo specchio e ne cambiano di poco l'inclinazione sui due gradi di libertà verticale ed orizzontale. Una volta raggiunto il massimo, si effettua un ultimo passaggio, chiamato "Beam walking", che permette di raggiungere il vero massimo nell'intensità luminosa all'uscita. Consiste nel peggiorare un grado di libertà di uno dei due specchi, per poi migliorarlo usando lo stesso grado di libertà nell'altro specchio. In questo modo si riesce a centrare il fascio gaussiano nella fibra e quindi a massimizzare la luce trasmessa.

3.2 Calibrazione

Una volta che le componenti sono allineate, si passa alla calibrazione, ovvero una procedura che migliora l'accuratezza dei setup di analisi. Infatti, una volta allineato, l'interferometro è pronto per essere utilizzato, mentre nei setup di analisi bisogna ancora raddrizzare tutte le lamine. In particolare le procedure descritte si applicano separatamente ai setup di Alice e Bob.

La prima lamina da orientare è la HWP montata sul rotatore: se si vuole che il setup lavori come previsto bisogna trovare la posizione in cui la lamina è allineata con il PBS. Una volta segnato l'angolo a cui la lamina polarizza la luce orizzontalmente, si ricavano facilmente gli angoli a cui la luce viene polarizzata in un'altra direzione, pur mantenendo una polarizzazione lineare. Questi si possono ricavare a partire dalla espressione matriciale della lamina, presentata in Formula 53. Per trovare questo angolo basta inserire un polarizzatore qualsiasi davanti al rotatore; dopodichè si ruota la lamina e si misura, ad ogni angolo, l'intensità del fascio trasmesso. Si possono quindi

interpolare i dati attraverso formula $I(\theta) = a + b \cdot \cos^2(c \cdot \theta + \phi)$, come presentato in Figura 6. Si è ricavato così che, nel setup di Alice, la posizione angolare che induce una polarizzazione orizzontale concordemente con il PBS è in concomitanza dell'angolo $\phi_A = (0.3502 \pm 0.0007) \text{ rad}$. Si svolgono dunque le stesse procedure per la HWP presente nel setup di Bob.

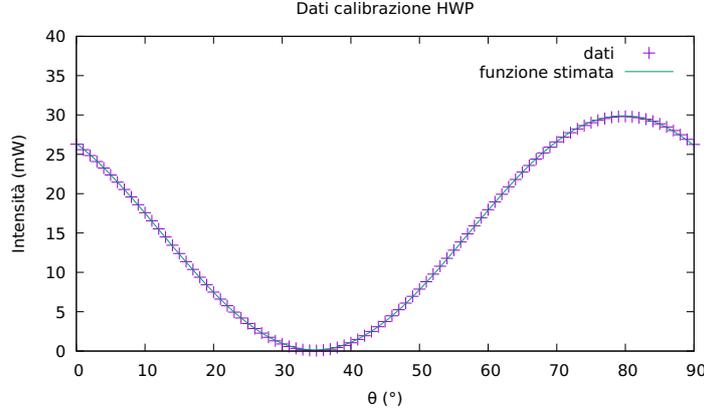


Figura 6: Andamento dell'intensità del fascio al variare dell'angolo di rotazione della lamina

Dopo questa procedura, una volta arrivato il fascio nei setup di analisi, basterà eliminare l'effetto di distorsione della polarizzazione dato dalla fibra ottica. Quello che rimane da fare è quindi mappare lo stato che arriva nei setup di analisi in quello di uscita dell'interferometro attraverso le lamine HWP ed QWP in una procedura di allineamento delle basi dei setup di analisi.

L'idea è quella di sfruttare l'interferometro in modo che venga generato lo stato classico, ovvero $|\psi_{classico}\rangle = |HV\rangle$. Dopodiché basterà muovere le lamine HWP ed QWP del setup per far sì che lo stato distorto dalla fibra ritorni a quello atteso, allineando così le basi di interferometro e setup di analisi.

Si procede dunque muovendo la HWP e misurando l'intensità del fascio riflesso attraverso il PBS dell'interferometro: una volta trovato il minimo si ha la certezza di aver impostato uno stato classico $|\psi_{classico}\rangle$. Così facendo infatti si massimizza il fascio che percorre l'interferometro in senso orario, facendo riferimento alla Figura 2; quindi le uniche polarizzazioni possibili sono $|H\rangle$ per Alice ed $|V\rangle$ per Bob. Si conoscono quindi con certezza le polarizzazioni uscenti dall'interferometro: ora basta impostare il rotatore all'angolo $\phi_A + \pi/4$ per il setup di Alice ed a ϕ_B per quello di Bob. Infine bisogna ruotare manualmente le lamine HWP ed QWP del setup di analisi, in questo ordine, cercando di ridurre al minimo il numero di fotoni passanti attraverso gli SPAD.

Come menzionato precedentemente, risulta computazionalmente conveniente mappare lo stato $|\psi_{classico}\rangle$ in $|HH\rangle$: per fare questo basta impostare entrambi i rotatori agli angoli $\phi_i + \pi/4$ per $i = A, B$.

L'ultima procedura da effettuare è quella per calibrare il cristallo liquido, descritto precedentemente. L'idea è di impostare lo stato entangled e poi muovere i rotatori in modo che il sistema venga proiettato sui quattro stati della base $\{|D\rangle, |A\rangle\}$. In particolare, come mostrato in equazione 56, basta proiettare il sistema sugli stati $|DA\rangle$ ed $|AD\rangle$ per eliminare la fase presente nello stato entangled quando scritto nella base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$.

In particolare per eliminare gli stati $|DA\rangle$ ed $|AD\rangle$ è necessario sfruttare le coincidenze misurate dagli SPAD. Queste identificano quanti fotoni prodotti tramite SPDC arrivano sui rivelatori: quando vengono mandate a zero si ha la certezza che non ci sono fotoni con quelle determinate polarizzazioni che vengono misurati. In altre parole la proiezione dello stato quantistico su quei due stati è nulla e dunque si ha la certezza di aver eliminato la fase dallo stato scritto nella base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$.

4 Analisi dei dati

Una volta controllato lo spettro del laser, allineato sia l'interferometro che i setup di analisi e calibrato le lamine fino ad ottenere dei risultati soddisfacenti, è possibile procedere con l'acquisizione dei dati. Per effettuare le misure è stato scritto un programma in grado di muovere in autonomia i rotatori e di acquisire dati per un tempo stabilito.

4.1 Misure effettuate

Con il setup così costruito sono molte le misure che si possono effettuare, ma il presente lavoro verte sulla misura dell'entanglement. Nella Sezione 1.2 era stato detto che la miglior stima utilizzata per il caso di due fotoni è la visibilità. In particolare si parla di visibilità relativa all'estinzione di polarizzazione.

L'idea alla base è di stimare quanto sono legate tra loro le polarizzazioni in una determinata base. Si guarda quindi il numero di fotoni con uguale polarizzazione e quello di fotoni con polarizzazione diversa usando la stessa base. Si calcola quindi la differenza ed infine, per ottenere risultati confrontabili, si divide rispetto alla somma, ottenendo un valore percentuale. In questo modo, se consideriamo di misurare nella base qualsiasi formata dai vettori $\{|A\rangle, |B\rangle\}$, allora la stima della visibilità si riconduce al calcolo di:

$$V = \frac{N_{AA} - N_{AB} - N_{BA} + N_{BB}}{N_{AA} + N_{AB} + N_{BA} + N_{BB}} \quad (58)$$

dove N_{IJ} indica il numero di volte in cui si è trovato il primo fotone con polarizzazione I ed il secondo con polarizzazione J . Nel prosieguo si indicherà con $V_{\{K,L\}}$ la visibilità calcolata utilizzando per il primo fotone gli stati della base che diagonalizzano l'operatore K , mentre per il secondo fotone quelli che diagonalizzano l'operatore L .

Per la definizione di entanglement fornita al Paragrafo 1.2, sappiamo che due fotoni correlati quantisticamente in polarizzazione saranno caratterizzati da un valore elevato della visibilità in tutte le basi in cui andiamo a valutare questa quantità. Una coppia di fotoni correlati classicamente invece sarà caratterizzata da una elevata visibilità solamente nella base in cui è avvenuta la correlazione, mentre sarà minore in tutte le altre: in particolare esiste almeno una base in cui questa quantità è nulla, o meglio nel caso sperimentale, è compatibile con il fondo.

Per confermare la presenza di entanglement si è deciso di effettuare delle misure ulteriori e di calcolare il valore della CHSH, presentata in Formula 14. Per fare questo è necessario descrivere come calcolare i valori attesi degli operatori A_i, B_j con $i, j = 0, 1$ introdotti precedentemente ed in grado di fornire il massimo valore della CHSH.

In particolare il valore atteso degli operatori è sostituito con la quantità:

$$E(A_i, B_j) = \frac{N_{++} - N_{+-} - N_{-+} + N_{--}}{N_{++} + N_{+-} + N_{-+} + N_{--}} \quad (59)$$

dove N_{IJ} indica il numero di fotoni in cui il primo fotone ha polarizzazione I nella base di A_i , mentre il secondo ha polarizzazione J nella base di B_j

Nella notazione introdotta si può stimare il valore della quantità sperimentale come:

$$S_{CHSH} = E(A_0, B_0) - E(A_0, B_1) + E(A_1, B_0) + E(A_1, B_1) \quad (60)$$

4.2 Procedure di misura

Come anticipato, lo scopo del presente lavoro è quello di vedere come varia la qualità dell'entanglement al variare delle lenti asferiche utilizzate per accoppiare in fibra. Si procederà quindi in questo modo: si inserisce la lente asferica da testare, si allinea e calibra tutto il percorso ottico, dopodichè si determinano le condizioni di coincidenza ed infine si prendono le misure.

Per facilitare la presa dati è stato scritto un programma in grado di muovere i rotatori: così facendo si cambia infatti la polarizzazione che viene trasmessa dal PBS e quindi misurata dall'elettronica di acquisizione. In questo modo il programma, una volta definiti i parametri entro cui considerare gli eventi "coincidenza", è in grado di calcolare tutte le quantità necessarie, ovvero gli N_{IJ} prima menzionati. L'unica ulteriore accortezza da avere è di spegnere la luce, in modo da diminuire la luce di fondo che va a sommarsi al conteggio dei fotoni negli SPAD.

Sfortunatamente si trova, anche a luci spente, un basso numero di fotoni che arrivano sugli SPAD, di solito di qualche decina di migliaia al secondo, rispetto ai conteggi di fondo, che di solito sono dell'ordine delle migliaia. Per questo motivo si decide di aumentare il tempo di acquisizione del programma: a seconda del numero di coincidenze si è scelto di campionare per tre oppure per cinque minuti.

4.3 Presentazione ed analisi dei risultati

Le lenti utilizzate sono tre, che si distinguono per la diversa lunghezza focale: sono tutte asferiche ed adatte al passaggio dei fotoni con lunghezza d'onda $\lambda = 810 \text{ nm}$. In particolare le lenti hanno lunghezza focale nominale $f_6 = 6.24 \text{ mm}$, $f_8 = 8.0 \text{ mm}$ ed $f_{18} = 18.0 \text{ mm}$. Purtroppo non è stato possibile sostituire altre lenti, perchè le dimensioni contenute dell'interferometro non lasciavano abbastanza spazio per implementare lenti con una lunghezza focale dell'ordine della decina di centimetri.

Per ognuna delle lenti è stata misurata la luminosità, ovvero il numero di fotoni incidenti sullo SPAD per unità di tempo. La luminosità è presentata per ogni presa dati: infatti, anche tra due acquisizioni effettuate in giorni diversi, l'allineamento e la calibrazione possono aver modificato la luminosità. In realtà questa quantità dipende molto dalla bravura dello sperimentatore nel calibrare in maniera più accurata possibile la strumentazione. Separate in base alla lunghezza focale f ed alla durata del campionamento t , le misure di luminosità, indicate con L_i per $i = A, B$, e quelle delle coincidenze $C_{A,B}$ sono presentate in Tabella 1:

$f \text{ (mm)}$	$t \text{ (s)}$	L_A	(kHz)	L_B	(kHz)	$C_{A,B}$	(kHz)
18	120	310	± 3	170	± 2	17.2	± 0.1
8 ⁽²⁾	300	105	± 1	60	± 1	2.43	± 0.05
8 ⁽³⁾	300	105	± 1	60	± 1	2.43	± 0.05
8 ⁽⁴⁾	300	105	± 1	60	± 1	2.43	± 0.05
8 ⁽⁵⁾	300	105	± 1	60	± 1	2.43	± 0.05
8 ⁽⁶⁾	300	105	± 1	60	± 1	2.43	± 0.05
8 ⁽¹⁾	5	105	± 1	60	± 1	2.43	± 0.05
6 ⁽²⁾	300	65	± 2	38	± 1	1.22	± 0.03
6 ⁽³⁾	300	65	± 2	38	± 1	1.22	± 0.03
6 ⁽⁴⁾	300	65	± 2	38	± 1	1.22	± 0.03
6 ⁽⁵⁾	300	65	± 2	38	± 1	1.22	± 0.03
6 ⁽⁶⁾	300	65	± 2	38	± 1	1.22	± 0.03
6	180	70	± 1	40	± 1	1.24	± 0.03
6 ⁽¹⁾	5	65	± 2	38	± 1	1.22	± 0.03
6	5	70	± 1	40	± 1	1.24	± 0.03

Tabella 1: Misure di luminosità per ogni presa dati sia in Alice che in Bob, con il relativo numero di coincidenze

dove l'apice serve a denominare le misure che sono avvenute in serie sfruttando il programma, ovvero mantenendo inalterate le caratteristiche della strumentazione. L'errore associato è basato

sulla fluttuazione della luminosità nel tempo, che è principalmente dovuta alle fluttuazioni del laser di pompa. Risulta utile presentare i dati raccolti, al fine di avere una migliore comprensione in Figura 7:

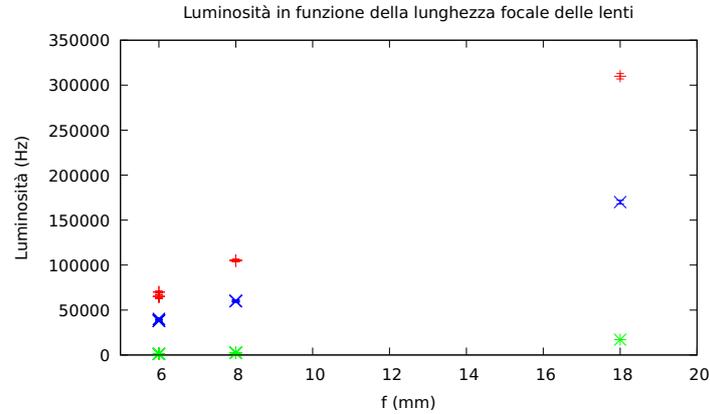


Figura 7: Andamento della luminosità nel setup di Alice (in rosso), in quello di Bob (in blu) e delle coincidenze (in giallo) al variare della lunghezza focale della lente

Inoltre, per ciascuna di queste prese dati è stata calcolata la visibilità, a partire dalle misure dei conteggi nelle varie basi, come presentato in Tabella 2:

f (mm)	t (s)	V_{σ_z, σ_z}	(%)	V_{σ_x, σ_x}	(%)
18	120	95.5	± 0.4	95.1	± 0.4
8 ⁽²⁾	300	99.1	± 0.6	75.8	± 0.5
8 ⁽³⁾	300	99.1	± 0.6	75.8	± 0.5
8 ⁽⁴⁾	300	99.2	± 0.6	75.5	± 0.5
8 ⁽⁵⁾	300	99.1	± 0.6	75.3	± 0.6
8 ⁽⁶⁾	300	99.2	± 0.7	74.9	± 0.6
8 ⁽¹⁾	5	98	± 7	97	± 7
6 ⁽²⁾	300	95	± 1	90	± 1
6 ⁽³⁾	300	94	± 1	91	± 1
6 ⁽⁴⁾	300	95	± 1	90	± 1
6 ⁽⁵⁾	300	95	± 2	90	± 2
6 ⁽⁶⁾	300	96	± 2	89	± 2
6	180	99	± 2	91	± 1
6 ⁽¹⁾	5	99	± 8	87	± 7
6	5	99	± 9	94	± 9

Tabella 2: Visibilità calcolata per ogni presa dati

dove non sono presentati errori in quanto queste quantità derivano da dei conteggi molto elevati. Al fine di migliorare le misure della visibilità è possibile eliminare dai conteggi misurati il numero di coincidenze attese come fondo combinatorio. In questo modo si possono quindi calcolare le visibilità senza coincidenze accidentali, come vengono presentate in Tabella 3

f (mm)	t (s)	V'_{σ_z, σ_z}	(%)	V'_{σ_x, σ_x}	(%)
18	120	96.0	± 0.4	95.6	± 0.4
$8^{(2)}$	300	99.4	± 0.6	76.0	± 0.5
$8^{(3)}$	300	99.4	± 0.6	79.2	± 0.5
$8^{(4)}$	300	99.7	± 0.6	75.6	± 0.5
$8^{(5)}$	300	99.4	± 0.6	75.6	± 0.6
$8^{(6)}$	300	99.4	± 0.7	75.1	± 0.6
$8^{(1)}$	5	98	± 7	97	± 7
$6^{(2)}$	300	96	± 1	90	± 1
$6^{(3)}$	300	95	± 1	91	± 1
$6^{(4)}$	300	95	± 1	90	± 1
$6^{(5)}$	300	95	± 2	90	± 2
$6^{(6)}$	300	96	± 2	90	± 2
6	180	99	± 1	91	± 1
$6^{(1)}$	5	99	± 8	87	± 7
6	5	99	± 9	94	± 9

Tabella 3: Visibilità per ogni presa dati dopo aver sottratto il fondo combinatorio

Risulta utile alla comprensione dei dati disporre in un grafico le visibilità senza accidentali: in questo modo è più semplice determinare se questi seguano o meno un determinato andamento. Per questo motivo queste misure vengono presentate in Figura 8:

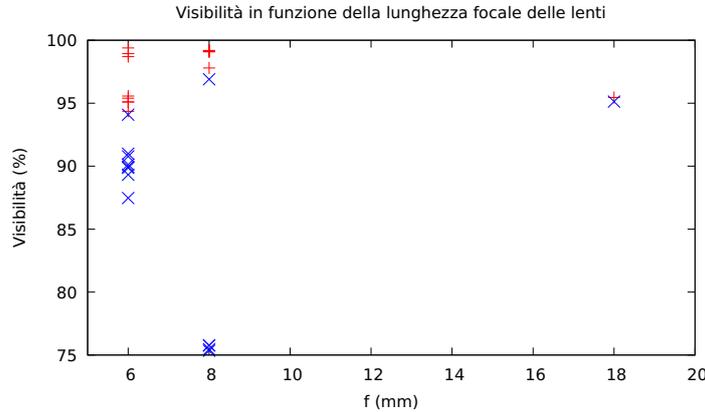


Figura 8: Andamento della visibilità senza accidentali nella base σ_z (in rosso) ed in σ_x (in blu) al variare della lunghezza focale della lente

In questo grafico risulta evidente che la visibilità non ha un andamento ben definito: bisognerebbe provare più lenti per poter interpolare i dati. Tuttavia questo grafico mostra che probabilmente ci sono stati dei problemi durante la presa dati, come ad esempio un disallineamento dovuto ad un urto con il banco di lavoro. Questo risulta evidente perchè esiste un'altra misura che riporta la visibilità di un valore molto più alto. Gli altri dati sembrano invece disporsi bene ottenendo delle visibilità che stanno tra il 90% ed il 100%.

Per verificare l'effettiva validità dell'entanglement misurato con la visibilità si effettuano anche le misure delle coincidenze necessarie per dare una stima della CHSH. Si calcola dunque il valore di questa quantità seguendo la Formula 60 ed in particolare sfruttando le basi che ne forniscono un valore massimizzato, ovvero le basi che diagonalizzano gli operatori A_0, A_1, B_0, B_1 definiti in Sezione 1.3. Per ottenere dei risultati più veritieri anche in questo caso sono state rimosse le

coincidenze accidentali ed è stato ricalcolato il valore della CHSH, identificato con S' . I valori sono quindi presentati in Tabella 4:

f (mm)	t (s)	S_{CHSH}		($adim.$)	S'_{CHSH}		($adim.$)
18	120	2.703	±	0.006	2.716	±	0.006
8 ⁽²⁾	300	2.479	±	0.008	2.486	±	0.008
8 ⁽³⁾	300	2.470	±	0.009	2.478	±	0.009
8 ⁽⁴⁾	300	2.472	±	0.009	2.480	±	0.009
8 ⁽⁵⁾	300	2.482	±	0.008	2.489	±	0.008
8 ⁽⁶⁾	300	2.468	±	0.008	2.475	±	0.008
8 ⁽¹⁾	5	2.815	±	0.009	2.815	±	0.009
6 ⁽²⁾	300	2.64	±	0.02	2.64	±	0.02
6 ⁽³⁾	300	2.60	±	0.02	2.61	±	0.02
6 ⁽⁴⁾	300	2.61	±	0.02	2.62	±	0.02
6 ⁽⁵⁾	300	2.65	±	0.02	2.66	±	0.02
6 ⁽⁶⁾	300	2.60	±	0.02	2.61	±	0.02
6	180	2.68	±	0.02	2.70	±	0.02
6 ⁽¹⁾	5	2.6	±	0.1	2.6	±	0.1
6	5	2.7	±	0.2	2.7	±	0.2

Tabella 4: Visibilità per ogni presa dati dopo aver sottratto il fondo combinatorio

5 Conclusioni

Le luminosità presentate, nonostante siano state misurate per soli tre valori della lunghezza focale, mostrano un evidente andamento: al diminuire della lunghezza focale la luminosità infatti precipita. Questo può essere influenzato da molti artefatti di misura, come la difficoltà a trovare la distanza a cui posizionare la fibra ottica dopo la lente, quando si lavora con lunghezze focali piccole.

Per quanto riguarda la visibilità è difficile dedurre un andamento avendo a disposizione così poche lunghezze focali. Per poter vedere dei risultati apprezzabili bisognerebbe avere a disposizione un maggior numero di lenti con lunghezza focale molto simile tra loro. La Figura 8 suggerisce che un cambiamento della lunghezza focale della lente non influenzi in maniera significativa la visibilità. Tuttavia i dati raccolti con una lente di lunghezza focale minore hanno una dispersione maggiore: questo accade perchè lievi imprecisioni nel posizionamento dei componenti o loro movimenti modificano maggiormente i risultati quando si lavora a distanze piccole. Questo vale soprattutto per i componenti che regolano la distanza tra la lente asferica e l'entrata della fibra ottica. Risulta però evidente che la visibilità è sempre maggiore nella base di σ_z rispetto alla base σ_x : ci si aspettava questo risultato perchè si sa che il cristallo produce i fotoni nella base di σ_z . Per cui un'alta visibilità in tale base è facile da ottenere. Un buon risultato nella base σ_x , invece, dipende dall'indistinguibilità fra i fotoni prodotti in senso orario da quelli prodotti in senso antiorario, una condizione più difficile da realizzare. Inoltre, anche in fase di misura, la base σ_z risulta lievemente privilegiata poichè è quella su cui viene effettuato l'allineamento iniziale delle componenti.

Guardando i dati raccolti sulla CHSH risulta invece evidente che in tutti i casi è stata violata la disuguaglianza di Bell: infatti tutti i risultati portano ad avere un valore di almeno $S_{CHSH} > 2.4$, ovvero sicuramente superiore rispetto a due. Questo risultato dà fiducia alla bontà dell'entanglement prodotto ed assicura che il processo di SPDC descritto dalla meccanica quantistica non trova spiegazione attraverso una teoria locale e realistica.

Riferimenti bibliografici

- [1] Ryan S Bennink. Optimal collinear gaussian beams for spontaneous parametric down-conversion. *Physical Review A*, 81(5):053805, 2010.
- [2] Suman Karan, Shaurya Aarav, Homanga Bharadhwaj, Lavanya Taneja, Arinjoy De, Girish Kulkarni, Nilakantha Meher, and Anand K Jha. Phase matching in β -barium borate crystals for spontaneous parametric down-conversion. *Journal of Optics*, 22(8):083501, 2020.
- [3] Bahaa EA Saleh and Malvin Carl Teich. *Fundamentals of photonics*. john Wiley & sons, 2019.
- [4] Devin Hugh Smith. An ultrafast source of polarization entangled photon pairs based on a sagnac interferometer. Master's thesis, University of Waterloo, 2009.