

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA

POLIEDRI DI SET PARTITIONIG  
PER MATRICI BILANCIATE

Relatore: Ch.mo Prof. Michele Conforti  
Controrelatore: Prof. Giovanni Andreatta

Laureando: Marco Di Summa

ANNO ACCADEMICO 2003-2004



# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduzione</b>  | <b>5</b>  |
| <b>1 Set partitioning e matrici bilanciate</b>                         | <b>7</b>  |
| 1.1 Poliedri . . . . .   | 7         |
| 1.2 Set packing, set covering e set partitionig . . . . .              | 9         |
| 1.3 Matrici bilanciate . . . . .                                       | 11        |
| 1.3.1 Definizioni . . . . .  | 11        |
| 1.3.2 Matrici bilanciate e poliedri interi . . . . .                   | 12        |
| 1.3.3 Sistemi TDI . . . . .  | 18        |
| <b>2 Matrici critiche</b>  | <b>23</b> |
| 2.1 Considerazioni di algebra lineare . . . . .                        | 23        |
| 2.1.1 Sistemi minimalmente non ammissibili e sistemi critici . . . . . | 24        |
| 2.1.2 Sistemi relativamente minimalmente non ammissibili . . . . .     | 31        |
| 2.2 Matrici bilanciate e critiche . . . . .                            | 34        |
| 2.2.1 Definizioni e considerazioni generali . . . . .                  | 35        |
| 2.2.2 Congetture . . . . .   | 42        |
| 2.2.3 Il caso 2-regolare . . . . .                                     | 46        |



# Introduzione

Nell'ambito della programmazione lineare a numeri interi, ricopre un ruolo fondamentale il problema di *set partitioning*: data una matrice  $A$  a coefficienti nell'insieme  $\{0, 1\}$ , trovare le soluzioni intere non negative del sistema di equazioni lineari  $Ax = \mathbf{1}$ . Un caso particolarmente interessante è quello in cui la matrice  $A$  è *bilanciata* (cioè non contiene alcuna sottomatrice quadrata di ordine dispari con esattamente due elementi non nulli per riga e per colonna). In questa situazione, infatti, il problema di set partitioning ha una soluzione se e solo se il sistema lineare

$$\begin{cases} Ax = \mathbf{1} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ha una soluzione. In altre parole, se  $A$  è bilanciata, per stabilire l'esistenza di soluzioni del problema di set partitioning si può ignorare il vincolo di interezza.

L'oggetto del nostro studio sono le matrici bilanciate il cui problema di set partitioning è privo di soluzioni e che sono costituite da un insieme minimale di righe e di colonne rispetto a questa proprietà: le chiameremo *matrici critiche*. Per arrivare all'analisi della struttura di tali matrici, premetteremo delle considerazioni generali sul problema di set partitioning, sulle matrici bilanciate e su quelli che chiameremo sistemi *critici* di equazioni e disequazioni lineari. Passeremo poi allo studio delle proprietà delle matrici bilanciate e critiche, approfondendo, in particolar modo, l'esame delle matrici bilanciate e critiche che sono 2-regolari sulle colonne (tali, cioè, che ogni loro colonna contenga esattamente due elementi non nulli).



# Capitolo 1

## Set partitioning e matrici bilanciate

### 1.1 Poliedri

In questa sezione richiamiamo alcune definizioni relative ai poliedri ed enunciamo i risultati preliminari che ci saranno utili in seguito. Per le dimostrazioni rimandiamo a [5] e [7].

**Definizione 1.1.1** *Un sottoinsieme  $P$  di  $\mathbb{R}^n$  si dice un poliedro (convesso) se esistono una matrice  $A$  di dimensione  $m \times n$  ed un vettore  $b \in \mathbb{R}^m$  tali che  $P = \{x : Ax \leq b\}$ . La dimensione di  $P$  è la dimensione della più piccola varietà lineare di  $\mathbb{R}^n$  contenente  $P$ .*

Dunque un poliedro è l'intersezione di un numero finito di semispazi; ma naturalmente possiamo definire un poliedro anche come l'intersezione di un numero finito di semispazi ed iperpiani, in quanto un iperpiano è l'intersezione dei due semispazi da esso delimitati. Inoltre, la dimensione di un poliedro  $P$  è uguale al massimo numero di vettori affinemente indipendenti contenuti in  $P$ . (I vettori  $v_1, \dots, v_r$  si dicono affinemente indipendenti se da  $\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 0$  segue  $\lambda_i = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, r$ . Equivalentemente,  $v_1, \dots, v_r$  sono affinemente indipendenti se e solo se i vettori  $v_2 - v_1, \dots, v_r - v_1$  sono linearmente indipendenti.)

Diciamo che il sistema  $Ax \leq b$  definisce in modo minimale il poliedro  $P$  se rimuovendo una qualunque disequazione dal sistema  $Ax \leq b$  si ottiene un poliedro strettamente più grande di  $P$  (in altre parole, se nessuna disequazione di  $Ax \leq b$  è ridondante).

**Definizione 1.1.2** *Sia  $P$  un poliedro. Siano  $c$  un vettore non nullo e  $\delta \in \mathbb{R}$ . L'iperpiano di equazione  $cx = \delta$  è detto un iperpiano di supporto di  $P$  se  $\delta = \max\{cx : x \in P\}$ .*

Un sottoinsieme  $F$  di  $P$  è detto una faccia di  $P$  se  $F = P$  oppure  $F$  è l'intersezione di  $P$  con un iperpiano di supporto di  $P$ .

Una disequazione si dice *valida* per  $P$  se è soddisfatta da tutti i punti di  $P$ . Diciamo che una disequazione  $cx \leq \delta$ , valida per  $P$ , individua la faccia  $F$  di  $P$  se  $F = \{x \in P : cx = \delta\}$ . In tal caso, l'iperpiano di equazione  $cx = \delta$  è un iperpiano di supporto di  $P$ . Se il poliedro  $P$  è definito dal sistema  $Ax \leq b$ ,  $F$  è una faccia di  $P$  se e solo se  $F \neq \emptyset$  e  $F = \{x \in P : A'x = b'\}$  per un'opportuna matrice  $A'$  formata da alcune righe di  $A$  ( $b'$  è il sottovettore di  $b$  corrispondente). Da questo segue, in particolare, che ogni faccia di  $P$  è un poliedro non vuoto; dunque ha senso parlare di dimensione di una faccia. Chiamiamo *r-faccia* una faccia di dimensione  $r$ .

Una *faccia massimale* di  $P$  è una faccia di  $P$ , diversa da  $P$ , che non è contenuta in nessun'altra faccia di  $P$  (eccetto  $P$  stesso). La dimensione di una faccia massimale di  $P$  è uguale a  $\dim(P) - 1$ . Se  $P$  è il poliedro di  $\mathbb{R}^n$  definito dal sistema  $Ax \leq b$  e  $F$  è una faccia massimale di  $P$ , allora una delle disequazioni di  $Ax \leq b$  individua  $F$ . Viceversa, se  $\dim(P) = n$ , le disequazioni che non individuano una faccia massimale di  $P$  possono essere rimosse dal sistema che definisce  $P$ .

Una *faccia minimale* di  $P$  è una faccia di  $P$  non contenente nessun'altra faccia di  $P$ . È possibile dimostrare che ogni faccia minimale di  $P$  è una varietà lineare. Allora, se  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  è definito da  $Ax \leq b$ , una faccia minimale di  $P$  è l'insieme delle soluzioni del sistema  $A'x = b'$  per un'opportuna matrice  $A'$  formata da alcune righe di  $A$  ( $b'$  è il sottovettore di  $b$  corrispondente). Inoltre tutte le facce minimali di  $P$  hanno la stessa dimensione, precisamente  $n - \text{rk}(A)$ . Se  $\text{rk}(A) = n$ , le facce minimali di  $P$  sono dei punti, detti *vertici* di  $P$ .

**Definizione 1.1.3** Un poliedro  $P$  di  $\mathbb{R}^n$  è detto un *simpleso* se  $P$  è l'involuppo convesso di  $n + 1$  punti affinemente indipendenti in  $\mathbb{R}^n$ .

Un simpleso  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  ha esattamente  $n + 1$  vertici, che sono affinemente indipendenti. Ogni faccia massimale di  $P$  è l'involuppo convesso di  $n$  vertici di  $P$ . C'è dunque corrispondenza biunivoca tra le facce massimali e i vertici di un simpleso: basta associare ad ogni faccia massimale  $F$  di  $P$  l'unico vertice di  $P$  non contenuto in  $F$ , e ad ogni vertice di  $P$  l'unica faccia massimale che non lo contiene. Poiché un simpleso  $P$  di  $\mathbb{R}^n$  ha dimensione  $n$  ed ha  $n + 1$  facce massimali, un sistema minimale di disequazioni che rappresenta  $P$  contiene  $n + 1$  disequazioni, ciascuna delle quali individua una faccia massimale di  $P$ .

Ricordiamo che un vettore (o una matrice) si dice *intero* se tutte le sue componenti sono numeri interi. Analogamente un vettore (o una matrice) *razionale* ha come componenti numeri razionali. Questa terminologia si estende ai sistemi di equazioni e/o disequazioni lineari: per esempio, il sistema



$Ax = b$  è razionale se  $A$  e  $b$  sono razionali. Inoltre, un poliedro  $P$  si dice razionale se esistono una matrice  $A$  ed un vettore  $b$ , entrambi razionali, tali che  $P = \{x : Ax \leq b\}$ . Osserviamo che se  $P$  è un poliedro razionale, allora si può supporre che la matrice  $A$  ed il vettore  $b$  che definiscono  $P$  siano interi: infatti, se  $P = \{x : Ax \leq b\}$  con  $A$  e  $b$  razionali, si ha anche  $P = \{x : A'x \leq b'\}$ , dove  $A'$  e  $b'$  si ottengono moltiplicando ciascuna componente di  $A$  e  $b$  per il minimo comune denominatore delle componenti di  $A$  e  $b$ .

**Definizione 1.1.4** *Un poliedro  $P$  si dice intero se  $P$  è l'involuppo convesso dei vettori interi contenuti in  $P$ .*

Si noti che il poliedro vuoto è intero. Nel caso in cui  $P$  contenga dei vertici, è chiaro che  $P$  è un poliedro intero se e solo se tutti i suoi vertici sono vettori interi. Più in generale, un poliedro è intero se e solo se ogni sua faccia contiene vettori interi. O ancora, un poliedro è intero se e solo se ogni sua faccia minimale contiene vettori interi. Un'altra considerazione importante è la seguente: se  $P$  è un poliedro intero ed il problema di programmazione lineare  $\max\{c^T x : x \in P\}$  ha ottimo finito, allora tale problema ammette una soluzione ottima intera. Viceversa, se il problema  $\max\{c^T x : x \in P\}$  ha una soluzione ottima intera per ogni vettore  $c$  tale che l'ottimo sia finito, allora  $P$  è un poliedro intero.

Enunciamo ora un risultato molto noto, di cui faremo uso in seguito.

**Teorema 1.1.5 (Lemma di Farkas)** *Il sistema  $Ax = b$  ha una soluzione  $x \geq 0$  se e solo se  $b^T y \geq 0$  per ogni  $y$  tale che  $A^T y \geq 0$ .*

Useremo anche un teorema analogo al lemma di Farkas, ma valido per vettori interi:

**Teorema 1.1.6** *Un sistema razionale  $Ax = b$  ammette soluzioni intere se e solo se  $b^T y$  è intero per ogni vettore razionale  $y$  tale che  $A^T y$  è intero.*

## 1.2 Set packing, set covering e set partitioning

Chiamiamo matrice (risp. vettore)  $0,1$  una matrice (risp. vettore) le cui componenti appartengano all'insieme  $\{0,1\}$ . Se  $k \in \mathbb{Z}$ , indichiamo con  $\mathbf{k}$  il vettore colonna di dimensione opportuna che ha tutte le componenti uguali a  $k$ .

**Definizione 1.2.1** *Sia  $A$  una matrice  $0,1$  e sia  $\bar{x}$  un vettore  $0,1$ . Diciamo che  $\bar{x}$  risolve*

- *il problema di set packing associato ad  $A$  se  $A\bar{x} \leq \mathbf{1}$ ;*

- *il problema di set covering associato ad  $A$  se  $A\bar{x} \geq \mathbf{1}$ ;*
- *il problema di set partitioning associato ad  $A$  se  $A\bar{x} = \mathbf{1}$ .*

Se  $A$  ha  $n$  colonne e  $\bar{x}$  è un vettore  $0, 1$  con  $n$  componenti, definiamo  $C(\bar{x})$  come l'insieme delle colonne di  $A$  che occupano una posizione corrispondente ad una coordinata di  $\bar{x}$  uguale a 1. Allora:

- $\bar{x}$  risolve il problema di set packing associato ad  $A$  se e solo se per ogni riga di  $A$  esiste al più una colonna in  $C(\bar{x})$  che ha un 1 su tale riga;
- $\bar{x}$  risolve il problema di set covering associato ad  $A$  se e solo se per ogni riga di  $A$  esiste almeno una colonna in  $C(\bar{x})$  che ha un 1 su tale riga;
- $\bar{x}$  risolve il problema di set partitioning associato ad  $A$  se e solo se per ogni riga di  $A$  esiste esattamente una colonna in  $C(\bar{x})$  che ha un 1 su tale riga.

Osserviamo che se esiste un vettore intero  $\bar{x} \geq 0$  tale che  $A\bar{x} \leq \mathbf{1}$  (risp.  $A\bar{x} = \mathbf{1}$ ), allora il problema di set packing (risp. set partitioning) associato ad  $A$  ammette una soluzione. Infatti, se l' $i$ -esima componente di  $\bar{x}$  fosse intera e maggiore di 1, allora l' $i$ -esima colonna di  $A$  sarebbe nulla (altrimenti non sarebbe soddisfatta la relazione  $A\bar{x} \leq \mathbf{1}$ ); ma allora potremmo sostituire l' $i$ -esima componente di  $\bar{x}$  con uno zero (o un 1), ottenendo ancora una soluzione del problema di set packing (risp. set partitioning) associato ad  $A$ . Vale una conclusione analoga anche per il problema di set covering: se  $\bar{x}$  è un vettore intero non negativo tale che  $A\bar{x} \geq \mathbf{1}$ , ponendo a 1 le componenti di  $\bar{x}$  che sono maggiori di 1 si ottiene una soluzione del problema di set covering. Dunque il problema di set packing (risp. set covering, set partitioning) associato ad  $A$  ha soluzione se e solo se esiste un vettore intero  $\bar{x} \geq 0$  tale che  $A\bar{x} \leq \mathbf{1}$  (risp.  $A\bar{x} \geq \mathbf{1}$ ,  $A\bar{x} = \mathbf{1}$ ).

Vediamo un'interpretazione di questi tre problemi in termini di ipergrafi. Un *ipergrafo* è una coppia  $(V, E)$ , dove  $V$  è un insieme finito ed  $E$  è una classe di sottoinsiemi di  $V$  (non escludiamo che in  $E$  possano esserci più copie dello stesso sottoinsieme di  $V$ ). Gli elementi di  $V$  sono detti *nodi* o *vertici*, quelli di  $E$  *archi* dell'ipergrafo. Dato un ipergrafo  $H = (V, E)$ , dove  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$  ed  $E = \{E_1, \dots, E_n\}$ , la *matrice di incidenza dei nodi verso gli archi* di  $H$  è la matrice  $0, 1$  di dimensione  $m \times n$  tale che  $A_{ij} = 1$  se e solo se  $v_i \in E_j$  (dove  $A_{ij}$  indica l'elemento di  $A$  sulla  $i$ -esima riga e  $j$ -esima colonna). Viceversa, se  $A$  è una matrice  $0, 1$  di dimensione  $m \times n$ , è possibile associare un ipergrafo ad  $A$ : gli elementi di  $V$  saranno le righe di  $A$ , mentre gli archi dell'ipergrafo saranno i sottoinsiemi  $E_1, \dots, E_n$  di  $V$  tali che, per ogni  $j = 1, \dots, n$ ,  $v_i \in E_j$  se e solo se  $A_{ij} = 1$ . È chiaro che un ipergrafo non ha un'unica matrice di incidenza dei nodi verso gli archi; però due tali matrici si ottengono una dall'altra mediante permutazioni delle righe e delle colonne. Allora, dato che tutte le proprietà

delle matrici che noi studiamo sono invarianti per permutazioni delle righe e delle colonne, considereremo unica la matrice di incidenza dei nodi verso gli archi di un assegnato ipergrafo.

Sia  $A$  una matrice  $0, 1$  e sia  $H = (V, E)$  l'ipergrafo che ha  $A$  come matrice di incidenza dei nodi verso gli archi. Sia  $\bar{x}$  un vettore  $0, 1$ . Indichiamo con  $S(\bar{x})$  l'insieme degli archi di  $H$  corrispondenti alle componenti non nulle di  $\bar{x}$ . Allora

- $\bar{x}$  risolve il problema di set packing associato ad  $A$  se e solo se gli elementi di  $S(\bar{x})$  sono sottoinsiemi di  $V$  a due a due disgiunti;
- $\bar{x}$  risolve il problema di set covering associato ad  $A$  se e solo se gli elementi di  $S(\bar{x})$  formano un ricoprimento di  $V$ ;
- $\bar{x}$  risolve il problema di set partitioning associato ad  $A$  se e solo se gli elementi di  $S(\bar{x})$  formano una partizione di  $V$  (ammettiamo, però, che in  $S(\bar{x})$  possano comparire una o più copie dell'insieme vuoto).

In molti problemi di programmazione lineare a numeri interi, i vincoli cui devono soddisfare le variabili possono essere tradotti nel problema di trovare un insieme di archi di un ipergrafo che abbia una delle tre proprietà appena elencate. Per questo motivo, i problemi di set packing, set covering e set partitioning assumono grande importanza nell'ambito di questa branca dell'ottimizzazione.

## 1.3 Matrici bilanciate

In questa sezione introduciamo la nozione di *bilanciatazza* di una matrice. Vedremo che certi sistemi di equazioni e/o disequazioni lineari definiti tramite matrici bilanciate danno luogo a poliedri interi.

Nel corso della sezione, adotteremo le seguenti notazioni: dato un vettore  $x$ , indicheremo con  $x_i$  l' $i$ -esima componente di  $x$ ; e data una matrice  $A$ , scriveremo  $A_{ij}$  per denotare la componente di  $A$  situata sulla  $i$ -esima riga e sulla  $j$ -esima colonna.

### 1.3.1 Definizioni

**Definizione 1.3.1** *Un circolante  $(0, 1)$  è una matrice quadrata  $0, 1$  con esattamente due elementi non nulli per riga e per colonna, che non contenga nessuna sottomatrice propria con la stessa proprietà. Un circolante si dice pari (risp. dispari) se è una matrice quadrata di ordine pari (risp. dispari).*

Se  $C$  è un circolante, è sempre possibile ordinare le righe e le colonne di  $C$  in modo tale che  $C$  assuma la forma seguente:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

dove le posizioni lasciate libere sono tutte occupate da zeri.

**Osservazione 1.3.2** *Sia  $C$  un circolante di ordine  $n$ . Se  $n$  è pari, allora  $\det(C) = 0$ ; se  $n$  è dispari, allora  $\det(C) = 2$ .*

*Dimostrazione.* Possiamo assumere che  $C$  abbia la struttura della matrice (1.1). Allora, sviluppando il determinante secondo la regola di Laplace rispetto alla prima colonna, si ha

$$\begin{aligned} \det(C) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} + (-1)^{n+1} \det \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= 1 + (-1)^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

(Le posizioni lasciate libere nelle due matrici sono occupate da zeri.)  $\square$

**Definizione 1.3.3** *Una matrice 0,1 si dice bilanciata se nessuna sua sottomatrice è un circolante dispari.*

Se  $A$  è una matrice 0,1 bilanciata, sono ovviamente bilanciate anche tutte le sottomatrici di  $A$ , la matrice  $A^T$ , le matrici ottenute permutando le righe e le colonne di  $A$  e tutte le matrici che si ottengono aggiungendo ad  $A$  righe o colonne costituite da vettori unitari (cioè vettori con tutte le coordinate nulle eccetto una, che è uguale a 1).

### 1.3.2 Matrici bilanciate e poliedri interi

Un primo importante legame tra matrici bilanciate e poliedri interi è dato dal teorema 1.3.4, dovuto a Fulkerson, Hoffman e Oppenheim. Per poterlo dimostrare, però, è necessario introdurre alcune nozioni elementari di teoria dei grafi. Per maggiori dettagli rimandiamo a [8].

Un *grafo* è un ipergrafo  $G = (V, E)$  i cui archi sono sottoinsiemi di  $V$  contenenti ciascuno esattamente due elementi (che possono eventualmente coincidere: in questo caso l'arco è detto *cappio*), detti *estremità* dell'arco. Indichiamo con  $vw$  un arco di estremità  $v$  e  $w$ . Si dice anche che l'arco  $vw$  è *incidente* nel nodo  $v$  (e nel nodo  $w$ ). Il *grado* di un nodo  $v$  di  $G$  è il numero di archi di  $G$  incidenti in  $v$  (i cappi vengono contati due volte). Un *sottografo* di  $G$  è un grafo  $G' = (V', E')$  tale che  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$ .  $G'$  è un *sottografo indotto* da  $V'$  se  $E' = \{vw \in E : v, w \in V'\}$ .

Un *cammino* tra due nodi distinti  $v, w$  di  $G$  è una sequenza finita di nodi distinti  $v = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = w$  e di archi  $e_1, \dots, e_k$  di  $G$  tali che per ogni  $i = 1, \dots, k$  l'arco  $e_i$  abbia come estremità i nodi  $v_{i-1}$  e  $v_i$ . Un *ciclo* è definito come un cammino, con l'unica eccezione che  $v = w$ . In entrambi i casi,  $k$  è la *lunghezza* del cammino o del ciclo. L'insieme  $V$  dei nodi di  $G$  può essere partizionato in classi di equivalenza  $V_1, \dots, V_t$  secondo la seguente relazione:  $v \sim w$  se e solo se esiste un cammino in  $G$  tra  $v$  e  $w$ . Ciascuno dei sottografi di  $G$  indotti da  $V_1, \dots, V_t$  è una *componente connessa* di  $G$ . Se  $t = 1$ , il grafo si dice *connesso*.

Un grafo  $G = (V, E)$  si dice *bipartito* se esistono  $V_1, V_2 \subseteq V$ , con  $V_1 \cup V_2 = V$  e  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , tali che ogni arco di  $G$  abbia un'estremità in  $V_1$  e l'altra in  $V_2$ . Si dimostra che un grafo è bipartito se e solo se non contiene cicli di lunghezza dispari.

Possiamo ora enunciare e dimostrare il teorema annunciato:

**Teorema 1.3.4** *Sia  $A$  una matrice  $0, 1$  bilanciata. Allora il poliedro  $P := \{x : Ax = \mathbf{1}, x \geq 0\}$  è intero.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $A$  abbia dimensione  $m \times n$ . Se  $P = \emptyset$ , allora  $P$  è intero; dunque possiamo supporre  $P \neq \emptyset$ . Ne segue che  $P$  ha certamente un vertice: in caso contrario, le facce minimali di  $P$  sarebbero varietà lineari di dimensione positiva e dunque  $P$  conterrebbe una retta, assurdo perché  $P \subseteq \{x : x \geq 0\}$ . Allora, per dimostrare che  $P$  è intero, dobbiamo far vedere che tutti i vertici di  $P$  sono vettori interi. Ma un vertice di  $P$  si ottiene come l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} Ax = \mathbf{1} \\ x_j = 0 & \text{per } j \in J \\ x_j \geq 0 & \text{per } j \notin J \end{cases},$$

per un opportuno  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ ; e risolvere tale sistema equivale a trovare l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} \bar{A}x = \mathbf{1} \\ x \geq 0 \end{cases},$$

dove  $\bar{A}$  è la matrice (ancora bilanciata) costituita dalle colonne di  $A$  il cui indice appartiene a  $J$ . Dunque possiamo assumere che  $P$  contenga un unico

vettore  $\bar{x}$ . Dobbiamo mostrare che  $\bar{x}$  è un vettore intero. Osserviamo che possiamo supporre  $\bar{x} > 0$ : se  $\bar{x}$  avesse coordinate uguali a zero, cancellando da  $A$  le colonne corrispondenti ci ricondurremmo ad un altro problema dello stesso tipo, in cui però l'unica soluzione  $\hat{x}$  avrebbe tutte le componenti positive; e in tal caso, l'interezza di  $\hat{x}$  implicherebbe, ovviamente, quella di  $\bar{x}$ .

Dimostriamo, per induzione su  $m$ , che  $P$  è un poliedro intero. Come detto, possiamo sempre supporre che esista uno ed un solo vettore  $\bar{x} \in P$ , e che  $\bar{x}$  abbia tutte le componenti positive. Sarà sufficiente provare che  $P$  contiene un vettore  $0, 1$  (necessariamente uguale a  $\bar{x}$ ), cioè che esistono delle colonne  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  di  $A$  tali che  $\alpha_1 + \dots + \alpha_t = \mathbf{1}$ . La cosa è ovvia per  $m = 1$ , in quanto l'unica riga di  $A$  non può essere nulla (altrimenti  $P$  sarebbe vuoto). Assumiamo ora che il teorema sia vero per matrici che hanno meno di  $m$  righe. Scegliamo delle colonne  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  di  $A$  tali che  $\alpha_1 + \dots + \alpha_t \leq \mathbf{1}$  e  $k := \mathbf{1}^T(\alpha_1 + \dots + \alpha_t)$  sia il massimo possibile. Se  $k = m$ , il teorema è provato. Supponiamo dunque  $k < m$ . Senza perdita di generalità, possiamo ipotizzare che  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  siano le prime  $t$  colonne di  $A$  e che  $A$  abbia quest'aspetto:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & \vdots & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & & \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & & \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|ccc} \end{array}} \right\} k$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_t$

Le posizioni lasciate bianche nelle prime  $t$  colonne sono occupate da zeri.

Poiché  $A\bar{x} = \mathbf{1}$ , esistono  $i^* > k$  e  $j^* > t$  tali che  $A_{i^*j^*} = 1$ . Sia  $A_0$  la sottomatrice di  $A$  formata dalle prime  $k$  righe di  $A$ . Ovviamente  $A_0\bar{x} = \mathbf{1}$  e dunque, per l'ipotesi induttiva, il poliedro  $\{x : A_0x = \mathbf{1}, x \geq 0\}$  è intero. Ne segue che  $\bar{x}$  è combinazione lineare convessa di vettori interi  $\bar{y}_{(1)}, \dots, \bar{y}_{(\ell)}$  tali che  $A_0\bar{y}_{(i)} = \mathbf{1}$ ,  $\bar{y}_{(i)} \geq 0$  per  $i = 1, \dots, \ell$ . E poiché  $\bar{x} > 0$ , almeno uno di questi  $\ell$  vettori deve avere la  $j^*$ -esima componente strettamente positiva. Chiamiamo  $\bar{z}$  un tale vettore (dunque  $A_0\bar{z} = \mathbf{1}$ ,  $\bar{z} \geq 0$ ,  $\bar{z}_{j^*} > 0$ ).

Sia  $G$  il grafo definito in questo modo: l'insieme dei nodi di  $G$  sia  $V :=$

$\{1, \dots, t\} \cup \{j : \bar{z}_j > 0\}$ , quello degli archi sia l'insieme  $E$  delle coppie  $jj'$  ( $j \neq j'$ ) per cui esiste una riga di  $A_0$  che abbia un 1 sia sulla  $j$ -esima che sulla  $j'$ -esima colonna. Se suddividiamo i nodi di  $G$  negli insiemi  $V_1 := \{1, \dots, t\}$  e  $V_2 := \{j > t : \bar{z}_j > 0\}$ ,  $G$  risulta bipartito, come si verifica subito. Sia  $C$  la componente connessa di  $G$  che contiene il nodo  $j^*$ . Mostriamo che per ogni  $i = k + 1, \dots, m$ , la  $i$ -esima riga di  $A$  ha al più un 1 sulle colonne il cui indice è contenuto in  $C$ . Per assurdo, sia  $i_0 > k$  tale che la  $i_0$ -esima riga di  $A$  abbia più di un 1 in posizioni di  $C$ . Sia  $Q$  il cammino di lunghezza minima che unisce due nodi distinti  $j, j'$  di  $C$  tali che  $A_{i_0j} = A_{i_0j'} = 1$ . Allora le colonne di  $A$  corrispondenti ai nodi di  $Q$  e le righe di  $A$  corrispondenti agli archi di  $Q$ , unitamente a  $i_0$ , individuerebbero una sottomatrice di  $A$  con la seguente struttura:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & 1 & & \\ & & & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Le posizioni lasciate bianche sono occupate da zeri, altrimenti il cammino scelto non avrebbe lunghezza minima. Inoltre questa sottomatrice di  $A$  ha ordine dispari, perché  $G$  è bipartito. Ma allora  $A$  conterrebbe un circolante dispari, assurdo.

Poniamo ora  $S := \{1, \dots, t\} \triangle C$  e verifichiamo che  $\sum_{j \in S} \alpha_j \leq \mathbf{1}$  (dove  $\alpha_j$  indica la  $j$ -esima colonna di  $A$ ), cioè che ogni riga di  $A$  contiene al più un 1 su colonne che hanno indice in  $S$ . Per quanto riguarda le righe successive alla  $k$ -esima, questo segue dal fatto che le prime  $t$  colonne hanno solo zeri su tali righe e dalla proprietà dimostrata poco sopra. Supponiamo allora che la riga di indice  $i_0 \leq k$  abbia un 1 sia sulla colonna  $\alpha_j$  che sulla colonna  $\alpha_{j'}$ , con  $j, j' \in S$ . Chiaramente  $j$  e  $j'$  non possono essere entrambe contenute in  $\{1, \dots, t\}$  (perché  $\alpha_1 + \dots + \alpha_t \leq \mathbf{1}$ ), né entrambe contenute in  $C \setminus \{1, \dots, t\}$  (perché  $C \setminus \{1, \dots, t\} \subseteq \{j : \bar{z}_j > 0\}$  e  $A_0\bar{z} = \mathbf{1}$ ). Allora necessariamente  $j \in \{1, \dots, t\}$  e  $j' \in C \setminus \{1, \dots, t\}$  (o viceversa). Ma poiché la  $i_0$ -esima riga di  $A$  ha un 1 su entrambe le colonne  $\alpha_j$  e  $\alpha_{j'}$ , segue che  $jj' \in E$ , dunque  $j$  e  $j'$  stanno nella stessa componente connessa di  $G$ . Ma  $j' \in C$ , dunque anche  $j \in C$  e quindi  $j \in \{1, \dots, t\} \cap C$ , assurdo perché  $j \in S$ .

Mostriamo, infine, che  $\mathbf{1}^T \sum_{j \in S} \alpha_j > k$ ; più precisamente, mostriamo che le colonne che hanno indice in  $S$  "coprono" tutte le prime  $k$  righe di  $A$  più almeno un'altra riga (quando diciamo che una riga è coperta da un insieme di colonne, intendiamo che una di tali colonne ha un 1 in corrispondenza di quella riga). Fissato  $i_0 \leq k$ , esiste un unico  $j \leq t$  tale che  $\alpha_j$  abbia un 1 sulla  $i_0$ -esima riga di  $A$ . Se  $j \in S$  allora la riga è coperta da  $\alpha_j$ . In caso contrario deve essere  $j \in C$ ; allora, detto  $j'$  l'indice tale che  $\alpha_{j'}$  abbia un 1 sulla  $i_0$ -esima riga e  $\bar{z}_{j'} = 1$ , anche  $j' \in C$ ; se  $j' > t$ ,  $j' \in S$  e la riga è coperta da  $\alpha_{j'}$ ;

se invece fosse  $j' \leq t$ , si avrebbe necessariamente  $j' = j$  e  $C = \{j\}$ , assurdo perché  $j^* \in C$ . Dunque le colonne con indice in  $S$  coprono le prime  $k$  righe. Inoltre  $j^* \in C \setminus \{1, \dots, t\}$  e  $A_{i^*j^*} = 1$ , dunque anche la riga di indice  $i^*$  viene coperta.

Abbiamo quindi trovato un insieme  $\{\alpha_j : j \in S\}$  di colonne di  $A$  tale che  $\sum_{j \in S} \alpha_j \leq \mathbf{1}$  e  $\mathbf{1}^T \sum_{j \in S} \alpha_j > k$ , contro la scelta iniziale di  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ .  $\square$

Dunque, se  $A$  è una matrice 0,1 bilanciata, il problema di set partitioning associato ad  $A$  ha soluzione se e solo se esiste un vettore  $x \geq 0$  tale che  $Ax = \mathbf{1}$ . Mostriamo ora, come corollario, che vale un risultato analogo non solo per i problemi di set packing e di set covering, ma anche per il problema “misto”.

**Corollario 1.3.5** Sia  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$  una matrice bilanciata. Allora il poliedro  $P$  definito dal sistema

$$\begin{cases} A_1x \leq \mathbf{1} \\ A_2x = \mathbf{1} \\ A_3x \geq \mathbf{1} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

è intero.

*Dimostrazione.* Ogni faccia minimale di  $P$  si ottiene considerando alcune delle disuguaglianze del sistema che definisce  $P$  e ponendole ad uguaglianza. Allora, trascurando le componenti di  $x$  che vengono in tal modo poste a zero (e cancellando le corrispondenti colonne di  $A$ ), si ottiene un sistema del tipo del Teorema 1.3.4. Quindi questo sistema ammette soluzioni intere. Dunque ogni faccia minimale di  $P$  contiene vettori interi e di conseguenza  $P$  è un poliedro intero.  $\square$

Il teorema seguente, dovuto a Berge, Las Vergnas, Fulkerson, Hoffman e Oppenheim, dà una caratterizzazione delle matrici 0,1 bilanciate in termini di ottimizzazione.

**Teorema 1.3.6** Sia  $A$  una matrice 0,1. Allora  $A$  è bilanciata se e solo se per ogni vettore 0,1  $b$  e per ogni vettore intero  $c$ , entrambi i problemi di programmazione lineare (duali l'uno dell'altro)

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{sogg. a} & \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (\mathcal{P}) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{sogg. a} & \begin{cases} A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (\mathcal{D}) \end{array}$$

hanno una soluzione ottima intera, purché gli ottimi siano finiti.



*Dimostrazione.* Supponiamo dapprima che  $A$  non sia bilanciata. Allora una sottomatrice di  $A$ , chiamiamola  $A'$ , è un circolante di ordine dispari, diciamo  $2k + 1$ . Possiamo assumere che  $A'$  sia formata dalle prime  $2k + 1$  righe e dalle prime  $2k + 1$  colonne di  $A$ . Sia  $b$  il vettore  $0, 1$  i cui 1 si trovano nelle prime  $2k + 1$  posizioni e sia  $c$  il vettore che ha componenti nell'insieme  $\{1, 2k + 2\}$  i cui 1 si trovano nelle prime  $2k + 1$  posizioni. Consideriamo il problema  $\mathcal{P}$  relativo a questi dati. Chiaramente i vincoli corrispondenti alle righe di  $A$  successive alla  $(2k + 1)$ -esima sono ridondanti. Sia  $\bar{x}$  una soluzione ottima per il problema  $\mathcal{P}$  e supponiamo che esista un indice  $j > 2k + 1$  tale che  $\bar{x}_j = \delta > 0$ . Allora, ponendo a zero tale componente e aumentando ciascuna delle prime  $2k + 1$  componenti di  $\bar{x}$  della quantità  $\delta$ , otterremo una soluzione ammissibile con valore della funzione obiettivo diminuito, assurdo. Dunque le soluzioni ottime del problema  $\mathcal{P}$  hanno tutte le componenti successive alla  $(2k + 1)$ -esima uguali a zero. Ma allora risolvere il problema  $\mathcal{P}$  equivale a trovare l'ottimo del problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{1}^T x \\ \text{sogg. a} \quad & \begin{cases} A'x \geq \mathbf{1} \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\mathcal{P}')$$

Poiché  $A'$  è non singolare (Osservazione 1.3.2), il poliedro  $\{x : A'x \geq \mathbf{1}\}$  ha un unico vertice; e dato che l'ottimo del problema  $\mathcal{P}'$  è certamente finito, tale vertice è l'unica soluzione ottima di  $\mathcal{P}'$ . È immediato verificare che il vettore  $(1/2, \dots, 1/2)$  soddisfa il sistema  $A'x = \mathbf{1}$ , quindi è questa la soluzione ottima di  $\mathcal{P}'$ . Dunque anche il problema  $\mathcal{P}$  non ammette soluzioni ottime intere.

Viceversa, supponiamo che  $A$  sia bilanciata e mostriamo che il problema  $\mathcal{P}$  ha una soluzione ottima intera per ogni vettore  $0, 1$   $b$  e per ogni vettore intero  $c$  tali che il massimo in  $\mathcal{P}$  sia finito. Definiamo il poliedro  $P := \{x : Ax \geq b, x \geq 0\}$ . Poiché le disequazioni corrispondenti alle componenti di  $b$  uguali a zero sono ridondanti, possiamo applicare il Teorema 1.3.5 e concludere che  $P$  è un poliedro intero. Ne segue che il problema  $\mathcal{P}$  ha una soluzione ottima intera per ogni vettore  $c$  per cui il minimo è finito.

Supponiamo ancora che  $A$  sia bilanciata e dimostriamo che il problema  $\mathcal{D}$  ha una soluzione ottima intera per ogni vettore  $0, 1$   $b$  e per ogni vettore intero  $c$  tali che il massimo in  $\mathcal{D}$  sia finito. Sia  $m \times n$  la dimensione di  $A$ . È chiaro che possiamo supporre  $b = \mathbf{1}$ . La dimostrazione è fatta per induzione su  $m$ . Se  $m = 1$ ,  $b$  e  $y$  sono degli scalari e i vincoli possono essere riassunti dal sistema  $\{y : y \leq \gamma, y \geq 0\}$ , per un opportuno  $\gamma \in \mathbb{N}$  (se  $\gamma$  fosse negativo, non ci sarebbero soluzioni e quindi il massimo non sarebbe finito). Allora, dato che la funzione da massimizzare è  $y$ , il massimo si ha per  $y = \gamma$ , che è intero. Mostriamo ora il passo induttivo. Sia  $\bar{y}$  una soluzione ottima di  $\mathcal{D}$ . Se  $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)$  è intero, la dimostrazione è conclusa. Supponiamo, dunque, che  $\bar{y}$  abbia una componente non intera, diciamo la prima. Chiamiamo  $a$  la

prima riga di  $A$  e  $A'$  la matrice  $A$  privata della prima riga:  $A = \begin{bmatrix} a \\ A' \end{bmatrix}$ . Allora

$$\delta := \max\{\mathbf{1}^T z : z \geq 0, (A')^T z \leq b - \lfloor \bar{y}_1 \rfloor a^T\} \geq \mathbf{1}^T \bar{y} - \bar{y}_1, \quad (1.2)$$

in quanto il vettore  $(\bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m)$  è una soluzione ammissibile di quest'ultimo problema e dà alla funzione obiettivo valore  $\mathbf{1}^T \bar{y} - \bar{y}_1$ . Per l'ipotesi induttiva, il problema di massimo in (1.2) ha una soluzione ottima intera, diciamo  $\bar{z} = (\bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m)$ . Dunque  $\delta \in \mathbb{Z}$  e  $\delta \geq \lceil \mathbf{1}^T \bar{y} - \bar{y}_1 \rceil$ . Osserviamo che  $\mathbf{1}^T \bar{y}$  è un numero intero: infatti, per la dualità in programmazione lineare, tale valore è uguale all'ottimo del problema  $\mathcal{P}$ , che, come già mostrato, ha una soluzione ottima intera per ogni vettore intero  $c$  per cui l'ottimo è finito. Allora  $\lceil \mathbf{1}^T \bar{y} - \bar{y}_1 \rceil = \mathbf{1}^T \bar{y} - \lfloor \bar{y}_1 \rfloor$  e dunque  $\delta \geq \mathbf{1}^T \bar{y} - \lfloor \bar{y}_1 \rfloor$ . Se ora definiamo il vettore intero  $\hat{y} := (\lfloor \bar{y}_1 \rfloor, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m)$ , valgono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{1}^T \hat{y} = \lfloor \bar{y}_1 \rfloor + \mathbf{1}^T \bar{z} = \lfloor \bar{y}_1 \rfloor + \delta \geq \lfloor \bar{y}_1 \rfloor + \mathbf{1}^T \bar{y} - \lfloor \bar{y}_1 \rfloor = \mathbf{1}^T \bar{y}$$

e

$$A^T \hat{x} = \lfloor \bar{y}_1 \rfloor a^T + (A')^T \bar{z} \leq \lfloor \bar{y}_1 \rfloor a^T + b - \lfloor \bar{y}_1 \rfloor a^T = b.$$

Dunque  $\hat{y}$  è una soluzione ottima intera del problema  $\mathcal{D}$ .  $\square$

### 1.3.3 Sistemi TDI

Il risultato seguente è dovuto a Edmonds e Giles.

**Teorema 1.3.7** *Un poliedro razionale è intero se e solo se ogni suo iperpiano di supporto razionale contiene vettori interi.*

*Dimostrazione.* Sia  $P$  un poliedro intero e sia  $I$  un qualunque iperpiano di supporto di  $P$ . Allora  $I \cap P$  è una faccia di  $P$ , dunque contiene un vettore intero.

Viceversa, supponiamo che ogni iperpiano di supporto di  $P$  contenga vettori interi. Poiché  $P$  è razionale, possiamo assumere che  $P$  sia determinato dal sistema  $Ax \leq b$  con  $A$  e  $b$  interi. La dimostrazione è conclusa se proviamo che ogni faccia minimale di  $P$  contiene vettori interi. Sia dunque  $F$  una faccia minimale di  $P$ . Allora  $F = \{x : A'x = b'\}$ , dove  $A'$  è un'opportuna sottomatrice di  $A$  ottenuta cancellando qualche riga di  $A$  (e  $b'$  è il sottovettore di  $b$  corrispondente). Supponiamo che  $F$  non contenga vettori interi. Allora, per il Teorema 1.1.6, esiste un vettore  $\bar{y}$  tale che  $c := (A')^T \bar{y}$  è intero e  $\delta := (b')^T \bar{y}$  non è intero. Possiamo assumere che tutte le componenti di  $\bar{y}$  siano positive (in caso contrario, è sufficiente aggiungere numeri interi alle componenti di  $\bar{y}$ : così facendo  $c$  rimane intero e  $\delta$  rimane non intero). Poniamo  $I := \{x : c^T x = \delta\}$ , e verifichiamo che  $F = P \cap I$ . Se  $x \in F$  allora  $A'x = b'$

e quindi  $c^T x = \bar{y}^T A'x = \bar{y}^T b' = \delta$ , da cui  $x \in I$ ; dunque  $F \subseteq I$  (e ovviamente  $F \subseteq P$ ). Viceversa, sia  $x \in P \cap I$ ; allora  $c^T x = \delta$ , cioè  $\bar{y}^T A'x = \bar{y}^T b'$ ; inoltre, poiché  $x \in P$ ,  $A'x \leq b'$ , da cui  $\bar{y}^T A'x \leq \bar{y}^T b'$ ; ma poiché le componenti di  $\bar{y}$  sono tutte positive, questo implica che  $A'x = b'$ , cioè che  $x \in F$ . Dunque  $F = P \cap I$ . Ne segue che  $I$  è un iperpiano di supporto di  $P$ . Ma poiché  $c$  è intero, mentre  $\delta$  non lo è, l'equazione  $c^T x = \delta$  non ha soluzioni intere, cioè  $I$  non contiene alcun vettore intero, contro l'ipotesi.  $\square$

**Teorema 1.3.8** *Sia  $Ax \leq b$  un sistema di disequazioni razionali. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- (i) *il problema  $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$  ha una soluzione ottima intera per ogni vettore  $c$  per cui il massimo è finito;*
- (ii)  *$\max\{c^T x : Ax \leq b\}$  è un intero per ogni vettore intero  $c$  per cui il massimo è finito.*

*Dimostrazione.* L'implicazione (i) $\Rightarrow$ (ii) è ovvia: se  $c$  è un vettore intero e  $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$  ha una soluzione ottima intera, allora il massimo è un intero.

Viceversa, supponiamo che sia vera la proposizione (ii). Sia  $P$  il poliedro (razionale) definito da  $Ax \leq b$  e sia  $I = \{x : c^T x = \delta\}$  un iperpiano di supporto razionale di  $P$ . Possiamo assumere che  $c$  sia un vettore intero e che le sue componenti siano numeri primi tra loro (se così non fosse, basterebbe dividere ciascuna componente di  $c$  per il massimo comun divisore delle componenti di  $c$ ). Per definizione di iperpiano di supporto,  $\delta = \max\{c^T x : Ax \leq b\}$ , valore che è intero grazie all'ipotesi (ii). Allora, dato che le componenti di  $c$  sono numeri primi tra loro, l'equazione  $c^T x = \delta$  ha una soluzione intera. Dunque  $I$  contiene un vettore intero. Poiché questo vale per ogni iperpiano di supporto razionale di  $P$ , dal Teorema 1.3.7 segue che  $P$  è un poliedro intero. Allora, se  $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$  è finito, tale massimo è raggiunto da un vettore intero.  $\square$

**Definizione 1.3.9** *Sia  $\Sigma$  un sistema di vincoli lineari (e razionali).  $\Sigma$  è detto un sistema TDI (abbreviazione di total dual integral) se il problema  $\mathcal{D}$ , duale del problema di programmazione lineare  $\max\{c^T x : x \text{ soddisfi } \Sigma\}$ , ha una soluzione ottima intera per ogni vettore intero  $c$  per cui  $\mathcal{D}$  ha ottimo finito.*

Equivalentemente,  $\Sigma$  è un sistema TDI se il problema  $\mathcal{D}$ , duale del problema di programmazione lineare  $\min\{c^T x : x \text{ soddisfi } \Sigma\}$ , ha una soluzione ottima intera per ogni vettore intero  $c$  per cui  $\mathcal{D}$  ha ottimo finito (semplicemente perché  $\min\{c^T x : x \text{ soddisfi } \Sigma\} = -\max\{-c^T x : x \text{ soddisfi } \Sigma\}$ ).

Sistemi TDI e poliedri interi sono profondamente legati, come mostra il seguente risultato (dovuto ancora a Edmonds e Giles).

**Teorema 1.3.10** *Se  $Ax \leq b$  è un sistema TDI e  $b$  è intero, allora il poliedro  $\{x : Ax \leq b\}$  è intero.*

*Dimostrazione.* Consideriamo il problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} & \max && c^T x \\ & \text{sogg. a} && Ax \leq b \end{aligned} \tag{\mathcal{P}}$$

ed il suo problema duale

$$\begin{aligned} & \min && b^T y \\ & \text{sogg. a} && \begin{cases} A^T y = c \\ y \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{\mathcal{D}}$$

Se  $Ax \leq b$  è TDI, allora il problema  $\mathcal{D}$  ha una soluzione ottima intera per ogni vettore intero  $c$  per cui il minimo di  $\mathcal{D}$  (e quindi anche il massimo di  $\mathcal{P}$ ) è finito. Allora, se  $b$  è intero e gli ottimi sono finiti, i valori ottimi sono interi. Dunque il massimo di  $\mathcal{P}$  è intero per ogni vettore intero  $c$  per cui il massimo è finito. Questo implica, per il Teorema 1.3.8, che  $\mathcal{P}$  ha una soluzione ottima intera per ogni vettore  $c$  per cui il massimo è finito, cioè che il poliedro  $\{x : Ax \leq b\}$  è intero.  $\square$

Il teorema che segue afferma che il sistema di vincoli che definisce il rilassamento lineare del problema di set covering associato ad una matrice bilanciata è TDI.

**Teorema 1.3.11** *Se  $A$  è una matrice 0,1 bilanciata, allora il sistema di vincoli*

$$\begin{cases} Ax \geq \mathbf{1} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

*è TDI.*

*Dimostrazione.* Dobbiamo provare che il duale del problema

$$\begin{aligned} & \min && c^T x \\ & \text{sogg. a} && \begin{cases} Ax \geq \mathbf{1} \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{\mathcal{P}}$$

ha una soluzione ottima intera per ogni vettore intero  $c$  per cui il minimo è finito. Il duale di  $\mathcal{P}$  è

$$\begin{aligned} & \max && \mathbf{1}^T y \\ & \text{sogg. a} && \begin{cases} A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{\mathcal{D}}$$

Allora, per il Teorema 1.3.6, poiché  $A^T$  è bilanciata, il problema  $\mathcal{D}$  ha una soluzione ottima intera per ogni vettore intero  $c$  per cui l'ottimo è finito.  $\square$

È possibile dimostrare un risultato più generale del Teorema 1.3.11. Precisamente, Fulkerson, Hoffman e Oppenheim hanno provato che se  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$  è una matrice bilanciata, allora il sistema di vincoli

$$\begin{cases} A_1x \leq \mathbf{1} \\ A_2x = \mathbf{1} \\ A_3x \geq \mathbf{1} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

è TDI. Per la dimostrazione si veda [3].

Mostriamo, infine, un teorema di cui faremo ampio uso nel prossimo capitolo. Il risultato è dovuto a Conforti, Cornuéjols, Kapoor e Vušković (si veda [1]), ma la dimostrazione qui riportata è di Schrijver. Huck e Triesh ne hanno dato una dimostrazione di tipo combinatorico (si veda [4]).

**Teorema 1.3.12** *Sia  $A$  una matrice 0,1 bilanciata. Allora il problema di set partitioning associato ad  $A$  è privo di soluzioni se e solo se le righe di  $A$  possono essere partizionate in tre insiemi  $B, R, W$  in modo tale che*

- (i)  $|B| > |R|$ ,
- (ii) per ogni colonna di  $A$ , il numero di 1 sulle righe in  $R$  sia non inferiore al numero di 1 sulle righe in  $B$ .

*Dimostrazione.* La sufficienza delle condizioni (i) e (ii) è valida per qualunque matrice 0, 1. Infatti, supponiamo che il problema di set partitioning associato ad  $A$  abbia una soluzione  $\bar{x}$ ; sia  $C(\bar{x})$  l'insieme delle colonne di  $A$  corrispondenti alle componenti di  $\bar{x}$  uguali a 1. Data una colonna  $\alpha$  di  $A$ , indichiamo con  $b(\alpha)$  (risp.  $r(\alpha)$ ) il numero di elementi non nulli di  $\alpha$  che si trovano su righe di  $B$  (risp.  $R$ ). Allora, per ogni coppia di sottoinsiemi disgiunti  $R$  e  $B$  dell'insieme delle righe di  $A$  che soddisfino la condizione (ii) si ha

$$|B| = \sum_{\alpha \in C(\bar{x})} b(\alpha) \leq \sum_{\alpha \in C(\bar{x})} r(\alpha) = |R|,$$

cioè non vale la condizione (i).

Mostriamo ora che se  $A$  è bilanciata le condizioni (i) e (ii) sono anche necessarie. Se il problema di set partitioning associato ad  $A$  non ammette soluzioni, allora il sistema  $\{Ax = \mathbf{1}, x \geq 0\}$  è irrealizzabile (Teorema 1.3.4).

Quindi, per il lemma di Farkas (Teorema 1.1.5), esiste un vettore  $\bar{x}$  tale che  $A^T \bar{x} \geq 0$  e  $\mathbf{1}^T \bar{x} < 0$ . Possiamo supporre che  $-\mathbf{1} \leq \bar{x} \leq \mathbf{1}$  (in caso contrario basta dividere le componenti di  $\bar{x}$  per  $\max_i |\bar{x}_i|$ ). Sia  $\bar{z} = \mathbf{1} - \bar{x}$ . Allora  $0 \leq \bar{z} \leq \mathbf{2}$ ,  $A^T \bar{z} = A^T \mathbf{1} - A^T \bar{x} \leq A^T \mathbf{1}$  e  $\mathbf{1}^T \bar{z} = \mathbf{1}^T \mathbf{1} - \mathbf{1}^T \bar{x} > \mathbf{1}^T \mathbf{1}$ .

Consideriamo il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & (\mathbf{1}^T A)u + \mathbf{2}v \\ \text{sogg. a} \quad & \begin{cases} Au + v \geq \mathbf{1} \\ u, v \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\mathcal{P})$$

Il problema duale di  $\mathcal{P}$  è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{1}^T z \\ \text{sogg. a} \quad & \begin{cases} A^T z \leq A^T \mathbf{1} \\ z \leq \mathbf{2} \\ z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\mathcal{D})$$

Poiché la matrice  $[A \mid I]$  è bilanciata (dove  $I$  indica la matrice identica di dimensioni opportune), dal Teorema 1.3.11 segue che il sistema di vincoli del problema  $\mathcal{P}$  è TDI; dunque  $\mathcal{D}$  ha una soluzione ottima intera, purché l'ottimo sia finito. Osserviamo che  $\mathcal{D}$  è un problema ammissibile (il vettore nullo soddisfa tutti i vincoli) e che è limitato (grazie al vincolo  $0 \leq z \leq \mathbf{2}$ ). Dunque  $\mathcal{D}$  ha una soluzione ottima intera e quindi esiste un vettore intero  $\hat{z}$  che soddisfa tutti i vincoli di  $\mathcal{D}$ . Allora, posto  $\hat{x} = \mathbf{1} - \hat{z}$ ,  $\hat{x}$  è un vettore intero e valgono le seguenti relazioni:  $\mathbf{1} \leq \hat{x} \leq \mathbf{1}$ ,  $A^T \hat{x} = A^T \mathbf{1} - A^T \hat{z} \geq 0$ ,  $\mathbf{1}^T \hat{x} = \mathbf{1}^T \mathbf{1} - \mathbf{1}^T \hat{z} < 0$ . Definiamo ora  $R$  (risp.  $B$ ) come l'insieme delle righe di  $A$  corrispondenti alle coordinate di  $\hat{x}$  uguali a 1 (risp.  $-1$ ). Chiaramente  $B$  e  $R$  sono disgiunti; da  $\mathbf{1}^T \hat{x} < 0$  segue che  $|B| > |R|$ ; e la condizione (ii) segue dal fatto che  $A^T \hat{x} \geq 0$ .  $\square$

# Capitolo 2

## Matrici critiche

Sia  $A$  una matrice  $0,1$  e supponiamo che il problema di set partitioning associato ad  $A$  sia privo di soluzioni. Allora è possibile selezionare un insieme minimale di righe di  $A$  in modo tale che, detta  $\bar{A}$  la sottomatrice di  $A$  formata da tali righe, il problema di set partitioning associato ad  $\bar{A}$  sia privo di soluzioni. Diremo che  $\bar{A}$  è una matrice *critica sulle righe*. In modo analogo, data una matrice  $0,1$   $B$  critica sulle righe, è possibile selezionare un insieme minimale di colonne di  $B$  in modo tale che, detta  $\bar{B}$  la sottomatrice di  $B$  formata da tali colonne,  $\bar{B}$  sia critica sulle righe. Diremo che  $\bar{B}$  è una matrice *critica*. Matrici critiche e matrici critiche sulle righe saranno l'oggetto di questo capitolo (almeno nel caso in cui le matrici siano bilanciate). Ma prima di passare al loro studio (sezione 2.2), sarà utile discutere dei sistemi di equazioni e disequazioni *minimalmente non ammissibili* (sezione 2.1): sistemi, cioè, privi di soluzioni, ma tali che comunque si tolga una (dis)equazione esista una soluzione.

### 2.1 Considerazioni di algebra lineare

Sia  $A$  una matrice  $m \times n$  a coefficienti in  $\mathbb{R}$  e sia  $b$  un vettore di  $\mathbb{R}^m$ . Indichiamo con  $a^{(i)}$  l' $i$ -esima riga di  $A$  e con  $A^{(i)}$  la matrice  $(m-1) \times n$  che si ottiene da  $A$  cancellandone l' $i$ -esima riga. Analogamente  $b^{(i)}$  indica il vettore di  $\mathbb{R}^{m-1}$  ottenuto da  $b$  cancellandone l' $i$ -esima componente. Invece  $b_i$  indica l' $i$ -esima componente di  $b$ .

Indichiamo con  $Ax \sim b$  un qualunque sistema di  $m$  equazioni e disequazioni lineari in  $n$  incognite la cui  $i$ -esima (dis)equazione sia una delle tre seguenti:

$$\begin{aligned} a^{(i)}x &= b_i, \\ a^{(i)}x &\leq b_i, \\ a^{(i)}x &\geq b_i. \end{aligned}$$

La scrittura  $A^{(i)}x \sim b^{(i)}$  indica il sistema formato da tutte le (dis)equazioni di  $Ax \sim b$ , eccetto l' $i$ -esima.

### 2.1.1 Sistemi minimalmente non ammissibili e sistemi critici

**Definizione 2.1.1** Diciamo che il sistema di equazioni e disequazioni lineari  $Ax \sim b$  è minimalmente non ammissibile se:

- (i) il sistema  $Ax \sim b$  non ammette soluzioni;
- (ii) per ogni  $i = 1, \dots, m$  il sistema  $A^{(i)}x \sim b^{(i)}$  ammette soluzioni.

Chiaramente la seconda condizione equivale a richiedere che ogni sottosistema proprio di  $Ax \sim b$  ammetta soluzioni.

Consideriamo per ora il caso in cui il sistema sia formato da sole equazioni.

**Proposizione 2.1.2** Se  $Ax = b$  è un sistema di  $m$  equazioni minimalmente non ammissibile, allora

- (i)  $\text{rk}(A) = m - 1$ ;
- (ii)  $\text{rk}(A^{(i)}) = m - 1$  per ogni  $i = 1, \dots, m$ .

*Dimostrazione.* Fissiamo  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Indichiamo con  $[A \mid b]$  la matrice che si ottiene giustappoendo ad  $A$  il vettore colonna  $b$ .

Dall'inammissibilità di  $Ax = b$  segue che

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A \mid b) - 1,$$

mentre dall'ammissibilità di  $A^{(i)}x = b^{(i)}$  segue che

$$\text{rk}(A^{(i)}) = \text{rk}(A^{(i)} \mid b^{(i)}).$$

D'altra parte  $\text{rk}(A^{(i)}) \leq \text{rk}(A)$  e  $\text{rk}(A^{(i)} \mid b^{(i)}) \geq \text{rk}(A \mid b) - 1$ , dunque

$$\text{rk}(A^{(i)}) = \text{rk}(A) = \text{rk}(A \mid b) - 1 = \text{rk}(A^{(i)} \mid b^{(i)}). \quad (2.1)$$

Poiché questo vale per ogni  $i \in \{1, \dots, m\}$ , le righe della matrice  $[A \mid b]$  devono essere linearmente indipendenti: se così non fosse, una delle righe di  $[A \mid b]$ , diciamo la  $i$ -esima, sarebbe combinazione lineare delle altre; ma allora si avrebbe  $\text{rk}(A^{(i)} \mid b^{(i)}) = \text{rk}(A \mid b)$ , che contraddice la (2.1). Quindi  $\text{rk}(A \mid b) = m$ .

La (2.1) e quest'ultima relazione danno la tesi.  $\square$

**Definizione 2.1.3** Diciamo che il sistema  $Ax \sim b$  è critico se:

- (i)  $Ax \sim b$  è un sistema minimalmente non ammissibile;



- (ii) per ogni sottomatrice  $A'$  di  $A$  ottenuta cancellando una colonna di  $A$ ,  $A'x \sim b$  non è un sistema minimalmente non ammissibile.

N.B. Si intende che a ciascuna riga di  $A'$  è associato lo stesso simbolo di uguaglianza o disuguaglianza che è associato alla corrispondente riga di  $A$ .

Chiaramente la seconda condizione equivale a richiedere che per ogni sottomatrice  $A'$  di  $A$  ottenuta cancellando qualche colonna di  $A$ ,  $A'x \sim b$  non sia un sistema minimalmente non ammissibile.

Restiamo ancora nel caso in cui ci siano solo equazioni.

**Proposizione 2.1.4** *Se un sistema di  $m$  equazioni lineari in  $n$  incognite è critico, allora  $n = m - 1$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $Ax = b$  un sistema di  $m$  equazioni lineari minimalmente non ammissibile. Poiché, per la Proposizione 2.1.2,  $\text{rk}(A) = m - 1$ , esistono  $m - 1$  colonne di  $A$  che sono linearmente indipendenti. Chiamiamo  $\bar{A}$  la sottomatrice di  $A$  formata da tali colonne. Mostriamo che il sistema  $\bar{A}x = b$  è minimalmente non ammissibile.

Certamente il sistema  $\bar{A}x = b$  non ammette soluzioni, altrimenti avrebbe soluzioni anche  $Ax = b$  (basterebbe porre a zero le incognite aggiunte).

Fissiamo  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Per la Proposizione 2.1.2,  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A^{(i)}) = m - 1$ . Allora il vettore riga  $a^{(i)}$  è combinazione lineare delle righe di  $A^{(i)}$  e quindi  $\bar{a}^{(i)}$  è combinazione lineare delle righe di  $\bar{A}^{(i)}$ . Ne segue che  $\text{rk}(\bar{A}^{(i)}) = \text{rk}(\bar{A}) = m - 1$ , cioè  $\bar{A}^{(i)}$  è non singolare. Dunque il sistema  $\bar{A}^{(i)}x = b^{(i)}$  ammette una soluzione.

Questo mostra che se un sistema di  $m$  equazioni è critico, allora esso ha al più  $m - 1$  incognite. D'altra parte non può averne meno, perché se  $Ax = b$  è minimalmente non ammissibile allora  $A$  ha rango  $m - 1$ , quindi  $A$  deve avere almeno  $m - 1$  colonne.  $\square$

**Corollario 2.1.5** *Se il sistema di equazioni lineari  $Ax = b$  è critico, allora per ogni  $i = 1, \dots, m$  il sistema  $A^{(i)}x = b^{(i)}$  ammette una e una sola soluzione.*

*Dimostrazione.*  $A^{(i)}$  è una matrice quadrata e non singolare.  $\square$

**Definizione 2.1.6** *Sia  $Ax = b$  un sistema di equazioni critico. Chiamiamo mate della  $i$ -esima riga di  $A$  l'unica soluzione del sistema  $A^{(i)}x = b^{(i)}$ . Diciamo inoltre che  $\bar{x}$  è un mate del sistema  $Ax = b$  se  $\bar{x}$  è il mate di una riga di  $A$ .*

**Proposizione 2.1.7** *Se  $Ax = b$  è un sistema di equazioni critico, allora i suoi mates sono affinementemente indipendenti.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $A$  abbia dimensione  $m \times n$ ; per la Proposizione 2.1.4,  $n = m - 1$ . Per ogni  $i = 1, \dots, m$  chiamiamo  $\bar{x}_{(i)}$  il mate della riga  $a^{(i)}$ . Dimostriamo che i vettori  $\bar{x}_{(2)} - \bar{x}_{(1)}, \bar{x}_{(3)} - \bar{x}_{(1)}, \dots, \bar{x}_{(m)} - \bar{x}_{(1)}$  sono linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}^{m-1}$ . Se così non fosse, posto

$$\bar{X} := [\bar{x}_{(2)} - \bar{x}_{(1)} \quad \bar{x}_{(3)} - \bar{x}_{(1)} \quad \cdots \quad \bar{x}_{(m)} - \bar{x}_{(1)}],$$

si avrebbe  $\det(\bar{X}) = 0$  e dunque  $\det(A^{(1)}\bar{X}) = \det(A^{(1)})\det(\bar{X}) = 0$ . Osserviamo che  $A^{(1)}\bar{x}_{(1)} = b^{(1)}$  e che, per  $i \geq 2$ ,  $A^{(1)}\bar{x}_{(i)} = b^{(1)} + \lambda_i e_i$ , dove  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  ed  $e_i$  è il vettore unitario la cui unica componente non nulla si trova in  $i$ -esima posizione; inoltre  $\lambda_i \neq 0$ , altrimenti  $\bar{x}_{(i)}$  risolverebbe il sistema  $Ax = b$ . Ma allora

$$A^{(1)}\bar{X} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix},$$

assurdo perché tale matrice ha determinante non nullo.  $\square$

**Corollario 2.1.8** *Se  $Ax = b$  è un sistema critico di equazioni, allora l'inviluppo convesso dei suoi mates è un simplello. I vertici di tale simplello sono tutti e soli i mates di  $Ax = b$ .*

*Dimostrazione.* Direttamente dalla definizione di simplello, in quanto i mates di  $Ax = b$  sono, come visto, affinemente indipendenti.  $\square$

**Definizione 2.1.9** *Sia  $Ax = b$  un sistema di  $m$  equazioni lineari. Chiamiamo orientazione di  $Ax = b$  un qualunque sistema del tipo  $Ax \sim b$ . Diciamo inoltre che il sistema di  $m$  equazioni e disequazioni lineari  $Cx \sim d$  è equivalente ad un'orientazione di  $Ax = b$  se esistono un ordinamento delle righe di  $[C \mid d]$  ed un'orientazione  $Ax \sim b$  di  $Ax = b$  tali che, per ogni  $i = 1, \dots, m$ , le (dis)equazioni  $c^{(i)}x \sim d_i$  e  $a^{(i)}x \sim b_i$  siano equivalenti.*

**Proposizione 2.1.10** *Sia  $Ax = b$  un sistema di  $m$  equazioni lineari critico e siano  $\bar{x}_{(1)}, \dots, \bar{x}_{(m)}$  i suoi mates. Supponiamo che il sistema di  $m$  disequazioni lineari  $Cx \leq d$  definisca l'inviluppo convesso di  $\bar{x}_{(1)}, \dots, \bar{x}_{(m)}$ . Allora  $Cx \leq d$  è equivalente ad un'orientazione di  $Ax = b$ .*

*Dimostrazione.* Nel corso di questa dimostrazione diremo “faccia” di  $P$  per designare una faccia massimale di  $P$ .

Sia  $P$  l'inviluppo convesso di  $\bar{x}_{(1)}, \dots, \bar{x}_{(m)}$ . Poiché il sistema  $Cx \leq d$  è costituito da  $m$  disequazioni e  $P$  ha  $m$  facce, ogni disequazione di  $Cx \leq d$  individua una diversa faccia di  $P$ . Fissiamo  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Allora  $a^{(i)}\bar{x}_{(j)} = b_i$  per  $j \neq i$ , dunque l'iperpiano di equazione  $a^{(i)}x = b_i$  contiene  $m-1$  vertici di  $P$ ; e poiché  $P$  è un simplello, questo significa che l'equazione  $a^{(i)}x = b_i$  definisce l'iperpiano contenente una delle facce di  $P$ , che chiamiamo  $F$ . Sappiamo che

$a^{(i)}\bar{x}_{(i)} \neq b_i$ ; supponiamo, per fissare le idee, che si abbia  $a^{(i)}x_{(i)} < b_i$ . Sia  $\gamma x \leq \delta$  la disequazione di  $Cx \leq d$  che individua la faccia  $F$ . Allora le equazioni  $a^{(i)}x = b_i$  e  $\gamma x = \delta$  individuano lo stesso iperpiano, cioè sono equivalenti; inoltre  $\bar{x}_{(i)} \in P$ , dunque la disequazione  $\gamma x \leq \delta$  deve essere equivalente a  $a^{(i)}x \leq b_i$ .  $\square$

**Corollario 2.1.11** *Se  $Ax = b$  è un sistema critico, allora esiste un'orientazione di  $Ax = b$  che definisce il semplice so che ha come vertici i mates di  $Ax = b$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $m$  il numero di righe di  $A$ . È sempre possibile trovare  $m$  disequazioni che definiscono il semplice so che ha come vertici i mates di  $Ax = b$ . Per il Teorema 2.1.10, il sistema così ottenuto è equivalente ad un'orientazione di  $Ax = b$ , dunque vale la tesi.  $\square$

**Proposizione 2.1.12** *Se  $Ax \sim b$  è un sistema di equazioni e disequazioni minimalmente non ammissibile, allora il sistema di equazioni  $Ax = b$  è anch'esso minimalmente non ammissibile.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che le righe  $a^{(i)}, \dots, a^{(k)}$  di  $A$  corrispondano alle disequazioni ( $1 \leq k \leq m$ ) e che le restanti righe corrispondano alle equazioni. Supponiamo anche, per semplicità di scrittura, che tutte le disequazioni siano del tipo ' $\leq$ ' (la dimostrazione è esattamente la stessa anche nel caso più generale).

Allora l'ipotesi è che il seguente sistema sia minimalmente non ammissibile:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a^{(1)}x \leq b_1 & (S_1) \\ \vdots & \vdots \\ a^{(k)}x \leq b_k & (S_k) \\ a^{(k+1)}x = b_{k+1} & (I_{k+1}) \\ \vdots & \vdots \\ a^{(m)}x = b_m & (I_m) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Accanto ad ogni (dis)equazione è indicato il relativo insieme delle soluzioni ( $S_j$  indica un semispazio,  $I_j$  un iperpiano di  $\mathbb{R}^n$ ).

Mostriamo che allora anche il seguente sistema è minimalmente non ammissibile:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a^{(1)}x \leq b_1 & (S_1) \\ \vdots & \vdots \\ a^{(k-1)}x \leq b_{k-1} & (S_{k-1}) \\ a^{(k)}x = b_k & (I_k) \\ \vdots & \vdots \\ a^{(m)}x = b_m & (I_m) \end{array} \right. \quad (2.3)$$

La tesi seguirà poi per iterazione.

L'insieme delle soluzioni di (2.3) è contenuto in quello di (2.2), dunque il sistema (2.3) è privo di soluzioni.

Se da (2.3) leviamo la  $k$ -esima equazione, otteniamo lo stesso sistema che otterremmo levando da (2.2) la  $k$ -esima disequazione. Quindi questo sottosistema ammette una soluzione.

Supponiamo ora di togliere una delle altre (dis)equazioni dal sistema (2.3), diciamo la prima (in caso contrario, la dimostrazione è perfettamente analoga). Siano

$$P_1 = S_2 \cap S_3 \cap \cdots \cap S_{k-1} \cap I_k \cap I_{k+1} \cap \cdots \cap I_m,$$

$$P_2 = S_2 \cap S_3 \cap \cdots \cap S_k \cap I_{k+1} \cap I_{k+2} \cap \cdots \cap I_m,$$

$$P_3 = S_2 \cap S_3 \cap \cdots \cap S_{k-1} \cap I_{k+1} \cap I_{k+2} \cap \cdots \cap I_m.$$

Vogliamo mostrare che  $P_1 \neq \emptyset$ . Supponiamo per assurdo che sia  $P_1 = \emptyset$ . Poiché  $P_2 \neq \emptyset$ , questa ipotesi equivale a dire che  $P_2$  non ha punti sull'iperpiano  $I_k$  che delimita  $S_k$ ; ma allora  $P_3$  non ha punti nel complementare di  $S_k$ : in caso contrario, poiché  $P_3$  ha punti su  $S_k$  (in quanto  $\emptyset \neq P_2 = P_3 \cap S_k$ ),  $P_3$  dovrebbe avere punti anche sull'iperpiano  $I_k$  che delimita  $S_k$ , e cioè  $P_1$  dovrebbe essere non vuoto, assurdo. Dunque  $P_3 = P_3 \cap S_k$ , cioè  $P_3 = P_2$ .

Ma  $\emptyset \neq S_1 \cap P_3 \subseteq P_3 = P_2$ , dunque  $(S_1 \cap P_3) \cap P_2 \neq \emptyset$ , assurdo perché  $(S_1 \cap P_3) \cap P_2 = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_k \cap I_{k+1} \cap I_{k+2} \cap \cdots \cap I_m$ , che è vuoto in quanto è l'insieme delle soluzioni del sistema (2.2).

Dunque  $P_1 \neq \emptyset$ . □

**Corollario 2.1.13** *Se  $Ax \sim b$  è un sistema di  $m$  equazioni e disequazioni minimalmente non ammissibile, allora*

- (i)  $\text{rk}(A) = m - 1$ ;
- (ii)  $\text{rk}(A^{(i)}) = m - 1$  per ogni  $i = 1, \dots, m$ .

*Dimostrazione.* Basta applicare la Proposizione 2.1.2 al sistema di equazioni  $Ax = b$ , anch'esso minimalmente non ammissibile grazie alla Proposizione precedente. □

**Proposizione 2.1.14** *Se un sistema di  $m$  equazioni e disequazioni lineari in  $n$  incognite è critico, allora  $n = m - 1$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $Ax \sim b$  un sistema di  $m$  equazioni e disequazioni lineari minimalmente non ammissibile. Per la Proposizione 2.1.12, il sistema di equazioni  $Ax = b$  è minimalmente non ammissibile e quindi, come visto all'interno della dimostrazione della Proposizione 2.1.4, detta  $\bar{A}$  una sottomatrice di  $A$  formata da  $m - 1$  colonne di  $A$  che sono linearmente indipendenti, anche il sistema di equazioni  $\bar{A}x = b$  è minimalmente non ammissibile. Mostriamo che

allora anche il sistema di equazioni e disquazioni  $\bar{A}x \sim b$  è minimalmente non ammissibile.

$\bar{A}x \sim b$  è chiaramente privo di soluzioni, altrimenti ponendo uguali a zero le incognite mancanti troveremmo una soluzione di  $Ax \sim b$ .

Fissiamo ora  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Sappiamo che il sistema  $\bar{A}^{(i)}x = b^{(i)}$  ha una soluzione  $\bar{x}$ ; ovviamente  $\bar{x}$  risolve anche il sistema  $\bar{A}^{(i)}x \sim b^{(i)}$ .

Dunque se un sistema di  $m$  equazioni e disequazioni è critico, allora esso ha al più  $m - 1$  incognite. D'altra parte, il Corollario 2.1.13 garantisce che non può averne meno.  $\square$

**Corollario 2.1.15** *Se  $Ax \sim b$  è un sistema critico di equazioni e disequazioni, allora il sistema di equazioni  $Ax = b$  è anch'esso critico.*

*Dimostrazione.* Per la Proposizione precedente,  $Ax = b$  è un sistema minimalmente non ammissibile; e poiché ha  $m - 1$  incognite (dove  $m$  è il numero di righe di  $A$ ), è anche critico.  $\square$

**Corollario 2.1.16** *Sia  $Ax \sim b$  un sistema critico e sia  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Allora il poliedro  $P^{(i)} := \{x : A^{(i)}x \sim b^{(i)}\}$  ha uno ed un solo vertice.*

*Dimostrazione.* Detto  $m$  il numero di righe di  $A$ ,  $A$  ha dimensione  $m \times (m - 1)$ . Poiché nessuna (dis)equazione di  $Ax \sim b$  è ridondante, il sistema  $A^{(i)}x = b^{(i)}$  definisce l'unico vertice del poliedro  $P^{(i)}$  (ricodiamo che  $A^{(i)}$  è quadrata non singolare).  $\square$

**Definizione 2.1.17** *Sia  $ax \leq \beta$  una disequazione. Chiamiamo orientazioni opposte di  $ax \leq \beta$  la disequazione  $ax \geq \beta$  e l'equazione  $ax = \beta$ .*

*Dato un sistema di disequazioni lineari  $Ax \leq b$ , chiamiamo orientazione opposta di  $Ax \leq b$  un sistema di (dis)equazioni lineari del tipo  $Ax \sim b$  in cui ogni (dis)equazione è un'orientazione opposta della corrispondente disequazione di  $Ax \leq b$ .*

**Proposizione 2.1.18** *Sia  $Ax = b$  un sistema critico di  $m$  equazioni e sia  $Ax \leq b$  l'orientazione di  $Ax = b$  che definisce il simpleso che ha come vertici i mates di  $Ax = b$ . Sia  $r \leq m$ . Allora esiste uno ed un solo sistema critico del tipo  $Ax \sim b$ , in cui i primi  $r$  vincoli sono disequazioni e gli altri equazioni. Tale sistema è l'unica orientazione opposta di  $Ax \leq b$  in cui i primi  $r$  vincoli sono disequazioni e gli altri equazioni.*

*Dimostrazione.* Sia  $0 \leq k < r$ . Supponiamo di aver già trasformato le prime  $k$  equazioni in disequazioni senza perdere la criticità, e che tali disequazioni

siano del tipo ‘ $\geq$ ’. Allora il sistema fin qui ottenuto è il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{lll} a^{(1)}x \geq b_1 & (S_1) \\ \vdots & \vdots \\ a^{(k)}x \geq b_k & (S_k) \\ a^{(k+1)}x = b_{k+1} & (I_{k+1}) \\ \vdots & \vdots \\ a^{(m)}x = b_m & (I_m) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 2.1.12, si vede che tutte le soluzioni del sistema (2.4), privato della  $(k+1)$ -esima equazione, giacciono nello stesso semispazio delimitato dall’iperpiano  $I_{k+1}$ . E poiché tra tali soluzioni c’è anche il mate della  $k$ -esima riga di  $Ax = b$ , l’equazione di questo semispazio è  $a^{(k)}x \leq b_k$ . È allora evidente che, sostituendo la  $k$ -esima equazione con la disequazione  $a^{(k)}x \geq b_k$ , si ottiene un sistema che è ancora minimalmente non ammissibile (e quindi critico, poiché ha  $m-1$  incognite). Questo mostra che sostituendo un insieme di equazioni con le disequazioni del tipo ‘ $\geq$ ’ corrispondenti, si ottiene un sistema critico, che chiamiamo  $\Sigma$ . Chiaramente  $\Sigma$  è un’orientazione opposta di  $Ax \leq b$ , anzi è l’unica orientazione opposta di  $Ax \leq b$  in cui i primi  $r$  vincoli sono disequazioni e gli altri equazioni.

Dimostriamo ora l’unicità. Supponiamo che esista un altro sistema critico  $\Sigma'$  del tipo  $Ax \sim b$ , in cui i primi  $r$  vincoli siano disequazioni e gli altri equazioni. Dato che  $\Sigma \neq \Sigma'$ , possiamo assumere che la prima disequazione di  $\Sigma'$  sia  $a^{(1)}x \geq b_1$ . Allora il mate della prima riga di  $Ax = b$  sarebbe una soluzione di  $\Sigma'$ , assurdo.  $\square$

Possiamo ora dimostrare il seguente risultato:

**Proposizione 2.1.19** *Un sistema di (dis)equazioni lineari è critico se e solo se è un’orientazione opposta di un sistema di disequazioni lineari che è una rappresentazione minimale di un simpleso.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che il sistema  $Ax \sim b$  sia critico. Allora, per la Proposizione 2.1.15,  $Ax = b$  è critico. La Proposizione 2.1.18 permette di concludere che  $Ax \sim b$  è un’orientazione opposta dell’orientazione di  $Ax = b$  che definisce il simpleso che ha come vertici i mates di  $Ax = b$ .

Viceversa, supponiamo che  $Ax \sim b$  sia un’orientazione opposta del sistema di disequazioni  $Ax \leq b$ , e che quest’ultimo sistema definisca in modo minimale un simpleso  $P$  di  $\mathbb{R}^{m-1}$ . Allora  $A$  ha  $m$  righe. Inoltre  $Ax = b$  è un sistema minimalmente non ammissibile (e quindi critico). Infatti  $P$  ha  $m$  vertici, che si ottengono ciascuno come unica soluzione di uno dei sistemi  $A^{(i)}x = b^{(i)}$ , dunque, dato che tali sistemi sono  $m$ , essi sono tutti ammissibili; invece  $Ax = b$

non ha soluzioni, perché altrimenti esisterebbe un punto di  $P$  che apparterebbe a tutte le facce, impossibile per un simpleso. Allora, per la Proposizione 2.1.18, anche  $Ax \sim b$  è critico.  $\square$

### 2.1.2 Sistemi relativamente minimalmente non ammissibili

**Definizione 2.1.20** Siano  $A$  una matrice  $m \times n$ ,  $C$  una matrice  $k \times n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $d \in \mathbb{R}^k$ . Diciamo che il sistema di equazioni e disequazioni lineari  $\begin{cases} Ax \sim b \\ Cx \sim d \end{cases}$  è minimalmente non ammissibile relativamente alle righe di  $A$  se

- (i)  $\begin{cases} Ax \sim b \\ Cx \sim d \end{cases}$  non ammette soluzioni;
- (ii)  $\begin{cases} A^{(i)}x \sim b^{(i)} \\ Cx \sim d \end{cases}$  ha una soluzione per ogni  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Chiaramente questa definizione generalizza il concetto di sistema minimalmente non ammissibile: infatti, se  $Ax \sim b$  è un sistema minimalmente non ammissibile, allora esso è un sistema minimalmente non ammissibile relativamente alle righe di  $A$  (in questo caso la matrice  $C$  è una matrice di dimensione  $0 \times n$ ).

**Proposizione 2.1.21** Siano  $A$  una matrice  $m \times n$ ,  $C$  una matrice  $k \times n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $d \in \mathbb{R}^k$ . Supponiamo che il sistema  $\begin{cases} Ax \sim b \\ Cx \sim d \end{cases}$  sia minimalmente non ammissibile relativamente alle righe di  $A$ . Allora  $m - 1 \leq \text{rk}(A) \leq m$ . Inoltre  $\text{rk}(A) = m$  se e solo se il sistema  $Ax \sim b$  ammette soluzioni.

*Dimostrazione.* Selezioniamo dal sistema  $Cx \sim d$  un insieme minimale di (dis)equazioni tale che, detta  $C'$  la matrice formata dalle righe di  $C$  corrispondenti a tali vincoli, il sistema  $\Sigma : \begin{cases} Ax \sim b \\ C'x \sim d' \end{cases}$  sia privo di soluzioni. Allora  $\Sigma$  è un sistema minimalmente non ammissibile relativamente alle righe di  $C'$ ; ma poiché, come segue subito dalle ipotesi, lo è anche relativamente alle righe di  $A$ , si conclude che  $\Sigma$  è minimalmente non ammissibile. Dunque  $\text{rk} \begin{bmatrix} A \\ C' \end{bmatrix} = m + k' - 1$ , dove  $k'$  è il numero di righe di  $C'$ . Se  $k' = 0$ ,  $Ax \sim b$  è minimalmente non ammissibile e dunque  $\text{rk}(A) = m - 1$ ; altrimenti  $A$  è una sottomatrice propria di  $\begin{bmatrix} A \\ C' \end{bmatrix}$  e dunque deve avere rango massimo (conseguenza del Corollario 2.1.13).

L'ultimo asserto si ha perché, come visto,

$$\text{rk}(A) = m \iff k' \neq 0 \iff \{x : Ax \sim b\} \neq \emptyset.$$

$\square$

**Proposizione 2.1.22** *Siano  $A$  una matrice  $m \times n$ ,  $C$  una matrice  $k \times n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $d \in \mathbb{R}^k$ . Sia  $r = \text{rk} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ . Supponiamo che il sistema  $\begin{cases} Ax \sim b \\ Cx \sim d \end{cases}$  sia minimalmente non ammissibile relativamente alle righe di  $A$ . Allora, considerata la matrice  $\begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}$  formata da  $r$  colonne linearmente indipendenti di  $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ , il sistema  $\begin{cases} \bar{A}x \sim b \\ \bar{C}x \sim d \end{cases}$  è minimalmente non ammissibile relativamente alle righe di  $\bar{A}$ .*

*Dimostrazione.* Chiaramente il sistema  $\begin{cases} \bar{A}x \sim b \\ \bar{C}x \sim d \end{cases}$  non ammette soluzioni. Sia  $i \in \{1, \dots, m\}$ ; mostriamo che il sistema  $\begin{cases} \bar{A}^{(i)}x \sim b^{(i)} \\ \bar{C}x \sim d \end{cases}$  ammette soluzioni. Sia  $r_i = \text{rk} \begin{bmatrix} A^{(i)} \\ C \end{bmatrix}$ ; ovviamente  $r - 1 \leq r_i \leq r$ . Poiché il sistema  $\Sigma_i : \begin{cases} A^{(i)}x \sim b^{(i)} \\ Cx \sim d \end{cases}$  ammette soluzioni, deve esistere un  $\bar{x}$  che risolva  $\Sigma_i$  e che soddisfi ad uguaglianza  $r_i$  (dis)equazioni di  $\Sigma_i$  corrispondenti a  $r_i$  righe linearmente indipendenti della matrice  $\begin{bmatrix} A^{(i)} \\ C \end{bmatrix}$  (basta scegliere  $\bar{x}$  su una faccia minimale del poliedro costituito dalle soluzioni di  $\Sigma_i$ ). Per semplicità di scrittura supponiamo che tali (dis)equazioni siano quelle corrispondenti alle prime  $s$  righe di  $A$  e alle prime  $t$  righe di  $C$  ( $s + t = r_i$ ). Chiamiamo  $A'$  e  $C'$  le matrici formate da queste righe.

Allora

$$\begin{aligned} a^{(h)}\bar{x} &= b_h & \text{per } h = 1, \dots, s, \\ c^{(h)}\bar{x} &= d_h & \text{per } h = 1, \dots, t. \end{aligned}$$

Poiché  $\text{rk} \begin{bmatrix} A^{(i)} \\ C \end{bmatrix} = \text{rk} \begin{bmatrix} A' \\ C' \end{bmatrix}$ , per  $j > s$ ,  $j \neq i$ , esistono  $\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{js} \in \mathbb{R}$  e  $\mu_{j1}, \dots, \mu_{jt} \in \mathbb{R}$  tali che

$$a^{(j)} = \sum_{h=1}^s \lambda_{jh} a^{(h)} + \sum_{h=1}^t \mu_{jh} c^{(h)}; \quad (2.5)$$

analogamente, per  $j > t$  esistono  $\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{js} \in \mathbb{R}$  e  $\beta_{j1}, \dots, \beta_{jt} \in \mathbb{R}$  tali che

$$c^{(j)} = \sum_{h=1}^s \alpha_{jh} a^{(h)} + \sum_{h=1}^t \beta_{jh} c^{(h)}. \quad (2.6)$$

Poiché  $\bar{x}$  risolve  $\Sigma_i$ , per  $j > s$ ,  $j \neq i$ , si ha (supponendo che il vincolo corrispondente sia  $a^{(j)}x \leq b_j$ ; se c'è un '=' o un '>' si procede analogamente)

$$b_j \geq a^{(j)}\bar{x} = \sum_{h=1}^s \lambda_{jh} a^{(h)}\bar{x} + \sum_{h=1}^t \mu_{jh} c^{(h)}\bar{x} = \sum_{h=1}^s \lambda_{jh} b_h + \sum_{h=1}^t \mu_{jh} d_h,$$



dunque

$$b_j \geq \sum_{h=1}^s \lambda_{jh} b_h + \sum_{h=1}^t \mu_{jh} d_h. \quad (2.7)$$

Analogamente, per  $j > t$ , (sempre supponendo di avere vincoli con il ' $\leq$ ')

$$d_j \geq \sum_{h=1}^s \alpha_{jh} b_h + \sum_{h=1}^t \beta_{jh} d_h. \quad (2.8)$$

Poiché  $\text{rk} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = r$ , si deve avere  $\text{rk} \begin{bmatrix} \bar{A}^{(i)} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = r_i$ : questo è ovvio se  $r_i = r - 1$ , in quanto in questo caso  $r - 1 = \text{rk} \begin{bmatrix} A^{(i)} \\ C \end{bmatrix} \geq \text{rk} \begin{bmatrix} \bar{A}^{(i)} \\ \bar{C} \end{bmatrix} \geq \text{rk} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} - 1 = r - 1$ ; se invece  $r_i = r$ ,  $\text{rk} \begin{bmatrix} A^{(i)} \\ C \end{bmatrix} = \text{rk} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r$  e quindi il vettore riga  $a^{(i)}$  è combinazione lineare delle righe di  $\begin{bmatrix} A^{(i)} \\ C \end{bmatrix}$ ; ma allora anche  $\bar{a}^{(i)}$  è combinazione lineare delle righe di  $\begin{bmatrix} \bar{A}^{(i)} \\ \bar{C} \end{bmatrix}$ , da cui  $\text{rk} \begin{bmatrix} \bar{A}^{(i)} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \text{rk} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = r$ . In ogni caso, quindi,  $\text{rk} \begin{bmatrix} \bar{A}^{(i)} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = r_i$ . Verifichiamo che da questo si deduce che le  $r_i$  righe della matrice  $\begin{bmatrix} \bar{A}' \\ \bar{C}' \end{bmatrix}$  sono linearmente indipendenti. Se così non fosse, si avrebbe  $\text{rk} \begin{bmatrix} \bar{A}' \\ \bar{C}' \end{bmatrix} < \text{rk} \begin{bmatrix} \bar{A}^{(i)} \\ \bar{C} \end{bmatrix}$ ; allora (ricordando che la prima di queste due matrici è formata da alcune righe della seconda) una delle righe di  $\begin{bmatrix} \bar{A}^{(i)} \\ \bar{C} \end{bmatrix}$  non apparterebbe al sottospazio generato dalle righe di  $\begin{bmatrix} \bar{A}' \\ \bar{C}' \end{bmatrix}$  e, di conseguenza, la corrispondente riga di  $\begin{bmatrix} A^{(i)} \\ C \end{bmatrix}$  non apparterebbe al sottospazio generato dalle righe di  $\begin{bmatrix} A' \\ C' \end{bmatrix}$ ; ma questo implicherebbe che  $\text{rk} \begin{bmatrix} A' \\ C' \end{bmatrix} < \text{rk} \begin{bmatrix} A^{(i)} \\ C \end{bmatrix}$ , assurdo perché entrambe queste matrici hanno rango  $r_i$ .

Dunque le righe di  $\begin{bmatrix} \bar{A}' \\ \bar{C}' \end{bmatrix}$  sono linearmente indipendenti e quindi esiste  $\hat{x}$  tale che  $\begin{cases} \bar{A}' \hat{x} = b' \\ \bar{C}' \hat{x} = d' \end{cases}$ . Verifichiamo che  $\hat{x}$  soddisfa anche le altre (dis)equazioni del sistema  $\begin{cases} \bar{A}^{(i)} x \sim b^{(i)} \\ \bar{C} x \sim d \end{cases}$ . Usando le relazioni (2.5) e (2.7) si ricava, per  $j >$

$s, j \neq i,$

$$\bar{a}^{(j)} \hat{x} = \sum_{h=1}^s \lambda_{jh} \bar{a}^{(h)} \hat{x} + \sum_{h=1}^t \mu_{jh} \bar{c}^{(h)} \hat{x} = \sum_{h=1}^s \lambda_{jh} b_h + \sum_{h=1}^t \mu_{jh} d_h \leq b_j;$$

analogamente, usando la (2.6) e la (2.8) si trova, per  $j > t,$

$$\bar{c}^{(j)} \hat{x} = \sum_{h=1}^s \alpha_{jh} \bar{a}^{(h)} \hat{x} + \sum_{h=1}^t \beta_{jh} \bar{c}^{(h)} \hat{x} = \sum_{h=1}^s \alpha_{jh} b_h + \sum_{h=1}^t \beta_{jh} d_h \leq d_j.$$

Dunque il sistema  $\begin{cases} \bar{A}^{(i)} x \sim b^{(i)} \\ \bar{C} x \sim d \end{cases}$  ammette una soluzione.  $\square$

Nelle ipotesi della Proposizione precedente, ci sono esempi in cui è possibile eliminare alcune colonne dalla matrice  $\begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}$ , ottenendo una matrice  $\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{C} \end{bmatrix}$  tale che il sistema  $\begin{cases} \hat{A} x \sim b \\ \hat{C} x \sim d \end{cases}$  sia ancora minimalmente non ammissibile relativamente alle righe di  $\hat{A}$ , come ora mostriamo.

**Esempio** Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si vede facilmente che il sistema  $\begin{cases} Ax = b \\ Cx \geq d \end{cases}$  è minimalmente non ammissibile relativamente alle righe di  $A$ . Chiaramente  $r = 3$ ; tuttavia, se si prende

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

il sistema  $\begin{cases} \hat{A} x = b \\ \hat{C} x \geq d \end{cases}$  è minimalmente non ammissibile relativamente alle righe di  $\hat{A}$ .  $\square$

## 2.2 Matrici bilanciate e critiche

In questa sezione definiamo e analizziamo le matrici critiche sulle righe e le matrici critiche. Il caso che ci interessa è quello in cui le matrici sono bilanciate. Inoltre concentreremo la nostra attenzione in modo particolare sulle matrici 2-regolari sulle colonne.

### 2.2.1 Definizioni e considerazioni generali

**Definizione 2.2.1** Diciamo che una matrice  $0,1$   $A$  è critica sulle righe se

- (i) il problema di set partitioning associato ad  $A$  non ammette soluzioni;
- (ii) per ogni  $i \in \{1, \dots, m\}$ , il problema di set partitioning associato ad  $A^{(i)}$  ammette una soluzione.

Alla luce del Teorema 1.3.4, se  $A$  è una matrice  $0,1$  bilanciata, le due condizioni possono essere così riscritte:

- (i)  $P(A) := \{x : Ax = \mathbf{1}, x \geq 0\} = \emptyset$ ;
- (ii)  $P(A^{(i)}) := \{x : A^{(i)}x = \mathbf{1}, x \geq 0\} \neq \emptyset$ , per ogni  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Dalla definizione di criticità sulle righe e da quanto appena visto, si ha subito:

**Osservazione 2.2.2** Sia  $A$  una matrice  $0,1$  bilanciata. Allora  $A$  è critica sulle righe se e solo se il sistema  $\begin{cases} Ax = \mathbf{1} \\ x \geq 0 \end{cases}$  è minimalmente non ammissibile relativamente alle righe di  $A$ .

Da questa caratterizzazione segue immediatamente il seguente risultato:

**Proposizione 2.2.3** Sia  $A$  una matrice  $0,1$  bilanciata e critica sulle righe. Allora  $m - 1 \leq \text{rk}(A) \leq m$ , dove  $m$  è il numero di righe di  $A$ . Inoltre  $\text{rk}(A) = m$  se e solo se il sistema  $Ax = \mathbf{1}$  ha soluzioni.

*Dimostrazione.* Basta applicare la Proposizione 2.1.21 al sistema  $\begin{cases} Ax = \mathbf{1} \\ x \geq 0 \end{cases}$ .  $\square$

Come sappiamo dal Teorema 1.3.12, se  $A$  è una matrice  $0,1$  bilanciata e critica, allora possiamo ripartire le righe di  $A$  in tre sottoinsiemi ( $B$ ,  $R$ , e  $W$ ) in modo tale che  $|B| > |R|$  e che per ogni colonna di  $A$  il numero di 1 sulle righe in  $R$  sia non inferiore al numero di 1 sulle righe in  $B$ . Nel seguito faremo riferimento ad una partizione delle righe come quella descritta nel Teorema 1.3.12 chiamando *blu* le righe in  $B$ , *rosse* quelle in  $R$ , *bianche* quelle in  $W$ . Inoltre parleremo di 1 *blu* (risp. *rossi*, *bianchi*) di una certa colonna per indicare gli 1 di tale colonna che stanno su righe blu (risp. rosse, bianche).

**Proposizione 2.2.4** Sia  $A$  una matrice  $0,1$  bilanciata e critica sulle righe. Sia data una colorazione delle righe di  $A$  del tipo descritto nel Teorema 1.3.12. Allora

- (i)  $W = \emptyset$ ;

$$(ii) |B| = |R| + 1.$$

In particolare,  $A$  ha un numero dispari di righe.

*Dimostrazione.* Supponiamo che la  $i$ -esima riga di  $A$  sia bianca. Allora la colorazione data indurrebbe sulla matrice  $A^{(i)}$  una colorazione che soddisferebbe entrambe le proprietà del Teorema 1.3.12, quindi  $P(A^{(i)})$  sarebbe vuoto, assurdo. Dunque  $W = \emptyset$ .

Poiché  $|B| > |R| \geq 0$ ,  $|B| \neq \emptyset$ ; dunque in  $A$  esiste una riga blu, diciamo  $a^{(i)}$ . Consideriamo la colorazione indotta da  $A$  su  $A^{(i)}$ : indichiamo con  $B'$  e  $R'$  rispettivamente l'insieme delle righe blu e quello delle righe rosse di  $A^{(i)}$ . Chiaramente  $|B'| = |B| - 1$ , mentre  $|R'| = |R|$ . Poiché  $P(A^{(i)}) \neq \emptyset$  e la colorazione  $(B', R')$  soddisfa la condizione (ii) del Teorema 1.3.12, ne segue che la condizione (i) dello stesso Teorema deve essere violata. Dunque  $|B'| \leq |R'|$ , cioè  $|B| - 1 \leq |R|$ , da cui necessariamente  $|B| - 1 = |R|$ .  $\square$

**Definizione 2.2.5** *Sia  $A$  una matrice  $0,1$  critica sulle righe. Chiamiamo mate della  $i$ -esima riga di  $A$  una qualunque soluzione del problema di set partitioning associato ad  $A^{(i)}$ .*

Se  $\bar{x}$  è un mate della  $i$ -esima riga di  $A$ , spesso penseremo  $\bar{x}$  come l'insieme delle colonne di  $A$  corrispondenti alle componenti di  $\bar{x}$  uguali a 1. In altre parole, identificheremo  $\bar{x}$  con l'insieme  $C(\bar{x})$  definito nella sezione 1.2.

**Osservazione 2.2.6** *Sia  $A$  una matrice  $0,1$  bilanciata e critica sulle righe di dimensione  $m \times n$ . Se  $n = m - 1$ , allora per ogni  $i = 1, \dots, m$  la riga  $a^{(i)}$  ha un unico mate.*

*Dimostrazione.* Per la Proposizione 2.2.3,  $\text{rk}(A) \geq m - 1$ , dunque, poiché nel nostro caso  $A$  ha  $m - 1$  colonne,  $\text{rk}(A) = m - 1$ . Inoltre, sempre per la stessa Proposizione, il sistema  $Ax = \mathbf{1}$  non ha soluzioni. Allora tale sistema è minimalmente non ammissibile e quindi, per ogni  $i = 1, \dots, m$ ,  $A^{(i)}$  è quadrata e non singolare (Proposizione 2.1.2). Dunque ciascuna riga di  $A$  ha un unico mate.  $\square$

**Proposizione 2.2.7** *Sia  $A$  una matrice  $0,1$  bilanciata e critica sulle righe; sia  $\bar{x}$  un mate della riga  $a^{(i)}$  di  $A$ . Consideriamo una colorazione delle righe di  $A$  del tipo descritto nel Teorema 1.3.12.*

- (i) *Se  $a^{(i)}$  è una riga blu, allora  $a^{(i)}\bar{x} = 0$ ; inoltre le colonne del mate  $\bar{x}$  hanno esattamente tanti 1 rossi quanti blu.*
- (ii) *Se  $a^{(i)}$  è una riga rossa, allora  $a^{(i)}\bar{x} \geq 2$ ; in particolare, sulla riga  $a^{(i)}$  ci sono almeno due 1.*

*Dimostrazione.* Sia  $2k + 1$  il numero di righe di  $A$ . Supponiamo che  $a^{(i)}$  sia una riga blu. La matrice  $A^{(i)}$  ha  $k$  righe rosse e  $k$  righe blu. Allora le colonne del mate  $\bar{x}$  contengono globalmente  $k$  1 rossi ed almeno  $k$  1 blu; d'altra parte, il numero di 1 blu che compaiono nelle colonne prese da  $\bar{x}$  non può superare il numero di 1 rossi. Ne segue che ogni colonna del mate deve contenere esattamente tanti 1 rossi quanti blu e che nessuna di queste colonne ha un 1 sulla riga  $a^{(i)}$  (cioè  $a^{(i)}\bar{x} = 0$ ).

Supponiamo ora che  $a^{(i)}$  sia una riga rossa.  $A^{(i)}$  ha  $k + 1$  righe blu e  $k - 1$  righe rosse. Allora le colonne del mate  $\bar{x}$  contengono globalmente  $k + 1$  elementi non nulli di colore blu e quindi almeno  $k + 1$  di colore rosso; ma poiché le colonne del mate  $\bar{x}$  hanno almeno tanti 1 rossi quanti blu, questo è possibile solo se  $a^{(i)}\bar{x} \geq 2$ .  $\square$

**Corollario 2.2.8** *Sia  $A$  un matrice 0,1 bilanciata e critica sulle righe. Allora esiste un'unica colorazione delle righe di  $A$  del tipo descritto nel Teorema 1.3.12. Inoltre, fissato un mate per ciascuna riga di  $A$ , tale colorazione è univocamente determinata dalle colonne di  $A$  che compaiono in questi mates.*

*Dimostrazione.* Sia  $a^{(i)}$  una qualunque riga di  $A$  e sia  $\bar{x}$  un suo mate. Certamente  $a^{(i)}\bar{x} \neq 1$ . Se  $a^{(i)}\bar{x} = 0$  allora  $a^{(i)}$  è una riga blu in una qualunque colorazione delle righe di  $A$  del tipo descritto nel Teorema 1.3.12, perché in caso contrario sarebbe violata la Proposizione 2.2.7. Per lo stesso motivo, se  $a^{(i)}\bar{x} \geq 2$  allora  $a^{(i)}$  è una riga rossa in una qualunque colorazione delle righe di  $A$ .

Dunque il colore di ciascuna riga è univocamente determinato dalle colonne di  $A$  che fanno parte di qualche mate.  $\square$

D'ora in avanti, quando sarà data una matrice 0,1 bilanciata e critica sulle righe, supporremo implicitamente che le sue righe siano partizionate secondo l'unica colorazione delle righe che rispetta le condizioni del Teorema 1.3.12.

La parte (ii) della Proposizione 2.2.7 può essere rafforzata:

**Proposizione 2.2.9** *Siano  $A$  un matrice 0,1 bilanciata e critica sulle righe,  $a^{(i)}$  una riga rossa di  $A$  e  $\bar{x}$  un mate di  $a^{(i)}$ . Allora il mate  $\bar{x}$  contiene almeno due colonne di  $A$  che hanno un 1 sulla riga  $a^{(i)}$  e che hanno esattamente tanti 1 rossi quanti blu.*

*Dimostrazione.* In  $A^{(i)}$  le righe blu sono due in più di quelle rosse, mentre ogni colonna di  $A$  ha almeno tanti 1 rossi quanti blu. Le uniche colonne di  $A$  che permettono di coprire più righe rosse che blu in  $A^{(i)}$  sono quelle che hanno esattamente tanti 1 rossi quanti blu e un 1 sulla riga  $a^{(i)}$ . Dunque ogni mate di  $a^{(i)}$  deve prendere almeno due di tali colonne.  $\square$

**Definizione 2.2.10** Diciamo che una matrice  $0, 1$   $A$  è critica se

- (i)  $A$  è critica sulle righe;
- (ii) per ogni sottomatrice  $A'$  formata da colonne di  $A$ ,  $A'$  non è critica sulle righe.

Un quesito interessante è il seguente: se  $A$  è una matrice bilanciata e critica di dimensione  $m \times n$ , che relazione c'è tra  $m$  e  $n$ ? Come detto nell'Osservazione 2.2.2, poiché  $A$  è bilanciata e critica sulle righe, il sistema  $\begin{cases} Ax = \mathbf{1} \\ x \geq 0 \end{cases}$  è minimalmente non ammissibile relativamente alle righe di  $A$ . Ma poiché una matrice critica è una matrice critica sulle righe costituita da un insieme minimale di colonne, la Proposizione 2.1.22 fornisce un limite superiore per il numero di colonne di  $A$ . Purtroppo, però, tale valore risulta uguale a  $n$  (perché la matrice identica  $n \times n$  ha rango  $n$ ), dunque questo ragionamento è inconcludente. Torneremo in seguito sulla questione.

**Proposizione 2.2.11** Sia  $A$  una matrice  $0, 1$  bilanciata. Se  $A$  è critica allora ogni colonna di  $A$  ha almeno un 1 blu.

*Dimostrazione.* Sia  $A$  un matrice  $0, 1$  bilanciata e critica sulle righe e supponiamo che la colonna  $\alpha$  di  $A$  abbia tutti gli elementi non nulli su righe rosse. Mostriamo che allora la matrice  $A'$  ottenuta da  $A$  cancellando la colonna  $\alpha$  è ancora critica sulle righe.

Supponiamo dunque che sulla colonna  $\alpha$  ci siano  $r$  1 rossi e nessun 1 blu. Eventualmente permutando le righe di  $A$ , possiamo ipotizzare che le righe che hanno un 1 in tale colonna siano le prime  $r$ . Siano  $\bar{x}_{(1)}, \bar{x}_{(2)}, \dots, \bar{x}_{(r)}$  dei mates rispettivamente di  $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(r)}$ .

Per prima cosa mostriamo che per ogni  $i \in \{1, \dots, r\}$  è possibile trovare un mate di  $a^{(i)}$  che non contenga la colonna  $\alpha$ .

Possiamo supporre senza perdita di generalità che i mates  $\bar{x}_{(1)}, \dots, \bar{x}_{(t)}$  non contengano la colonna  $\alpha$  e che invece  $\bar{x}_{(t+1)}, \dots, \bar{x}_{(r)}$  la contengano, dove  $0 \leq t \leq r$ . Per ogni  $i = 1, \dots, r$  poniamo  $k_i = a^{(i)}\bar{x}_{(i)}$ . Osserviamo che per  $i > t$  si ha  $k_i \geq r + 1$ . Infatti nella matrice  $A^{(i)}$  le righe blu sono due in più di quelle rosse e poiché il mate  $\bar{x}_{(i)}$  contiene la colonna  $\alpha$  (che copre  $r - 1$  righe di  $A^{(i)}$ ), le restanti colonne del mate devono coprire un insieme di righe in cui le blu sono  $r + 1$  in più di quelle rosse; e dato che ogni colonna ha almeno tanti 1 rossi quanti blu, questo è possibile solo se  $a^{(i)}\bar{x}_{(i)} \geq r + 1$ . Inoltre  $k_i \geq 2$  per  $i \leq t$  (Proposizione 2.2.7).

Indichiamo con  $e$  il vettore unitario di  $\mathbb{R}^n$  la cui unica componente non nulla è quella corrispondente alla posizione della colonna  $\alpha$  in  $A$ . Per ogni  $i = 1, \dots, r$  definiamo il vettore  $\bar{y}_{(i)}$  in questo modo:

$$\bar{y}_{(i)} = \begin{cases} \bar{x}_{(i)} & \text{per } 1 \leq i \leq t \\ \bar{x}_{(i)} - e & \text{per } t + 1 \leq i \leq r \end{cases}$$

Osserviamo che per ogni  $i = 1, \dots, r$  la componente di  $\bar{y}_{(i)}$  corrispondente alla colonna  $\alpha$  è nulla.

Nella tabella seguente sono riportati i valori dei prodotti scalari tra le righe di  $A$  e i vettori  $\bar{y}_{(i)}$  appena definiti. La riga marcata con l'asterisco indica una qualunque delle righe di  $A$  non considerate singolarmente.

|             | $\bar{y}_{(1)}$ | $\bar{y}_{(2)}$ | $\cdots$ | $\bar{y}_{(t)}$ | $\bar{y}_{(t+1)}$ | $\bar{y}_{(t+2)}$ | $\cdots$ | $\bar{y}_{(r)}$ |
|-------------|-----------------|-----------------|----------|-----------------|-------------------|-------------------|----------|-----------------|
| $a^{(1)}$   | $k_1$           | 1               | $\cdots$ | 1               | 0                 | 0                 | $\cdots$ | 0               |
| $a^{(2)}$   | 1               | $k_2$           | $\cdots$ | 1               | 0                 | 0                 | $\cdots$ | 0               |
| $\vdots$    | $\vdots$        | $\vdots$        | $\ddots$ | $\vdots$        | $\vdots$          | $\vdots$          |          | $\vdots$        |
| $a^{(t)}$   | 1               | 1               | $\cdots$ | $k_t$           | 0                 | 0                 | $\cdots$ | 0               |
| $a^{(t+1)}$ | 1               | 1               | $\cdots$ | 1               | $k_{t+1} - 1$     | 0                 | $\cdots$ | 0               |
| $a^{(t+2)}$ | 1               | 1               | $\cdots$ | 1               | 0                 | $k_{t+2} - 1$     | $\cdots$ | 0               |
| $\vdots$    | $\vdots$        | $\vdots$        |          | $\vdots$        | $\vdots$          | $\vdots$          | $\ddots$ | $\vdots$        |
| $a^{(r)}$   | 1               | 1               | $\cdots$ | 1               | 0                 | 0                 | $\cdots$ | $k_r - 1$       |
| *           | 1               | 1               | $\cdots$ | 1               | 1                 | 1                 | $\cdots$ | 1               |

Consideriamo una qualunque delle righe  $a^{(1)}, \dots, a^{(r)}$  il cui mate contiene la colonna  $\alpha$ , diciamo  $a^{(r)}$  per fissare le idee. Mostriamo che esistono  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \geq 0$  tali che il vettore  $\bar{x} := \lambda_1 \bar{y}_{(1)} + \lambda_2 \bar{y}_{(2)} + \cdots + \lambda_r \bar{y}_{(r)}$  soddisfi la relazione  $A^{(r)} \bar{x} = \mathbf{1}$ . Poiché un tale vettore ha la componente corrispondente alla colonna  $\alpha$  uguale a zero e tutte le altre componenti non negative, l'esistenza di  $\bar{x}$  permette di concludere che  $P(A^{(r)})$  è non vuoto (e quindi contiene un vettore intero); ma questo significa esattamente che esiste un mate di  $a^{(r)}$  che non contiene la colonna  $\alpha$ .

Cerchiamo dunque  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  tali che valga la relazione

$$A^{(r)}(\lambda_1 \bar{y}_{(1)} + \lambda_2 \bar{y}_{(2)} + \cdots + \lambda_r \bar{y}_{(r)}) = \mathbf{1}. \quad (2.9)$$

Poiché

$$A^{(r)}(\lambda_1 \bar{y}_{(1)} + \lambda_2 \bar{y}_{(2)} + \cdots + \lambda_r \bar{y}_{(r)}) = \lambda_1 A^{(r)} \bar{y}_{(1)} + \lambda_2 A^{(r)} \bar{y}_{(2)} + \cdots + \lambda_r A^{(r)} \bar{y}_{(r)},$$

la (2.9) equivale a

$$\lambda_1 a \bar{y}_{(1)} + \lambda_2 a \bar{y}_{(2)} + \cdots + \lambda_r a \bar{y}_{(r)} = 1 \quad \text{per ogni riga } a \text{ di } A^{(r)}.$$

Facendo riferimento alla tabella precedente possiamo facilmente scrivere queste ultime relazioni in forma più esplicita:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_t = 1 \\ \lambda_1 + k_2\lambda_2 + \cdots + \lambda_t = 1 \\ \vdots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + k_t\lambda_t = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_t + (k_{t+1} - 1)\lambda_{t+1} = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_t + (k_{t+2} - 1)\lambda_{t+2} = 1 \\ \vdots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_t + (k_{r-1} - 1)\lambda_{r-1} = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_t + \lambda_{t+1} + \lambda_{t+2} + \cdots + \lambda_r = 1 \end{array} \right.$$

Per  $2 \leq i \leq t$ , sottraendo la  $i$ -esima equazione dalla prima si ricava

$$(k_1 - 1)\lambda_1 - (k_i - 1)\lambda_i = 0,$$

da cui

$$\lambda_i = \beta_i \lambda_1,$$

dove

$$\beta_i = \frac{k_1 - 1}{k_i - 1}.$$

(Scrittura sensata perché  $k_i \neq 1$ .)

Sostituendo nella prima equazione si trova

$$\lambda_1(k_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_t) = 1,$$

da cui

$$\lambda_1 = (k_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_t)^{-1}.$$

A questo punto, per  $t + 1 \leq i \leq r - 1$  si ha

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{1}{k_i - 1}(1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_t) = \\ &= \frac{1}{k_i - 1} - \frac{1}{k_i - 1}(1 + \beta_2 + \cdots + \beta_t)\lambda_1 = \\ &= \frac{1}{k_i - 1} - \frac{\gamma}{k_i - 1}\lambda_1, \end{aligned}$$

dove

$$\gamma = 1 + \beta_2 + \cdots + \beta_t,$$

mentre

$$\lambda_r = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_t + \lambda_{t+1} + \cdots + \lambda_{r-1}) =$$



$$\begin{aligned}
&= 1 - \left( 1 + \beta_2 + \dots + \beta_t - \frac{\gamma}{k_{t+1} - 1} - \dots - \frac{\gamma}{k_{r-1} - 1} \right) \lambda_1 - \frac{1}{k_{t+1} - 1} - \dots - \frac{1}{k_{r-1} - 1} = \\
&= 1 - \gamma \left( 1 - \frac{1}{k_{t+1} - 1} - \dots - \frac{1}{k_{r-1} - 1} \right) \lambda_1 - \frac{1}{k_{t+1} - 1} - \dots - \frac{1}{k_{r-1} - 1} = \\
&= (1 - \gamma \lambda_1) \left( 1 - \frac{1}{k_{t+1} - 1} - \dots - \frac{1}{k_{r-1} - 1} \right).
\end{aligned}$$

Dobbiamo ora verificare che i  $\lambda_i$  siano tutti non negativi. Poiché  $k_i \geq 2$  per ogni  $i$ , si ha  $\beta_i \geq 0$  per ogni  $i = 2, \dots, t$ ; ma allora  $\lambda_1 \geq 0$  e quindi  $\lambda_i \geq 0$  per ogni  $i = 2, \dots, t$ .

Per mostrare che  $\lambda_i \geq 0$  per  $t+1 \leq i \leq r-1$ , è sufficiente provare che  $1 - \gamma \lambda_1 \geq 0$ , cioè che  $\gamma \leq \lambda_1^{-1}$ ; ma questo è vero, come si controlla subito dalle espressioni date per  $\gamma$  e  $\lambda_1$ .

Quanto a  $\lambda_r$ , osserviamo che essendo  $k_i \geq r+1$  per  $i > t$ , si ha  $\frac{1}{k_i-1} \leq \frac{1}{r}$ , dunque  $1 - \frac{1}{k_{t+1}-1} - \dots - \frac{1}{k_{r-1}-1} \geq 0$ .

Abbiamo quindi provato che esistono dei mates delle righe  $a^{(1)}, \dots, a^{(r)}$  che non prendono la colonna  $\alpha$  di  $A$ . Consideriamo ora una qualunque altra riga di  $A$ , diciamo la riga  $a^{(r+1)}$ , il cui mate  $\bar{x}_{(r+1)}$  contenga la colonna  $\alpha$  e mostriamo che anche in questo caso è possibile scegliere un mate di  $a^{(r+1)}$  in cui non compare la colonna  $\alpha$ . Associamo a  $a^{(1)}, \dots, a^{(r)}$  dei mates  $\bar{x}_{(1)}, \dots, \bar{x}_{(r)}$  non contenenti  $\alpha$ . Poniamo ancora  $k_i = a^{(i)} \bar{x}_{(i)}$  per ogni  $i = 1, \dots, r+1$  e definiamo

$$\bar{y}_{(i)} = \begin{cases} \bar{x}_{(i)} & \text{per } 1 \leq i \leq r \\ \bar{x}_{(i)} - e & \text{per } i = r+1 \end{cases}$$

Per ogni  $i = 1, \dots, r$  la componente di  $\bar{y}_{(i)}$  corrispondente alla colonna  $\alpha$  è nulla.

Costruiamo ancora la tabella dei prodotti scalari tra le righe di  $A$  e i vettori  $\bar{y}_{(i)}$ :

|             | $\bar{y}_{(1)}$ | $\bar{y}_{(2)}$ | $\dots$  | $\bar{y}_{(r)}$ | $\bar{y}_{(r+1)}$ |
|-------------|-----------------|-----------------|----------|-----------------|-------------------|
| $a^{(1)}$   | $k_1$           | 1               | $\dots$  | 1               | 0                 |
| $a^{(2)}$   | 1               | $k_2$           | $\dots$  | 1               | 0                 |
| $\vdots$    | $\vdots$        | $\vdots$        | $\ddots$ | $\vdots$        | $\vdots$          |
| $a^{(r)}$   | 1               | 1               | $\dots$  | $k_r$           | 0                 |
| $a^{(r+1)}$ | 1               | 1               | $\dots$  | 1               | $k_{r+1}$         |
| *           | 1               | 1               | $\dots$  | 1               | 1                 |

Analogamente a quanto fatto in precedenza, la dimostrazione è conclusa se proviamo l'esistenza di  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1} \geq 0$  tali che il vettore  $\bar{x} := \lambda_1 \bar{y}_{(1)} + \lambda_2 \bar{y}_{(2)} + \dots + \lambda_{r+1} \bar{y}_{(r+1)}$  soddisfi la relazione  $A^{(r+1)} \bar{x} = \mathbf{1}$ . Dobbiamo dunque

imporre:

$$\begin{cases} k_1\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r = 1 \\ \lambda_1 + k_2\lambda_2 + \cdots + \lambda_r = 1 \\ \vdots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + k_r\lambda_r = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r + \lambda_{r+1} = 1 \end{cases}$$

La risoluzione di questo sistema e la dimostrazione della non negatività dei coefficienti  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1}$  sono del tutto simili a quanto fatto in precedenza.  $\square$

In seguito faremo riferimento ad una proprietà che chiameremo *modularità*: ne diamo ora la definizione.

**Definizione 2.2.12** *Sia  $A$  una matrice  $0, 1$  critica di dimensione  $m \times n$ . Diciamo che  $A$  è modulare se  $n = m - 1$  e se le righe e le colonne di  $A$  possono essere permutate in modo tale che*

- (i) *le righe di posto dispari siano blu, quelle di posto pari rosse;*
- (ii) *per ogni  $i = 1, \dots, m$ , detto  $\bar{x}$  l'unico mate della riga  $a^{(i)}$ , le colonne prese da  $\bar{x}$  che fanno parte delle prime  $i - 1$  colonne di  $A$  abbiano tutti  $i$  non nulli sulle prime  $i$  righe di  $A$ , mentre le colonne prese da  $\bar{x}$  che fanno parte delle restanti  $m - i$  colonne di  $A$  abbiano tutti  $i$  non nulli sulle ultime  $m - i + 1$  righe di  $A$  (cioè sulle righe  $a^{(i)}, a^{(i+1)}, \dots, a^{(m)}$ ).*

Diciamo che  $A$  è in forma modulare se è modulare e le sue righe e colonne sono disposte secondo un ordinamento che abbia le proprietà (i) e (ii).

## 2.2.2 Congetture

In questo paragrafo formuliamo alcune congetture relative alle matrici  $0, 1$  bilanciate e critiche o critiche sulle righe.

**Congettura 1** *Sia  $A$  una matrice  $0, 1$  bilanciata e critica di dimensione  $m \times n$ . Allora  $n = m - 1$ .*

Verifichiamo che la Congettura 1 implica la seguente:

**Congettura 2** *Sia  $A$  una matrice  $0, 1$  bilanciata e critica. Allora il sistema  $Ax = \mathbf{1}$  è critico.*

*Dimostrazione (nell'ipotesi che la Congettura 1 sia vera).* Sia  $m \times n$  la dimensione di  $A$ . Per la Congettura 1,  $n = m - 1$ . Allora, usando la Proposizione 2.2.3, si vede che  $\text{rk}(A) = m - 1$  e dunque il sistema  $Ax = \mathbf{1}$  è privo di soluzioni. Invece, per definizione di criticità, il sistema  $A^{(i)}x = \mathbf{1}$  ha soluzioni per ogni

$i = 1, \dots, m$ . Dunque il sistema  $Ax = \mathbf{1}$  è minimalmente non ammissibile. E poiché  $A$  ha  $m$  righe e  $m - 1$  colonne, tale sistema è critico.  $\square$

Come visto nella dimostrazione della Proposizione 2.1.4, se  $Ax = b$  è un sistema minimalmente non ammissibile (con  $A$  di dimensione  $m \times n$ ), allora selezionando un qualunque insieme di  $m - 1$  colonne di  $A$  linearmente indipendenti, otteniamo un sistema critico. Allora ci si potrebbe chiedere se, nell'ipotesi che la Congettura 1 sia vera, selezionando un qualunque insieme di  $m - 1$  colonne di una matrice bilanciata e critica sulle righe si ottenga una matrice critica. La risposta è negativa, come ora mostriamo.

**Esempio** Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \end{matrix}.$$

Chiaramente  $A$  è una matrice bilanciata e  $\text{rk}(A) = 4$ . È facile verificare che  $A$  è critica sulle righe. Se eliminiamo la terza colonna, otteniamo una matrice ancora di rango 4, ma non più critica sulle righe, in quanto l'ultima riga sarebbe priva di mates. Osserviamo, però, che  $A$  non è un controesempio alla Congettura 1: togliendo l'ultima colonna, infatti, si ottiene una matrice critica.  $\square$

**Osservazione** Sia  $A$  una matrice  $0, 1$  bilanciata e critica e supponiamo che la Congettura 1 (e dunque la Congettura 2) sia vera. Allora  $Ax = \mathbf{1}$  è un sistema critico. In questa situazione, le due nozioni di *mate* date nelle Definizioni 2.1.6 e 2.2.5 coincidono (ricordiamo che la Proposizione 2.2.6 ci dice che se  $n = m - 1$  allora  $A$  ha un unico mate). Per il Corollario 2.1.8, l'involuppo convesso dei mates di  $A$  è un simpleso di  $\mathbb{R}^{m-1}$  e, per il Corollario 2.1.11, esiste un'orientazione  $Ax \sim \mathbf{1}$  di  $Ax = \mathbf{1}$  che definisce tale simpleso. Vogliamo scoprire qual è questa orientazione. Chiaramente tutti i vincoli di questo sistema sono disequazioni. Per la Proposizione 2.1.18, esiste uno ed un solo sistema critico  $Ax \sim' \mathbf{1}$  formato da sole disequazioni e tale sistema è l'unica orientazione opposta di  $Ax \sim \mathbf{1}$  formata da sole disequazioni. Come si evince dalla dimostrazione della stessa Proposizione 2.1.18, il sistema  $Ax \sim' \mathbf{1}$  può essere costruito in questo modo: per ogni  $i = 1, \dots, m$  si sostituisce l' $i$ -esima equazione di  $Ax = \mathbf{1}$  con la disequazione che individua il semispazio che non contiene il mate  $\bar{x}_{(i)}$  di  $a^{(i)}$ . Se  $a^{(i)}$  è una riga blu, tale disequazione è  $a^{(i)}x \geq 1$  (in quanto, per la Proposizione 2.2.7 (i),  $a^{(i)}\bar{x}_{(i)} = 0 < 1$ ); se, invece,  $a^{(i)}$  è una riga rossa, allora la disequazione è  $a^{(i)}x \leq 1$  (in quanto, per la Proposi-

zione 2.2.7 (ii),  $a^{(i)}\bar{x}_{(i)} \geq 2 > 1$ ). Allora, dette  $A_R$  e  $A_B$  le sottomatrici di  $A$  costituite rispettivamente dalle righe rosse e blu di  $A$ , l'unico sistema critico del tipo  $Ax \sim' \mathbf{1}$  che è costituito da sole disequazioni è  $\begin{cases} A_B x \geq \mathbf{1} \\ A_R x \leq \mathbf{1} \end{cases}$ . Allora il semplice che ha come vertici i mates di  $A$  è definito dal sistema  $\begin{cases} A_B x \leq \mathbf{1} \\ A_R x \geq \mathbf{1} \end{cases}$ .  $\square$

La congettura che ora formuliamo è una versione più forte della Proposizione 2.2.7 (ii), almeno per le matrici critiche:

**Congettura 3** *Sia  $A$  una matrice 0,1 bilanciata e critica. Sia  $a^{(i)}$  una riga rossa di  $A$  e sia  $\bar{x}$  un suo mate. Allora  $a^{(i)}\bar{x} = 2$ .*

La seguente congettura è un rafforzamento della Proposizione 2.2.11:

**Congettura 4** *Sia  $A$  una matrice 0,1 bilanciata e critica. Allora ogni colonna di  $A$  contiene esattamente tanti 1 rossi quanti blu.*

Osserviamo che la Congettura 4 implica la Congettura 3: basta ragionare come nella dimostrazione della Proposizione 2.2.7 (ii), tenendo però presente che, nelle nostre ipotesi,  $A$  ha *esattamente* tanti 1 rossi quanti blu.

Quest'ultima congettura implica la seguente (ricordiamo che una matrice 0,1 si dice *k-regolare sulle colonne* se ogni sua colonna contiene esattamente  $k$  elementi non nulli):

**Congettura 5** *Sia  $A$  una matrice 0,1 bilanciata e critica sulle righe. Se  $A$  è k-regolare sulle colonne, allora  $k = 2$ .*

*Dimostrazione (nell'ipotesi che la Congettura 4 sia vera).* Supponiamo dapprima che  $A$  sia critica. Prima di tutto osserviamo che  $k$  è pari: è conseguenza immediata della Congettura 4, che stiamo supponendo vera. Supponiamo che  $A$  abbia  $r$  righe rosse e  $r + 1$  righe blu. Sia  $a^{(i)}$  una riga di  $A$  e sia  $\bar{x}_{(i)}$  un suo mate. Chiaramente

$$\mathbf{1}^T(A\bar{x}_{(i)}) = 2r + a^{(i)}\bar{x}_{(i)};$$

d'altra parte

$$\mathbf{1}^T(A\bar{x}_{(i)}) = (\mathbf{1}^T A)\bar{x}_{(i)} = \mathbf{k}^T \bar{x}_{(i)} = tk,$$

per un opportuno intero positivo  $t$ . Dunque

$$2r + a^{(i)}\bar{x}_{(i)} = tk. \quad (2.10)$$

Se scegliamo come  $a^{(i)}$  una riga blu di  $A$ , allora, per la Proposizione 2.2.7,  $a^{(i)}\bar{x}_{(i)} = 0$ ; in questo caso la (2.10) dice che  $2r = t_1 k$  per un opportuno intero positivo  $t_1$ . Se invece consideriamo una riga rossa, per quanto detto più sopra

$a^{(i)}\bar{x}_{(i)} = 2$ ; e in questo caso la (2.10) dice che  $2r + 2 = t_2k$  per un opportuno intero positivo  $t_2$ . Ma allora, dalle ultime due relazioni ricavate si conclude che  $t_1k + 2 = t_2k$  e quindi  $k$  deve essere un divisore di 2. Ma  $k$  è pari, dunque  $k = 2$ .

Se, invece,  $A$  è critica sulle righe ma non critica, basta considerare una sottomatrice  $\bar{A}$ , formata da colonne di  $A$ , che sia critica: applicando il ragionamento appena svolto ad  $\bar{A}$  si conclude che  $\bar{A}$ , e quindi  $A$ , è 2-regolare sulle colonne.  $\square$

Osserviamo che affinché sia vera la Congettura 5 può bastare un'ipotesi più debole della Congettura 4: è sufficiente che esista una riga (rossa)  $a^{(i)}$  che abbia un mate  $\bar{x}_{(i)}$  tale che  $a^{(i)}\bar{x}_{(i)} = 2$ . Con questa ipotesi, infatti, tutti i passaggi del ragionamento appena svolto restano validi.

Le seguenti due congetture affermano che la criticità di una matrice 0,1 bilanciata viene mantenuta se si tengono solo le colonne che fanno parte dei mates delle righe blu o solo quelle che fanno parte dei mates delle righe rosse.

**Congettura 6** *Sia  $A$  una matrice 0,1 bilanciata e critica sulle righe. Allora, fissato un mate per ciascuna riga blu di  $A$ , la matrice  $\bar{A}$  formata dalle colonne di  $A$  che compaiono in questi mates è critica sulle righe.*

Grazie alla Proposizione 2.2.7 (i), la Congettura 6 implica la Congettura 4.

**Congettura 7** *Sia  $A$  una matrice 0,1 bilanciata e critica sulle righe. Allora, fissato un mate per ciascuna riga rossa di  $A$ , la matrice  $\bar{A}$  formata dalle colonne di  $A$  che compaiono in questi mates è critica sulle righe.*

Un'immediata conseguenza di queste ultime due congetture sarebbe la seguente:

**Congettura 8** *Sia  $A$  una matrice 0,1 bilanciata e critica e sia fissato un mate per ciascuna riga di  $A$ . Allora ogni colonna di  $A$  compare in almeno un mate di una riga rossa ed in almeno un mate di una riga blu.*

*Dimostrazione (nell'ipotesi che le Congetture 6 e 7 siano vere).* Supponiamo che la colonna  $\alpha$  di  $A$  non compaia in nessun mate di una riga blu (risp. rossa). La matrice  $\bar{A}$ , ottenuta selezionando le colonne di  $A$  che compaiono nei mates delle righe rosse (risp. blu), è critica sulle righe, grazie alla Congettura 7 (risp. 6). Ma in  $\bar{A}$  non compare la colonna  $\alpha$ , dunque  $A$  non è critica, contro l'ipotesi.  $\square$

**Congettura 9** *Se  $A$  è una matrice 0,1 bilanciata e critica, allora  $A$  è modulare.*

**Congettura 10** *Sia  $A$  una matrice  $0,1$  bilanciata e critica. Allora è possibile cancellare due righe e due colonne da  $A$  in modo che la matrice ottenuta sia critica.*

### 2.2.3 Il caso 2-regolare

In questo paragrafo considereremo un caso semplice: le matrici 2-regolari sulle colonne. Verificheremo che per tali matrici tutte le congetture formulate nel paragrafo 2.2.2 sono vere. Inoltre daremo una caratterizzazione delle matrici  $0,1$  bilanciate, critiche e 2-regolari sulle colonne (Proposizione 2.2.20).

Osserviamo, innanzi tutto, che nel caso 2-regolare la Congettura 4 è vera, come segue immediatamente dalla Proposizione 2.2.11. Riportiamo l'enunciato per completezza.

**Proposizione 2.2.13** *Sia  $A$  una matrice  $0,1$  bilanciata e critica. Se  $A$  è 2-regolare sulle colonne, allora ogni colonna di  $A$  contiene esattamente un 1 rosso ed un 1 blu.*

Dimostriamo la Congettura 6 per matrici 2-regolari sulle colonne.

**Proposizione 2.2.14** *Sia  $A$  un matrice  $0,1$  bilanciata e critica sulle righe. Supponiamo che  $A$  sia 2-regolare sulle colonne. Allora, fissato un mate per ciascuna riga blu di  $A$ , la matrice  $\bar{A}$  formata dalle colonne di  $A$  che compaiono in questi mates è critica sulle righe.*

*Dimostrazione.* Dobbiamo mostrare che ogni riga rossa di  $A$  ha un mate formato da colonne di  $\bar{A}$ . Sia dunque  $a^{(i)}$  una riga rossa di  $A$ . Certamente esiste una colonna  $\alpha$  di  $\bar{A}$  che ha un 1 su  $a^{(i)}$ ; l'altro 1 di tale colonna si trova su una riga blu, diciamo  $a^{(j)}$  (Proposizione 2.2.13). Ma allora l'insieme di colonne ottenuto aggiungendo la colonna  $\alpha$  al mate di  $a^{(j)}$  è un mate di  $a^{(i)}$ .  $\square$

Per dimostrare la Congettura 7 (e quindi la 8) per le matrici 2-regolari sulle colonne, abbiamo bisogno del seguente risultato preliminare:

**Lemma 2.2.15** *Sia  $k$  un intero positivo e sia  $X = \{1, \dots, k\}$ . Allora per ogni applicazione  $f : X \rightarrow X$  esiste  $Y \subseteq X$ ,  $Y \neq \emptyset$ , tale che la restrizione di  $f$  a  $Y$  sia una permutazione degli elementi di  $Y$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo la seguente successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_i = f(x_{i-1}) \quad \text{per } i > 0 \end{cases}$$

Poiché  $x_i \in X$  per ogni  $i \geq 0$  e  $X$  è un insieme finito, esiste un elemento  $\bar{x} \in X$  che compare due volte nella successione. Supponiamo che le prime due

occorrenze di  $\bar{x}$  si abbiano al passo  $i^*$  e al passo  $j^*$ , dove  $i^* < j^*$ . Dunque  $x_{i^*} = x_{j^*} = \bar{x}$ , mentre gli elementi  $x_{i^*}, \dots, x_{j^*-1}$  sono a due a due distinti. Sia  $Y = \{x_{i^*}, \dots, x_{j^*-1}\}$ . Poiché  $f(x_i) = x_{i+1}$  per  $i^* \leq i < j^* - 1$  e  $f(x_{j^*-1}) = x_{j^*} = x_{i^*}$ , la restrizione di  $f$  a  $Y$  è una permutazione degli elementi di  $Y$ .  $\square$

**Proposizione 2.2.16** *Sia  $A$  un matrice  $0,1$  bilanciata e critica sulle righe. Supponiamo che  $A$  sia 2-regolare sulle colonne. Allora, fissato un mate per ciascuna riga rossa di  $A$ , la matrice  $\bar{A}$  formata dalle colonne di  $A$  che compaiono in questi mates è critica sulle righe.*

*Dimostrazione.* Dobbiamo mostrare che ogni riga blu di  $A$  ha un mate formato da colonne di  $\bar{A}$ . Sia dunque  $a^{(i)}$  una riga blu di  $A$ . Chiamiamo  $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k}$  le colonne di  $\bar{A}$  che hanno un 1 su  $a^{(i)}$ . Chiaramente  $k > 0$ . Per ogni  $h = 1, \dots, k$  chiamiamo  $a^{(i_h)}$  la riga (rossa) di  $A$  contenente l'altro 1 della colonna  $\alpha_{j_h}$ . Siano  $\bar{x}_{(i_1)}, \dots, \bar{x}_{(i_k)}$  i mates rispettivamente di  $a^{(i_1)}, \dots, a^{(i_k)}$ . Per ogni  $h = 1, \dots, k$  il mate  $\bar{x}_{(i_h)}$  contiene una ed una sola delle colonne  $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k}$ , che indichiamo con  $\alpha_{j_{f(h)}}$ . Posto  $X = \{1, \dots, k\}$ , risulta così definita un'applicazione  $f : X \rightarrow X$ . Allora, per il Lemma 2.2.15, esiste un sottoinsieme non vuoto  $Y$  di  $X$  tale che la restrizione di  $f$  a  $Y$  sia una permutazione degli elementi di  $Y$ . Supponiamo  $|Y| = t$  (ovviamente  $0 < t \leq k$ ). Sia  $\bar{x} = \sum_{h \in Y} \bar{x}_{i_h}$ . Allora, tenuto presente che per ogni  $h \in Y$  si ha  $a^{(i_h)} \bar{x}_{(i_h)} = 2$  e  $\bar{A}^{(i_h)} \bar{x}_{(i_h)} = \mathbf{1}$ ,  $\bar{A} \bar{x}$  è il seguente vettore:

$$\bar{A} \bar{x} = \begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ \vdots \\ t+1 \\ t \\ \vdots \\ t \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{componente corrispondente alla riga } a^{(i)} \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{componenti corrispondenti alle righe } a^{(i_h)} \text{ con } h \in Y \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{componenti corrispondenti alle altre righe di } A \end{array}$$

Per ogni  $h \in Y$ , chiamiamo  $e_{j_h}$  il vettore unitario la cui unica componente non nulla si trova nella posizione corrispondente alla colonna  $\alpha_{j_h}$ . Poniamo  $\bar{y} = \bar{x} - \sum_{h \in Y} e_{j_h}$ . Poiché la restrizione di  $f$  a  $Y$  è una permutazione degli elementi di  $Y$ , si ha  $\bar{y} = \sum_{h \in Y} (\bar{x}_{(i_h)} - e_{j_{f(h)}})$ ; e poiché per ogni  $h \in Y$  la colonna  $\alpha_{j_h}$  è contenuta nel mate  $\bar{x}_{(i_h)}$ , si conclude che  $\bar{x}_{(i_h)} - e_{j_{f(h)}} \geq 0$ ; quindi  $\bar{y} \geq 0$ . Inoltre  $\bar{A}^{(i)} \bar{y} = \mathbf{t}$ . Allora  $\frac{1}{t} \bar{y} \in \{x : \bar{A}^{(i)} x = \mathbf{1}, x \geq 0\}$ ; e poiché quest'ultimo insieme è un poliedro intero, deve contenere un vettore intero. Dunque la riga  $a^{(i)}$  ha un mate formato da colonne di  $\bar{A}$ .  $\square$

Come abbiamo visto, nel caso 2-regolare la Congettura 4 risulta vera. Allora, per quanto detto in precedenza, nella stessa ipotesi è vera anche la Congettura 3. Mostriamo che in realtà vale una proprietà più forte:

**Proposizione 2.2.17** *Sia  $A$  un matrice  $0,1$  bilanciata e critica. Se  $A$  è 2-regolare sulle colonne, allora ogni riga rossa di  $A$  contiene esattamente due elementi non nulli.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che la riga rossa  $a^{(i_0)}$  contenga più di due elementi non nulli e sia  $\bar{x}_{(i_0)}$  un suo mate; come detto, nelle nostre ipotesi la Congettura 3 risulta verificata, dunque  $a^{(i_0)}\bar{x}_{(i_0)} = 2$ ; allora esiste una colonna  $\alpha_{j_0}$  di  $A$  che ha un 1 su  $a^{(i_0)}$  e che non fa parte del mate  $\bar{x}_{(i_0)}$ . Sia  $\bar{A}$  la matrice  $A$  privata della colonna  $\alpha_{j_0}$ ; mostriamo che  $\bar{A}$  è critica sulle righe (assurdo, perché  $A$  è critica). Per la Proposizione 2.2.14, è sufficiente mostrare che ogni riga blu di  $A$  ha un mate in  $\bar{A}$ . Sia dunque  $a^{(i)}$  una riga blu di  $A$  e sia  $\bar{x}_{(i)}$  un suo mate; proviamo che  $a^{(i)}$  ha un mate anche in  $\bar{A}$ . La cosa è ovvia se  $\bar{x}_{(i)}$  non prende la colonna  $\alpha_{j_0}$ , dunque possiamo supporre che  $\alpha_{j_0}$  faccia parte di  $\bar{x}_{(i)}$ . Indicizziamo le righe e le colonne di  $A$  in questo modo:

- sia  $a^{(i_1)}$  la riga di  $A$  che contiene l'1 blu di  $\alpha_{j_0}$ ;
- sia  $\alpha_{j_1}$  una colonna di  $A$  contenuta in  $\bar{x}_{(i_1)}$  che ha un 1 su  $a^{(i_1)}$ ;
- sia  $a^{(i_2)}$  la riga di  $A$  che contiene l'1 rosso di  $\alpha_{j_1}$ ;
- sia  $\alpha_{j_2}$  la colonna di  $A$  contenuta in  $\bar{x}_{(i_2)}$  che ha un 1 su  $a^{(i_2)}$ ;

e così via. In generale, le definizioni saranno queste:  
per  $k$  dispari,

- sia  $a^{(i_k)}$  la riga di  $A$  che contiene l'1 blu di  $\alpha_{j_{k-1}}$ ;
- sia  $\alpha_{j_k}$  una colonna di  $A$  contenuta in  $\bar{x}_{(i_k)}$  che ha un 1 su  $a^{(i_k)}$ ;

per  $k$  pari,

- sia  $a^{(i_k)}$  la riga di  $A$  che contiene l'1 rosso di  $\alpha_{j_{k-1}}$ .
- sia  $\alpha_{j_k}$  la colonna di  $A$  contenuta in  $\bar{x}_{(i)}$  che ha un 1 su  $a^{(i_k)}$ ;

Nella figura seguente sono riportate le prime iterazioni di una generica scelta delle righe e colonne di  $A$  secondo le regole appena date. I pallini indicano gli elementi non nulli di colonne che fanno parte di  $\bar{x}_{(i)}$ , i quadratini quelli di colonne di  $\bar{x}_{(i_0)}$ .



|          |   |       |       |       |       |       |         |          |   |  |  |  |  |  |  |   |       |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |   |  |   |          |  |  |  |  |  |  |  |          |  |
|----------|---|-------|-------|-------|-------|-------|---------|----------|---|--|--|--|--|--|--|---|-------|---|---|--|--|--|--|--|---|-------|--|---|---|--|--|--|--|---|-------|--|--|---|---|--|--|--|---|-------|--|--|--|---|---|--|--|---|-------|--|--|--|--|---|---|--|---|-------|--|--|--|--|--|---|--|---|----------|--|--|--|--|--|--|--|----------|--|
|          | $j_0$   | $j_1$ | $j_2$ | $j_3$ | $j_4$ | $j_5$ | $\dots$ |          |   |  |  |  |  |  |  |   |       |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |   |  |   |          |  |  |  |  |  |  |  |          |  |
| $i$      | <table style="width: 100%; height: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_0</math></td> <td style="text-align: center;">●</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_1</math></td> <td style="text-align: center;">●</td> <td style="text-align: center;">◇</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">R</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_2</math></td> <td></td> <td style="text-align: center;">◇</td> <td style="text-align: center;">●</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_3</math></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">●</td> <td style="text-align: center;">◇</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">R</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_4</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">◇</td> <td style="text-align: center;">●</td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_5</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">●</td> <td style="text-align: center;">◇</td> <td></td> <td style="text-align: center;">R</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_6</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">◇</td> <td></td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>\vdots</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;"><math>\vdots</math></td> </tr> </table> |       |       |       |       |       |         | $i_0$    | ● |  |  |  |  |  |  | B | $i_1$ | ● | ◇ |  |  |  |  |  | R | $i_2$ |  | ◇ | ● |  |  |  |  | B | $i_3$ |  |  | ● | ◇ |  |  |  | R | $i_4$ |  |  |  | ◇ | ● |  |  | B | $i_5$ |  |  |  |  | ● | ◇ |  | R | $i_6$ |  |  |  |  |  | ◇ |  | B | $\vdots$ |  |  |  |  |  |  |  | $\vdots$ |  |
| $i_0$    | ●   |       |       |       |       |       |         | B        |   |  |  |  |  |  |  |   |       |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |   |  |   |          |  |  |  |  |  |  |  |          |  |
| $i_1$    | ●   | ◇     |       |       |       |       |         | R        |   |  |  |  |  |  |  |   |       |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |   |  |   |          |  |  |  |  |  |  |  |          |  |
| $i_2$    |   | ◇     | ●     |       |       |       |         | B        |   |  |  |  |  |  |  |   |       |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |   |  |   |          |  |  |  |  |  |  |  |          |  |
| $i_3$    |   |       | ●     | ◇     |       |       |         | R        |   |  |  |  |  |  |  |   |       |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |   |  |   |          |  |  |  |  |  |  |  |          |  |
| $i_4$    |   |       |       | ◇     | ●     |       |         | B        |   |  |  |  |  |  |  |   |       |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |   |  |   |          |  |  |  |  |  |  |  |          |  |
| $i_5$    |   |       |       |       | ●     | ◇     |         | R        |   |  |  |  |  |  |  |   |       |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |   |  |   |          |  |  |  |  |  |  |  |          |  |
| $i_6$    |   |       |       |       |       | ◇     |         | B        |   |  |  |  |  |  |  |   |       |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |   |  |   |          |  |  |  |  |  |  |  |          |  |
| $\vdots$ |   |       |       |       |       |       |         | $\vdots$ |   |  |  |  |  |  |  |   |       |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |   |  |   |          |  |  |  |  |  |  |  |          |  |

Osserviamo che il processo di indicizzazione sopra descritto è iterabile all'infinito, dunque prima o poi ritorneremo ad una riga o ad una colonna già visitata. Osserviamo, inoltre, che poiché  $A$  è critica, non esistono due colonne o due righe di  $A$  coincidenti; dunque  $a^{(j)} = a^{(j')}$  se e solo se  $j = j'$  (e lo stesso vale per le colonne). Arrestiamo il processo iterativo non appena torniamo ad una riga o colonna già indicizzata. Supponiamo che la prima ad essere rivisitata sia la colonna  $\alpha_{j_h}$ , dunque  $\alpha_{j_h} = \alpha_{j_\ell}$ , con  $\ell < h$ ; poiché, come è facile vedere, due colonne scelte consecutivamente sono sempre distinte, si deve avere  $\ell < h - 1$ . Gli elementi non nulli di  $\alpha_{j_\ell}$  si trovano sulle righe  $a^{(i_\ell)}$  e  $a^{(i_{\ell+1})}$ ; allora, poiché anche  $a^{(i_h)}$  contiene un 1 di  $\alpha_{j_h} = \alpha_{j_\ell}$ , si conclude che  $a^{(i_h)}$  deve coincidere con una tra  $a^{(i_\ell)}$  e  $a^{(i_{\ell+1})}$  (e  $\ell + 1 < h$ ); ma questo è assurdo, perché avevamo supposto che la prima tra le righe e colonne rivisitate fosse  $\alpha_{j_h}$ . Ne segue che la prima ad essere rivisitata è necessariamente una riga. Supponiamo che tale riga sia una  $a^{(i_h)}$  diversa da  $a^{(i_0)}$ , dunque  $a^{(i_h)} = a^{(i_\ell)}$ , con  $h > \ell > 0$ . Poiché le righe vengono scelte alternamente rosse e blu,  $\ell$  e  $h$  hanno la stessa parità. Allora le colonne  $\alpha_{j_{h-1}}$  e  $\alpha_{j_{\ell-1}}$  hanno entrambe un 1 su  $a^{(i_h)}$  e fanno parte di uno stesso mate di una riga diversa da  $a^{(i_h)}$ . Ne segue che  $\alpha_{j_{h-1}} = \alpha_{j_{\ell-1}}$ , assurdo. Dunque la prima riga o colonna ad essere rivisitata è necessariamente la riga  $a^{(i_0)}$ . Supponiamo che ciò accada al passo  $h$ , cioè  $a^{(i_h)} = a^{(i_0)}$ . Ancora per l'alternanza dei colori nella scelta delle righe,  $h$  è pari. Allora le righe indicizzate con  $i_0, i_1, \dots, i_{h-1}$  e le colonne indicizzate con  $j_0, j_1, \dots, j_{h-1}$  formano un circolante pari (nella figura,  $h = 8$ ):

|             |  |       |       |       |       |       |       |       |             |   |  |  |  |  |  |  |   |   |       |   |   |  |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |  |   |   |   |  |
|-------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|---|--|--|--|--|--|--|---|---|-------|---|---|--|--|--|--|--|--|---|-------|--|---|---|--|--|--|--|--|---|-------|--|--|---|---|--|--|--|--|---|-------|--|--|--|---|---|--|--|--|---|-------|--|--|--|--|---|---|--|--|---|-------|--|--|--|--|--|---|---|--|---|-------|--|--|--|--|--|--|---|---|---|--|
|             | $j_0$  | $j_1$ | $j_2$ | $j_3$ | $j_4$ | $j_5$ | $j_6$ | $j_7$ |             |   |  |  |  |  |  |  |   |   |       |   |   |  |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |  |   |   |   |  |
| $i$         | <table style="width: 100%; height: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_8 = i_0</math></td> <td style="text-align: center;">●</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">◇</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_1</math></td> <td style="text-align: center;">●</td> <td style="text-align: center;">◇</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">R</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_2</math></td> <td></td> <td style="text-align: center;">◇</td> <td style="text-align: center;">●</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_3</math></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">●</td> <td style="text-align: center;">◇</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">R</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_4</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">◇</td> <td style="text-align: center;">●</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_5</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">●</td> <td style="text-align: center;">◇</td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">R</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_6</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">◇</td> <td style="text-align: center;">●</td> <td></td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>i_7</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">●</td> <td style="text-align: center;">◇</td> <td style="text-align: center;">R</td> </tr> </table> |       |       |       |       |       |       |       | $i_8 = i_0$ | ● |  |  |  |  |  |  | ◇ | B | $i_1$ | ● | ◇ |  |  |  |  |  |  | R | $i_2$ |  | ◇ | ● |  |  |  |  |  | B | $i_3$ |  |  | ● | ◇ |  |  |  |  | R | $i_4$ |  |  |  | ◇ | ● |  |  |  | B | $i_5$ |  |  |  |  | ● | ◇ |  |  | R | $i_6$ |  |  |  |  |  | ◇ | ● |  | B | $i_7$ |  |  |  |  |  |  | ● | ◇ | R |  |
| $i_8 = i_0$ | ●  |       |       |       |       |       |       | ◇     | B           |   |  |  |  |  |  |  |   |   |       |   |   |  |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |  |   |   |   |  |
| $i_1$       | ●  | ◇     |       |       |       |       |       |       | R           |   |  |  |  |  |  |  |   |   |       |   |   |  |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |  |   |   |   |  |
| $i_2$       |  | ◇     | ●     |       |       |       |       |       | B           |   |  |  |  |  |  |  |   |   |       |   |   |  |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |  |   |   |   |  |
| $i_3$       |  |       | ●     | ◇     |       |       |       |       | R           |   |  |  |  |  |  |  |   |   |       |   |   |  |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |  |   |   |   |  |
| $i_4$       |  |       |       | ◇     | ●     |       |       |       | B           |   |  |  |  |  |  |  |   |   |       |   |   |  |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |  |   |   |   |  |
| $i_5$       |  |       |       |       | ●     | ◇     |       |       | R           |   |  |  |  |  |  |  |   |   |       |   |   |  |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |  |   |   |   |  |
| $i_6$       |  |       |       |       |       | ◇     | ●     |       | B           |   |  |  |  |  |  |  |   |   |       |   |   |  |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |  |   |   |   |  |
| $i_7$       |  |       |       |       |       |       | ●     | ◇     | R           |   |  |  |  |  |  |  |   |   |       |   |   |  |  |  |  |  |  |   |       |  |   |   |  |  |  |  |  |   |       |  |  |   |   |  |  |  |  |   |       |  |  |  |   |   |  |  |  |   |       |  |  |  |  |   |   |  |  |   |       |  |  |  |  |  |   |   |  |   |       |  |  |  |  |  |  |   |   |   |  |

Ma allora, se sostituiamo nel mate  $\bar{x}^{(i)}$  le colonne  $\alpha_{j_0}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_{2h-2}}$  con le colonne  $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_3}, \dots, \alpha_{j_{2h-1}}$ , otteniamo un mate di  $a^{(i)}$  che non contiene  $\alpha_{j_0}$ .  $\square$

Come corollario abbiamo la prova della Congettura 1 (e dunque della Congettura 2) per matrici 2-regolari:

**Corollario 2.2.18** *Sia  $A$  una matrice 0,1 bilanciata e critica di dimensione  $m \times n$ . Se  $A$  è 2-regolare sulle colonne, allora  $n = m - 1$ . In particolare il sistema  $Ax = \mathbf{1}$  è privo di soluzioni ed è, quindi, un sistema critico.*

*Dimostrazione.* Sia  $m = 2k + 1$ . Per la Proposizione 2.2.17,  $A$  ha esattamente due 1 per ogni riga rossa, dunque sulle righe rosse ci sono complessivamente  $2k$  elementi non nulli. E poiché ogni colonna di  $A$  contiene esattamente un 1 rosso, si conclude che  $n = 2k = m - 1$ .

Il resto è già stato dimostato a pagina 42.  $\square$

Allora, se  $A$  è una matrice 0,1 bilanciata, critica e 2-regolare sulle colonne, vale l'Osservazione di pagina 43.

Se  $A$  è una matrice 0,1 ed è 2-regolare sulle colonne, l'ipergrafo che ha  $A$  come matrice di incidenza dei nodi verso gli archi è un grafo privo di cappi (e viceversa: la matrice di incidenza dei nodi verso gli archi di un grafo privo di cappi è 2-regolare sulle colonne). Si vede facilmente che  $A$  è bilanciata se e solo se tale grafo non contiene cicli di lunghezza dispari, cioè se e solo se tale grafo è bipartito. Vogliamo dare una caratterizzazione delle matrici 0,1 bilanciate, critiche e 2-regolari sulle colonne legata alle proprietà dei grafi ad esse associati. Prima, però, sono necessari alcuni richiami (per i dettagli rimandiamo a [8]).

Un grafo  $G = (V, E)$  si dice un *albero* se  $G$  è connesso ed aciclico (cioè non contiene cicli). Non è difficile dimostrare che le tre seguenti proposizioni sono equivalenti:

- (i)  $G$  è un albero;
- (ii)  $G$  è connesso e  $|E| = |V| - 1$ ;
- (iii)  $G$  è aciclico e  $|E| = |V| - 1$ .

Dati due nodi di un albero, esiste uno ed un solo cammino che li congiunge; la lunghezza di tale cammino è la *distanza* tra i due nodi. Scegliere una *radice*  $r$  per un albero  $G$  significa fissare il nodo  $r$  di  $G$  come "riferimento" dell'albero: il nodo  $w$  sarà detto un nodo *figlio* del nodo  $v$  se esiste un arco di estremità  $v$  e  $w$  e se la distanza tra  $w$  e  $r$  è maggiore (di una unità) della distanza tra  $v$  e  $r$ . Un nodo privo di nodi figli è una *foglia* dell'albero.

Inoltre, ogni albero è un grafo bipartito; anzi, dato un albero esiste una ed una sola maniera di suddividere i suoi nodi in due classi in modo tale che ogni arco abbia un'estremità in ciascuna classe.

Ricordiamo, infine, che un *matching* di un grafo  $G$  è un insieme  $M$  di archi di  $G$  tale che ogni nodo di  $G$  sia un'estremità di al più un arco di  $M$ . Il matching  $M$  è detto un *matching perfetto* se ogni nodo di  $G$  è l'estremità di esattamente un arco di  $M$ . Se  $A$  è la matrice di incidenza dei nodi verso gli archi di  $G$ , un insieme  $M$  di archi di  $G$  è un matching (risp. matching perfetto) di  $G$  se e solo se, detto  $\bar{x}$  il vettore 0, 1 le cui componenti non nulle sono quelle corrispondenti agli archi di  $G$  contenuti in  $M$ , si ha  $A\bar{x} \geq \mathbf{1}$  (risp.  $A\bar{x} = \mathbf{1}$ ). Chiaramente, condizione necessaria affinché  $G$  abbia un matching perfetto è che il numero di nodi di  $G$  sia pari.

Enunciamo ora il lemma e la proposizione che ci forniscono la caratterizzazione delle matrici 0, 1 bilanciate, critiche e 2-regolari sulle colonne.

**Lemma 2.2.19** *Sia  $A$  una matrice 0, 1 bilanciata e critica. Supponiamo che  $A$  sia 2-regolare sulle colonne e sia  $G$  il grafo che ha  $A$  come matrice di incidenza dei nodi verso gli archi. Allora  $G$  è un albero.*

*Dimostrazione.* Sia  $m \times n$  la dimensione di  $A$ . Supponiamo che  $G$  non sia connesso. Allora, poiché in  $A$  le righe blu sono una in più delle righe rosse, una delle componenti connesse di  $G$ , diciamo  $G'$ , contiene più nodi corrispondenti a righe blu che nodi corrispondenti a righe rosse. A meno di permutazioni delle righe e delle colonne, la matrice  $A$  assume questa forma:

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & A'' \end{array} \right],$$

dove  $A'$  è la matrice di incidenza dei nodi verso gli archi di  $G'$ . Poiché  $A$  è critica, dovrebbe esistere una soluzione del problema di set partitioning associato a  $[A' \mid 0]$ , assurdo perché  $A$  induce su  $[A' \mid 0]$  una colorazione che rispetta le condizioni del Teorema 1.3.12.

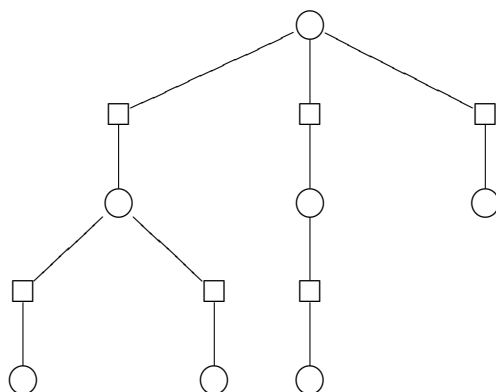
Dunque  $G$  è un grafo connesso. D'altra parte, dalla Proposizione 2.2.18 segue che  $n = m - 1$ , quindi il numero di nodi di  $G$  supera di una unità quello degli archi. Allora  $G$  è un albero.  $\square$

**Proposizione 2.2.20** *Sia  $A$  una matrice 0, 1 2-regolare sulle colonne. Sia  $G$  il grafo che ha  $A$  come matrice di incidenza dei nodi verso gli archi. Allora  $A$  è bilanciata e critica se e solo se  $G$  ha le seguenti proprietà:*

- (i)  $G$  è un albero;
- (ii) detta  $(V_1, V_2)$  l'unica partizione dell'insieme dei nodi di  $G$  (con  $|V_1| \geq |V_2|$ ) che rende il grafo bipartito,  $|V_1| - |V_2| = 1$ ;
- (iii) i nodi in  $V_2$  hanno grado 2.

*Dimostrazione.* Mostriamo la necessità delle tre condizioni. Per il Lemma 2.2.19,  $G$  è un albero. Definiamo  $V_1$  (risp.  $V_2$ ) come l'insieme dei nodi di  $G$  corrispondenti a righe blu (risp. rosse) di  $A$ . Poiché ogni colonna di  $A$  contiene esattamente un 1 rosso ed un 1 blu, questa suddivisione dei nodi rende il grafo bipartito; e chiaramente  $|V_1| - |V_2| = 1$ . Inoltre, grazie alla Proposizione 2.2.17, i nodi in  $V_2$  hanno grado 2.

Dimostriamo ora la sufficienza. Supponiamo che  $G$  sia un grafo con le proprietà (i), (ii) e (iii). Allora l'aspetto di  $G$  è simile a questo (i cerchi indicano i nodi di  $V_1$ , i quadrati quelli di  $V_2$ ):

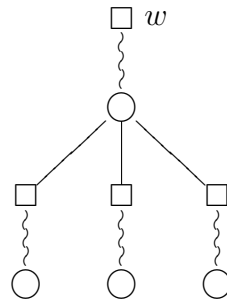


Poiché  $G$  è un albero,  $G$  non contiene cicli e quindi  $A$  è bilanciata. Proviamo che  $A$  è una matrice critica. Chiaramente non esiste una soluzione del problema di set partitioning associato ad  $A$ : se  $\bar{x}$  fosse un vettore  $0, 1$  tale che  $A\bar{x} = \mathbf{1}$ , allora le colonne corrispondenti alle componenti non nulle di  $\bar{x}$  individuerebbero un insieme di archi che sarebbe un matching perfetto di  $G$ , assurdo perché  $G$  ha un numero dispari di nodi.

Per la Proposizione 2.2.14, ci basta ora mostrare che ogni riga blu di  $A$  ha un mate. Sia dunque  $a^{(i)}$  una riga blu di  $A$ . Come sappiamo dalla Proposizione 2.2.7, le colonne che hanno un 1 su  $a^{(i)}$  non possono comparire in un mate di  $a^{(i)}$ . Allora il problema di trovare un mate di  $a^{(i)}$  equivale al problema di trovare un matching perfetto del grafo  $G \setminus v$  ottenuto togliendo da  $G$  il nodo  $v \in V_1$  corrispondente alla riga  $a^{(i)}$  (quando togliamo il nodo  $v$  da  $G$ , eliminiamo anche tutti gli archi di  $G$  incidenti in  $v$ ). Costruiamo dunque un matching perfetto di  $G \setminus v$ .

Chiamiamo nodi blu gli elementi di  $V_1$ , nodi rossi quelli di  $V_2$ . Quando leviamo il nodo  $v$ , il grafo  $G$  si spezza in un numero di componenti connesse uguale al numero di nodi (necessariamente rossi) adiacenti a  $v$ . Chiaramente ci basta trovare un matching perfetto per ognuna di tali componenti. Sia dunque  $w$  un nodo (rosso) adiacente a  $v$  in  $G$  e sia  $C$  la componente connessa di  $G \setminus v$  contenente  $w$ . Se scegliamo  $w$  come radice dell'albero  $C$ , possiamo costruire un matching perfetto di  $C$  in modo molto semplice: basta scegliere, per ciascun nodo rosso di  $C$ , l'arco che lo unisce al suo unico nodo figlio. (Nella figura è

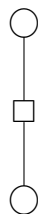
rappresentata una possibile componente connessa  $C$  di  $G \setminus v$ ; gli archi ondulati sono quelli che fanno parte del matching perfetto di  $C$  costruito nel modo appena descritto.)



□

**Esempio** La Proposizione 2.2.20 ci permette di costruire tutte le matrici 0, 1 bilanciate, critiche e 2-regolari sulle colonne. Vediamo gli esempi di dimensione più piccola (riportiamo, per ciascuna matrice, anche l'albero corrispondente). Indichiamo con  $m$  il numero di righe delle matrici.

Per  $m = 3$  esiste un'unica matrice 0, 1 bilanciata, critica e 2-regolare sulle colonne (unica a meno di permutazioni delle righe e delle colonne):



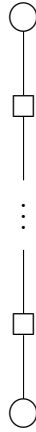
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \end{matrix}$$

Anche per  $m = 5$  c'è una sola matrice di questo tipo:



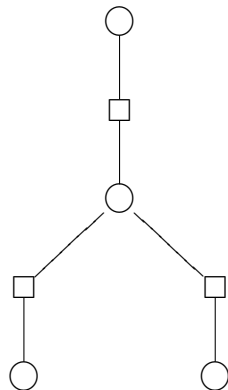
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \end{matrix}$$

Per  $m = 7$  ce ne sono due:



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \end{matrix}$$

e



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \end{matrix}$$

□

Come corollario della Proposizione 2.2.20 possiamo caratterizzare le matrici 0,1 bilanciate, critiche sulle righe e 2-regolari sulle colonne.

**Corollario 2.2.21** *Sia  $A$  una matrice 0,1 2-regolare sulle colonne. Sia  $G$  il grafo che ha  $A$  come matrice di incidenza dei nodi verso gli archi. Allora  $A$  è bilanciata e critica sulle righe se e solo se valgono le seguenti proprietà:*

- (i)  $G$  è un grafo bipartito;
- (ii) è possibile rimuovere archi da  $G$  in modo da ottenere un albero che abbia le proprietà (i), (ii) e (iii) della Proposizione 2.2.20.

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $A$  sia una matrice 0,1 bilanciata, critica sulle righe e 2-regolare sulle colonne. Poiché  $A$  è bilanciata,  $G$  è bipartito. Inoltre,

poiché  $A$  è critica sulle righe, è possibile selezionare un insieme di colonne di  $A$  in modo tale che la matrice  $\bar{A}$  formata da tali colonne sia critica. Allora il grafo che ha  $\bar{A}$  come matrice di incidenza dei nodi verso gli archi ha le proprietà (i), (ii) e (iii) della Proposizione 2.2.20. Ma tale grafo si ottiene rimuovendo da  $G$  gli archi corrispondenti alle colonne rimosse da  $A$ .

Viceversa, supponiamo che  $A$  sia una matrice 0, 1 2-regolare sulle colonne e che il grafo  $G$  corrispondente abbia le due proprietà dell'enunciato. Poiché  $G$  è bipartito,  $A$  è bilanciata. Sia  $\bar{G}$  un albero ottenuto tramite rimozione di archi da  $G$  e sia  $\bar{A}$  la sottomatrice di  $A$  corrispondente. Poiché  $\bar{G}$  ha le tre proprietà della Proposizione 2.2.20,  $\bar{A}$  è una matrice critica. Dunque ogni riga di  $A$  ha un mate. Resta da verificare che il problema di set partitioning associato ad  $A$  sia privo di soluzioni. Dato che  $\bar{A}$  è critica, possiamo parlare di righe rosse e di righe blu di  $\bar{A}$ , e quindi di  $A$ . Ma poiché un albero ammette un'unica suddivisione dei nodi che lo rende bipartito, tale classificazione delle righe di  $\bar{A}$  deve necessariamente coincidere con la suddivisione delle righe di  $A$  che segue dall'ipotesi che  $G$  è bipartito. Allora ogni colonna di  $A$  ha esattamente un 1 rosso ed 1 blu, dunque, per il Teorema 1.3.12, il problema di set partitioning associato ad  $A$  non ammette soluzioni.  $\square$

Dunque le matrici 0, 1 bilanciate, critiche sulle righe e 2-regolari sulle colonne sono tutte e sole le matrici che si ottengono da una matrice 0, 1 bilanciata, critica e 2-regolare sulle colonne aggiungendo colonne contenenti ciascuna esattamente un 1 rosso ed un 1 blu.

Mostriamo ora la Congettura 9 per matrici 2-regolari sulle colonne.

**Proposizione 2.2.22** *Sia  $A$  una matrice 0,1 bilanciata e critica. Se  $A$  è 2-regolare, allora  $A$  è modulare.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $A$  abbia dimensione  $m \times n$ . Sappiamo già dalla Proposizione 2.2.18 che  $n = m - 1$ . Diamo un algoritmo per ordinare le righe e le colonne di  $A$  in modo che  $A$  sia in forma modulare.

Chiamiamo  $G$  il grafo (albero, come visto) che ha  $A$  come matrice di incidenza dei nodi verso gli archi e fissiamo come radice  $r$  un qualunque nodo blu di  $G$ . Numeriamo i nodi e gli archi di  $G$  secondo il noto algoritmo di ricerca *depth-first* (diciamo che un nodo  $v$  è *saturato* se sono già stati scelti tutti gli archi incidenti in  $v$ ):

- $v_1 := r$ ;
- per  $1 \leq k \leq m - 1$ :
  - se il nodo  $v_k$  non è saturato, chiamiamo  $e_k$  un qualunque arco uscente da  $v_k$  che non è ancora stato scelto;

altrimenti, detto  $v$  il primo nodo non saturato che si incontra percorrendo l'unico cammino da  $v_k$  a  $r$ , chiamiamo  $e_k$  un qualunque arco uscente da  $v$  che non è ancora stato scelto;

- chiamiamo  $v_{k+1}$  l'unica estremità di  $e_k$  che non è ancora stata scelta.

Sostanzialmente, con questo algoritmo partiamo dalla radice e percorriamo un cammino fino ad una foglia, dopo di che risaliamo lungo lo stesso cammino e non appena giungiamo ad un nodo (necessariamente blu) da cui parte una diramazione non ancora percorsa, scendiamo nuovamente fino ad una foglia; e così via. Si capisce, quindi, che verranno presi tutti i nodi e tutti gli archi di  $G$ .

Ordiniamo le righe e le colonne di  $A$  in modo che per ogni  $k$  la riga  $a^{(k)}$  corrisponda al nodo  $v_k$  e la colonna  $\alpha_k$  corrisponda all'arco  $e_k$ . Analizziamo la struttura di  $A$ . Dato che per ogni  $k = 1, \dots, m$  i nodi  $v_k$  e  $v_{k+1}$  hanno colore diverso, si deduce che le righe di  $A$  che occupano una posizione dispari sono blu, mentre quelle di posto pari sono rosse. Inoltre osserviamo che quando viene scelto l'arco  $e_k$  ( $1 \leq k \leq m-1$ ), una sua estremità è necessariamente già stata presa in precedenza, mentre l'altra estremità sarà scelta come nodo  $v_{k+1}$ ; ne segue che la  $k$ -esima colonna di  $A$  contiene un 1 in  $(k+1)$ -esima posizione e solo zeri al di sotto di questo elemento. Un'altra considerazione utile è la seguente: se  $a^{(k)}$  è una riga rossa, allora i suoi due elementi non nulli si trovano in  $(k-1)$ -esima e  $k$ -esima posizione: segue dal fatto che quando scegliamo un nodo qualunque  $v_k$  (con  $k > 1$ ) uno degli archi incidenti in  $v_k$  è  $e_{k-1}$ ; se poi  $v_k$  è rosso, esso ha grado 2 e l'unico altro arco che ha  $v_k$  come estremità viene scelto come  $e_k$ .

Alla luce di tutte queste osservazioni, possiamo concludere che la matrice  $A$  ha una struttura di questo tipo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ? & 0 & ? & 0 & \cdots & ? & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ? & 0 & ? & 0 & \cdots & ? & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ? & 0 & \cdots & ? & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & ? & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \\ \vdots \\ \text{R} \\ \text{B} \end{matrix}$$

Verifichiamo che  $A$  è una matrice modulare. Fissiamo  $i \in \{1, \dots, m\}$  e sia  $\bar{x}$  l'unico mate di  $a^{(i)}$ . Indichiamo con  $C^{<i}$  l'insieme delle colonne prese da  $\bar{x}$  che occupano in  $A$  una delle prime  $i-1$  posizioni, con  $C^{\geq i}$  le altre colonne prese da  $\bar{x}$ . Chiaramente tutte le colonne di  $C^{<i}$  hanno gli elementi non nulli



nelle prime  $i$  posizioni. Dobbiamo mostrare che tutte le colonne di  $C^{\geq i}$  hanno i loro elementi non nulli nelle ultime  $m - i + 1$  posizioni. Supponiamo dapprima che  $a^{(i)}$  sia una riga blu:

$$A = \begin{array}{c} \alpha_{i-1}\alpha_i \\ \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & ? & 0 & ? & 0 & \dots & ? & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ? & 0 & ? & 0 & \dots & ? & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & ? & 0 & \dots & ? & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & ? & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \leftarrow a^{(i)} \\ \text{R} \\ \text{B} \\ \vdots \\ \text{R} \\ \text{B} \end{array} \end{array}$$

Se  $C^{\geq i}$  contenesse una colonna che ha un non nullo nelle prime  $i - 1$  posizioni, allora nell'insieme di righe  $\{a^{(1)}, \dots, a^{(i-1)}\}$ , le colonne di  $C^{\geq i}$  coprirebbero almeno una riga blu e nessuna riga rossa. Ma allora, in questo stesso insieme, le colonne di  $C^{< i}$  dovrebbero coprire più righe rosse che blu, il che è chiaramente impossibile, come si capisce dalla struttura della matrice  $A$ .

Supponiamo ora che  $a^{(i)}$  sia una riga rossa:

$$A = \begin{array}{c} \alpha_{i-1}\alpha_i \\ \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & ? & 0 & ? & 0 & \dots & ? & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ? & 0 & ? & 0 & \dots & ? & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & ? & 0 & \dots & ? & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & ? & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \\ \text{R} \leftarrow a^{(i)} \\ \text{B} \\ \text{R} \\ \text{B} \\ \vdots \\ \text{R} \\ \text{B} \end{array} \end{array}$$

Come prima, se  $C^{\geq i}$  contenesse una colonna che ha un non nullo nelle prime  $i - 1$  posizioni, allora nell'insieme di righe  $\{a^{(1)}, \dots, a^{(i-1)}\}$ , le colonne di  $C^{\geq i}$  coprirebbero almeno una riga blu e nessuna riga rossa. Ma allora, in questo stesso insieme, le colonne di  $C^{< i}$  dovrebbero coprire almeno tante righe rosse quante blu. Ma poiché  $\alpha_{i-1}$  è certamente contenuta in  $\bar{x}$ , nell'insieme di righe  $\{a^{(1)}, \dots, a^{(i-1)}\}$  le colonne di  $C^{< i} \setminus \{\alpha_{i-1}\}$  dovrebbero coprire più righe rosse che blu, assurdo.

Dunque tutti i mates rispettano la condizione di modularità.  $\square$

Infine, mostriamo la Congettura 10 per le matrici 2-regolari sulle colonne.

**Proposizione 2.2.23** *Sia  $A$  una matrice  $0,1$  bilanciata e critica. Supponiamo che  $A$  sia 2-regolare sulle colonne. Allora è possibile cancellare due righe e due colonne da  $A$  in modo che la matrice ottenuta sia critica.*

*Dimostrazione.* Sia  $G$  il grafo che ha  $A$  come matrice di incidenza dei nodi verso gli archi.  $G$  ha le proprietà (i), (ii) e (iii) della Proposizione 2.2.20. Sia  $v$  un qualunque nodo di grado 1 di  $G$  ( $v$  è ovviamente un nodo blu). Se chiamiamo  $\bar{G}$  il grafo ottenuto rimuovendo da  $G$  il nodo  $v$  e l'unico nodo adiacente a  $v$  (che è rosso),  $\bar{G}$  soddisfa le proprietà (i), (ii) e (iii) della Proposizione 2.2.20. Allora la matrice di incidenza dei nodi verso gli archi di  $\bar{G}$  è ancora critica (e tale matrice si ottiene da  $A$  cancellando due righe e due colonne).  $\square$

# Bibliografija

- [1] M. Conforti, G. Cornuéjols, A. Kapoor, K. Vušković, Perfect matchings in balanced hypergraphs, *Combinatorica* 16, 1996, pp. 325-329.
- [2] M. Conforti, G. Cornuéjols, K. Vušković, *Balanced Matrices*, 2003.
- [3] D. R. Fulkerson, A. Hoffman, R. Oppenheim, On balanced matrices, *Mathematical Programming Study* 1, 1974, pp. 120-132.
- [4] A. Huck, E. Triesch, Perfect matchings in balanced hypergraphs — a combinatorial approach, *Combinatorica* 22, 2002, pp. 409-416.
- [5] G. L. Nemhauser, L. A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York, 1988, pp. 83-92.
- [6] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, Berlino, 2003.
- [7] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley, Chichester, 1986, pp. 44-46, 85-89, 99-104, 303-311.
- [8] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996.