UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI "M.FANNO"

DIPARTIMENTO DI AFFERENZA RELATORE
DIPARTIMENTO DI SCIENZE STATISTICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA

PROVA FINALE

"SCIENZA DEI NODI PER L'ECONOMIA"

RELATORE:

CH.MO PROF. ALESSANDRA DALLA VALLE

LAUREANDO: DAVIDE BORDOLI

MATRICOLA N. 1088776

ANNO ACCADEMICO 2016 – 2017

Introduzione

La scienza dei nodi è una disciplina recente, andata sviluppandosi sempre più negli ultimi 50 anni, che si occupa delle reti (network), ovvero insiemi di elementi taluni collegati ad altri da connessioni, che vanno così a formare una struttura di maglie. Questa materia dà una rappresentazione grafica e matematica alle reti, e costituendo queste la forma naturale e ricorrente della modalità con cui avvengono interazioni/relazioni tra elementi di un insieme, risulta applicabile a una moltitudine di discipline, dalle scienze informatiche (ad esempio reti di computer collegati online) alle neuroscienze (ad esempio reti neurali e studio dei flussi di impulsi collegati a determinati comportamenti) alle scienze economiche e sociali (ad esempio struttura dei Social Network e più in generale di gruppi di persone con focus su una determinata attività sociale/interattiva, insieme di imprese di uno stesso territorio/settore collegate da rapporti di natura commerciale/comunicativa, rapporti di scambio tra Paesi).

I problemi affrontati con l'utilizzo della scienza dei network in ambito economico e sociale sono molti, e il loro numero si accresce ogni giorno di più. L'importanza rivestita da questo strumento matematico è tale che si trova persino una letteratura didattica anglosassone sulla scienza dei nodi dedicata alla loro applicazione in campo economico. Tra questi troviamo in particolare *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning About a Highly Connected World* (Easley and Kleinberg, 2010), concentrato sulla parte qualitativa e interpretativa dei network, e *Social and Economic Networks* (Jackson, 2008), molto più quantitativo.

In questo elaborato spiegherò in una prima parte i concetti e il funzionamento di questa disciplina, definendo gli elementi che compongono una rete e mostrando come dalla configurazione che questa assume si possano ricavare preziose indicazioni sui componenti oggetto di studio. Parlerò quindi dei nodi e dei link, di vari indici che si possono ricavare dalla disposizione dei suddetti (derivandone dove possibile la formula algebrica) e cosa questi implichino. Terminerò questa sezione formulando esempi pratici di reti e di calcolo degli indici.

In una seconda parte passerò invece alla teoria dei giochi, strumento fondamentale quando l'oggetto di analisi è costituito da soggetti dotati di potere decisionale. Parlerò dunque di diverse tipologie di equilibrio e di come e in che situazioni teoria dei giochi e reti si integrano, sviluppando autonomamente degli esempi esplicativi di queste situazioni (social network formation, bargaining power, e in particolare peer effects).

Una volta fornita una buona conoscenza di questi strumenti di analisi, l'ultima parte sarà dedicata all'analisi di due paper che ne fanno approfondita applicazione, indagando argomenti a mio parere molto interessanti e di significativa rilevanza. Questi saranno:

- *Peer Effects in the Workplace* (Cornelissen, Dustmann e Schönberg, 2003), analisi degli effetti di complementarietà strategica nel mercato del lavoro;
- *A Strategic Model of Social and Economic Networks* (Jackson e Wolinsky, 1995), prezioso contributo allo studio degli equilibri (economici) nelle reti sociali.

1_ Concetti e rappresentazioni della scienza delle reti

1.1_ Link e struttura

In una rete costruita su un insieme di n elementi (detti nodi o vertici), ciascuno dei quali può avere da 0 (elemento isolato, non partecipante ad alcuna relazione) ad n-1 connessioni (in relazione con ogni altro nodo della rete). Quando ogni nodo è connesso con tutti gli altri si parla di grafo completo (complete network).
A seconda del tipo di relazione oggetto di analisi e delle caratteristiche che le si attribuiscono, si possono utilizzare caratterizzazioni delle connessioni differenti. La forma più semplice di link è quella che prevede solamente l'esistenza o non esistenza di una relazione tra due nodi, che possono dunque essere connessi o non connessi (ad esempio essere o non essere "amici" su Facebook). La rappresentazione grafica bidimensionale in questo caso risulta immediata, con i nodi identificati da punti e le connessioni rappresentate come linee con estremi i rispettivi nodi partecipanti alla relazione.

In alcuni casi può assumere importanza la direzione della relazione, che diventa dunque graficamente una "freccia", e tra due nodi A e B può così essere che: non sussista alcuna relazione, esista un link da A a B, esista un link da B ad A, esista sia un link da A a B sia uno da B ad A (ad esempio nelle relazioni commerciali, dove la direzione indica chi ha venduto il bene a chi). Si parla in questo caso di digrafo o grafo diretto (digraph o directed graph/network), mentre nel caso particolare in cui non sussistano link bidiretti (sia da A a B che da B ad A) si parla di grafo orientato (oriented graph/network).

In secondo luogo, può essere rilevante attribuire un valore di intensità alla connessione, e ciò viene risolto graficamente attribuendo spessori differenti ai link (ad esempio sempre nel caso di relazioni commerciali, o ancora di prestiti interbancari, dove l'ammontare degli scambi è una dimensione importante).

Altre volte ancora, si potrebbe voler distinguere tra relazioni positive e relazioni negative (ad esempio, guardando ad un gruppo di persone, si potrebbe voler rappresentare congiuntamente le relazioni di amicizia e le relazioni "di odio reciproco"). In questo caso le connessioni vengono rappresentate affiancate da un segno + (relazione positiva) o – (relazione negativa).

Infine, è possibile che alcune relazioni non debbano per forza essere bilaterali, ma possano anche sussistere in un solo individuo o oggetto, "tra lui e sé stesso" (ad esempio in un questionario valutativo dato a una classe, dove ogni membro devo giudicare sé stesso e gli altri). Graficamente questo viene risolto con una linea "circolare", che parte e termina nello stesso nodo.

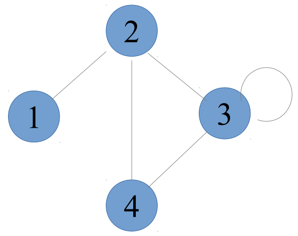
1.2_ Rappresentazione algebrica

Qualsiasi tipo di rete caratterizzata come visto sopra può essere rappresentata algebricamente dalla matrice delle adiacenze (adjacency matrix), una matrice quadrata i cui indici di riga e colonna sono dati dagli elementi della rete, opportunamente ordinati. Si avrà così che l'elemento *ij* (riga *i*, colonna *j*) indica la connessione dal nodo *i* al nodo *j*, e assumerà dunque valore 0 se la connessione è assente e 1 se è presente, spazierà tra 0 e il massimo attribuibile in caso vengano definite delle intensità, assumerà valori positivi o negativi in caso di relazioni così qualificate.

Di conseguenza, la riga *i* è il vettore dei link partenti da *i* verso gli altri nodi, mentre la colonna *i* è il vettore dei link entranti in *i*.

Generalmente la diagonale è costituita tutta da 0, a meno che non vi siano loop. Nei grafi non diretti (undirected networks) la matrice delle adiacenze è sempre simmetrica, dato che gli elementi *ij* e *ji* (link da *i* a *j* e link da *j* a *i*) si equivalgono.

Esempi:



Grafo non diretto

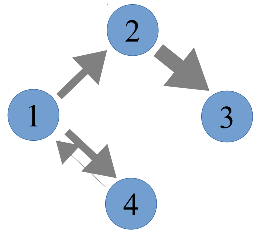
(con auto-relazioni)

Undirected Graph

(with self-links or loops)

matrice delle adiacenze:

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&1&1&0 \end{pmatrix}$$



Grafo diretto

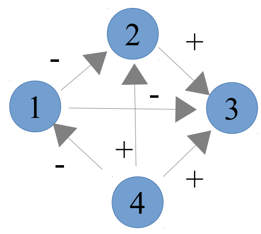
(con intensità)

Directed Graph

(with intensities)

matrice delle adiacenze:

$$\begin{pmatrix} 0&2&0&2\\ 0&0&3&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$$



Grafo orientato completo

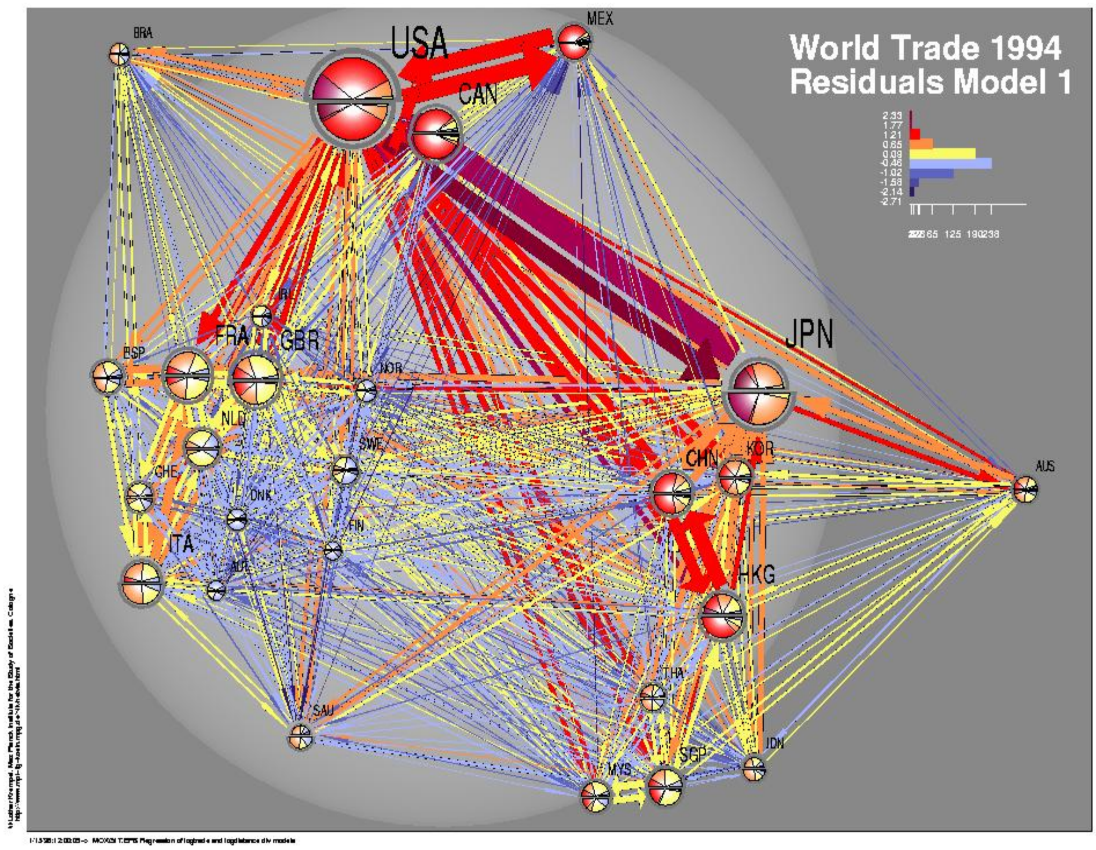
(con relazioni positive/negative)

Complete Oriented Graph

(with positive/negative relationships)

matrice delle adiacenze:

$$\begin{pmatrix} 0&-1&-1&0\\ 0&0&+1&0\\ 0&0&0&0\\ -1&+1&+1&0 \end{pmatrix}$$



Grafo illustrante le relazioni di commercio internazionale. Fonte: "https://www.cmu.edu/joss/content/articles/volume4/KrempelPlumper.html"

1.3_ Grado e percorsi

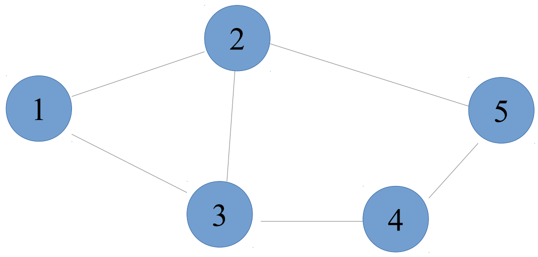
La maniera più semplice e diretta con cui la struttura della rete spiega alcune differenze tra nodi, o li condiziona in modo diverso, è sintetizzata dal grado in uscita (out-degree) e dal grado in entrata (in-degree) di un nodo. Preso l'elemento *i*, questi altro non sono che, rispettivamente, la somma dei link originati in *i* e diretti verso altri nodi e la somma dei link entranti in *i* partenti da altri nodi.
Algebricamente, data la matrice delle adiacenze nxn A (a_{ij} è l'elemento riga *i* colonna *j*):

- out-degree di *i* →, $d_i^{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ ovvero la somma delle entrate della riga *i*;
- in-degree di *i* → $d_i^{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$, ovvero la somma delle entrate della colonna *i*.

In caso di grafo non diretto, queste due misure si equivalgono (ricordando che la matrice delle adiacenze è in questi grafi simmetrica).
Il grado può costituire un debole indicatore della rilevanza (centralità) dell'elemento all'interno dell'insieme (avere più connessioni può significare essere in una posizione migliore/avvantaggiata/di potere/più centrale nel network). In particolare, si fa riferimento a un indice "normalizzato" che va da 0 a 1, la centralità di grado (degree centrality): $c_i = \frac{d_i^{in}}{n-1}$.
Questa misura tuttavia non sfrutta appieno il potenziale esplicativo della rete, fermandosi a considerare solamente le relazioni dirette, "di primo grado". Ma la rilevanza in termini di centralità di un nodo nella struttura può non discendere solo dal numero di elementi a cui è connesso, ma anche dalla rilevanza di questi, e dunque, sempre nell'accezione di centralità, dal numero di connessioni di questi ultimi, e dal numero di connessioni di quelli con cui questi ultimi sono connessi, e così via.

Prima di elaborare un tale indicatore di rilevanza, è opportuno rifarsi al concetto di percorso (path). Un percorso è una sequenza di connessioni che porta da un certo punto della rete ad un altro, la cui lunghezza è data dal numero di connessioni che lo costituiscono. In particolare spesso l'attenzione viene focalizzata sul percorso più corto (shortest path) da nodo a nodo tra quelli alternativamente possibili.

Ad esempio nel seguente network



i possibili percorsi per andare da 1 a 5 sono quattro: 1-2-5 (di lunghezza 2), 1-3-2-5 (di lunghezza 3), 1-3-4-5 (di lunghezza 3) e 1-2-3-4-5 (di lunghezza 4).

Algebricamente, la matrice delle adiacenze (booleana) può essere utilizzata per trovare tutti i possibili percorsi all'interno della rete.

Ricordiamo che la riga *i* rappresenta i link uscenti da *i* mentre la colonna *j* rappresenta i link entranti in *j*. Quindi se moltiplichiamo la riga *i* per la colonna *j* otteniamo $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} * a_{kj}$, dove $a_{ik} * a_{kj} = 1$ se esiste sia un link che va da *i* a *k* sia un link che va da *k* a *j* (e dunque *i* e *j* sono collegati da un percorso di lunghezza 2 attraverso *k*), $a_{ik} * a_{kj} = 0$ altrimenti.

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} * a_{kj}$ è dunque la conta dei percorsi di lunghezza 2 per andare da *i* a *j*, ma non essendo altro che il prodotto riga per colonna, ne deriva che la matrice A^2 = A x A è la matrice avente come elementi il numero di percorsi di lunghezza 2 tra nodi (a_{ij}^2 = #percorsi lunghezza 2 tra *i* e *j*).

Risulta ancora che la riga *i* di A^2 rappresenta il vettore dei percorsi di lunghezza 2 per andare da i agli altri nodi, e dunque moltiplicata per la colonna *j* di A restituisce $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 * a_{kj}$, dove $a_{ik}^2 * a_{kj} = c$ con $c = 1,2,3,\ldots$ se esistono 1,2,3,… percorsi di lunghezza 2 da *i* a *k* e un link da *k* a *j* (percorsi di lunghezza 3 da *i* a *j*). A^3 è dunque la matrice riportante la conta dei percorsi di lunghezza 3. In generale così A^k conterrà la conta dei percorsi di lunghezza k.

Particolare rilevanza assume la matrice $X = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n$, nella quale si sostituisce poi a tutte le entrate non nulle il valore 1. In questo modo, se tra due nodi esiste almeno un percorso, di lunghezza da 1 ad n (lunghezza massima che può avere lo shortest path tra due nodi, passando cioè attraverso tutti gli altri), l'elemento relativo avrà valore 1, altrimenti 0. La matrice indica dunque se due nodi possono in qualche modo comunicare/essere messi in relazione, o se sono invece completamente sconnessi. Viene perciò chiamata reachability matrix (matrice delle raggiungibilità). Questa matrice è utile ad identificare i componenti (componente: gruppo di nodi nella rete collegati tutti direttamente o indirettamente, ma sconnessi da qualsiasi altro nodo non facente parte del gruppo).

1.4_ Altri indici di rilevanza

1.4.1_ Betweenness

Una più profonda indicazione di centralità di un nodo o link rispetto all'intero network può essere data dalla betweenness, che altro non è che la somma dei percorsi che passano attraverso quel nodo (link), considerando solamente gli shortest paths tra tutte le coppie di nodi. Questa misura indica quanto è "trafficato" un nodo o collegamento, e dunque quanto partecipe al tessuto di relazioni che è la rete. In particolare, questo indicatore risulta più utile per identificare congiunzioni tra (quasi) differenti componenti, in quanto, essendo necessarie per mettere in comunicazione qualsiasi nodo di una zona altamente connessa con qualsiasi nodo di un'altra, esse risultano maggiormente trafficate rispetto a connessioni o nodi posti al centro di una fitta rete ma lontani da altre.

1.4.2_ Katz-Bonacich centrality

Ogni nodo può quindi essere legato ad altri attraverso percorsi diversi e di varia lunghezza, e dunque venire influenzato dagli altri in modi differenti. Di questo fatto tiene conto la centralità Katz-Bonacich, misura che dipende dalle centralità dei nodi "vicini" (a cui si è connessi direttamente) incorporando in questa relazione endogena gli effetti su un nodo di tutti i percorsi che in lui terminano. La rilevanza di un nodo, dipendendo sia dal numero di connessioni che dalla rilevanza di queste, diviene così autoreferenziale.

In particolare, la centralità è data da una costante, che assumiamo uguale per tutti (ma potrebbe anche essere presa come variabile da individuo a individuo), a cui viene sommata la centralità dei vicini (nodi dai quali giunge un link) moltiplicata per un fattore $\delta<1$ (in modo da attutire sempre più l'effetto della rilevanza all'aumentare della distanza). La formula generale di centralità di un vertice è dunque $c_i=\alpha+\delta(a_{1i}*c_1+...+a_{ni}*c_n)$, dove a_{ji} è ancora l'elemento *ij* della matrice delle adiacenze.

Svolgendo uno step in più della formula:

$$c_i = \alpha + \delta \sum_{j=1}^{n} a_{ji} * c_j = \alpha + \delta \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ji} + \delta^2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} a_{ji} * c_k$$

e qui si intuisce come prosegue.

Notiamo che la dipendenza dalla centralità delle connessioni dei vicini è moltiplicata per il fattore elevato alla distanza del percorso, e un effetto da *k* a *i* viene contato solo se esiste un percorso di lunghezza due da *k* a *i*. Vediamo quindi che esplodendo la formula si ottiene:

$$c_i = \alpha \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \delta^k * a_{ji}^k \right)$$

con a_{ji}^k ad indicare il numero di percorsi partenti da *j* e terminanti in *i* di lunghezza k.

La formula generale in forma matriciale è:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} a_{11} \,..\, a_{n1} \\ a_{12} \,..\, a_{n2} \\ . \;\; .. \;\; . \\ . \;\; .. \;\; . \\ a_{1n} \,..\, a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$

ovvero, definendo c come il vettore colonna delle centralità e Id come vettore colonna contenente tutti 1, $c = \alpha Id + \delta A^T c$. L'esplosione porta a $c = \alpha \left(Id + \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k (A^k)^T \right)$.

Tuttavia, a condizione che A sia invertibile (determinante diverso da 0: tutte le colonne, ovvero le configurazioni di connessione diretta in entrata, o tutte le righe, ovvero le configurazioni di connessione diretta in uscita, una per ogni nodo, sono linearmente indipendenti, non possono dunque essere replicate dalle altre come percorsi tutti di uguale lunghezza), esiste una forma chiusa per la computazione delle centralità:

$$c = \alpha Id + \delta A^T c \rightarrow c(Id - \delta A^T) = \alpha Id \rightarrow c = \alpha (Id - \delta A^T)^{-1} Id$$

Questo indice dà molte più informazioni sulla rilevanza nel network di un nodo rispetto alla centralità di grado, ed è una formula che vedremo ripresentarsi spesso nei modelli che prevedono un'influenza reciproca tra individui.

1.4.3_ PageRank

Un altro indice di rilevanza basato sull'intera struttura del network è il PageRank, chiamato così dal nome dell'ideatore Larry Page. Questo algoritmo, utilizzato come base per l'attribuzione del ranking alle pagine web da parte di Google come funzione dei richiami (hyperlink) fatti da altre pagine e dall'importanza di queste, conferisce all'intera rete 1 "unità di rilevanza", distribuita tra i diversi nodi e in continuo scorrere tra essi. Inizialmente, ogni nodo ha la stessa rilevanza, ovvero $PR_i^0=\frac{1}{n},\forall i$.

Successivamente si definiscono k step, e per ogni step ogni vertice trasmette la sua rilevanza ai nodi a cui è connesso (in uscita), dividendola tra loro in parti uguali. Non viene mai né creata né distrutta nuova rilevanza, sicché la somma di tutti i PageRank è sempre 1. Si ha così che il PageRank di un nodo è dato dalla somma delle frazioni di PageRank allo step precedente (PageRank / grado in uscita) dei nodi che presentano link verso di lui:

$$PR_i^t=\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\frac{PR_j^{t-1}}{d_j^{out}},\forall t\in[1,k]$$

Al primo step dunque:

$$PR_i^1=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\frac{1}{d_j^{out}}$$

con PageRank minori di quello iniziale per alcuni nodi e maggiori per altri.

A meno che non siano presenti uno o più nodi con nessun link in uscita o solamente loop in uscita, ad un certo step, formalizzabile come $k\rightarrow\infty$, i PageRank raggiungeranno un valore di equilibrio, che rimarrà costante nelle successive trasmissioni di rilevanza:

$$PR_i^{\infty}=\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\frac{PR_j^{\infty}}{d_j^{out}}$$

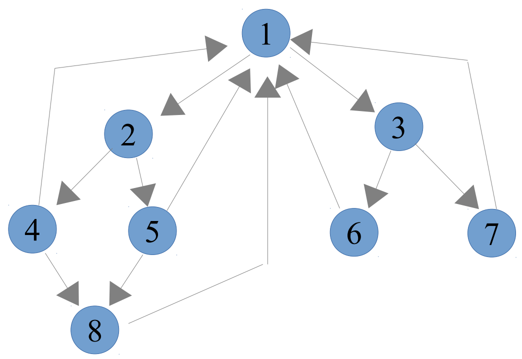
Nel caso invece vi siano nodi con $d^{out}=0\wedge d^{in}\neq 0$ (o solo loop in uscita), per $k\rightarrow\infty$ il PageRank di tutti gli altri nodi tenderà a 0, accumulandosi su questi tutta la rilevanza.

In forma matriciale, l'equilibrio è dato dalla relazione $P=N^T P$, con P vettore contenente i PageRank e N una matrice riportante come elemento n_{ij} la frazione di PageRank di *i* che va a *j*. E' dunque simile alla matrice delle adiacenze, con 0 nelle stesse entrate e $\frac{1}{d_i^{out}}$ nelle entrate pari a 1 della riga i. Questa forma chiusa permette di trovare i PageRank di equilibrio attraverso la

risoluzione di un sistema a n+1 equazioni (si aggiunge a quelle rappresentate dalla matrice il vincolo che la somma dei PageRank sia 1) ed n incognite, dove n è il numero di nodi.
Il PageRank è rappresentativo di un altro tipo di algoritmo di rilevanza che si presta bene alla misurazione di esternalità ed influenze indirette nei network.

1.4.3_ Esempi

Ad esempio, nel seguente network:



Possiamo innanzitutto notare che il nodo 1 svolge un ruolo di congiunzione tra due emisferi. Ciò è confermato dalla sua betweenness, la più alta della rete: per 1 passano tutti gli shortest paths da uno dei nodi di sinistra a uno dei nodi di destra (e viceversa), ovvero 4*3=12 percorsi, nonché ovviamente tutti gli shortest paths da 1 ad un altro nodo (7, ma questi sono presenti nella betweenness di ogni nodo appartenente al componente). Già questo lo renderebbe il nodo con la betweenness maggiore, ma in più si tratta di un grafo diretto, e dunque il numero di percorsi sale: innanzi tutto contano anche i percorsi da un qualsiasi nodo di destra ad un qualsiasi nodo di sinistra (altri 12) e e quelli da un qualsiasi nodo a 1 (altri 7), inoltre si aggiungono tutti i percorsi da 8 verso uno degli altri nodi a sinistra (3) , da 4 e da 5 a 2 (2) e da 6 e 7 a 3 (2). La sua betweenness totale è dunque 45.
Guardiamo ora ad esempio quella del nodo 4. Per esso passano tutti gli shortest paths da 4 verso gli altri e viceversa (14), metà di quelli da 1,2,3,6 e 7 verso 8 ($^5/_2$) e metà di quello da 2 verso 1 (½), per un totale di 17.
Calcoliamo ora il PageRank. Inizialmente a tutti viene assegnato 1/8, dopodiché per i successivi step: da 1 si divide tra 2 e 3, da 2 si divide tra 4 e 5, da 3 si divide tra 6 e 7, da 4 si divide tra 1 e 8, da 5 si divide tra 1 e 8, da 6 va a 1, da 7 va a 1 e da 8 va a 1. Vediamo quindi alcuni step:

1	1/8	1/8*1/2 + 1/8*1/2 (da 4 e da 5) + 1/8*3 (da 6,7 e 8)= 1/2	5/16	5/32	13/32	..
2	1/8	1/8 * 1/2 (da 1) = 1/16	1/4	5/32	5/64	..
3	1/8	1/8 * 1/2 (da 1) = 1/16	1/4	5/32	5/64	..
4	1/8	1/8 * 1/2 (da 2) = 1/16	1/32	1/8	5/64	..
5	1/8	1/8 * 1/2 (da 2) = 1/16	1/32	1/8	5/64	..
6	1/8	1/8 * 1/2 (da 3) = 1/16	1/32	1/8	5/64	..
7	1/8	1/8 * 1/2 (da 3) = 1/16	1/32	1/8	5/64	..
8	1/8	1/8 * 1/2 + 1/8 * 1/2 (da 4 e da 5) = 1/8	1/16	1/32	1/8	..

Esistono dei valori di equilibrio? Indaghiamo con la formula $P=N^T P$, che, data la matrice delle

adiacenze A = $\begin{pmatrix} 01100000 \\ 00011000 \\ 00000110 \\ 10000001 \\ 10000001 \\ 10000000 \\ 10000000 \\ 10000000 \end{pmatrix}$, diviene $\begin{pmatrix} PR_1 \\ PR_2 \\ PR_3 \\ PR_4 \\ PR_5 \\ PR_6 \\ PR_7 \\ PR_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} PR_1 \\ PR_2 \\ PR_3 \\ PR_4 \\ PR_5 \\ PR_6 \\ PR_7 \\ PR_8 \end{pmatrix}$ e porta al

sistema: $\begin{cases} PR_1=1/2*PR_4+1/2*PR_5+PR_6+PR_7+PR_8 \\ PR_2=1/2*PR_1 \\ PR_3=1/2*PR_1 \\ PR_4=1/2*PR_2 \\ PR_5=1/2*PR_2 \\ PR_6=1/2*PR_3 \\ PR_7=1/2*PR_3 \\ PR_8=1/2*PR_4+1/2*PR_5 \\ PR_1+PR_2+PR_3+PR_4+PR_5+PR_6+PR_7+PR_8=1 \end{cases}$, con soluzioni $\begin{cases} PR_1=4/13 \\ PR_2=2/13 \\ PR_3=2/13 \\ PR_4=1/13 \\ PR_5=1/13 \\ PR_6=1/13 \\ PR_7=1/13 \\ PR_8=1/13 \end{cases}$.

Calcolare invece la centralità di Katz-Bonacich con la formula chiusa $c=\alpha(Id-\delta A^T)^{-1} Id$ non è possibile, dato che det(A)=0. Si può infatti notare che l'elevata simmetria del network fa sì che la configurazione in entrata di 2 sia esattamente replicabile da 3, e così entrata di 4 da 5 ed entrata di 6 da 7. Replicabilità che c'è anche in molte configurazioni in uscita.

2_ Teoria dei giochi e interdipendenza dei comportamenti

2.1_ Definizione di un gioco

La teoria dei giochi è uno strumento utile a studiare situazioni in cui degli attori devono prendere delle decisioni il cui effetto e la conseguente soddisfazione ricavata dipendono, oltre che dalla decisione dell'attore in sé, dalle decisioni degli altri. Si tratta di un agire razionale davanti a una riconosciuta interdipendenza tra i comportamenti dei soggetti decisori. Tale situazione è chiamata gioco, ed è definita da 3 elementi:

1. un insieme di partecipanti, chiamati giocatori (nel network, i nodi);
2. un insieme di alternative di comportamento per ogni giocatore, chiamate strategie;
3. un insieme di outcome, ritorni, e in particolare una combinazione di essi (uno per ogni giocatore) per ogni possibile combinazione di strategie, chiamati payoff.

L'obiettivo di ogni giocatore è quello di massimizzare il proprio payoff, prendendo in questi termini la migliore decisione rispetto a quelle che saranno prese dagli altri. Emerge qui il concetto di best-reply, che consiste nella miglior risposta che un giocatore potrebbe dare alle azioni che egli crede gli altri intraprenderanno.

2.2_ Equilibri

Quando una combinazione di strategie è costituita da best-reply per tutti i giocatori (tutti stanno rispondendo nel modo, per loro, migliore rispetto alle strategie degli altri) si parla di equilibrio di Nash (Nash Equilibrium), equilibrio appunto in quanto nessuno desidererà cambiare strategia (deviare) al rimanere costanti le altre, perché così peggiorerebbe solamente il proprio payoff.

Quando una certa strategia è per un giocatore sempre best-reply, verso qualsiasi combinazione di strategie scelta dagli altri, la strategia in questione è detta dominante. Se esiste almeno una strategia dominante per ogni giocatore, esisterà sicuramente un equilibrio di Nash (in strategie pure: ciascuno definisce a priori una scelta sicura. Contrapposto al concetto di strategie miste, che prevedono la randomizzazione di alcune scelte secondo determinati valori di probabilità).

Mentre l'equilibrio di Nash si definisce verificando la possibilità di variazione di strategia da parte di un solo giocatore (per ogni giocatore), l'equilibrio paretiano e l'equilibrio sociale si definiscono a

livello dell'intero insieme di possibili combinazioni, senza riguardi per le variazioni necessarie nelle scelte.
Il primo è un outcome nel quale nessun payoff di nessun giocatore può essere migliorato passando ad una diversa combinazione senza peggiorare il payoff di qualcun altro (non è possibile un miglioramento paretiano nei payoff), il secondo invece è una combinazione che massimizza la somma dei payoff di tutti i giocatori (equilibrio efficiente secondo il principio di compensazione potenziale: se chi raggiunge un payoff migliore guadagna di più di quanto perde chi raggiunge un payoff minore, la transizione a quella combinazione è conveniente).
La frequente non coincidenza di queste tipologie di equilibrio è la ragione per cui il suggerimento che spesso si ricava dalla teoria dei giochi è una spinta alla cooperazione, al comunicare e accordarsi secondo una razionalità collettiva anziché meramente individuale.

2.3_ Dilemma del prigioniero

Portiamo ad esempio il gioco più famoso, il "Dilemma del Prigioniero", proposto nel agli anni cinquanta del secolo scorso da Albert Tucker.
Due criminali (i giocatori, A e B) vengono fermati e accusati di un reato, dopodiché sono messi in due stanze diverse ed interrogati singolarmente e contemporaneamente. Ciascuno quindi può, senza sapere cosa farà l'altro, prendere una tra due decisioni (strategie), confessare (C) o non confessare (NC) il reato accusando l'altro. I payoff sono i seguenti:

B\A	NC	C
NC	1 , 1	9 , 0
C	0 , 9	5 , 5

Dove il numero a sinistra delle virgola è l'outcome per il prigioniero B e quello a destra per il prigioniero A. I payoff sono espressi in anni di reclusione, e dunque l'obiettivo dei giocatori è quello di minimizzare il proprio. Nell'ottica della best reply, vediamo che confessare è sempre la scelta migliore: se l'altro non confessa, sono libero anziché dover scontare 1 anno; se l'altro confessa, sconto 5 anni per collaborazione anziché 9. Confessare è dunque strategia dominante, e in una logica di razionalità individuale la combinazione C,C è l'inevitabile equilibrio di Nash. Tale equilibrio non è tuttavia assolutamente Pareto-efficiente, dato che l'equilibrio NC,NC prevede un miglioramento in entrambi i payoff (e dunque paretiano). Anche gli equilibri NC,C e C,NC sono pareto-efficienti, e non pareto-dominanti rispetto a C,C ma comunque socialmente più efficienti, ma l'unico socialmente ottimo è NC,NC, che tuttavia non può essere raggiunto senza il ricorso ad un accordo/razionalità collettiva tra i due giocatori.

2.4_ Teoria dei giochi nella scienza dei nodi

Questo potenziale trade-off tra razionalità individuale e collettiva e dunque equilibri di Nash e socialmente efficienti si presenta anche quando il potere di scelta viene dato ai nodi di un network. Il contatto e la fusione tra teoria dei giochi e scienza dei nodi avviene in particolare in tre situazioni, che possono sovrapporsi:

- nella cosiddetta Social Network Formation, ovvero l'analisi della formazione delle reti sociali, dove la scelta degli individui, la strategia, riguarda direttamente il se formare una connessione con un determinato altro giocatore oppure no, con chi stabilire una relazione, con il payoff influenzato dalla struttura del network e dalle scelte su di essa;
- nelle analisi dove gli attori devono contrattare tra loro, per decidere come dividersi una certa ricchezza, quando il potere negoziale di ciascuno è determinato dalla struttura della rete e dalla posizione occupata in essa;
- in presenza delle cosiddette complementarietà o sostituibilità strategiche ("peer effects). Queste sono presenti in genere quando la scelta strategica riguarda una quantità di attività/azione (ad esempio quanto sforzo impiegare, quanta quantità produrre), e si ha che un incremento di attività da parte di un giocatore induce gli altri (a cui è connesso) ad aumentare la loro attività (nel caso di complementarietà) o a diminuirla (nel caso di sostituibilità). Qui la struttura del network non è oggetto di scelta ma è data, e definisce il funzionamento e gli effetti di tali complementarietà o sostituibilità.

Una consuetudine molto comune nei modelli di contrattazione stabilisce il potere negoziale come conseguenza dell'opzione di uscita (outside option), ovvero in altre parole la miglior alternativa possibile a disposizione dell'individuo. Prendiamo ad esempio una rete dove i nodi devono realizzare un progetto in coppia, generando così un'utilità pari a 1 da spartirsi a loro arbitrio. Ogni nodo può partecipare ad un solo progetto, e può collaborare solo con un nodo con cui è connesso. L'opzione d'uscita è rappresentata dal numero di alternative (altri nodi con cui realizzare il progetto) che un vertice ha nel trattare con un altro, ed è dunque data dal grado – 1 ($v_i = d_i - 1$).

La struttura è la seguente:

I nodi 1 e 4 hanno un solo individuo con cui collaborare e nessuna alternativa, dunque la loro opzione d'uscita è pari a 0. I nodi 2 e 3 invece hanno sempre un'alternativa, e dunque opzione d'uscita pari a 1. Nel decidere con chi realizzare il progetto, i nodi cercano di massimizzare la propria utilità. Avremo così che i nodi 2 e 3, avendo lo stesso potere negoziale, si troverebbero a doversi spartire l'utilità generata dal progetto comune, ricevendo così ½ a testa, che è però meno della loro opzione d'uscita: 2 e 3 non possono accettare questa collaborazione. Ma se 3 si rapporta con 4 e 2 con 1, avendo maggior potere negoziale 2 e 3 possono spingere gli altri due ad accettare il minimo sufficiente per partecipare, ovvero la loro opzione d'uscita, che altro non è che 0. 2 e 3 si appropriano così di tutta l'utilità del progetto che realizzano.

2.5_ Focus: la complementarietà strategica

2.5.1_ Definizione situazione

Un esempio di complementarietà strategica potrebbe essere il caso di studenti che devono decidere quanto sforzo compiere in vista di un esame, dove, quando due studenti studiano insieme (connessi nel network), l'uno ricava un vantaggio dallo sforzo dell'altro proporzionale allo sforzo che lui stesso esercita.

Formalizziamo partendo dal caso del singolo studente che deve decidere lo sforzo s che massimizza la sua funzione di utilità, ovvero:

$$u(s)=B(s)-C(s)=\alpha s-\frac{1}{2}s^2$$

con $C(s)=\frac{1}{2}s^2$ che fa sì che il costo marginale sia crescente in s ($\frac{dC}{ds}=s$) e rende la funzione di utilità concava, così da avere un massimo relativo nel punto di sella. Il beneficio marginale è invece costante e uguale a α.

Risolvendo il problema di ottimizzazione abbiamo:

$$\frac{du(s)}{ds}=0=\alpha-s\rightarrow\dot{s}=\alpha$$

lo sforzo ottimo è pari al coefficiente α.

2.5.2_ Due studenti

Inseriamo ora un secondo studente, e la complementarietà strategica: se uno dei due esercita più sforzo, l'altro ne trae un vantaggio tanto maggiore quanto maggiore è il proprio. In altre parole:

$$\frac{du_1(s_{1,}s_2)}{ds_2}>0 \quad \text{e} \quad \frac{du_1(s_{1,}s_2)}{ds_2\,ds_1}>0$$

Per rendere questo effetto nel modo più semplice, la nuova funzione di utilità diventa:

$$u_i(s_1 s_2)=\alpha s_i-\frac{1}{2}s_i^2+\delta s_1 s_2$$

con $i=1,2$ e $\delta>0$

Alternativamente si può scrivere come $u_1(s_1 s_2)=(\alpha+\delta s_2)s_1-\frac{1}{2}s_1^2$ (invertendo 1 e 2 per lo studente 2), il costo rimane cioè invariato mentre il beneficio che lo studente ottiene dal suo sforzo dipende anche dallo sforzo dell'altro.

Si tende così a creare un moltiplicatore che incrementa il livello ottimo di sforzo rispetto al caso precedente di individuo singolo. A quello sforzo da parte di entrambi infatti, il giocatore 1 sarà motivato a studiare un po' di più essendosi alzato il suo beneficio marginale. Una volta aumentato lo sforzo, anche il giocatore 2 vorrà aumentare il proprio. Al che l'1 vorrà ulteriormente incrementare il suo (sempre di una minore quantità), e così via.

Risolviamo ora il problema di ottimizzazione nell'ottica di equilibrio di Nash in gioco simultaneo:

1. ogni giocatore ha una credenza/convinzione su quali saranno le strategie degli altri;
2. ogni giocatore sceglie che comportamento adottare ottimizzando la scelta sulla base delle proprie credenze;
3. le decisioni "degli altri" coincidono con le credenze in precedenza possedute.

Avremo quindi $\bar{s}_2$ e $\bar{s}_1$ quali credenze, rispettivamente, dello studente 1 sulla scelta di sforzo del del 2 e viceversa. Per lo studente 1 dunque:

$$\underset{s_1}{max}(\alpha+\delta\bar{s}_2)s_1-\frac{1}{2}s_1^2 \;\rightarrow\; \frac{du_1}{ds_1}=0 \rightarrow s_1=\alpha+\delta\bar{s}_2$$

e allo stesso modo per lo studente 2.

In equilibrio le credenze devono coincidere con le scelte, e dunque:

$$\begin{cases} \dot{s}_1=\alpha+\delta\dot{s}_2 \\ \dot{s}_2=\alpha+\delta\dot{s}_1 \end{cases} \;\rightarrow\; \dot{s}_1=\dot{s}_2=\frac{\alpha}{1-\delta}$$

Ne deriva che va assunto $\delta<1$, altrimenti l'equilibrio prevederà uno sforzo negativo, il che non ha significato. Per qualsiasi $0<\delta<1$ lo sforzo in equilibrio degli studenti raggiungerà un valore più alto del caso dello studente singolo. Questo è l'effetto endogeno della complementarietà strategica, che assume la forma di un moltiplicatore sociale. Infatti lo sforzo è più grande del caso singolo di 1/1-δ volte, ovvero di $(1+\delta+\delta^2+\delta^3+...)$ volte, che altro non rappresenta che il continuo rimbalzare da studente a studente dell'effetto di uno shock incrementale iniziale (il semplice inserimento della complementarietà se si parte dall'equilibrio del caso individuale) nei due sforzi:
se Giulio incrementa il proprio sforzo di Δ, Paolo lo incrementerà di $\delta\,\Delta$, e quindi Giulio ancora di $\delta^2\,\Delta$, e Paolo di $\delta^3\,\Delta$, e così via.

2.5.3_ Network di studenti

Estendiamo ora questo modello ad una ipotetica rete di studenti, dove il link (che non ha direzione ne intensità: $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij} = 0,1$) indica che due ragazzi studiano insieme, potendo così trarre vantaggio dai reciproci sforzi. Ogni studente avrà quindi funzione di utilità

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \alpha s_i - \frac{1}{2} s_i^2 + \delta \sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j s_i$$

dove s_{-i} è il vettore degli sforzi degli studenti diversi da i.

La condizione di ottimo da cui derivare gli sforzi diviene dunque $\dot{s}_i = \alpha + \delta \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \dot{s}_j$, nientemeno che la centralità Katz-Bonacich con parametri α e δ, e il vettore di sforzi ottimi s può determinarsi come $s = \alpha (Id - \delta A^T)^{-1} Id$.

La posizione nella rete è dunque fondamentale nella scelta dello studente, che internalizza la struttura del network e prende una decisione che tiene conto dei diversi percorsi che inducono complementarietà dirette e indirette.

Possiamo aggiungere varietà al modello con due modifiche:

- l'utilità marginale direttamente ricavabile dal proprio sforzo è diversa per ogni studente;
- la complementarietà strategica discende dallo sforzo medio delle connessioni dirette di uno studente.

Avremo quindi:

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \alpha_i s_i - \frac{1}{2} s_i^2 + \delta s_i \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} s_j}{d_j} = \alpha_i s_i - \frac{1}{2} s_i^2 + \delta s_i \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} s_j$$

con $\bar{a}_{ij}=\frac{a_{ij}}{d_j}$ elemento di una matrice delle adiacenze “pesata” (link divisi per il grado del nodo definente la colonna).

Il modello econometrico che tenta di stimare questi effetti assume che α_i possa essere diverso per tre principali ragioni:

- caratteristiche individuali (ricchezza, background familiare, età, capacità…);
- le caratteristiche medie delle connessioni dirette, originanti gli effetti esogeni (ricchezza media degli amici…);
- gli elementi comuni per tutti i membri della rete, originanti gli effetti correlati (caratteristiche della scuola e della didattica, preparazione degli insegnanti…).

Se assumiamo che le caratteristiche di un individuo siano riassunte in un solo parametro, c_i , e che gli effetti correlati siano pochi o nulli ed esattamente identici per ciascun studente, possiamo scrivere:

$$\alpha_i=\alpha+\beta c_i+\gamma\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}c_j$$

dove β rappresenta l’effetto individuale e γ l’effetto esogeno.

Avremo quindi come condizione massimizzante:

$$s_i=\alpha+\beta c_i+\gamma\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}c_j+\delta\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}s_j$$

e dunque come modello econometrico per la stima:

$$s_i=\alpha+\beta c_i+\gamma\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}c_j+\delta\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}s_j+\varepsilon_i$$

2.6_ Problema di Mansky

Nello stimare gli effetti, si rischia di incorrere nel problema di riflessione, portato inizialmente alla luce da Mansky (1993). Nel suo modello Mansky adottò un network completo con self-loop, ovvero in cui a_{ij} = 1 per ogni i=1,…,n e j=1,…,n. Vediamo che così facendo, nel nostro caso, sia $\gamma\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}c_j$ che $\delta\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}s_j$ sono uguali per ogni i=1,…,n, e, prendendo il valore atteso di s_i , possiamo scrivere:

$$E(s_i)=E(\alpha+\beta c_i+\gamma\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}c_j+\delta\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}s_j+\varepsilon_i)=\alpha+\beta c_i+\gamma\bar{c}+\delta\bar{s}$$

Se sommiamo tutte queste equazioni (una per ogni i) e le dividiamo per n, otteniamo:

$$\bar{s}=\alpha+(\beta+\gamma)\bar{c}+\delta\bar{s} \quad\rightarrow\quad \bar{s}=\frac{\alpha}{1-\delta}+\frac{\beta+\gamma}{1-\delta}\bar{c}$$

In altre parole, lo sforzo medio e le caratteristiche medie sono linearmente correlate. C'è dunque un problema di collinearità che ci impedisce di individuare separatamente gli effetti esogeni e quelli endogeni, o in altre parole di determinare se e come sia l'individuo ad influenzare il gruppo o il gruppo ad influenzare l'individuo. Questo è il problema di riflessione.

Per meglio comprenderlo, sostituiamo l'ultimo risultato nelle equazioni iniziali:

$$s_i=\alpha+\beta c_i+\gamma\bar{c}+\delta(\frac{\alpha}{1-\delta}+\frac{\beta+\gamma}{1-\delta}\bar{c})=\frac{\alpha}{1-\delta}+\beta c_i+\frac{\gamma+\delta\beta}{1-\delta}\bar{c}$$

Il modello econometrico di stima sarà dunque $s_i=A+Bc_i+C\bar{c}$, ma stimando A, B e C non è possibile ottenere tutti e quattro i parametri α, β, γ e δ, e in particolare non questi ultimi due, che rappresentano rispettivamente l'effetto esogeno e l'effetto endogeno. Ciò può essere un problema rilevante dato che i due effetti funzionano con meccanismi molto differenti (mente l'effetto endogeno origina un moltiplicatore sociale, l'effetto esogeno è diretto e non si propaga attraverso la rete) e dunque sono sensibili a differenti politiche d'azione.

Il problema di identificazione trovato da Mansky non è però sempre presente. Esistono infatti diverse condizioni sul network che garantiscono l'identificazione. Una di queste è la presenza di triangoli aperti, ovvero due nodi scollegati fra loro ma entrambi connessi ad uno stesso altro vertice. Questo infatti permette di identificare la decisione di un nodo estremo grazie all'influenza dell'altro. Algebricamente, questa condizione si sostanzia nel fatto che, per alcune (non tutte) coppie $i\neq j$, $a_{ij}=0$ ma $a_{ij}^2\neq 0$. Questo significa che non possiamo scomporre A^2 in termini di I e A, cioè non possiamo trovare α e β tali per cui $A^2 = \alpha I + \beta A$.

3_ A Strategic Model of Social and Economic Networks

3.1_ Oggetto dell'analisi

In questa analisi i due autori prendono in considerazione individui che possono decidere se formare nuovi link (e con chi) e se rescinderne di esistenti, valutando le conseguenze in termini di efficienza e di stabilità del network. L'efficienza implica l'esistenza di un valore del grafo, aggregato dell'utilità dei singoli nodi, e in particolare un grafo è efficiente se il suo valore è maggiore/uguale a quello di qualsiasi altra possibile struttura (a partire dagli stessi nodi). Si tratta in altre parole di un'efficienza secondo principio di compensazione potenziale. Vi è poi una regola di allocazione, che spiega come viene distribuito il valore/la produttività della rete tra i singoli nodi. L'utilità dunque genera in prima battuta il valore della struttura, ma la valutazione degli individui è basata sul reddito posteriore all'allocazione del valore, che potrebbe non coincidere con le utilità produttive.

La definizione di utilità, e quindi di benefici e costi, degli individui varia a seconda del tipo di relazione presa in considerazione, ovvero a seconda dell'oggetto scambiato/trasmesso (informazioni, beni, servizi), ma venendo istanziata sempre in forma generale e dunque facilmente declinabile al caso particolare.
Il potere di creare e eliminare link assegnato agli individui porta a definire la nozione di stabilità. La creazione di un link necessita di volontà bilaterale, mentre l'eliminazione solo di volontà unilaterale. Ne deriva che una struttura è stabile quando:

- in presenza di un link tra i e j, l'utilità di entrambi è maggiore di quella in una struttura identica eccetto che per la mancanza di tale link;
- in assenza di un link tra i e j, se l'utilità di uno aumenta con la creazione del link l'utilità dell'altro deve diminuire.

Notiamo che la stabilità si rifà alla nozione di Pareto-efficienza, infatti l'utilità di nessuno può aumentare senza che diminuisca quella di qualcun altro. Non vi coincide però perfettamente, dato che un network potrebbe essere Pareto-efficiente pur senza essere stabile. Ciò è dato dalla sufficienza di volontà unilaterale per rescindere un link (l'altro individuo ha vantaggio a mantenerlo), modifica che non costituisce miglioramento paretiano, e potrebbe non essere un miglioramento anche dal punto di vista della compensazione potenziale.

Un network stabile implica invece chiaramente un equilibrio di Nash, dato che ognuno sta dando la risposta migliore (best-reply) alle scelte degli altri.

3.2_ Primo modello: rete comunicativa

3.2.1_ Definizione situazione

La prima tipologia di rete presa in analisi è quella di un network comunicativo, di scambio di informazioni, che potrebbe essere ad esempio il design del sistema comunicativo intraorganizzativo. Gli individui beneficiano anche delle connessioni indirette, ma il beneficio che si può trarre da un altro nodo è unico (non esistono complementarietà strategiche ed effetti endogeni, ci si avvantaggia dell'informazione che un nodo può offrire una volta sola attraverso il percorso che ci lega a lui, beneficio che diminuisce all'aumentare della lunghezza di tale percorso: la qualità dell'informazione è deteriorata). Comunicare (creare un link) è ovviamente costoso, e dunque la scelta dell'individuo si baserà sul confronto tra beneficio ricavato indirettamente, beneficio dalla connessione diretta e costo di costituirla.

La produttività dell'individuo i diviene quindi:

$$u_i = w_{ii} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \delta^{t_{ij}} w_{ij} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} c_{ij}$$

dove t_{ij} rappresenta la lunghezza dello shortest path tra i e j (posto uguale a ∞ se non vi è alcun percorso) e insieme a $0<\delta<1$ fa sì che il vantaggio tratto dall'informazione di quel nodo diminuisca all'aumentare della distanza.

L'utilità dell'individuo è qui uguale alla sua produttività (allocazione speculare) e il valore totale del network è pari alla somma delle utilità individuali.

3.2.2_ Analisi efficienza

Il primo caso analizzato è quello simmetrico, di universalità di costi e benefici marginali, cioè con $c_{ij} = c$ per ogni ij e $w_{ij} = 1$ per ogni $i \neq j$ ($w_{ii} = 0$). La regola di allocazione non viene considerata, in quanto si guarda all'efficienza (basata sul valore della rete) e non alla stabilità (basata sulle utilità individuali).

Intuitivamente, un semplice equilibrio è il network completo, dove ogni individuo è connesso a ciascuno degli altri. Perché ciò avvenga, deve sempre essere conveniente creare un link quando questo non c'è, quindi deve essere preferibile stabilire un link diretto quando si è nella miglior alternativa possibile, ovvero in contatto tramite uno shortest path di lunghezza 2:

$$\delta - c > \delta^2 \rightarrow c < \delta - \delta^{2.}$$

Quando questa condizione non è soddisfatta, diviene sempre più conveniente essere connessi da un percorso di lunghezza 2 piuttosto che direttamente. La situazione migliore sarebbe dunque quella di massimizzare i collegamenti di lunghezza 2. Purtroppo non esiste una configurazione composta esclusivamente di connessioni di lunghezza 2, dunque l'obiettivo sarà di minimizzare i link diretti mantenendo possibilmente tutti gli altri shortest path a lunghezza 2.
Intuitivamente, la soluzione che pare più plausibile è quella della configurazione "a stella": viene "sacrificata" la produttività di un nodo che diventa centrale, a cui (e solo a lui) tutti gli altri sono connessi. In questo modo tutti gli altri nodi si trovano nella situazione ottimale: un solo collegamento diretto con il vertice centrale e verso tutti gli altri percorsi di lunghezza 2.

Il ragionamento di Jackson e Wolinsky è il seguente:
si consideri un network costituito da m individui, con $k \geq m-1$ link tra essi (la rete è costituita da un unico componente, dunque m-1 è il numero minimo di link). Il valore generato da queste connessioni dirette è $2k(\delta - c)$ (2 volte per ogni link, portando ognuno utilità a 2 nodi), ed essendo tutti i nodi indirettamente collegati, rimangono al massimo $\frac{m(m-1)}{2} - k$ collegamenti indiretti, che possono avere al massimo (se di lunghezza 2, come nel caso della stella) valore $2\delta^2$. Dunque il valore massimo che può assumere la rete è Valore link diretti + Valore link indiretti di lunghezza 2 = $k(2\delta - 2c) + \delta^2(m(m-1) - 2k)$. Se fosse una stella il suo valore sarebbe $(m-1)(2\delta - 2c) + (m-1)(m-2)\delta^2$.

Sottraendo al valore massimo ottenibile il valore della stella otteniamo $(k-(m-1))(2\delta - 2c - 2\delta^2)$. Dato che il secondo termine è < 0 (poiché per assunzione c> $\delta - \delta^2$), notiamo che il valore massimo di questa differenza è 0 (quando k= m-1), negativo altrimenti (k > m-1): il numero minimo di link diretti porta la rete ad avere lo stesso valore della stella, un numero maggiore porta ad avere un valore minore. Ciò discende comunque intuitivamente dalla condizione che il percorso di lunghezza 2 apporti maggiore utilità del link diretto.

Possiamo inoltre affermare che la stella è la configurazione più efficiente poiché una struttura alternativa con lo stesso numero di link diretti avrebbe qualche collegamento indiretto di lunghezza maggiore di 2, e pertanto generante una produttività minore.

E' sufficiente infine notare che, posto k=m-1 e forma a stella, l'incremento di m porta ad un aumento del valore della rete, per dimostrare che un unico componente a stella genera maggior valore di una rete costituita da più stelle separate (e dunque più piccole).
Ovviamente la configurazione a stella è accettabile, purché il suo valore sia positivo:

$$(n-1)(2\delta-2c)+(n-1)(n-2)\delta^2>0 \rightarrow 2\delta-2c+\delta^2(n-2)>0 \rightarrow c<\delta+\frac{(n-2)}{2}\delta^2$$

Se invece $c>\delta+\frac{(n-2)}{2}\delta^2$ la configurazione efficiente è quella di assenza di link.

3.2.3_ Analisi stabilità

Introduciamo ora il problema della regola di allocazione, analizzando la stabilità quando l'utilità individuale coincide con la propria produttività.
Chiaramente, nella situazione $c<\delta-\delta^{2.}$ il network completo è stabile, oltre che il più efficiente, essendo sempre meglio per ciascun nodo creare un link diretto che essere indirettamente collegato.
Per $\delta-\delta^2<c<\delta+\frac{(n-2)}{2}\delta^2$ la stella è la forma più efficiente, tuttavia per essere stabile è necessario che creare un link sia, pur essendo meno conveniente di un percorso di lunghezza 2, comunque a utilità positiva, altrimenti il nodo centrale preferirà isolarsi: $\delta-c>0 \rightarrow c<\delta$.
Dunque la stella è efficiente e stabile per $\delta-\delta^2<c<\delta$, ma non è l'unica configurazione stabile: se $\delta-\delta^3<c<\delta$ anche una linea risulta stabile (equilibrio di Nash), per quanto non efficiente (ma non pareto-dominata dalla stella, essendo questa una struttura peggiore per il nodo centrale), mentre se $\delta-\delta^2<c<\delta-\delta^3$ risulta stabile anche una rete circolare, pur essendo sempre non efficiente (ma ancora non pareto-dominata dalla stella).
Per $\delta<c<\delta+\frac{(n-2)}{2}\delta^2$ la stella sarebbe ancora la struttura efficiente, tuttavia non risulta qui più stabile. La stabilità può essere data esclusivamente da una rete dove ogni vertice ha almeno due connessioni (se un individuo ne ha solo una, il nodo con cui è accoppiato vorrà rescinderla, poiché da lui ricava solo il beneficio della sua informazione, minore del costo del link, e nessuna informazione indiretta da altri nodi) o nessuna, rete che è ovviamente inefficiente. Tra queste c'è anche dunque il network vuoto, che per $c>\delta+\frac{(n-2)}{2}\delta^2$ diviene la configurazione efficiente.

3.3_ Modelli specifici successivi

Successivamente aggiungono al modello la possibilità di trasferimenti monetari tra nodi, che riflettono di fatto decisioni sull'allocazione del valore totale generato: la regola di allocazione non è più utilità = produttività ma viene decisa dagli individui stessi su base negoziale (assegnando a ciascun nodo un certo potere negoziale determinato dalla sua posizione nella rete, e in particolare dal numero di link).

Questo non porta ovviamente cambiamenti nel caso $c<\delta-\delta^2$, nel quale il network completo continua ad essere efficiente e stabile. In esso infatti tutti i nodi hanno lo stesso numero di link (n-1) e dunque lo stesso potere negoziale, cosicché l'utilità continua a coincidere con la produttività.

Le cose cambiano invece quando $\delta-\delta^2<c<\delta$. In questa situazione infatti, il potere negoziale del vertice centrale può essere talmente elevato da far far sì che si appropri di una fetta troppo grande del valore generato, spingendo i nodi periferici a creare nuovi link fra loro per aumentare il proprio potere negoziale e accrescere la propria utilità, diminuendo però la propria produttività e il valore totale della rete. La nuova configurazione dunque, per quanto stabile, non sarà più efficiente. Il valore del costo c per il quale la struttura a stella non è più stabile dipende dal numero di nodi costituenti la rete. Allo stesso tempo, ne risulta che la stabilità può venire raggiunta da una rete composta da più componenti, anziché da uno unico.

Il paper procede con la costruzione e l'analisi di altri modelli specifici, mostrando come spesso efficienza e stabilità non riescano a coincidere. A questo punto gli autori passano alla formulazione di un modello generale, dove produttività, valore e allocazione sono funzioni da definire, con l'obiettivo di verificare se fissando liberamente la regola di allocazione sia possibile trovarne una per la quale esista sempre almeno una configurazione efficiente che sia stabile.

3.4_ Equilibri nel modello generale

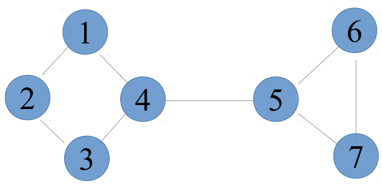
In primo luogo viene preso in esame l'insieme di regole di allocazione definite come anonime e "component balanced".

Il primo concetto si riferisce al dipendere dell'utilità allocata esclusivamente sulla produttività del nodo e sulla sua posizione nel network in relazione all'intera struttura (potere negoziale), non quindi da altre caratteristiche spurie quali ad esempio il nome/etichetta del nodo o preferenze del pianificatore centrale (nel caso l'allocazione sia appannaggio di un pianificatore).

Il concetto di "component balance" si riferisce invece al fatto che il valore generato da un componente viene redistribuito esclusivamente tra i nodi appartenenti a quel componente, e non diffuso nell'intera rete.

Ciò che gli autori mettono in luce, facendo un esempio con una particolare funzione di valutazione (determinante la produttività dei link e il valore della rete), è che, in un network con 3 o più nodi, non esiste una regola di allocazione anonima e component balanced per la quale sia possibile avere una configurazione efficiente che sia anche stabile, e dunque un equilibrio di Nash che massimizzi il valore della rete/economia. Essendo anonimato e component balance due caratteristiche non solo verosimili, ma molto plausibili e comuni per una funzione allocativa, questo risultato appare rilevante. Ciò che dice non è però che non sia possibile trovare una struttura allo stesso tempo efficiente e stabile con una simile regola di allocazione, ma bensì che ciò è possibile solo con alcune funzioni di valutazione.
In particolare, con le funzioni di valutazione che rispettano, insieme alla struttura della rete, la monotonia in link critici ("critical link monotonicity"). Un link critico è un link che, se viene rescisso, aumenta il numero di componenti. In altre parole, è l'unica connessione tra due insiemi di nodi (insiemi che possono anche essere costituiti da un unico nodo) che sarebbero altresì separati.

Esempio:



Il collegamento 4-5 è un link critico.

La monotonia in link critici consiste nel fatto che, data una struttura con i suoi link critici, se uno di questi viene eliminato il valore della rete diminuisce. Alternativamente, il valore dei due componenti separati è minore del valore dei due uniti da quel link critico. Questa condizione appare facilmente e frequentemente soddisfatta nella realtà.

Il valore principale di questo paper, per quanto quasi esclusivamente accademico e difficilmente declinabile ad applicazioni pratiche, si trova nella vasta esplorazione, da un punto di vista generale e dunque comprensivo di moltissime specificazioni, della formazione di reti sociali ed economiche ad opera di attori perseguenti il proprio interesse individuale, argomento sul quale la letteratura precedente non si era mai profondamente inoltrata, almeno non ad un tale livello di astrazione a valenza globale. Il paper e i suoi risultati aprono ad un nuovo approccio all'indagine degli equilibri economici e della loro efficienza.

4_ Peer Effects in the Workplace

4.1_ Oggetto dell'analisi

In questo paper gli autori indagano la presenza di "peer effects" nell'ambiente lavorativo e le ripercussioni nel mercato del lavoro. Il frequente contatto tra collaboratori infatti facilita la reciproca influenza. In particolare, si parla di complementarietà strategiche di due tipi:

- la pressione sociale, o peer pressure, che si verifica nei lavoratori che hanno una produttività minore rispetto a quella dei collaboratori, o rispetto a quanto ritenuto socialmente accettabile/normale. E' plausibile infatti che questi provino un senso di colpa, vergogna, per la loro prestazione inferiore, e siano pertanto spinti a migliorarsi;
- lo spillover di conoscenza, o knowledge spillover, che si verifica in mansioni generalmente ad alto livello di conoscenze. Lavorando l'uno accanto all'altro, è plausibile che i lavoratori imparino l'uno dall'altro e costruiscano abilità che altrimenti non avrebbero.

L'esistenza di queste due tipologie di peer effects è stata anteriormente verificata da altri lavori, che hanno però sempre trattato solo una di queste complementarietà e sempre restringendo l'analisi ad una occupazione o azienda specifica. L'obiettivo del presente paper è quello di testarne l'esistenza e la consistenza su un ampio spettro di lavoratori, aziende e occupazioni, in modo da averne una visione più generale sull'intero mercato del lavoro. Inoltre, anziché fermarsi ad analizzarne gli effetti sulla produttività, gli autori fanno un passo ulteriore indagandone le ripercussioni sul salario, per capire se questi aumenti di produttività indotti dalle complementarietà strategiche siano premiati dalle aziende sotto forma di una paga maggiore.

4.2_ Modello teorico

Il modello teorico di base prevede due tipi di soggetti, dei principali (le aziende) e degli agenti (i lavoratori), entrambi perseguenti la massimizzazione del proprio interesse. In particolare, l'utilità del lavoratore è data dalla differenza tra salario percepito e costo sostenuto per esercitare lo sforzo lavorativo (che è oggetto di scelta da parte del lavoratore), mentre l'utilità dell'azienda è data dalla differenza tra la produttività totale (somma delle produttività individuali, che dipendono dallo sforzo compiuto dai lavoratori) e la somma dei salari pagati (il salario è determinato dalla contrattazione tra azienda e lavoratore, e viene assunto come crescente nella produttività individuale, riflettendo l'idea che l'impresa tenta di incentivare lo sforzo individuale, non osservabile ma parte dei fattori determinanti la produttività del lavoratore).

4.2.1_ Produttività dei lavoratori

La produttività individuale viene quindi definita come:

$$f_i = y_i + \epsilon_i = a_i + (1 + \lambda^k \bar{a}_{-i}) e_i + \epsilon_i$$

dove y_i è la produttività individuale propria del lavoratore, ed è data dall'abilità individuale (a_i , fattore esogeno) e dallo sforzo profuso (e_i , scelta endogena), quest'ultimo generante una produttività tanto più grande quanto più grande è l'abilità media dei collaboratori di i ($\bar{a}_{-i}$).

In questo agisce dunque la complementarietà strategica tra sforzo individuale e abilità dei colleghi ($\frac{df_i}{d\bar{a}_{-i} d e_i} = \lambda^k > 0$), rappresentativa dello spillover di conoscenza. ε_i è invece una variabile casuale che cattura variazioni nella produttività dovute a fattori esterni al lavoratore e oltre il suo controllo, ed ha valore atteso 0. In conformità alla letteratura sulla teoria dell'agenzia e sui problemi di asimmetria informativa, gli autori assumono che l'azienda non possa identificare separatamente ε_i ed e_i.

4.2.2_ Costo dello sforzo

Il costo sostenuto dal lavoratore viene invece definito come:

$$c_i = k e_i^2 + \lambda^p (m - e_i) \bar{f}_{-i}$$

dove il costo direttamente associato allo sforzo è la ricorrente funzione quadratica $k e_i^2$, mentre $\lambda^p (m - e_i) \bar{f}_{-i}$ rappresenta la complementarietà strategica tra produttività media dei collaboratori ($\bar{f}_{-i}$) e sforzo individuale:

$$\frac{dc_i}{d\bar{f}_{-i} d e_i} = -\lambda^p < 0$$

ovvero al crescere di $\bar{f}_{-i}$ incrementare lo sforzo porterebbe ad una diminuzione del costo, e dunque il lavoratore è incentivato a farlo.

Questa complementarietà si riferisce chiaramente alla pressione sociale: una maggiore produttività dei collaboratori aumenta il costo del lavoratore (in termini emotivi e psicologici) portandolo ad accrescere il proprio sforzo. In quest'ottica m può essere visto come il dolore/ la pena, in "termini di sforzo", sentito dal lavoratore per l'elevata produttività degli altri.

4.2.3_ Salario

Il salario, contrattato tra l'impresa e il lavoratore, e in particolare deciso quasi totalmente dalla prima per il suo maggior potere contrattuale, deve basarsi sullo sforzo, vista la volontà dell'azienda di incentivarlo.

Non essendo però questo separatamente osservabile rispetto a ε_i, la determinazione del salario dovrà fondarsi sulla produttività individuale f_i. Gli autori definiscono quindi un modello di dipendenza lineare:

$$w_i=\alpha+\beta f_i=\alpha+\beta[a_i+(1+\lambda^k \bar{a}_{-i})e_i+\epsilon_i]$$

Per comodità analitica, contrariamente alla consuetudine della teoria dell'agenzia, anche i lavoratori (gli agenti), oltre alle imprese, vengono considerati neutrali al rischio.

4.2.4_ Massimizzazione utilità del lavoratore

Si arriva così al problema di ottimizzazione del lavoratore, che deve scegliere lo sforzo che massimizza la propria utilità attesa, cioè la differenza tra il proprio salario atteso e il costo sostenuto:

$$\max_{e_i} E[u_i]=E[w_i]-c_i=\alpha+\beta[a_i+(1+\lambda^k \bar{a}_{-i})e_i]-k e_i^2-\lambda^p(m-e_i)\bar{f}_{-i}$$

$$\frac{du_i}{de_i}=0\rightarrow\beta(1+\lambda^k \bar{a}_{-i})-2k e_i+\lambda^p\frac{d\bar{f}_{-i}}{de_i}=0=\beta+\beta\lambda^k \bar{a}_{-i}-2ke_i+\lambda^p(\bar{a}_{-i}+\bar{e}_{-i})$$

$$\rightarrow\quad \dot{e}_i=\frac{\beta}{2k}+\frac{\lambda^p}{2k}\bar{e}_{-i}+\frac{\lambda^p+\beta\lambda^k}{2k}\bar{a}_{-i},\forall i=1,\dots,n$$

Queste equazioni di equilibrio mostrano che lo sforzo ottimo è crescente nei peer effects, infatti l'abilità media accresce lo sforzo individuale sia attraverso la pressione sociale (λ^p) sia attraverso lo spillover di conoscenza (λ^k). La pressione sociale genera inoltre un moltiplicatore sociale: lo sforzo medio infatti accresce, attraverso la peer pressure, lo sforzo individuale, che va ad accrescere lo sforzo medio stesso, che va nuovamente ad accrescere lo sforzo individuale, e così via.

4.2.5_ Massimizzazione dei profitti

Le imprese devono invece decidere l'intercetta (α) e la pendenza (β, l'incentivo) della retta di determinazione dei salari, e le sceglieranno tali da massimizzare il loro profitto atteso, ovvero la differenza tra produttività attesa e salario atteso:

$$\max_{\alpha\beta} E[\pi]=\sum_{i=1}^{n}[a_i+(1+\lambda^k \bar{a}_{-i})\dot{e}_i-E[w_i]]$$

A questo punto gli autori ricorrono al modello del bargaining power, affermando quindi che l'utilità degli individui dev'essere almeno pari alla loro opzione d'uscita, avendo l'impresa un maggior potere contrattuale, altrimenti preferirebbero quella al lavoro. Da questa condizione derivano l'intercetta α. Ne consegue che $E[w_i]=v(a_i)+c_i$, ovvero che le imprese in definitiva ricompensano i lavoratori per la loro opzione d'uscita (che dipende dalla loro abilità) e per il costo del loro sforzo (dunque anche per il "dolore" derivante dalla pressione sociale).
Risolvendo il problema di massimizzazione si individua $\dot{\beta}$, che dipende chiaramente anche dallo sforzo medio dei colleghi attraverso λ^p. Il risultato interessante è che, mentre per $\lambda^p = 0$ $\dot{\beta} = 1$ come nei classici modelli di incentivo con agente neutrale al rischio, per $\lambda^p > 0$ $\dot{\beta} < 1$, che significa che l'impresa desidera sfruttare l'incentivo all'aumento di sforzo individuale dovuto alla pressione sociale per lo sforzo degli altri come parziale sostituto del proprio incentivo monetario, premiando di meno l'incremento di sforzo individuale. La dipendenza negativa del salario dalla peer pressure derivante dallo sforzo medio costituisce dunque una sostituibilità strategica nelle intenzioni delle aziende.

Gli autori creano dunque il modello definitivo, che testa gli effetti sul salario dell'abilità media, agente sia tramite spillover di conoscenza che tramite pressione sociale, ovvero una regressione del salario su abilità media e abilità individuale, ottenendo da questo modello che tali effetti sono sempre positivi. La conclusione è quindi che gli spillover di conoscenza hanno un effetto univocamente positivo sui salari (accrescendoli), così come la pressione sociale, che però indurrebbe le imprese a ridurre l'incentivo monetario.

4.3_ Implementazione empirica e dati

Il modello empirico sviluppato per testare le loro teorie è una regressione multipla del logaritmo del salario su abilità individuale e abilità media, che, venendo stimata, permette di evitare il problema di riflessione di Mansky e individuare i peer effects. Persiste però il rischio di attribuire alla complementarietà strategica altre variazioni incidentali che non c'entrano con essa. Per limitare questo rischio vengono aggiunte alla regressione delle variabili di controllo, che tengono conto in particolare del formarsi di gruppi ad alta abilità o a bassa abilità anziché casualmente misti (un esperimento precedentemente condotto in laboratorio ha mostrato che gli spillover di conoscenza in questi gruppi omogenei sono limitati considerevolmente), di variazioni nel tempo del livello di salari di un'impresa (anche di shock improvvisi) e di differenze tra imprese in politiche di salario per diverse occupazioni.

Il punto forte dell'analisi, che permette questa indagine generale, sono i dati utilizzati. Gli autori infatti hanno avuto accesso ai dati della German Social Security, coprenti una fascia temporale di quasi tre decadi, dal 1989 al 2005. Questi dati includono tutti i membri della forza lavoro, ad eccezione di militari, lavoratori autonomi e servizio civile. L'indagine è stata inoltre ristretta al campione della città di Monaco, così da includere con più facilità individui che hanno cambiato lavoro e traendo così vantaggio dalla mobilità (che può essere una ricca fonte di nuovi spillover di conoscenza derivanti dall'interazione tra neo-collaboratori). In questo campione i lavoratori hanno cambiato in media 1,4 volte occupazione e 1,4 volte azienda durante la loro permanenza nella forza lavoro. Inoltre i dati contengono codici identificativi delle occupazioni a tre cifre, il che permette di distinguere, ad esempio, cassieri da inseritori di dati, rendendo molto più precisa la definizione dei gruppi di collaboratori soggetti a pressione sociale e spillover di conoscenza. I dati hanno inoltre consentito agli autori di determinare il livello di sforzo intellettuale richiesto da ciascuna occupazione. In questo modo dunque l'analisi è riuscita ad esplorare longitudinalmente tutto il mercato del lavoro per una moltitudine di differenti industrie.

4.4_ Risultati

In conclusione, gli autori trovano dei piccoli peer effects in media nel mercato del lavoro (ad eccezione di alcuni contesti specifici), tali da non influenzare in maniera rilevante la determinazione dei salari né da contribuire significativamente alle iniquità tra lavoratori.
Lo studio rivela tuttavia una grossa differenza tra occupazioni a basse capacità (low-skills jobs) e occupazioni ad alte capacità (high-skills jobs), con le prime che mostrano effetti sui salari quasi doppi rispetto alle seconde. Questo deriva probabilmente dal fatto che nelle occupazioni intellettualmente più semplici gli individui lavorano più a stretto contatto tra loro e possono meglio quantificare l'output, la produttività, dei colleghi, e sentono dunque maggiormente la pressione

sociale, mentre nelle occupazioni high-skills risulta più difficile quantificare e confrontarsi con la produttività dei colleghi, cosicché i peer effects sono dovuti quasi esclusivamente agli spillover di conoscenza, che hanno però un effetto meno intenso (come mostrato dal modello teorico infatti, questi non generano alcun moltiplicatore sociale dello sforzo, come fa invece la peer pressure). Va però anche notato che gli spillover di conoscenza hanno un effetto che persiste nel lungo termine, e può rinnovarsi diffondendosi a nuovi lavoratori, fatto che il modello non è in grado di rilevare.
Un'altra considerazione potrebbe essere che i lavori ad alta intensità intellettuale sono in media maggiormente competitivi, e dunque i lavoratori non possono, anche volendo, aumentare più di tanto lo sforzo a seguito della pressione sociale, essendo già questo vicino al loro massimo. Non possono dunque accrescere più di tanto la loro produttività aumentando solo lo sforzo. Un'ultima considerazione è che, in questi lavori, gli individui traggano benefici non solo dal salario, ma anche dal prestigio, dalla considerazione dei capi, dalla soddisfazione per il risultato e dalle possibilità di carriera, e dunque l'aumento di paga è limitato poiché si viene premiati in altri modi.

5_ Conclusioni

La scienza dei nodi costituisce un prezioso strumento di integrazione all'analisi economica e sociale, permettendo di rappresentare e matematizzare la complessità delle relazioni tra le moltitudini di soggetti presi di volta in volta in considerazione. Anziché studiare le interazioni come esclusivamente bilaterali, tra due individui, per poi replicarle tali e quali tra tutti, sempre a due a due, definendo il totale come la semplice somma di queste singole identiche interazioni, la scienza dei network consente di vedere una relazione tra due agenti come unica e inimitabile, tenendo in considerazione gli effetti che su questa hanno tutte le altre relazioni intessute dai due con gli altri e quelle che hanno luogo tra gli altri. L'interazione non è più un singolo oggetto indipendente, ma un piccolo componente di un più grande tessuto la cui struttura è determinata da e determina ognuna di esse. Il carattere multidimensionale di un insieme relazionale di agenti viene così valorizzato.
L'utilizzo del concetto di rete riesce dunque a dare una rappresentazione più realistica del funzionamento delle relazioni economiche e sociali, aprendo a nuovi scenari di indagine, come nel caso dei peer effects, e fornendo un nuovo e più approfondito punto di vista su tematiche già esplorate, come nel caso degli equilibri economici, permettendo un'analisi che si avvicina maggiormente alla verità dei fatti e che riesce a sottolineare l'importanza reale di ogni singola relazione relativamente all'intero insieme, tenendo in considerazione e valorizzando nell'indagine generale e teorica la microstruttura specifica della situazione studiata. Disciplina recente e

rapidamente sviluppatasi, il suo utilizzo in ambito economico (come in molti altri) va in crescendo, divenendo sempre più una parte fondamentale degli strumenti matematici a disposizione degli economisti.

Numero parole: 10127

Bibliografia

Easley D., Kleinberg J. (2010). Networks, Crowds, and Markets: Reasonong About a Highly Connected World
link: https://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/networks-book/

Barabási A. L. (2015). Network Science
link: http://barabasi.com/networksciencebook/

Jackson M. O. (2008). Social and Economic Networks
link: https://archive.org/stream/SocialAndEconomicNetworksMatthewO.Jackson/Social%20and%20Economic%20Networks%20-%20Matthew%20O.%20Jackson#page/n41/mode/2up

Jackson M. O., Wolinsky A. (1995). A Strategic Model of Social and Economic Networks
link: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.147.1561&rep=rep1&type=pdf

Cornelissen T., Dustmann C., Schönberg U. (2013). Peer Effects in the Workplace
link: http://ftp.iza.org/dp7617.pdf

Manski, C. F. (1993). Identification of endogenous social effects: The reflection problem. The review of economic studies, 60(3)