

Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Scienze Statistiche  
Corso di Laurea Triennale in  
Statistica per l'Economia e l'Impresa



RELAZIONE FINALE  
**LA PROPRIETÀ DI REVERSIBILITÀ NELLE SERIE  
STORICHE**

Relatore Prof.ssa Luisa Bisaglia  
Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureando: Veronica Boscaro  
Matricola N 1150710

Anno Accademico 2018/2019



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Test di reversibilità</b>	<b>9</b>
1.1 Reversibilità: definizione formale . . . . .	9
1.2 Stazionarietà e linearità . . . . .	10
1.3 Riferimenti storici . . . . .	11
1.4 Test di Ramsey-Rothman . . . . .	14
1.4.1 fonti di irreversibilità . . . . .	14
1.4.2 Funzione di bicovarianza . . . . .	15
1.4.3 Il test di Ramsey Rothman . . . . .	17
1.5 Test di irreversibilità basato sui primi due momenti	20
1.5.1 Procedura per stimare la reversibilità . . . . .	22
1.5.2 Test per la Gaussianità . . . . .	24
1.5.3 Controllo della distribuzione e dei coefficienti	25
1.6 Analisi reversibilità basata sulle autocovarianze di Gini . . . . .	26
1.6.1 Un test basato sulla funzione di autocorre- lazione di Gini . . . . .	32
<b>2 Test di Ramsey Rothman: un piccolo esperimento   Monte Carlo</b>	<b>35</b>
2.1 Test applicato a funzioni deterministiche . . . . .	35
2.2 Un semplice studio di Monte Carlo . . . . .	39

2.3	Test applicato a dati reali . . . . .	45
2.4	Conclusioni . . . . .	50
2.5	I coefficienti misti di White . . . . .	51
2.6	Codice R . . . . .	52

# Introduzione

Un processo stocastico  $X_t$  (detto anche processo aleatorio) è una famiglia di variabili casuali descritte da un parametro  $t$  appartenente ad un insieme parametrico  $T$ . Questo significa che un processo stocastico è una successione di variabili aleatorie ordinate secondo un parametro  $t \in T$ , solitamente identificato con il tempo. La conoscenza di un processo stocastico equivale alla conoscenza della distribuzione di probabilità multipla (multivariata) per qualsiasi sottoinsieme di  $T$  e per qualsiasi valore delle variabili casuali.

Un tale processo è quindi la famiglia di variabili casuali  $X_1, X_2, \dots$  per la cui conoscenza occorre specificare le funzioni di densità congiunte di ciascuna combinazione di esse. Formalmente un processo  $X_t$  è noto se è nota la funzione di densità  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$  per ogni  $k$  e per ogni  $k$ -pla di valori  $(t_1, t_2, \dots, t_k)$  di variabili casuali. Se fissiamo una prova da effettuare su  $X_t$  (ovvero osserviamo la successione dei risultati campionari  $x_1, x_2, \dots$ ) otterremo una successione di valori, funzione della variabile  $t$ , chiamata realizzazione o traiettoria del processo. Risulta evidente che, dato un processo  $X_t$ , esistono infinite possibili realizzazioni che sono precisamente tutte quelle osservabili ripetendo indefinitamente l'esperimento. Infine, se in  $X_t$  fissiamo  $t$  e contemporaneamente fissiamo la prova sperimentale (per esempio fissiamo  $t=3$  ed osserviamo il valore risultante per  $X_3$ ) otteniamo un numero reale: cioè il valore rea-

lizzato per la v.c. fissata, ovvero il valore della realizzazione al tempo  $t$  fissato.

Si definisce con serie storica  $x_t, t=1, \dots, N$  una parte finita di una realizzazione di un processo stocastico  $X_t$ . Una serie storica è detta **direzionale (o irreversibile)** se possiede proprietà probabilistiche che dipendono dalla direzione del tempo.

La reversibilità temporale di un processo stocastico si ha se ogni parte del processo ha le stesse proprietà probabilistiche della stessa parte del processo vista al contrario rispetto all'asse temporale.

Ci sono molti esempi di modelli statistici comunemente usati per processi stocastici discreti che sono reversibili nel tempo, inclusa la successione di variabili casuali IID (indipendenti e identicamente distribuite) e il caso di processo stazionario gaussiano. Un processo *lineare non gaussiano*, in generale è irreversibile rispetto al tempo, tranne quando i suoi coefficienti soddisfano alcune condizioni molto restrittive. Se si riesce a capire se la serie storica ha un comportamento reversibile o non reversibile, per trovare il modello migliore, si può ricercare il modello in una classe molto più piccola; ad esempio, se la serie storica è reversibile si cerca il processo generatore dei dati nell'insieme dei processi reversibili, escludendo tutti gli altri. Non sorprende quindi che il test per la reversibilità sia importante per costruire il modello nell'analisi delle serie temporali. Sono stati suggeriti diversi test per la reversibilità temporale da applicare come test per la specifica del modello; un test per la reversibilità temporale può essere usato prima dell'assunzione di un modello lineare gaussiano, oppure prima di tentare una trasformazione dei punti in un modello lineare gaussiano.

In una prospettiva applicativa, controllare se una serie è rever-

sibile è un'utile aggiunta alla procedura di diagnostica esistente per i dati stazionari, poichè l'assenza di questa caratteristica nella serie storica analizzata (quindi il caso di irreversibilità o direzionalità del processo generatore della serie) segnala l'esclusione di indipendenza seriale (processo White Noise) o processi gaussiani dai modelli candidati.

La direzionalità è definita solamente rispetto a serie stazionarie e non si interessa di comportamenti deterministici (vengono rimossi prima dell'analisi).

Adeguate rappresentazioni grafiche spesso possono rivelare direzionalità: si può notare una mancanza di simmetria direzionale riguardo i comportamenti di certe caratteristiche delle sequenze, come ad esempio una notevole differenza tra la pendenza in salita e quella in discesa nella linea.

Il punto di vista che si vuole evidenziare è che la direzionalità è un aspetto dell'analisi delle serie temporali che merita un più ampio riconoscimento; per esempio, non ha senso prevedere con un modello di serie storiche reversibile, quando i dati passati sono sicuramente irreversibili.

Una valutazione della direzionalità può quindi essere opportuna.





# Capitolo 1

## Test di reversibilità

### 1.1 Reversibilità: definizione formale

Un processo è stazionario se per ogni  $\forall t_1, t_2, \dots, t_n, \forall$  intero positivo  $n$ , e  $\forall m$  in  $\mathbb{N}$ , i vettori  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  e  $(X_{-t_1+m}, X_{-t_2+m}, \dots, X_{-t_n+m})$  hanno la stessa distribuzione di probabilità congiunta. Denotiamo questo con:

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{m-t_1}, X_{m-t_2}, \dots, X_{m-t_n})$$

Un processo stocastico stazionario è detto reversibile se è invariante rispetto all'inversione della scala temporale. Chiaramente,  $X_t$  è reversibile quanto le variabili casuali corrispondenti ai vari istanti temporali sono IID.

Sia  $X_t$  un processo stazionario Gaussiano, ovvero tutte le distribuzioni di dimensione finita di  $X_t$  sono Normali multivariate; allora  $X_t$  è reversibile rispetto al tempo. da questo deriva il fatto che un processo che non è reversibile non può essere Gaussiano.<sup>1</sup>

Inoltre, sia  $X_t$  un processo stazionario,  $f$  una funzione biunivoca, e sia  $\forall t$ :

---

<sup>1</sup>Weiss G. (1975) Time-reversibility of linear stochastic processes

$$Y_t = f(X_t)$$

$Y_t$  è reversibile se e solo se  $X_t$  è reversibile. Questo significa che è impossibile operare una trasformazione dei punti da un processo non-reversibile ad un processo gaussiano e che i processi stazionari gaussiani sono reversibili rispetto al tempo

## 1.2 Stazionarietà e linearità

Non è difficile dimostrare che se il processo è reversibile è stazionario, ma non vale il viceversa.<sup>2</sup>

Per dimostrare la reversibilità di un processo stocastico  $\{X_n, in \in \mathbb{Z}\}$  è sufficiente mostrare che  $\forall$  intero positivo  $n$ ,

$$(X_0, X_1, \dots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$$

Si assume che il processo stocastico sia stazionario a tempo discreto.

**Linearità** Un processo stocastico  $\{X_n, in \in \mathbb{Z}\}$  è chiamato processo lineare se possiede la seguente rappresentazione:

$$X_n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i Z_{n-i}$$

dove  $\{Z_n : n \in \mathbb{Z}\}$  è una successione di variabili casuali non degeneri IID con  $E(Z_n)=0$ ,  $0 < E(Z_n^2) = \sigma^2 < \infty$  e  $\{b_i\}$  è una successione di costanti tale che  $0 < \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i^2 < \infty$ <sup>3</sup>.

---

<sup>2</sup>Sharifdoust M., Mahmoodi S., "On time reversibility of Linear Time series"

<sup>3</sup>Grigoletto, Pauli, Ventura *Modello lineare*

### 1.3 Riferimenti storici

La prima menzione riguardo la direzionalità per le serie temporali sembra essere stata fatta da Percy John Daniell nel 1946. Altri contributi da ricordare sono quelli di Weiss (1975) su reversibilità e modelli lineari gaussiani Brillinger e Rosenblatt (1967).

Fino agli anni 90 comunque, è stato scritto relativamente poco sulla direzionalità temporale delle serie. Una spiegazione a questo potrebbe essere il fatto che, fino a poco tempo prima, la modellazione delle serie temporali veniva eseguita esclusivamente tramite modelli autoregressivi a media mobile (modelli ARMA) gaussiani; l'ipotesi gaussiana rende questi reversibili. A partire dalla fine degli anni Novanta, la letteratura ha discusso la questione dei test per verificare la reversibilità temporale. Alcuni tra i contributi più importanti per lo sviluppo di test riguardanti la reversibilità sono stati forniti da Ramsey e Rothman (1996) che hanno stabilito una connessione i concetti di asimmetria e di reversibilità temporale e hanno sviluppato un test nel dominio del tempo, chiamato "The Time Reversibility" (TR) test e da Hinich e Rothman (1998), che hanno introdotto un test nel dominio delle frequenze basato sul bispettro. In particolare, quest'ultimo test controlla se lo scostamento dalla gaussianità è dovuto all'irreversibilità della serie storica. Entrambi questi test esaminano il comportamento dei momenti terzi empirici per verificare gli scostamenti dalla situazione di reversibilità temporale. Questi metodi sono applicabili solo se la distribuzione marginale unidimensionale dei dati ha momento sesto finito. Il soddisfacimento di questo requisito esclude molte serie storiche su dati economici e serie temporali finanziarie, dal momento che è sì è spesso sostenuto che, sebbene la varianza non condizionata di tali serie temporali esista, i momenti non condizionati di ordine superiore al secondo potrebbero non essere finiti.

Cheng (1999) provò un teorema che dà condizioni necessarie e sufficienti per la reversibilità di processi stazionari e lineari; questo approccio si basa su un indice dello scostamento dallo zero della mediana della distribuzione marginale unidimensionale dei dati differenziati. Una caratteristica interessante del metodo è che non richiede l'esistenza dei momenti di ordine superiore al secondo e invece di fare affidamento su approssimazioni asintotiche gaussiane, si considera l'uso di metodi di campionamento e ricampionamento per costruire intervalli di confidenza per il parametro di reversibilità temporale e mostrare che tali procedure di inferenza sono asintoticamente valide in condizioni di "mild mixing". Le proprietà in piccoli campioni delle procedure proposte sono esaminate mediante esperimenti Monte Carlo.

Chen (2000) ha proposto una classe di test per la reversibilità temporale, basata su una condizione necessaria per la reversibilità che non ha restrizioni sui momenti. Il test proposto è basato sull'implicazione che i residui delle serie testate hanno distribuzione marginale simmetrica. Racine e Maasoumi (2007) hanno proposto un approccio basato su una misura di entropia dalla simmetria. Psaradakis (2008) introduce un esempio basato sul test introdotto da Cheng. Shelef e Schechtman (2016) sviluppano un **framework** per l'analisi delle serie temporali fondato su un insieme di equivalenze basate sulle funzioni di autocorrelazione di Gini(2005) che, tra le altre cose, introduce un test per la reversibilità temporale focalizzato sulle possibili differenze nella funzione di autocorrelazione tra autocorrelazione all'indietro e in avanti (nel tempo). Questa caratteristica è davvero utile per identificare modelli con code pesanti e innovazioni (errori) non normali. Uno dei vantaggi di questo metodo è l'essere basato su assunzioni riguardanti solamente i primi due momenti.

Alcune tra queste diverse proposte, o che derivano da queste teorie, verranno analizzate più nel dettaglio qui di seguito.

## 1.4 Test di Ramsey-Rothman

### 1.4.1 fonti di irreversibilità

Ramsey e Rothman(1996) hanno sviluppato un test per la reversibilità temporale basato sulla funzione di bicovarianza simmetrica, e hanno teorizzato che l'irreversibilità temporale può derivare da due fonti:

(1) il modello sottostante potrebbe essere **non lineare** anche se le innovazioni sono simmetricamente (forse normalmente) distribuite o;

(2) le innovazioni sottostanti possono provenire da una distribuzione di probabilità **non gaussiana** mentre il modello è lineare.

Ci riferiremo al primo caso (non lineare) come irreversibilità temporale di "Tipo I" e al secondo come irreversibilità temporale di "Tipo II". L'irreversibilità di tipo II è coerente con un processo lineare non gaussiano.

Nella pratica, questa distinzione viene trascurata, poiché in entrambi i casi di tipo I si mantiene il **framework** generale ARMA e si sceglie la distribuzione delle innovazioni in modo che il processo risultante esibisca una caratteristica non lineare specificata. Sebbene la forma del modello sia ancora lineare, i valori attesi delle variabili casuali dati i loro valori ritardati possono essere non lineari. Sebbene la capacità di modellazione di questo approccio sia potenzialmente ampia, in generale è difficile identificare la corretta funzione di distribuzione delle innovazioni dai dati osservati. La ricerca in questa direzione è stata superata da quella sui modelli espliciti (Tong, 1990).

I modelli lineari ARMA sono intrinsecamente irreversibili nel tempo, ma un modello lineare ARMA con innovazioni gaussiane è re-

versibile perché le particolari proprietà della distribuzione gaussiana rendono reversibili nel tempo i processi ARMA lineari in generale. In breve, poiché la distribuzione gaussiana non possiede un cumulante oltre il secondo e poiché la funzione di autocorrelazione è simmetrica rispetto al tempo, si ha l'anomalia che un processo altrimenti irreversibile, in questo caso è reversibile temporalmente .

In genere non è possibile conoscere la forma esatta della funzione di distribuzione di probabilità  $p(x)$ ; molto più frequentemente è possibile ricavare informazioni sui momenti della distribuzione  $p(x)$ . Al crescere dell'ordine, i momenti forniscono un'informazione quanto più dettagliata sulla forma della distribuzione. I cumulanti descrivono l'informazione guadagnata all'ordine  $n$ -esimo che non era presente agli ordini precedenti (Ramsey Rothman 1998). La non linearità **non** implica l'irreversibilità temporale di Tipo I; esistono processi stazionari *non lineari* che sono reversibili nel tempo. Un test per l'irreversibilità di tipo I, quindi, *non è equivalente* a un test di non linearità.

Qui di seguito verrà riportato un teorema riguardante la funzione di bicovarianza.

### 1.4.2 Funzione di bicovarianza

**Teorema 1.4.1** *Sia  $X_t$  una serie stazionaria di media 0 e si assuma che la funzione generatrice caratteristica multivariata di  $(X_t, X_{t-k})$  e  $(X_{t-k}, X_t)$  possa essere espansa in forma di serie convergente nei momenti e nei momenti misti delle rispettive funzioni di probabilità congiunte, ovvero si assume che le distribuzioni di probabilità congiunte sono unicamente caratterizzate dalle rispettive sequenze di momenti puri e misti. Di conseguenza,  $X_t$  è reversibile se*

$$E[X_t^i \cdot X_{t-k}^j] = E[X_t^j \cdot X_{t-k}^i]$$

$\forall i, j, k \in \mathbb{N}$ , dove i valori attesi sono propri di ogni distribuzione di probabilità congiunta.

Dal Teorema 1.3.1, **per**  $i = j = 1$  si ha che:

$$E[X_t \cdot X_{t-k}] = E[X_t \cdot X_{t-k}]$$

$\forall k$  intero.

L'affermazione di cui sopra dice semplicemente che l'autocovarianza di serie stazionarie al ritardo  $k$  è uguale a sé stessa. Questo succede perché l'autocovarianza è una funzione pari, di conseguenza, non fornisce informazioni rilevanti rispetto alla potenziale direzionalità delle specifiche serie storiche.

Quando **almeno uno tra  $i$  e  $j$  è maggiore di 1**,  $i, j \in \mathbb{N}$ , i due termini dell'equazione sono chiamati autocovarianze generalizzate.

Dal Teorema 1.3.1 segue che *se esiste un ritardo  $k$  per cui questi due momenti non sono uguali, la serie è irreversibile*.

Mentre questa è una condizione sufficiente per l'irreversibilità, non è anche condizione necessaria, dal momento che l'equazione di cui al teorema 1.3.1 considera solo un sottoinsieme appropriato dei momenti delle distribuzioni congiunte di  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  e  $(X_{t_n}, X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1})$ . Inoltre, non viene considerato il caso in cui  $F_{t_1, t_2}(\cdot) = F_{t_2, t_1}(\cdot)$  ma  $F_{t_1, t_2, t_3}(\cdot) \neq F_{t_1, t_2, t_3}(\cdot) \in \mathbb{N}$ .

L'approccio di Ramsey e Rothman per la costruzione di questo test prevede di considerare la differenza tra 2 bicovarianze.

La *funzione di bicovarianza simmetrica* è definita come segue:

$$\gamma_{2,1}(k) = E[X_t^2 \cdot X_{t-k}] - E[X_t \cdot X_{t-k}^2]$$

per tutti i valori interi di  $k$ .

Se  $X_t$  è reversibile, allora  $\gamma_{2,1}(k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ .



Tornando all'equazione 1.3.1, si può notare che l'irreversibilità temporale c'è quando l'uguaglianza non si verifica per qualche  $i, j, k$ . Questa definizione è poco pratica perchè troppo stringente, quindi si è deciso di adottare una definizione ristretta di reversibilità temporale limitando la comparazione delle bicovarianze a  $(i + j) \leq m$  e  $k \leq K$ .

Un processo per cui le differenze tra le bicovarianze soddisfano le disuguaglianze di cui sopra  $\forall i, j, k$  è detto "reversibile di ordine  $m$  e grado  $K$ ". Questa procedura è esattamente l'analogo della limitazione sulla stringente definizione di stazionarietà, alla quale si preferisce la versione "stazionario di ordine  $m$ ".

Una restrizione pari a  $m=3$  è sufficiente a fornire utili indicazioni a proposito dell'irreversibilità temporale.

### 1.4.3 Il test di Ramsey Rothman

Data una serie storica  $X_t$  a media nulla, per costruire la statistica test TR, dobbiamo stimare le bicovarianze in questo modo:

$$\hat{B}_{2,1}(k) = (T - k)^{-1} \cdot \sum_{t=k+1}^T X_t^2 \cdot X_{t-k} \text{ e}$$

$$\hat{B}_{1,2}(k) = (T - k)^{-1} \cdot \sum_{t=k+1}^T X_t \cdot X_{t-k}^2 \quad \forall k$$

La statistica test TR è costruita come segue:

$$\hat{\gamma}_{2,1} = \hat{B}_{2,1}(k) - \hat{B}_{1,2}(k) \quad \forall k$$

dove  $\hat{\gamma}_{2,1}$  è uno stimatore non distorto e, sotto ulteriori vincoli<sup>4</sup>, è anche consistente.

Sotto  $H_0$ :  $X_t$  è **reversibile**, il valore atteso di  $\hat{\gamma}_{2,1}$  è 0  $\forall k$ . Sotto alcune condizioni riguardanti i momenti misti,  $\hat{\gamma}_{2,1}$  ha distribuzio-

<sup>4</sup>Theorem 1 of rosenblatt and Van Ness (1965 p. 1125)

ne asintotica Normale.

Più precisamente, si assume che  $X_t^2 \cdot X_{t-k} - X_t \cdot X_{t-k}^2$  è una successione di scalari casuali tale che o  $\phi(m)$  o  $\alpha(m)$  siano uguali a  $0(m^{-\lambda})$  per  $\lambda > \frac{r}{r-1}$ ,  $r > 1$ , dove  $\phi(m)$  e  $\alpha(m)$  sono definiti da White (per approfondimenti: vedere Appendice).

$$\sqrt{T} \cdot \frac{[\hat{\gamma}_{2,1}(k) - \gamma_{2,1}(k)]}{[Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k))]^{\frac{1}{2}}}$$

è asintoticamente distribuito come una  $N(0,1)$  (White, 1984) (dato che abbiamo assunto che  $X_t$  è stazionario, le condizioni di convergenza uniforme richieste in  $Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k))$  da soddisfare ( $Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k)) < \infty$ ) seguono direttamente. Nel caso più restrittivo di variabili indipendenti e identicamente distribuite, si ha la normalità asintotica.

Di seguito è riportata l'esatta espressione per piccoli campioni per  $Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k))$  per una successione  $X_t$  di variabili indipendenti e identicamente distribuite.

**Teorema 1.4.2** *Sia  $\{X_t\}$ , processo stazionario, una successione di variabili casuali IID tale per cui  $E[X_t] = 0 \forall t$  e si assuma  $E[X_t^4] < \infty$ . Allora,*

$$Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k)) = \frac{2(\mu_4\mu_2 - \mu_3^2)}{T - k} - \frac{2\mu_2^3(T - 2k)}{(T - k)^2}$$

dove  $\mu_2 = E[X_t^2]$ ,  $\mu_3 = E[X_t^3]$ ,  $\mu_4 = E[X_t^4]$ <sup>5</sup>

Se una serie stazionaria  $X_t$  non presenta alcuna correlazione seriale,  $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$  si può calcolare sui dati grezzi per un insieme di valori

---

<sup>5</sup>Teorema 4.3 di Welsh e Jernigan (1983)

di  $k$ . Poiché  $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$  ha distribuzione asintoticamente Normale, le regioni di rifiuto possono essere calcolate usando l'espressione per  $Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k))$  del Teorema 1.3.2.

Se la serie  $X_t$  data presenta correlazione seriale, consideriamo la procedura illustrata qui di seguito per verificare la reversibilità temporale.

L'ipotesi nulla è  $H_0$ : "reversibilità temporale", ma la formulazione specifica dell'ipotesi nulla è incorporata in differenti contesti; l'ipotesi nulla è vera quando il modello è non lineare ma reversibile o ARMA con innovazioni gaussiane. In entrambi i casi, possiamo calcolare la statistica test  $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$  usando la serie, che viene assunta stazionaria.

*Una stima della varianza di  $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$  si può ottenere adattando un modello ARMA ai dati, ottenendo una stima della varianza delle innovazioni, quindi simulando una serie usando i valori dei coefficienti ARMA stimati e generando una distribuzione gaussiana con media=0 e varianza pari a quella stimata.*

$\hat{\gamma}_{2,1}(k)$  è calcolato per ciascuna delle  $T$  repliche. La varianza viene quindi ottenuta dai valori replicati di  $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$ .

Se il processo è lineare gaussiano, questa procedura è una simulazione esatta dell'ipotesi nulla.

Se l'ipotesi nulla è che il processo è reversibile temporalmente, ma all'interno del contesto di un modello non lineare, questa procedura è approssimativa, in quanto sostituiamo come un'approssimazione locale al modello sconosciuto una rappresentazione ARMA(p, q).

I valori ottimali per  $p$  e  $q$  possono essere ottenuti utilizzando il

Criterio di Informazione di Akaike (AIC) <sup>6</sup>, o simili, come il Criterio di Informazione di Schwartz (SIC). In questa fase, l'efficienza delle stime dei coefficienti del modello ARMA è importante, ma la necessità di ottenere innovazioni non correlate è fondamentale. L'unico obiettivo a questo stadio è di ottenere stime asintoticamente corrette della varianza di  $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$ .

Se il valore assunto dalla statistica test si trova nella regione di rifiuto ad un livello critico adeguato, l'ipotesi nulla di reversibilità temporale è respinta. Se il valore assunto dalla statistica test si trova nella regione di accettazione, possiamo concludere che la serie è reversibile per ordine  $m=3$  e per grado  $K$ ; solitamente  $K$  viene posto pari a 5. Il numero 5 è stato scelto come compromesso tra la visione di molti termini e la diminuzione dell'efficienza delle stime all'aumentare del ritardo  $K$ . Dall'esperienza, gli autori di questo test hanno scoperto che i cinque termini possono fornire informazioni utili sul pattern di direzionalità.

Se viene rifiutata l'ipotesi nulla, e quindi  $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$  si trova nella regione di rifiuto determinata da una stima appropriata di  $\text{Var}(\hat{\gamma}_{2,1}(k))$ , allora il pattern di direzionalità come caratterizzato da  $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$ ,  $k=1, 2, \dots, n$  può essere usato come aiuto diagnostico nella specificazione di un appropriato modello di serie storiche.

## 1.5 Test di irreversibilità basato sui primi due momenti

Questa procedura <sup>7</sup> per testare la reversibilità è basata essenzialmente nello stimare un modello lineare su dati secondo la condizione necessaria e sufficiente dei processi stazionari lineari intro-

<sup>6</sup> $AIC = -2 \ln(L) + k$ , dove  $L$  è la funzione di verosimiglianza massimizzata e  $k$  il numero di parametri, del .  $SIC = -2 * \ln(L) + k * n$

<sup>7</sup>M. Sharifdoust, S. Mahmoodi (2012)

### 1.5. TEST DI IRREVERSIBILITÀ BASATO SUI PRIMI DUE MOMENTI<sup>21</sup>

dotta da Cheng nel 1999 e non richiede l'esistenza dei momenti di ordine superiore al secondo.

I processi ARMA gaussiani sono ovviamente reversibili, perciò è necessario un test per l'analisi della reversibilità nell'analisi delle serie storiche prima dell'assunzione di modello lineare gaussiano. Inoltre, se viene assunto un modello ARMA stazionario e lineare, allora un test per la reversibilità è più o meno equivalente ad un test per l'assunzione di gaussianità.

Weiss, nel 1975, ha dimostrato che la reversibilità temporale è proprietà per lo più unicamente dei processi gaussiani per i processi ARMA e che solo i processi ARMA reversibili non gaussiani sono processi puramente a media mobile (MA con condizioni restrittive sui coefficienti).

Il teorema che segue estende il risultato di Weiss e dà una condizione necessaria e sufficiente per la reversibilità temporale che non richiede l'esistenza di momenti di ordine superiore al secondo e deriva da Cheng (1999).

**Teorema 1.5.1** Sia  $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  un processo stazionario e lineare come  $X_n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i Z_{n-i}$ .  $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ ; è reversibile temporalmente **se e solo se** è un processo gaussiano oppure per una costante intera  $n_0$  valgono le seguenti condizioni:

- (i)  $b_n = ab_{n_0-n}$
- (ii)  $Z_n$  e  $aZ_n$  hanno la stessa distribuzione

**NOTA:** se  $b_n=0$  per  $n < 0$  in (i) abbiamo:

$$\begin{cases} b_n = ab_{n_0-n} & \text{per } 0 < n < n_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.1)$$

In questo caso  $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  è uno speciale modello a media mobile di ordine finito non maggiore di  $n_0$  come  $X_n = \sum_{i=0}^{n_0} b_i Z_{n-i}$ , conosciuto come  $MA(n_0)$ . Una conseguenza di questo Teorema è che i processi reversibili non gaussiani sono un piccolo sottoinsieme dei processi MA non gaussiani.

Usando questo teorema verrà qui di seguito introdotta una procedura per verificare la reversibilità temporale di serie storiche date.

### 1.5.1 Procedura per stimare la reversibilità

Con questa procedura si approssima localmente il modello sconosciuto con una rappresentazione a media mobile (MA) per una realizzazione del processo stocastico  $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  che è  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Stimando il modello MA e ottenendo i residui e i coefficienti stimati da esso, si può testare la reversibilità temporale secondo la condizione necessaria per la reversibilità di processi stazionari e lineari.

Il modello **stimato**  $X_n = \sum_{i=0}^{n_0} b_i Z_{n-i}$  fa parte di solo una delle seguenti situazioni:

### 1.5. TEST DI IRREVERSIBILITÀ BASATO SUI PRIMI DUE MOMENTI<sup>23</sup>

**I** Il processo è Gaussiano.

**I** Non è gaussiano,  $\{Z_n\}, n \in \mathbb{Z}$  ha distribuzione simmetrica attorno a 0 e  $b_n = -b_{n_0-n}$ .

**III** Non è gaussiano,  $\{Z_n\}, n \in \mathbb{Z}$  ha distribuzione NON simmetrica attorno a 0 e  $b_n = -b_{n_0-n}$ .

**IV** Il processo NON è reversibile.

**NOTA** se il processo è *lineare*, questa procedura darà un test esatto per la reversibilità, se non è lineare la procedura inizia con una sostituzione del processo a rappresentazione MA con un'approssimazione locale del modello stazionario sconosciuto e poi testa la reversibilità sul modello approssimato. Usando il fatto che sotto le assunzioni del Teorema la rappresentazione  $X_n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i Z_{n-i}$  per processi stazionari non gaussiani è unica, se si conclude con la reversibilità della rappresentazione MA del processo  $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , la reversibilità del processo *non sarà rifiutata*.

L'algoritmo utile a capire in quale delle quattro categorie si colloca il processo, funziona nel seguente modo:

**Primo step:** adattare un modello MA invertibile<sup>8</sup> ai dati

- se la serie storica è **Gaussiana**, allora è reversibile e non è necessario controllare che i residui si distribuiscano simmetricamente e le relazioni tra i coefficienti  $b_i$
- se la serie storica NON è Gaussiana è necessario procedere con:

**Secondo step:** testare se la distribuzione dei residui è simmetrica oppure no e controllare le relazioni tra i coefficienti.

---

<sup>8</sup>processo MA(q) è invertibile se tutte le q radici dell'equazione caratteristica  $(1 - \theta(B))$  sono maggiori di 1

In sintesi, innanzitutto si adatta un modello MA invertibile ai dati e si verifica la **Gaussianità** delle innovazioni, che consente di scegliere tra le situazioni I e II,III,IV illustrate precedentemente, e se si conclude che non ci sia Gaussianità si indaga sulla simmetria della distribuzione dei residui e sulle relazioni tra i coefficienti.

### 1.5.2 Test per la Gaussianità

Di seguito verranno illustrati alcuni dei test, effettuati sui residui studentizzati, che vengono utilizzati al fine di verificare la normalità dei residui.

**Test del  $\chi^2$**  Per verificare l'ipotesi di normalità, si calcolano le differenze standardizzate tra frequenze osservate della distribuzione dei residui (indicate con  $np_g$ ) e teoriche (indicate con  $n_g$ ).

$$D = \sum_{g=1}^G \frac{(n_g - np_g)^2}{np_g}$$

### Test di Kolmogorov-Smirnov

$$D_n = \sup |\hat{F}_n(v) - \Phi(v)|$$

dove  $\hat{F}_n(v)$  si riferisce alla funzione di ripartizione empirica delle innovazioni e

$\Phi(v)$  si riferisce alla funzione di ripartizione teorica.

### test di Shapiro-Wilk

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i r_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n r_{(i)}}$$

dove  $a_i$  sono costanti date e  $r_{(i)}$  sono i residui studentizzati, ovvero i residui divisi per il loro errore standard, la cui distribuzione è, approssimativamente, una  $N(0, 1)$ .



### 1.5.3 Controllo della distribuzione e dei coefficienti

**Simmetria della distribuzione**  $X_n = \sum_{i=0}^{n_0} b_i Z_{n-i}$

Alcuni degli strumenti per verificare la simmetria dei residui sono l'indice di asimmetria di Pearson e di l'indice di asimmetria di Fisher.

**Indice di asimmetria di Pearson** Il coefficiente di Pearson è un indicatore di misura dell'asimmetria statistica di una distribuzione. Tramite il coefficiente di Pearson si può confrontare il grado di asimmetria di due distribuzioni diverse. La formula del coefficiente di Pearson è la seguente:

$$\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}$$

Nel coefficiente di Pearson la differenza della media aritmetica e la moda viene divisa con la deviazione standard ossia con lo scarto quadratico medio ( $\sigma$ ). Questo rende adimensionale la misura dell'asimmetria.

**Indice di asimmetria di Fisher**

$$\psi = \frac{1}{n} \sum \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^3$$

$\psi = 0$  Simmetria

$\psi > 0$  Asimmetria positiva

$\psi < 0$  Asimmetria negativa

Se si ha simmetria: viene escluso il caso (III) e si deve scegliere tra (II) e (IV) verificando le relazioni tra i coefficienti. Se non si ha simmetria: viene escluso il caso (II) e si deve scegliere tra (III) e (IV) verificando le relazioni tra i coefficienti.

**Relazioni tra i coefficienti** Per verificare la seconda parte delle condizioni (II) e (III), bisogna controllare le relazioni tra i coefficienti. Se  $n_0$  è pari: si saggia l'ipotesi specificata nel seguente sistema matriciale contro l'alternativa in cui l'equazione non è soddisfatta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & & \pm 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \pm 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nel caso in cui  $n$  fosse dispari, un'equazione simile va soddisfatta. I concetti di reversibilità, linearità e stazionarietà sono distinti, anche se qui è stato utilizzato il fatto che ogni serie stazionaria può essere approssimata con un modello lineare. Se il processo è lineare, questa procedura è un test esatto di reversibilità, se invece non è lineare, allora la procedura contiene un'approssimazione dato che un modello non stazionario sconosciuto è stato localmente approssimato con una rappresentazione MA.

## 1.6 Analisi reversibilità basata sulle autocovarianze di Gini

La maggior parte della letteratura che si occupa delle serie temporali misura la dispersione e la coorelazione usando la varianza e la covarianza, tuttavia questa teoria è fondamentalmente limitata alle ipotesi di presenza o assenza di correlazione. Ad esempio, l'autocovarianza e l'autocorrelazione, che sono basate sulla covarianza e la correlazione della variabile rispetto a una versione di se stessa spostata nel tempo, assumono la simmetria nelle loro variabili come conseguenza della definizione di covarianza. Recentemente, un approccio alternativo basato sulla **differenza media di Gini**

(GMD) è stato introdotto; Shelef e Schechtman (2016) hanno sviluppato una struttura costituita da una serie di equivalenze basate sul lavoro di Gini <sup>9</sup> che introduce un test di reversibilità focalizzato sulle possibili differenze tra autocorrelazione in avanti e all'indietro. Questa caratteristica è utile anche per identificare modelli con code pesanti e innovazioni non normali. Uno dei vantaggi di questo metodo è che è basato su assunzioni del primo ordine.

Le funzioni di autocorrelazione di Gini sono così definite:

Siano  $(X, Y)$  due variabili casuali.

$$\text{Gcor}(Y, X) = \frac{\text{Gcov}(Y, X)}{\text{Gcov}(Y, Y)} = \frac{\text{COV}(Y, F_X(X))}{\text{Gcov}(Y, F_Y(Y))}$$

$$\text{Gcor}(X, Y) = \frac{\text{Gcov}(X, Y)}{\text{Gcov}(X, X)} = \frac{\text{COV}(X, F_Y(Y))}{\text{Gcov}(X, F_X(X))}$$

dove  $F_X(X)$  è la funzione di distribuzione cumulativa di  $X$ .

In generale,  $\text{Gcor}(Y, X)$  e  $\text{Gcor}(X, Y)$  non sono necessariamente uguali e nemmeno condividono necessariamente lo stesso segno.

L'uguaglianza  $\text{Gcor}(Y, X) = \text{Gcor}(X, Y)$  vale se  $(Y, X)$  è scambiabile fino a una trasformazione lineare. Se  $(Y, X)$  ha una distribuzione normale bivariata con correlazione  $\rho$ ,  $\text{Gcor}(Y, X) = \text{Gcor}(X, Y) = \rho$ . Notiamo che la simmetria è una conseguenza della definizione di covarianza, cioè  $\text{COV}(X, Y) = \text{COV}(Y, X)$ . Quindi, il vantaggio di questo metodo è che consente di verificare la simmetria e offre un'alternativa naturale per il controllo della reversibilità temporale.

**Autocovarianze di Gini** Dato il processo stocastico  $\{X_t\}$ , Shelef e Schechtman hanno dimostrato che la reversibilità può

---

<sup>9</sup>Gini C.,(1914) On the measurement of concentration and variability of characters.

essere associata ad una qualche forma di simmetria. Questo può essere indagato osservando il comportamento delle 2 autocovarianze di Gini al ritardo  $s$ , che possono essere definite come:

$$\gamma_{(t,t-s)}^{G_1} = COV(X_t, F(X_{t-s}))$$

$$\gamma_{(t,t-s)}^{G_2} = COV(X_{t-s}, F(X_t))$$

Le espressioni di cui sopra possono essere viste come le autocovarianze di Gini in avanti e all'indietro. Assumiamo che  $X_t$  sia strettamente stazionario, quindi le distribuzioni congiunte di  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$  e  $(X_{t_1+s}, \dots, X_{t_k+s})$  sono uguali per tutti i numeri interi positivi  $k$  e  $\forall (t_1, \dots, t_k)$ .

Sotto stringenti condizioni di stazionarietà, la seguente uguaglianza vale  $\forall t$  e  $\forall s$ :

$$\gamma_{(t,t-s)}^{G_1} = COV(X_t, F(X_{t-s})) = COV(X_{t-j}, F(X_{t-j-s}))$$

$$\gamma_{(t,t-s)}^{G_2} = COV(X_{t-s}, F(X_t)) = COV(X_{t-j-s}, F(X_{t-j}))$$

dove  $\gamma_{(t,t-s)}^{G_1}$  e  $\gamma_{(t,t-s)}^{G_2}$  sono indipendenti dal tempo (si noti che le due covarianze saranno uguali sotto l'intercambiabilità con una trasformazione lineare).

**Funzione di autocorrelazione e funzione di autocorrelazione di Gini** Può essere definita una versione secondo Gini dell'autocorrelazione (ACF):

$$ACF(Y_t X_{t-s}) = \rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_{(s=0)}} = \rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}$$

dove ACF è definita come:

$$\hat{\rho}_s = \frac{\sum_{t=1}^{T-s} (X_{t+s} - \bar{X})(X_t - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{T-s} (X_t - \bar{X})^2}$$

dove T è la lunghezza della serie e  $\bar{X} = \frac{\sum_{t=1}^T X_t}{T}$

Le due Gini-ACF di ordine s sotto stretta stazionarietà sono:

$$\text{Gini-ACF}(X_t X_{t-s}) = \rho_s^{G1} = \frac{\gamma_s^{G1}}{\gamma_{(s=0)}^{G1}}$$

$$\text{Gini-ACF}(X_{t-s} X_t) = \rho_s^{G2} = \frac{\gamma_s^{G2}}{\gamma_{(s=0)}^{G2}}$$

È interessante osservare che per un processo AR(1),

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

si ha che  $\gamma_{(s)}^{G1} = \phi_1^s \gamma_{(s=0)}^{G1}$ , quindi  $\rho_{(s)}^{G1} = \phi_1^s = \rho_s$ , e ciò indica che la Gini-ACF al ritardo 1 è uguale alla tradizionale ACF, indicato da  $\rho_s$ .

Pertanto, è possibile utilizzare lo stimatore di Gini-ACF a ritardo 1 (definito in seguito) per misurare l'autocorrelazione quando il momento secondo non esiste. Inoltre, le due Gini-ACF e Gini-ACF parziali (Gini-PACF), che verranno definite, possono essere tracciate in un grafico per generare due correlogrammi basati su Gini (correlogrammi di Gini).

Una differenza tra le due Gini-ACF, se esiste, implica che una misura asimmetrica come Gini-ACF potrebbe essere più appropriata e offrire maggiori informazioni sulla distribuzione sottostante.

Si noti che, se le  $\varepsilon_t$  sono variabili casuali IID normalmente distribuite, allora sia  $Y_t$  che  $Y_{t-s}$  sono combinazioni lineari di variabili normali. Pertanto sono sostituibili con una trasformazione lineare

(al massimo) in seguito a cui rimane l'uguaglianza  $\rho_S^{G1} = \rho_S^{G2}$ . D'altro canto, se le due Gini-ACF differiscono, significa che  $Y_t$  e  $Y_{t-s}$  non sono intercambiabili che la serie è irreversibile perché guardando indietro  $G_1$  e avanti  $G_2$  alla serie è diversa. L'importanza di identificare un caso del genere è che se  $G_1$  e  $G_2$  sono differenti, ciò esclude la possibilità di modellare i dati come processo con indipendenza seriale o processo gaussiano.

Stime consistenti delle Gini-ACF sono le seguenti:

$$\hat{\rho}_s^{G1} = \frac{\sum_{t=1}^{T-s} (X_{t+s} - \bar{X})(R(X_t) - \bar{R}(X_{1:(T-s)}))}{\sum_{t=1}^{T-s} (X_t - \bar{X})(R(X_t) - \bar{R}(X_{1:(T)}))}$$

$$\hat{\rho}_s^{G2} = \frac{\sum_{t=1}^{T-s} (X_t - \bar{X})(R(X_t) - \bar{R}(X_{s+1:(T)}))}{\sum_{t=1}^{T-s} (X_t - \bar{X})(R(X_t) - \bar{R}(Y_{1:(T)}))}$$

dove  $R(Y_t)$  è il rango di  $X_t$  diviso per la numerosità, e  $\bar{R} = \sum_{t=i}^j \frac{R(X_t)}{(j-i+1)}$ . Inoltre, man mano che  $s$  aumenta, il numeratore ha un minor numero di componenti e converge a zero, come previsto in caso di stazionarietà in senso stretto.

### Funzione di autocorrelazione parziale di Gini(Gini-PACF)

Seguendo l'equazione di Yule-Walker, abbiamo il seguente sistema di equazioni:

$$\rho_j = \phi_{s1}\rho_{(j-1)} + \dots + \phi_{ss}\rho_{(j-s)}$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, S.$$

La Gini-PACF è definita come l'ultimo coefficiente  $\phi_{ss}$  di un'equazione di autoregressione Gini parziale di ordine  $s$ , ed è la correlazione tra  $X_t$  e  $X_{t-s}$  dopo aver corretto per gli effetti delle

## 1.6. ANALISI REVERSIBILITÀ BASATA SULLE AUTOCOVARIANZE DI GINI<sup>31</sup>

variabili intermedie  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-s+1}$ ,

$$X_t = \phi_{s1}^{G_1} X_{t-1} + \phi_{s2}^{G_1} X_{t-2} + \dots + \phi_{s(s-1)}^{G_1} X_{t-s+1} + \phi_{ss}^{G_1} X_{t-s}$$

(assumendo, senza perdita di generalità, che  $X_t$  è un processo a media 0).

La covarianza di Gini tra  $X_t$  e  $X_{t-j}$  è

$$\text{Gcov}(X_t, X_{t-j}) = \text{COV}(X_t, F(X_{t-j})) = \gamma_j^{G_1} = \phi_{s1}^{G_1} \gamma_{(j-1)}^{G_1} + \dots + \phi_{ss}^{G_1} \gamma_{(j-s)}^{G_1}$$

Quindi,

$$\rho_j^{G_1} = \phi_{s1}^{G_1} \rho_{(j-1)}^{G_1} + \dots + \phi_{ss}^{G_1} \rho_{(j-s)}^{G_1}$$

Come si può vedere dall'equazione sopra, ogni ACF ( $\rho_s$ ) è sostituita dalla ACF di Gini di ritardo 1 in questione ( $\rho_s^{G_1}$ ). Un'alternativa naturale è collegare l'ACF di Gini al secondo ritardo ( $\rho_s^{G_2}$ ) invece della prima ACF di Gini ( $\rho_s^{G_1}$ ). Di conseguenza, una versione aggiuntiva della PACF di Gini è implementata, questa versione viene chiamata second-Gini-PACF (PACF di Gini al ritardo 2). La PACF può essere stimata approssimando le stime di Yule-Walker dei processi successivi usando  $\rho_s$  come stima delle autocorrelazioni teoriche. Di conseguenza, viene suggerito di stimare le due Gini-PACF usando quanto i seguenti sistemi di equazioni:

$$\hat{\rho}_j^{G_1} = \hat{\phi}_{s1}^{G_1} \hat{\rho}_{(j-1)}^{G_1} + \hat{\phi}_{s2}^{G_1} \hat{\rho}_{(j-2)}^{G_1} + \dots + \hat{\phi}_{s(s-1)}^{G_1} \hat{\rho}_{(j-s+1)}^{G_1} + \hat{\phi}_{ss}^{G_1} \hat{\rho}_{(j-s)}^{G_1}$$

$$\hat{\rho}_j^{G_2} = \hat{\phi}_{s1}^{G_2} \hat{\rho}_{(j-1)}^{G_2} + \hat{\phi}_{s2}^{G_2} \hat{\rho}_{(j-2)}^{G_2} + \dots + \hat{\phi}_{s(s-1)}^{G_2} \hat{\rho}_{(j-s+1)}^{G_2} + \hat{\phi}_{ss}^{G_2} \hat{\rho}_{(j-s)}^{G_2}$$

che devono essere risolti per gli ultimi due coefficienti  $\hat{\phi}_{ss}^{G_1}$  e  $\hat{\phi}_{ss}^{G_2}$  per  $s = 1, 2, \dots$

### 1.6.1 Un test basato sulla funzione di autocorrelazione di Gini

Dalla definizione stessa di reversibilità temporale, una caratteristica cruciale delle autocorrelazioni di Gini è che se la serie è reversibile temporalmente, le Gini-ACF sono uguali ai ritardi notevoli (ovvero ai primi ritardi ed ai ritardi stagionali). Quindi, generalmente, se le Gini-ACF differiscono, ciò dovrebbe indicare che  $X_t$  e  $X_{t-s}$  non sono scambiabili e questo a sua volta implica l'irreversibilità temporale.

Tuttavia, se, ad esempio, la serie è un processo a media mobile di ordine  $q$  (MA( $q$ )), quindi l'ACF si interrompe dopo  $q$  ritardi le Gini-ACF dal lag  $q$  in poi sono meno informative nel contesto della reversibilità temporale. In questo caso, è possibile utilizzare le Gini-PACF perché decadono a zero dopo solo  $q$  ritardi. Poiché Gini-ACF e Gini-PACF possono essere entrambi indicative di irreversibilità, combiniamo le informazioni di entrambe in una sola ipotesi. Questo porta al seguente sistema di ipotesi:

L'ipotesi di reversibilità temporale ad ogni lag  $s$  è

$$H_{01} : \rho_s^{G_1} = \rho_s^{G_2} \text{ e } H_{01} : \phi_{ss}^{G_1} = \phi_{ss}^{G_2}$$

l'ipotesi alternativa è che almeno una delle due uguaglianze sia violata.

Vengono usati due test (dipendenti): uno per la verifica della differenza tra Gini-ACF e uno per la verifica della differenza tra Gini-PACF. viene applicato un aggiustamento di Bonferroni<sup>10</sup>, così ogni test viene esaminato utilizzando la metà del livello nominale dichiarato ( $\alpha / 2$ ). Si noti che per il primo ritardo, la differenza tra Gini-ACF è uguale alla differenza tra Gini-PACF

---

<sup>10</sup>Grigoletto M., Pauli F., Ventura L., *Modello Lineare-Teoria e applicazioni con R*



## 1.6. ANALISI REVERSIBILITÀ BASATA SULLE AUTOCOVARIANZE DI GINI33

(perché l'autocorrelazione e l'autocorrelazione parziale al primo ritardo sono uguali). Di conseguenza, in questo intervallo di tempo (il primo) viene utilizzato un solo test e non è necessaria la Correzione di Bonferroni. La correzione di Bonferroni afferma che, se uno sperimentatore sta analizzando  $n$  ipotesi (dipendenti o indipendenti) su una serie di dati, il livello di significatività statistica che dovrebbe essere utilizzato per ogni ipotesi è  $1/n$  volte quello che sarebbe loro attribuito se anche solo una ipotesi fosse empiricamente testata. Indichiamo le differenze tra Gini-ACF e Gini-PACF con:

$$\theta_{Gini-ACF(s)} = \rho_s^{G_1} = \rho_s^{G_2} \text{ e } \theta_{Gini-PACF(s)} = \phi_s^{G_1} = \phi_s^{G_2}$$

La statistica test è quindi:

$$\sqrt{T}|\hat{\theta}_{Gini-ACF(s)} - \theta_{Gini-ACF(s)}, H_0| \text{ e } \sqrt{T}|\hat{\theta}_{Gini-PACF(s)} - \theta_{Gini-PACF(s)}, H_0|$$

dove sotto l'ipotesi nulla le differenze sono uguali a 0. In pratica, valori elevati della statistica test portano a rifiutare l'ipotesi nulla di reversibilità. Le distribuzioni campionarie degli stimatori basati su Gini sono complicate e le loro distribuzioni asintotiche comportano l'applicazione di ipotesi restrittive sulla serie. Come menzionato in Carcea e Serfling (2015): "in vista della considerevole variabilità addizionale nei dati e nella modellazione a coda pesante, distribuzioni asintotiche non sarebbero applicabili se non per una lunghezza del campione enorme. Piuttosto, invece della teoria asintotica, un approccio di bootstrap è raccomandato per le applicazioni pratiche".



## Capitolo 2

# Test di Ramsey Rothman: un piccolo esperimento Monte Carlo

Nel capitolo precedente sono stati illustrati i diversi test esistenti per verificare la presenza o meno di irreversibilità nelle serie storiche. In questo capitolo si illustrano i risultati di un piccolo esperimento di Monte Carlo, uno sviluppo pratico effettuato utilizzando il software R, relativo all'applicazione del test di Ramsey-Rothman (1996), basato sulla funzione di bicovarianza simmetrica, e quindi i risultati ottenuti applicando il test ad una serie reale.

### 2.1 Test applicato a funzioni deterministiche

Inizialmente, il test viene applicato a funzioni deterministiche, dal cui grafico è evidente la presenza o assenza di direzionalità; in particolare vengono utilizzate le funzioni

$$1 \quad f(x) = \cos(x)$$

$$2 \quad \begin{cases} f(x) = e^{0.1z} \text{ per } x \in [0, 50), [550, 600)... \\ f(x) = e^{-0.01z} \text{ per } x \in [50, 550), [600, 1150)... \end{cases}$$

dove  $z = (x - a)$  e  $a$  è il primo valore dell'intervallo  $[a, b)$

$$3 \quad \begin{cases} f(x) = e^{0.05z} \text{ per } x \in [0, 100), [200, 300)... \\ f(x) = e^{-0.05z} \text{ per } x \in [100, 200), [300, 400)... \end{cases}$$

dove  $z = (x - a)$  e  $a$  è il primo valore dell'intervallo  $[a, b)$ .

Successivamente verrà effettuato un piccolo studio di Monte Carlo ed infine il test verrà applicato a serie di dati reali.

I grafici delle funzioni utilizzate sono i seguenti

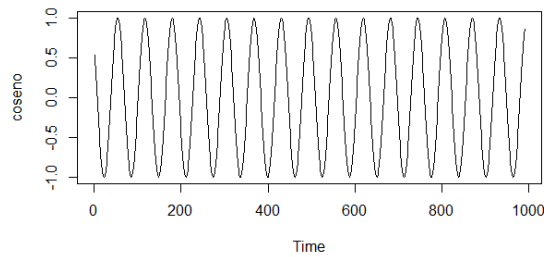


Figura 2.1:  $f(x)=\cos(x)$

## 2.1. TEST APPLICATO A FUNZIONI DETERMINISTICHE37

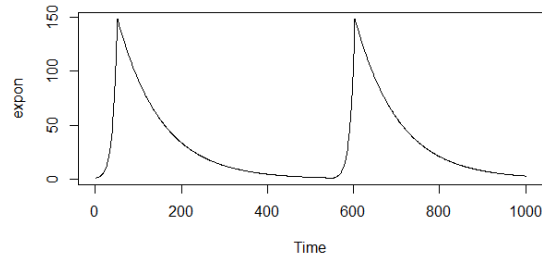


Figura 2.2:  $f(x) = e^{0.1z}$  per  $x \in [0, 50), [550, 600) \dots$ ;  $f(x) = e^{-0.01z}$  per  $x \in [50, 550), [600, 1150) \dots$

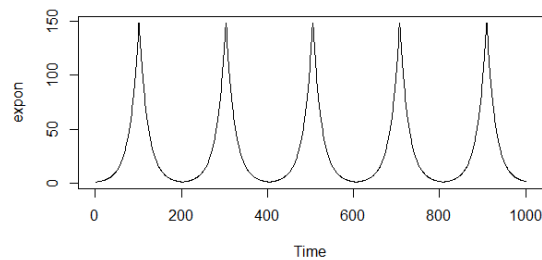


Figura 2.3:  $f(x) = e^{0.05z}$  per  $x \in [0, 100), [200, 300) \dots$ ;  $f(x) = e^{-0.05z}$  per  $x \in [100, 200), [300, 400) \dots$

Come si può notare dai grafici, è evidente l'assenza di direzionalità nei casi 1 e 3, mentre nel caso 2 vi è presenza di direzionalità.

Il test viene valutato ad un livello di confidenza  $1 - \alpha = 0.95$ , e la numerosità campionaria è fissata ad  $n = 1000$ .

I risultati del test, calcolato fino al ritardo 5 sono riportati nella Tabella 2.1; vengono evidenziati i valori il cui valore assoluto è superiore a 1.96 (si ricordi che questa statistica test ha distribuzione asintoticamente Normale Standard).

Tabella 2.1: Test effettuato su funzioni elementari

Ritardo	Funz. 1	Funz. 2	Funz. 3
k=1	1.853026e-06	-0.03321002	0.003285568
k=2	3.304039e-06	-0.33540817	0.005637222
k=3	3.703993e-06	-0.93645508	0.008740327
k=4	5.942744e-06	<b>-2.08001383</b>	0.015280761
k=5	2.916216e-06	<b>-4.18568656</b>	0.017254589

Nel secondo caso preso in esame, il test rifiuta l'ipotesi nulla di reversibilità ai ritardi 4 e 5, dunque la serie storica è irreversibile. Negli altri due casi, il valore assoluto della statistica test è inferiore ad 1.96 per tutti i ritardi presi in considerazione, ciò porta a non rifiutare l'ipotesi nulla di reversibilità.

## 2.2 Un semplice studio di Monte Carlo

Dato che non si hanno informazioni sulle proprietà della funzione di bicovarianza simmetrica nel caso di campioni finiti, si è deciso di effettuare un piccolo studio di Monte Carlo. Ai fini di studiarne il comportamento in campioni finiti, in particolare la potenza di questo test, si sono simulate serie derivanti da vari processi generatori: Normale standard,  $\chi_3^2$ ,  $F(2, 1)$ ,  $F(10, 10)$ . Il test è stato calcolato simulando 50, 100, 200 e 500 serie storiche per ogni processo generatore per valutare se c'è convergenza dei risultati all'aumentare della numerosità campionaria. Ogni serie storica generata ha una numerosità di 200.

Si ricordi che l'irreversibilità temporale può derivare da due fonti: (1) il modello sottostante potrebbe essere **non lineare** anche se le innovazioni sono simmetricamente (forse normalmente) distribuite o;

(2) le innovazioni sottostanti possono provenire da una distribuzione di probabilità **non gaussiana** mentre il modello è lineare.

Ci riferiremo al primo caso (non lineare) come irreversibilità temporale di "Tipo I" e al secondo come irreversibilità temporale di "Tipo II". L'irreversibilità di tipo II è coerente con un processo lineare non gaussiano.

Il test ha una buona potenza se, all'aumentare della numerosità campionaria, il livello empirico (ovvero la frequenza di rifiuto) quando  $H_0$  è vera si attesta attorno al 5% in tutti i primi 5 ritardi e se tende al 100% sotto  $H_1$ . Con i primi due esempi quindi ci si vuole porre sotto  $H_0$  e con i successivi due, sotto  $H_1$ . Si ipotizza che le innovazioni, utilizzate per stimare la varianza della diffe-

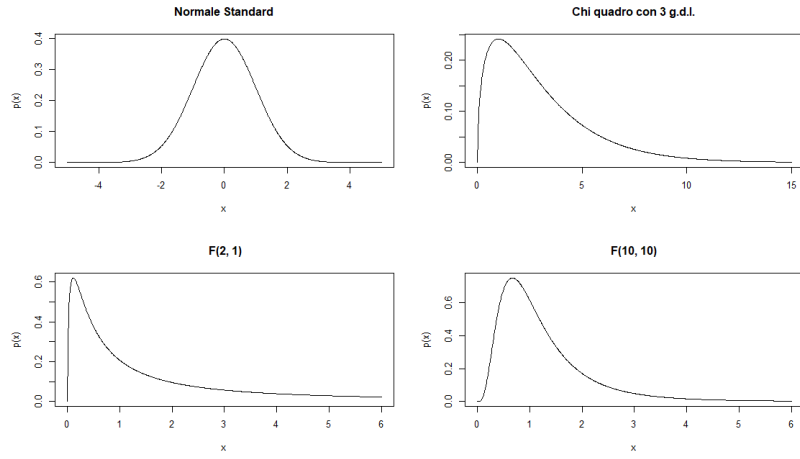


Figura 2.4: densità dei processi  $N(0, 1)$ ,  $\chi_3^2$ ,  $F(2, 1)$ ,  $F(10, 10)$

renza tra le due funzioni di bicovarianza via bootstrap, derivino da una distribuzione Normale Standard.



Tabella 2.2: Test effettuato su alcuni processi generatori dei dati (PGD)

<b>PGD:</b>	<b>n</b>	<b>k=1</b>	<b>k=2</b>	<b>k=3</b>	<b>k=4</b>	<b>k=5</b>
$N(0,1)$	50	4	8	16	8	4
	100	4	6	5	3	5
	200	5.0	4.5	6.0	4.5	4.0
	500	3.6	5.6	4.4	4.2	5.0
$F(10,10)$	50	16	14	4	14	14
	100	12	15	13	21	14
	200	11.0	12.0	9.0	8.5	11.0
	500	5.4	5.8	6.4	5.2	5.8
$F(2,1)$	50	100	100	100	100	100
	100	100	100	100	100	100
	200	100	100	100	100	100
	500	100	100	100	100	100
$\chi_3^2$	50	94	96	92	96	94
	100	90	93	95	94	98
	200	83.0	87.5	88.5	86.5	88.0
	500	76.4	79.8	78.8	78.8	76.6

Come si può vedere dai risultati riportati nella tabella 2.2, al crescere della numerosità campionaria le frequenze di rifiuto empiriche si attestano sul 5% per la  $N(0,1)$  e la  $F(10,10)$ , mentre il  $\chi_3^2$  e  $F(2,1)$  sono molto al di sopra di tale soglia: questo dimostra che il test ha una buona potenza.

Si è deciso inoltre di effettuare un piccolo esperimento di Monte Carlo simulando dei dati provenienti da un AR(1) con  $\phi_1=0.7$  e innovazioni provenienti da vari processi generatori dei dati.

Per ottenere una buona stima della varianza di  $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$  si utilizza un approccio di tipo bootstrap: si adatta un modello AR(p) ai dati, qui di seguito denominati con  $y$ , si ottiene una stima della varianza delle innovazioni e si genera per un numero arbitrario di volte, da me fissato a 200, una serie storica da un modello ARIMA con coefficienti pari a quelli stimati e innovazioni provenienti da una distribuzione Normale con media nulla e varianza calcolata al punto precedente: ci si riferisce a queste serie storiche tramite la lettera  $x$ .

Per ognuna di queste serie ( $x$ ) si calcola il valore di  $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$  ed infine si calcola la varianza di questo insieme di valori.

In seguito, si calcola la potenza empirica del test, ovvero la percentuale di volte in cui il valore della statistica test, applicata alla serie storica  $y$ , è in valore assoluto superiore a 1.96: il test ha una buona potenza se sotto  $H_0$  la percentuale di rifiuti si attesta sul 5% e se sotto  $H_1$  tende a 100 all'aumentare della numerosità campionaria.

In particolare, qui vengono analizzati i casi di innovazioni provenienti dai processi  $N(0, 1)$ ,  $\chi_1^2$ ,  $t_1$ . Le numerosità prese in considerazione per valutare la potenza sono, ancora una volta, 50, 100, 200, 500.

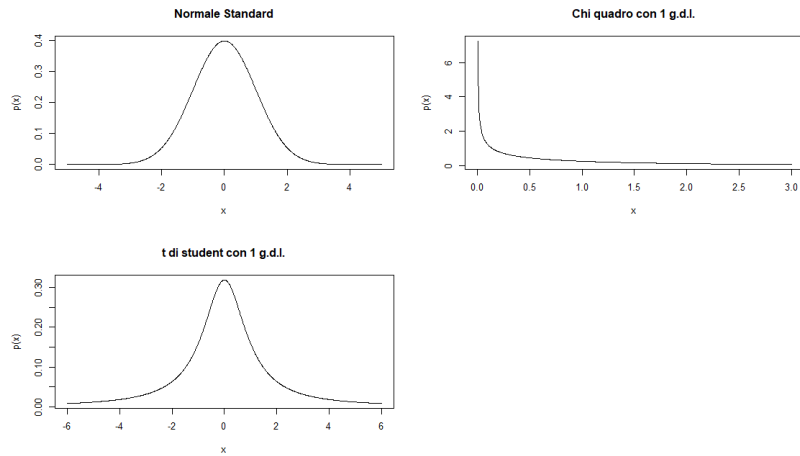


Figura 2.5: densità dei processi  $N(0, 1)$ ,  $\chi_1^2$ ,  $t_1$

Tabella 2.3: Test effettuato su modelli AR(1) con innovazioni provenienti da vari PGD

PGD innovazioni:	n	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
$N(0, 1)$	50	10	12	4	8	6
	100	8	8	9	5	3
	200	5.5	8	8	6	6
	500	4.6	5.8	5.6	5.8	7.6
$\chi_1^2$	50	48	28	10	6	8
	100	70	31	9	4	4
	200	99.5	59.0	23.5	6.0	4.5
	500	100.0	99.0	55.6	16.8	3.8
$t_1$	50	6	12	2	6	4
	100	6	5	3	4	4
	200	7.0	4.0	3.5	4.0	3.0
	500	7.0	3.0	3.2	2.0	2.8

Come si può vedere dai risultati riportati nella tabella 2.3, al crescere della numerosità campionaria il livello empirico si attesta sul 5% per la  $N(0, 1)$  e la  $t_1$  a tutti i ritardi, mentre per il  $\chi_1^2$  tende a 100, questo significa che il test ha una buona potenza.

## 2.3 Test applicato a dati reali

Vengono analizzate due serie storiche di dati reali. Le serie scelte sono il prodotto interno lordo italiano ai prezzi di mercato dal primo trimestre del 1991 al quarto trimestre del 2005 per un totale di 59 osservazioni e il numero di occupati per trimestre (in migliaia) in Italia compresi nella fascia d'età 15-64 anni dal quarto trimestre del 1992 al primo trimestre del 2018 per un totale di 101 osservazioni. Vengono utilizzate le serie destagionalizzate.

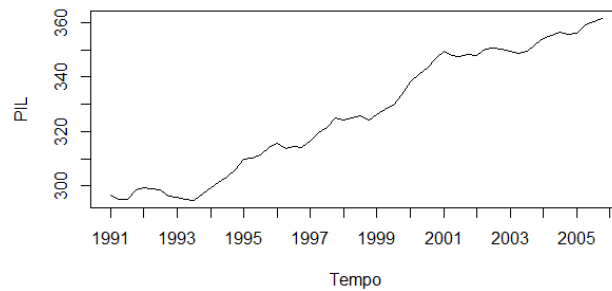


Figura 2.6: Prodotto Interno Lordo ai prezzi di mercato dal primo trimestre 1991 al quarto trimestre 2005, dati destagionalizzati

Ai fini del test, e vista la non stazionarietà presente nei dati, si è deciso di lavorare sui dati differenziati  $y_t^* = y_t - y_{t-1}$

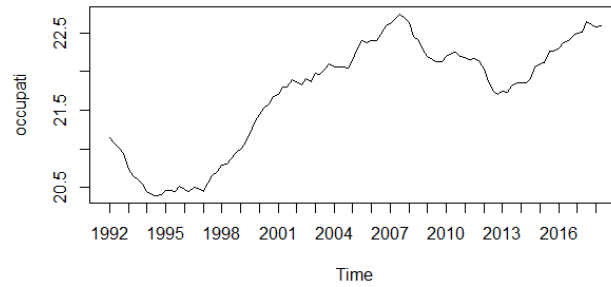
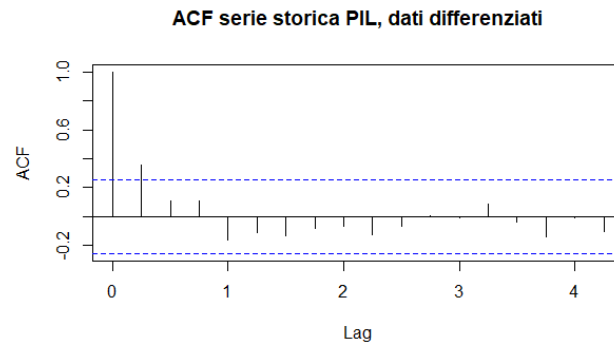


Figura 2.7: numero occupati per trimestre 15-64 anni dal quarto trimestre 1992 al primo trimestre 2018, dati destagionalizzati

Prima di applicare il test è stato adattato un modello puramente AR ai dati.

Nel caso della serie storica del PIL il test dà i seguenti risultati:



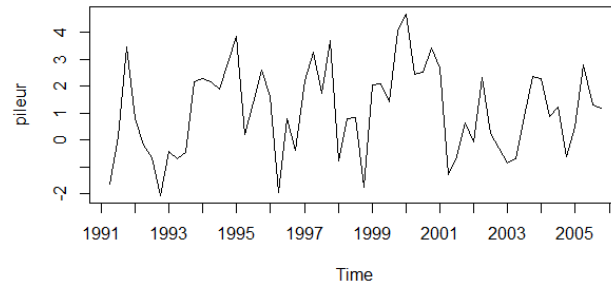
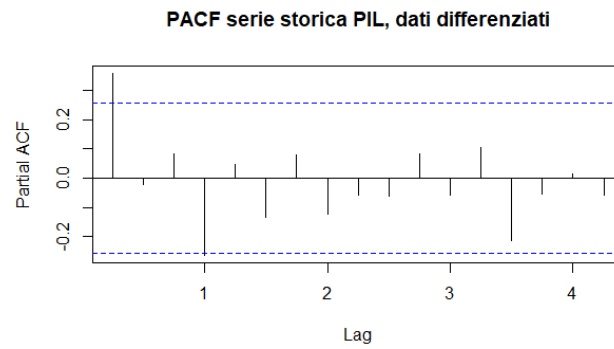


Figura 2.8: Prodotto Interno Lordo ai prezzi di mercato dal primo trimestre 1991 al quarto trimestre 2005, dati destagionalizzati e differenziati



Il modello migliore, secondo il criterio AIC è un AR(1) con

$$\phi_1 = \mathbf{0.5663}$$

$$\hat{V}ar(\phi_1) = \mathbf{0.1061}$$

$$\sigma^2 = \mathbf{2.61}: \log \text{likelihood} = -112.21, \text{aic} = 228.42$$

k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
<b>4.011340283</b>	-0.004337193	<b>3.901353039</b>	<b>-2.412890115</b>	1.216607164

Dato che ai ritardi 1, 3, 4 il valore assoluto della statistica test calcolata sui dati è maggiore di 1.96, ciò porta a rifiutare l'i-

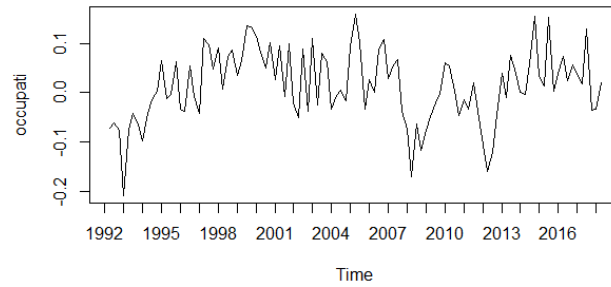
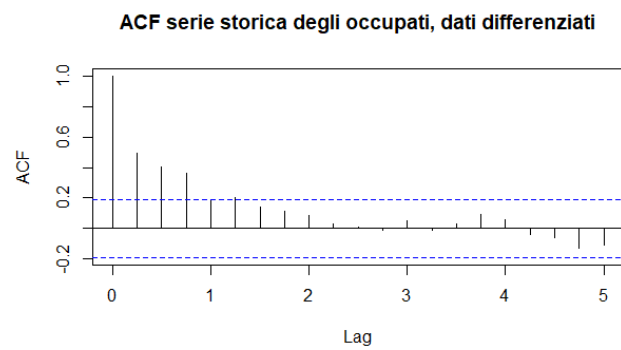


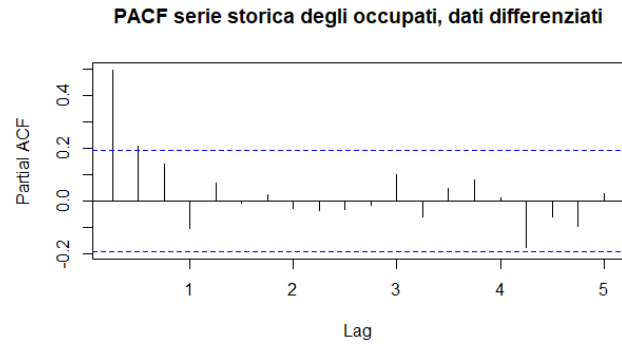
Figura 2.9: numero occupati per trimestre 15-64 anni dal quarto trimestre 1992 al primo trimestre 2018, dati destagionalizzati e differenziati

potesi nulla di reversibilità in favore dell'alternativa. Molte serie storiche economiche e finanziarie sono irreversibili e l'identificazione di questo loro aspetto consente di adattare dei modelli migliori.

Nel caso della serie storica degli occupati;







Il modello migliore, secondo il criterio AIC è un AR(2) con

$$\phi_1 = \mathbf{0.4006}, \phi_2 = \mathbf{0.2228}$$

$$\widehat{Var}(\phi_1) = \mathbf{0.0946}, \widehat{Var}(\phi_2) = \mathbf{0.0948}$$

$$\sigma^2 = \mathbf{0.003746}: \log \text{likelihood} = 144.12, \text{aic} = -282.24$$

il test dà i seguenti risultati

k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
4.630651e-05	1.077555e-04	3.027272e-05	2.919913e-04	-1.832623e-04

Dato che ad tutti i ritardi il valore assoluto della statistica test calcolata sui dati è inferiore 1.96, ciò porta a non rifiutare l'ipotesi nulla di reversibilità.

## 2.4 Conclusioni

In questo lavoro sono stati descritti i principali test ideati per indagare la presenza o assenza di irreversibilità nei dati ed in particolare è stato analizzato il test di Ramsey Rothman. Questo approccio considera il valore della funzione di bicovarianza simmetrica, che è la differenza tra 2 bicovarianze ed è definita come segue:

$$\gamma_{2,1}(k) = E[X_t^2 \cdot X_{t-k}] - E[X_t \cdot X_{t-k}^2]$$

per tutti i valori interi di  $k$ .

Se  $X_t$  è reversibile, allora  $\gamma_{2,1}(k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ .

L'irreversibilità temporale c'è quando l'uguaglianza non si verifica per qualche  $i, j, k$ . Come visto, questa definizione è troppo stringente, quindi si è deciso di limitare la comparazione delle bicovarianze a  $(i + j) \leq m$  e  $k \leq K$  con  $K=5$  e  $m=3$ .

Un processo per cui le differenze tra le bicovarianze soddisfano le disuguaglianze di cui sopra  $\forall i, j, k$  è detto "reversibile di ordine  $m$  e grado  $K$ ". Per completezza sarebbe stato interessante confrontare i risultati e la potenza ottenuti con questo metodo con quelli che si sarebbero ottenuti con gli altri test.

# Appendice

## 2.5 I coefficienti misti di White

Sia  $B_{-\infty}^n \equiv \sigma(\dots, X_n)$  la più piccola raccolta di sottoinsiemi di  $\Omega$  che contiene l'unione delle  $\sigma$ -algebra  $B_a^n$  con  $a \rightarrow \infty$ , sia  $B_{n+m}^\infty \equiv \sigma(X_{n+m}, \dots)$  la più piccola raccolta di sottoinsiemi di  $\Omega$  che contiene l'unione delle  $\sigma$ -algebra  $B_{n+m}^a$  con  $a \rightarrow \infty$ .

intuitivamente possiamo pensare che  $B_{-\infty}^n$  rappresenti tutte le informazioni contenute nel passato della successione  $X_t$  fino al tempo  $n$ , e che  $B_{n+m}^\infty$  rappresenti tutte le informazioni contenute nel futuro della successione  $X_t$  dal tempo  $n+m$  in avanti.

Per una successione di vettori casuali  $X_t$ , si definiscono i coefficienti misti come:

$$\phi(m) \equiv \sup_n(B_{-\infty}^n, B_{n+m}^\infty), \quad \alpha(m) \equiv \sup_n(B_{-\infty}^n, B_{n+m}^\infty)$$

se, per la successione  $X_t$ ,  $\phi(m) \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ ,  $X_t$  è chiamata  $\phi$ -mixing

se, per la successione  $X_t$ ,  $\alpha(m) \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ ,  $X_t$  è chiamata  $\alpha$ -mixing.

le quantità  $\phi(m)$  e  $\alpha(m)$  misurano quanta dipendenza esiste tra eventi separati da almeno  $m$  periodi di tempo. Quindi, se  $\phi(m) = 0$  o  $\alpha(m) = 0$  per qualche  $m$ , eventi distanti  $m$  periodi di tempo sono indipendenti.

*Ammettendo che  $\phi(m)$  o  $\alpha(m)$  convergono a 0 per  $m \rightarrow \infty$ , sono permesse considerazioni di situazioni in cui gli eventi sono asintoticamente indipendenti. Dato che  $\phi(m) \geq \alpha(m)$ ,  $\sigma$ -mixing implicano  $\alpha$ -mixing.*

## 2.6 Codice R

```

set.seed(42)
x<-rnorm(100)
k=2 #ritardo
n=length(x)
y=c(rep(0,k), x[0:(n-k)])

g1=sum(x^2*y)/(n-k)
g2=sum(x*y^2)/(n-k)
gamma=g1-g2 #funzione di bicovarianza simmetrica

test_RR<-function(x, k){
  n=length(x)
  x.s=x-mean(x)
  y=c(rep(0, n))
  k1=k+1
  y=c(rep(0,k), x.s[0:(n-k)])
  g1=sum(x.s^2*y)/(n-k)
  g2=sum(x.s*y^2)/(n-k)
  gamma=g1-g2
# test=gamma/sqrt(var)
  vet=c(g1, g2, gamma)
  return(vet)
}

```

```

}

n=200
valortest=c(0,n)
count=0
ii=0
percent=0
percentnorm=c(rep(0, 5))

for(k in 1:5){
  for (ii in 1:n){

    y=rnorm(n)
    s=200
    gamma_RR=NULL
    for (i in 1:s){
      x=rnorm(n)
      gamma_RR[i]=test_RR(x,k)[3]
    }
    sd_gamma=sd(gamma_RR)
    test=test_RR(y,k)[3]/sd_gamma
    if (abs(test) > 1.96) {count=count+1}
    percent=(count/n)*100
    valortest[ii]=test

  }
  percentnorm[k]=percent
  count=0
}#percentuale di rifiuti di Ho al livello alpha= 0.05

n=500

```

```

ii=0
percent=0
count=0
percentarimachi=c(rep(0, 5))

for(k in 1:5){

  for (ii in 1:n){

    innov.y=rt(n, 10)
    y = arima.sim(list(order = c(1,0,0), ar = 0.7),
    n, innov = innov.y)
    stime.y<-ar(y, lag.max=5)
    res.y <- stime.y$resid
    var.res=var(na.omit(res.y))
    s=200
    gamma_RR=NULL
    p=stime.y$order
    for (i in 1:s){
      innovaz=rnorm(n, 0, var.res)
      x=arima.sim(list(order = c(p,0,0), ar = stime.y$ar),
      n, innov = innovaz)
      gamma_RR[i]=test_RR(x,k)[3]
    }
    sd_gamma=sd(gamma_RR)

    test=test_RR(y,k)[3]/sd_gamma

    if(abs(test) > 1.96){count=count+1}
    percent=(count/n)*100
  }
}

```

```

        valortest [ ii]=test

    }
    percentarimachi [k]=percent
    count=0

}

stime.occ<-arima(occup_1, order=c(2,0,0), include.mean=F)
stime.occ
plot(stime.occ)

testocc=c(rep(0, 5))

for(k in 1:5){

s=1000
gamma_RR=NULL
for (i in 1:s){
    p=2
    x=arima.sim(list(order = c(p,0,0), ar = c(0.4006, 0.2228
    ) ), n = 200)
    gamma_RR[i]=test_RR(x,2)[3]
}
sd_gamma=sd(gamma_RR)

test=test_RR(occup_1 ,k)[3]/sd_gamma
testocc [k]=test
}

```





# Bibliografia

Bisaglia, L. and Gerolimetto M. (2014) "Testing for (non)linearity in economic time series: a Montecarlo comparison" *Quaderni di Statistica*, 16, pp. 5–32.

Brillinger, D.R. and Rosenblatt, M. (1967) Computation and interpretation of k-th order spectra. *Spectral Analysis of Time Series*, 189-232.

Chen YT., Chou RY, Kuan CM (2000) "Testing time reversibility without moment restrictions". *J Econom* 95(1):199–218

Daniell P. J. "Discussion on the Symposium on Autocorrelation in Time Series", (1946), supplemento di "the Journal of the Royal Statistical".

Di Fonzo T., Lisi F., *Serie storiche economiche-analisi statistiche e applicazioni*, Carocci editore

Gini C.,(1914) *On the measurement of concentration and variability of characters*. Reprinted in *Metron* 63(2005):3–38

Grigoletto M., Pauli F., Ventura L., *Modello Lineare-Teoria e applicazioni con R*, Giappichelli editore, pp. 76-80

Lawrence A.J., "Directionality and Reversibility in Time Series", *International Statistical Review*, 59, 1, pp. 67-79

Psaradakis, Zacharias, Assessing Time-Reversibility Under Minimal Assumptions (0000). *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 29, Issue 5, pp. 881-905, September 2008. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1227218> or <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9892.2008.00587>.

Ramsey J.B., Rothman P., "Time Irreversibility and Business Cycle Asymmetry", *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 28, No. 1 (Feb., 1996), pp. 1-21

Sharifdoust M., Mahmoodi S., "On time reversibility of Linear Time series", *Journal of Mathematical Extension*, Vol. 6, No. 4, (2012), pp. 33-47

Shelefi A., Schechtman E., (2016), A Gini-based time series analysis and test for reversibility

Tong H., (1990), "Nonlinear Time series Analysis", *Encyclopedia of biostatistics* No. 4, pp. 3020-3024

Weiss G. (1975) Time-reversibility of linear stochastic processes. *Journal of Applied Probability*, Vol. 12, pp. 831-836

Welsh, Anne K., and Robert W. Jernigan. "A Statistic to Identify Asymmetric Time Series." *American Statistical Association 1983 Proceedings of the Business and Economics Statistics Section* (1983), 390-95.

White, Halbert. *Asymptotic Theory for Econometricians*. New York: Academic Press, 1984.

## **Sitografia e software**

<http://dati.istat.it/>

<https://stackoverflow.com/> <https://www.okpedia.it/indice-di-asimmetria-di-pearson>

## **Software**

[www.r-project.org](http://www.r-project.org)

[www.latex-project.org](http://www.latex-project.org)