



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Un'approssimazione a tempo discreto per la valutazione  
di opzioni con sottostanti diffusivi con salti

Relatore

Prof. Attilio Stella

Correlatore

Prof. Wolfgang J. Runggaldier

Laureando

Alberto Zambonin

Anno Accademico 2018/2019



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Convergenza in legge . . . . .	2
1.2	Strategie, Derivati, Martingalità e Teoremi fondamentali dell' <i>Asset Pricing</i> . . . . .	2
1.2.1	Mercato finanziario discreto e filtrazioni . . . . .	3
1.2.2	Strategie . . . . .	3
1.2.3	Derivati . . . . .	4
1.2.4	Martingalità e Teoremi fondamentali dell' <i>Asset Pricing</i> . . . . .	4
1.3	Richiamo dalla letteratura: "Asymptotique d'un modèle dissymétrique" . . . . .	5
1.3.1	Caso di un processo diffusivo . . . . .	5
1.3.2	Caso di un processo a salti . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Caso di un processo diffusivo con salti</b>	<b>7</b>
2.1	Impostazione . . . . .	7
2.2	Aspetti computazionali . . . . .	8
2.2.1	Martingalità . . . . .	9
2.2.2	Funzione caratteristica . . . . .	9
2.2.3	Passaggio al limite . . . . .	10
2.3	Prezzo di <i>put</i> e <i>call</i> per il modello limite . . . . .	12
2.3.1	Prezzo opzione <i>put</i> . . . . .	13
2.3.2	Prezzo opzione <i>call</i> . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Risultati numerici</b>	<b>15</b>
3.1	Tabelle . . . . .	16
3.2	Considerazioni sui risultati numerici . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>19</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

La finanza matematica è una disciplina che accosta la rappresentazione statistico-matematica ai mercati finanziari. La sua nascita viene fatta risalire alla tesi di dottorato di Louis Bachelier: "La théorie de la spéculation" [2] del 1900, il quale introdusse l'uso del moto browniano in finanza e il concetto che "*the expectation of the speculator is zero*". Tale concetto venne formalizzato matematicamente più tardi, fondamentalmente da Harrison et al. (si veda [7] e [8]). L'idea che i titoli seguissero un andamento browniano ebbe un ruolo chiave, e pose le fondamenta di tale disciplina; questa modellizzazione però permette ai prezzi dei titoli stessi di divenire negativi. Venne quindi sostituito, intorno a metà secolo, da P. Samuelson con il moto browniano geometrico [11], introducendo la funzione esponenziale di un moto browniano, che rese essenziale l'utilizzo del calcolo stocastico.

I modelli ad oggi sviluppati sono molteplici, tra i quali il più noto risulta sicuramente il *modello Black-Scholes*, descrizione a tempo continuo dell'andamento del prezzo di strumenti finanziari, in particolare delle opzioni, che fa uso del moto browniano geometrico introdotto da Samuelson e di alcune altre forti ipotesi<sup>1</sup>. A tale modello, reso pubblico nel 1973, sono succedute molteplici migliorie e, nonostante risulti tuttora il più utilizzato, ad esso sono state apportate anche molteplici critiche; di quest'ultime si fanno presente ad esempio quelle in [9] e [10], le quali non verranno però approfondite ulteriormente. Lo sviluppo di un modello discreto risulta molto funzionale in quanto ha grande malleabilità ed è di facile utilizzo, così infatti, la *formula di Black-Scholes* (BS) (si veda [3]) ha avuto, e ha tuttora, molto successo grazie anche allo sviluppo del modello discreto di mercato binomiale di Cox, Ross e Rubenstein, si veda [6]<sup>2</sup>, che, al limite, tende al modello BS. I suddetti modelli, sono ad oggi i più utilizzati, anche se affiancati da molteplici altri, che si ispirano, più o meno, ad essi (si veda ad esempio [5] e [15]), tra i quali si fa presente, poiché utilizzato nella trattazione, il modello diffusivo con salti. Quest'ultimo è un modello Black-Scholes al quale si affianca la possibilità di avere importanti variazioni di prezzo, i salti, a istanti aleatori di tempo. Tale modello permette di considerare eventi che comportino variazioni rilevanti del mercato, come ad esempio il fallimento di importanti aziende, lo scoppio di *bolle finanziarie* e le crisi.

Si vuole, nella trattazione seguente, determinare un modello discreto che permetta, al limite, di ottenere un modello diffusivo con salti, come quelli rappresentati in [15]; ci si è ispirati al capitolo 9 di [4], nel quale i rendimenti delle azioni seguono, al limite, solamente un processo diffusivo, o solamente un processo poissoniano, mentre, nella trattazione a seguire, vengono ricavati contemporaneamente. Risulta necessario individuare un mercato trinomiale, come spiegato nel paragrafo 2.1, per avere un mercato incompleto, una convergenza più rapida e infinite misure martingala (si veda per spiegazioni la sezione 1.2) tra cui scegliere, mediante calibrazione del modello ai dati di mercato.

Introduciamo quindi nel Capitolo 1 gli strumenti matematici necessari alla trattazione, in particolare

---

<sup>1</sup>E cioè che il mercato fosse in condizioni ideali: con tassi di interesse costanti nel tempo, non considerando dividendi né costi di transazione, nel quale è vigente la perfetta divisibilità di tutte le attività finanziarie (è cioè possibile scambiare frazioni arbitrariamente piccole di ogni titolo sul mercato ed è possibile la vendita allo scoperto).

<sup>2</sup>Oltre che alla sua importante capacità predittiva

nel paragrafo 1.1 le tecniche utilizzate per valutare la convergenza, nel paragrafo 1.2 gli strumenti matematici utilizzati nella parte finanziaria della trattazione e, nel paragrafo 1.3, un breve richiamo alla letteratura cui ci si è ispirati, si passa, nel Capitolo 2 al corpo vero e proprio della trattazione: si introducono i coefficienti del modello trinomiale dai quali si deriva il modello al continuo. Si mostra che per tali coefficienti le misure di probabilità scelte, tra le infinite possibili, sono tutte misure martingale equivalenti<sup>3</sup>. Si ricava nel paragrafo 2.3, il prezzo di una opzione *put* dal modello ricavato e, tramite *put-call parity* quello di un'opzione *call*. Nel Capitolo 3 viene poi valutata, tramite esempi numerici, la convergenza dei prezzi prima, nel modello discreto trinomiale, e dopo aver effettuato il limite, nel modello diffusivo con salti e, infine, nel Capitolo 4 si effettuano alcune brevi considerazioni sulla trattazione.

## 1.1 Convergenza in legge

Tali definizioni sono prese da [4] e introducono gli strumenti matematici che utilizzeremo per mostrare la convergenza del modello discreto a quello continuo.<sup>4</sup>

**Definizione 1.** Una successione di vettori aleatori  $X_n$  a valori in  $\mathbb{R}^d$ , definita su degli spazi di probabilità  $(\Omega^n, \mathcal{A}^n, \mathbb{P}_n)$ , converge in legge ad un vettore aleatorio  $X$ , definito su  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  se, per tutte le funzioni  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  continue e limitate

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}(f(X_n)) \text{ converge a } \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f(X)) \text{ per } n \rightarrow \infty,$$

La notazione è

$$X_n \xrightarrow{\text{legge}} X.$$

**Definizione 2.** La funzione caratteristica  $\Phi_X$  di un vettore aleatorio  $X$ , definito su  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , a valori in  $\mathbb{R}^d$  è definita come

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \Phi_X(u) = \mathbb{E}(\exp(iuX)) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(iuX) \mathbb{P}_X(dx)$$

La funzione caratteristica caratterizza la legge di un vettore aleatorio nel senso che  $\Phi_X(u)$  e  $\Phi_Y(u)$  coincidono  $\forall u \in \mathbb{R}^d$  se e soltanto se  $X$  e  $Y$  hanno la stessa legge, i.e.  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ .

**Definizione 3.** Le funzioni caratteristiche caratterizzano inoltre la convergenza in legge poiché

$$X_n \xrightarrow{\text{legge}} X \text{ se e solamente se } \forall u \in \mathbb{R}^d, \Phi_{X_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi_X(u).$$

## 1.2 Strategie, Derivati, Martingalità e Teoremi fondamentali dell'Asset Pricing

Segue una serie di definizioni e teoremi fondamentali per comprendere ciò di cui si parlerà in seguito, tra cui quelle di *derivato*, di *portafoglio* e di *misura martingala* prese da [13], a cui si rimanda per approfondimenti ulteriori. Si fa inoltre brevemente presente come si modella un mercato discreto in finanza matematica.

---

<sup>3</sup>Tali misure risultano necessarie nella nostra trattazione, ed in generale in finanza, poiché il primo teorema fondamentale dell' *asset pricing* afferma che l'assenza di opportunità di arbitraggio (AOA), cioè l'impossibilità di fare un guadagno certo senza rischio investendo in un portafoglio autofinanziante, è essenzialmente equivalente all'esistenza di una *misura martingala equivalente* (si veda il paragrafo 1.2). In tale misura di probabilità i titoli rischiosi scontati rispetto al titolo non rischioso formano delle martingale: sono cioè processi che, grossolanamente parlando, sono tali che le attese dei valori futuri coincidono col valore corrente, come si vedrà nella sezione 1.2 (Si veda per ulteriori spiegazioni per es. [14] e [13] )

<sup>4</sup>Si fa presente che, in seguito, nella trattazione non vengono evidenziate le uguaglianze in senso probabilistico, le *uguaglianze quasi certe*, poiché risultano, quando utilizzate, lapalissiane.

### 1.2.1 Mercato finanziario discreto e filtrazioni

Consideriamo uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  con  $\Omega$  che ha un numero finito di elementi e in cui assumiamo  $\mathcal{F}$  sia l'insieme delle parti di  $\Omega$  e  $P(\{\omega\}) \geq 0$ . Fissiamo  $t_0, t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}$  con  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$  per rappresentare le date di contrattazione (ove  $t_0$  indica la data odierna e  $t_N$  la data di scadenza del contratto).

Fissato  $d \in \mathbb{R}$ , un modello di mercato discreto è costituito da un titolo non rischioso (*bond*)  $S^0$  e da  $d$  titoli rischiosi (*stock*)  $S^1, \dots, S^d$ . Il bond ha la seguente dinamica deterministica: se  $S_n^0$  indica il valore del bond all'istante  $t_n$ , vale

$$\begin{cases} S_0^0 = 1 \\ S_n^0 = S_{n-1}^0(1 + r_n\Delta) \quad n = 1, \dots, N \end{cases} \quad (1.1)$$

Dove  $\Delta$  è l'ampiezza dell'intervallo di tempo  $t_n - t_{n-1}$ , e  $r_n$ , tale che  $1 + r_n\Delta > 0$ , indica il tasso privo di rischio nel periodo  $n$ -esimo cioè in  $[t_n, t_{n-1}]$ , che nella trattazione prenderemo deterministico e costante su tutto l'orizzonte temporale<sup>5</sup>.

I titoli rischiosi hanno la seguente dinamica stocastica: se  $S_n^i$  indica il prezzo all'istante  $t_n$ , del titolo  $i$ -esimo, allora vale:

$$\begin{cases} S_0^i \in \mathbb{R}_+ \\ S_n^i = S_{n-1}^i(1 + U_n^i) \quad n = 1, \dots, N \end{cases} \quad (1.2)$$

Dove, per ogni  $i = 1, \dots, d$ ,  $U_n^i$  è una sequenza di variabili aleatorie reale che rappresentano il tasso di rendimento dell' $i$ -esimo titolo nel periodo  $n$ -esimo  $[t_n, t_{n-1}]$ .

Poniamo  $U_n = (U_n^1, \dots, U_n^d)$  e supponiamo che il processo  $U_n$  sia adattato ad una filtrazione generica  $(\mathcal{F}_n)$  con  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ . Siccome nei modelli di mercato basati su (1.2), la successione  $U_n$  sarà l'unica sorgente di aleatorietà, supporremo  $\mathcal{F}_n$  generata da  $U_n$  e cioè

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^U := \sigma\{U_k | k \leq n\} \quad n = 1, \dots, N.$$

Infine facciamo notare che siccome la (1.2) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i processi  $U_n$  ed  $S_n$ , la filtrazione  $(\mathcal{F}_n)$  coincide allora anche con la filtrazione generata da  $S$ , cioè  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^S \quad \forall n$  e tale filtrazione rappresenta le informazioni disponibili sul mercato all'istante  $t_n$ . Assumiamo che  $U_n$  sia indipendente da  $\mathcal{F}_{n-1}$  per ogni  $n = 1, \dots, N$ .

### 1.2.2 Strategie

**Definizione 4.** *Un portafoglio (o strategia) è un processo stocastico in  $\mathbb{R}^{d+1}$  definito da:*

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^d, \beta_n)_{n=1, \dots, N}$$

dove  $\alpha_n^i$  (rispettivamente  $\beta_n$ ) rappresenta la quantità del titolo  $S^i$  (rispettivamente titolo non rischioso) detenuta nel portafoglio durante il periodo  $n$ -esimo ossia quella in  $[t_{n-1}, t_n]$ .

**Definizione 5.** *Un portafoglio  $(\alpha, \beta)$  è autofinanziante se vale la relazione*

$$V_{n-1} = \alpha_n S_{n-1} + \beta_n S_{n-1}^0$$

per ogni  $n = 1, \dots, N$ .

Dove  $V_n$  è il valore del portafoglio  $(\alpha, \beta)$  nel periodo  $n$ -esimo, definito come

$$V_n^{(\alpha, \beta)} = \sum_{i=1}^d \alpha_n^i S_n^i + \beta_n S_n^0$$

**Definizione 6.** *Un portafoglio  $(\alpha, \beta)$  è predicibile se  $(\alpha_n, \beta_n)$  è  $\mathcal{F}_{n-1}$  misurabile per ogni  $n=1, \dots, N$*

<sup>5</sup>Come fatto nel modello BS.

### 1.2.3 Derivati

**Definizione 7.** Un *derivato europeo* con sottostante  $S$  è una variabile aleatoria  $X$  definita sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_N^S := \sigma(\{S_n | n \leq N\})$ . La  $X$  viene anche detta *payoff del derivato* o anche *claim*.

Un classico esempio di derivati sono le opzioni *put* europee, le quali sono contratti che danno al detentore il diritto, ma non l'obbligo, di vendere alla scadenza  $N$  un'unità di titolo rischioso sottostante ad un importo fissato  $K$  detto *strike price* o *prezzo d'esercizio*. Il *payoff* di un'opzione put è quindi della forma

$$X = (K - S_N)^+.$$

Introduciamo inoltre il *payoff* di un'opzione *call*:

$$X = (S_N - K)^+.$$

**Definizione 8.** Un derivato si dice *replicabile* se esiste una strategia autofinanziante  $(\alpha, \beta)$  tale che

$$V_N^{(\alpha, \beta)} = X$$

tale strategia è detta *strategia replicante*.

### 1.2.4 Martingalità e Teoremi fondamentali dell'Asset Pricing

Si definisce *prezzo scontato* del titolo  $i$ -esimo come:

$$\tilde{S}_n^i = \frac{S_n^i}{S_0^i}, \quad n = 0, \dots, N.$$

Notiamo che scontare i prezzi equivale ad utilizzare il titolo  $B$  come unità di misura rispetto alla quale esprimere i prezzi di tutti i titoli del mercato. In generale è possibile prendere come unità di misura un qualsiasi titolo il cui prezzo sia sempre positivo: tale titolo viene detto *numeraire*.

**Definizione 9.** Una *misura martingala (MME)* è una misura di probabilità  $\mathbb{Q}$  su  $(\Omega, \mathcal{F})$  tale che:

1.  $\mathbb{Q}$  è equivalente<sup>6</sup> a  $\mathbb{P}$ ;
2.  $\forall n = 1, \dots, N$  vale

$$\tilde{S}_{n-1} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}]$$

ossia  $\tilde{S}$  è una  $\mathbb{Q}$ -martingala.

Riportiamo inoltre il primo teorema fondamentale della valutazione.

**Teorema 1.** (Primo Teorema fondamentale della valutazione)

Un mercato è libero da arbitraggi se e solo se esiste almeno una misura martingala.

E per completezza, sapendo che un mercato in cui ogni derivato è replicabile si dice **mercato completo**, il secondo teorema della valutazione:

**Teorema 2.** (Secondo Teorema fondamentale della valutazione)

Un mercato libero da arbitraggi è completo se e solo se esiste un'unica misura martingala.

Inoltre, il seguente teorema pone le basi per la valutazione d'arbitraggio e verrà utilizzato nella trattazione successiva:

**Teorema 3.** Sia  $X$  un derivato replicabile in un mercato libero da arbitraggi. Allora per ogni strategia replicante e autofinanziante  $(\alpha, \beta)$ , e per ogni misura martingala  $\mathbb{Q}$  vale

$$H_n := V_n^{(\alpha, \beta)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X \frac{S_n^0}{S_N^0} \middle| \mathcal{F}_n\right], \quad n = 0, \dots, N.$$

Tale processo  $H$  è definito *prezzo d'arbitraggio* di  $X$ .

---

<sup>6</sup>Due misure di probabilità si dicono equivalenti se hanno gli stessi eventi di probabilità nulla

<sup>7</sup> $\mathbb{P}$  è la misura fisica

Nell'enunciato del teorema si ha che  $S_n^0$  rappresenta il valore del titolo non rischioso in  $n$ ,  $X = (S_N - K)^+$ ,  $S_N$  il valore del titolo rischioso in  $N$  e  $K$  lo *strike price*,  $\mathcal{F}_n$  la famiglia crescente di  $\sigma$ -algebre dello spazio di probabilità come definita sopra nel paragrafo 1.2.1.

Notiamo in particolare che vale

$$H_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{S_N^0}\right]$$

Nell'eventualità in cui il mercato non sia completo, il *prezzo d'arbitraggio* è definito in modo non univoco, come succede nel nostro caso; le considerazioni in merito vengono fatte in 4.

### 1.3 Richiamo dalla letteratura: "Asymptotique d'un modèle dis-symétrique"

In tale paragrafo si richiama brevemente la trattazione dalla quale si è preso spunto, per approfondimenti si veda il capitolo 9 di [4]. Citiamo inoltre, per sviluppi con finalità analoghe al nostro, nell'ambito delle *opzioni americane* il lavoro [12].

Si ha, nel caso trattato in [4], un mercato libero da arbitraggi e, al contrario di ciò che verrà fatto in seguito, completo.

#### 1.3.1 Caso di un processo diffusivo

L'asintotico di un modello binomiale<sup>8</sup> simmetrico a  $m$  "periodi" opportunamente normalizzati, *i.e.* nel quale:

$$d^{(m)} = rT/m - \sigma\sqrt{T/m} \quad e \quad h^{(m)} = rT/m + \sigma\sqrt{T/m}$$

quando  $m \rightarrow \infty$  è il modello di Black et Scholes in un intervallo  $[0, T]$ , tasso di interesse  $r$  e volatilità  $\sigma$ . Ciò è da intendersi nel senso seguente: presa una successione  $k_m$  t.c.  $k_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} t \in [0, T]$ , allora  $S_{k_m}^{(m)}$  converge in legge verso  $s_0 e^{(r-\sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}Z}$  ove  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  (legge normale standardizzata), cioè verso la legge di  $S_t$ , ove  $S_t$  è soluzione dell'equazione di Black-Scholes

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t), \quad S_0 = s_0 > 0,$$

$(W_t)_{t \in [0; T]}$  movimento browniano standard.

#### 1.3.2 Caso di un processo a salti

L'asintotico gaussiano non è l'unico possibile, infatti ponendo:

$$d^{(m)} = rT/m - \sigma^-T/m \quad e \quad h^{(m)} = rT/m + \sigma^+ - \sigma^-T/m$$

In tal caso si ha che se  $k_m \rightarrow t \in [0, T]$ , allora  $S_{k_m}^{(m)}$  converge in legge verso  $s_0 e^{(r-\sigma^-)t + \log(1+\sigma^+)N_t}$ ,  $t \in [0, T]$ ,

$(N_t)_{t \in [0, T]}$  rappresenta un processo di Poisson di parametro  $\lambda := \frac{\sigma^-}{\sigma^+}$ , cioè verso la legge di  $S_t$ , ove  $S_t$  è soluzione dell'equazione differenziale stocastica poissoniana

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t-}((r - \sigma^-)dt + \sigma^+ dN_t) \\ &= S_{t-}(rdt + \sigma^+ d(N_t - \lambda t)), \end{aligned}$$

considerando  $S_{t-}$  rappresenta il limite a sinistra di  $S$  al tempo  $t$ .

<sup>8</sup>Approfondiremo in seguito solamente la struttura di un particolare modello trinomiale, per eventuali spiegazioni sul modello binomiale si veda ad es. [13]



## Capitolo 2

# Caso di un processo diffusivo con salti

In tale capitolo si introducono, prendendo spunto dalla descrizione svolta nel paragrafo 1.3, i valori dei rendimenti nella sezione 2.1, i quali, come si può vedere, risultano essere una miscela di quelli presentati sopra, infatti non poteva essere altrimenti, poiché si vuole giungere ad un modello che unisce i due precedenti 1.3.2 e 1.3.1. Si mostra nel paragrafo 2.2 sotto, la convergenza in legge, dopo aver mostrato che le misure sono MME, e, a seguire, si fanno presenti alcune considerazioni sulla convergenza stessa e su possibili ulteriori migliorie. Nella sezione 2.3 si calcola invece il prezzo d'arbitraggio, come definito nel Teorema 3, per un'opzione *put*, mostrando il caso particolare in cui tale prezzo è pari a quello ricavato dalla *formula Black-Scholes*<sup>1</sup>. Segue poi, tramite *put-call parity* il prezzo di un'opzione *call*.

Il modello di un mercato binomiale a tempo discreto è inadeguato al nostro fine. Poiché al continuo, vogliamo ottenere un processo diffusivo con salti, il quale corrisponde a un mercato incompleto (a causa delle due sorgenti di aleatorietà, una dovuta al moto diffusivo e una dovuta al processo di salti, con un unico sottostante), si ha che, al discreto, il mercato dovrà essere anch'esso incompleto. Il modello più semplice di mercato discreto incompleto è il modello trinomiale con un unico sottostante, presentato approfonditamente in seguito, che viene quindi utilizzato per ottenere al limite il modello diffusivo con salti.

### 2.1 Impostazione

Consideriamo quindi un mercato a tempo discreto di orizzonte temporale  $T$ , costituito da due titoli: uno senza rischi,  $S^0$ , e uno rischioso, chiamato  $S$ . Modellizziamo l'evoluzione di questi due titoli secondo la dinamica trinomiale a  $m$  periodi (dove  $m$  è un intero non nullo che faremo tendere a  $+\infty$ ). Più precisamente si pone:

$$\forall k \in \{1, \dots, m\}, \begin{cases} S_{kT/m}^{(m)} = S_{(k-1)T/m}^{(m)}(1 + U_k^{(m)}), & S_0^{(m)} = s_0 > 0 \\ S_{kT/m}^{(m),0} = (1 + rT/m)^k \end{cases} \quad (2.1)$$

Con  $r$  parametro reale. Le variabili aleatorie  $U_k^{(m)}$ ,  $1 \leq k \leq m$ , corrispondenti a quelle presentate nel paragrafo 1.2.1, sono i rendimenti di  $S_{kT/m}^{(m)}$  che, nel caso del modello trinomiale, sono supposti assumere tre possibili valori:  $h_m, m_m, d_m$ . Tali rendimenti sono quindi definiti come proiezioni canoniche, fissato  $m$ , sullo spazio canonico  $\Omega^{(m)} := \{h_m, m_m, d_m\}^{(m)}$  definite tramite:

$$U_k^{(m)}(\omega_1, \dots, \omega_m) := \omega_k$$

---

<sup>1</sup>Ponendo cioè il parametro  $c = 0$ , si evidenzierà meglio in seguito.

In vista del prezzaggio abbiamo bisogno di considerare delle MME che, per una  $m$  fissata, indicheremo con  $\mathbb{E}^{(m)}$ . Per tali misure, si vuole che, ricordando la Definizione 9,  $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ , sia soddisfatto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{(m)}(U_k^{(m)} | \mathcal{F}_{(k-1)}^{(m)}) &= h_m \mathbb{P}^{(m)}(U_k^{(m)} = h_m) + m_m \mathbb{P}^{(m)}(U_k^{(m)} = m_m) + d_m \mathbb{P}^{(m)}(U_k^{(m)} = d_m) = \\ &=: h_m q_h^{(m,k)} + m_m q_m^{(m,k)} + d_m q_d^{(m,k)} = r\delta^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

In particolare, le  $h_m$ ,  $m_m$ ,  $d_m$ ,  $q_h^{(m,k)}$ ,  $q_m^{(m,k)}$ ,  $q_d^{(m,k)}$  (ponendo  $q_i^{(m,k)} := \mathbb{P}^{(m)}(U_k^{(m)} = i_m)$ , con  $i = h, m, d$ ), dovranno soddisfare:

$$\begin{cases} q_h^{(m,k)} h_m + q_m^{(m,k)} m_m + q_d^{(m,k)} d_m = r\delta^2 \\ q_h^{(m,k)} + q_m^{(m,k)} + q_d^{(m,k)} = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

dove la seconda equazione impone che la somma delle probabilità sia uno, come ci si aspetta da una misura di probabilità. Scelti  $h_m$ ,  $m_m$ ,  $d_m$  si ha un insieme infinito di MME ottenute dal sistema (2.3), una per ogni possibile scelta di  $q_h^{(m,k)}$ . Tra le varie possibili scelte possiamo considerare quelle in cui  $q_h^{(m,k)}$  non dipenda dal periodo  $k$ . Con tale scelta tutte le  $q_i^{(m,k)}$  diventano delle  $q_i^{(m)}$  indipendenti da  $k$ . Essendo quindi le  $q_i^{(m)}$  costanti reali (non aleatorie), si deduce che le variabili aleatorie  $U_k^{(m)}$  sono indipendenti nelle misure scelte, tale informazione verrà utilizzata nel paragrafo 2.2.3.

L'idea alla base del lavoro è determinare dei valori di  $h_m$ ,  $d_m$ ,  $m_m$ , tali che conducano a una sequenza di MME che, insieme a tali rendimenti, permettano di determinare la convergenza in legge al modello continuo diffusivo con salti, come accennato in precedenza.

Vogliamo mostrare che scegliendo:

$$\begin{aligned} h_m &= rT/m + \sigma^+ & q_h^{(m,k)} &= cT/m \\ m_m &= rT/m + \sigma^+ \sqrt{T/m} & q_m^{(m,k)} &= \frac{1}{\sigma^+ + \sigma^-} (\sigma^- - c\sigma^+ \sqrt{T/m} - c\sigma^- T/m) \\ d_m &= rT/m - \sigma^- \sqrt{T/m} & q_d^{(m,k)} &= \frac{\sigma^+}{\sigma^+ + \sigma^-} (1 + c\sqrt{T/m} - cT/m) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Si ottiene, con  $\sigma^+, \sigma^-, r, T, c \in \mathbb{R}^2$ , tramite la convergenza in legge, che il sottostante segue un andamento diffusivo con salti (Per approfondimenti sul modello diffusivo con salti si veda per es. [15] e [1]). Notiamo inoltre che ponendo  $c = 0$  ci si riconduce al modello richiamato nella sezione 1.3.1, lo si farà notare meglio, anche al continuo, al termine della trattazione. Si vede anche, come fatto presente in precedenza, che le  $q_i^{(m,k)}$  scelte sono costanti reali (non aleatorie) indipendenti da  $k$ , d'ora in avanti verranno quindi chiamate:  $q_i^{(m)}$ , per  $i = h, m, d$ .

## 2.2 Aspetti computazionali

In questo capitolo poniamo per semplicità  $\sqrt{T/m} = \delta$ . Dopo aver ricordato le condizioni per la martingalità, nel paragrafo 2.2.1, si mostra che le  $q_i^{(m)}$  definite come nell'eq. (2.4), sono effettivamente delle MME. Dalla Definizione 2, si ricava nella sezione 2.2.2 la funzione caratteristica del modello, per poi, nella sezione 2.2.3 valutarne il limite e farne le considerazioni del caso, tra le quali menzioniamo la convergenza in legge al modello continuo diffusivo con salti.

---

<sup>2</sup>Si hanno in realtà delle limitazioni su tali parametri, poiché si vogliono le  $q_i^{(m)}$  essere misure di probabilità, quindi soddisfacenti  $0 \leq q_i^{(m)}$  (tralasciamo qui la condizione che sommino a uno poiché è richiesta nel sistema per la martingalità (2.2)) ed inoltre  $-1 < d_m < m_m < h_m$ , queste condizioni portano delle limitazioni abbastanza rilevanti al modello.

## 2.2.1 Martingalità

Ricordando il paragrafo 1.2.4, dalla Definizione 9, si ricava il sistema mostrato nell'eq. (2.2) e ricordando l'eq. (2.3) si vuole soddisfatto:

$$\begin{cases} q_h^{(m)} h_m + q_m^{(m)} m_m + q_d^{(m)} d_m = r\delta^2 \\ q_h^{(m)} + q_m^{(m)} + q_d^{(m)} = 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Cioè, considerando (2.4):

$$\begin{cases} r\delta^2 = c\delta^2(r\delta^2 + \sigma^+) + \\ \quad + \frac{1}{\sigma^+ + \sigma^-}(\sigma^- - c\sigma^+\delta - c\sigma^-\delta^2)(r\delta^2 + \sigma^+\delta) + \\ \quad + \frac{\sigma^+}{\sigma^+ + \sigma^-}(1 + c\delta - c\delta^2)(r\delta^2 - \sigma^-\delta) \\ 1 = c\delta^2 + \frac{1}{\sigma^+ + \sigma^-}(\sigma^- - c\sigma^+\delta - c\sigma^-\delta^2) + \frac{\sigma^+}{\sigma^+ + \sigma^-}(1 + c\delta - c\delta^2) \end{cases} \quad (2.6)$$

Verifichiamo (2.6). Si ha:

$$\begin{cases} cr\delta^4 + c\sigma^+\delta^2 + \\ \quad + \frac{1}{\sigma^+ + \sigma^-}(\sigma^- r\delta^2 - c\sigma^+ r\delta^3 - c\sigma^- r\delta^4 + \sigma^+ \sigma^- \delta - c\sigma^{+2}\delta^2 - c\sigma^+ \sigma^- \delta^3 + \\ \quad + \sigma^+ r\delta^2 + c\sigma^+ r\delta^3 - c\sigma^+ r\delta^4 - \sigma^- \sigma^+ \delta - c\sigma^+ \sigma^- \delta^2 + c\sigma^+ \sigma^- \delta^3) = \\ \quad = \delta \left( \frac{\sigma^+ \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} - \frac{\sigma^+ \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} \right) + \delta^2 \left( \frac{r\sigma^+ + r\sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} - \frac{c\sigma^{+2} + c\sigma^+ \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} + c\sigma^+ \right) + \\ \quad + \delta^3 \left( \frac{cr(\sigma^+ - \sigma^+)}{\sigma^+ + \sigma^-} \right) + \delta^4 c \left( r - \frac{r\sigma^- + r\sigma^+}{\sigma^+ + \sigma^-} \right) = r\delta^2 \\ \quad \frac{1}{\sigma^+ + \sigma^-} (c(\sigma^+ + \sigma^-)\delta^2 + \sigma^- - c\sigma^+\delta - c\sigma^-\delta^2 + \sigma^+ + c\sigma^+\delta - c\sigma^+\delta^2) = 1 \quad \square \end{cases} \quad (2.7)$$

La martingalità è perciò soddisfatta nella nostra scelta di parametri (2.4) (in realtà però, nella pratica si è fatto il contrario, si è cercato dei parametri, che soddisfacessero a priori la martingalità e che convergessero al modello diffusivo con salti).

## 2.2.2 Funzione caratteristica

In questo capitolo si calcola, dopo aver effettuato alcuni sviluppi in serie (quelli del logaritmo e dell'esponenziale), in base alla definizione data nell'introduzione nel paragrafo 1.1, la funzione caratteristica del nostro modello.

Sviluppiamo preliminarmente, considerando lo sviluppo di McLaurin<sup>3</sup>:

$$\log(1 + h_m) = \log(1 + r\delta^2 + \sigma^+) = \log(1 + \sigma^+) + \frac{r}{1 + \sigma^+} \delta^2 + o(\delta^2)$$

$$\log(1 + m_m) = \log(1 + r\delta^2 + \sigma^+\delta) = \sigma^+\delta + \left(r - \frac{\sigma^{+2}}{2}\right)\delta^2 + o(\delta^2)$$

$$\log(1 + d_m) = \log(1 + r\delta^2 - \sigma^-\delta) = -\sigma^-\delta + \left(r - \frac{\sigma^{-2}}{2}\right)\delta^2 + o(\delta^2)$$

Calcoliamo inoltre, considerando la definizione di esponenziale:  $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ , e troncando al secondo grado:

$$e^{iu \log(1+h_m)} = e^{iu \log(1+\sigma^+)} \left(1 + \frac{r}{1+\sigma^+} iu\delta^2 + o(\delta^2)\right)$$

$$e^{iu \log(1+m_m)} = 1 + iu\sigma^+\delta + \left[iu\left(r - \frac{\sigma^{+2}}{2}\right) - \frac{\sigma^{+2}}{2} u^2\right]\delta^2 + o(\delta^2)$$

$$e^{iu \log(1+d_m)} = 1 - iu\sigma^-\delta + \left[iu\left(r - \frac{\sigma^{-2}}{2}\right) - \frac{\sigma^{-2}}{2} u^2\right]\delta^2 + o(\delta^2)$$

<sup>3</sup>  $f(\delta) = f(0) + f'(0)\delta + 1/2f''(0)\delta^2 + \dots$

Ricordando la Definizione 2 abbiamo:

$$\begin{aligned}
\Phi_m(u) &= \mathbb{E}[e^{iu \log(1+U^{(m)})}] = q_h^{(m)} e^{iu \log(1+h_m)} + q_m^{(m)} e^{iu \log(1+m_m)} + q_d^{(m)} e^{iu \log(1+d_m)} = \\
&= c\delta^2 e^{iu \log(1+\sigma^+)} \left(1 + \frac{r}{1+\sigma^+} iu\delta^2\right) + o(\delta^2) + \\
&+ \frac{1}{\sigma^+ + \sigma^-} (\sigma^- - c\sigma^+ \delta - c\sigma^- \delta^2) \left[1 + iu\sigma^+ \delta + \left[iu\left(r - \frac{\sigma^{+2}}{2}\right) - \frac{\sigma^{+2}}{2} u^2\right] \delta^2 + o(\delta^2)\right] + \\
&+ \frac{\sigma^+}{\sigma^+ + \sigma^-} (1 + c\delta - c\delta^2) \left[1 - iu\sigma^- \delta + \left[iu\left(r - \frac{\sigma^{-2}}{2}\right) - \frac{\sigma^{-2}}{2} u^2\right] \delta^2 + o(\delta^2)\right] = \\
&= \frac{\sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} \left[1 + iu\sigma^+ \delta + \left[iu\left(r - \frac{\sigma^{+2}}{2}\right) - \frac{\sigma^{+2}}{2} u^2\right] \delta^2 + o(\delta^2)\right] + \\
&+ \frac{\sigma^+}{\sigma^+ + \sigma^-} \left[1 - iu\sigma^- \delta + \left[iu\left(r - \frac{\sigma^{-2}}{2}\right) - \frac{\sigma^{-2}}{2} u^2\right] \delta^2 + o(\delta^2)\right] + \\
&- \frac{c\sigma^+}{\sigma^+ + \sigma^-} \left[1 + iu\sigma^+ \delta + o(\delta^2)\right] - \left(\frac{c\sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} \delta^2 + o(\delta^2)\right) + \\
&+ \frac{c\sigma^+}{\sigma^+ + \sigma^-} \left[1 - iu\sigma^- \delta + o(\delta^2)\right] - \left(\frac{c\sigma^+}{\sigma^+ + \sigma^-} \delta^2 + o(\delta^2)\right) + \\
&+ (c\delta^2 e^{iu \log(1+\sigma^+)} + o(\delta^2)) = \\
&= 1 + \left[iu\left(r - \frac{\sigma^+ \sigma^-}{2}\right) - \frac{\sigma^+ \sigma^-}{2} u^2\right] \delta^2 - iuc\delta^2 \sigma^+ - c\delta^2 + c\delta^2 e^{iu \log(1+\sigma^+)} + o(\delta^2) = \\
&= 1 + \left[iu\left(r - \sigma^+ \left(c + \frac{\sigma^-}{2}\right)\right) - \frac{\sigma^+ \sigma^-}{2} u^2 + c(e^{iu \log(1+\sigma^+)} - 1)\right] \delta^2 + o(\delta^2).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Notiamo che  $o(\delta^2)$  è un numero complesso.

L'*insight* principale dato da [4], oltre che a una indicativa forma dei rendimenti, è stata che, la probabilità  $q_h^{(m)}$  (che il sottostante assuma il valore del rendimento  $h_m$ , il quale al limite continuo introduce la parte a salti), debba essere proporzionale a  $T/m$  (o quantomeno un sottoinsieme delle infinite possibili  $q_h^{(m)}$  lo è), cosicché, nella *funzione caratteristica* (2.8), fossero presenti solo termini di primo grado in  $T/m (= \delta^2)$  per la parte poissoniana (quella nella forma  $c\delta^2 e^{iu \log(1+h_m)}$ , il secondo termine nella parentesi quadra nella formula (2.8)).

Inserendo gli  $q_h^{(m)}$  e  $h_m$  come determinati sopra, nel sistema (2.3), e modificando leggermente i rendimenti  $m_m$  e  $d_m$ , con considerazioni simili a quelle effettuate sulla parte poissoniana, e cioè valutando la forma della funzione caratteristica (questa volta per la parte diffusiva), si sono potuti ottenere i parametri in (2.4) che permettono la convergenza in legge al modello diffusivo con salti.

### 2.2.3 Passaggio al limite

Consideriamo ora la funzione  $Y^{(m)} := \log\left(\frac{S_T^{(m)}}{s_0}\right)^4$  e cerchiamo di determinarne la funzione caratteristica di  $Y^{(m)}$  in funzione di  $\Phi_m(u)$ .

Abbiamo allora:

$$Y^{(m)} = \log\left(\prod_{k=1}^m \frac{S_{\frac{kT}{m}}^{(m)}}{S_{\frac{(k-1)T}{m}}^{(m)}}\right) = \log\left(\prod_{k=1}^m (1 + U_k^{(m)})\right) = \sum_{k=1}^m \log(1 + U_k^{(m)}) \tag{2.9}$$

---

<sup>4</sup>Il motivo di introdurre tale funzione risulterà più chiaro in seguito, soprattutto nell'equazioni (2.13) e (2.14), e nel passaggio dalla prima alla seconda; dipende ovviamente da considerazioni sul modello di andamento secondo il moto browniano geometrico del sottostante (anche se con presenza di salti).

Da qui, utilizzando l'indipendenza degli  $U_k^{(m)}$  nella MME scelta, si ha che:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{(m)}(e^{iuY^{(m)}}) &= \mathbb{E}^{(m)}\left(\prod_{k=1}^m e^{iu \log(1+U_k^{(m)})}\right) = (\Phi_m(u))^m = \\ &= \left(1 + \frac{iu(r - \sigma^+(c + \frac{\sigma^-}{2})) - \frac{\sigma^+\sigma^-}{2}u^2 + c(e^{iu \log(1+\sigma^+)} - 1) + \epsilon_m T}{m}\right)^m\end{aligned}\quad (2.10)$$

Dove  $(\epsilon_m)_{m \geq 1}$  è una successione di numeri complessi che converge a zero per  $m \rightarrow \infty$ .

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{iu(r - \sigma^+(c + \frac{\sigma^-}{2})) - \frac{\sigma^+\sigma^-}{2}u^2 + c(e^{iu \log(1+\sigma^+)} - 1) + \epsilon_m T}{m}\right)^m &= \\ = e^{iu(r - \sigma^+(c + \frac{\sigma^-}{2}))T - \frac{\sigma^+\sigma^-}{2}u^2 T + cT(e^{iu \log(1+\sigma^+)} - 1)} &= \\ = e^{iu(r - \sigma^+(c + \frac{\sigma^-}{2}))T - \frac{\sigma^+\sigma^-}{2}u^2 T} e^{cT(e^{iu \log(1+\sigma^+)} - 1)}\end{aligned}\quad (2.11)$$

E perciò:

$$\mathbb{E}^{(m)}(e^{iuY^{(m)}}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} e^{iu(r - \sigma^+(c + \frac{\sigma^-}{2}))T - \frac{\sigma^+\sigma^-}{2}u^2 T} e^{cT(e^{iu \log(1+\sigma^+)} - 1)}\quad (2.12)$$

Da cui:

$$\log(S^{(m)}/s_0) \xrightarrow{\text{legge}} (r - \sigma^+(c + \frac{\sigma^-}{2})T) + \sqrt{\sigma^+\sigma^-}T\mathcal{N}(0; 1) + \log(1 + \sigma^+)N_T^c\quad (2.13)$$

Dove in (2.13) si ha che la  $\mathcal{N}$  designa una variabile aleatoria che segue una legge normale di media 0 e di varianza 1, mentre  $N_T^c$  rappresenta una variabile aleatoria di Poisson di parametro  $cT$ . Si può quindi riscrivere come:

$$S_T^{(m)} \xrightarrow{\text{legge}} s_0 e^{(r - \sigma^+(c + \frac{\sigma^-}{2})T) + \sqrt{\sigma^+\sigma^-}T\mathcal{N}(0; 1) + \log(1 + \sigma^+)N_T^c}\quad (2.14)$$

cioè:

$$S_T^{(m)} \xrightarrow{\text{legge}} S_T$$

dove  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  è soluzione dell'equazione differenziale che rappresenta un processo diffusivo con salti:

$$dS_t = S_{t-}(a_t dt + \sigma_t dW_t + \gamma_t dN_T^c)\quad (2.15)$$

avendo posto  $a_t = r - c\sigma^+$ ,  $\sigma_t = \sqrt{\sigma^+\sigma^-}$ ,  $\gamma_t = \sigma^+$ .

Che possiamo riscrivere come

$$dS_t = S_{t-}(r_t dt + \sigma_t dW_t + \gamma_t d(N_T^c - ct))$$

ove  $S_{t-}$  rappresenta il limite a sinistra di  $S$  al tempo  $t$ . Infatti scrivendola in tal modo si mette in mostra l'aspetto di martingalità del processo, cioè, scontando il titolo:  $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-}(\sigma_t dW_t + \gamma_t d(N_T^c - ct))$ . Come filtrazione sullo spazio di probabilità al continuo considereremo la  $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, N_s^c | s \geq t\}$ . Si dimostra da [4] inoltre che  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$S_t^{(m)} \xrightarrow{\text{legge}} S_t$$

con  $S_t^{(m)} = S_{kT/m}$  quando  $t \in [\frac{kT}{m}, \frac{(k+1)T}{m}]$ ; si ha anche che c'è convergenza delle distribuzioni "finito-dimensionali" :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t_1, \dots, t_p \in [0, T], \quad (S_{t_1}^{(m)}, \dots, S_{t_p}^{(m)}) \xrightarrow{\text{legge}} (S_{t_1}, \dots, S_{t_p}).$$

Il risultato di convergenza più generale che può essere stabilito è la convergenza funzionale (debole), cioè la convergenza di  $(S_t^{(m)})_{t \in [0, T]}$  verso  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  come variabili casuali in uno spazio funzionale, qui

lo spazio  $\mathbb{D}_1([0, T])$  di Skorokhod delle funzioni continue a destra e con limite a sinistra, munito di topologia omonima. Una tale convergenza funzionale debole permette di stabilire la convergenza dei prezzi d'opzioni esotiche, nelle quali il *payoff* dipende da tutta la traiettoria del sottostante tra 0 e  $T$ .

Notiamo a posteriori che anche dopo il limite, il titolo rischioso  $\tilde{S}_t$ , scontato rispetto al titolo non rischioso, forma una martingala e di conseguenza anche le misure di probabilità convergono ad una MME, ovviamente variabile al variare di  $c$ . Il mercato infatti rimane incompleto, come anticipato in 2.1, permettendoci di affrontare la trattazione seguente. Notiamo inoltre che ponendo  $c = 0$ , il parametro della distribuzione poissoniana diventa nullo, il sottostante segue quindi un andamento solamente *lognormale*, come nel modello *Black-Scholes*.

Evidenziamo poi che, con un salto in  $t = t^*$ , il processo di salti determina una variazione di  $\Delta S = S_{t^*+} - S_{t^*-} = \gamma_t S_{t^*-}$ . In alcuni modelli  $\gamma_t$  è sostituita da un'ulteriore variabile aleatoria che determina l'ampiezza del salto. Tali processi vengono chiamati *marked point processes* e possono risultare più realistici ma complicano ulteriormente la trattazione, per approfondimenti si veda ad es. [15].

### 2.3 Prezzo di *put* e *call* per il modello limite

Vogliamo ora determinare il prezzo d'arbitraggio (dato dal Teorema 3), secondo i parametri scelti, di un'opzione *put* europea, della quale convergenza siamo sicuri poiché il *claim* è una funzione chiaramente continua e limitata (si veda l'immagine a seguire) e quindi la convergenza è assicurata dalla Definizione 1, e tramite *put-call parity*, il prezzo di una *call*. Sappiamo che il prezzo d'arbitraggio per un'azione *put* europea è definito dal valore atteso, in una MME, del suo *payoff* scontato, come fatto presente in 1.2.4. Si effettua quindi un doppio valore atteso: il primo, fissato il processo poissoniano  $N_T^c$ , sulla variabile aleatoria gaussiana e il secondo sulla variabile poissoniana stessa. Il primo valore atteso, dato il processo poissoniano, risulta essere identico a quello che si ottiene per *Black-Scholes*, a meno del fattore  $e^{-\log(1+\sigma^+)N_T^c}$  (che compare anche nella definizione di  $d_2$  sotto forma di  $K'$ ). Per la seconda parte invece si è effettuato classicamente il valore atteso di una variabile poissoniana. Il risultato, nell'eq. (2.24) risulta essere leggermente complicato, ma identico a quello ottenuto nella Sezione 6.2 di [15], mostrando quindi la bontà dei calcoli e della modellizzazione discreta.

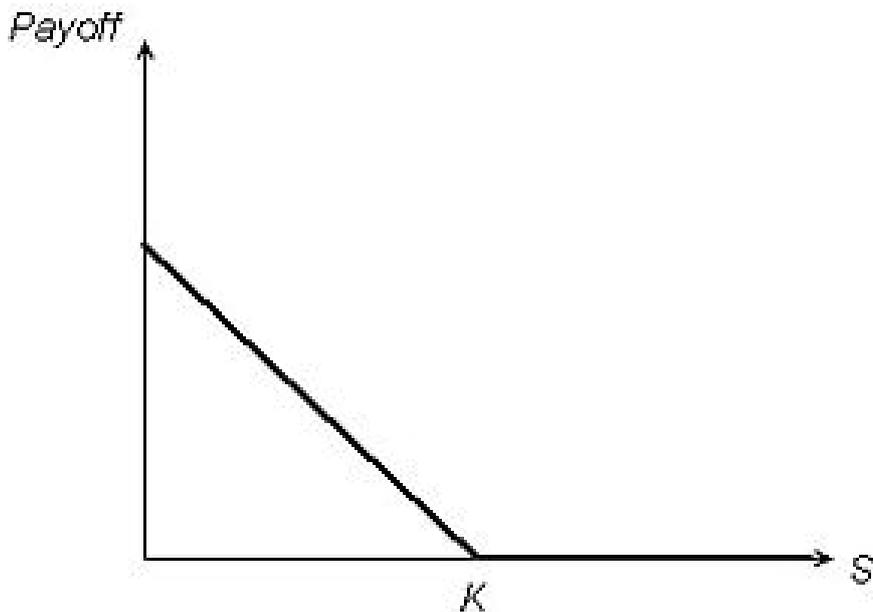


Figura 2.1: Prezzo di una opzione *put* al variare di  $S$ , dove  $K$  è lo *strike price*

### 2.3.1 Prezzo opzione *put*

Per definizione <sup>5</sup> allora:

$$P_t^{(m)} = \frac{1}{(1 + \frac{r(T-t)}{m})^m} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{(m)}[X|\mathcal{F}_t] = \frac{1}{(1 + \frac{r(T-t)}{m})^m} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{(m)}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{(m)}[X|N_T^c]|\mathcal{F}_t] \quad (2.16)$$

avendo definito  $X = (K - S_T^{(m)})^+$ .

D'ora in avanti si considererà sempre il limite  $m \rightarrow \infty$ . Quindi usando (2.14) e (2.16) si ha

$$P_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(K - s_t e^{(r-\sigma^+(c+\frac{\sigma^-}{2})(T-t)+\sqrt{\sigma^+\sigma^-(T-t)}\mathcal{N}(0;1)+\log(1+\sigma^+)N_T^c)^+ | N_T^c]|\mathcal{F}_t] \quad (2.17)$$

Notiamo che

$$S_T < K \leftrightarrow e^{(r-\sigma^+(c+\frac{\sigma^-}{2})(T-t)+\sqrt{\sigma^+\sigma^-(T-t)}\mathcal{N}(0;1)} < \frac{K'}{s_t} \quad (2.18)$$

avendo posto  $K' = K e^{-\log(1+\sigma^+)N_T^c}$ . Quindi, ricaviamo l'espressione per la parte diffusiva, come si suole fare per Black-Scholes

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(0;1) &< \frac{\log(K'/s_t) - (r - c\sigma^+ - \frac{\sigma^+\sigma^-}{2})(T-t)}{\sqrt{\sigma^+\sigma^-}\sqrt{T-t}} =: -d_2, \\ \text{con } d_2 &= \frac{(r - c\sigma^+ - \frac{\sigma^+\sigma^-}{2})(T-t) + \log(s_t/K')}{\sqrt{\sigma^+\sigma^-}\sqrt{T-t}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Sia ora  $A = [K > S_T] \in \mathcal{F}_T$ , nello spazio di base per il problema limite, e  $I_A$  la funzione indicatrice dell'evento A, definita come :

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A; \\ 0, & \text{se } \omega \notin A. \end{cases} \quad (2.20)$$

Notiamo che (2.16) può scriversi, dopo aver effettuato il limite, come:

$$\begin{aligned} P_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[I_A(K - S_T)|N_T^c]|\mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[K\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[I_A|N_T^c] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[I_A S_T|N_T^c]|\mathcal{F}_t\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Computiamo ora separatamente i due valori attesi per sottrarli successivamente.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[I_A|N_T^c]|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\int_{-\infty}^{-d_2} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Phi(-d_2)|\mathcal{F}_t] \quad (2.22)$$

Dove  $\Phi$  è la funzione di ripartizione della normale standard.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[I_A S_T|N_T^c]|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\int_{-\infty}^{-d_2} S_t e^{(r-c\sigma^+ - \frac{\sigma^+\sigma^-}{2})(T-t)+\sqrt{\sigma^+\sigma^-}\sqrt{T-t}x} e^{\log(1+\sigma^+)N_T^c} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx|\mathcal{F}_t] = \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_t e^{(r-c\sigma^+ - \frac{\sigma^+\sigma^-}{2})(T-t)} e^{\log(1+\sigma^+)N_T^c} e^{\frac{\sigma^+\sigma^-(T-t)}{2}} \int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{\sigma^+\sigma^-(T-t)}{2} + \sqrt{\sigma^+\sigma^-}\sqrt{T-t}x - x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}|\mathcal{F}_t] = \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_t e^{(r-c\sigma^+ - \frac{\sigma^+\sigma^-}{2})(T-t)} e^{\log(1+\sigma^+)N_T^c} e^{\frac{\sigma^+\sigma^-(T-t)}{2}} \int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{(x-\sqrt{\sigma^+\sigma^-}\sqrt{T-t})^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}|\mathcal{F}_t] = \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_t e^{(r-c\sigma^+ - \frac{\sigma^+\sigma^-}{2})(T-t)} e^{\log(1+\sigma^+)N_T^c} e^{\frac{\sigma^+\sigma^-(T-t)}{2}} \Phi(-d_2 - \sqrt{\sigma^+\sigma^-}\sqrt{T-t})|\mathcal{F}_t]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

<sup>5</sup>Il prezzo di un'opzione è infatti dato dal valore atteso del *payoff* scontato, come già detto 1.2.4, si veda per approfondimenti [13]

Perciò, unendo in (2.21) le equazioni (2.22) e (2.23) si avrà:

$$\begin{aligned}
P_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[K\Phi(-d_2) - S_t e^{(r-c\sigma^+)(T-t)} e^{\log(1+\sigma^+)N_T^c} \Phi(-d_2 - \sqrt{\sigma^+\sigma^-}\sqrt{T-t}) | \mathcal{F}_t] \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(1+\sigma^+)^{N_T^c} \left\{ \frac{K}{(1+\sigma^+)^{N_T^c}} \Phi(-d_2) - S_t e^{(r-c\sigma^+)(T-t)} \Phi(-d_2 - \sqrt{\sigma^+\sigma^-}\sqrt{T-t}) \right\} | \mathcal{F}_t] \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(1+\sigma^+)^{N_T^c} \mathcal{G}(N_T^c, S_t) | \mathcal{F}_t] \\
&= e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\sigma^+)^n \mathcal{G}(n, S_t) \left( \frac{\Lambda^n}{n!} e^{-\Lambda} \right)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Avendo posto  $\mathcal{G}(x, S_t) = \frac{K}{(1+\sigma^+)^x} \Phi(-d_2) - S_t e^{(r-c\sigma^+)(T-t)} \Phi(-d_2 - \sqrt{\sigma^+\sigma^-}\sqrt{T-t})$  e  $\Lambda = c(T-t)$ . Risulta ovvia l'impossibilità di calcolare numericamente la somma infinita, si calcola perciò un valore approssimato troncandola a valori ragionevoli (si vedrà nel Capitolo 3, che per le nostre considerazioni è risultato sufficiente troncarsi a  $n = 30$ ). Notiamo immediatamente, come accennato precedentemente, che, ponendo  $c = 0$ , si ha che  $N_T^0 = 0$ , quindi  $n \equiv 0$  e anche  $\Lambda = 0$ , mentre  $\mathcal{G}(0, S_t) = K\Phi(-d_2) - S_t e^{r(T-t)} \Phi(-d_2 - \sqrt{\sigma^+\sigma^-}\sqrt{T-t})$ , quindi il prezzo risulta valere:  $P_t = e^{-r(T-t)} K\Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_2 - \sqrt{\sigma^+\sigma^-}\sqrt{T-t})$ , che è esattamente il prezzo di un'opzione *put* utilizzando il modello Black-Scholes.

### 2.3.2 Prezzo opzione *call*

Tramite la *put-call parity*:  $C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$  si vuole ora ricavare il prezzo della corrispondente opzione *call* europea. Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
C_t &= P_t + S_t - Ke^{-r(T-t)} \\
&= S_t - Ke^{-r(T-t)} + e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\sigma^+)^n \mathcal{G}(n, S_t) \left( \frac{\Lambda^n}{n!} e^{-\Lambda} \right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Notiamo come risulti conveniente calcolare numericamente il valore della *put*, per poi inserirla nella formula 2.25, come si è fatto nella simulazione in 3, poiché la formula soprascritta risulta difficilmente riarrangiabile. E analogamente al caso fatto presente sopra, il valore numerico dev'essere approssimato troncando la somma ad un  $n$  ragionevole.

## Capitolo 3

# Risultati numerici

A tal punto, l'obbiettivo risulta essere una verifica della convergenza dei prezzi, verificando la loro corrispondenza, per un'opzione *put* (e per una *call*) prima e dopo aver eseguito il limite (per comodità a  $t = 0$ ). Verifica da effettuare tramite un programma; bisogna prendere i parametri, nel discreto, in modo tale che la convergenza sia veloce, o alternativamente disporre di un calcolatore più potente o un programma più efficiente, altrimenti i premi (le  $X^i = (K - S_N^{(m),i})^+$  per una *put* e analogamente per una *call*) di ogni  $i$ -esimo percorso dell'albero trinomiale, diventando molto piccoli molto in fretta, vengono troncati portando a incongruenze. Inoltre per poter troncare la somma, al continuo, relativamente presto, bisogna scegliere  $cT$  piccolo<sup>1</sup>.

Il programma al discreto, cioè nel modello trinomiale modellizzato nel paragrafo 2.1, valuta il valore atteso del *payoff* scontato. Calcola cioè, all'interno di un ciclo *for*, tutti i valori che può assumere  $S_N^{(m)}$ , moltiplicando  $S_0^m$  per i tre rendimenti  $((1+h_m), (1+m_m), (1+d_m))$  definiti nell'eq. (2.1), elevati al numero di volte in cui ciascun rendimento è stato assunto, reiterando tale ciclo per tutte le combinazioni in cui sono stati assunti. Calcola poi il *claim*  $i$ -esimo  $X^i = (K - S_N^{(m),i})^+$  (e analogamente per la *call*) e lo moltiplica per un coefficiente trinomiale, considerando così il numero di volte in cui si arriva a tale *payoff*  $i$ -esimo; a questo punto somma i vari  $X^i$ , moltiplicati per i coefficienti trinomiali, e li sconta, dividendoli cioè per  $[1 + (r * T/m)]^m$ . Al discreto si è calcolato il valore per  $m = 100$  e  $m = 1000$ .

Al continuo, cioè a seguito del limite, si calcola il valore come indicato nel paragrafo 2.3, ed in particolare nell'equazioni (2.24) e (2.25), con l'utilizzo di un ciclo *for*. Praticamente, all'interno del ciclo si è calcolato, nell'ordine:  $K'$ ,  $\Lambda$ ,  $d_2$ ,  $\mathcal{G}$  e infine  $(1 + \sigma^+)^n \mathcal{G}(n, S_t) (\frac{\Lambda^n}{n!} e^{-\Lambda})$ , valutandone la somma sugli  $n$  e troncandola a un numero ragionevole; come si è fatto presente sopra, tale numero dipende dal valore del parametro della poissoniana considerata, infatti ci aspettiamo che la convergenza risulti numericamente leggermente meno precisa al crescere di tale parametro (si è preso, a seguito di considerazioni numeriche,  $n = 30$ ).

---

<sup>1</sup>Facilmente comprensibile poiché tale valore rappresenta il parametro della poissoniana.

### 3.1 Tabelle

Nelle tabelle seguenti si riportano, al variare di  $c$ , i risultati ottenuti tramite programma. Nella seconda tabella, sempre nella pagina sottostante, si raddoppierà il valore di  $\sigma^+$  e nella terza di  $T$  rispetto alla prima, mantenendo fissi  $K$ ,  $T$  ed  $r$ , per verificare la sensibilità ai parametri. Con  $P_c$  e  $C_c$  si intendono i valori numerici ottenuti al continuo, dove la *Call* si è ottenuta per *put-call parity*, mentre per  $P(m=x)$  e  $C(m=x)$  si intendono i valori per *put* e *call* nel modello discreto ottenute con il parametro  $m=x$ . Al continuo la somma, come detto nel Capitolo 3 si è troncata al trentesimo termine, in quanto la convergenza risulta essere molto rapida e già i termini oltre il trentesimo, per i parametri scelti, risultano essere poco influenti.

$K = 100$		$S_0 = 50$	$r = 0,08$	$\sigma^+ \sigma^- = 1$	$T = 0,5$				
$\sigma^+ = 1$		$\sigma^- = 1$			$\sigma^+ = 0,5$	$\sigma^- = 2$			
$P_c = 55,0540$	$C_c = 8,97507$	$P_c = 51,9565$	$C_c = 5,8867$	$P_c = 50,9752$	$C_c = 4,8963$			1	$c$
$P(m=100)=55,0365$	$C(m=100)=8,9568$	$P(m=100)=52,2824$	$C(m=100)=6,2027$	$P(m=100)=51,5232$	$C(m=100)=5,4435$				
$P(m=1000)=55,0528$	$C(m=1000)=8,9737$	$P(m=1000)=52,0783$	$C(m=1000)=5,9993$	$P(m=1000)=51,1470$	$C(m=1000)=5,0680$				
$P_c = 51,1208$	$C_c = 5,0419$	$P_c = 50,7534$	$C_c = 4,6744$	$P_c = 50,6494$	$C_c = 4,5704$			0,1	
$P(m=100)=51,1258$	$C(m=100)=5,0461$	$P(m=100)=50,7809$	$C(m=100)=4,7011$	$P(m=100)=50,7400$	$C(m=100)=4,6603$				
$P(m=1000)=51,1200$	$C(m=1000)=5,0410$	$P(m=1000)=50,7715$	$C(m=1000)=4,6924$	$P(m=1000)=50,7042$	$C(m=1000)=4,6252$				
$P_c = 50,6645$	$C_c = 4,5455$	$P_c = 50,6269$	$C_c = 4,5480$	$P_c = 50,6165$	$C_c = 4,5376$			0,01	
$P(m=100)=50,6752$	$C(m=100)=4,5955$	$P(m=100)=50,6229$	$C(m=100)=4,5432$	$P(m=100)=50,6582$	$C(m=100)=4,5785$				
$P(m=1000)=50,6637$	$C(m=1000)=4,5847$	$P(m=1000)=50,6348$	$C(m=1000)=4,5557$	$P(m=1000)=50,6594$	$C(m=1000)=4,5804$				
$K = 100$		$S_0 = 50$	$r = 0,08$	$\sigma^+ \sigma^- = 2$	$T = 0,5$				
$\sigma^+ = 2$		$\sigma^- = 1$			$\sigma^+ = 1$	$\sigma^- = 2$			
$P_c = 65,4587$	$C_c = 19,3797$	$P_c = 59,5194$	$C_c = 13,4405$	$P_c = 57,1255$	$C_c = 11,0466$			1	$c$
$P(m=100)=64,9201$	$C(m=100)=18,8404$	$P(m=100)=59,9929$	$C(m=100)=13,9132$	$P(m=100)=58,6097$	$C(m=100)=12,5300$				
$P(m=1000)=65,2812$	$C(m=1000)=19,0116$	$P(m=1000)=59,6698$	$C(m=1000)=13,5908$	$P(m=1000)=57,5418$	$C(m=1000)=11,4628$				
$P_c = 57,2604$	$C_c = 11,1815$	$P_c = 56,4560$	$C_c = 10,3770$	$P_c = 56,1885$	$C_c = 10,1095$			0,1	
$P(m=100)=57,0226$	$C(m=100)=10,9429$	$P(m=100)=56,6456$	$C(m=100)=10,5659$	$P(m=100)=57,1521$	$C(m=100)=11,0724$				
$P(m=1000)=57,1864$	$C(m=1000)=11,0214$	$P(m=1000)=56,5312$	$C(m=1000)=10,4522$	$P(m=1000)=56,4354$	$C(m=1000)=10,3564$				
$P_c = 56,2025$	$C_c = 10,1236$	$P_c = 56,1192$	$C_c = 10,0402$	$P_c = 56,0921$	$C_c = 10,0132$			0,01	
$P(m=100)=56,0118$	$C(m=100)=9,9321$	$P(m=100)=56,2744$	$C(m=100)=10,1947$	$P(m=100)=57,0001$	$C(m=100)=10,9204$				
$P(m=1000)=56,1442$	$C(m=1000)=10,0653$	$P(m=1000)=56,1855$	$C(m=1000)=10,1065$	$P(m=1000)=56,3209$	$C(m=1000)=10,2419$				
$K = 100$		$S_0 = 50$	$r = 0,08$	$\sigma^+ \sigma^- = 1$	$T = 1$				
$\sigma^+ = 1$		$\sigma^- = 1$			$\sigma^+ = 0,5$	$\sigma^- = 2$			
$P_c = 59,1042$	$C_c = 16,7926$	$P_c = 54,8293$	$C_c = 12,5177$	$P_c = 53,3659$	$C_c = 11,0542$			1	$c$
$P(m=100)=59,1096$	$C(m=100)=16,7950$	$P(m=100)=55,9278$	$C(m=100)=13,6132$	$P(m=100)=55,8099$	$C(m=100)=13,4953$				
$P(m=1000)=59,1029$	$C(m=1000)=16,7909$	$P(m=1000)=55,1778$	$C(m=1000)=12,8659$	$P(m=1000)=54,0345$	$C(m=1000)=11,7225$				
$P_c = 53,5367$	$C_c = 11,2251$	$P_c = 53,0119$	$C_c = 10,7003$	$P_c = 52,8559$	$C_c = 10,5443$			0,1	
$P(m=100)=53,5770$	$C(m=100)=11,2624$	$P(m=100)=53,5959$	$C(m=100)=11,2813$	$P(m=100)=54,6227$	$C(m=100)=12,3081$				
$P(m=1000)=53,5398$	$C(m=1000)=11,2278$	$P(m=1000)=53,1723$	$C(m=1000)=10,8604$	$P(m=1000)=53,2664$	$C(m=1000)=10,9545$				
$P_c = 52,8736$	$C_c = 10,5620$	$P_c = 52,8199$	$C_c = 10,5082$	$P_c = 52,8042$	$C_c = 10,4925$			0,01	
$P(m=100)=52,9193$	$C(m=100)=10,6047$	$P(m=100)=53,3594$	$C(m=100)=11,0449$	$P(m=100)=54,5169$	$C(m=100)=12,2023$				
$P(m=1000)=52,8778$	$C(m=1000)=10,5659$	$P(m=1000)=52,9594$	$C(m=1000)=10,6474$	$P(m=1000)=53,1880$	$C(m=1000)=10,8761$				

$K = 52$				$S_0 = 50$	$r = 0,05$	$\sigma^+ \sigma^- = 1$	$T = 2$				
$\sigma^+ = 1$				$\sigma^- = 1$				$\sigma^+ = 0,25 \sigma^- = 4$			
$P_c = 29,6209$	$C_c = 32,5693$	$C_c = 28,7388$	$P_c = 25,7903$	$P_c = 24,0144$	$C_c = 26,9628$	$P_c = 23,8621$	$P_c = 23,8090$	$C_c = 26,8105$	$P_c = 24,3821$	$C_c = 27,3305$	$C_c = 26,8105$
$P(m = 100) = 29,6426$	$C(m = 100) = 35,5887$	$C(m = 100) = 27,8208$	$P(m = 100) = 27,8208$	$P(m = 100) = 25,4469$	$C(m = 100) = 28,3930$	$P(m = 100) = 27,8096$	$P(m = 100) = 27,5794$	$C(m = 100) = 30,7557$	$P(m = 100) = 29,5404$	$C(m = 100) = 32,4865$	$C(m = 100) = 30,7557$
$P(m = 1000) = 29,6205$	$C(m = 1000) = 32,5687$	$C(m = 1000) = 26,4175$	$P(m = 1000) = 26,4175$	$P(m = 1000) = 24,4307$	$C(m = 1000) = 27,3789$	$P(m = 1000) = 24,9066$	$P(m = 1000) = 24,8187$	$C(m = 1000) = 27,8548$	$P(m = 1000) = 25,7565$	$C(m = 1000) = 28,7045$	$C(m = 1000) = 27,8548$
$P_c = 24,4993$	$C_c = 27,4478$	$C_c = 26,8226$	$P_c = 23,8244$	$P_c = 23,8741$	$C_c = 26,8226$	$P_c = 23,8090$	$P_c = 23,8090$	$C_c = 26,7575$	$P_c = 23,8621$	$C_c = 26,8105$	$C_c = 26,7575$
$P(m = 100) = 24,5916$	$C(m = 100) = 27,5377$	$C(m = 100) = 26,9232$	$P(m = 100) = 25,2023$	$P(m = 100) = 23,9771$	$C(m = 100) = 26,9232$	$P(m = 100) = 27,5794$	$P(m = 100) = 27,5794$	$C(m = 100) = 30,5255$	$P(m = 100) = 27,8096$	$C(m = 100) = 30,7557$	$C(m = 100) = 30,5255$
$P(m = 1000) = 24,5088$	$C(m = 1000) = 27,4570$	$C(m = 1000) = 26,8337$	$P(m = 1000) = 24,2170$	$P(m = 1000) = 23,8855$	$C(m = 1000) = 26,8337$	$P(m = 1000) = 24,1652$	$P(m = 1000) = 24,1652$	$C(m = 1000) = 27,7669$	$P(m = 1000) = 24,9066$	$C(m = 1000) = 27,7669$	$C(m = 1000) = 27,7669$
$K = 52$				$S_0 = 50$	$r = 0,05$	$\sigma^+ \sigma^- = 2$	$T = 2$				
$\sigma^+ = 2$				$\sigma^- = 1$				$\sigma^+ = 0,5 \sigma^- = 4$			
$P_c = 39,7530$	$C_c = 42,7015$	$C_c = 38,0259$	$P_c = 35,0774$	$P_c = 32,8307$	$C_c = 35,7791$	$P_c = 31,7819$	$P_c = 31,7819$	$C_c = 34,7304$	$P_c = 32,7878$	$C_c = 35,7363$	$C_c = 34,7304$
$P(m = 100) = 38,8608$	$C(m = 100) = 41,8065$	$C(m = 100) = 36,3886$	$P(m = 100) = 36,3886$	$P(m = 100) = 32,1195$	$C(m = 100) = 35,0656$	$P(m = 100) = 33,2082$	$P(m = 100) = 33,2082$	$C(m = 100) = 38,8607$	$P(m = 100) = 37,5039$	$C(m = 100) = 40,4500$	$C(m = 100) = 38,8607$
$P(m = 1000) = 39,4468$	$C(m = 1000) = 41,5315$	$C(m = 1000) = 35,4678$	$P(m = 1000) = 35,4678$	$P(m = 1000) = 32,5664$	$C(m = 1000) = 35,4790$	$P(m = 1000) = 32,3597$	$P(m = 1000) = 32,3597$	$C(m = 1000) = 35,7671$	$P(m = 1000) = 34,0948$	$C(m = 1000) = 37,0430$	$C(m = 1000) = 35,7671$
$P_c = 31,7861$	$C_c = 34,7346$	$C_c = 34,6528$	$P_c = 31,7043$	$P_c = 32,8307$	$C_c = 35,7791$	$P_c = 31,6764$	$P_c = 31,6764$	$C_c = 34,6249$	$P_c = 31,7819$	$C_c = 34,7304$	$C_c = 34,6249$
$P(m = 100) = 31,1348$	$C(m = 100) = 34,0809$	$C(m = 100) = 32,8394$	$P(m = 100) = 32,8394$	$P(m = 100) = 32,1195$	$C(m = 100) = 34,0809$	$P(m = 100) = 33,2082$	$P(m = 100) = 33,2082$	$C(m = 100) = 38,8607$	$P(m = 100) = 35,7912$	$C(m = 100) = 38,8607$	$C(m = 100) = 38,8607$
$P(m = 1000) = 31,5427$	$C(m = 1000) = 34,5158$	$C(m = 1000) = 31,9951$	$P(m = 1000) = 31,9951$	$P(m = 1000) = 31,5427$	$C(m = 1000) = 34,5158$	$P(m = 1000) = 32,3597$	$P(m = 1000) = 32,3597$	$C(m = 1000) = 35,7671$	$P(m = 1000) = 32,6842$	$C(m = 1000) = 35,7671$	$C(m = 1000) = 35,7671$
$K = 52$				$S_0 = 50$	$r = 0,05$	$\sigma^+ \sigma^- = 1$	$T = 4$				
$\sigma^+ = 1$				$\sigma^- = 1$				$\sigma^+ = 0,25 \sigma^- = 4$			
$P_c = 33,5974$	$C_c = 41,0234$	$C_c = 37,4147$	$P_c = 29,9887$	$P_c = 28,6851$	$C_c = 36,1111$	$P_c = 28,0204$	$P_c = 28,0204$	$C_c = 35,4464$	$P_c = 28,5615$	$C_c = 35,9875$	$C_c = 35,4464$
$P(m = 100) = 33,5855$	$C(m = 100) = 41,0030$	$C(m = 100) = 32,8200$	$P(m = 100) = 32,8200$	$P(m = 100) = 28,8367$	$C(m = 100) = 36,2542$	$P(m = 100) = 30,3558$	$P(m = 100) = 30,3558$	$C(m = 100) = 42,1578$	$P(m = 100) = 36,5332$	$C(m = 100) = 43,9507$	$C(m = 100) = 42,1578$
$P(m = 1000) = 33,5979$	$C(m = 1000) = 41,0231$	$C(m = 1000) = 30,8668$	$P(m = 1000) = 30,8668$	$P(m = 1000) = 28,7011$	$C(m = 1000) = 36,1263$	$P(m = 1000) = 28,7936$	$P(m = 1000) = 28,7936$	$C(m = 1000) = 37,0233$	$P(m = 1000) = 30,5617$	$C(m = 1000) = 37,9869$	$C(m = 1000) = 37,0233$
$P_c = 28,6851$	$C_c = 36,1111$	$C_c = 35,4071$	$P_c = 28,1795$	$P_c = 28,0335$	$C_c = 35,4595$	$P_c = 27,9650$	$P_c = 27,9650$	$C_c = 35,3910$	$P_c = 28,0204$	$C_c = 35,4464$	$C_c = 35,3910$
$P(m = 100) = 28,8367$	$C(m = 100) = 36,2542$	$C(m = 100) = 30,0213$	$P(m = 100) = 30,3558$	$P(m = 100) = 28,2163$	$C(m = 100) = 35,6337$	$P(m = 100) = 34,4797$	$P(m = 100) = 34,4797$	$C(m = 100) = 41,8978$	$P(m = 100) = 34,7403$	$C(m = 100) = 42,1578$	$C(m = 100) = 41,8978$
$P(m = 1000) = 28,7011$	$C(m = 1000) = 36,1263$	$C(m = 1000) = 28,5590$	$P(m = 1000) = 28,5590$	$P(m = 1000) = 28,0522$	$C(m = 1000) = 35,4773$	$P(m = 1000) = 29,5982$	$P(m = 1000) = 29,5982$	$C(m = 1000) = 36,9265$	$P(m = 1000) = 29,5982$	$C(m = 1000) = 37,9869$	$C(m = 1000) = 36,9265$

## 3.2 Considerazioni sui risultati numerici

Si può notare, osservando con attenzione le differenze tra i valori calcolati al continuo e al discreto, come questi si discostino nel muoversi da sinistra a destra nella tabella, diminuendo cioè il rapporto tra  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$ . La convergenza diviene molto più lenta per gli ultimi, ma risulta chiara (basti notare come ci si avvicini al risultato al continuo passando da  $m = 100$  a  $m = 1000$ ). Inoltre notiamo che lo stesso avviene aumentando  $c$  e  $T$ . In particolare si vede che la convergenza diviene più lenta aumentando  $|\sigma^- - \sigma^+|$  e  $cT$ ; quando infatti siamo nel caso  $\sigma^+ = \sigma^-$  la convergenza è quasi immediata, quando invece si passa da un  $cT$  piccolo ad un  $cT$  grande si ha che la convergenza è più lenta, la qual cosa si capisce guardando la parte poissoniana del prezzo al continuo, che ha parametro  $\Lambda = cT$ . Inoltre i risultati al discreto si discostano da quelli al continuo in maniera abbastanza simmetrica per le *call* e *put*.

## Capitolo 4

# Conclusioni

Il modello sviluppato nella trattazione risulta apprezzabile per la chiarezza con il quale si ottiene la convergenza al modello diffusivo con salti, mantenendo la coerenza, senza dover sovrainporre uno dei due modelli all'altro al continuo <sup>1</sup>. In analogia a come, pragmaticamente, il modello Cox, Ross, Rubenstein viene utilizzato per la sua malleabilità e facilità d'uso invece del modello Black-Scholes, così il modello sviluppato al discreto, potrebbe essere utilizzato, sempre prestando attenzione alle limitazioni sui parametri di cui si parla nel paragrafo 2.1, invece di un modello diffusivo con salti. Risulta inoltre apprezzabile la sua dipendenza da un parametro  $c$ , utilizzato per variare l'importanza del processo poissoniano nell'andamento del sottostante, mantenendo comunque la martingalità. Purtroppo la convergenza non sempre risulta veloce al variare dei parametri (si vedano le tabelle), la qual cosa richiede calcolatori molto potenti. Risulta necessario, per un'applicazione pratica, definire univocamente la MME per determinare univocamente i prezzi delle opzioni, fissando cioè i parametri da noi scelti *ad-hoc* per effettuare la valutazione della convergenza numerica. Tale operazione viene chiamata *calibrazione di mercato* ed esula dallo scopo di tale lavoro poiché si è cercato di mantenere la generalità dei risultati.

---

<sup>1</sup>Come si suole fare



# Bibliografia

- [1] Kaushik I Amin. Jump diffusion option valuation in discrete time. *The journal of finance*, 48(5):1833–1863, 1993.
- [2] Louis Bachelier. Théorie de la spéculation. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 17, pages 21–86, 1900.
- [3] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [4] Laurence Carassus and Gilles Pagès. *Finance de marché*. Vuibert, 2015.
- [5] Rama Cont and Peter Tankov. *Financial modelling with jump processes*. Chapman and Hall/CRC, 2003.
- [6] John C Cox, Stephen A Ross, and Mark Rubinstein. Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, 7(3):229–263, 1979.
- [7] J Michael Harrison and David M Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic theory*, 20(3):381–408, 1979.
- [8] J Michael Harrison and Stanley R Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic processes and their applications*, 11(3):215–260, 1981.
- [9] Benoit B Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. In *Fractals and scaling in finance*, pages 371–418. Springer, 1997.
- [10] Benoit B Mandelbrot. *Fractals and scaling in finance: Discontinuity, concentration, risk. Selecta volume E*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [11] HP McKean and P Samuelson. Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 6(2):13–39, 1965.
- [12] Sabrina Mulinacci. An approximation of american option prices in a jump-diffusion model. *Stochastic processes and their applications*, 62(1):1–17, 1996.
- [13] Andrea Pascucci and Wolfgang J Runggaldier. *Finanza matematica: teoria e problemi per modelli multiperiodali*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [14] Wolfgang J Runggaldier. Sugli sviluppi della matematica applicata in un settore interdisciplinare: la finanza matematica. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 2(3):297–316, 1999.
- [15] Wolfgang J Runggaldier. Jump-diffusion models. In *Handbook of heavy tailed distributions in finance*, pages 169–209. Elsevier, 2003.