

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
LAUREA TRIENNALE IN FISICA

Campi random e formazione di strutture cosmologiche

Autore:
Quirici Lorenzo,
1027990

Relatore:
Dott. Liguori Michele

Anno accademico 2014–2015

Indice

1	Introduzione alla cosmologia	3
1.1	Principio cosmologico	3
1.2	Espansione dell'Universo	4
1.2.1	La legge di Hubble	4
1.2.2	Coordinate comoventi	4
1.2.3	Equazione dei fluidi	5
1.2.4	Equazioni di Friedmann	5
1.2.5	Curvatura dello spazio	7
1.2.6	Parametro di Hubble e parametro di espansione	8
1.2.7	Redshift e fattore di scala	8
1.3	Universi di Friedmann	9
1.3.1	Big Bang	9
1.3.2	Risoluzione delle equazioni	9
1.3.3	L'orizzonte delle particelle	10
1.4	Il modello standard	11
1.4.1	Problematiche del modello standard	11
1.4.2	Il modello inflazionario	11
1.4.3	L'instabilità di Jeans	11
1.4.4	Instabilità di Jeans nei modelli di Friedmann	13
1.5	Proprietà di clustering dell'Universo	13
2	Elementi di statistica	14
2.1	Probabilità	14
2.1.1	Proprietà della probabilità	14
2.1.2	Probabilità condizionata	15
2.1.3	Teorema di Bayes	15
2.2	Variabili continue	15
2.2.1	Variabili dipendenti da più parametri	16
2.3	Valori attesi	17
2.3.1	Valori attesi di una variabile	17
2.3.2	Valori attesi di due variabili	18
2.3.3	Matrice di covarianza di un vettore casuale	18
2.4	Funzione caratteristica	18
2.5	La distribuzione gaussiana	19
2.5.1	La distribuzione gaussiana multivariata	19
2.5.2	Teorema del limite centrale	20
2.6	Campi random gaussiani omogenei, isotropi e processi ergodici	20
2.7	Funzione di correlazione	20
2.8	Rappresentazione spettrale	20

2.8.1	Relazioni di Wiener-Khintchine	21
2.8.2	Momento spettrale	22
2.9	Excursion set	22
3	Statistica delle perturbazioni	23
3.1	Lo spettro di potenza delle perturbazioni	23
3.1.1	La varianza di massa	25
3.1.2	La funzione finestra	25
3.2	La funzione di correlazione	26
3.2.1	Funzioni di correlazione per campi	27
3.3	Spettro e varianza	28
3.4	La funzione di massa	29
3.5	Origine, evoluzione e tipi di spettro	29
3.6	Storicamente.	31
4	Campi random e strutture cosmologiche	32
4.1	Il campo di fluttuazioni in breve	33
4.2	Probabilità condizionata e selezione dei massimi	33
4.3	Densità di picchi	34
4.3.1	Densità di punti estremali	34
4.3.2	Densità di picchi	35
4.3.3	Calcolo dell'integrale	36
4.4	Numero di picchi oltre una soglia	37
4.4.1	Valori asintotici	38
4.5	Filtri per la selezione di strutture cosmiche	38
4.6	Effetti di bordo	38
4.7	Conclusioni	39
5	Simulazioni	40
5.1	Risultati	40
5.2	Codice programma	42
	Bibliografia	44

Capitolo 1

Introduzione alla cosmologia

La cosmologia ha avuto un forte sviluppo nell'ultimo secolo, grazie a tecniche per l'analisi dell'intero spettro elettromagnetico, non solo quello visibile. È stato così possibile raccogliere numerosi dati che hanno permesso lo studio dell'Universo, portando alla rivelazione della totalità delle frequenze, giungendo quindi alla scoperta della radiazione cosmica di fondo (CMB), oppure rendendo possibile la formulazione o verifica, attraverso simulazioni numeriche, di modelli dell'origine e della struttura dell'Universo.

L'odierno *modello cosmologico standard* è la teoria più accreditata dai dati osservativi. Basandosi sul *principio cosmologico*, esso riconduce l'origine dell'Universo all'*Hot Big Bang*, caratterizzando gli istanti primordiali con un *periodo inflazionario*. Al termine di tale periodo piccole fluttuazioni nella distribuzione iniziale della materia hanno innescato un processo di instabilità gravitazionale, portando alla formazione delle strutture cosmiche e stellari. Il modello prevede che l'Universo sia in continua espansione, espansione descritta dalle equazioni di Friedmann. Descriveremo ora brevemente, seguendo un approccio per lo più classico, gli elementi fondamentali dei modelli cosmologici.

1.1 Principio cosmologico

Sin dall'antichità si è ritenuto che all'uomo fosse riservato un posto privilegiato nell'Universo. Solo nel 1500 grazie a Copernico venne abbandonata la teoria geocentrica a favore di quella eliocentrica. Nei secoli successivi fu scoperto che il sistema solare si trova all'interno della Via Lattea, ma solo a metà del XX secolo si mostrò che questa è una galassia qualsiasi e non si trova al centro dell'Universo. Fu così formulato il *principio cosmologico*:

”L'Universo è omogeneo e isotropo, su di una scala opportunamente grande.”

principio
cosmologico

In altre parole l'aspetto generale dell'Universo non deve dipendere dalla posizione dell'osservatore e dalla direzione di osservazione. Il principio non deve essere interpretato alla lettera: a piccola scala, ovvero quella di una singola galassia, l'Universo appare disomogeneo, ma questa disomogeneità tende a scomparire su scale di interesse cosmologico (oltre 100 Mpc). Questo presupposto elimina perciò l'ipotesi di posizioni privilegiate nel Cosmo. Nato come un assunto volto a limitare il numero di teorie possibili, il principio cosmologico è stato confermato a posteriori da dati osservativi quali la radiazione cosmica di fondo.

1.2 Espansione dell'Universo

Una osservazione fondamentale in cosmologia è che quasi ogni cosa nell'Universo si allontana da noi, e più un corpo è distante, più rapidamente sembra allontanarsi. Le velocità di allontanamento sono misurate attraverso il redshift, cioè lo spostamento verso il rosso delle righe spettrali di una galassia che si sta allontanando da noi, per effetto Doppler. Viceversa si parla di blueshift quando l'accumularsi delle onde porta ad un aumento di frequenza. Questa tecnica fu ampiamente utilizzata dal cosmologo Hubble nel 1900. Come anticipato su scale cosmologiche le galassie si allontanano da noi, utilizzando la terminologia standard definiamo il redshift z come:

$$z = \frac{\lambda_{oss} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}, \quad (1.1)$$

ove λ_{em} e λ_{oss} sono rispettivamente le lunghezze d'onda luminose nel punto di emissione (la galassia) e di osservazione (noi). Se un oggetto si sta allontanando a velocità v , il redshift relativistico sarà:

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (1.2)$$

con c velocità della luce.

1.2.1 La legge di Hubble

Hubble constatò che le sue osservazioni mostravano che la velocità di recessione di un oggetto è proporzionale alla sua distanza da noi:

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}, \quad (1.3) \quad \begin{array}{l} \text{legge} \\ \text{Hubble} \end{array} \quad \text{di}$$

nota come *legge di Hubble*. H_0 è una costante di proporzionalità nota come *costante di Hubble*. Questa legge non è esatta, poiché alcune galassie possiedono anche dei moti dovuti a fenomeni perturbativi; tuttavia essa descrive molto bene il comportamento medio delle galassie.

Precisiamo i limiti di validità di (1.3). La distanza \vec{r} deve essere abbastanza grande in modo che la velocità di recessione sia superiore alla componente radiale delle velocità peculiare delle galassie negli ammassi ($\|\vec{r}\| \gg 10^3 H_0^{-1} \text{Mpc}$), ma non deve essere troppo grande, affinché la velocità di recessione non superi quella della luce ($\|\vec{r}\| \ll 10^4 H_0^{-1} \text{Mpc}$).

1.2.2 Coordinate comoventi

Poiché l'Universo è in espansione uniforme, risulta pratico definire un sistema di coordinate, noto come *coordinate comoventi*, le quali sono solidali all'espansione e vengono quindi "trasportate" con essa. Questo è possibile grazie al principio cosmologico che mi garantisce l'isotropia e l'uniformità dello spazio. Dati due punti nell'Universo a distanza reale \vec{r} e la distanza comovente \vec{x} , la relazione che lega le distanze è:

$$\vec{r} = a(t) \vec{x}, \quad (1.4)$$

dove l'omogeneità garantisce che a sia una sola funzione del tempo. Nel sistema di coordinate comoventi \vec{x} le galassie restano in posizioni fisse; le coordinate originali \vec{r} vengono usualmente chiamate *coordinate fisiche*.

*coordinate
comoventi*

La quantità a è invece nota come *fattore di scala dell'Universo*, essa misura il tasso di espansione dell'Universo, ovvero come le distanze fisiche aumentino con il tempo a causa dell'espansione. *fattore di scala dell'Universo*

1.2.3 Equazione dei fluidi

Dal momento che la materia costituente l'Universo può essere considerata come un fluido, descriviamo come la densità ρ di materia nell'Universo evolva nel tempo, derivando le equazioni dei fluidi a partire dalla prima legge della termodinamica:

$$E = Q - W \quad (1.5)$$

ove E è l'energia interna del corpo, Q il calore scambiato dal corpo, W il lavoro compiuto o subito. Sfruttando le definizioni di entropia e di lavoro termodinamico, la (1.5) diviene:

$$dE + PdV = TdS \quad (1.6)$$

dove V è il volume sferico di raggio a in espansione comovente. Considerando l'energia di massa $E = mc^2$:

$$E = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho c^2. \quad (1.7)$$

La variazione di energia sarà:

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{d\rho}{dt} c^2, \quad (1.8)$$

mentre la variazione di volume nell'espansione:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt}. \quad (1.9)$$

Considerando una espansione reversibile $dS = 0$, inserendola in (1.6), otteniamo:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0, \quad (1.10)$$

Equazione di continuità dei fluidi

nota come *equazione di continuità dei fluidi*. La variazione di densità è data da due contributi: il primo tra parentesi è un aumento di volume dovuto all'espansione dell'Universo, il secondo corrisponde ad una perdita di energia dovuta al fatto che la pressione della materia ha compiuto lavoro nell'espansione. Questa energia si è trasformata in energia potenziale gravitazionale. L'equazione (1.10) esprime inoltre la condizione di adiabaticità dell'espansione dell'Universo e può essere riscritta come:

$$d(\rho a^3) = -3\frac{P}{c^2} a^2 da. \quad (1.11)$$

Questa equazione non può ancora essere risolta, non conoscendo l'espressione della pressione. L'*equazione di stato*, che vedremo in seguito, determina però che la pressione dipende dal materiale considerato, $P = P(\rho)$.

1.2.4 Equazioni di Friedmann

L'evoluzione del parametro di espansione dell'Universo è descritta dalle *equazioni di Friedmann*, le quali vengono generalmente ottenute in un contesto general-relativistico. Esse possono tuttavia anche essere ricavate a partire dalla legge di gravitazione newtoniana.

La forza di attrazione gravitazionale che un corpo di massa M esercita su un corpo di massa m è:

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \quad (1.12)$$

ove r è la distanza tra i due corpi e G è la costante di gravitazione newtoniana. Ricordando la seconda legge della dinamica $F = ma$ si evince che l'accelerazione di un oggetto per attrazione gravitazionale non dipende dalla sua massa. Essendo poi la forza conservativa, poiché centrale, posso associarvi una energia potenziale:

$$V = -\frac{GMm}{r}. \quad (1.13)$$

Il fatto che la forza dipenda dall'inverso del quadrato della distanza determina un risultato fondamentale per ricavare le equazioni di Friedmann, l'equivalente del teorema di Gauss per l'elettrostatica: il campo gravitazionale al di fuori di un corpo a simmetria sferica è lo stesso che si avrebbe se tutta la massa del corpo fosse concentrata nel centro.

Consideriamo una regione di spazio V in espansione media uniforme, con densità di massa $\rho = M/V$, e una particella di massa m che si trova a distanza r da essa.

Il volume contiene una massa totale $M = 4\pi\rho r^3/3$ ed esercita sulla particella una forza

$$F = -\frac{GMm}{r^2} = -\frac{4\pi G\rho r m}{3}. \quad (1.14)$$

La particella avrà quindi energia potenziale

$$V = -\frac{4\pi G\rho r^2 m}{3}. \quad (1.15)$$

L'energia cinetica della particella è chiaramente

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2. \quad (1.16)$$

Chiamando U l'energia totale della particella, che è una quantità conservata, si ottiene

$$U = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho r^2 m. \quad (1.17)$$

equazione che mi descrive l'evoluzione della distanza r di separazione tra le due particelle. Questo risultato, grazie all'omogeneità dell'Universo può, essere applicato a qualsiasi coppia di particelle.

Passo ora alle coordinate comoventi. Tenendo conto che, per definizione di tali coordinate, $\dot{x} = 0$, riscriviamo l'equazione (1.17):

$$U = \frac{1}{2}m\dot{a}^2 x^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho a^2 x^2 m. \quad (1.18)$$

Moltiplicando per $2/ma^2x^2$ ed esplicitando:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\varrho - \frac{Kc^2}{a^2}, \quad (1.19) \quad \begin{array}{l} \text{equazione} \\ \text{di} \\ \text{Friedmann} \end{array}$$

ove $Kc^2 = -2U/mx^2$. La (1.19) è l'*equazione di Friedmann*; tutti i termini non dipendono da x per omogeneità.

Infine, poiché $K = -2U/mc^2x^2$ è indipendente dal tempo, U è conservata e la distanza comovente x è fissata, otteniamo che K è una costante, la cui grandezza fisica è $[l]^{-2}$. Un Universo in espansione ha un solo valore di K , il quale, chiamato curvatura, ne contiene informazioni sulla geometria.

Ricaviamo ora l'altra equazione di Friedmann che descrive l'*accelerazione dell'espansione* parametrizzata dal fattore di scala. Riprendiamo pertanto l'equazione di Friedmann (1.19) e l'equazione di continuità dei fluidi (1.10). Derivando (1.19) rispetto al tempo:

$$2\frac{\dot{a}}{a}\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\varrho} + 2\frac{Kc^2\dot{a}}{a^3}. \quad (1.20)$$

Inserendo $\dot{\varrho}$ dell'equazione (1.10) ed eliminando il fattore $2\dot{a}/a$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G\left(\varrho + \frac{P}{c^2}\right) + \frac{Kc^2}{a^2}, \quad (1.21)$$

infine, usando (1.19), arriviamo all'*equazione di accelerazione*:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\varrho + 3\frac{P}{c^2}\right). \quad (1.22) \quad \begin{array}{l} \text{equazione} \\ \text{di accelera-} \\ \text{zione} \end{array}$$

Osserviamo che qualsiasi sia la pressione della materia, essa aumenterà l'attrazione gravitazionale, contrastando e rallentando l'espansione. Definiamo a tal fine il parametro di decelerazione:

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (1.23)$$

Notiamo inoltre che poiché l'Universo è isotropo non vi sono né gradienti né forze di pressione. L'equazione di accelerazione non coinvolge la costante K .

1.2.5 Curvatura dello spazio

Riprendiamo l'equazione di Friedmann (1.19) ed esplicitiamo K/a^2 :

$$\frac{K}{a^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho}{\varrho_c} - 1\right) \quad (1.24)$$

ove abbiamo definito la densità critica:

$$\varrho_c = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2. \quad (1.25)$$

A seconda che il *parametro di densità*

$$\Omega(t) = \frac{\varrho}{\varrho_c} \quad (1.26)$$

sia maggiore, uguale o minore di uno, lo spazio è chiuso ($K = 1$), piatto ($K = 0$) o aperto ($K = -1$), rispettivamente.

Nel seguito, conformemente alle osservazioni, sceglieremo implicitamente $K = 0$, $\Omega = 1$.

1.2.6 Parametro di Hubble e parametro di espansione

Grazie all'equazione di Friedmann (1.19) possiamo spiegare la legge di Hubble. Essendo la velocità di recessione $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ ed essendo diretta come \vec{r} , possiamo scrivere:

$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r} \quad (1.27)$$

ove abbiamo sfruttato la definizione di coordinata comovente (1.4). Ricordando che la coordinata comovente \vec{x} è costante, otteniamo che il parametro di Hubble può essere espresso come:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.28)$$

il valore misurato ai giorni nostri viene solitamente indicato con il pedice "0", H_0 .

Possiamo riscrivere l'equazione di Friedmann (1.19) come:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{Kc^2}{a^2}. \quad (1.29)$$

Chiamiamo quindi costante di Hubble il valore di H_0 oggi, mentre definiamo parametro di Hubble la funzione dipendente dal tempo, H . H decresce nel tempo poiché l'espansione dell'Universo è rallentata dalla gravità. Riscriviamo per completezza l'equazione di Friedmann (1.19) in termini di H_0 , del parametro di espansione e della densità critica, valutati al presente, a_0 e ρ_{0c} :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{0c}}\right) = -\frac{Kc^2}{a_0^2} \quad (1.30)$$

1.2.7 Redshift e fattore di scala

Consideriamo un fascio luminoso che viene emesso da un punto verso un secondo a distanza dr , l'effetto Doppler non relativistico, notando che la differenza di lunghezza d'onda tra osservazione ed emissione è $d\lambda = \lambda_{oss} - \lambda_{em}$, sarà:

$$\frac{d\lambda}{\lambda_{em}} = \frac{dv}{c}. \quad (1.31)$$

Il tempo che intercorre tra emissione e osservazione è $dt = dr/c$ e ricordando che $dv = Hdr = (\dot{a}/a)dr$:

$$\frac{d\lambda}{\lambda_{em}} = \frac{\dot{a}}{a} \frac{dr}{c} = \frac{\dot{a}}{a} dt = \frac{da}{a}. \quad (1.32)$$

Integrando otteniamo che:

$$\lambda \propto a, \quad (1.33)$$

da cui, riprendendo (1.31):

$$1 + z = \frac{\lambda_{oss}}{\lambda_{em}} = \frac{a(t_{oss})}{a(t_{em})} \quad (1.34)$$

che lega il redshift al parametro di espansione.

1.3 Universi di Friedmann

Ci si propone ora di risolvere le equazioni di Friedmann nel caso in cui l'equazione di stato del fluido, che lega pressione e densità, sia definita in modo univoco.

L'equazione di stato dei fluidi può essere espressa come:

$$P = w\rho c^2 \quad (1.35) \quad \text{equazione di stato}$$

ove w è un parametro costante, tale che $0 \leq w \leq 1$ (intervallo di Zeldovich). w è legato alla velocità del suono adiabatica $v_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S^{1/2}$, con S entropia, dalla relazione: $w = (v_s/c)^2$.

Il caso $w = 0$ rappresenta la *polvere*, approssimabile con un gas ideale.

Il caso $w = 1/3$ rappresenta *particelle ultrarelativistiche*, ad esempio un gas di fotoni.

Il caso $w = 1$ rappresenta la *stiff matter*, un fluido incompressibile.

1.3.1 Big Bang

Dall'equazione dei fluidi (1.11) e dall'equazione di stato (1.35), otteniamo che:

$$\rho a^{3(1+w)} = \text{cost} = \rho_0 a_0^{3(1+w)} \quad (1.36)$$

dove il pedice w è un indice che determina qual è la natura del fluido. Osserviamo che, considerando un fluido nell'intervallo con $0 \leq w \leq 1$, vi è un istante di singolarità in cui a si annulla e la densità diventa infinita. Tale istante è detto *Big Bang*.

1.3.2 Risoluzione delle equazioni

Risolviamo le equazioni di Friedmann per Universi piatti ($\Omega_w = 1$), detti *Universi di Einstein-de Sitter*. Proponiamo un metodo risolutivo generale. Sia quindi l'equazione dei fluidi (1.10)

$$0 = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = c^2\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(c^2\rho + P) = c^2\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}c^2\rho(1+w) \quad (1.37)$$

da cui

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w)\frac{da}{a} \quad (1.38)$$

che integrata mostra che:

$$\rho(t) = \rho_0 a_0^{3(1+w)} \left(\frac{1}{a(t)}\right)^{3(1+w)} \quad (1.39)$$

$$\rho(t) \propto a(t)^{-3(1+w)}. \quad (1.40)$$

Troviamo la variazione di a usando l'equazione di Friedmann (1.19):

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 \quad (1.41)$$

$$\dot{a}(t)^2 = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^{3(1+w)}}{3} a(t)^{-3(1+w)+2}. \quad (1.42)$$

Una possibile soluzione è una legge di potenza $a \propto t^\alpha$, si ottiene:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (1.43)$$

Invertendo quest'ultima relazione, otteniamo:

$$t = t_0(1+z)^{-3(1+w)/2}, \quad (1.44)$$

che lega il tempo al redshift. Infine osservando che

$$\varrho_{0c} t_{0c,w}^2 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[\frac{2}{3(1+w)H_0} \right]^2 = \frac{1}{6(1+w)^2\pi G} \quad (1.45)$$

e sfruttando (1.36), (1.43), (1.44), otteniamo:

$$H = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{2}{3(1+w)t} = H_0 \frac{t_0}{t} = H_0(1+z)^{3(1+w)/2} \quad (1.46)$$

$$t_{0c,w} = t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0} \quad (1.47)$$

$$\varrho = \varrho_{0w} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2} = \frac{1}{6(1+w)^2\pi G t^2} \quad (1.48)$$

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{1+3w}{2} = \text{cost.} \quad (1.49)$$

Osserviamo quindi che il parametro di espansione a cresce indefinitivamente nel tempo con decelerazione costante, se $0 \leq w \leq 1$.

1.3.3 L'orizzonte delle particelle

Quando parliamo di Universo implicitamente assumiamo che si stia parlando della regione di spazio a noi nota, ovvero con cui abbiamo connessione causale. Siamo consapevoli di questo limite e del fatto che alcune caratteristiche, quali l'espansione, non siano peculiari solamente della nostra regione ma possano essere estese.

Introduciamo ora il concetto di *orizzonte delle particelle* o *cosmologico*, che delimita la regione di Universo in cui le particelle sono in grado di connettersi causalmente.

*orizzonte
delle
particelle*

Consideriamo l'insieme dei punti dell'Universo che hanno potuto inviare un segnale luminoso ad un osservatore, posto nell'origine O delle coordinate, che partecipa all'espansione generale dell'Universo. Questi punti sono connessi causalmente con l'osservatore e sono contenuti in una sfera di centro O e raggio proprio:

$$r_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} \quad (1.50)$$

dove la generica distanza cdt' è stata moltiplicata per $a(t)/a(t')$ per ottenere la distanza propria. Notiamo che è possibile che l'integrale diverga, per evitare ciò, imponendo che l'integrale sia finito, otteniamo la superficie sferica di centro O e raggio r_H , detta orizzonte delle particelle o cosmologico. Il raggio è approssimativamente:

$$r_H \approx 3 \frac{1+w}{1+3w} ct. \quad (1.51)$$

Conviene però definire l'*orizzonte cosmologico effettivo* delimitato da:

$$r'_H = c \frac{a}{\dot{a}} = c\tau, \quad (1.52)$$

che racchiude le particelle in grado di connettersi causalmente. Si è introdotto il tempo caratteristico di espansione dell'Universo $\tau = a/\dot{a}$.

1.4 Il modello standard

Proponiamo, non soffermandoci nei dettagli, le condizioni che hanno portato alla formazione dell'Universo da noi osservato.

Si indica con *modello standard dell'Universo* o *modello di Hot Big-Bang* il modello di Universo omogeneo ed isotropo, soluzione delle equazioni di Friedmann, che sia costituito dalle componenti attuali del nostro Universo, materia e radiazione essenzialmente, con le proprietà cinematiche (costante di Hubble) osservate. Si assume inoltre che la componente radiativa sia di origine cosmologica (da qui l'attributo "caldo"). In questo modello piccole fluttuazioni nella densità possono dare origine alle strutture cosmiche ora osservate: galassie e ammassi di galassie. *modello standard*

1.4.1 Problematiche del modello standard

Una problematica del modello standard è quella dell'orizzonte delle particelle che limitando le regioni di Universo in connessione causale, non spiega come l'Universo sia omogeneo ed isotropo, ovvero vi si possano riscontrare le stesse proprietà ovunque, quale ad esempio la radiazione cosmica di fondo. A tal fine è stato proposto il *modello inflazionario*.

1.4.2 Il modello inflazionario

Supponiamo che via sia una scala comovente L_0 connessa causalmente e che esista un periodo Δt , molto prossimo al Big-Bang, in cui questa scala esca dall'orizzonte, ovvero che processi fisici attivi in tale intervallo non riescano più a modificare le condizioni fisiche nella scala L_0 : questo accade quando $L_0 > r_{H,c}$, ove $r_{H,c}$ indica l'orizzonte comovente. Questa condizione è soddisfatta supponendo che, durante Δt , l'Universo subisca una espansione accelerata ($a(t) = a_0 \exp(t/\tau)$), chiamata *inflazione*, determinata da una pressione negativa, $P < -\rho c^3/3$, del vuoto quantistico. Il modello prevede che l'Universo si sia formato in una piccola regione connessa causalmente, giustificando quindi l'omogeneità di temperatura e densità osservabili al giorno d'oggi, avvalorando il principio cosmologico, e solo successivamente si sia rapidamente espanso. Le fluttuazioni quantistiche presenti nella regione originaria in seguito all'espansione hanno determinato piccole disomogeneità gravitazionalmente instabili, cresciute fino a dare origine a strutture come le galassie, gli ammassi di galassie,...

Le fluttuazioni quantistiche del campo hanno determinato quindi le condizioni all'origine dell'Universo.

1.4.3 L'instabilità di Jeans

Per completezza descriviamo anche la condizione di formazione di strutture astronomiche.

Jeans dimostrò che, partendo da un fluido omogeneo, isotropo, in condizione stazionaria (non era consapevole dell'espansione dell'Universo), piccole fluttuazioni di densità $\delta\rho$ e di velocità δv possono evolvere nel tempo, in particolare le prime possono crescere se l'autogravitazione prevale sull'effetto stabilizzante della pressione. Questa crescita è detta *instabilità gravitazionale di Jeans*.

Le equazioni che descrivono il moto di un fluido autogravitante sono le equazioni di continuità, Eulero, Poisson e di conservazione dell'entropia per unità di massa, s :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \varphi = 0 \quad (1.54)$$

$$\nabla^2 \varphi - 4\pi G \rho = 0 \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s = 0 \quad (1.56)$$

ove \vec{v} è la velocità del fluido e φ il potenziale gravitazionale. Jeans cercò una soluzione $u_i = u_{0i} + \delta u_i$ che rappresentasse una piccola perturbazione δu della soluzione statica u_0 , ove il pedice $i = 1, 2, 3, 4$ indica che u_i è una delle quattro quantità: ρ , \vec{v} , φ , s . Inserendo il tipo di soluzione cercata nel sistema si ottiene un nuovo sistema, a cui si cercano soluzioni del tipo onde piane dipendenti dal tempo:

$$\delta u_i = \delta_{0i} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)}. \quad (1.57)$$

che, se inserite nel nuovo sistema, mostrano che esso ammette cinque soluzioni. Discuteremo solo quelle in cui $\omega \neq 0$. In questo caso $\delta_{0s} = 0$, le perturbazioni sono adiabatiche, inoltre $\vec{k} \cdot \delta_{0\vec{v}} \neq 0$, le perturbazioni sono longitudinali. Il sistema risultante

$$\omega \frac{\delta_{0\rho}}{\rho_0} + k \delta_{0\vec{v}} = 0 \quad (1.58)$$

$$\omega \delta_{0\vec{v}} + k v_s^2 \frac{\delta_{0\rho}}{\rho_0} + k \delta_{0\varphi} = 0 \quad (1.59)$$

$$k^2 \delta_{0\varphi} + 4\pi G \delta_{0\rho} = 0 \quad (1.60)$$

con v_s velocità del suono, ammette soluzione non nulla se ω e k soddisfano alla relazione dispersione:

$$\omega^2 - v_s^2 k^2 + 4\pi G \rho_0 = 0. \quad (1.61)$$

Le soluzioni alla relazione vengono discriminate dal valore:

$$\lambda_J = v_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}}. \quad (1.62)$$

Se $\lambda < \lambda_J$ le forze di pressione prevalgono, se $\lambda > \lambda_J$, le soluzioni sono onde stazionarie di ampiezza crescente o decrescente, esse presentano l'instabilità gravitazionale.

In particolare modo osserviamo che:

$$\frac{\delta \rho}{\rho_0} = \frac{\delta_{0\rho}}{\rho_0} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm |\omega| t)} \quad (1.63)$$

Si definisce quindi *massa di Jeans*:

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \rho \left(\frac{\lambda_J}{2} \right)^3, \quad (1.64)$$

che discrimina quando un oggetto diventa stabile, ovvero quando le forze di pressione interne riescono a contrastare l'autogravitazione.

1.4.4 Instabilità di Jeans nei modelli di Friedmann

I risultati della teoria di Jeans non erano quelli di un Universo in espansione, in cui le leggi di crescita della perturbazione di densità non sono di tipo esponenziale, ma sono più lente poiché la perturbazione deve attirare a sé particelle esterne che si muovono secondo l'espansione generale dell'Universo. La crescita seguirà quindi leggi di potenza: $\delta\rho/\rho \propto t^\alpha$.

1.5 Proprietà di clustering dell'Universo

Dopo questa introduzione alla cosmologia, ci accingiamo a presentare l'argomento di questa tesi. Si è anticipato che le fluttuazioni quantistiche presenti nella regione originaria in seguito all'espansione inflazionaria hanno determinato piccole disomogeneità gravitazionalmente instabili, cresciute fino a dare origine a strutture come le galassie, gli ammassi di galassie. Si parla in questo caso di *clustering* dell'Universo. Il risultato più rilevante dello studio morfologico è stata la scoperta che l'Universo nell'intervallo che da qualche decina di chiloparsec, scala delle galassie, fino a circa 100 Mpc, scala dei superammassi, è costituito da addensamenti. Solo su scale molto maggiori di 100 Mpc la distribuzione della materia è isotropa ed omogenea, come evidenzia la radiazione di fondo.

L'elemento fondamentale della "tessitura" dell'Universo sono le galassie, sistemi stellari con una sovradensità dell'ordine di 10^5 rispetto a quella media dell'Universo. Più della metà delle galassie sono membri di gruppi o ammassi, la cui sovradensità è dell'ordine di $10^2 \div 10^3$. Gli ammassi si aggregano poi in superammassi di galassie, con densità superiore alla media solo di un fattore $2 \div 3$. tra i superammassi vi sono regioni enormi quasi prive di galassie, i grandi vuoti.

Le proprietà di clustering dell'Universo possono essere messe in luce in modo più generale e profondo da un approccio statistico, necessario complemento a quello morfologico.

Dal momento che le fluttuazioni primordiali erano quantistiche è necessaria una trattazione statistica del problema, ovvero studiare il campo stocastico associato alle fluttuazioni, in particolar modo le condizioni che hanno determinato la formazione di regioni sovradense del Cosmo. L'analisi sarà fatta sui dati osservativi (galassie, ammassi, . . .), cercando di correlarli al campo statistico "sottostante", il quale non è fisicamente tangibile, ma possiamo solamente esaminarne delle realizzazioni.

Capitolo 2

Elementi di statistica

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, la formazione delle strutture cosmiche ha origine da fluttuazioni di campi quantistici, risulta pertanto necessaria una trattazione statistica. In questo capitolo introdurremo gli elementi necessari alla nostra analisi stocastica; come specificato a seguito della loro origine quantistica le fluttuazioni vanno trattate come campi random. Questi inoltre sono gaussiani dal momento che si assume, per il teorema del limite centrale, che abbiano distribuzione gaussiana.

2.1 Probabilità

Definiamo *fenomeno casuale* un fenomeno ripetibile infinite volte, che può manifestarsi in più modalità, imprevedibili e mutuamente esclusive. Se siamo in grado di fissare una legge di corrispondenza che permetta di associare ad ogni modalità uno e un solo numero reale x , questo è detto *variabile casuale*.

Definiamo *probabilità* di un evento casuale il rapporto tra il numero di casi favorevoli al presentarsi dell'evento stesso ed il numero totale di casi possibili, purchè ugualmente probabili.

2.1.1 Proprietà della probabilità

Chiamiamo l'evento casuale A ,

- la probabilità di A , $P(A)$, è tale che:

$$0 \leq P(A) \leq 1; \quad (2.1)$$

- la probabilità dell'intero spazio dei campioni, S , è:

$$P(S) = 1 \quad (2.2)$$

- la probabilità dell'evento complementare \bar{A} è:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A); \quad (2.3)$$

- dati due eventi A, B la probabilità totale di $A \cup B$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad (2.4)$$

ove $P(A \cap B)$ indica la realizzazione di entrambi gli eventi. Se A, B sono mutuamente esclusivi $P(A \cap B) = 0$;

- mentre la probabilità di A è esprimibile come:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}), \quad (2.5)$$

2.1.2 Probabilità condizionata

La probabilità che si verifichi l'evento A nel caso in cui si sa già che si è verificato l'evento B , detta *probabilità condizionata*, $P(A|B)$ è:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (2.6)$$

Notiamo che:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A). \quad (2.7)$$

Due eventi A e B sono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

2.1.3 Teorema di Bayes

Supponiamo che un fenomeno casuale A possa dare luogo a N eventualità mutuamente esclusive A_j , che esauriscano la totalità delle possibilità; sia poi un differente fenomeno casuale che possa condurre o al verificarsi o al non verificarsi di un evento E . Osservando la realizzazione di entrambi questi fenomeni, se E si verifica, assieme ad esso si dovrà verificare anche una ed una sola delle eventualità A_j ; applicando prima (2.4), per eventi mutuamente esclusivi, e poi (2.7), si ottiene:

$$P(E) = \sum_{j=1}^N P(E \cdot A_j) = \sum_{j=1}^N P(A_j) \cdot P(E|A_j). \quad (2.8)$$

Riprendendo ora (2.7), ricaviamo:

$$P(A_i|E) = \frac{P(A_i) \cdot P(E|A_i)}{P(E)} \quad (2.9)$$

e sostituendovi (2.8) si giunge a:

$$P(A_i|E) = \frac{P(A_i) \cdot P(E|A_i)}{\sum_j [P(A_j) \cdot P(E|A_j)]}, \quad (2.10) \quad \text{teorema di Bayes}$$

nota come *teorema di Bayes*.

2.2 Variabili continue

Sia un insieme di eventi casuali; sia $X = X(t)$ il valore della nostra variabile casuale nel punto spaziale t . Il valore $x = x(t)$ è misurato nel punto t quando l'evento si verifica. La probabilità dell'evento $A = \{X \leq x\}$ è, per definizione, la *funzione di distribuzione cumulativa*, *cdf*, di X :

$$P(A) = P(X \leq x) = F(x); \quad (2.11)$$

$F(x)$ è monotona crescente da 0 a 1, per x che cresce da $-\infty$ a $+\infty$.

Per le variabili casuali continue $X = X(t)$, derivando $F(x)$ si ottiene la *funzione di densità di probabilità*, *pdf*, di X :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad (2.12)$$

una funzione non negativa di x che soddisfa:

$$dP = f(x)dx \quad (2.13)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx', \quad (2.14)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') dx' = 1 \quad (2.15)$$

Le variabili casuali discrete $X = X(t)$ assumono valori discreti x_1, x_2, \dots con probabilità finita ed è conveniente introdurre la *funzione di probabilità di massa*

$$p(\bar{x}) = P(X = \bar{x}). \quad (2.16)$$

Possiamo calcolare le probabilità di eventi discreti sfruttando la delta di Dirac, includendola nella pdf; la funzione di probabilità di massa sarà pertanto l'area sotto la delta di Dirac nel punto \bar{x} .

2.2.1 Variabili dipendenti da più parametri

Consideriamo il caso dove la variabile $X(t)$ è osservata in due differenti posizioni t_1 e t_2 . Date due variabili $X_1 = X(t_1)$ e $X_2 = X(t_2)$, ogni realizzazione dell'evento può essere rappresentata da un punto in uno spazio dei campioni bidimensionale. La probabilità dell'evento composto $A = \{(X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2)\}$ è per definizione la *cdf congiunta* di $X_1 = X(t_1)$ e $X_2 = X(t_2)$:

$$F(x_1, x_2) = P(\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq x_2\}). \quad (2.17)$$

Per variabili continue si ha poi la *pdf congiunta*:

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (2.18)$$

La pdf marginale di x_1 è ottenuta integrando la pdf congiunta su tutti i possibili valori di x_2 :

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2. \quad (2.19)$$

Imponendo delle condizioni su una delle due variabili o entrambe otteniamo la *cdf condizionata*. Sia ad esempio il vincolo $X_1 = x_1$, si ha:

$$F(x_2|x_1) = P(X_2 \leq x_2 | X_1 = x_1), \quad (2.20)$$

con corrispondente pdf condizionata:

$$f(x_2|x_1) = \frac{d}{dx_2} F(x_2|x_1), \quad (2.21)$$

che soddisfa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_2|x_1) dx_2 = 1. \quad (2.22)$$

Notiamo che le funzioni di densità di probabilità condizionata, congiunta e marginale soddisfano a:

$$f(x_1, x_2) = f(x_2|x_1)f(x_1) = f(x_1|x_2)f(x_2), \quad (2.23)$$

possiamo perciò riscrivere il teorema di Bayes come:

$$f(x_2|x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)} = \frac{f(x_1|x_2)f(x_2)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1|x_2) dx_2}. \quad (2.24)$$

Due variabili casuali sono indipendenti se e solo se:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2), \quad (2.25)$$

per ogni valore di x_1 e x_2 .

Il caso bidimensionale può essere facilmente esteso ad una dimensione generica, eventualmente esprimendo le quantità in forma vettoriale.

2.3 Valori attesi

Di seguito ripercorreremo brevemente alcune definizioni in una o più dimensioni.

2.3.1 Valori attesi di una variabile

Se X è una variabile casuale con pdf $f(x)$, la *speranza matematica* di X e della funzione $g(X)$ saranno date rispettivamente, assumendo che gli integrali esistano, da:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx; \quad (2.26) \quad \textit{speranza matematica}$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x) dx. \quad (2.27)$$

Se $g(X) = X^n$, otteniamo i *momenti di ordine n* della variabile X . Il momento del primo ordine ($n = 1$) è la *media*, m , nonché speranza di X : *momenti*

$$m = E(X). \quad (2.28) \quad \textit{media}$$

Il momento del secondo ordine $E(X^2)$ è la *media quadratica* di X .

I *momenti centrali* di X sono ottenuti prendendo $g(X) = (X - m)^n$. Il momento centrale di primo ordine è nullo, il momento centrale del secondo ordine è, per definizione, la *varianza* di X :

$$\sigma^2 = \textit{var}(X) = E[(X - m)^2] = E(X^2) - m^2. \quad (2.29) \quad \textit{varianza}$$

La radice quadrata della varianza, σ , è la *deviazione standard* di X . Se $m = 0$ la deviazione standard è uguale allo *scarto quadratico medio*, *rms*. Il coefficiente di skewness, che indica l'asimmetria della distribuzione, e quello di kurtosi, che ne indica la "piccatezza", sono dati in funzione dei momenti centrali terzo e quarto e sono rispettivamente:

$$\gamma_1 = \frac{E[(X - m)^3]}{\sigma^3}; \quad (2.30)$$

$$\gamma_2 = \frac{E[(X - m)^4]}{\sigma^4}. \quad (2.31)$$

2.3.2 Valori attesi di due variabili

La speranza di una funzione $g(X_1, X_2)$ di due variabili casuali X_1 e X_2 è data da:

$$E(g(X_1, X_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (2.32)$$

La varianza di $g(X_1, X_2)$ è:

$$\sigma_g^2 = \left(\frac{dg}{dx_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{dg}{dx_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + 2\left(\frac{dg}{dx_1}\right)\left(\frac{dg}{dx_2}\right) \text{cov}(X_1, X_2), \quad (2.33)$$

ove $\text{cov}(X_1, X_2)$ è la *covarianza* di X_1 e X_2 , definita come il valore atteso del prodotto degli scarti dalle loro rispettive medie:

$$\text{cov}(X_1, X_2) = B_{12} = E[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)] = E(X_1 X_2) - m_1 m_2. \quad (2.34) \quad \text{covarianza}$$

Dividendo B_{12} per $\sigma_1 \sigma_2$ porta ad un coefficiente adimensionale detto *coefficiente di correlazione lineare* tra X_1 e X_2 :

$$\varrho_{12} = \frac{B_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (2.35)$$

Segue dalle definizioni che $B_{12} = B_{21}$ e $\varrho_{12} = \varrho_{21}$. Inoltre ϱ_{12} deve essere compreso tra -1 e $+1$. Due variabili casuali che seguono una pdf congiunta saranno dette *perfettamente correlate* se $\varrho_{12} = \pm 1$ e *scorrelate* se $\varrho_{12} = 0$. Il coefficiente di correlazione lineare misura il grado di dipendenza lineare.

2.3.3 Matrice di covarianza di un vettore casuale

La covarianza di M variabili casuali $X_1, \dots, X_i, \dots, X_M$ (raggruppabili nel vettore casuale \vec{X}) può essere espressa in una matrice simmetrica di covarianza $M \times M$, B :

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1M} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2M} \\ & \vdots & & \\ B_{M1} & B_{M2} & \dots & B_{MM} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

La proprietà principale della matrice B è di essere definita positiva, essa quindi ammette M autovalori $\lambda_k, k = 1, \dots, M$. Esiste quindi una matrice P tale che la matrice $B' = P^{-1}BP$ (con P^{-1} inversa di P) sia diagonale, ovvero $B' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_M)$.

2.4 Funzione caratteristica

Il valore atteso della funzione e^{iuX} è per definizione la *funzione caratteristica* della variabile casuale X :

$$E(e^{iuX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iux} dx = \varphi(u), \quad (2.37)$$

$\varphi(u)$ è di fatto la *trasformata di Fourier* della pdf $f(x)$, trasformazione che esiste dal momento che l'integrale per $f(x)$ è pari a uno. La trasformata inversa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)e^{-iux} du. \quad (2.38)$$

Notiamo che $\varphi(0) = 1$, ed espandendo in serie la funzione esponenziale:

$$e^{iuX} = 1 + iuX + \frac{1}{2}(iuX)^2 + \dots, \quad (2.39)$$

e prendendo la speranza nell'equazione (2.39), si ha:

$$\varphi(u) = E(e^{iuX}) = 1 + iuE(X) + \frac{1}{2}(iu)^2E(X^2) + \dots \quad (2.40)$$

Questa espansione permette di esprimere i momenti di X in termini delle derivate della funzione caratteristica, calcolata in $u = 0$. In particolare:

$$m = E(X) = \frac{1}{i} \left[\frac{d\varphi(u)}{du} \right]_{u=0}; \quad (2.41)$$

$$E(X^2) = - \left[\frac{d^2\varphi(u)}{du^2} \right]_{u=0}. \quad (2.42)$$

La funzione caratteristica congiunta di due variabili casuali è data dalla speranza della funzione $e^{i(u_1X_1+u_2X_2)}$. Si ha che $\varphi(0, 0) = 1$ e, ammesso che esista:

$$E(X_1, X_2) = - \left[\frac{\partial^2\varphi(u_1, u_2)}{\partial u_1\partial u_2} \right]_{u_1=u_2=0} \quad (2.43)$$

2.5 La distribuzione gaussiana

La *distribuzione di Gauss o normale* è una pdf definita come:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty \leq x \leq +\infty. \quad (2.44) \quad \text{distribuzione gaussiana}$$

Essendo la funzione caratteristica $\varphi(u) = \exp\{ium - \frac{1}{2}u^2\sigma^2\}$, la media e la varianza sono rispettivamente i parametri m e σ che compaiono nella pdf, essi definiscono quindi univocamente la distribuzione.

Tutti i momenti centrali di ordine dispari di X sono nulli, mentre quelli pari dipendono da σ soltanto.

Una variabile casuale gaussiana U è detta essere gaussiana standard se $m_U = 0$ e $\sigma_U = 1$.

2.5.1 La distribuzione gaussiana multivariata

Un vettore \vec{X} di k variabili casuali gaussiane è caratterizzato dalla pdf gaussiana multivariata:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det(B)}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m})^T B^{-1}(\vec{x}-\vec{m})}, \quad (2.45)$$

ove \vec{m} è il vettore dei valor medi e B è la matrice $k \times k$ di covarianza e $\det(B)$ il suo determinante. Le notazioni $(\dots)^T$ e $(\dots)^{-1}$ indicano rispettivamente il trasposto e l'inverso

2.5.2 Teorema del limite centrale

Siano N variabili casuali x_i , statisticamente indipendenti tra loro e provenienti da una distribuzione avente densità di probabilità ignota, delle quali esistano finite sia la media m che la varianza σ^2 ; sotto questa ipotesi, la distribuzione della media aritmetica del campione, \bar{x} , tende asintoticamente alla distribuzione normale con media m e varianza σ^2/N al crescere di N . *teorema del limite centrale*

2.6 Campi random gaussiani omogenei, isotropi e processi ergodici

Prima di proseguire nell'analisi diamo alcune definizioni.

Chiamiamo *campo random* n -dimensionale $X(t)$ un insieme di variabili casuali (random) una per ogni punto t in uno spazio reale n -dimensionale, definito da un insieme di pdf congiunte finito dimensionali. *random*

Una variabile random è detta *gaussiana* se segue la distribuzione gaussiana. *gaussiano*

Definiamo *campo random gaussiano* un campo random le cui funzioni di distribuzione sono tutte gaussiane multivariate.

Un campo random è detto *strettamente omogeneo o stazionario* se tutte le pdf finito dimensionali sono invarianti sotto traslazione simultanea, di uno stesso vettore, di tutti i punti t_j . La probabilità dipenderà solo dalle posizioni relative, non assolute, dei t_j . Per un campo gaussiano questo implica che la sua covarianza è funzione solo della posizione dei punti t , e t' , perciò: $B(t, t') = B(t - t') = B(\tau) = B(\tau_1, \dots, \tau_n)$, ove $\tau = t - t'$ è il vettore di ritardo, le cui componenti sono $\tau_k = t_k - t'_k$, con $k = 1, \dots, n$. $B(\tau)$ è simmetrica $B(\tau) = B(-\tau)$. *strettamente omogeneo*

Un campo random gaussiano strettamente omogeneo è *isotropo* se la sua pdf è invariante per rotazione e tale sarà anche la sua covarianza. *isotropo*

Una proprietà dei processi random gaussiani è di essere *ergodici*, ovvero che le medie di un campo stocastico, valutate sull'insieme statistico, sono equivalenti alle medie spaziali di ogni sua realizzazione. *ergodico*

2.7 Funzione di correlazione

La *funzione di correlazione* di due campi random omogenei $X(t)$ e $Y(t)$ è per definizione:

$$B_{XY}(\tau) = \frac{\text{cov}[X(t), Y(t + \tau)]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[X(t)Y(t + \tau) - m_X m_Y]}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (2.46) \quad \text{funzione di correlazione}$$

Più in generale per un vettore di M processi random definiti nello stesso spazio, posso costruire la matrice delle funzioni di covarianza incrociata (crosscovariance). Gli elementi sulla diagonale sono le funzioni di covarianza nella forma $B_{XX}(\tau) = B_X(\tau) = B(\tau)$. La funzione di correlazione spaziale a due punti è la funzione di covarianza.

2.8 Rappresentazione spettrale

Posso esprimere la funzione random stazionaria $X(t)$ come somma della sua media m e $2K$ sinusoidi indipendenti con frequenza $\omega_k = \pm[\Delta\omega(2k - 1)/2]$, con

$\Delta\omega$ intervallo fissato, ampiezza random C_k e fase ϕ_k , $k = 1, \dots, K$:

$$X(t) = m + \sum_{k=-K}^K X_k(t) = m + \sum_{k=-K}^K C_k \cos(\omega_k t + \phi_k). \quad (2.47)$$

tutte le ampiezze e fasi random sono tra loro indipendenti, e le fasi sono uniformemente distribuite in $[0, 2\pi[$. Ogni funzione random elementare $X_k(t)$ ha media nulla e varianza:

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{2} E[C_k^2]. \quad (2.48)$$

La varianza di $X(t)$ sarà:

$$\sigma^2 = \sum_{k=-K}^K \sigma_k^2, \quad (2.49)$$

che mostra che σ^2 può essere distribuita sulle frequenze ω_k ($k = -K, \dots, -1, 1, \dots, K$) e giustifica la *funzione di massa spettrale*:

$$S(\omega_k) \Delta\omega = \frac{1}{2} E[C_k^2]. \quad (2.50)$$

Passando dal discreto al continuo:

$$\sigma^2 = \sum_{k=-K}^K S(\omega_k) \Delta\omega \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega, \quad (2.51) \quad sdf$$

ove $S(\omega)$ è la *funzione di densità spettrale*, *sdf*, di $X(t)$.

2.8.1 Relazioni di Wiener-Khintchine

Se applichiamo (2.47) alla funzione di covarianza $B(\tau)$, otteniamo

$$B(\tau) = cov[X(0), X(\tau)] = \sum_{k=-K}^K E[X_k(0)X_k(\tau)], \quad (2.52)$$

dove $X_k(0) = C_k \cos(\phi_k)$ e $X_k(\tau) = C_k \cos(\omega_k \tau + \phi_k)$, che può essere espressa come

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \sum_{k=-K}^K E[C_k^2] E\left[\frac{1}{2} [\cos(\omega_k \tau + 2\phi_k) + \cos \omega_k \tau]\right] \\ &= \sum_{k=-K}^K \frac{1}{2} E[C_k^2] \cos \omega_k \tau = \sum_{k=-K}^K S(\omega_k) \Delta\omega \cos \omega_k \tau. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Passando al continuo ($K \rightarrow \infty$ e $\Delta\omega \rightarrow 0$) osserviamo che la covarianza $B(\tau)$ è la trasformata di Fourier di $S(\omega)$:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \quad (2.54) \quad \text{relazioni di Wiener-}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (2.55) \quad \text{Khintchine}$$

dette relazioni di Wiener-Khintchine.

Dalla simmetria di $B(\tau)$ segue quella di $S(\omega)$ rispetto ad $\omega = 0$, questo permette di introdurre la *sdf ad una coda*, $G(\omega)$, definita per $\omega \geq 0$:

$$G(\omega) = 2S(\omega) \quad \omega \geq 0, \quad (2.56)$$

si ha quindi:

$$B(\tau) = \int_0^\infty G(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega; \quad (2.57)$$

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau. \quad (2.58)$$

Ponendo $\tau = 0$ nella prima equazione ottengo:

$$\sigma^2 = B(0) = \int_0^\infty G(\omega) \, d\omega. \quad (2.59)$$

Alla *sdf* posso applicare poi tutte le definizioni già esaminate per le *pdf*.

L'analisi spettrale semplifica notevolmente lo studio dei campi random omogenei.

2.8.2 Momento spettrale

Il *momento spettrale di ordine k* di un processo random stazionario $X(t)$ è definito come:

$$\sigma_k^2 = \int_0^\infty \omega^k G(\omega) \, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^k S(\omega) \, d\omega. \quad (2.60) \quad \text{momenti spettrali}$$

Notiamo che $\sigma_0^2 = \sigma^2$.

Per ogni momento spettrale σ_k^2 esiste una frequenza caratteristica $\Omega_k = (\sigma_k^2 / \sigma_0^2)^{1/k}$.

Osservando l'analogia tra *sdf*, $g(\omega)$, e *pdf* di una variabile random non negativa, notiamo che entrambe le funzioni sono non negative e hanno area unitaria. Questo porta ad interpretare le frequenze caratteristiche Ω_1 e Ω_2 come la "media" frequenza e lo "scarto quadratico medio" delle frequenze. Posso definire il parametro δ , $0 \leq \delta \leq 1$, che misura il grado di dispersione di $G(\omega)$, come:

$$\delta = \frac{\sqrt{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}}{\Omega_2} = \frac{\Omega_S}{\Omega_2}, \quad (2.61)$$

ove $\Omega_S = \sqrt{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}$ è la "frequenza di deviazione standard".

2.9 Excursion set

Introduciamo infine un concetto molto importante all'interno dello studio dei campi random, quello di *excursion set*.

Data una funzione $F(t): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e fissato un valore u e un sottoinsieme S di \mathbb{R}^N , definiamo *excursion set* della funzione F oltre il livello u in S , l'insieme:

$$A_u(F, S) = \{t \in S: F(t) \geq u\}. \quad (2.62) \quad \text{excursion set}$$

Risulta chiaro che la speranza di A_u sarà il valor medio dei punti del campo che si trovano al di sopra di una data soglia, ovvero delle regioni "particolari", caratteristiche del campo.

Capitolo 3

Statistica delle perturbazioni

Abbiamo visto che l'Universo è, con buona approssimazione, omogeneo ed isotropo su scale superiori a 100 Mpc, ma presenta comunque delle disomogeneità generate dalle fluttuazioni quantistiche primordiali, che si possono trattare in regime perturbativo.

Queste considerazioni portano a descrivere statisticamente l'Universo come un campo random omogeneo, isotropo, ed ergodico, questa ipotesi è dovuta al fatto che non disponiamo di altre sue realizzazioni, non ci è quindi possibile effettuare una media di ensemble. Con la teoria di Jeans abbiamo visto che le perturbazioni possono essere descritte come onde piane con vettore d'onda \vec{k} , la cui evoluzione è lineare. Dal momento che analizzeremo solo il regime lineare del fenomeno, è comodo lavorare nello spazio di Fourier in cui ogni perturbazione è rappresentata da una sovrapposizione di onde piane, ciascuna evolventesi in maniera indipendente. Ci focalizzeremo in particolare sulla composizione spettrale.

3.1 Lo spettro di potenza delle perturbazioni

Descriviamo quindi, per poterla esaminare, la distribuzione di densità di materia nell'Universo come una sovrapposizione di onde piane. Quello che ci proponiamo è di calcolarne una media ergodica.

Consideriamo a tal fine l'Universo diviso in cubetti di volume V_u , con condizioni periodiche sulle superfici di separazione. Il lato, L_u , del cubetto è maggiore della massima scala, l_s , in cui l'Universo presenta una scala dovuta alle fluttuazioni, $L \gg l_s$. Ogni cubetto V_u è una "realizzazione" dell'Universo.

Detta $\langle \varrho \rangle$ la densità media nel volume V_u e $\varrho(\vec{x})$ la densità nel punto indicato dal raggio vettore \vec{x} , la fluttuazione

$$\delta(\vec{x}) = \frac{[\varrho(\vec{x}) - \langle \varrho \rangle]}{\langle \varrho \rangle} \quad (3.1) \quad \text{fluttuazione di densità}$$

può essere sviluppata in serie di Fourier:

$$\delta(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (3.2)$$

ove il numero d'onda \vec{k} , per le condizioni di periodicità assunte, cioè $\delta(L_u, y, z) = \delta(0, y, z)$ e analogamente per le coordinate y e z , ha componenti:

$$k_x = n_x \frac{2\pi}{L_u}, \quad k_y = n_y \frac{2\pi}{L_u}, \quad k_z = n_z \frac{2\pi}{L_u}, \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

I coefficienti di Fourier $\delta_{\vec{k}}$ sono quantità complesse date da:

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V_u} \int_{V_u} \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{x}; \quad (3.4)$$

per la conservazione della massa in V_u si ha $\delta_{\vec{k}=0} = 0$, inoltre poiché $\delta(\vec{x})$ è reale si ha $\delta_{\vec{k}}^* = \delta_{-\vec{k}}$.

Le considerazioni fatte possono essere estese a tutti gli altri volumi V_{uj} , in cui è stato diviso l'Universo. Le perturbazioni $\delta(\vec{x})$ relative saranno date ancora da (3.2), ma in generale i coefficienti di Fourier saranno diversi. Consideriamo quindi un numero N molto grande di volumi $V_{u1}, \dots, V_{uj}, \dots, V_{uN}$ e cerchiamo la distribuzione di probabilità, $P(\delta_{\vec{k}})$ dei corrispondenti coefficienti $\delta_{\vec{k}} = |\delta_{\vec{k}}| e^{i\vartheta_{\vec{k}}}$. Per il principio cosmologico questa sarà omogenea, isotropa e gaussiana. I coefficienti sono infatti mutuamente indipendenti con fasi $\vartheta_{\vec{k}}$ distribuite casualmente e moduli $|\delta_{\vec{k}}|$ caratterizzati da una statistica di Rayleigh, che è equivalente al fatto che la parte reale ed immaginaria dei $\delta_{\vec{k}}$ siano mutuamente indipendenti ed entrambe distribuite con statistica gaussiana:

$$P(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V_u} \delta_k} e^{-\frac{1}{2V_u} \frac{w^2}{\delta_k^2}}, \quad (3.5)$$

ove w indica la parte immaginaria o reale di $\delta_{\vec{k}}$. L'isotropia dell'Universo implica che $\delta_{\vec{k}}$ dipenda solo dal modulo del numero d'onda \vec{k} e non dalla sua direzione, mentre l'omogeneità implica che il valore della perturbazione $\delta(\vec{x}) = \delta$, mediato su tutto lo spazio, sia identicamente nullo. La varianza risulta pertanto uguale alla media quadratica:

$$\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle - \langle \delta \rangle^2 = \langle \delta^2 \rangle = \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{V_u} \sum_{\vec{k}} \delta_k^2. \quad (3.6)$$

Facendo tendere V_u all'infinito si ottiene, passando a coordinate sferiche:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} P(k) k^2 dk, \quad (3.7) \quad \begin{array}{l} \text{varianza} \\ \text{della flut-} \\ \text{tuazione} \end{array}$$

ove si è posto $\delta_k^2 = P(k)$. $P(k)$ è detto *spettro di potenza* delle perturbazioni. La varianza non dipende dalle coordinate, ma dal tempo, a causa dell'evoluzione delle perturbazioni. Dato che la legge di distribuzione dei coefficienti $\delta_{\vec{k}}$ è gaussiana, tale sarà anche la distribuzione della perturbazione δ . La probabilità che in un generico punto dello spazio, δ sia compresa fra δ e $\delta + d\delta$ è:

$$P(\delta) d(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\sigma^2}} d\delta. \quad (3.8)$$

Si assume che lo spettro delle perturbazioni $P(k)$, almeno entro un certo intervallo di k , sia dato da una legge di potenza:

$$P(k) = A k^n \quad (3.9) \quad \begin{array}{l} \text{spettro} \\ \text{di} \\ \text{potenza} \end{array}$$

dove n è detto *indice spettrale*. La convergenza della varianza (3.7) impone che $n > -3$ per grandi scale ($\frac{2\pi}{\lambda} = k \rightarrow 0$) ed $n < -3$ per piccole scale ($k \rightarrow +\infty$).

3.1.1 La varianza di massa

Introduciamo ora un'altra funzione che ci permette di "selezionare" ed esaminare solamente una determinata porzione di Universo. Analizziamo perciò le proprietà statistiche del campo delle fluttuazioni di densità, se osservato con una "risoluzione" spaziale di scala R . Sia $\langle M \rangle$ la massa media in un volume sferico V di raggio R :

$$\langle M \rangle = \langle \varrho \rangle V = \frac{4\pi}{3} \langle \varrho \rangle R^3. \quad (3.10)$$

Definiamo *varianza di massa* entro V la quantità:

$$\sigma_M^2 = \frac{E(M - \langle M \rangle)^2}{\langle M \rangle^2} = \frac{\langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle}{\langle M \rangle^2} = \frac{\langle (\delta M)^2 \rangle}{\langle M \rangle^2}, \quad (3.11)$$

ove si è fatta la media su tutti i volumi V dello spazio. Sfruttando la decomposizione in serie di Fourier e tenendo conto che, per ogni generica sfera di volume V e centro \vec{x}_0 , si è fatta una media su tutti i punti \vec{x}_0 dello spazio, la varianza di massa (3.11) può essere scritta come:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{V^2} \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle \left[\int_V e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}} d^3\vec{y} \right]^2 = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \delta_k^2 W^2(kR). \quad (3.12) \quad \text{varianza di massa}$$

La funzione $W(kR)$ è detta *funzione finestra*, la sua espressione si trova sviluppando $e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}}$ in armoniche sferiche, e data la simmetria del mio sistema intorno al punto \vec{x}_0 , l'ultimo integrale in (3.12) diviene

$$\int_V e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}} d^3\vec{y} = \frac{4\pi}{k^3} (\sin kR - kR \cos kR), \quad (3.13)$$

pertanto la funzione finestra è

$$W(kR) = \frac{3(\sin kR - kR \cos kR)}{(kR)^3}. \quad (3.14) \quad \text{funzione finestra}$$

Si ha che $W(kR) \approx 1$ per $kR \leq 1$ e $|W(kR)| \leq (kR)^{-2}$ per $kR \gg 1$.

Passando al continuo nello spazio dei numeri d'onda, la varianza di massa diventa:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} P(k) W^2(kR) k^2 dk < \sigma^2. \quad (3.15)$$

3.1.2 La funzione finestra

Abbiamo introdotto il concetto di funzione finestra, spieghiamone ora il significato.

Alla varianza di massa σ_M^2 contribuiscono essenzialmente le perturbazioni con lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{k} > R$, in quanto quelle con $\lambda < R$ si elidono per interferenza.

Lo scopo della funzione finestra è quello di "filtrare" il campo, ovvero talvolta si è interessati alla proprietà del campo di fluttuazioni di densità $\delta(\vec{x}; R_f)$ "filtrato" con un filtro "passa-basso", volto ad eliminare le fluttuazioni di lunghezza d'onda inferiori ad una certa scala di filtraggio R_f :

$$\delta(\vec{x}; R_f) = \int \delta(\vec{x}') F(|\vec{x} - \vec{x}'|; R_f) d\vec{x}', \quad (3.16)$$

basti pensare alla discriminazione fatta dalla lunghezza d'onda di Jeans.

Il filtro F ha le seguenti proprietà:

- $F = \text{cost} \approx R_f^{-3}$ se $|\vec{x} - \vec{x}'| \ll R_f$;
- $F = 0$ se $|\vec{x} - \vec{x}'| \gg R_f$;
- $\int F(\vec{z}; R_f) d\vec{z} = 1$.

Riportiamo alcuni esempi di filtro:

il *filtro top-hat*, definito dalla relazione:

$$F_{TH}(|\vec{x} - \vec{x}'|; R_{TH}) = \frac{3}{4\pi R_{TH}^3} \theta\left(1 - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{R_{TH}}\right), \quad (3.17)$$

ove θ è la funzione di Heaviside, che seleziona un volume dai bordi netti.

Il *filtro gaussiano*:

$$F_G(|\vec{x} - \vec{x}'|; R_G) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}R_G)^3} e^{-\frac{1}{2} \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}{R_G^2}}, \quad (3.18)$$

che seleziona invece una sfera dai bordi smussati. A seconda della scelta del filtro si avrà un maggior o minor contributo degli effetti di bordo della regione selezionata.

Posso ripetere tutte le considerazioni fatte precedentemente anche per il campo filtrato $\delta(\vec{x}; R_f)$, in questo caso lo spettro di potenza sarà $P(k; R_f) = W_F^2(kR_f)P(k)$.

3.2 La funzione di correlazione

Sostanzialmente vi sono due tipi di scenario per descrivere la formazione delle strutture: quello *top-down*, in cui le perturbazioni, adiabatiche, riguardano sia la materia che la radiazione, nel quale si formano prima gli ammassi, dai quali si originano per frammentazione le galassie; e quello *bottom-up* nel quale si formano prima le protonubi e poi per instabilità le strutture più grandi (clustering gerarchico).

Introduciamo ora un concetto molto importante nella comprensione del campo di fluttuazioni, la *funzione di correlazione*. Pur essendo quello su cui lavoriamo un modello statistico accreditato da conferme osservative, esso resta comunque un modello non fisicamente tangibile. Ciò che possiamo fare è studiarne le realizzazioni e le caratteristiche di cui disponiamo, possiamo quindi indagare solo quelle strutture che "riflettono" il comportamento del campo "sottostante".

L'analisi statistica delle proprietà di clustering dell'Universo si è basata sulle funzioni di correlazione. Le proprietà statistiche della distribuzione spaziale di un campione di oggetti sono descritte completamente solo dall'insieme delle funzioni di correlazione a tutti gli ordini.

La probabilità congiunta d^2P di trovare una galassia in un volume dV_1 e un'altra nel volume dV_2 , separate dalla distanza \vec{r}_{12} , in un volume molto grande dell'Universo, è data da:

$$d^2P = n_V^2 [1 + \xi(r_{12})] dV_1 dV_2, \quad (3.19)$$

ove n_V è il numero medio di galassie per unità di volume e la funzione $\xi(r_{12})$ è detta *funzione di correlazione spaziale a due punti* (o funzione di covarianza) delle

galassie. Per l'omogeneità e l'isotropia dell'Universo ξ dipende solo dal modulo di r_{12} e non dalla sua direzione. Se le galassie sono distribuite a caso, ovviamente si ha $\xi(r_{12}) = 0$. Presa una galassia a caso, il numero medio di galassie entro una distanza r da essa è:

$$\langle N \rangle_r = \frac{4\pi}{3} n_V r^3 + 4\pi n_v \int_0^r \xi(r'_{12}) r'_{12}{}^2 dr'_{12}, \quad (3.20)$$

dove l'integrale rappresenta l'eccesso di galassie ad una distanza r da quella data rispetto ad una distribuzione casuale.

La funzione di correlazione appena introdotta è valida per fenomeni discreti quali le galassie, esse sono "realizzazioni" del campo di fluttuazioni, che è continuo, e ne rispecchiano le caratteristiche.

3.2.1 Funzioni di correlazione per campi

Estendiamo il concetto di funzione di correlazione spaziale anche ad un campo continuo di densità $\varrho(\vec{x})$, la funzione di covarianza a distanza r è:

$$\xi(r) = \frac{\langle \varrho(\vec{x})\varrho(\vec{x} + \vec{r}) \rangle - \langle \varrho \rangle^2}{\langle \varrho \rangle^2} = \frac{\langle [\varrho(\vec{x}) - \langle \varrho \rangle][\varrho(\vec{x} + \vec{r}) - \langle \varrho \rangle] \rangle}{\langle \varrho \rangle^2}, \quad (3.21)$$

quindi

$$\xi(r) = \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle, \quad (3.22)$$

funzione di correlazione spaziale

ove la media è stata fatta su tutti i punti \vec{x} di un volume V_u rappresentativo dell'Universo. Sfruttando (3.2) si ha:

$$\xi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (3.23)$$

e passando al continuo nello spazio delle k :

$$\xi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k}, \quad (3.24)$$

da cui posso ricavare la relazione inversa:

$$\langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{V_u} \int \xi(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r} \quad (3.25)$$

e passando al limite per V_u che tende all'infinito otteniamo le relazioni di Wiener-Khintchine per $\xi(\vec{r})$ e $P(k)$:

$$P(k) = \int \xi(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r}; \quad (3.26)$$

$$\xi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k}, \quad (3.27)$$

relazioni di Wiener-Khintchine per $\xi(\vec{r})$ e $P(k)$

lo spettro è la trasformata di Fourier della funzione di covarianza. Riprendendo (3.24), detto ϑ l'angolo compreso tra \vec{k} e \vec{r} e Ω l'angolo solido, si ha che l'integrale su tutte le direzioni di \vec{r} fornisce

$$\int_{\Omega} e^{-ikr \cos \vartheta} d\Omega = 4\pi \frac{\sin kr}{kr}. \quad (3.28)$$

Otteniamo dunque

$$\xi(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} P(k) \frac{\sin kr}{kr} k^2 dk; \quad (3.29)$$

$$P(k) = 4\pi \int_0^{+\infty} \xi(r) \frac{\sin kr}{kr} r^2 dr. \quad (3.30)$$

Mediando (3.23) su \vec{r} si ottiene:

$$\langle \xi(\vec{r}) \rangle_{\vec{r}} = \frac{1}{V_u} \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r} = 0. \quad (3.31)$$

In un Universo omogeneo ed isotropo $\xi(\vec{r})$ non dipende dall'origine e dalla direzione di \vec{r} , ma solo dal modulo, quindi si ha

$$\int_0^{+\infty} \xi(r) r^2 dr = 0. \quad (3.32)$$

La funzione di covarianza è in generale a segno alterno, positiva all'origine, in quanto da (3.22) risulta $\xi(0) = \langle \delta^2(0) \rangle = \langle \sigma^2 \rangle \geq 0$.

Spieghiamo meglio il significato della funzione di correlazione ξ . Supponiamo che nell'Universo la materia sia distribuita in regioni con fluttuazione di densità $\delta > 0$, sovradense, e $\delta < 0$, sottodense, tutte di dimensione dell'ordine di r_0 . In tal caso il prodotto $\delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r})$ per distanze $r < r_0$, altrimenti sarà mediamente negativo. Questo implica che la funzione di covarianza si annulla a $r \approx r_0$, che è la dimensione media delle regioni ed è quindi la lunghezza di coerenza del campo delle fluttuazioni di densità. Se fra le regioni di dimensioni r , si ha $\xi(r) > 0$ vi è correlazione, altrimenti vi è anticorrelazione.

Osserviamo infine che la distribuzione delle galassie può essere espressa dalla funzione $\varrho(\vec{x}) = \sum_i m_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$, ove la somma è su tutte le galassie, la δ è di Dirac e le m_i è la massa della galassia i -esima che si trova nel punto x_i .

3.3 Spettro e varianza

Le proprietà dello spettro $P(k)$, come visto, possono essere espresse dai suoi momenti di ordine l :

$$\sigma_l^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} P(k) k^{2(l+1)} dk = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} P(k) k^2 k^{2l} dk, \quad (3.33)$$

il momento di ordine zero, come sappiamo, coincide con la varianza. Alcune proprietà statistiche del campo di fluttuazioni $\delta(\vec{x})$ dipendono dai parametri spettrali:

$$\gamma = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2 \sigma_0} = \frac{\langle k^2 \rangle}{\sqrt{\langle k^4 \rangle}}, \quad R_* = \sqrt{3} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (3.34)$$

ove $0 \leq \gamma \leq 1$ è un indice di "dispersione", "larghezza di banda" dello spettro, e R_* è la lunghezza comovente. Se $\gamma \rightarrow 1$ lo spettro sarà stretto e piccato. Esprimendo $\langle k^2 \rangle$ e $\langle k^4 \rangle$ in termini delle derivate della funzione di correlazione, valutata a distanza nulla:

$$\langle k^2 \rangle = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} = -3 \frac{\xi''(0)}{\xi(0)} \quad (3.35)$$

$$\langle k^4 \rangle = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} = 5 \frac{\xi^{iv}(0)}{\xi(0)} \quad (3.36)$$

3.4 La funzione di massa

La *funzione di massa* $n(M)$, detta anche *funzione di molteplicità* di strutture cosmiche, è definita come

$$dN = n(M)dM, \quad (3.37)$$

ed offre il numero per unità di volume delle strutture considerate con massa compresa tra M e $M + dM$.

Consideriamo un campo di fluttuazioni di densità $\delta(\vec{x}; R) = \delta_M$, filtrato con scala R relativa ad una massa M . In particolare, considerando una statistica gaussiana, la distribuzione delle fluttuazioni sarà:

$$P(\delta_M)d\delta_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_M} e^{-\frac{1}{2}\frac{\delta_M^2}{\sigma_M^2}} d\delta_M, \quad (3.38)$$

la probabilità che in un dato punto la fluttuazione superi un certo valore critico δ_{MC} è:

$$P\{\delta_M > \delta_{MC}\}(M) = \int_{\delta_{MC}}^{+\infty} P(\delta_M)d\delta_M. \quad (3.39)$$

3.5 Origine, evoluzione e tipi di spettro

Uno spettro primordiale delle perturbazioni è adeguato se, dopo l'evoluzione delle perturbazioni sia nella fase lineare che in quella non lineare, dà origine alle strutture cosmologiche osservate e relative proprietà.

Storicamente si ipotizzarono diversi spettri, ne descriveremo ora alcuni. Abbiamo visto che, affinché la varianza converga, si devono porre delle condizioni sull'indice spettrale n .

Osserviamo che per un filtro top-hat, con i bordi netti, ottengo che:

$$\sigma_M^2 \propto R^{-(n+3)}, \quad -3 \leq n \leq 1, \quad (3.40)$$

quindi σ_M dipende dall'indice spettrale secondo la legge:

$$\sigma_M \propto R^{-(n+3)/2} \propto M^{-(n+3)/6} = M^{-\alpha}, \quad (3.41)$$

ove $\alpha = (n + 3)/6$ è detto indice di varianza.

Otengo invece per $n > 1$:

$$\sigma_M^2 \propto R^{-4} \propto M^{-4/3}; \quad (3.42)$$

$$\sigma_M \propto M^{-2/3}, \quad (3.43)$$

che non dipendono più dall'indice spettrale, questo a causa dei bordi netti della sfera. Quando $n > 1$ diventano rilevanti, nel determinare la varianza, le componenti dello spettro che sono ai "bordi" della funzione finestra $W(kR)$. La varianza diventa sensibile al contributo delle componenti spettrali a piccole lunghezza d'onda e quindi al "rumore" sulla superficie della sfera, ove le particelle stanno casualmente o dentro o fuori il volume considerato.

Applicando un filtro gaussiano, dai bordi smussati:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} P(k)k^2 e^{-k^2 R^2} dk \propto R^{-(n+3)}, \quad (3.44)$$

risultato valido per ogni n .

Una distribuzione perfettamente omogenea, $\delta(\vec{x}) = 0$, ha uno spettro identicamente nullo, così come la sua media e la sua varianza di massa.

Se le particelle sono tutte di massa m e distribuite a caso nello spazio, la fluttuazione in un volume V , contenente in media N particelle, e quindi una massa $M = mN$, risulta essere $\langle(\delta N)^2\rangle^{1/2} \approx N^{1/2}$ per cui:

$$\sigma_M = \frac{\delta N}{N} \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \propto \frac{1}{\sqrt{M}}, \quad (3.45)$$

che corrisponde ad un indice spettrale $n = 0$, detto di "white noise".

*spettro di
white noise*

Una distribuzione casuale di particelle sulla superficie di una sfera dai contorni netti porta ad una fluttuazione con $\sigma_M \propto N^{-2/3} \propto M^{-2/3}$, corrispondente ad un indice $n = 1$; smussando il contorno della sfera, l'effetto di superficie viene modificato e risulta $\sigma_M \propto N^{-5/6} \propto M^{-5/6}$, di indice spettrale $n = 2$. Imponendo che nel passaggio fra la distribuzione completamente omogenea e la distribuzione perturbata, non si conservi solo la massa, ma anche la quantità di moto, nello sviluppo di Fourier di $\delta_{\vec{k}}$ si devono considerare nulli anche i termini di ordine via via superiore, considerando indici spettrali di ordini maggiori.

Solitamente si propone uno spettro, ad un tempo primordiale t_p e si verifica se le strutture che ne derivano hanno caratteristiche in accordo con i dati osservativi.

Chiamiamo il nostro spettro primordiale:

$$P(k; t_p) = A_p k^{n_p}, \quad (3.46)$$

ove sia A_p che n_p possono essere funzioni di k , generalmente possono essere assunti costanti entro un certo intervallo di k , in tal caso si avrà:

$$\sigma_M \propto M^{-\alpha_p}. \quad (3.47)$$

Lo spettro primordiale con $n_p = 1$ corrispondente a:

$$\sigma_M(t_p) \propto M^{-2/3}, \quad (3.48)$$

detto *spettro di Zeldovich*, gode del fatto che le fluttuazioni della metrica, proporzionali alle fluttuazioni del potenziale gravitazionale $\delta\varphi(r) = cost$, sono indipendenti dalla scala r . In questo modello oltre alla curvatura generale, vi è una specie di "rugosità" indipendente dalla scala. Si ritrova approssimativamente questo spettro nei modelli di tipo inflazionario.

Durante la fase inflazionaria, vengono generate perturbazioni da fluttuazioni quantistiche del campo scalare, ϕ , che guida il processo di espansione accelerata. Il raggio comovente dell'orizzonte cosmologico ($r_H(t) \propto \dot{a}^{-1}(t)$) decresce col tempo e i processi quantistici che generano le perturbazioni, per causalità, operano solo all'interno dell'orizzonte. Anche il campo scalare quantistico, $\phi(\vec{x}, t)$ può essere decomposto in un valor medio, $\Phi(t)$, più una fluttuazione $\delta\phi(\vec{x}, t)$. Durante l'inflazione il campo è soggetto a fluttuazioni quantistiche caratterizzate da una funzione di correlazione $\delta^2\phi(\vec{r}, t)$. Se consideriamo le perturbazioni generate dall'espansione inflazionaria notiamo che, dovendo restare la fluttuazione di curvatura δK costante nel tempo poiché proporzionale alla fluttuazione del potenziale gravitazionale, esse saranno caratterizzate da spettri con legge di potenza $P(k, t) \propto k^{n_t}$. Ove n_t dipende dal fluido considerato e dal tempo in cui è valutato.

Lo spettro primordiale evolve poi nel tempo, modulato da una funzione di trasferimento e dalla crescita non lineare, fino a dar origine alle strutture, le cui proprietà devono essere confrontate con i dati osservativi.

3.6 Storicamente...

Uno dei problemi che sorse, a proposito dello *spettro delle perturbazioni* primordiali, fu quello della sua origine.

Negli anni '70 fu assunto "ad hoc" lo *spettro di "cosmological white-noise"*, detto *spettro di Zeldovich*. Tale spettro fu accreditato nel 1982 quando fu scoperto che, nell'ambito di universo inflazionario, naturali fluttuazioni primordiali di carattere quantistico su scale microscopiche, riscaldate su scale di interesse cosmologico durante il periodo di espansione accelerata, si presentano all'entrata nell'orizzonte durante la successiva era Friedmanniana con caratteristiche simili allo spettro di Zeldovich.

Per quanto riguarda l'evoluzione dello spettro delle perturbazioni, il quadro dipenderà essenzialmente dalla natura delle particelle costituenti l'Universo e dalla natura delle fluttuazioni (adiabatiche, isoterme, ...). Tale "modulazione" dello spettro primordiale è quantificata da una funzione di trasferimento.

Capitolo 4

Campi random e strutture cosmologiche

Giungiamo ora all'analisi statistica dei picchi in un campo random gaussiano. Abbiamo visto che nell'analisi di un campo random di particolare importanza sono gli excursion sets $A_u(F, S) = \{t \in S: F(t) \geq u\}$, ovvero le regioni del campo oltre una certa soglia (threshold), u .

Consideriamo quindi il campo delle fluttuazioni di densità, di cui studieremo l'evoluzione nel regime lineare. Gli excursion sets, caratterizzati dalla presenza di "picchi", saranno ovviamente regioni in cui si avrà la formazione di strutture cosmologiche.

La nostra fluttuazione di densità δ_g definisce un campo random tridimensionale gaussiano. Assumiamo che la condensazione di materia avvenga presso picchi sufficientemente alti. Il campo sarà inoltre uniforme (smooth) e differenziabile, dal momento che deve essere garantito lo studio dei picchi. Abbiamo visto che lo spettro delle fluttuazioni è caratterizzato da uno spettro di potenza, al quale, a seconda della struttura che si vuole studiare, viene applicato un filtro passa-basso, così da livellare i picchi di alta frequenza del campo.

Possiamo dunque considerare i nostri picchi come un processo puntuale, definito tramite una delta di Dirac, che determina un "insieme di elementi":

$$n_{pk} = n_{picchi}(\vec{r}) = \sum_p \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_p), \quad (4.1)$$

*numero
di picchi
discreto*

dove \vec{r}_p sono le posizioni dei massimi che soddisfano determinate condizioni, come essere più alti di una data soglia. È proprio l'iterazione del criterio della soglia a determinare il regime lineare o meno delle perturbazione, mentre il filtraggio lineare determina la non località del processo. Possiamo quindi statisticamente descrivere l'azione della gravità mediante l'altezza della soglia e la lunghezza d'onda del filtro.

Per il principio cosmologico possiamo considerare il nostro campo di fluttuazioni di densità, un campo omogeneo ed isotropo, con media nulla. Il campo risulta completamente determinato dallo spettro di potenza $P(k)$, o dalla sua trasformata di Fourier, la funzione di correlazione $\xi(\vec{r})$. Il teorema del limite centrale assicura che il campo possa essere considerato gaussiano. Decomponendo nello spazio di Fourier la perturbazione $\delta_g(\vec{r})$ abbiamo visto che i coefficienti di Fourier $\delta_{\theta\vec{k}}$ sono statisticamente indipendenti, ma con una stessa funzione di distribuzione, quindi possiamo considerare la probabilità congiunta come gaussiana, sotto ipotesi molto deboli, come il fatto che le fasi ϕ_k siano distribuite uniformemente in $[0, 2\pi[$.

4.1 Il campo di fluttuazioni in breve

Il nostro campo di fluttuazioni

$$\delta_\varrho(\vec{r}, t) = \frac{[\varrho(\vec{r}, t) - \langle \varrho \rangle]}{\langle \varrho \rangle} \quad (4.2)$$

è un campo random tridimensionale $\delta_\varrho(\vec{r})$ in cui ad ogni punto \vec{r} nello spazio tridimensionale è associata una variabile, esso è definito da una funzione di distribuzione congiunta finito-dimensionale

$$P[\delta_\varrho(\vec{r}_1), \dots, \delta_\varrho(\vec{r}_j), \dots, \delta_\varrho(\vec{r}_n)] d\delta_\varrho(\vec{r}_1) \dots d\delta_\varrho(\vec{r}_j) \dots d\delta_\varrho(\vec{r}_n), \quad (4.3)$$

tale che la fluttuazione δ_ϱ abbia valori compresi tra $\delta_\varrho(\vec{r}_i)$ e $\delta_\varrho(\vec{r}_i) + d\delta_\varrho(\vec{r}_i)$ per ogni $i = 1, \dots, n$. In particolare sarà gaussiano, con pdf congiunta gaussiana multivariata (2.45)

$$P(y_1, \dots, y_j, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_j \dots dy_n = \frac{e^{-Q}}{\sqrt{2\pi^n \det(M)}} dy_1 \dots dy_j \dots dy_n, \quad (4.4)$$

dove per alleggerire la notazione si è posto:

$$\delta_\varrho(\vec{r}_j) = y_j; \quad (4.5)$$

$$Q = \sum (y_i - \langle y_i \rangle) (M^{-1})_{ij} (y_j - \langle y_j \rangle); \quad (4.6)$$

$$M_{ij} = \langle (y_i - \langle y_i \rangle) (y_j - \langle y_j \rangle) \rangle. \quad (4.7)$$

Solo la matrice di covarianza M_{ij} e i valor medi $\langle y_i \rangle$ sono necessari a determinare la distribuzione. Dal momento che il campo è gaussiano tali saranno anche i suoi integrali, derivate, funzioni lineari.

Essendo poi il campo omogeneo ed isotropo, si può assumere che il valor medio sia zero, inoltre la matrice di covarianza nello spazio di Fourier è diagonale:

$$\langle \delta_\varrho(\vec{k}_1) \delta_\varrho(\vec{k}_2) \rangle = (2\pi)^3 P_{\delta_\varrho}(k) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \quad (4.8)$$

ove la δ è di Dirac.

L'ultima assunzione è il fatto di essere ergodico, non potendo disporre di altre sue realizzazioni e quindi di poterne fare una media di ensemble.

4.2 Probabilità condizionata e selezione dei massimi

Prima di cominciare l'analisi della densità dei picchi, introduciamo la probabilità condizionata che ci permette, all'interno dei punti estremali, di selezionare i punti di massimo. Bisogna infatti porre attenzione nel definire la probabilità di determinati eventi dato il vincolo che vi sia un punto estremo in una data posizione, supponiamo in $\vec{r} = 0$. Molte notazioni e vincoli risulteranno evidenti leggendo le sezioni successive.

La probabilità condizionata che un evento A si verifichi, dato il verificarsi dell'evento E è data dal teorema di Bayes (2.10). Sia ad esempio A l'evento tale per cui l'altezza del campo a distanza r da un punto estremo sia in un determinato intervallo.

Ci si potrebbe aspettare che l'evento E , tale per cui in zero vi sia un punto estremale, sia definito da $\eta = d\delta_\rho/dr = 0$, tuttavia le probabilità per eventi puntuali così definite sono nulle. Quello che realmente bisogna porre come vincolo è che esista un intervallo di lunghezza ϵ , intorno di $r = 0$. Allora costruiamo la probabilità condizionata per E_ϵ e facciamo tendere ϵ a zero. Allora detto r_e il punto estremale, espandendo in serie di Taylor $\eta(r_e)$ intorno a $r = 0$ si ha

$$\eta(r_e) \approx \eta(0) + \eta'(0)(r_e - 0) + \dots, \quad (4.9)$$

da cui $r_e \approx -\eta(0)/\eta'(0)$. Il vincolo che $|r_e| < \epsilon/2$ diviene pertanto $|\eta/\eta'| < \epsilon/2$. Definendo le probabilità congiunte $P(\eta, \eta')d\eta d\eta'$ e $P(A, \eta, \eta')d\eta d\eta'$, allora

$$P(E_\epsilon) = \int d\eta' \int_{-\eta'\epsilon/2}^{\eta'\epsilon/2} P(\eta, \eta')d\eta \rightarrow \epsilon \int |\eta'| P(\eta = 0, \eta')d\eta'; \quad (4.10)$$

$$P(A, E_\epsilon) = \epsilon \int |\eta'| P(A, \eta = 0, \eta')d\eta', \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

La probabilità condizionata è il rapporto tra questi due ultimi integrali. Il modulo di η' mostra che l'integrazione è su tutti i η' , positivi e negativi, per un punto estremale. Il vincolo che $r = 0$ sia un massimo porta alla medesima equazione con la condizione che l'integrazione sia solo sui η' negativi. La densità media di punti estremali è

$$\langle n_{ext} \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P(E_\epsilon)/\epsilon, \quad (4.12)$$

che è la probabilità di trovarne con il vincolo E_ϵ . Se il punto estremale r_e è tale per cui A è vero, la densità media associata è

$$\langle n_{ext}(A) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P(A, E_\epsilon)/\epsilon. \quad (4.13)$$

La probabilità condizionata che un evento A accada dato l'evento che in $r = 0$ vi sia un punto estremale è dato dal rapporto

$$P(A|E) = \langle n_{ext}(A) \rangle / \langle n_{ext} \rangle. \quad (4.14)$$

Ponendo ulteriori condizioni, come ad esempio che l'altezza di un massimo sia un dato valore, e denotandole con B si ha

$$P(A|B, E) = \langle n_{ext}(A, B) \rangle / \langle n_{ext} \rangle. \quad (4.15)$$

4.3 Densità di picchi

Abbiamo già visto, con il processo puntuale (4.1), come esprimere la densità dei punti p , scelti per essere massimi del campo.

4.3.1 Densità di punti estremali

Vogliamo riscrivere (4.1) in funzione del campo e delle sue derivate, in modo da ottenere una funzione continua. Espandendo in serie di Taylor il campo $\delta_\rho(\vec{r})$ nell'intorno di un punto stazionario \vec{r}_p abbiamo:

$$\begin{aligned} \delta_\rho(\vec{r}) &\approx \delta_\rho(\vec{r}_p) + \nabla \delta_\rho(\vec{r}_p) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_p) + \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_j \delta_\rho(\vec{r}_p) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_p)^2 \\ &= \delta_\rho(\vec{r}_p) + \eta(\vec{r}_p) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_p) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \zeta_{ij}(\vec{r}_p) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_p)_i (\vec{r} - \vec{r}_p)_j \\ &= \delta_\rho(\vec{r}_p) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \zeta_{ij}(\vec{r}_p) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_p)_i (\vec{r} - \vec{r}_p)_j \end{aligned} \quad (4.16)$$

ove si è posto $\eta = \nabla \delta_\rho$ e $\zeta = \nabla \nabla$. Il fatto che \vec{r}_p sia un punto stazionario implica poi che $\eta(\vec{r}_p) = 0$. Assunto poi che la matrice hessiana sia non singolare in \vec{r}_p e constatando che $\eta_i \approx \sum_j \zeta_{ij}(\vec{r} - \vec{r}_p)_j$, possiamo invertire la relazione ottenendo

$$\vec{r} - \vec{r}_p \approx \zeta^{-1}(\vec{r}_p) \vec{\eta}(\vec{r}), \quad (4.17)$$

da cui per le proprietà della delta di Dirac

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_p) = |\det \zeta(\vec{r}_p)| \delta^{(3)}[\vec{\eta}(\vec{r})]. \quad (4.18)$$

Questa relazione è valida per ogni massimo, ma la δ di Dirac estrae tutti i punti estremanti che siano zeri di $\vec{\eta}(\vec{r})$. Quindi la densità di punti estremali N_{ext} , espressa in funzione del campo è

$$N_{ext}(\vec{r}) = |\det \zeta(\vec{r})| \delta^{(3)}[\vec{\eta}(\vec{r})]. \quad (4.19)$$

Se si cercano i punti di massimo n_{pk} basta richiedere che ζ sia definita negativa, ovvero che lo siano i suoi tre autovalori.

Nella pratica però la (4.19) non è facilmente risolvibile, si preferisce calcolarne la media

$$\begin{aligned} \langle N_{ext}(\vec{r}) \rangle &= \langle |\det \zeta(\vec{r})| \delta^{(3)}[\vec{\eta}(\vec{r})] \rangle \\ &= \int |\det \zeta| P(\delta_\rho, \eta = 0, \zeta) d\delta_\rho d^6\zeta, \end{aligned} \quad (4.20)$$

che non dipenderà da \vec{r} per omogeneità. La distribuzione di probabilità congiunta $P(\delta_\rho, \eta, \zeta) d\delta_\rho d^3\eta d^6\zeta$ è quella gaussiana multivariata. Dato che la matrice hessiana ζ_{ij} è simmetrica, essa ha solo sei componenti indipendenti.

Possiamo quindi considerare il punto $\vec{r} = 0$ e cercare gli zeri di $\vec{\eta}$ nell'elemento di volume d^3r intorno a $\vec{r} = 0$, avremo $\eta_i \approx \zeta_{ij} r_j$, inoltre $d^3\eta$ può essere sostituito da $|\det \zeta| d^3r$. La probabilità di avere uno zero di $\vec{\eta}$ in d^3r è

$$d\delta_\rho d^3r \int |\det \zeta| P(\delta_\rho, \eta = 0, \zeta) d^6\zeta = \langle n_{ext}(\delta_\rho) \rangle d\delta_\rho d^3r. \quad (4.21)$$

L'integrazione va fatta su tutti i valori di ζ per un punto estremo.

4.3.2 Densità di picchi

Caratterizziamo ora i punti estremali cercando solamente i massimi, o picchi, del nostro campo. Deriviamo pertanto la densità infinitesima di picchi $N_{pk}(\nu) d\nu$, ove $\nu = \delta_\rho / \sigma_0$ con σ_0 scarto quadratico medio di δ_ρ . Per non appesantire la formulazione i calcoli verranno presentati in seguito.

Riprendiamo pertanto l'equazione (4.21). Per avere la densità di massimi, ζ deve essere definita negativa; conviene perciò ruotarla, esprimendola in funzione dei suoi assi principali, per studiarne gli autovalori. Grazie agli angoli di Eulero otteniamo la matrice di rotazione R che diagonalizza ζ : $diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -R\zeta R^T$, con R^T trasposta. Gli autovalori λ_i saranno ora positivi per il massimo, in particolar modo: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$. La densità di picchi è

$$N_{pk}(\nu) d\nu = \langle \delta(\delta_\rho / \sigma_0 - \nu) |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 |\theta(\lambda_3) \delta^{(3)}[\vec{\eta}]\rangle d\nu, \quad (4.22)$$

la prima delta di Dirac, applicata a δ_ρ / σ_0 , mi individua il "candidato" punto di massimo, la seconda delta, applicata a $\vec{\eta}$, caratterizza la stazionarietà, infine

abbiamo il prodotto dei tre autovalori, ovvero il determinante della matrice ζ , con la condizione, posta dalla θ di Heaviside, che λ_3 debba essere positivo. La media viene fatta sfruttando la pdf $P(\delta_\rho, \eta, \zeta)$. Possiamo esprimere la densità di picchi (comovente) in termini di una funzione $G(\gamma, \gamma\nu)$, di cui daremo la forma analitica in seguito:

$$N_{pk}(\nu)d\nu = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{R_*^3} e^{-\nu^2/2} G(\gamma, \gamma\nu) d\nu, \quad (4.23)$$

densità continua di picchi

ove γ è la larghezza di banda e R_* è la lunghezza comovente (3.34).

La varianza è

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int P(k) k^2 dk = \xi(0) = \langle \delta_\rho^2(r=0) \rangle, \quad (4.24)$$

come si vede corrisponde al momento spettrale di ordine zero e può essere valutata a partire dalla funzione di correlazione a distanza nulla, che ha il vantaggio, nello spazio di Fourier, di non avere "termini misti", essendo le onde piane tra loro indipendenti.

4.3.3 Calcolo dell'integrale

Abbiamo visto che l'integrazione (4.21) va fatta su tutti i valori di ζ per un punto estremale e che la matrice ζ_{ij} è simmetrica. Cerchiamo quindi di esprimere in modo conveniente i valori di integrazione.

Chiamiamo ζ_A le sei componenti indipendenti della matrice hessiana, dove le $A = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ componenti del vettore sei-dimensionale si riferiscono alle $ij = 11, 22, 33, 23, 13, 12$ componenti della matrice. Consideriamo gli autovalori λ_i di $(-\zeta_{ij})$; pertanto si ha $\zeta_A = -\lambda_A$, per $A = 1, 2, 3$.

Dal momento che la pdf $P(\delta_\rho, \eta, \zeta)$ è gaussiana multivariata ed è funzione di tre argomenti, la matrice di covarianza M è composta dalle 10 covarianze dei tre argomenti. Sei elementi di M sono già fissati ($\eta_i, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6$). Per determinare i restanti quattro introduciamo poi delle nuove variabili x, y, z tali che $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\} \rightarrow \{x, y, z\}$. Dobbiamo perciò esprimere $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ in funzione delle nuove variabili, si ha:

$$\sigma_2 x = -\nabla^2 \delta_\rho = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \quad \sigma_2 y = (-\lambda_1 + \lambda_3)/2, \quad \sigma_2 z = (-\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3)/2 \quad (4.25)$$

La matrice è diagonale in y e z . Gli altri tre gradi di libertà della matrice possono essere espressi in funzione degli angoli di Eulero α, β, γ necessari a definire l'orientazione dei tre vettori ortonormali di ζ_{ij} . Riportiamo due relazioni necessarie a poter passare da λ_i a x, y, z :

$$\prod_{A=1}^6 d\zeta_A = |(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)| d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 \frac{\sin \beta d\beta d\alpha d\gamma}{6}; \quad (4.26)$$

$$\prod_{A=1}^3 d\lambda_A = \frac{2}{3} \sigma_2^3 dx dy dz. \quad (4.27)$$

ove $\sin \beta d\beta d\alpha d\gamma$ è l'elemento di volume della tre-sfera, il denominatore 6 deriva dalle possibili permutazioni degli autovalori. La probabilità congiunta diviene

$$P(\nu, \vec{\eta}, x, y, z) d\nu d^3 \eta dx dy dz. \quad (4.28)$$

Per avere un punto estremale ordiniamo gli autovalori tali che $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Con questa restrizione si ha che $y \geq z \geq -y$, $y \geq 0$. Cercando un massimo si dovranno aggiungere le condizioni $\lambda_3 \geq 0$, da cui $0 \leq \lambda_3 = \sigma_2[\frac{x+z}{3} - y]$.

Analizziamo le conseguenze del fatto che $\nabla\delta_\rho$ si annulli in un punto estremale. La forma del campo in prossimità del picco nel punto \vec{r}_p è data dall'espansione di Taylor (4.16).

La totalità del campo di densità per i massimi compresi tra un'altezza ν_0 e $\nu_0 + d\nu$ è

$$\begin{aligned} N_{pk}(\vec{r}, \nu_0)d\nu &= \sum_p \delta^{(3)}(r - r_p) \\ &= \delta^{(3)}[(\zeta^{-1})\vec{\eta}] \theta(\lambda_1)\theta(\lambda_2)\theta(\lambda_3) \delta(\nu - \nu_0)d\nu \\ &= |\det \zeta| \delta^{(3)}[\vec{\eta}] \theta(\lambda_1)\theta(\lambda_2)\theta(\lambda_3) \delta(\nu - \nu_0)d\nu \end{aligned} \quad (4.29)$$

ove θ di Heaviside e δ di Dirac. Vorremmo trovare il funzionale densità di probabilità, ma è complicato, ricorremo pertanto a trovare la media dei picchi di altezza ν_0

$$\langle N_{pk}(\vec{r}, \nu_0) \rangle d\nu = \langle |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3| \theta(\lambda_3) \delta(\nu - \nu_0) \rangle d\nu. \quad (4.30)$$

Restringendoci ai massimi negli intervalli infinitesimi di x, y, z abbiamo che

$$\langle N_{pk}(\nu, x, y, z) \rangle d\nu dx dy dz; \quad (4.31)$$

questa è funzione dei momenti spettrali e degli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Integrando (4.31) prima in z poi in y otteniamo una formula asintoticamente approssimata per la densità di picchi (comovente) $N_{pk}(\nu, x) d\nu dx$, che integrata numericamente su x rende:

$$N_{pk}(\nu) d\nu = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{\sigma_2}{\sqrt{3}\sigma_1} \right)^3 e^{-\nu^2/2} G(\gamma, \gamma\nu) d\nu, \quad (4.32)$$

ove compare la funzione $G(\gamma, \gamma\nu)$, la cui espressione analitica è, posto $w = \gamma\nu$:

$$G(\gamma, w) = \frac{w^3 - 3\gamma^2 w + [B(\gamma)w^2 + C_1(\gamma)] \exp[-A(\gamma)w^2]}{1 + C_2(\gamma) \exp[-C_3(\gamma)w]}. \quad (4.33)$$

Ove i coefficienti A, B, C_i sono dati da:

$$A = \frac{5/2}{(9 - 5\gamma^2)}; \quad (4.34)$$

$$B = \frac{432}{\sqrt{10\pi}(9 - 5\gamma^2)^{5/2}}; \quad (4.35)$$

$$C_1 = 1,84 + 1,13(1 - \gamma^2)^{5,72}; \quad (4.36)$$

$$C_2 = 8,91 + 1,27 \exp(6,51\gamma^2); \quad (4.37)$$

$$C_3 = 2,58 \exp(1,05\gamma^2). \quad (4.38)$$

4.4 Numero di picchi oltre una soglia

Possiamo quindi calcolare il numero di picchi oltre un valore di soglia ν_t

$$n_{pk}(\nu_t) = \int_{\nu_t}^{+\infty} N_{pk}(\nu) d\nu. \quad (4.39)$$

4.4.1 Valori asintotici

Riportiamo i casi limite di soglia elevatissima $\nu \rightarrow +\infty$ senza ricavarli. Nel limite di larga $\gamma\nu$

$$N_{pk}(\nu)d\nu \rightarrow \frac{(\langle k^2 \rangle / 3)^{3/2}}{(2\pi)^2} (\nu^3 - 3\nu) e^{-\nu^2/2} d\nu \quad \text{per } \nu \rightarrow +\infty \quad (4.40)$$

$$n_{pk}(\nu) \rightarrow \frac{(\langle k^2 \rangle / 3)^{3/2}}{(2\pi)^2} (\nu^2 - 1) e^{-\nu^2/2} \quad \text{per } \nu \rightarrow +\infty \quad (4.41)$$

Infine una utile quantità è il valore asintotico di tutti i picchi indipendentemente dalla loro altezza

$$n_{pk}(-\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{pk}(\nu) d\nu = \frac{0,016}{R_*^3} \quad (4.42)$$

4.5 Filtri per la selezione di strutture cosmiche

In fisica risulta però spesso utile introdurre una funzione di selezione $h(\nu/\nu_t)$, che permetta di discriminare le strutture che voglio cercare. La funzione h mi fornisce la probabilità che un picco di altezza ν formi uno degli oggetti cercati. Il numero di picchi sarà in tal caso

$$n_{pk}[h] = \int_0^{+\infty} h(\nu/\nu_t) N_{pk}(\nu) d\nu. \quad (4.43)$$

Per le soglie molto alte e piccate la funzione $h(\nu/\nu_t)$ diviene una θ di Heaviside $\theta(\nu - \nu_t)$.

Non sempre però si cercano i picchi superiori ad una soglia, a volte si desiderano quelli inferiori, in tal caso introduciamo una classe di funzioni

$$h^q(\nu/\nu_t) = \frac{(\nu/\nu_t)^q}{1 + (\nu/\nu_t)^q} \quad (4.44)$$

che in base al valore del parametro q selezioni i picchi alti, bassi, e nel limite $q \rightarrow +\infty$ riproduce il caso della soglia piccata. Se q è piccolo domineranno i picchi più bassi a causa della loro abbondanza, infatti per $\gamma \rightarrow 0$ la distribuzione è larga e potranno contribuire molto picchi poco elevati.

In generale si filtra il campo ad una determinata scala in modo da tagliare i picchi minori e studiare solo determinate strutture. Grazie alle funzioni finestra si può inoltre selezionare la porzione di spazio che si vuole analizzare. La scelta della soglia deve però certamente rispettare il vincolo che il numero di picchi oltre di essa sia pari alla densità di oggetti che si sta analizzando.

4.6 Effetti di bordo

I valori asintotici (4.40), (4.41) del numero di picchi sono validi per $\nu \rightarrow \infty$, se tuttavia si considerano piccoli valori di soglia bisogna tener conto degli effetti di bordo dei punti "sulla soglia". In tal caso, seguendo la notazione precedente e definendo la superficie, orientata, di soglia come $x_3(x_1, x_2)$, si avrà che $\eta_1 = \eta_2 = 0$, ma η_3 dipenderà dal "flusso" di fluttuazioni attraverso x_3 . Chiamato quindi \vec{r}_u un punto sulla superficie della soglia $\nu_t = \delta_{\rho,t}/\sigma_0$, dovrà essere:

$$\frac{\partial \delta_{\rho}(\vec{r}_u)}{\partial x_3} > 0, \quad \frac{\partial \delta_{\rho}(\vec{r}_u)}{\partial x_1} = \frac{\partial \delta_{\rho}(\vec{r}_u)}{\partial x_2} = 0. \quad (4.45)$$

In tal caso la densità di picchi che superano la soglia sarà data da:

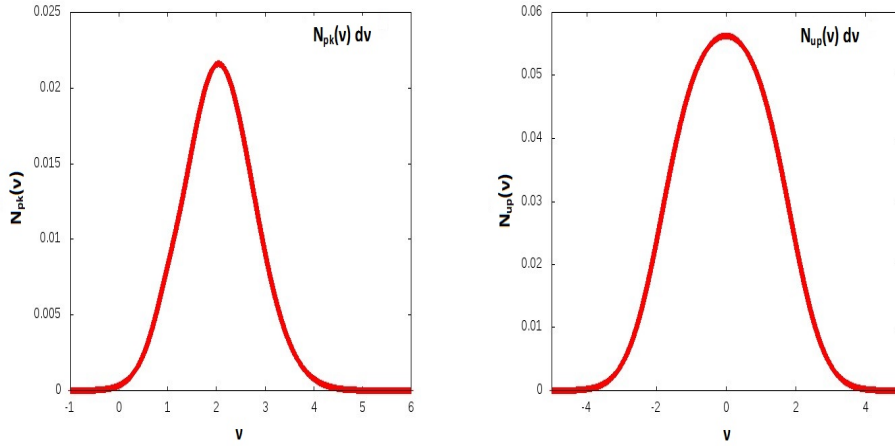
$$N_{up}(\vec{r}) = \delta(\nu - \nu_t) \delta[\eta_1(\vec{r})] \delta[\eta_2(\vec{r})] |\eta_3| |\det \zeta| \theta(\eta_3) \quad (4.46)$$

che mediata offre

$$\begin{aligned} \langle N_{up}(\nu_t) \rangle &= \langle \delta(\nu - \nu_t) |\eta_3| |\det \zeta| \theta(\eta_3) \rangle \\ &= \frac{(\langle k^2 \rangle / 3)^{3/2}}{(2\pi)^2} \left[\nu_t^2 - 1 + \frac{4\sqrt{3}}{5\gamma^2 \sqrt{(1 - 5\gamma^2/9)}} e^{-5\gamma^2 \nu_t^2 / 18} \right] e^{-\nu_t^2 / 2}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

dove abbiamo trascurato i calcoli. Questa espressione è sempre positiva e, a differenza di (4.32), è simmetrica intorno a $\nu_t = 0$. La frazione di picchi superiori ad una data soglia ν_t è pertanto data dal rapporto tra (4.47) e (4.42)

$$f(> \nu_t) \approx 1, 56\gamma^3 \left[\nu_t^2 - 1 + \frac{4\sqrt{3}}{5\gamma^2 \sqrt{(1 - 5\gamma^2/9)}} e^{-5\gamma^2 \nu_t^2 / 18} \right] e^{-\nu_t^2 / 2}, \quad \nu_t > 2, 5\gamma \quad (4.48)$$



(a) funzione $N_{pk}(\nu)$ al variare di ν

(b) funzione $N_{up}(\nu)$ al variare di ν

Figura 4.1: Confronto delle funzioni (4.32) e (4.47) valutate per $\sigma_0 = 1$.

4.7 Conclusioni

Siamo così in grado di associare i siti di formazione delle strutture ai massimi del campo di fluttuazioni sottostante. Una volta fissata $\sigma = \sigma_0$ sono note (4.24) le quantità spettrali.

Possiamo scegliere quindi dei punti \vec{r}_p tali da determinare le condizioni iniziali per avere una data struttura; l'operazione di filtraggio del campo è necessaria affinché la statistica non sia dominata dai fenomeni di piccola scala. La scelta della scala di filtraggio presenta numerosi problemi, ad esempio se la scala è troppo elevata si può rivelare la presenza di un picco isolato, poiché si sono tagliati i picchi inferiori che lo circondano, portando quindi a conclusioni errate sulla struttura cosmica in questione, bisogna tener conto infatti che la formazione di una struttura, supponiamo un ammasso, influenzerà sicuramente lo spazio circostante, alterando quindi il campo di fluttuazioni originale. Per questo di notevole importanza sono le funzioni di correlazione.

Capitolo 5

Simulazioni

Abbiamo infine scritto un semplice programma che potesse simulare la ricerca dei massimi di un campo random gaussiano, il campo di fluttuazioni, per una data soglia. Il campo è stato scelto di "white noise", con indice spettrale $n = 0$. Il programma `ricerca_massimi.cpp` prevede di:

- 1) generare dei numeri random con distribuzione gaussiana, $m = 0$, $\sigma = 1$;
- 2) tagliare il campo ad una data soglia;
- 3) contare il numeri di massimi.

Il criterio per la scelta dei massimi è che il picco i -esimo sia superiore ai cinque picchi che lo precedono e ai cinque che lo seguono.

5.1 Risultati

Riportiamo di seguito una tabella con i risultati per campi di $10^2 \div 10^6$ elementi, valutati per soglie, s , comprese tra 1σ e 5σ .

Nella pagina seguente, per ragioni di "comprensibilità", riportiamo solo i grafici della simulazione svolta per 100 numeri.

numero punti	soglia (σ)								
	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
10^2	9	5	2	1	1	1	0	0	0
10^3	72	47	20	5	4	1	0	0	0
10^4	758	498	227	67	13	2	0	0	0
10^5	7757	4859	2054	616	125	17	2	1	0
10^6	77338	48579	20481	6078	1339	215	20	1	0

Tabella 5.1: Numero dei massimi oltre una soglia data

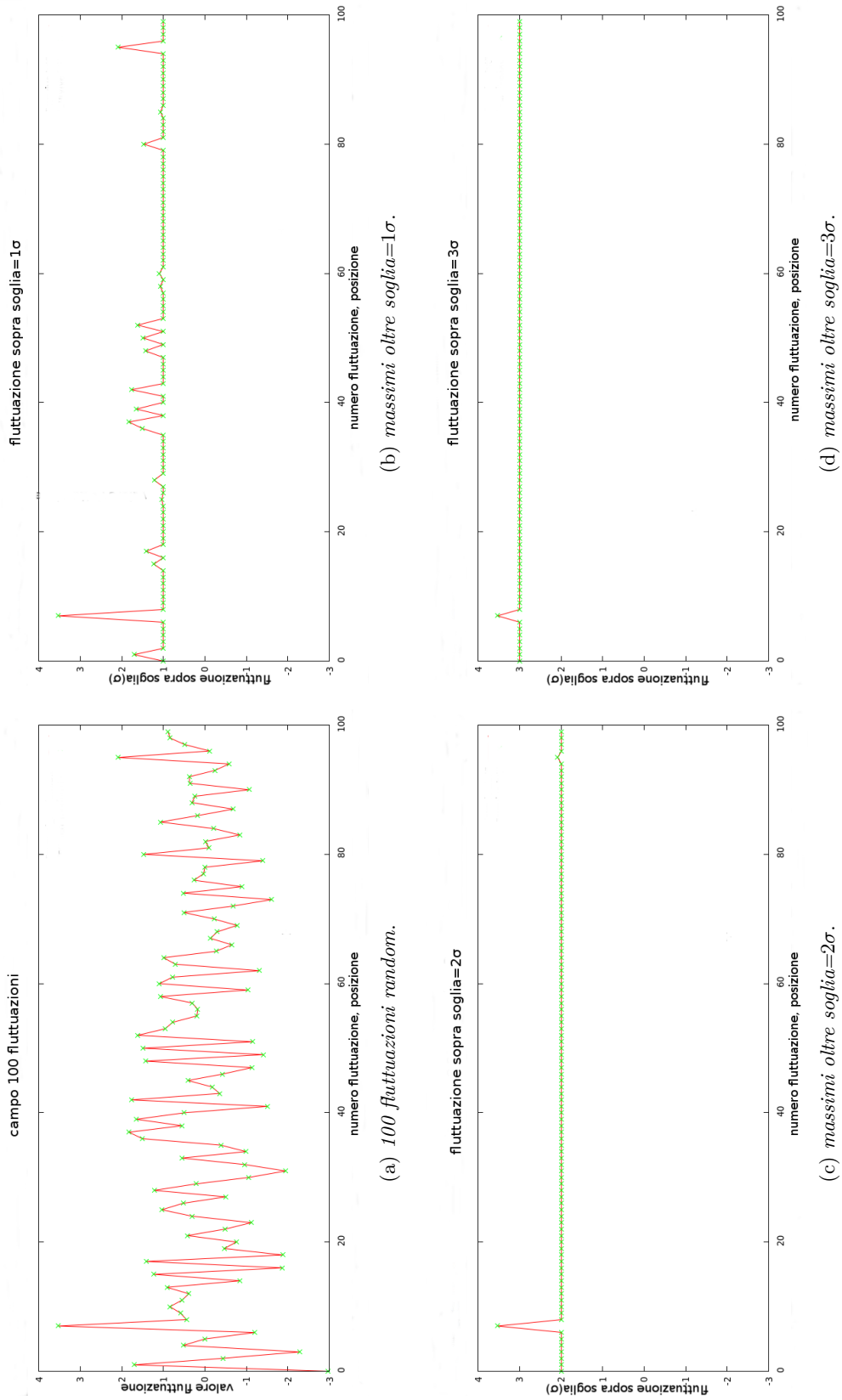


Figura 5.1: campo di 100 fluttuazioni e relative soglie (1σ, 2σ, 3σ)

5.2 Codice programma

```

#include <iostream>
#include <cmath>
#include <cstring>
#include <cstdlib>
#include <sstream>
#include <fstream>
#include "boost/random.hpp"
#include <boost/random/normal_distribution.hpp>

int main()
{
    using namespace std;

    // Gaussian distrib. mean = 0.0, sigma = 1.0
    boost::normal_distribution<> norm(0.0, 1.0);

    boost::mt19937 rng;
    rng.seed( 1 );
    boost::variate_generator < boost::mt19937 &,
    boost::normal_distribution<> >
    norm_rng( rng, norm );

    ofstream outFile;
    ofstream outPut;
    ofstream ritorna;

    double soglia=2.0; //viene cambiato
    int num_punti=pow(10.0,2.0); //viene cambiato
    double flutt[num_punti];
    for (int p=0; p<num_punti;p++){
        flutt[p]=0;
    }
    for (int p=0; p<num_punti;p++){
        flutt[p]=norm_rng();
    }
    outFile.open("numeri_random.txt");
    for (int p=0; p<num_punti;p++){
        outFile<<flutt[p]<<endl;
    }
    outFile.close();

    double soprasoglia[num_punti];
    for (int p=0; p<num_punti;p++){
        soprasoglia[p]=0.0;
    }
    for (int p=0; p<num_punti;p++){
        if(flutt[p]<soglia)
            soprasoglia[p]=soglia;
        else
            soprasoglia[p]=flutt[p];
    }
}

```

```
    outPut.open("sopra_soglia.txt");
    for (int p=0; p<num_punti;p++){
        outPut<<soprasoglia[p]<<endl;
    }

    outPut.close();

    int conteggio=0;
    for(int p=0; p<num_punti;p++){
        if (((p-5)>0)&&((p+5)<num_punti))
            if((soprasoglia[p]>soprasoglia[p+1])&&
                (soprasoglia[p]>soprasoglia[p+2])&&
                (soprasoglia[p]>soprasoglia[p+3])&&
                (soprasoglia[p]>soprasoglia[p+4])&&
                (soprasoglia[p]>soprasoglia[p+5])&&
                (soprasoglia[p]>soprasoglia[p-1])&&
                (soprasoglia[p]>soprasoglia[p-2])&&
                (soprasoglia[p]>soprasoglia[p-3])&&
                (soprasoglia[p]>soprasoglia[p-4])&&
                (soprasoglia[p]>soprasoglia[p-5]))
            conteggio=conteggio+1;
    }
    ritorna.open("numero_max.txt");
    ritorna<<conteggio<<endl;
    ritorna.close();

    return 0;
}
```

Bibliografia

- [1] ADLER R.J., The Geometry Of Random Fields, Wiley, Binghampton, N.Y., 1981 (cap. 1, 2, 6)
- [2] BARDEEN ET AL., The Statistics Of Peaks Of Gaussian Random Fields, The American Astronomical Society, 1986
- [3] LIDDLE A., An Introduction To Modern Cosmology, Wiley, Chichester, West Sussex, 2003 (cap. 1, 2, 3, 5)
- [4] LIGUORI M., Observational Probes Of Early Universe Cosmology, Gaeta, 2013 (13-23)
- [5] LORETI M., Teoria Degli Errori E Fondamenti Di Statistica, 2006
- [6] LUCCHIN F., Introduzione Alla Cosmologia, Zanichelli, Bologna, 1990
- [7] PANTIERI L., L'Arte Di Scrivere Con Latex, 2009
- [8] VANMARCKE E., Random Fields: Analysis and Synthesis, MIT Press, Cambridge MA, 1983 (cap. 2, 3, 4)