



Università degli Studi di Padova

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Analisi di leggi costitutive bi e trilineari per lo studio della
propagazione di cricche usando la teoria Peridynamics**

Candidato:
Christian Casonato
Matricola 1234056

Relatore:
Prof. Mirco Zaccariotto
Correlatore:
Prof. Ugo Galvanetto

Anno Accademico 2021-2022

Indice

1	Introduzione	5
2	Peridinamica	9
2.1	Equazione di moto	10
2.2	Elasticità	12
2.3	Linearizzazione	14
2.4	Forza per unità d'area	16
2.5	Configurazione di equilibrio	17
2.6	Coefficiente di Poisson	19
2.7	Legge costitutiva per un materiale fragile in Peridinamica	22
2.7.1	Modelli bidimensionali	27
2.7.2	Danno	30
2.8	Discretizzazione spaziale	30
2.9	Discretizzazione temporale	34
2.9.1	Algoritmo Velocity-Verlet	34
2.10	Condizioni di carico	35
2.11	Equazione peridinamica con smorzamento	36
2.11.1	Adaptive Dynamic Relaxation	38
2.12	Accenni alla teoria State-Based	40
2.12.1	Bond-based come caso particolare di state-based	41
2.12.2	Ordinary State-based Peridynamics	42
2.12.3	Non-Ordinary State-based Peridynamics	43
3	Caso di studio	45
3.1	Comportamento non lineare del materiale	45
3.1.1	Comportamento bilineare	46
3.1.2	Comportamento trilineare	51
3.2	Variazione proprietà del materiale	52
4	Esempi	57
4.1	Piastra con cricca sottoposta a trazione	57
4.1.1	Risultato simulazioni	60
4.2	Esperimento Kalthoff e Winkler	63

4.2.1	Maraging Steel 18Ni1900	65
4.2.2	Risultati simulazioni	68
5	Analisi e Risultati	73
5.1	Piastra sottoposta a trazione	73
5.1.1	Delta-Convergenza modello lineare	74
5.1.2	Modello bilineare	77
5.1.3	Modello trilineare	78
5.1.4	Confronto risultati con leggi costitutive diverse	79
5.1.5	Confronto risultati al variare dell'energia di frattura	83
5.2	Esperimento Kalthoff e Winkler	88
5.2.1	Delta-convergenza modello lineare	91
5.2.2	Modello bilineare	96
5.2.3	Modello trilineare	97
5.2.4	Confronto risultati con leggi costitutive diverse	98
5.2.5	Confronto risultati al variare della Ultimate Strength del materiale	99
6	Conclusioni	105
A	Schema script Matlab	109
B	Script creazione file con estensione .vtk	111

Capitolo 1

Introduzione

In ambito ingegneristico ha assunto un'importanza primaria lo studio strutturale e lo studio di fattibilità in fase di progetto di tutti gli oggetti che vengono realizzati, a partire da una semplice componentistica di uso quotidiano fino alle enormi strutture quali palazzi o ponti, in cui è necessario predisporre uno studio preventivo di fattibilità per studiare i limiti e punti critici della struttura, ma allo stesso tempo anche capire poi come questa struttura può degenerare e nel caso comprendere come la presenza di un'imperfezione locale possa condizionare il funzionamento globale, e addirittura la rottura del corpo.

Il primo approccio al mondo della meccanica della frattura si deve a Griffith nel 1921, il quale ha trattato una teoria fondata sull'energia di rottura all'avanzare della cricca, che portava in ultimo alla rottura del materiale, riconoscendo che il punto in cui si concentrano le massime tensioni si trova sempre dove ci sono raggi di curvatura molto piccoli, ed è dove è più probabile aspettarsi un innesto di cricca.

Nell'ambito dello studio della meccanica della frattura i modelli del continuo incontrano delle criticità dovute alle discontinuità che non permettono l'utilizzo delle equazioni differenziali che hanno come ipotesi prima la continuità nel dominio della funzione.

Un primo metodo per superare questo problema è stato attraverso l'utilizzo dell'approccio VCCT (Virtual Crack Closure Technique)[20], elaborato per la prima volta nel 1977 che però richiede di indicare a priori un percorso di frattura da seguire. Inoltre i risultati delle simulazioni utilizzando questo approccio hanno una forte dipendenza della mesh adottata e sono tanto più

precisi quanti più elementi vengono utilizzati. Per utilizzare questo metodo si è arrivati a fare un refinement molto profondo in corrispondenza della punta di cricca dove poi la cricca avrebbe propagato.

Un altro metodo utilizzato è quello XFEM (eXtended Finite Element Method) [28], che risolve le fratture implementando delle equazioni ausiliarie che servono a predire la nucleazione di una nuova cricca o la propagazione di una già presente. In questo modo è possibile superare le limitazioni dovute ad un approccio puramente differenziale e il dover imporre un percorso di propagazione preferenziale dove vengono inseriti nei metodi FEM degli elementi di interfaccia che sono poi quelli destinati a separarsi nella propagazione di cricca. Quello che rende però di difficile utilizzo il metodo XFEM è la complessità di risoluzione in ambiente tridimensionale.

Il turning point principale sta nella ricerca di un approccio non-locale dei modelli di integrazione. Un esempio di questo approccio non-locale sta nel modello atomistico, che richiede comunque una base FEM per ridurre i costi computazionali di analisi, richiedendo un step size di integrazione molto piccolo che dilata notevolmente i tempi di simulazione.

Nel 2000 Steward Silling [22] propose una nuova teoria non locale, che è quella che verrà illustrata in questo elaborato, che è la teoria non locale *peridinamica*, dal greco *peri* «intorno» e *dyna* «forza», la quale si pone l'obiettivo di risolvere problemi che coinvolgono fenomeni di propagazione di cricche e frattura.

Questa teoria presenta come caratteristica principale quella di utilizzare delle equazioni scritte in forma integrale che non soffrono del problema delle discontinuità del campo degli spostamenti. Tale teoria è stata utilizzata in diversi ambiti, nonostante sia una delle ultime ad essere presentate in campo strutturale, e in breve tempo ha avuto anche uno sviluppo che l'ha portata ad evolversi, da una teoria molto ristretta con delle ipotesi costruttive stringenti ad una teoria più generale applicabile a molti materiali.

Tra i vari utilizzi sebbene nel nome della teoria sia presente il concetto di *dinamica*, si è sviluppato anche un utilizzo della teoria per la risoluzione di problemi statici; un altro ambito in cui è stata ampiamente usata potendo risolvere le discontinuità è lo studio di propagazioni di cricche per fatica [32] del comportamento dei vari materiali per prevedere l'insorgere di cricche dopo un N numero di cicli di utilizzo.

Il limite più grande che presenta questa teoria è legato ai tempi computa-

zionali elevati, infatti i metodi di risoluzione dinamici sono metodi espliciti che richiedono step temporali molto piccoli per garantire la stabilità del metodo.

La teoria peridinamica non richiede software molto complicati, tanto che basta un semplice strumento di calcolo come Matlab per le simulazioni, come verrà fatto anche all'interno di questo elaborato. Il post-processing dei risultati per la rappresentazione delle condizioni della piastra è stato svolto mediante l'utilizzo del programma "Paraview" che utilizza dei file con estensione .vtk realizzati direttamente all'interno del software Matlab.

Il focus centrale della tesi è nello studio di leggi costitutive alternative a quella base che è lineare, e successivamente ci si pone l'obiettivo di andare a verificare attraverso alcuni esempi come variano le leggi e i comportamenti degli esempi riportati al variare delle grandezze fisiche utilizzate nella definizione delle leggi costitutive.

Il capitolo numero 2 ha l'obiettivo di esporre nei minimi dettagli come è costituita la teoria di base della peridinamica, in particolare verrà analizzata nel dettaglio la teoria *bond based*, e verrà introdotta una teoria sviluppata successivamente che è la teoria *state-based* che ne è la generalizzazione più estesa. Alla fine del capitolo verranno introdotti anche dei possibili sviluppi della teoria per studi successivi.

Nel terzo capitolo viene introdotto il focus della tesi, per cui vengono sviluppate delle leggi costitutive alternative e vengono spiegate le manipolazioni ai parametri che verranno successivamente effettuate e come queste modifiche ci si aspetta influenzino le simulazioni. Nel successivo quarto capitolo vengono esposti i due esperimenti di cui poi si andranno a svolgere le simulazioni con la teoria peridinamica, e i risultati delle simulazioni già svolte da altri autori utilizzando altre teorie, nel quinto capitolo si prosegue con la creazione del modello utilizzato nelle simulazioni da me svolte e i risultati ottenuti. Seguono infine le conclusioni con dei commenti e due sezioni di appendice in cui viene illustrato lo schema logico iterativo utilizzato in Matlab e viene inserito uno script scritto in Matlab che può tornare utile nella generazione di file con estensione ".vtk" da utilizzare in Paraview per il post-processing, dal momento che in rete è stato difficile reperire indicazioni a riguardo.

Capitolo 2

Peridinamica

La maggior parte dei metodi utilizzati per la risoluzione di fenomeni all'interno della meccanica strutturale ha come punto debole l'utilizzo di un approccio integrale che ha come punto debole la risoluzione delle discontinuità di materiale. La peridinamica permette lo studio di queste discontinuità adottando equazioni di natura integrale che possono risolverle senza incorrere in problemi.

In peridinamica il corpo è pensato come composto da punti materiali, che nella trattazione discretizzata vengono definiti dai *nodi*, che interagiscono con tutti gli altri nodi entro una distanza determinata, chiamata *orizzonte* scambiandosi una forza attraverso il legame, detta *pairwise force*. Esistono due tipi di teorie:

- Teoria bond-based [22], che rappresenta la prima teoria presentata, la connessione tra diversi nodi avviene mediante dei legami chiamati *bond*, e l'interazione in un legame è completamente indipendente da tutti gli altri legami.
- Teoria state-based [24], l'interazione nelle coppie di punti materiali vicini ha degli effetti sul nodo di interesse, inoltre in questa seconda teoria viene introdotto il concetto di stato, risulta essere una generalizzazione della teoria precedente che si adatta ad un'ampia gamma di materiali.

In questo elaborato verrà illustrata in maniera approfondita solamente la teoria bond-based che sarà quella utilizzata poi nelle simulazioni, riguardo

la teoria state-based verrà data solo un'introduzione alla teoria e dei casi particolari.

2.1 Equazione di moto

Si parte da una configurazione di equilibrio fissata, in cui tutti i punti materiali hanno una posizione nota, all'istante fissato $t=0$.

Secondo la teoria bond-based della peridinamica [22], la forza per unità di volume applicata ad un punto x in un certo istante di riferimento t è:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{H_x} \mathbf{f} [\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}] dV_{x'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad \forall x' \in H_x \quad (2.1)$$

dove H_x è la regione interna all'orizzonte (δ) centrata nel punto \mathbf{x} contenente tutti i punti \mathbf{x}' , $dV_{x'}$ volume infinitesimo associato ai punti \mathbf{x}' , \mathbf{b} è il vettore delle densità delle forze esterne applicate al corpo, \mathbf{u} il vettore spostamento, ρ è la densità di massa, \mathbf{f} è la pairwise force function, il cui significato è di una forza per unità di volume quadrato che il punto \mathbf{x}' esercita sul punto \mathbf{x} .

Le equazioni che governano la peridinamica si avvicinano molto alle tradizionali equazioni della dinamica molecolare, dal momento che entrambe utilizzano una somma di interazioni tra particelle/punti materiali vicini. Tuttavia la dinamica molecolare utilizza una descrizione discreta del materiale, che è visto come un insieme di particelle di dimensione finita, in peridinamica invece il materiale è visto come una insieme di punti con dimensione infinitamente piccole, nel limite per dimensione dell'orizzonte che tende a zero, si giunge alla soluzione classica del continuo.

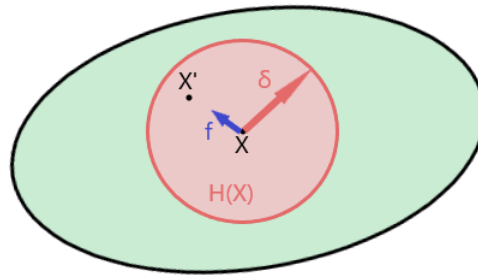


Figura 2.1: H_x è la regione di punti x' con cui interagisce il punto x .

Come riportato da Keping Yu [31], si definiscono poi due termini che verranno utilizzati spesso nella trattazione e hanno un ruolo centrale: la posizione relativa tra due punti materiale nella configurazione di riferimento,

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} \quad (2.2)$$

e lo spostamento relativo tra due punti,

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}(\boldsymbol{x}', t) - \mathbf{u}(\boldsymbol{x}, t) \quad (2.3)$$

Così $|\boldsymbol{\xi}|$ è la lunghezza del bond indeformato, mentre $|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|$ è la lunghezza del bond deformato ad un generico istante t , vedi fig. 2.2.

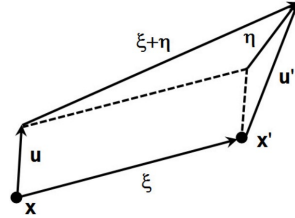


Figura 2.2: Posizione relativa di due punti e spostamento relativo. Tratto da [31].

Dal momento che un punto materiale interagisce solo con punti all'interno della regione H_x , è normale assumere che la pairwise force che un punto \boldsymbol{x} esercita su un punto \boldsymbol{x}' ad una distanza superiore a δ sia nulla.

Dalla terza legge di Newton deve essere verificato che

$$\mathbf{f}(-\boldsymbol{\eta}, -\boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.4)$$

Un'altra condizione della teoria che deve essere verificata è quella per cui la pairwise force tra due punti agisce sempre parallela al loro vettore posizione relativa corrente $\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}$, che in termini di prodotto vettoriale può essere resa esplicita come:

$$(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (2.5)$$

In forma generale le due condizioni possono essere riassunte in un'unica

equazione:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (2.6)$$

Con $F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ funzione pari a valori scalari.

2.2 Elasticità

Secondo quanto riportato da Silling [22], in peridinamica si può parlare di materiale microelastico se:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \quad \forall \Gamma, \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0} \quad (2.7)$$

dove Γ rappresenta una curva chiusa e $d\boldsymbol{\eta}$ è il vettore differenziale che giace su Γ . Ciò sta ad indicare che il lavoro netto compiuto su ogni punto x' dovuto alle forze peridinamiche con un punto fissato x quando x' si muove lungo un percorso chiuso è nullo.

Se \mathbf{f} è differenziabile in maniera continua in $\boldsymbol{\xi}$, allora secondo il teorema di Stoke è verificata l'uguaglianza:

$$\nabla_{\boldsymbol{\eta}} \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0} \quad (2.8)$$

con $\nabla_{\boldsymbol{\eta}} \times$ operatore rotore rispetto a $\boldsymbol{\eta}$.

Se si riscrive in forma matriciale l'eq. 2.8 appena trovata si ha

$$\nabla_{\boldsymbol{\eta}} \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial\eta_i & \partial/\partial\eta_j & \partial/\partial\eta_k \\ f_i & f_j & f_k \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

A questo punto, verificando il teorema di Stokes, è possibile scrivere la forza peridinamica come derivata da un micropotenziale w :

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}), \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (2.10)$$

E si può dimostrare che questo micropotenziale è dipendente dal vettore spostamento relativo $\boldsymbol{\eta}$ solo tramite la distanza tra i due punti nella configurazione deformata.

Così esiste una funzione a valori scalari \hat{w} tale che

$$w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \hat{w}(|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\xi}|), \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (2.11)$$

Sostituendo ora l'eq. 2.11 nell'equazione precedente, eq. 2.10 si giunge ad una funzione generale per la forza peridinamica in un materiale che rispetta la condizione di microelasticità, riportata nell'eq. 2.7:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = H(|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}|, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}), \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (2.12)$$

dove H è una funzione pari a valori scalari:

$$H(p, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \hat{w}}{\partial p}(p, \boldsymbol{\xi}), \quad p = |\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}|, \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (2.13)$$

La forza peridinamica \mathbf{f} in un materiale microelastico può essere intesa come una forza tra due punti \mathbf{x} e \mathbf{x}' connessi tramite delle molle, che in un approccio generale non si comportano in maniera lineare, e la forza agisce solo in funzione della distanza tra i due punti nella configurazione deformata. La microelasticità è un concetto locale, che riguarda solo l'interazione tra coppie di punti che differiscono per una distanza inferiore all'orizzonte utilizzato. Se si vuole ricorrere ad un concetto più ampio è necessario trattare il problema da un punto di vista più esteso di macroelasticità.

Si prende un corpo con funzione di microelasticità nota w , la densità di energia macroelastica $W_u(x)$ in ogni punto x del corpo è definita mediante integrale:

$$W_u(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{H}} w(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV' \quad (2.14)$$

Integrando infine sull'intero volume del corpo si può ottenere l'energia macroelastica totale

$$\Phi_u = \int_{\mathcal{R}} W_u(x) dV \quad (2.15)$$

dove \mathcal{R} rappresenta l'intera regione che delimita il corpo in oggetto.

Per dimostrare il significato di queste grandezze, consideriamo ora il movimento di un corpo microelastico e la derivata temporale della sua energia

macroelastica totale $\dot{\Phi}_{\mathbf{u}}$ (permettendo che \mathbf{u} sia dipendente dal tempo).

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_{\mathbf{u}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{R}} \int_{\mathcal{R}} w(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV' dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (\dot{\mathbf{u}}' - \dot{\mathbf{u}}) dV' dV.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Possiamo eliminare il termine che coinvolge \mathbf{u}' con un cambio di variabile $x' \leftrightarrow x$ e utilizzando la eq. 2.4. Poi utilizzando la 2.1 e la eq. 2.10,

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_{\mathbf{u}} &= - \int_{\mathcal{R}} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{u}} dV' dV = - \int_{\mathcal{R}} [\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}] \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \\ &= - \int_{\mathcal{R}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \right) - \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} \right] dV\end{aligned}\quad (2.17)$$

Che ci permette di concludere con

$$\dot{\Phi}_{\mathbf{u}} + \dot{T}_{\mathbf{u}} = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \quad (2.18)$$

dove $T_{\mathbf{u}}$ è l'energia cinetica totale del corpo.

Da questa equazione si capisce che l'intero lavoro fatto dalle forze esterne viene convertito, senza effetti dissipativi, in energia cinetica e/o densità di energia macroelastica.

Se si va a sostituire il termine legato all'energia macroelastica con l'energia di deformazione si ricade nella nota equazione della teoria del continuo per un corpo elastico.

2.3 Linearizzazione

Sebbene siano ammesse anche le grandi deformazioni nella teoria peridinamica, qui ora verrà data una prima interpretazione per piccoli spostamenti.

Assunto $|\boldsymbol{\eta}| \ll 1$, è possibile linearizzare utilizzando un'espansione di Taylor del prim'ordine centrata in $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})$, dall'eq. 2.6 mantenendo fissato $\boldsymbol{\eta}$:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.19)$$

dove \mathbf{C} è un tensore del secondo ordine, chiamato micromodulo:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.20)$$

Facendo la derivata parziale dell'eq. 2.6 rispetto a $\boldsymbol{\eta}$ si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{1} \quad (2.21)$$

dove \otimes rappresenta il prodotto diacotico che è il tensore prodotto di due vettori e ha come risultato un tensore di ordine due.

Così $\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})$ può essere espresso come:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{1} \quad (2.22)$$

A questo punto, se si ricorda la definizione di materiale microelastico, eq. 2.8, e si va a sviluppare il prodotto vettoriale nelle sue componenti si ottiene

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \boldsymbol{\eta}_j} - \frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial \boldsymbol{\eta}_k} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \boldsymbol{\eta}_k} - \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \boldsymbol{\eta}_i} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial \boldsymbol{\eta}_i} - \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \boldsymbol{\eta}_j} \right) \mathbf{k} = 0 \quad (2.23)$$

che per essere verificata comporta che le derivate dei termini misti siano uguali, ovvero

$$\frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial \boldsymbol{\eta}_r} = \frac{\partial \mathbf{f}_r}{\partial \boldsymbol{\eta}_s}, \quad \text{for } s, r = i, j, k$$

Così si può arrivare a concludere che un materiale lineare per essere microelastico, tenendo conto dell'eq. 2.20, deve avere micromodulo simmetrico:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}^T(\boldsymbol{\xi}), \quad \forall \boldsymbol{\xi} \quad (2.24)$$

In generale il micromodulo ricavato da 2.20 non è simmetrico, ma una condizione sufficiente e necessaria perchè lo sia, è che esista una funzione pari a valori scalari $\lambda(\boldsymbol{\xi})$ tale che

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} \quad (2.25)$$

dove $\lambda(\boldsymbol{\xi})$ viene definito così:

$$\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.26)$$

Quindi il micromodulo simmetrico prende questa forma

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{1} \quad (2.27)$$

e la forma linearizzata della funzione forza di legame diventa in forma generale

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = [\lambda(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{1}]\boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.28)$$

Per un materiale microelastico, se si applica l'eq. 2.12 all'eq. 2.26 si ottiene

$$\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} \frac{\partial H}{\partial p}(|\boldsymbol{\xi}|, \boldsymbol{\xi}), \quad p = |\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}| \quad (2.29)$$

In questo modo la funzione di forza peridynamica linearizzata per un materiale microelastico, sostituendo le formule trovate, diventa

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \left[\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} \frac{\partial H}{\partial p}(|\boldsymbol{\xi}|, \boldsymbol{\xi}) + H(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{1} \right] (\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.30)$$

2.4 Forza per unità d'area

La teoria bond-based può essere messa in relazione alle teorie classiche attraverso il concetto di forza per unità d'area. Si assume un corpo omogeneo e microelastico \mathcal{R} sottoposto ad una deformazione uniforme, scelto un punto x in \mathcal{R} e fatto passare un piano \mathcal{P} attraverso x che divide il corpo in due parti \mathcal{R}^- e \mathcal{R}^+ , con \mathcal{R}^+ che esercita delle forze su \mathcal{R}^- . Questa forza non è applicata solo sulla superficie di \mathcal{R}^- , ma anche attraverso le forze a distanza alle particelle dentro la superficie. Se questa forza viene divisa per l'area dell'intersezione di \mathcal{P} e \mathcal{R} , otteniamo il concetto di forza per unità d'area.

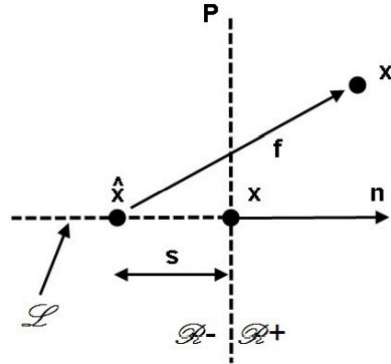


Figura 2.3: Dominio \mathcal{R} per la definizione di $\boldsymbol{\tau}$. Tratta da [31].

Ora definiamo $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$, la densità di forza per unità d'area, in un punto \mathbf{x} in \mathcal{R} nella direzione del versore \mathbf{n} .

Definiti

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^+ &= \mathbf{x}' \in \mathcal{R} : (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \geq 0, \\ \mathcal{R}^- &= \mathbf{x}' \in \mathcal{R} : (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \leq 0\end{aligned}\quad (2.31)$$

Sia \mathcal{L} l'insieme dei seguenti punti collineari:

$$\mathcal{L} = \{\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}^- : \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - s\mathbf{n}, 0 \leq s < \infty\} \quad (2.32)$$

A questo punto definiamo la forza per unità d'area:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{R}^+} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{x}' - \hat{\mathbf{x}}) dV_{\mathbf{x}'} d\hat{l} \quad (2.33)$$

dove $d\hat{l}$ rappresenta il cammino differenziale su \mathcal{L} .

Questo è ciò che di più vicino si può trovare al concetto fondamentale di tensione che è utilizzato nelle teorie convenzionali.

Per una deformazione omogenea, una rappresentazione significativa del tensore degli stress $\boldsymbol{\tau}$ indipendente da \mathbf{x} può essere scritta come:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{n} \quad (2.34)$$

Infatti il tensore degli stress è del tipo Piola-Kirchhoff, dove $\boldsymbol{\tau}$ è una forza per unità d'area nella configurazione di riferimento.

2.5 Configurazione di equilibrio

La restrizione nella definizione della funzione a valori scalari F può essere ritrovata andando a calcolare la densità di forza per unità d'area di un materiale microelastico in configurazione di equilibrio, ovvero se

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}, \forall \mathbf{n} \quad (2.35)$$

Data una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e imposto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$, allora dall'eq. 2.32 si ottiene

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= -s\mathbf{e}_1 \\ \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{x}' - \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}' + s\mathbf{e}_1\end{aligned}\quad (2.36)$$

inoltre dall'eq. 2.6

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) = F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} \quad (2.37)$$

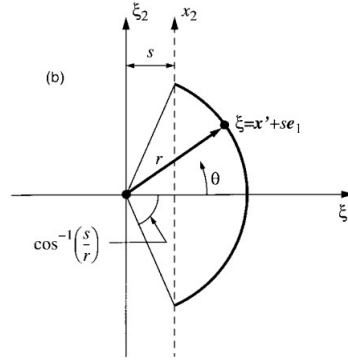


Figura 2.4: Cambio di variabili in coordinate sferiche. Tratto da [31].

Calcolando ora dall'eq. 2.33 la densità di forza per unità d'area in direzione \mathbf{e}_1 otteniamo

$$\tau(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1) = \int_0^\infty \int_{\mathcal{R}^+} F(\mathbf{0}, \mathbf{x}' + s\mathbf{e}_1)(\mathbf{x}' + s\mathbf{e}_1) dV_{\mathbf{x}'} ds \quad (2.38)$$

Passando attraverso dei cambi di variabile in coordinate sferiche

$$\xi_1 = r \cos \theta, \quad \xi_2 = r \sin \theta \cos \phi, \quad \xi_3 = r \sin \theta \sin \phi \quad (2.39)$$

si arriva a

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1) &= \int_0^\infty \int_{\mathcal{R}^+} F(\mathbf{0}, \mathbf{x}' + s\mathbf{e}_1)(\mathbf{x}' + s\mathbf{e}_1) dV_{\mathbf{x}'} ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^r \int_0^{\cos^{-1}(s/r)} \int_0^{2\pi} F(0, r)(r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\phi d\theta ds dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty F(0, r) r^4 dr \\ &= \Psi \end{aligned} \quad (2.40)$$

Per l'eq. 2.35, la restrizione su F in una configurazione di riferimento, senza stress, comporta

$$\Psi = 0 \quad (2.41)$$

2.6 Coefficiente di Poisson

Nella peridynamica bond-based il valore del coefficiente di Poisson è vincolato ad essere fisso, poiché coinvolge l'interazione tra due particelle.

Per trovare il valore e capire perché esso sia limitato è necessario fare un parallelo tra teoria peridynamica e teoria classica, confrontando il tensore degli sforzi risultato dalla densità di forza per unità d'area e il tensore degli sforzi della teoria classica che ha subito una deformazione uguale a quella di un corpo microelastico.

Sia data una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Assumo un corpo infinito lineare microelastico in configurazione di equilibrio (no stress) e sottoposto ad una deformazione omogenea data da [31]

$$u_1 = c_{11}x_1, \quad u_2 = u_3 = 0$$

dove c_{11} è costante e $|c_{11}| \ll 1$.

Dalle eq. 2.2 e 2.3, si ricava che $\eta_1 = c_{11}\xi_1, \eta_2 = \eta_3 = 0$. Sostituendo nell'equazione 2.28 si ottiene la forza peridynamica espressa nelle tre componenti che chiameremo f_1, f_2, f_3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) &= \left\{ \lambda(\boldsymbol{\xi}) \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 \\ \xi_2\xi_1 & \xi_2^2 & \xi_2\xi_3 \\ \xi_3\xi_1 & \xi_3\xi_2 & \xi_3^2 \end{bmatrix} + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11} [\lambda(\boldsymbol{\xi})\xi_1^3 + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi})\xi_1] \\ c_{11}\lambda(\boldsymbol{\xi})\xi_1^2\xi_2 \\ c_{11}\lambda(\boldsymbol{\xi})\xi_1^2\xi_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le nove componenti del tensore degli sforzi sono date da

$$\sigma_{ij} = \tau_j(\mathbf{e}_i) = \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{R}^+} f_i dV_{\mathbf{x}'} d\hat{l}, \quad \text{for } i, j = 1, 2, 3 \quad (2.42)$$

La derivazione delle prime tre componenti del tensore $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ è ottenuta utilizzando il cambio di variabili presentato precedentemente, in eq. 2.39 e sostituendo le componenti della forza f_i di interesse.

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \tau_1(\mathbf{e}_1) \\
&= \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{R}^+} f_1 dV_{\mathbf{x}'} d\hat{l} \\
&= c_{11} \int_0^\infty \int_0^r \int_0^{\cos^{-1}(s/r)} \int_0^{2\pi} [\lambda(r)(r \cos \theta)^3 + F(0, r)(r \cos \theta)] r^2 \sin \theta d\phi d\theta ds dr \\
&= c_{11} \left[\frac{2\pi}{5} \int_0^\infty \lambda(r) r^6 dr + \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty F(0, r) r^4 dr \right] \\
&= c_{11}(\Lambda + \Psi)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= \tau_2(\mathbf{e}_1) \\
&= \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{R}^+} f_2 dV_{\mathbf{x}'} d\hat{l} \\
&= c_{11} \int_0^\infty \int_0^r \int_0^{\cos^{-1}(s/r)} \int_0^{2\pi} [\lambda(r)(r \cos \theta)^2 r \sin \theta \cos \phi] r^2 \sin \theta d\phi d\theta ds dr \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{13} &= \tau_3(\mathbf{e}_1) \\
&= \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{R}^+} f_3 dV_{\mathbf{x}'} d\hat{l} \\
&= c_{11} \int_0^\infty \int_0^r \int_0^{\cos^{-1}(s/r)} \int_0^{2\pi} [\lambda(r)(r \cos \theta)^2 r \sin \theta \sin \phi] r^2 \sin \theta d\phi d\theta ds dr \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.45}$$

dove sono usate $\Psi = 0$ e le notazioni

$$\begin{aligned}
r &= |\boldsymbol{\xi}| \\
\Lambda &= \frac{2\pi}{5} \int_0^\infty \lambda(r) r^6 dr
\end{aligned}$$

Dei calcoli simili possono essere svolti per tutte le altre sei componenti andando a fare dei cambi di variabili opportuni, per esempio scegliendo la seconda direzione \mathbf{e}_2 i cambi saranno:

$$\xi_1 = r \sin \theta \sin \phi, \quad \xi_2 = r \cos \theta, \quad \xi_3 = r \sin \theta \cos \phi \quad (2.46)$$

Alla fine il tensore degli sforzi che si genera sotto l'ipotesi di piccole deformazioni omogenee sarà

$$[\sigma] = c_{11} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Lambda}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Lambda}{3} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Utilizzando le stesse deformazioni ma applicando la teoria elastica classica il tensore degli sforzi calcolato è

$$\begin{aligned} [\sigma] &= \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{11} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= c_{11} \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.48)$$

dove λ è la costante di Lamé e μ è il modulo a taglio del materiale.

Eguagliando ora le due formulazioni nelle equazioni 2.47 e 2.48, dal momento che la deformazione che descrivono è la stessa, possiamo ottenere i valori di tre parametri

$$\nu = \frac{1}{4}, \quad E = \frac{5\Lambda}{6}, \quad \mu = \frac{\Lambda}{3} \quad (2.49)$$

Come introdotto all'inizio di questo paragrafo in un materiale microelastico che risponde alla teoria peridinamica bond-based, il valore del coefficiente di Poisson è fissato pari a $1/4$ nel caso 3D o 2D plane strain, e $1/3$ nel caso 2D plane stress, mentre il termine Λ che non è misurabile in maniera diretta dipende solamente da proprietà del materiale facilmente misurabili e note.

2.7 Legge costitutiva per un materiale fragile in Peridinamica

In principio si è creato un materiale ad hoc per essere utilizzato con la teoria peridinamica, e tale materiale è stato chiamato PMB (dall'inglese Prototype Brittle Material), e può essere reso in italiano con Prototipo Microelastico Fragile, ed è spesso utilizzato nella teoria peridinamica.

Questo materiale come dice il nome risponde alla caratteristica di microelasticità e il legame tra due punti all'interno del materiale ha altre importanti peculiarità che lo rendono adatto alla teoria peridinamica:

- lo stretch del legame s è il rapporto fra la forza peridinamica e la rigidità di legame c , chiamata costante della molla;
- il legame si rompe quando lo stretch raggiunge un limite critico s_0 , chiamato stretch critico. Una volta che questo legame si è rotto, non può più essere recuperato in nessun modo, il che rende lo stretch del legame s dipendente dalla sua storia;
- I legami non falliscono a compressione.

Per un materiale del tipo PMB, la funzione scalare H nell'eq. 2.12 è ora lineare di costante di molla c e stretch di legame s . Quindi la funzione di forza peridinamica per un materiale PMB è

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = cs\mu(\boldsymbol{\xi}) \frac{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}|} \quad (2.50)$$

con lo stretch s definito dalla differenza di distanza tra i punti in configurazione deformata e indeformata, diviso per la distanza in configurazione deformata

$$s = \frac{|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}| - |\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{\xi}|} \quad (2.51)$$

e μ sia una funzione scalare dipendente dalla storia del legame, che assume valori 1 o 0 in base allo stato di rottura del legame.

$$\mu(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1, & \text{se } s < s_0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.52)$$

Si deve fare attenzione che una volta che un legame è stato definito all'interno di questa funzione avere valore 0 perché ha superato lo stretch critico s_0 , avrà valore 0 in tutti gli istanti successivi, anche se in un qualche momento il legame dovesse tornare ad avere uno stretch $s < s_0$.

La costante della molla può essere espressa in termini delle proprietà conosciute del materiale ed effettuando una equivalenza tra le energie di deformazione elastica calcolate con i due diversi approcci: la teoria classica e la teoria peridinamica.

Considero un corpo infinito, sottoposto a deformazione omogenea, dove lo stretch s è costante per tutti gli ξ . Definiamo $\xi = |\xi|$ e $\eta = |\eta|$. Dal momento che $\eta = s\xi$, dall'equazione 2.50, la funzione H è:

$$H = cs = \frac{c\eta}{\xi} \quad (2.53)$$

Il micropotenziale di un singolo bond può essere calcolato riprendendo l'eq. 2.10:

$$\hat{w} = \int H d\eta = \int \frac{c\eta}{\xi} d\eta = \frac{c\eta^2}{2\xi} = \frac{cs^2\xi}{2} \quad (2.54)$$

A questo punto si può integrare il micropotenziale nell'intera sfera orizzonte per trovare la totale energia elastica immagazzinata in un punto materiale:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}_x} w(\eta, \xi) dV_{x'} \quad (2.55)$$

dove il coefficiente $\frac{1}{2}$ serve a sottolineare che ogni punto materiale in una coppia di legame possiede metà dell'energia totale immagazzinata nel legame.

Sostituendo l'eq. 2.54 nell'eq. 2.55 e integrando con l'utilizzo di coordinate sferiche si ottiene

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\delta \left(\frac{cs^2\xi}{2} \right) 4\pi\xi^2 d\xi = \frac{\pi cs^2\delta^4}{4} \quad (2.56)$$

Questa energia deve essere uguale alla densità di energia di deformazione come è definita nella teoria classica dell'elasticità se sottoposta alla stessa deformazione

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \delta_{ij}s \\ \sigma_{ij} &= 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} \end{aligned} \quad (2.57)$$

O in forma matriciale

$$\begin{aligned} \epsilon &= \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \\ \sigma &= \begin{bmatrix} (2\mu + 3\lambda)s & 0 & 0 \\ 0 & (2\mu + 3\lambda)s & 0 \\ 0 & 0 & (2\mu + 3\lambda)s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Sia noto che δ_{ij} rappresenta il delta di Kronecker, che assume valore unitario quando $i = j$, altrimenti ha valore nullo.

La densità di energia elastica di deformazione nella teoria classica è pari a

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (2\mu + 3\lambda) s \cdot s \cdot 3 = 3Es^2 = \frac{9Ks^2}{2} \quad (2.59)$$

dove il coefficiente di Poisson è stato preso pari a $\nu = 0.25$ per ottenere i seguenti valori di variabili:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E}{2 + 2\nu} = \frac{2E}{5} \\ \lambda &= \frac{E\nu}{((1 - 2\nu)(1 + \nu))} = \frac{2E}{5} \\ K &= \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{2E}{3} \end{aligned}$$

Confrontando ed eguagliando ora le equazioni 2.56 e 2.59 si determina la costante elastica per un materiale PMB:

$$c = \frac{18K}{\pi\delta^4} = \frac{12E}{\pi\delta^4} \quad (2.60)$$

Il micromodulo per come è stato definito appena sopra può essere determinato a partire dalle proprietà fisiche del materiale e in funzione dell'orizzonte δ scelto.

Il micromodulo in un materiale PMB, è costante, per cui rappresenta la pendenza della retta in un grafico *stretch vs pairwise force* del legame, l'altro parametro che è rimasto da definire per completamente rappresentare questo modello di materiale PMB è lo stretch a cui avviene la rottura del bond s_0 ; per far ciò è necessario metterlo in relazione con una quantità

2.7. LEGGE COSTITUTIVA PER UN MATERIALE FRAGILE IN PERIDINAMICA 25

direttamente misurabile, per tale grandezza è stata scelta l'energia di rottura G_0 .

Si assuma di prendere un piano che separa in due parti un corpo formando una superficie di separazione. Per separare completamente le due metà è necessario rompere tutti i legami che attraversano tale superficie e collegano punti che stanno nelle due metà opposte del corpo. Come già calcolato nell'eq. 2.54 il lavoro necessario per rompere un singolo legame è pari a $\hat{w} = \frac{cs^2\xi}{2}$. A questo punto seguendo il sistema di riferimento in fig. 2.5, è possibile calcolare l'intero lavoro necessario per rompere tutti i legami, e questo viene poi posto pari all'energia di frattura G_0 che è una proprietà del materiale.

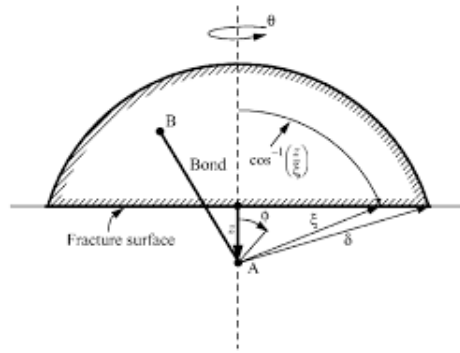


Figura 2.5: Schematizzazione geometrica utilizzata per il calcolo del lavoro necessario per rompere tutti i legami che attraversano la superficie, si tratta di una calotta sferica in tre dimensioni. Tratto da [23].

Scriviamo dunque l'integrale sull'intero dominio:

$$G_0 = \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1} z/\xi} \hat{w} \xi^2 \sin \phi \, d\phi \, d\xi \, d\theta \, dz \quad (2.61)$$

Ora sostituendo \hat{w} da 2.54 è possibile svolgere l'integrale.

$$\begin{aligned}
G_0 &= \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1} z/\xi} \frac{cs_0^2 \xi}{2} \xi^2 \sin \phi \, d\phi \, d\xi \, d\theta \, dz \\
&= \frac{cs_0^2}{2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \int_z^\delta \xi^3 (-\cos \phi)_0^{\cos^{-1} z/\xi} \, d\xi \, d\theta \, dz \\
&= \frac{cs_0^2}{2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \int_z^\delta \xi^3 \left(1 - \frac{z}{\xi}\right) \, d\xi \, d\theta \, dz \\
&= \frac{cs_0^2}{2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \left(\frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^3 z}{3}\right)_z^\delta \, d\theta \, dz \\
&= \frac{cs_0^2}{2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \left(\frac{\delta^4}{4} - \frac{\delta^3 z}{3} + \frac{z^4}{12}\right) \, d\theta \, dz \\
&= \pi cs_0^2 \int_0^\delta \left(\frac{\delta^4}{4} - \frac{\delta^3 z}{3} + \frac{z^4}{12}\right) \, dz \\
&= \pi cs_0^2 \left(\frac{\delta^4 z}{4} - \frac{\delta^3 z^2}{6} + \frac{z^5}{60}\right)_0^\delta \\
&= \pi cs_0^2 \left(\frac{\delta^5}{4} - \frac{\delta^5}{6} + \frac{\delta^5}{60}\right) = \frac{\pi cs_0^2 \delta^5}{10}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Dal momento che per i materiali fragili la grandezza G_0 è misurabile, è ora possibile ricavare s_0 nell'ipotesi di completa separazione nella superficie di interesse e nell'ipotesi che non entri in gioco alcuna forma di dissipazione di energia, risolvendo ottengo

$$s_0 = \sqrt{\frac{10G_0}{\pi c \delta^5}} = \sqrt{\frac{5G_0}{6E\delta}} \tag{2.63}$$

Tutta questa trattazione è valida nelle ipotesi fissate per il materiale microelastico fragile PMB.

Per alcuni materiali reali può essere un'assunzione troppo forte quella per cui lo stretch critico per il fallimento di un legame sia del tutto indipendente da tutte le condizioni sugli altri legami. Per ottenere dei risultati più vicini agli esperimenti ottenuti con materiali vetrosi, a volte è stato necessario creare una dipendenza di s_0 anche da s_{min} ovvero il minimo stretch tra tutti i legami collegati ad un certo nodo.

$$s_0(t) = s_{00} - \alpha s_{min}(t), \quad s_{min}(t) = \min_\xi \left\{ \frac{y(t) - |\xi|}{|\xi|} \right\} \tag{2.64}$$

Dove s_{00} e α sono costanti, con α tipicamente con un valore di circa 1/4. Con questo esempio di modello una compressione nella direzione perpendi-

colare a quella di massimo stretch aumenta lo stretch massimo a trazione ammissibile prima di rottura.

Questo è solo un esempio di legge modificata, tuttavia di questi esempi e leggi è possibile farne di tutti i tipi, come si vedrà è anche uno dei focus di questo elaborato, sviluppare delle leggi alternative che modellano una volta raggiunto uno stretch limite delle fasi di danneggiamento diverse rispetto a quella di rottura improvvisa del legame fragile del materiale PMB una volta raggiunto tale stretch.

2.7.1 Modelli bidimensionali

Le considerazioni svolte fino a questo momento erano valide per la rappresentazione di un modello tridimensionale, tuttavia è possibile sviluppare anche dei modelli in due dimensioni, sia nel caso plane stress, che nel caso plane strain. Il procedimento usato è lo stesso, è necessario calcolare la densità di energia elastica di deformazione con le due diverse teorie, classica e peridinamica, ed eguagliare le formule trovate per ricavare un corrispondenza tra le due.

Dalla teoria classica in 2D si ricava che l'energia di deformazione è pari a $W = 2Ks^2$ con K modulo di bulk. Per trovare l'energia di deformazione con la teoria peridinamica è necessario partire dalla equazione 2.55, e tenendo conto della forma 2D del modello il contributo di volume differenziale può essere espresso come $dV_{x'} = 2\pi\xi t d\xi$ dove t è lo spessore del modello.

Svolgendo l'integrale si può arrivare alla forma definitiva:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_0^\delta \left(\frac{cs^2\xi}{2} \right) 2\pi\xi t d\xi = \frac{cs^2\pi t}{2} \left(\frac{\xi^3}{3} \right)_0^\delta \\ &= \frac{cs^2\pi t\delta^3}{6} \end{aligned} \quad (2.65)$$

A questo punto c'è da fare una distinzione per i due casi, plane stress, e plane strain, in quanto i coefficienti di Poisson assumono valori differenti e questo porta a delle soluzioni differenti. Per vedere come tali valori di micromodulo sono stati ottenuti fare riferimento al libro di Florin Bobaru [2].

Modello 2D plane stress

In questo caso $\nu = \frac{1}{3}$ e il micromodulo che si ottiene $c = \frac{9E}{\pi t\delta^3}$.

Modello 2D plane strain

In questo caso $\nu = \frac{1}{4}$ e il micromodulo è $c = \frac{48E}{5\pi t\delta^3}$.

Riassumendo quindi i valori del micromodulo in tutte le diverse situazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} c &= \frac{12E}{\pi\delta^4} && \text{3D case} \\ c &= \frac{9E}{\pi t\delta^3} && \text{2D plane stress} \\ c &= \frac{48E}{5\pi t\delta^3} && \text{2D plane strain} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Allungamenti critici

Per trovare gli allungamenti critici è necessario riscrivere l'integrale dell'energia di frattura per un modello bidimensionale e risolverlo con una nuova schematizzazione sul 2D. Il volume di integrazione è simile a quello riportato in fig. 2.5 ma in due dimensioni e si ha:

$$\begin{aligned} G_0 &= 2t \int_0^\delta \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} \hat{w}\xi \, d\phi \, d\xi \, dz \\ &= 2t \int_0^\delta \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} \frac{cs_0^2\xi}{2} \xi \, d\phi \, d\xi \, dz \\ &= tcs_0^2 \int_0^\delta \int_z^\delta \xi^2 (\phi)_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} \, d\xi \, dz \\ &= tcs_0^2 \int_0^\delta \int_z^\delta \xi^2 \cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right) \, d\xi \, dz \end{aligned} \quad (2.67)$$

Sviluppo ora l'integrale a parte

$$\begin{aligned} &\int_z^\delta \xi^2 \cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right) \, d\xi = \\ &= \left\{ \frac{1}{3}\xi^3 \cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right) - \frac{1}{6}z \left[\xi^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\xi^2}} + z^2 \ln \left(\xi \sqrt{1 - \frac{z^2}{\xi^2}} + \xi \right) \right] \right\}_z^\delta = \\ &= A \end{aligned} \quad (2.68)$$

e svolgendo il calcolo agli estremi si ottiene:

$$A = \frac{1}{3}\delta^3 \cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right) - \frac{1}{6}z \left[\delta^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + z^2 \ln\left(\delta \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + \delta\right) \right] + \frac{1}{6}z^4 \ln(z) \quad (2.69)$$

Ritornando ora all'integrale di partenza

$$G_0 = tcs_0^2 \int_0^\delta A dz \quad (2.70)$$

Da integrare termine a termine

$$\frac{1}{3} \int_0^\delta \delta^3 \cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right) dz = B = \frac{1}{3}\delta^3 \left(z \cos^{-1}\left(\frac{z}{\delta}\right) - \delta \sqrt{1 - \frac{z^2}{\xi^2}} \right)_0^\delta \quad (2.71)$$

$$-\frac{1}{6} \int_0^\delta z \delta^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} dz = C = -\frac{1}{6}\delta^2 \left(-\frac{1}{3}(\delta^2 - z^2) \sqrt{\frac{\delta^2 - z^2}{\delta^2}} \right)_0^\delta \quad (2.72)$$

$$\frac{1}{6} \int_0^\delta z^3 \ln(z) dz = D = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}z^4 \ln(z) - \frac{1}{16}z^4 \right)_0^\delta \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6} \int_0^\delta z^3 \ln \left[\delta \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 1 \right) \right] dz = E \\ E &= -\frac{1}{288} \left(3\delta^4 - 4\delta^2 z^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} - 8\delta^4 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 12\delta^4 \ln \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 1 \right) \right)_0^\delta \\ &+ \left(12(z^4 - \delta^4) \ln \left(\delta \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 1 \right) \right) - 3z^4 \right)_0^\delta \end{aligned} \quad (2.74)$$

Sostituendo gli estremi di integrazione su tutte le componenti dell'integrale e andando a semplificare alla fine si ottiene una formula abbastanza semplice:

$$G_0 = tcs_0^2 \int_0^\delta A dz = tcs_0^2 (B + C + D + E)_0^\delta = \frac{tcs_0^2 \delta^4}{4} \quad (2.75)$$

Da cui ora è possibile ricavare gli allungamenti critici s_0 per i casi 2D plane stress e 2D plane strain sostituendo i rispettivi micromoduli c .

In generale dunque alla fine della trattazione sono stati trovati gli allungamenti critici s_0 per tutti i modelli, che vengono riassunti qui sotto:

$$\begin{aligned} s_0 &= \sqrt{\frac{5G_0}{6E\delta}} && \text{3D case} \\ s_0 &= \sqrt{\frac{4\pi G_0}{9E\delta}} && \text{2D plane stress} \\ s_0 &= \sqrt{\frac{5\pi G_0}{12E\delta}} && \text{2D plane strain} \end{aligned} \quad (2.76)$$

2.7.2 Danno

È possibile valutare il livello di danno a livello del singolo nodo del corpo, l'indice viene definito tramite un rapporto tra numero di bond rotti e numero di bond presenti inizialmente:

$$\varphi(\mathbf{x}_i, t) = 1 - \frac{\int_{H_i} \mu(\mathbf{x}_i, t, \xi) dV_\xi}{\int_{H_i} dV_\xi} \quad (2.77)$$

Tale rapporto sarà nullo quando il materiale sarà vergine e non avrà subito alcuna rottura, mentre avrà valori che tendono a 1 all'aumentare dei bond rotti. Una volta che un bond si rompe, esso non è più in grado di sostenere il carico, questo porta ad un ammorbidimento della risposta ai carichi esterni, e comporta un'evoluzione del danno che porta a frattura. Un indice di danno $\varphi \approx 0.5$ significa che un nodo ha già rotto tutti i legami da una parte di esso, quindi può considerarsi in atto o la nucleazione di una cricca oppure la propagazione di una cricca già esistente.

2.8 Discretizzazione spaziale

Partendo dalle formule viste finora riguardanti la peridinamica, la loro peculiarità è la natura integrale delle equazioni, questo tipo di problemi può essere risolto sfruttando la dualità integrale-sommatoria utilizzando step di integrazione piccoli, e utilizzando dei metodi iterativi che permettano di soddisfare tutte le condizioni di equilibrio in ogni istante temporale. Si parte dall'equazione in forma integrale proposta in 2.1, come detto per essere risolta è necessario effettuare una discretizzazione spazio-temporale, con uno step

di integrazione piccolo, per garantire la convergenza della soluzione. Nello spazio il corpo deve essere discretizzato con un insieme di nodi spaziatati tra loro con una qualsiasi legge, per questioni di praticità in questo elaborato verrà utilizzata una spaziatura omogenea di punti su tutto il corpo.

Alla fine verrà generata una griglia ai cui vertici possiamo trovare i nodi peridinamici del nostro problema. È un approccio molto simile all'approccio FEM, dove tuttavia si utilizzano degli elementi, e le interazioni tra essi, mentre nella teoria peridinamica si utilizzano solo i nodi, a cui è associato un volume che rappresenta il volume del corpo in data posizione.

Discretizzando ora l'equazione integrale a cui si faceva riferimento ad inizio di questa sezione si ottiene:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}[\mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t), \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i] V_j + \mathbf{b}(\mathbf{x}_i, t) \quad (2.78)$$

con i nodo di riferimento, di cui si vogliono calcolare le condizioni spaziali (accelerazione, velocità e posizione) e i nodi j rappresentano i nodi famiglia, ovvero tutti i nodi all'interno dell'orizzonte e che sono legati con un bond al nodo di riferimento. V_j è il volume associato al nodo j , che nell'ipotesi di griglia equispaziata può essere calcolato come Δx^3

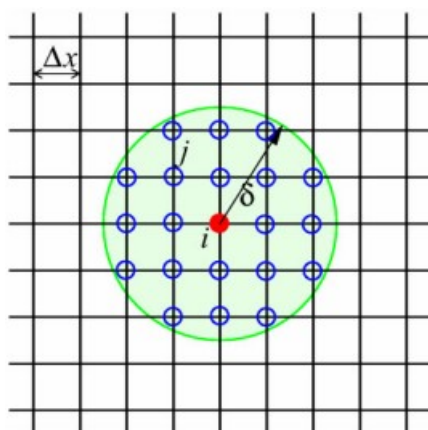


Figura 2.6: Discretizzazione spaziale con passo di griglia omogeneo. Tratto da [31].

Tuttavia come si può facilmente notare dalla figura 2.6, l'accuratezza

del calcolo discretizzato è limitata nei bordi dell'orizzonte dove le aree associate ad alcuni nodi non giacciono completamente all'interno o all'esterno, per cui l'integrazione rappresenta delle inesattezze che bisogna trattare in qualche modo. Un primo approccio può essere di ridurre il passo di griglia, così queste inaccuratezze si riducono, un'altra strategia utilizzata è quella di andare a calcolare la porzione d'area all'interno dell'orizzonte e inserire un fattore correttivo che pre-moltiplichiamo il volume j -esimo associato, nel calcolo dell'equazione discretizzata 2.78. In particolare il fattore β viene in questo algoritmo così calcolato:

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{se } |\xi| \leq \delta - 0.5\Delta x \\ \frac{\delta + 0.5\Delta x - |\xi|}{\Delta x} & \text{se } \delta - 0.5\Delta x \leq |\xi| \leq \delta + 0.5\Delta x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.79)$$

Tuttavia è possibile utilizzare un approccio ancora più preciso, partendo da un nodo centrale, e guardando i nodi in una regione vicino ad esso questi possono suddividersi in quattro classi:

- nodi e celle associate completamente all'interno dell'orizzonte, in questo caso non è necessario calcolare alcun fattore correttivo;
- nodi all'interno dell'orizzonte ma con una parte dell'area della cella esterna all'orizzonte;
- nodi all'esterno dell'orizzonte, ma l'intersezione tra area di cella e orizzonte è non nulla;
- nodi esterni, con le celle completamente fuori dall'orizzonte, allora il fattore correttivo sarà nullo.

Nelle simulazioni di questo elaborato verrà utilizzato un algoritmo secondo approccio IPA-hybrid, ovvero un metodo "Improved Partial Area" introdotto da P. Seleson [21], con la modifica dei punti di quadratura di Gauss secondo un approccio EIPA-HHB, Extended Improved Partial Area proposto dagli autori Ha, Hu, Bobaru [12]. Il primo permette di avere un calcolo analitico della porzione di area del nodo famiglia interna all'orizzonte, mentre il metodo di Bobaru ne dà una stima tramite approssimazione lineare. Per una spiegazione più esaustiva e precisa dell'algoritmo utilizzato

si rimanda all'appendice a pagina 210 del documento di P. Seleson [21], in cui vengono determinate con precisione le aree dei vari casi.

Alla fine per ricavare il *betafactor* quel che si fa è il rapporto tra la porzione d'area trovata e l'area di una cella che nel caso di spaziatura omogenea in due dimensioni è semplicemente Δx^2 .

A questo punto la forma definitiva dell'equazione della dinamica discretizzata può essere scritta come segue:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}[\mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t), \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i] \beta V_j + \mathbf{b}(\mathbf{x}_i, t) \quad (2.80)$$

Per quanto buono sia l'algoritmo che permette di calcolare i fattori correttivi sulla frontiera dell'orizzonte, è necessario che il modello poi discretizzato rappresenti il modello reale di tipo continuo, e per fare questo è necessario effettuare degli studi di convergenza in cui al variare di un parametro geometrico per volta si cerca di far convergere il modello discreto alla soluzione continua del problema.

In peridinamica le convergenze vengono fatte sull'orizzonte δ e il rapporto tra orizzonte e dimensione delle celle (m-ratio).

Esistono quindi due tipi di convergenza:

- δ -convergenza, quando si fa tendere l'orizzonte a 0, mentre si tiene costante il rapporto $\frac{\delta}{\Delta x}$;
- m-convergenza, quando si fa tendere m-ratio a infinito, mantenendo δ costante.

Solitamente come metodo per capire se si è raggiunta la convergenza è di confrontare due simulazioni successive e vedere quanto queste non variano più al variare dei parametri, allora si può dire che la convergenza è stata raggiunta.

2.9 Discretizzazione temporale

Una volta ottenuta una discretizzazione nello spazio del problema è necessario andare a scegliere anche un passo temporale Δt con cui andare a suddividere il totale tempo di simulazione e in cui effettuare le iterazioni del codice Matlab, ad ogni iterazione andranno risolte le equazioni della dinamica sopra descritte, eq. 2.80.

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}[\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i] \beta V_j + \mathbf{b}_i^n \quad (2.81)$$

In cui n è il numero dello step temporale a cui fa riferimento la soluzione, da cui si può scrivere che all'iterazione n -esima lo spostamento del nodo i è $\mathbf{u}_i^n = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t_0 + n\Delta t)$ con t_0 istante iniziale.

Nella soluzione di problemi peridinamici la scelta dello step temporale è di primaria importanza, infatti il metodo di risoluzione utilizzato in questo elaborato è il metodo Velocity-Verlet, e si tratta di un metodo esplicito, in cui la soluzione al passo n dipende solamente dalle condizioni al passo $n - 1$ per cui non vi è alcun controllo sulla stabilità della soluzione, ed è dunque necessario utilizzare step temporali sufficientemente piccoli.

È possibile anche dare una stima di uno step temporale adeguato, calcolando uno step critico

$$\Delta t_c = \frac{(|\xi|)_{\min}}{(c_k)_{\max}} \quad (2.82)$$

dove ξ_{\min} è la lunghezza di bond più piccola presente nel corpo, mentre c_{\max} è la *bulk sound speed*, che è propria del materiale ed è definita come

$$c_{\max} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Introducendo il più delle volte un fattore di sicurezza per garantirsi la stabilità, $\beta_{safe} < 1$ (un valore tipico è 0.8).

2.9.1 Algoritmo Velocity-Verlet

Il metodo di integrazione nel dominio del tempo utilizzato come già detto è il metodo Velocity-Verlet, che si basa sull'utilizzo di un set di equazioni che permettono di calcolare velocità e posizione, dal momento che l'accele-

razione si ottiene ad ogni step iterativo dalla risoluzione dell'equazione della peridinamica (2.81)

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (2.83)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} \quad (2.84)$$

Poi alla fine del ciclo, una volta calcolata l'accelerazione dall'equazione discretizzata della peridinamica 2.81, è possibile utilizzarla per calcolare la velocità all'istante $n + 1$ secondo l'ultima equazione dell'algoritmo di Verlet.

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (2.85)$$

2.10 Condizioni di carico

Nella teoria peridinamica non è possibile applicare i carichi con lo stesso metodo utilizzato per la risoluzione di problemi con la meccanica del continuo. Questo può essere dimostrato considerando un corpo soggetto a carichi meccanici, che viene suddiviso in due sottodomini Γ^+ e Γ^- , e tra le due parti agisce una forza \mathbf{F}^+ tale che l'equilibrio sia soddisfatto.

Nella teoria del continuo la forza può essere calcolata come l'integrale delle tensioni sulla superficie di separazione tra le due parti del corpo:

$$\mathbf{F}^+ = \oint_{\partial\Gamma} \mathbf{T} dA \quad (2.86)$$

Con \mathbf{T} tensione superficiale.

Nella trattazione peridinamica i punti materiali che appartengono a Γ^+ interagiscono con i punti di Γ^- in modo tale che la densità di forza \mathbf{L} agente sui punti di Γ^+ si possa calcolare andando ad integrare la forza \mathbf{f} sul dominio Γ^- attraverso l'integrale

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV' \quad (2.87)$$

Infine con l'integrale sul dominio Γ^+ della densità di forza è possibile trovare la forza \mathbf{F}^+ :

$$\mathbf{F}^+ = \int_{\Gamma^+} \mathbf{L}(\mathbf{x}) dV = \int_{\Gamma^+} dV \int_{\Gamma^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV' \quad (2.88)$$

Quindi i carichi devono essere applicati al volume come body force, spostamenti o velocità, infatti se il volume Γ^- fosse vuoto, quindi Γ^+ fosse al contorno, $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ risulterebbe nullo perché non associato a nessun volume. Per tale motivo i carichi esterni in peridinamica vanno applicati direttamente ai nodi con un volume proprio.

Inoltre le considerazioni fatte fino a questo momento riguardo il concetto di nodi famiglia e orizzonte non prendevano in considerazione i limiti esterni del corpo, che non è infinito, per cui i nodi vicino alla frontiera presentano parte dell'orizzonte esterna al corpo e quindi vengono a mancare alcuni nodi famiglia.

In questi nodi la densità di energia elastica sarà inferiore e il comportamento sarà variabile. Per mantenere l'energia elastica costante sono introdotti dei fattori correttivi che fanno aumentare la costante elastica (o micromodulo) c . Per lo stesso motivo, con l'obiettivo di minimizzare gli effetti di frontiera, è consigliato applicare le condizioni al contorno o i carichi esterni ad uno strato di nodi sotto la superficie pari all'orizzonte δ , e non solo ai nodi frontiera.

2.11 Equazione peridinamica con smorzamento

In questo paragrafo e nei successivi verrà introdotto un possibile sviluppo della teoria peridinamica, che tuttavia non è stato implementato nelle simulazioni all'interno di questo documento, ma che possono fungere da spunto per delle ricerche successive.

Dal momento che le equazioni implementate per la risoluzione dei problemi peridinamici hanno una stretta correlazione con le equazioni della dinamica, e sono molto più facili da risolvere rispetto ai metodi iterativi come Newton-Raphson che vengono utilizzati per risolvere problemi statici, può essere di interesse nell'ambito di ricerca l'implementazione anche di un termine di smorzamento nelle equazioni della dinamica, in modo tale da poter simulare dei fenomeni statici con l'utilizzo di solutori dinamici, e arrivare più agevolmente alla soluzione. In questa logica l'equazione da risolvere in peridinamica è la seguente:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + c_d \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{H_x} \mathbf{f}[\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}] dV'_x + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x}' \in H_x \quad (2.89)$$

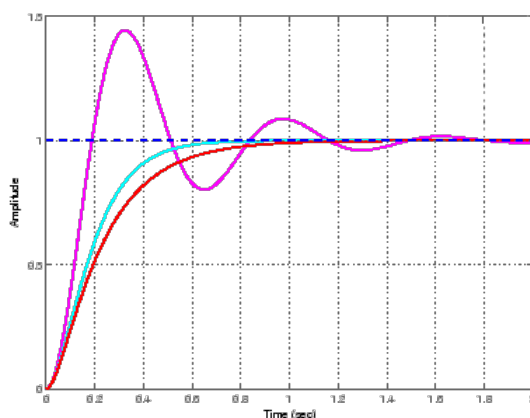


Figura 2.7: Risposta a regime.

In fig. 2.7 si possono vedere delle risposte dinamiche tipiche con l'utilizzo di un termine di smorzamento, quando in ingresso è data una funzione a gradino costante. Con l'introduzione del termine di smorzamento si vuole proprio arrivare a simulare questo caso, in cui l'ingresso a gradino è rappresentato dalla linea tratteggiata, che si vuole raggiungere attraverso la risposta dinamica smorzata.

Un comportamento simile a quello della curva rosa non è accettabile, poiché nel problema reale statico viene raggiunta immediatamente la soluzione a regime, nella rappresentazione dinamica un overshoot potrebbe comportare una rottura di alcuni bond che nella realtà non si romperebbero raggiungendo la soluzione con un andamento simile a quello rosso, e questo potrebbe portare a dei risultati distorti ed errati.

L'ambito di ricerca principale sta nella ricerca del coefficiente di smorzamento, perché l'obiettivo è quello nel momento in cui si implementa il termine di smorzamento, di giungere alla risposta a regime, e quindi in equilibrio, senza la presenza di overshoot.

Per fare ciò si adotta di seguito il metodo "Adaptive Dynamic Relaxation" che permette di ricalcolare un nuovo coefficiente c_d per giungere più velocemente a convergenza e alla risposta a regime, senza rischiare overshoot.

2.11.1 Adaptive Dynamic Relaxation

Questo metodo è basato sul fatto che la soluzione statica è ciò che si raggiunge con lo stato stazionario dopo la risposta transitoria della soluzione. Un coefficiente di smorzamento fittizio è introdotto per raggiungere lo stato stazionario nel minor tempo possibile. Tuttavia non è sempre possibile trovare il coefficiente più adatto, per cui viene utilizzato questo metodo che è introdotto da P. Underwood [29], in cui il coefficiente viene cambiato ad ogni step temporale.

Sostituendo nell'eq. 2.1 al termine di densità una matrice di densità diagonale fittizia, e una matrice di smorzamento proporzionale alla matrice diagonale, è possibile trasformare l'equazione dinamica della peridinamica in un set di equazioni differenziali ordinarie in cui applicare l'*adaptive dynamic relaxation*:

$$\mathbf{\Lambda}\ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, t) + c_d\mathbf{\Lambda}\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{U}', \mathbf{X}, \mathbf{X}') \quad (2.90)$$

Dove $\mathbf{\Lambda}$ è la matrice diagonale di densità e c è il coefficiente di smorzamento i cui valori sono ricavati rispettivamente attraverso il teorema di Greshgorin e il quoziente di Rayleigh. I vettori \mathbf{X} e \mathbf{U} rappresentano invece posizioni e spostamenti di ogni nodo. Infine, \mathbf{F} è il vettore somma di forze interne ed esterne.

Utilizzando per esempio un metodo di integrazione esplicito alle differenze finite, i vettori spostamento e velocità possono essere scritti allo step successivo pari a:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}^{n+1/2} &= [(2 - c_d\Delta t)\dot{\mathbf{U}}^{n-1/2} + 2\Delta t\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{F}^n]/[2 - c\Delta t] \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + \Delta t\dot{\mathbf{U}}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Tuttavia è necessario porre attenzione, perché questo algoritmo di integrazione non è applicabile fin dal primo step iterativo, poiché non sarebbe noto il vettore velocità allo step $t^{-1/2}$, è necessario assumere $\mathbf{U}^0 \neq 0$ e $\dot{\mathbf{U}}^0 = 0$, così da poter iniziare con il primo step iterativo usando

$$\dot{\mathbf{U}}^{1/2} = \Delta t\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{F}^0/2 \quad (2.92)$$

In questo algoritmo l'unico termine con un significato fisico è la somma di

forze interne ed esterne \mathbf{F} , tutti gli altri termini non hanno alcun significato fisico proprio, ed è per questo motivo che possono essere scelti nella maniera più conveniente per raggiungere nel più breve tempo possibile la convergenza del metodo.

Lo step temporale può essere preso pari a 1 ($\Delta t = 1$), ed è una scelta conveniente, per determinare la matrice di densità ci sono molti metodi differenti, ma uno dei più utilizzati è basato sul teorema di Gerschgorin:

$$\lambda_{ii} \geq \frac{1}{4} \Delta t^2 \sum_j |K_{ij}| \quad (2.93)$$

Con K_{ij} matrice di rigidezza del sistema di equazioni considerato. Il simbolo di maggiore o uguale assicura la stabilità dell'integrazione alle differenze finite, ed è possibile trovare la spiegazione di tale condizione in [29].

Un altro possibile metodo è di scegliere la massa basandosi sulla minima dimensione del nodo, per rendere invariante la struttura della massa. Questo permette di ridurre l'overshoot se messo in confronto con l'assegnazione di massa fatta con il teorema Gerschgorin.

La costruzione della matrice di rigidezza richiede la conoscenza della derivata della funzione di risposta rispetto allo spostamento relativo $\boldsymbol{\eta}$. Dal momento che la risposta non è lineare, non è sempre possibile ricavarne la derivata, ma considerando la versione linearizzata della risposta per piccoli spostamenti, la somma dei valori assoluti di una riga della matrice di rigidezza può essere calcolata mediante:

$$\sum_j |K_{ij}| = \max \left(\sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^{N_e} \text{abs}(\xi) w_j c_d e^{-(|\xi|/\ell)^2} \frac{1}{|\xi|^2} \right) \quad (2.94)$$

dove $\max(\cdot)$ è la funzione che restituisce il valore della componente massima del vettore tridimensionale nel suo argomento. La funzione $\text{abs}(\cdot)$ restituisce un vettore in tre dimensioni le cui componenti sono i valori assoluti delle tre componenti del vettore nel suo argomento.

Come spiegato da P. Underwood [29], il coefficiente di smorzamento può essere determinato utilizzando la frequenza più bassa del sistema, ricavata utilizzando il quoziente di Rayleigh:

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{u}}} \quad (2.95)$$

La matrice di densità presentata in eq. 2.93 potrebbe avere al suo interno valori molto grandi, che rendono il denominatore dell'eq. 2.95 difficile da calcolare, per cui è necessario manipolare e riscrivere l'equazione 2.90 riferita all'iterazione n-esima:

$$\ddot{\mathbf{U}}^n(\mathbf{X}, t^n) + c_d \dot{\mathbf{U}}^n(\mathbf{X}, t^n) = \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{F}^n(\mathbf{U}^n, \mathbf{U}^m, \mathbf{X}, \mathbf{X}') \quad (2.96)$$

A questo punto è possibile calcolare il coefficiente di damping ad ogni step iterativo come

$$c_d^n = 2 \sqrt{\frac{\mathbf{U}^{nT} \mathbf{K}^n \mathbf{U}^n}{\mathbf{U}^{nT} \mathbf{U}^n}} \quad (2.97)$$

Dove \mathbf{K}^n è la matrice diagonale di rigidità locale, calcolata come:

$$K_{ii}^n = - \left(\frac{F_i^n - F_i^{n-1}}{\lambda_{ii}} \right) \frac{1}{\Delta t \dot{u}_i^{n-1/2}} \quad (2.98)$$

Dall'equazione 2.93, il termine λ_{ii} viene calcolato utilizzando il simbolo di uguaglianza.

Dal momento che la matrice di rigidità locale coinvolge la divisione per la componente di velocità, è importante iniziare le simulazioni con un campo di spostamenti diverso da zero per evitare la divisione per zero. Inoltre questa condizione non basta, perché non è garantito che il campo di velocità per l'intera esecuzione delle simulazioni non raggiunga mai il valore 0. Quindi è necessario implementare un controllo sulle velocità e la matrice di rigidità viene posta pari a 0 se si incontra una velocità nulla. In questo modo è possibile rimuovere la condizione $\mathbf{U}^0 \neq 0$.

2.12 Accenni alla teoria State-Based

Come già detto le principali limitazioni della teoria bond based sono il coefficiente di Poisson che ha dei valori prestabiliti a seconda del modello utilizzato (3D o 2D), e l'assunzione fatta che forze tra bond agiscono solo in direzione parallela al bond stesso.

Da queste limitazioni è stato possibile sviluppare una teoria più ampia in un secondo momento che prevedesse la teoria bond based come un caso

particolare.

Nella nuova teoria più generalizzata [24], la forza che agisce sul nodo è dipendente anche dallo stato di deformazione che globalmente ci si ritrova ad avere rispetto ad una configurazione di partenza. Si utilizza un concetto diverso di *state*, ovvero stato, 2 vettori di dimensione N che rappresentano lo stato di deformazione e di forza che caratterizzano il nodo in esame.

Sono introdotti ora i concetti di $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}$, distanza tra due nodi e $\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y}$, valore di deformazione del bond ad un certo istante temporale. Quindi il vettore posizione relativa $\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y}$ può essere ottenuto applicando lo stato di deformazione $\underline{\mathbf{Y}}$ al vettore posizione iniziale $\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}$ tale per cui

$$\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y} = \underline{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{x}, t) \langle \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} \rangle \quad (2.99)$$

dove $\langle \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} \rangle$ indica a quale bond lo stato viene applicato.

Definendo allo stesso modo $\underline{\mathbf{T}}$ lo stato di forza di un preciso bond è possibile riscrivere anche la forza \boldsymbol{f} nella teoria state-based

$$\boldsymbol{f} = \underline{\mathbf{T}}(\boldsymbol{x}, t) \langle \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} \rangle \quad (2.100)$$

Quindi al contrario di quanto avveniva nella teoria bond-based ogni legame non è indipendente, ma è dipendente anche dalla condizione degli altri legami all'interno dell'orizzonte.

Utilizzando ora il principio dei lavori virtuali è possibile scrivere l'equazione della peridinamica nella versione state-based:

$$\rho(x) \ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, t) = \int_H [\underline{\mathbf{T}}(\boldsymbol{x}, t) \langle \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} \rangle - \underline{\mathbf{T}}(\boldsymbol{x}', t) \langle \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} \rangle] dH + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, t) \quad (2.101)$$

2.12.1 Bond-based come caso particolare di state-based

Si consideri di partire dal caso particolare in cui la forza peridinamica tra due punti in configurazione deformata sia allineata alla congiungente tra i due nodi e le intensità delle forze nei due nodi siano uguali in modulo.

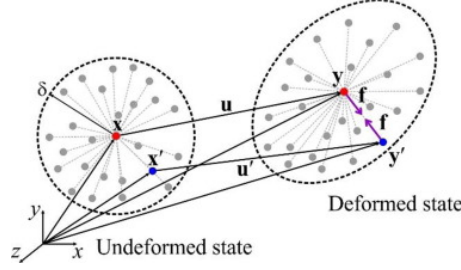


Figura 2.8: Configurazione con forze a coppie allineate e moduli uguali. Tratto da [17].

In tal caso i vettori di stato possono essere scritti come:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle &= \frac{1}{2} C \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|} = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}, t) \\ \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}', t) \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle &= \frac{1}{2} C \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|} = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (2.102)$$

Dove C è un parametro arbitrario dipendente dalle proprietà del materiale, dallo stretch e dall'orizzonte. Andando a sostituire i vettori ricavati si ottiene la formula

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_H [\mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}, t)] dH + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (2.103)$$

con \mathbf{f} pairwise forces con le proprietà già enunciate nel caso bond-based.

2.12.2 Ordinary State-based Peridynamics

In questo utilizzo della teoria ci si pone nel caso di vettori allineati nelle due configurazioni, ma moduli del vettore nei due nodi diversi (vedi fig. 2.9).

Riscrivendo i vettori di stato della forza si può scrivere:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle &= \frac{1}{2} A \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|} \\ \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}', t) \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle &= -\frac{1}{2} B \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|}\end{aligned}\quad (2.104)$$

Con A e B parametri ausiliari dipendenti da materiale, campo di deformazione e orizzonte, che possono essere calcolati dalla relazione che lega il

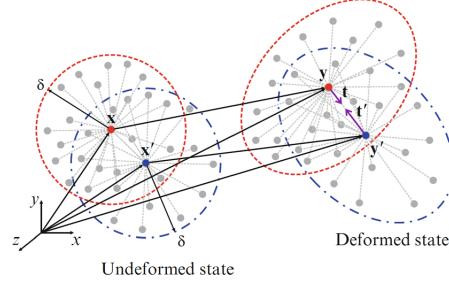


Figura 2.9: Configurazione con forze a coppie allineate ma moduli diversi. Tratto da [17].

vettore di stato della forza all'energia di deformazione:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle &\approx \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial (|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|)} \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|} \\ \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}', t) \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle &\approx \frac{\partial W(\mathbf{x}')}{\partial (|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|)} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}'}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|}\end{aligned}\quad (2.105)$$

2.12.3 Non-Ordinary State-based Peridynamics

Questa formulazione rappresenta il caso più generale per cui i vettori forza di un legame tra due nodi non sono né allineati né di modulo uguale (vedi fig. 2.10).

In questo caso deve essere trovata una forma del vettore di stato della forza che verifichi la condizione di ammissibilità angolare, che nei precedenti casi era garantita dall'allineamento tra i vettori:

$$\int_H [\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle \times \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle] dH = 0 \quad (2.106)$$

In questo caso generale il vettore di stato risulta essere descritto come:

$$\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = \underline{w} \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle \mathbf{PK}^{-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad (2.107)$$

dove \mathbf{P} è il tensore degli stress secondo Piola-Kirchhoff, mentre $\underline{w} \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle$ è definito come funzione di influenza ed è pari a

$$\underline{w} \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = \frac{\delta}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}$$

Da cui si può capire che il vettore di stato della forza è correlato al gradiente

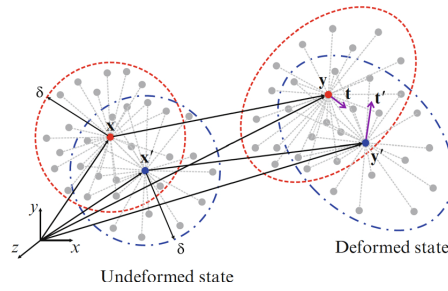


Figura 2.10: Configurazione generale con forze a coppie non allineate e moduli diversi. Tratto da [17].

di deformazione e al tensore degli stress così come definito nella meccanica classica del continuo.

Capitolo 3

Caso di studio

In questo capitolo verrà analizzato il motivo per cui è stata scritta questa tesi, ovvero la necessità di capire come le diverse leggi costitutive siano influenzate dalla variazione dei parametri che le caratterizzano.

Una volta scelte le grandezze della simulazione riguardo la definizione di orizzonte e m-ratio, attraverso delle analisi di Delta-convergenza, sarà possibile variare i valori di G_0 , ovvero energia di frattura del materiale, e i valori di tensione σ_{uy} per cui si ha una variazione di comportamento del materiale nei modelli non lineari delle leggi costitutive.

3.1 Comportamento non lineare del materiale

L'approssimazione del comportamento del materiale di natura fragile, ovvero con rottura completa del legame subito dopo aver superato lo stretch critico s_0 , non è valida per la maggior parte dei materiali, nei quali una volta raggiunto lo stretch critico si ha una fase di danneggiamento in cui il legame non può più essere considerato integro nella sua totalità, e quindi nella teoria peridinamica si avrà che la rigidità associata al legame risulta inferiore a quella iniziale. Questo danneggiamento è permanente per cui dopo uno stretch che ha danneggiato il legame, in una seconda fase di contrazione il legame non seguirà più la curva precedente, ma tornerà verso l'origine del grafico stretch vs pairwise force con una pendenza inferiore, e il nuovo massimo sarà sul punto di massimo stretch raggiunto.

È necessario però capire come andare a modellare questo comportamento di deterioramento secondo delle leggi ben precise, che cerchino di approssi-

mare il più possibile il comportamento reale del materiale. Lo scopo principale di questo elaborato è proprio andando a variare dei parametri, vedere come vengono condizionati i comportamenti e ragionare sui significati dei cambiamenti.

Il primo passo però necessario è andare a definire i modelli non lineari, e cercare di definire i punti notevoli del modello che saranno poi collegati attraverso una spezzata di segmenti nel grafico *pairwise force vs stretch*.

3.1.1 Comportamento bilineare

Con il comportamento bilineare andiamo a simulare una curva che dopo aver raggiunto lo stretch critico, che in questo elaborato chiameremo s_u , corrispondente allo stretch in cui la pairwise force è massima, presenterà un danneggiamento che avverrà secondo un tratto rettilineo fino a stretch s_0 , stretch che in questo elaborato indica sempre quello corrispondente a rottura completa del legame, per cui il bond sarà completamente rotto e quindi da lì in poi la forza associata ad un qualsiasi stretch del legame sarà nulla, in altre parole il legame verrà eliminato dal computo totale delle forze interne che agiscono sul nodo. Di seguito è riportato l'andamento della pairwise force al variare dello stretch, con i punti notevoli.

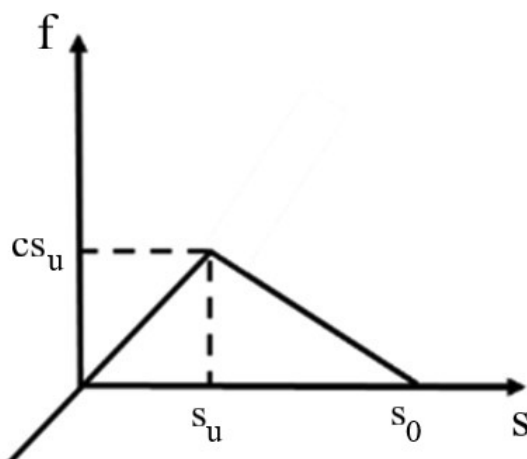


Figura 3.1: bilineare.

Come già visto per il materiale PMB, è necessario andare a trovare una relazione tra l'energia di frattura del materiale e l'energia necessaria affinché,

nel modello peridinamico, il campione si rompa in due pezzi.

$$G_0 = \begin{cases} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} w_{max}(\xi) \xi^2 \sin \phi \, d\phi d\xi d\theta dz, & \text{for 3D} \\ 2t \int_0^\delta \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} w_{max}(\xi) \xi \, d\theta d\xi dz, & \text{for 2D} \end{cases} . \quad (3.1)$$

In questo elaborato verranno utilizzati solamente esempi 2D, tuttavia per completezza qui sono risolti gli integrali anche per il caso 3D.

Caso 3D

È necessario dividere l'integrale in due tratti, il primo tratto fino allo stretch s_u e il secondo tratto di danneggiamento fino a s_0 . Se si scrive il micropotenziale per i due tratti separatamente, abbiamo $w_{max} = w_{max}^a + w_{max}^b$.

Se si considera il primo tratto e si scrive l'integrale fino a s_u , si può scrivere per le equazioni della teoria della peridinamica:

$$H^a = cs^a \quad (3.2)$$

$$w^a = \int H^a d\eta^a = \frac{cs^{a^2} \xi}{2} \quad (3.3)$$

e per $s^a = s_u$ si ottiene il micropotenziale massimo del primo tratto

$$w_{max}^a = \frac{cs_u^2 \xi}{2} \quad (3.4)$$

Se ora prendo in considerazione il tratto da s_u a s_0 , posso riscrivere la formula del micropotenziale del singolo legame con l'equazione di una retta passante per due punti:

$$H^b = -\frac{cs_u}{s_0 - s_u} s^b + cs_u \quad (3.5)$$

$$w^b = \int H^b d\eta^b = \int -\frac{cs_u}{(s_0 - s_u)} \frac{\eta^b}{\xi} d\eta^b + \int cs_u d\eta^b \quad (3.6)$$

Risolvendo questo integrale si ottiene

$$w^b = -\frac{cs_u}{2(s_0 - s_u)}\eta^{b^2} + cs_u\eta^b \quad (3.7)$$

E sostituendo $\eta^b = s^b\xi$, si arriva a:

$$w^b = -\frac{cs_u}{2(s_0 - s_u)}s^{b^2}\xi + cs_us^b\xi \quad (3.8)$$

Se si considera il massimo in questo tratto, che si ottiene per $s^b = s_0 - s_u$, si arriva alla formula conclusiva

$$w_{max}^b = -\frac{cs_u}{2(s_0 - s_u)}(s_0 - s_u)^2\xi + cs_u(s_0 - s_u)\xi = \frac{cs_u(s_0 - s_u)}{2}\xi \quad (3.9)$$

Si è quindi alla fine ottenuto la formula di w_{max} da inserire nell'integrale dell'energia di frattura.

$$w_{max} = w_{max}^a + w_{max}^b = \left[\frac{cs_u^2}{2} + \frac{cs_u(s_0 - s_u)}{2} \right] \xi \quad (3.10)$$

A questo punto si può notare come il primo termine sia uguale a quello già trattato nel caso lineare, nel capitolo precedente, solo che al posto di s_0 si ha s_u ma questo non modifica la risoluzione dell'integrale; anche il secondo tratto si può risolvere abbastanza agevolmente notando che anche questo è funzione solo di ξ , mentre il resto può essere portato fuori dall'integrale poiché costante rappresentativa dell'area sotto il secondo tratto di curva.

$$G_0^b = \frac{cs_u(s_0 - s_u)}{2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} \xi^3 \sin \phi \, d\phi d\theta d\xi dz \quad (3.11)$$

L'integrale già risolto nel capitolo precedente è pari a $\frac{c\pi\delta^5}{10}s_u(s_0 - s_u)$.

Una volta ottenuti i due termini dell'integrale è possibile andarli a sommare per ottenere la relazione conclusiva che lega l'energia di frattura propria del materiale e quella necessaria a rompere il campione.

$$G_0 = G_0^a + G_0^b = \frac{\pi c\delta^5}{10} [s_u^2 + s_u(s_0 - s_u)] = \frac{\pi c\delta^5}{10} s_u s_0 \quad (3.12)$$

Caso 2D

Anche nel caso 2D si segue il procedimento analogo andando a separare l'integrale nelle due parti, e come già fatto nel caso precedente si giunge nel primo tratto alla risoluzione dello stesso integrale del caso lineare, mentre nel secondo tratto una volta ricavata la $w_{max}^b = \frac{cs_u(s_0 - s_u)}{2}\xi$, è possibile inserirla nell'integrale e si risolve agevolmente.

$$G_0^b = 2t \frac{cs_u(s_0 - s_u)}{2} \int_0^\delta \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} \xi^2 d\theta d\xi dz \quad (3.13)$$

L'integrale si conosce essere già stato risolto pari a $\frac{tc\delta^4}{4}s_u(s_0 - s_u)$.

Se ora si va a ricomporre il risultato finale, come somma dei due integrali risolti

$$G_0 = G_0^a + G_0^b = \frac{tc\delta^4}{4} [s_u^2 + s_u(s_0 - s_u)] \quad (3.14)$$

Che può essere semplificata

$$G_0 = \frac{\delta^4}{4} tcs_us_0 \quad (3.15)$$

Caso generale

Andando ora a sostituire al valore di c nei diversi casi l'eq. 2.66 e esplicitando il prodotto degli allungamenti si ottiene:

$$s_us_0 = \begin{cases} \frac{5G_0}{6E\delta}, & \text{for 3D} \\ \frac{4\pi G_0}{9E\delta}, & \text{for 2D plane stress} \\ \frac{5\pi G_0}{12E\delta}, & \text{for 2D plane strain} \end{cases} \quad (3.16)$$

Per andare a risolvere l'equazione e trovare in maniera distinta i due allungamenti è necessario utilizzare una seconda equazione da mettere a sistema con la prima e trovare in maniera distinta le due incognite s_u e s_0 . Questa equazione, come proposto da Nianzi, Chen, Bobaru [18], si cerca nel valore di ultimate strength, un valore che è proprio del materiale e si può ottenere per via sperimentale. Nel modello PD colleghiamo la massima pairwise force cs_u all valore di ultimate strength, ipotizzando che lo stress normale al piano in cui la cricca propaga sia pari all'ultimate strength, quindi possiamo scrivere l'integrale:

$$\sigma_u = \begin{cases} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} (cs_u \cos \phi) \xi^2 \sin \phi \, d\phi d\xi d\theta dz, & \text{for 3D} \\ 2 \int_0^\delta \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} (cs_u \cos \theta) \xi \, d\theta d\xi dz, & \text{for 2D} \end{cases} \quad (3.17)$$

Che viene risolta in:

$$\sigma_u = \begin{cases} \frac{\pi cs_1 \delta^4}{6}, & \text{for 3D} \\ \frac{\pi cs_1 \delta^3}{6}, & \text{for 2D} \end{cases} \quad (3.18)$$

Sostituendo infine all'interno il valore del micromodulo c , è possibile ottenere il valore di stretch s_u nei diversi casi:

$$s_u = \begin{cases} \frac{\sigma_u}{2E}, & \text{for 3D} \\ \frac{2\sigma_u}{3E}, & \text{for 2D plane stress} \\ \frac{5\sigma_u}{8E}, & \text{for 2D plane strain} \end{cases} \quad (3.19)$$

Sostituendo infine 3.19 in (3.16), si può ottenere anche il valore di s_0 , in cui il bond può considerarsi completamente rotto.

$$s_0 = \begin{cases} \frac{5G_0}{3\sigma_u \delta}, & \text{for 3D} \\ \frac{2\pi G_0}{3\sigma_u \delta}, & \text{for 2D plane stress} \\ \frac{2\pi G_0}{3\sigma_u \delta}, & \text{for 2D plane strain} \end{cases} \quad (3.20)$$

È necessario notare come s_u sia indipendente dal valore di orizzonte utilizzato, mentre il valore di s_0 ne è inversamente proporzionale, quindi due simulazioni con orizzonte differente avranno s_u costante mentre per una simulazione con $\delta_2 < \delta_1$ si avrà $s_{02} > s_{01}$. Questo mette anche un limite ai valori di orizzonte utilizzabili, poiché è sempre necessario sia verificata la condizione $s_0 > s_u$ perché il modello bilineare sia soddisfatto; va dunque posta una condizione sull'orizzonte che si ottiene ponendo la condizione sopracitata che va a porre un limite superiore al valore di orizzonte utilizzabile.

$$\delta < \begin{cases} \frac{10EG_0}{3\sigma_u^2}, & \text{for 3D} \\ \frac{\pi EG_0}{\sigma_u^2}, & \text{for 2D plane stress} \\ \frac{16\pi EG_0}{15\sigma_u^2}, & \text{for 2D plane strain} \end{cases} \quad (3.21)$$

3.1.2 Comportamento trilineare

Con questo tipo di comportamento si va a modificare la legge in fase di danneggiamento del bond, in una prima parte del danneggiamento si ha una caduta repentina del micromodulo del legame, mentre in una seconda fase la pendenza diventa molto più leggera e il legame seppur molto poco continua ad esercitare delle forze sul sistema. In questo tipo di modello sono necessari tre punti notevoli che caratterizzano il modello:

- il punto s_u in cui la pairwise force è massima;
- il punto s_2 in cui si ha il cambio di pendenza nella fase di danneggiamento del legame;
- il punto s_0 in cui il legame si rompe definitivamente, e un qualsiasi stretch maggiore dello stesso legame porta una pairwise force nulla.

Nel modello trilineare s_u è la stessa del modello bilineare, andando poi ad eguagliare l'energia G_0 dei due modelli, che vorrebbe dire eguagliare le aree sottostanti la curva di pairwise al variare dello stretch, è possibile ottenere anche gli altri due punti della curva. Per fare ciò è necessario andare a introdurre 2 parametri β e γ , che possono essere ottenuti per via sperimentale dalla costruzione di una legge costitutiva sperimentale, oppure in mancanza di dati è possibile utilizzare dei valori prestabiliti approssimativi[30]: $\beta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{3+2\beta}{2\beta(1-\beta)} = \frac{28}{3}$.

Questi due parametri introdotti hanno un significato anche dal punto di vista fisico:

- β infatti è il rapporto tra la forza al ginocchio della parte di danneggiamento, in corrispondenza di uno stretch s_2 e la pairwise force massima del caso trilineare cs_u in corrispondenza dello stretch s_u ;
- γ è il rapporto tra la differenza degli stretch in corrispondenza di cui si ha la rottura completa del legame s_0 e il picco s_u e la differenza degli stretch in corrispondenza del ginocchio della fase di danneggiamento dello stesso s_2 e il picco s_u .

Definiti tali parametri arbitrari, e con il valore s_0 della legge bilineare qui indicato come s_{cr} , è possibile cercare gli altri due punti notevoli da alcune

semplici relazioni:

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{s_{cr} + \beta\gamma s_u}{1 + \beta\gamma} \\ s_0 &= s_u + \gamma(s_2 - s_u) \end{aligned} \quad (3.22)$$

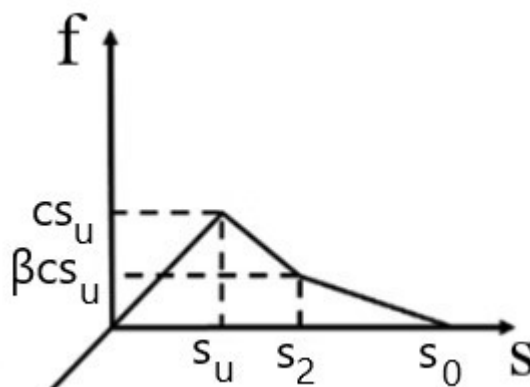


Figura 3.2: trilineare.

Dove $s_{cr} = s_0$ del caso bilineare.

Anche in questo caso è necessario che sia soddisfatta la condizione $s_u < s_2 < s_0$. Partendo dalla prima disuguaglianza, $s_2 > s_u$ e sostituendo a s_2 l'uguaglianza (3.22), torno alla condizione già imposta in precedenza $s_{cr} > s_u$ che doveva essere soddisfatta già per il modello bilineare. Altre condizioni necessarie sono $\beta < 1$ e $\gamma > 1$, che risultano già rispettate se si prendono i valori tipici suggeriti sopra.

C'è da tenere presente però che le leggi finora trovate e utilizzate sono valide per modelli che non sono dipendenti dalle velocità di deformazione o carico, per modelli in cui anche la velocità di applicazione del carico influenza la curva costitutiva è necessario andare a correggere tale modello trilineare per inserire anche la dipendenza dalla velocità di deformazione.

3.2 Variazione proprietà del materiale

Nell'elaborato saranno riportati due esempi distinti, e per entrambi dopo aver riportato la simulazione già presente in letteratura, in maniera tale da essere sicuri che il modello perid dinamico costruito sia fedele e abbia valore, verranno condotte delle ulteriori analisi in cui si andranno a far variare i

valori di G_0 e σ_u , e l'interesse dell'elaborato sta nel vedere come questo influenza le curve e i risultati, andando ad evidenziare eventuali limiti che si possono presentare.

Da un'analisi preliminare della teoria e le sue formule ci si aspetta che qualsiasi legge si utilizzi l'area sotto la curva di pairwise force in funzione dello stretch debba rimanere costante, poiché funzione di G_0 e indipendente dalla legge usata.

Come infatti si può vedere dalla figura di seguito, anche in maniera abbastanza intuitiva si può notare come a parità di condizioni le aree siano uguali, per la definizione stessa dell'integrale da cui si è partiti per calcolare gli allungamenti e i punti notevoli del grafico.

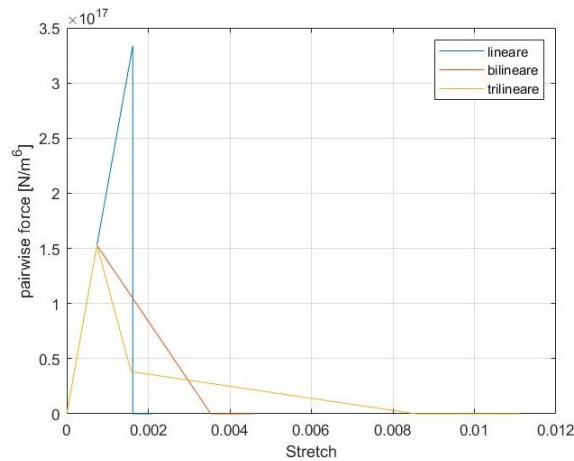


Figura 3.3: Utilizzo leggi diverse.

In questo caso sono stati calcolati i grafici teorici per un orizzonte di 0.001 m con le tre leggi diverse e come si può facilmente apprezzare già ad occhio si vede che le aree sotto le curve siano costanti, ma è possibile per completezza andare a verificare in maniera analitica l'area sotto le curve, poiché una volta che si conoscono i punti notevoli, è possibile calcolare l'area totale come somma di aree di triangoli o trapezi rettangoli.

Successivamente verranno condotte delle simulazioni che avranno come parametro che varia l'energia di rottura G_0 , che è un parametro direttamente collegato all'area del grafico pairwise-force vs stretch. Tuttavia andando ad analizzare la formula che determinano il punto in cui si ha la forza massima, e dove il legame inizia a danneggiarsi nei modelli non lineari, si può

notare che s_u risulta indipendente dall'energia di frattura, quindi a parità di tutti gli altri parametri tutti i grafici avranno un primo tratto identico, e le differenze si potranno notare solo nel tratto di danneggiamento del legame, all'aumentare di G_0 infatti il bond tenderà a danneggiarsi più lentamente e quindi di conseguenza l'area sotto la curva aumenterà.

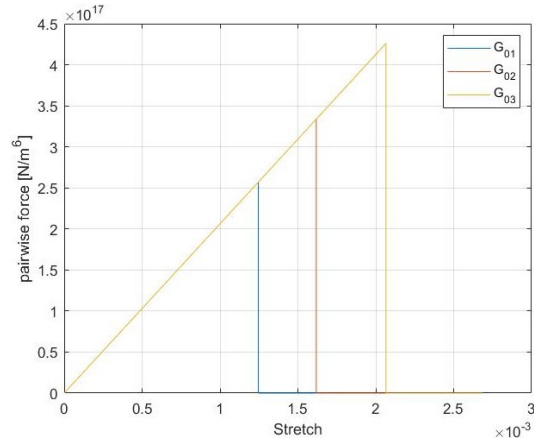


Figura 3.4: Variazione G_0 legge lineare.

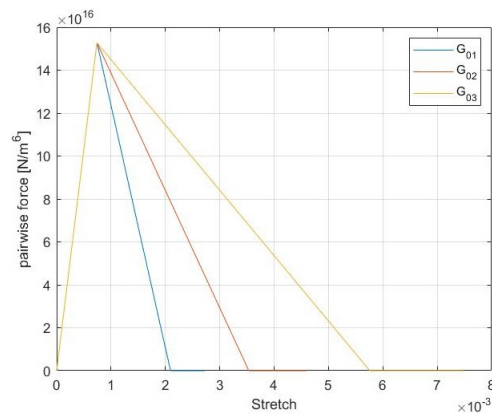


Figura 3.5: Variazione G_0 legge bilineare.

In un ulteriore studio verrà fatto variare ultimate strength del materiale, questo ha ripercussioni solamente sui modelli non lineari che ne sono influenzati nel calcolo dello stretch s_u [vedi (3.19)]. All'aumentare della ultimate strength aumenta anche lo stretch per cui il bond inizia a degradare, però se l'energia di frattura dei modelli rimane invariata, l'area sotto la curva non può variare, quindi il risultato atteso è che una simulazione con σ_u superiore abbia uno stretch s_u più elevato, ma poi la fase di danneggiamento avvenga in maniera più repentina e s_0 sia inferiore.

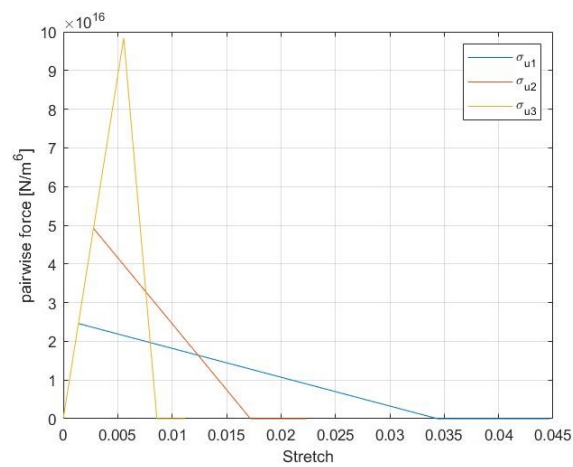


Figura 3.6: Variazione σ_u legge bilineare.

Capitolo 4

Esempi

Per lo studio di interesse sono stati presi in considerazione due esempi: un primo esempio è quello di una piastra rettangolare con una cricca longitudinale che divide la piastra in maniera simmetrica, mentre il secondo esempio è stato proposto da Kalthoff ed è solitamente utilizzato per verificare la bontà di un metodo di simulazione, ed è costituito da un provino con due brevi cricche che viene colpito con un proiettile nella zona compresa tra le due cricche in maniera simmetrica, e si studia l'angolo di propagazione della cricca in funzione della velocità con cui il proiettile è sparato, e in funzione del materiale.

4.1 Piastra con cricca sottoposta a trazione

L'esempio della piastra con una cricca preesistente sottoposta a trazione nella direzione normale a quella della cricca, è uno dei più utilizzati nell'ambito della peridinamica, perché si presta ad uno studio al variare delle condizioni al contorno, che vanno a influenzare il percorso di propagazione della cricca o il branching della stessa, ovvero la biforcazione da una cricca principale a due cricche che poi si sviluppano in maniera indipendente, questo permette di vedere in maniera abbastanza evidente le differenze in diverse simulazioni.

La geometria del problema è quella di una piastra rettangolare di $a = 0.1m$ per $b = 0.04m$, con una cricca preesistente a metà del lato più corto della piastra e con una lunghezza $\frac{a}{2}$ (vedi 4.1).

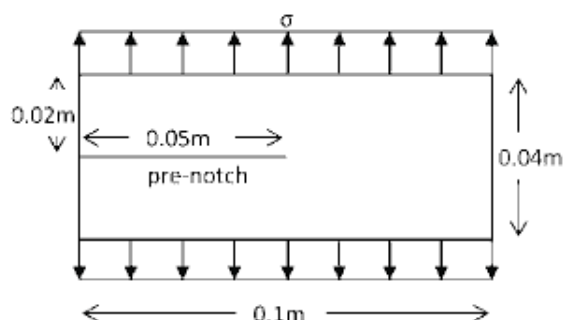


Figura 4.1: Geometria del problema. Tratto da [9].

Il materiale preso in considerazione è Soda-lime glass, un tipo di vetro utilizzato nelle costruzioni di strutture che ha un comportamento molto variabile se sottoposto a carichi statici o dinamici, poiché ha dimostrato una resistenza ultima molto elevata quando la velocità di deformazione è elevata.

Alle estremità orizzontali della piastra è applicato un carico uniformemente distribuito di 24 MPa, che va in un primo momento ad aprire la piastra dove abbiamo la cricca già presente, e poi in un secondo momento dall'estremità di cricca dove si concentra tutta la tensione parte il fenomeno di propagazione della cricca.

Dalla teoria infatti, per le cricche mode 1, ovvero "Opening mode" in cui lo stress è perpendicolare alla direzione di cricca, è noto come andando a descrivere la distribuzione degli stress vicino all'estremità di cricca, questo abbia una dipendenza dal reciproco del raggio della cricca, per cui all'estremità dove il raggio tende a zero, lo stress tende ad infinito, motivo per cui è facile capire che sia il punto di innesto della cricca.

Sono di seguito riportate le caratteristiche del materiale scelto per quanto riguarda questo esperimento[9].

ρ (kg/m^3)	E (GPa)	Poisson ratio	Energia di frattura (G_0)(J/m^2)
2440	72	0.22	135

Dal momento che non esiste una soluzione analitica per questi problemi di propagazione di cricca, la migliore soluzione è confrontare i risultati ottenuti con le simulazioni con gli esperimenti, e con le simulazioni svolte con altri metodi prima di questo. C'è da dire però che in letteratura non si sono trovati degli articoli che riportassero in maniera esaustiva una descrizione

completa dei risultati, alcuni articoli infatti riportavano dettagliatamente il percorso che la cricca aveva all'interno della piastra, ma non fornivano alcuna indicazione sulla velocità con cui la stessa propaga, altri invece concentrati sulla velocità di propagazione non erano molto chiari sulle condizioni di carico da applicare, l'unica soluzione è dunque quella di basarsi su un set up di simulazione uguale a quello adottato in altre simulazioni già presenti in letteratura (Belytschko et al. [1], Rabczuc et al. [19], Song et al. [26]). Tuttavia i parametri dei materiali riportati nella tabella precedente sono presi dagli esperimenti condotti da Bowden et al. [5], e Doll [8].

Lo studio da parte di Bowden è stato condotto per capire l'efficacia di rottura di materiali conduttivi per interrompere un circuito elettrico in brevi tempi di qualche microsecondo, un normale metodo per aprire un circuito in maniera meccanica prevede la separazione dei contatti elettrici, che è un processo molto più lento che richiede millesimi di secondo, e la rottura può avvenire in ogni punto del circuito. Negli esperimenti condotti si è trovato che nel materiale Soda-lime Glass la velocità di frattura raggiunge i 1580 m/s , o come viene più comunemente riportata un rapporto di velocità rispetto alla velocità di propagazione dell'onda di Rayleigh di 0.51. In [5] viene anche messo in evidenza come il cammino della cricca sia influenzato dallo stress a cui è sottoposta la piastra, e più è basso lo sforzo più la biforcazione della cricca ritarda ad avvenire, fino ad un limite rappresentato in figura 4.2 (f) oltre cui la cricca non biforca nemmeno, ma continua nella sua propagazione lungo la direzione originaria. Quantitativamente infatti è stata trovata una relazione per cui la lunghezza del tratto senza biforcazione (λ) è inversamente proporzionale al quadrato della tensione nella piastra prima che avvenga la biforcazione (σ), quindi al calare della tensione esterna la lunghezza del tratto si accorcia in maniera quadratica [5].

$$\lambda\sigma^2 = \text{costante}$$

Questa relazione ha un'ampia applicabilità ed esistono relazioni anche per altri materiali e applicazioni di carico.

Contrariamente al set-up che sarà utilizzato in questo elaborato, Bowden ha utilizzato una geometria che prevedeva una cricca pre-esistente che si trovava a metà del lato più lungo della piastra e si sviluppava parallela al lato corto, tuttavia con questo set-up la cricca ha poco spazio per svilupparsi e in caso

evidenziare fenomeni di diramazione secondaria.

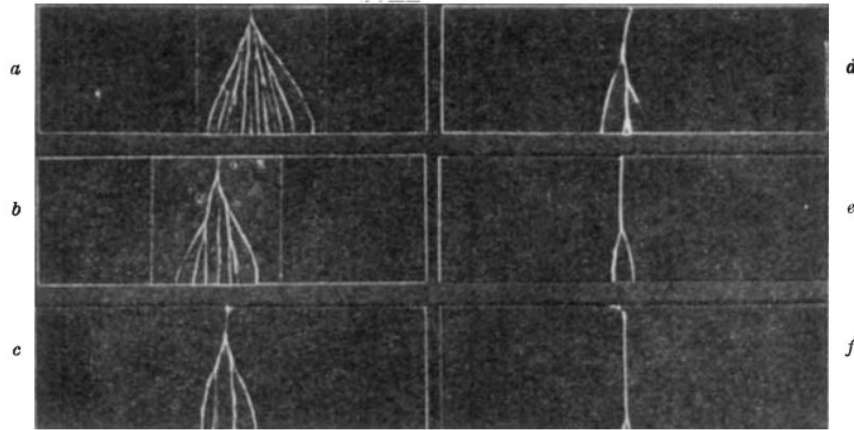


Figura 4.2: crack path. Tratto da [5].

4.1.1 Risultato simulazioni

Come già detto è difficile riuscire a fare un confronto generale tra tutte le simulazioni presenti in letteratura, tuttavia è possibile cercare delle somiglianze per le affinità tra i diversi approcci di simulazioni, poiché per esempio in alcuni documenti viene presa come energia di rottura G_0 quella considerata al momento in cui la cricca inizia a propagare, e non l'energia per cui la cricca inizia la biforcazione, per cui, per esempio, sempre considerando il materiale Soda-lime glass, Bobaru in [9] considera $G_0 = 135J/m^2$ e una tensione applicata agli spigoli di $24MPa$, mentre lo stesso autore [3] o Zaccariotto et al.[33] utilizzano $G_0 = 3.8J/m^2$, ed una tensione applicata di $4MPa$, che portano a dei risultati abbastanza confrontabili.

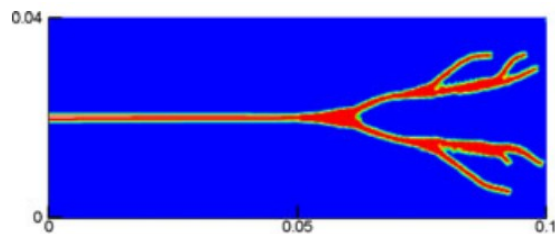


Figura 4.3: $G_0 = 135J/m^2$, $t = 28\mu s$, tratto da [9].

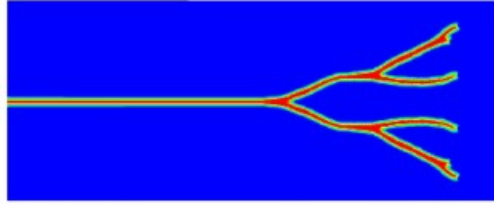


Figura 4.4: $G_0 = 3.8J/m^2$, $t = 28\mu s$, tratto da [3].

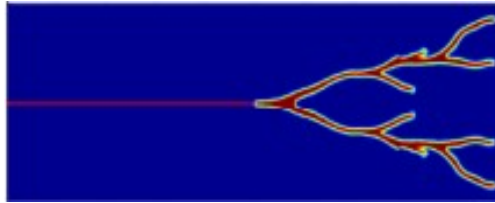


Figura 4.5: $G_0 = 3.8J/m^2$, $t = 30\mu s$, tratto da [33].

Importante notare come il problema che ci si poneva l'obiettivo fosse un problema completamente simmetrico, dal momento che la cricca si presenta all'esatta metà della piastra e il carico sia simmetrico, quindi facendo riferimento alla figura 4.3, si nota come il percorso non presenti una simmetria rispetto al piano medio, questo è stato giustificato dagli autori in un secondo articolo pubblicato nel 2011 [10]. La costruzione del modello infatti è apparentemente simmetrica, con un sistema di riferimento con l'origine esattamente al centro della piastra per conservare la simmetria lungo i due assi che giacciono sul piano della simulazione, con carichi simmetrici. Tuttavia viene posta l'attenzione su come vengono definiti i legami famiglia all'interno dell'orizzonte, per cui come si può vedere nell'immagine che segue, il legame 1a e 1b, definiti per due nodi origine, che sono in posizione simmetrica, non sono definiti in maniera simmetrica, e questo è l'unica cosa che va a rompere la simmetria del problema.

Quello che si sono proposti gli autori è cercare di riscrivere l'algoritmo cercando di rendere anche la ricerca dei nodi famiglia simmetrica rispetto al piano di simmetria.

In fig. 4.7 è possibile vedere il caso riportato in [10], per un sistema di riferimento centrato nel centro della piastra, ma riferito ad un altro materiale

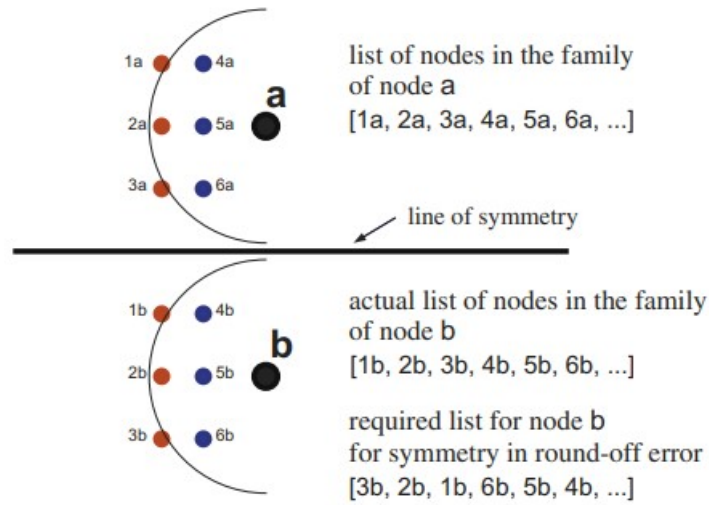


Figura 4.6: Errore nella definizione dei nodi che introduce asimmetria. Tratto da [10].

(Duran 50) per cui da non poter confrontare con i risultati precedenti che fanno riferimento a Soda-lime glass.

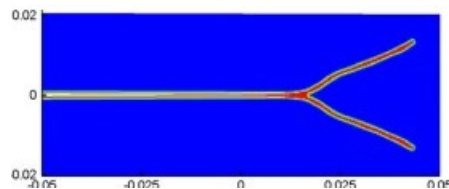


Figura 4.7: Materiale Duran 50, crack path su modello centrato. Tratto da [10].

Se si studia con precisione, presi due nodi simmetrici rispetto al piano di simmetria orizzontale, questi hanno uno spostamento relativo verticale che dopo $40\mu s$ è calcolato come $\frac{|d_b| - |d_a|}{d_a} = 3.6 \cdot 10^{-3}$, che sottolinea il fatto di non essere simmetrico.

Anche i risultati sperimentali presentati in fig. 4.2 non sono perfettamente simmetrici, ma questo è dovuto al materiale che al suo interno può presentare delle irregolarità che localmente ne alterano le proprietà meccaniche, oppure un'altra ipotesi sostenuta dagli autori Ha e Bobaru è la possibile variazione del comportamento del materiale vicino alle superfici dove la cricca

si è propagata. Prendendo spunto dalla trattazione usata per i nodi più vicini alla superficie esterna, che nel modello peridinamico soffrono dello "skin effect", per cui avendo meno legami risulterebbero più deboli, quello che i due autori hanno provato a fare è irrigidire man mano tutti quei nodi danneggiati, che risultano quindi essere vicini ad una superficie libera (cricca), andando ad aumentare lo stretch critico s_0 a seconda dell'entità del danno.

Così facendo però l'asimmetria diventa molto evidente e anzi si deve parlare di problema completamente privo di una qualsiasi simmetria e da studiare nel suo intero. Inoltre, facendo più simulazioni, che qui non riporto, si è trovata una fortissima dipendenza del crack path dall'orizzonte utilizzato.

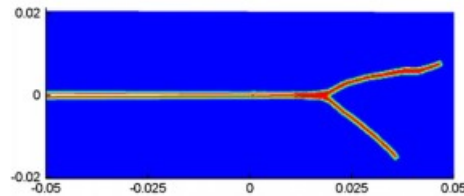


Figura 4.8: stretch critico variabile con il danno al nodo. Tratto da [10].

Nel modello con s_0 costante i legami con zona danneggiata sono effettivamente più deboli, ma è proprio questo che aiuta la cricca a continuare a svilupparsi nella direzione di propagazione, andare a variare il valore di s_0 "veicola" la cricca a strade alternative, e condiziona il problema.

4.2 Esperimento Kalthoff e Winkler

La simulazione ripropone l'esperimento svolto da Kalthoff e Winkler [14] nel 1987, l'obiettivo di questo esperimento era quello di studiare la transizione di modalità di failure e propagazione di cricca, a seconda delle velocità di impatto. L'esperimento consiste in un blocco di acciaio con due brevi cricche che è colpito da un proiettile in maniera simmetrica, e a seconda delle velocità con cui questo colpisce la cricca si sviluppa in modo alternativo lungo il blocco.

La geometria è rappresentata in figure 4.9, il proiettile ha il diametro pari alla distanza tra le due cricche.

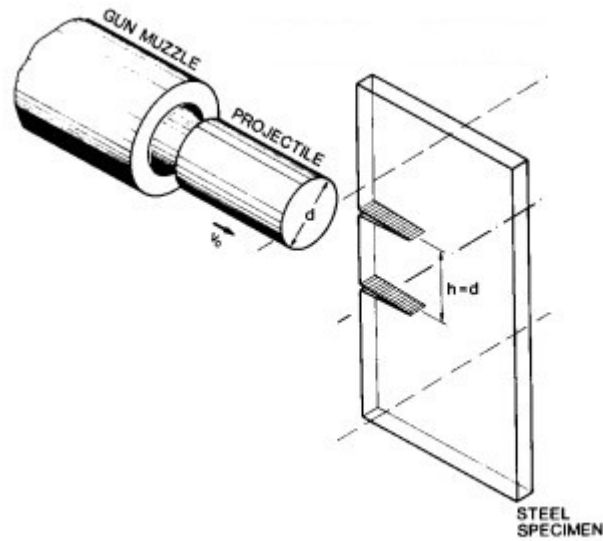


Figura 4.9: Set-up esperimento Kalthoff. Tratto da [15].

L'impatto crea un'onda di compressione nella zona interessata dall'impatto che inizia a propagare, mentre le regioni oltre le cricche non presentano stress. Lo spostamento forzato di materiale con il propagarsi del campo d'onda produce una situazione di carico sull'estremità delle cricche di tipo *mode2* ovvero di sforzo a taglio, questa condizione *mode2* si sviluppa solo in una prima parte del tempo successivo all'impatto, ovvero finché le onde vengono riflesse dall'altra estremità libera del campione e tornano a interferire con l'estremità della cricca. Quando l'onda torna ad interferire con l'estremità allora il risultato è un comportamento più complicato che prevede un mix di condizioni di carico.

È stato studiato il comportamento di diversi materiali, sotto queste condizioni di carico a taglio, utilizzando questo set up di sperimentazione:

- pistola a gas con un foro di 50 mm;
- proiettili con un diametro di 50 mm;
- serbatoio ad alta pressione di 8 litri;
- pressione massima permessa 100 bar.

Il processo di frattura del campione è ripreso con una camera ad alta velocità Cranz-Schardin, che permette di scattare delle foto consecutive ad intervalli di $0.5\mu s$.

Le dimensioni tipiche del campione sono:

- altezza 200 mm;
- larghezza 100 mm;
- spessore dai 9 ai 19 mm;
- la lunghezza delle cricche è la metà della larghezza del campione;
- raggio di punta della cricca tra i 0.75 e i 0.85 mm.

4.2.1 Maraging Steel 18Ni1900

Per la prima analisi è stato scelto un acciaio ad alta resistenza 18 Ni grade 300 (presenza di Cromo), che ha una resistenza a snervamento molto elevata di circa 2.1 GPa, e scelto perché è ottimo per fare degli studi ottici dei fenomeni di frattura su esso. Per una velocità di impatto più bassa, $30m/s$ la modalità di failure, è quella più usuale e la cricca si sviluppa con un'angolazione di circa 70° rispetto alla direzione della cricca già esistente, di seguito si può vedere uno scatto (4.10), che ritrae la situazione poco dopo che la cricca superiore ha iniziato a propagare, come si vede all'estremità di cricca sta propagando con una modalità di tipo 1 della cricca, e la direzione in cui propaga la cricca, è quella in cui sono massimi gli stress risultanti dal campo attorno all'estremità di cricca. Nella parte inferiore della foto si possono ben riconoscere le onde di compressione dovute all'impatto del proiettile che tendono a schiacciare il materiale del campione.

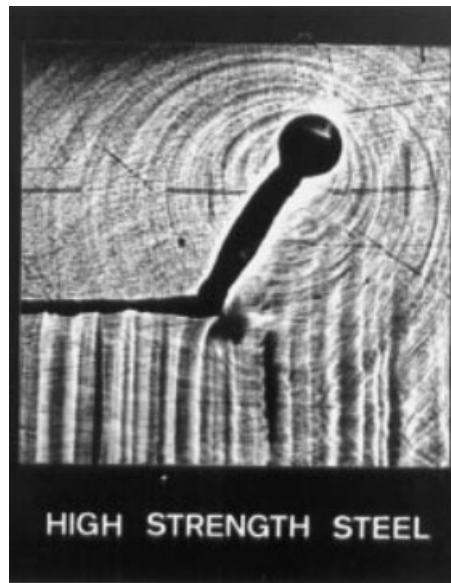


Figura 4.10: Scatto poco dopo l'inizio di propagazione di cricca. Tratto da [15].

Per esperimenti con velocità molto maggiore, circa $70m/s$ il comportamento cambia completamente, e la cricca si continua a sviluppare nella direzione iniziale in maniera pressoché rettilinea, salvo bloccarsi completamente ad un certo punto, e poi non propagare ulteriormente. In questo caso la cricca non è dovuta a fenomeni di propagazione della cricca, quanto più al semplice scorrimento di materiale, dovuto alla formazione di una zona di taglio adiabatico, e il materiale si strappa.



Figura 4.11: comportamento per impatti a bassa velocità (a) e alta velocità (b). Tratto da [15].

Successivamente sono stati effettuati anche altri esperimenti, variando il

raggio di punta della cricca, e si sono trovati risultati interessanti:

- la velocità a cui avviene la transizione di comportamenti è dipendente dal raggio della punta di cricca, più è piccolo il raggio prima avviene la transizione a velocità più basse;
- mentre le cricche dovute a fenomeni di trazione con angolazione si sviluppano in tutto il campione, quelle dovute alla creazione di una banda di taglio adiabatica tendono sempre ad arrestarsi, ma all'aumentare della velocità di impatto il cammino di cricca si allunga.

É quindi evidente che la velocità di deformazione sia legata ad entrambi i parametri: raggio di cricca nella punta e velocità d'impatto. Quantitativamente la velocità di deformazione varia proporzionale a $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$, con ρ raggio di punta della cricca, e varia anche proporzionalmente a v_0 . Quindi si può dire che la velocità di deformazione sia direttamente proporzionale a $\frac{v_0}{\sqrt{\rho}}$.

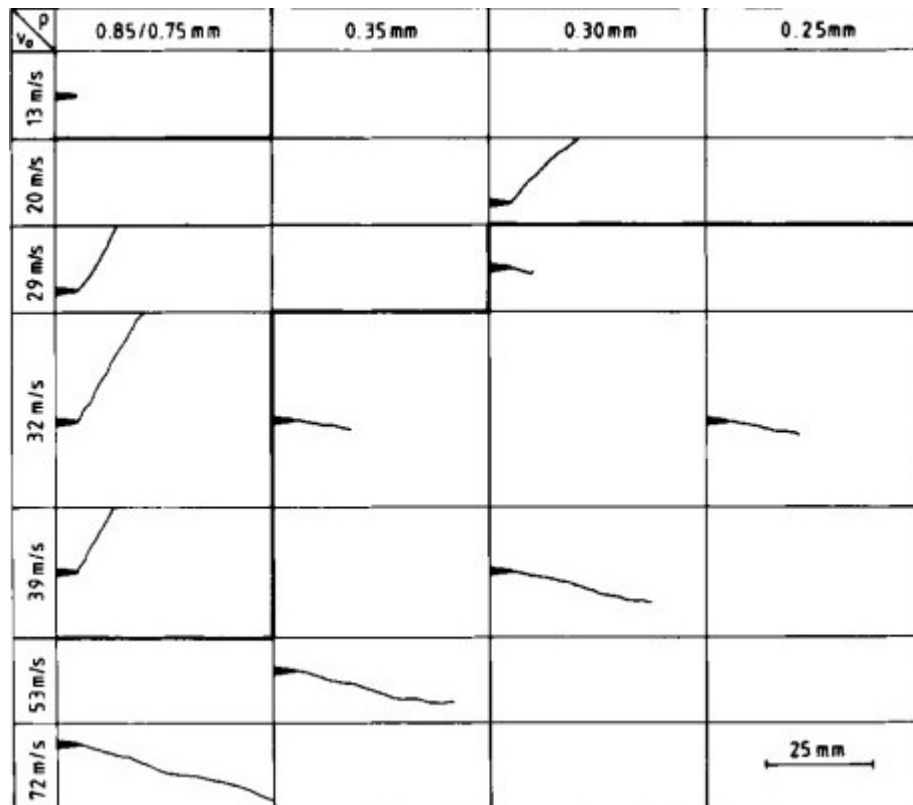


Figura 4.12: comportamento al variare di raggio di punta della cricca e velocità d'impatto. Tratto da [15].

4.2.2 Risultati simulazioni

L'esperimento di Kalthoff & Winkler è stato riportato e simulato da molti altri autori utilizzando metodi vari, ne sono un esempio Braun & J. Fernandez-Sàez, con l'utilizzo della teoria Discrete Model (DM) che consiste nella discretizzazione della equazioni di Navier [6], il Modified Discrete Model utilizzato dagli stessi autori [7] che utilizza un modello appunto modificato, il modello XFEM utilizzato da Song et al. [27], modello DEM da Koteski et al. [16], modello XFEM da Belytschko et al. [1], modello PFM da Hofacker et al. [11], modello PFM da Borden et al. [4].

Nel modello geometrico tutti hanno sfruttato la simmetria del problema andando a riportare solo la metà superiore dell'esperimento, per diminuire il costo computazionale, accettando che la metà inferiore dei risultati altro non sia che lo specchio della metà superiore.

Le grandezze fisiche dei materiali con cui sono state fatte le simulazioni sono tutte abbastanza simili, e vengono riassunte nella tabella a seguire:

ρ (kg/m^3)	E (GPa)	Poisson r.	E. frattura (J/m^2)	σ_u (MPa)
8000	190	0.3	22170	844

C'è da considerare però che se si va a vedere nel dettaglio non tutte le teorie e i modelli richiedono le stesse grandezze, infatti per esempio nei modelli DM e MDM la resistenza del materiale non viene data sotto forma di tensione, ma di stretch critico, $\gamma_0 = 4.44 \cdot 10^{-3}$, oppure il modello XFEM con il criterio "loss of hyperbolicity" utilizza uno stress intensity factor $K_{Ic} = 68MPa\sqrt{m}$. Tuttavia queste teorie portano a dei risultati tutti molto vicini e simili, che si trovano in accordo con i risultati sperimentali trovati da Kalthoff e Winkler; per quanto riguarda l'esperimento alle basse velocità di impatto del proiettile, simulato a $16.5m/s$ gli angoli di propagazione si avvicinano sempre al risultato sperimentale che prevede un angolo compreso tra i 65° e i 70° .

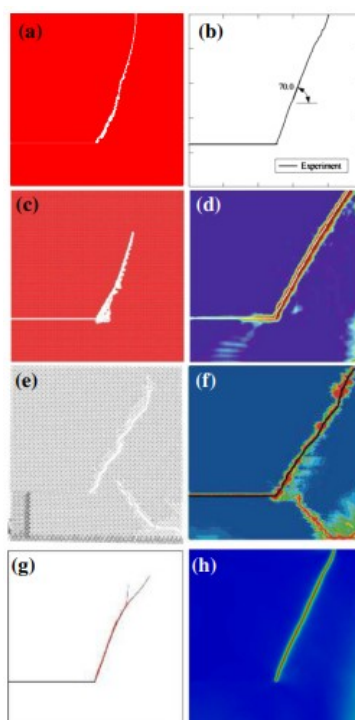


Figura 4.13: Percorso della cricca: a) MDM Braun et al. b) risultati sperimentali Kalthoff c) DM Braun et al. d) XFEM Song et al. e) DEM Koteski f) XFEM Belytschko g) PFM Hofacker et al. h) PFM Borden et al. Tratto da [7].

Una differenza sostanziale che salta all'occhio è la presenza nei modelli presentati da Koteski (e) e Belytschko (f) di una seconda cricca che parte dal lato opposto dove avviene l'impatto del proiettile e tende poi a propagare fino ad incontrare la cricca principale a causa delle onde riflesse; di questo fenomeno non sono presenti riferimenti nell'esperimento svolto fisicamente, e in alcuni casi questo fenomeno è stato eliminato andando a diminuire la mesh o la definizione del modello andando a discretizzare ulteriormente la zona di interesse. Per esempio Koteski [16] afferma che in un modello con mesh più fine e precisa la cricca secondaria è stata sostituita da una regione di danno diffuso, che può essere riconosciuta anche nel crack path fornito da Song et al. [27] vedi fig. 4.13.

velocità di propagazione

Per alcune simulazioni è stato possibile anche studiare la velocità di propagazione della cricca nel tempo, purtroppo non sono a disposizione dei dati sulla velocità sperimentale di propagazione della cricca, ma quello che è possibile fare è confrontare i risultati delle simulazioni con i vari metodi e vedere se effettivamente sono paragonabili. I risultati sono riportati in rapporto alla velocità di propagazione delle onde di Rayleigh che non può essere superata, ed è stata calcolata per il materiale in oggetto essere pari a 2799.2 m/s

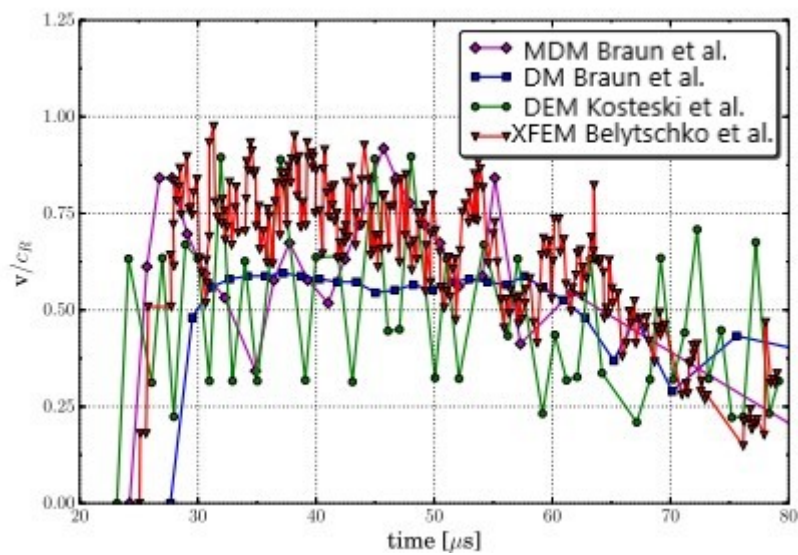


Figura 4.14: velocità di propagazione della cricca. Tratto da [7].

Capitolo 5

Analisi e Risultati

In questo capitolo verranno simulati i due esempi precedentemente illustrati per verificare la bontà del codice Matlab, e in seconda istanza verranno apportate le modifiche spiegate nel capitolo 3, per verificare il comportamento delle simulazioni al variare della legge costitutiva utilizzata e dei parametri di energia di frattura G_0 e ultimate strength σ_u .

5.1 Piastra sottoposta a trazione

L'esempio della piastra sottoposta ad un carico distribuito sul lato lungo della stessa, è stato riprodotto con la peridinamica, studiando una piastra di dimensioni 0.1 m x 0.04 m, con una cricca iniziale posta a metà dell'altezza e lunga metà della lunghezza totale. La simulazione è stata svolta come una simulazione peridinamica 2D plane stress, che meglio si adegua al tipo di carico a cui è sottoposta la piastra, poiché è un carico che giace sul piano della piastra stessa, vedi fig. 4.1.

Come già detto in precedenza il materiale usato per la simulazione è il Soda-lime glass, poiché è uno dei più utilizzati in letteratura per riprodurre questo esperimento e di cui si ha un set di risultati per il confronto molto ampio e dettagliato. Vengono di seguito riportati tutti i parametri nominali utilizzati in tutte le simulazioni, che caratterizzano il modello, e che non andranno a variare all'interno dello studio, se non il valore di G_0 che come detto è l'interesse della nostra prima parte di analisi.

Materiale	Densità [kg/m^3]	Modulo di Young [GPa]	Modulo di Poisson	Energia di frattura [J/m^2]	Ultimate strength [MPa]
Soda-Lime Glass	2440	72	1/3	135	80

La tensione applicata lungo i bordi superiori e inferiori della piastra è di 24 MPa, nell'approccio sperimentale il provino viene caricato in maniera graduale e il carico massimo si raggiunge dopo una decina di secondi [9]; tuttavia per ragioni di costi computazionali qui non è possibile utilizzare lo stesso approccio, per cui sarà necessario applicare tutto il carico fin dal primo istante temporale lungo le estremità superiore e inferiore della piastra.

Come già riferito nella sezione 2.9, è di primaria importanza la definizione di uno step temporale adeguato, per assicurare la convergenza delle simulazioni, si utilizza l'equazione 2.82, dove tuttavia in questo caso non si è considerato il fattore correttivo β_{safe} ma si è ridotto in maniera arbitraria in maniera da ottenere uno step che avesse dei multipli temporali di più facile interpretazione.

Dal momento che il passo di griglia più piccolo che si è deciso di usare è di $0.00025\ m$, facendo un rapido calcolo si ottiene un $\Delta t_c = 4.602 \cdot 10^{-8}\ s$, e quindi si è optato per uno step temporale di sicurezza pari a $\Delta t = 4 \cdot 10^{-8}\ s$ per tutte le simulazioni della piastra in trazione. Sono stati utilizzati dei passi di griglia variabili per permettere di fare una Delta-convergenza, ovvero mantenendo costante il valore di m-ratio, il rapporto tra orizzonte e passo di griglia, ma andando progressivamente a ridurre la grandezza dell'orizzonte (δ) e quindi di conseguenza anche il passo di griglia.

5.1.1 Delta-Convergenza modello lineare

Saranno effettuate quattro simulazioni con orizzonti via via più piccoli, e una volta raggiunta la convergenza nei risultati, per cui questi non dipenderanno più dal passo di griglia utilizzato, allora verrà preso l'ultimo modello come campione per tutte le simulazioni successive. La legge costitutiva utilizzata per questa prima convergenza è quella lineare, per cui dopo che il singolo bond raggiunge lo stretch critico s_0 esso si rompe completamente e non dà più contributo nel computo delle forze interne agenti tra i nodi.

Si ricordi come è necessario che il numero delle file sia un multiplo di 2 per garantire la simmetria del problema lungo un piano orizzontale passante per la metà della piastra, e per garantire che non siano presenti dei nodi dove si sviluppa la cricca iniziale, perché questo non sarebbe facile da trattare dal punto di vista del codice Matlab che vedrebbe eliminati dei nodi. I quattro orizzonti utilizzati sono:

- $h = 0.0032 \text{ m}$, con un passo di griglia $dx = 0.0008 \text{ m}$, così facendo si è ottenuto un modello con 6552 nodi disposti in 126 file di 52 nodi ciascuno, in questo caso il lato verticale è leggermente aumentato $b = 0.0408 \text{ m}$ per garantire la simmetria del problema;
- $h = 0.002 \text{ m}$, con un passo di griglia $dx = 0.0005 \text{ m}$, modello di 16482 nodi disposti in 82 file da 201 nodi ciascuno, con un lato $b = 0.0405 \text{ m}$;
- $h = 0.0016 \text{ m}$, con un passo di griglia $dx = 0.0004 \text{ m}$, modello con 25602 nodi, disposti in 102 file da 201 nodi ciascuna, con $b = 0.0404 \text{ m}$;
- $h = 0.001 \text{ m}$, con un passo di griglia $dx = 0.00025 \text{ m}$, modello di 64962 nodi disposti in 162 file da 401 nodi ciascuno, con un lato $b = 0.04025 \text{ m}$;

Tutte queste simulazioni sono state effettuate per 700 iterazioni in maniera tale da ottenere il crack path dopo $28 \mu\text{s}$.

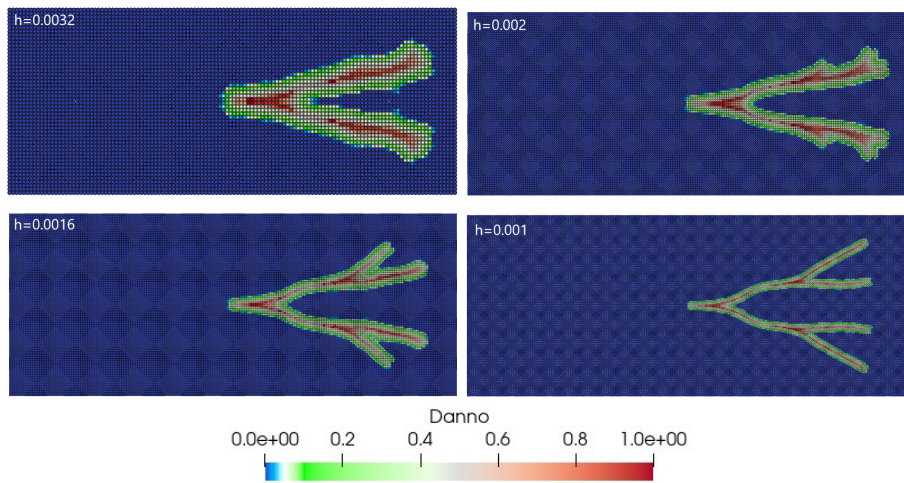


Figura 5.1: crack path dopo $28 \mu\text{s}$.

Facendo riferimento al problema sollevato da Ha nella sua pubblicazione [10], riguardo le asimmetrie nella soluzione dovute ad una definizione dei nodi e dei legami non simmetrica, si fa presente che in questo elaborato si sono usati dei sistemi di riferimento con origine nel vertice basso sinistro, che creavano problemi nei risultati nel documento sopra citato. È necessario ora andare quindi a vedere nel modello con passo di griglia più piccolo se questo ha introdotto degli errori. Andando a prendere il primo nodo in basso a sinistra (Nodo 1) e il nodo in alto a sinistra (Nodo 64562) che vista il carico applicato e la posizione simmetrica della cricca sono i nodi che dovrebbero subire uno spostamento maggiore lungo la direzione y , ma per simmetria lo spostamento dovrebbe essere uguale, si va a vedere lo spostamento di entrambi i nodi dopo $28 \mu s$:

- Nodo 1, spostamento in $y = -2.188447791715653 \cdot 10^{-4}$;
- Nodo 64562, spostamento in $y = 2.188447791715650 \cdot 10^{-4}$;

La differenza tra i due è dell'ordine di 10^{-19} , che è inferiore alla precisione di macchina, per cui un errore accettabile, ed è dunque verificata la precisione del modello anche se con origine del sistema di riferimento non simmetrica rispetto al problema. A maggior ragione può essere definito superato il problema legato alla definizione dei legami in maniera simmetrica, contrariamente a quello mostrato in fig. 4.6.

5.1.2 Modello bilineare

Qui viene introdotta la prima novità rispetto al modello da cui si partiva, ed è una legge costitutiva del materiale bilineare, per cui una volta che il legame raggiunge uno stretch s_u in cui esercita il massimo della pairwise force, non si rompe istantaneamente, ma la fase di danneggiamento è modellata come già ampiamente spiegato al capitolo 3 con un modello bilineare. Il parametro ulteriore che era necessario introdurre per questo modello era la tensione di ultimate strength, definita pari a 80 MPa prendendo un valore nell'intervallo proposto al sito [25], come già evidenziato nella tabella all'inizio della sezione 5.1 di questo elaborato.

Anche per questo caso sono state effettuate delle analisi con passi di griglia variabili a parità di energia di frattura G_0 per verificare che il passo di griglia non influenzi la soluzione trovata; anche il passo di integrazione e il numero di step sono mantenuti costanti, rispettivamente $\Delta t = 4 \cdot 10^{-8}$ s e 700 iterazioni.

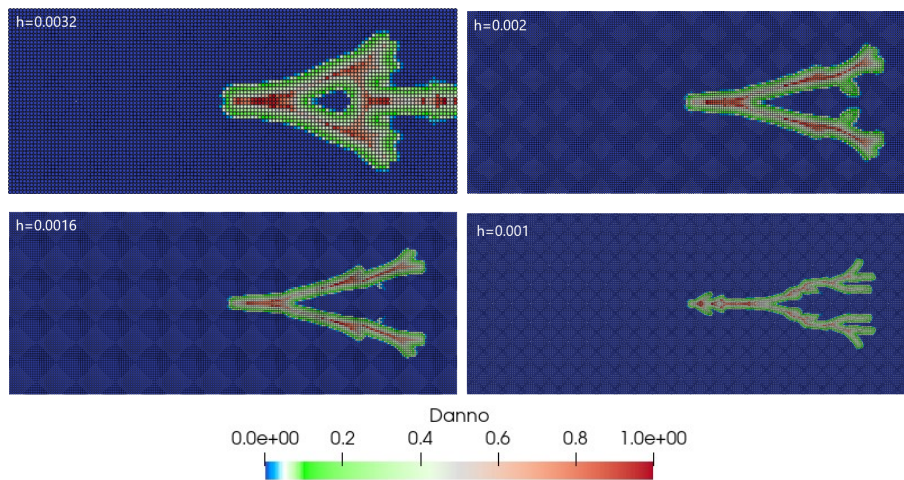


Figura 5.2: crack path dopo 28 μs .

Nella simulazione con orizzonte grossolano ($h=0.0032$ m) si può vedere che si sviluppa una cricca nel piano di simmetria orizzontale a partire dalla zona opposta a quella dove era presente in origine, vedi figura 5.3. Dal momento però che andando a diminuire il passo di griglia questo effetto sparisce è possibile imputare tale errore alla scarsa precisione del modello con il passo di griglia usato.

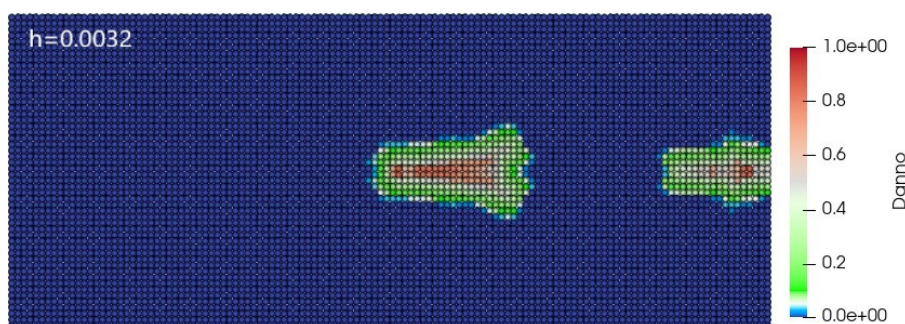


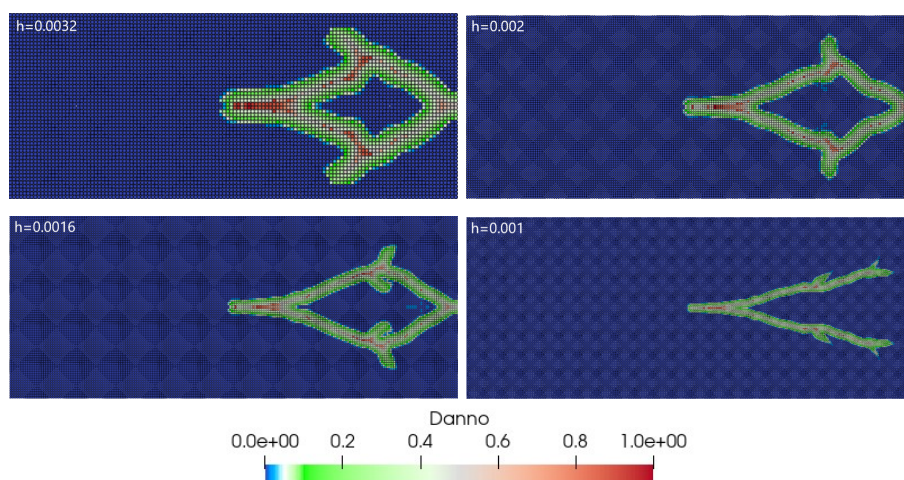
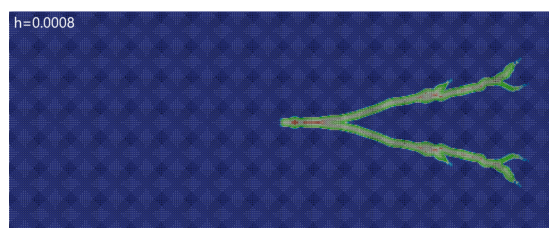
Figura 5.3: crack path dopo $14 \mu s$.

5.1.3 Modello trilineare

Anche per sviluppare questo modello sono state usate le formule trovate nel capitolo 3, ed è stato fatto lo stesso studio utilizzando i parametri temporali sopra citati per la simulazione.

Come si può vedere anche il caso con modello trilineare presenta delle anomalie legate alla cricca che si sviluppa opposta alla cricca preesistente, e con questo modello addirittura bisogna ridurre di molto il passo di griglia per ottenere una simulazione che non lo presenti, infatti l'unica che elimina tale effetto è la simulazione con orizzonte pari a $h = 0.001$ m. A questo punto però può venire il dubbio che essendo un primo modello a non presentare tale anomalia, in esso non sia ancora stata raggiunta la convergenza e il modello sia in qualche modo dipendente dal passo di griglia; per tale motivo è stata effettuata un'ulteriore simulazione con passo di griglia ridotto per verificare l'effettiva raggiunta convergenza. Si è scelto un modello con orizzonte $h = 0.0008$ m e passo di griglia $dx = 0.0002$ m.

Come si può facilmente vedere andando a ridurre il passo di griglia il risultato è rimasto pressoché uguale, e questo ci garantisce di aver raggiunto

Figura 5.4: crack path dopo 28 μs .Figura 5.5: crack path dopo 28 μs .

la convergenza per quanto riguarda la riduzione dell'orizzonte, e possiamo utilizzare questo modello per tutti gli studi successivi.

5.1.4 Confronto risultati con leggi costitutive diverse

Per verificare che i modelli costitutivi siano stati costruiti in maniera coerente con la teoria, è necessario andare a fare un confronto tra i risultati ottenuti con le diverse leggi e verificare se effettivamente per come è stato implementato il modello i risultati rispecchino quelli attesi.

Un primo confronto può essere fatto andando a vedere nelle simulazioni come un legame all'interno dell'orizzonte si è comportato al variare dello stretch e verificare se è stata verificata l'uguaglianza dell'energia di frattura tra i diversi modelli che è stato il punto di partenza per definire le diverse leggi costitutive. Considerando il modello con un orizzonte $h=0.001$, il nodo

origine scelto per lo studio della legge costitutiva è stato scelto il nodo 32687, nodo che si trova a metà della prima riga sopra la metà della cricca preesistente, e spostato a destra di 6 nodi (fig. 5.6), così facendo si ha la sicurezza di andare a considerare un legame tra due nodi non influenzati dalla presenza della cricca che può eliminare il legame (si noti che ci si è spostati a destra di un numero di nodi superiore all'm-ratio, ovvero il numero di ripetizioni di passo di griglia all'interno dell'orizzonte).

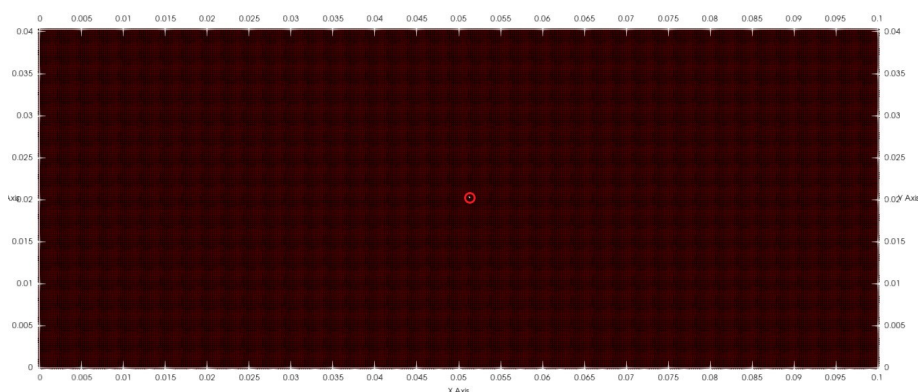


Figura 5.6: Posizione nodo 32687.

Per quanto riguarda l'esatto nodo con cui effettuare il legame, questa scelta è stata un po' più complicata perché non sempre a rompersi nelle diverse simulazioni era lo stesso legame, per cui è stato necessario effettuare una prima analisi in cui si simulava l'esperimento, e in post-processing andare a cercare un legame che giaceva completamente all'interno dell'orizzonte, e che allo stesso tempo subiva una completa rottura durante la simulazione. Una volta individuato tale legame si è reso necessario effettuare una nuova simulazione in cui si registrava ad ogni istante temporale l'intensità della pairwise force e alla fine valutarla in relazione allo stretch corrispondente.

Riportando su uno stesso grafico gli andamenti dei legami presi in considerazione nelle diverse simulazioni, è possibile vedere come già a vista d'occhio l'uguaglianza delle aree sotto le curve sembra verificata, vedi fig. 5.7; tuttavia per completezza è stata anche calcolata l'area attraverso uno script Matlab che va a calcolare una sommatoria di aree di trapezi che si formano tra due iterazioni successive, solamente se la seconda iterazione ha uno stretch superiore rispetto a tutte le iterazioni precedenti, così da non calcola-

re due volte l'area nel caso in cui ci fosse un rilassamento del legame (visibile per esempio nella legge trilineare) e poi un successivo stretch.

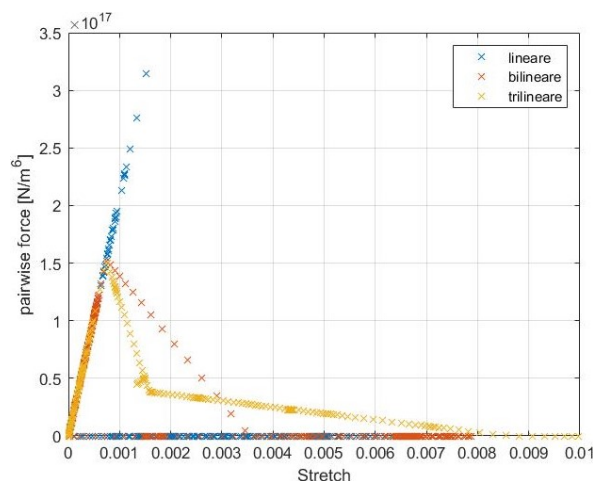


Figura 5.7: Leggi costitutive simulazioni, orizzonte $h=0.001$ m.

Infine questi valori trovati per le diverse leggi costitutive sono stati confrontati con il valore teorico ottenuto dal caso lineare che ha un'area totale sotto la curva che è un triangolo rettangolo, ed è dunque pari a $Area = base \cdot altezza/2$. L'altezza del triangolo è data dalla pairwise force, calcolabile come

$$f_{pw} = cs_0 \frac{dx^2}{\rho}, \text{ mentre la base è } s_0.$$

Riporto una tabella che descrive i risultati ottenuti con gli errori relativi per il caso con orizzonte pari a 0.001 m.

	Area [N/m^6]	Errore percentuale
teorico	2.700e+14	
lineare	2.8474e+14	5.46 %
bilineare	2.7432e+14	1.6 %
trilineare	2.8412e+14	5.22 %

L'errore più grande e che può mettere in dubbio il modello è quello sulla simulazione lineare, che risulta errato di più del 5% rispetto al risultato atteso. Andando ad analizzare dove possa sorgere questo problema si è potuto facilmente trovare che la differenza risiede nel fatto che il modello teorico lineare allo stretch s_0 , presenta contemporaneamente due valori di pairwise force: uno a legame completamente integro e uno di legame rotto

e forza nulla (discontinuità a salto). Nella simulazione invece la curva della legge costitutiva è realizzata in maniera discreta, per cui non ho alcuna certezza di aver raggiunto in un'iterazione lo stretch massimo s_0 , per cui la curva non riproduce fedelmente l'andamento teorico.

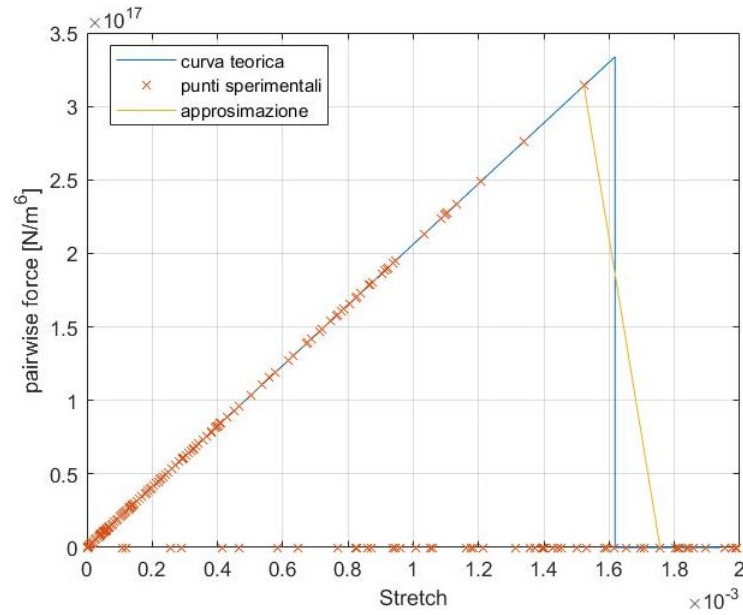


Figura 5.8: Approssimazione nel calcolo dell'area rispetto comportamento ideale.

Come si può vedere dalla fig.5.8 l'errore nel calcolo dell'area è rappresentato dalla differenza tra comportamento ideale (curva blu) e comportamento ottenuto con l'utilizzo della sommatoria come area di trapezi (curva gialla) collegando i punti del grafico alle varie iterazioni crescenti.

Questo errore influenza in qualche modo anche le altre simulazioni, che però ne risentono in maniera ridotta perché la differenza di forza tra due stretch consecutivi nei punti di discontinuità è molto ridotta, e questo limita l'errore commesso.

5.1.5 Confronto risultati al variare dell'energia di frattura

Come già spiegato nel capitolo precedente una volta effettuata la delta convergenza e trovato un modello rappresentativo con orizzonte $h=0.001$, si è reso possibile andare a modificare il valore dell'energia di frattura G_0 per fare in modo di vedere come vanno a modificarsi i risultati in dipendenza di questa grandezza.

Variando G_0 non sarà più possibile parlare di un materiale preciso, perché perderà le proprietà meccaniche dello stesso, ma si tratterà di un materiale fittizio. Sono stati scelti due valori di G_0 uno maggiore e uno inferiore a quello di default, per andare a vedere se si riconoscono dei comportamenti caratteristici. Un primo materiale fittizio è stato costruito con un $G_0 = 80J/m^2$, mentre un secondo materiale con $G_0 = 220J/m^2$. Con questi materiali sono state effettuate delle simulazioni per tutte e tre le leggi costitutive.

I risultati verranno riportati facendo un confronto diretto tra le tre simulazioni con uguale legge costitutiva, per poterne apprezzare delle peculiarità o differenze.

Modello lineare

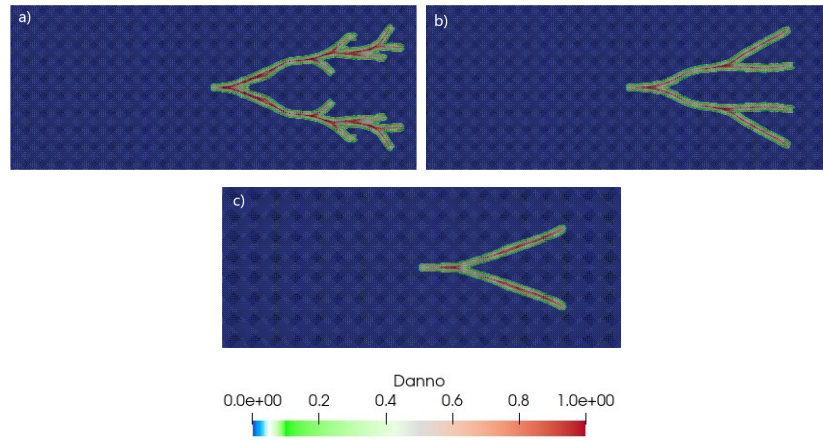


Figura 5.9: crack path dopo $28 \mu s$ con a) $G_0 = 80 J/m^2$ b) $G_0 = 135 J/m^2$ c) $G_0 = 220 J/m^2$.

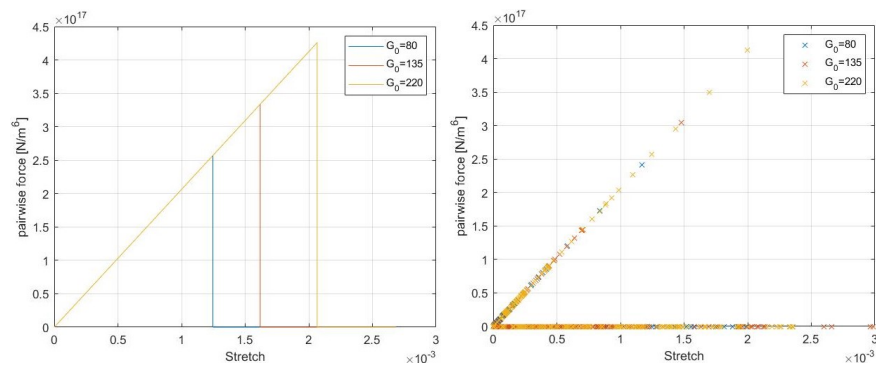


Figura 5.10: Legge Costitutiva teorica e ottenuta dalle simulazioni.

Modello bilineare

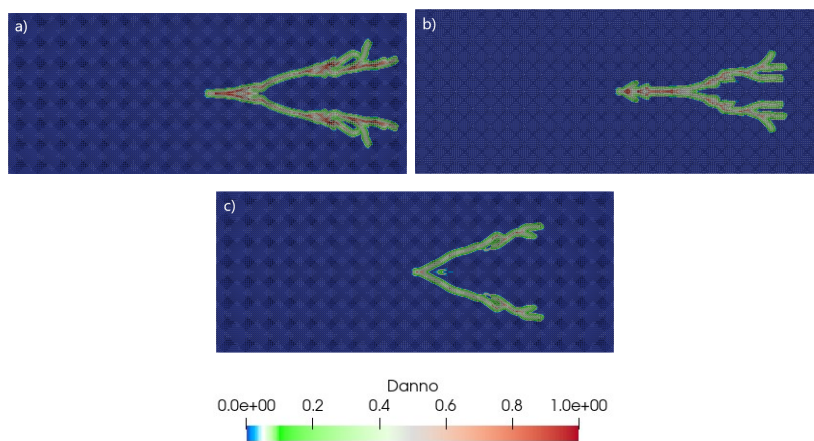


Figura 5.11: crack path dopo $28 \mu s$ con a) $G_0 = 80 J/m^2$ b) $G_0 = 135 J/m^2$ c) $G_0 = 220 J/m^2$.

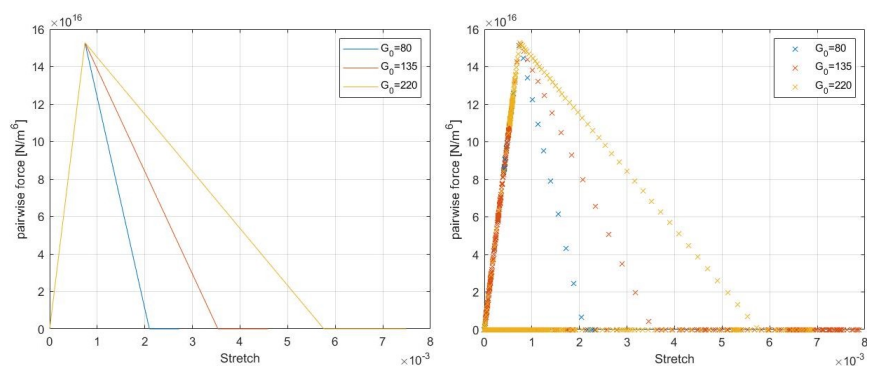


Figura 5.12: Legge Costitutiva teorica e ottenuta dalle simulazioni.

Modello trilineare

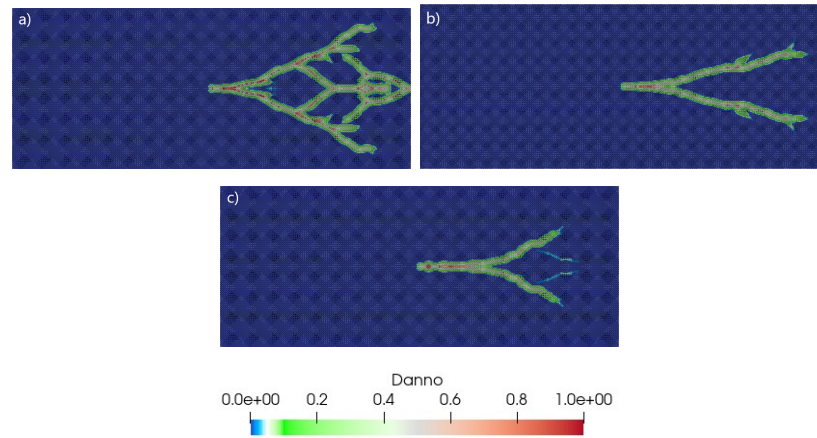


Figura 5.13: crack path dopo $28 \mu s$ con a) $G_0 = 80 J/m^2$ b) $G_0 = 135 J/m^2$ c) $G_0 = 220 J/m^2$.

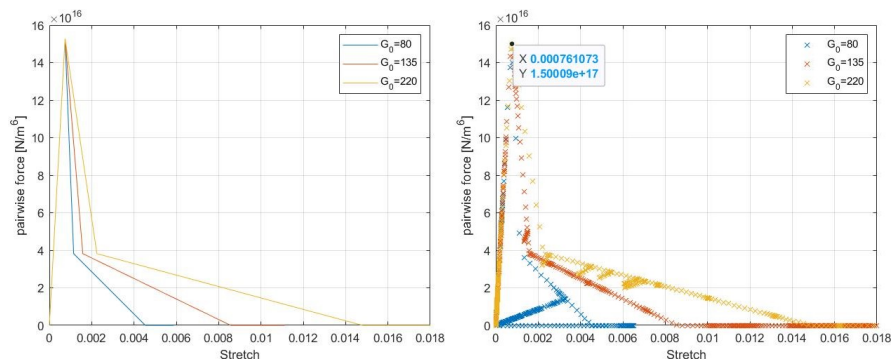


Figura 5.14: Legge Costitutiva teorica e ottenuta dalle simulazioni.

È interessante ora andare ad analizzare come sono legati G_0 e le leggi costitutive utilizzate da un punto di vista quantitativo. In particolare come si è visto la grandezza G_0 è stata utilizzata nelle leggi per andare a definire i punti di rottura delle leggi costitutive, andando ad associare l'energia di rottura G_0 al massimo stretch ottenibile s_0 , ed ha quindi influenza sulle aree sotto le curve costitutive. Se andiamo a calcolare come visto già nella tabella al paragrafo 5.1.4 l'area teorica e le aree ottenute con le simulazioni al variare delle energie di rottura possiamo trovare ciò che viene riassunto qui sotto.

	$G_0 = 80J/m^2$		$G_0 = 135J/m^2$		$G_0 = 220J/m^2$	
	Area [N/m^6]	Errore[%]	Area [N/m^6]	Errore[%]	Area [N/m^6]	Errore[%]
teorico	1.600e+14		2.700e+14		4.400e+14	
lineare	1.4649e+14	8.44	2.8474e+14	5.46	4.5976e+14	4.49
bilineare	1.6278e+14	1.74	2.7432e+14	1.6	4.4049e+14	0.11
trilineare	1.6284e+14	1.77	2.8412e+14	5.22	4.5452e+14	3.30

Osservazioni

- le simulazioni con energia di frattura più bassa tendono ad avere ovviamente una rottura di legami che avviene in anticipo, e questo permette di avere biforcazioni tanto più frequenti ;
- nel modello trilineare con energia di frattura pari a $80 J/m^2$ si presenta nuovamente la cricca che nasce dal lato opposto alla cricca iniziale, che biforca immediatamente, e in seguito si genera anche una cricca all'interno della piastra sempre lungo l'asse di simmetria orizzontale. La generazione di tutte queste cricche fa presumere che sarebbe necessario utilizzare un modello più preciso con passo di griglia inferiore, oppure più semplicemente il materiale fittizio con una legge trilineare è molto fragile e quindi sottoposto al carico esterno tende a frantumarsi anche all'interno, e non solo favorito dalla presenza di cricche che fungono da innesto;
- come atteso nei grafici rappresentativi delle leggi costitutive non lineari (bilineari e trilineari) al variare di G_0 non abbiamo alcuna variazione nel primo tratto del grafico in cui ad un aumento di stretch corrisponde un aumento di pairwise force, infatti il "punto di scollinamento" è lo stesso s_u . Tuttavia dopo tale punto al diminuire dell'energia di frattura il residuo di energia immagazzinata nel legame si riduce e quindi si arriva prima a rottura totale del legame (pairwise force nulla);
- Nel paragrafo 3.1.2 veniva introdotto un parametro arbitrario β che era dato come rapporto tra la forza al ginocchio della parte di danneggiamento e la forza di picco massima della trattazione trilineare, e veniva posto in maniera arbitraria pari a $1/4$. Dai grafici sopra riportati, fig. 5.14, è possibile andare a vedere che tale assunzione è verificata, infatti si ha una pairwise force di picco di $3.914 \cdot 10^6 m/s^2$ e una pairwise force al ginocchio di $9.784 \cdot 10^5 m/s^2$ e il rapporto che si ottiene è esattamente $1/4$;

- Nei grafici dei risultati delle simulazioni trilineari si possono notare delle fasi in cui il bond danneggiato ha dei ritorni verso l'origine degli assi, questo è rappresentativo di alcune iterazioni in cui lo stretch diminuisce e proprio come il nostro modello costitutivo è stato pensato ha un rilassamento su una retta diversa da quella di origine poiché quota parte della "rigidezza" del legame è andata perduta con il danneggiamento;
- Dalla tabella è possibile ricavare la seguente relazione $\frac{G_0(i)}{G_0(j)} = \frac{Area(i)}{Area(j)}$;
- Gli errori percentuali più evidenti si hanno sempre nella simulazione con legge costitutiva lineare, che come già detto in precedenza presenta un limite di ripetitività nel punto che presenta una discontinuità di prima specie "a salto".

5.2 Esperimento Kalthoff e Winkler

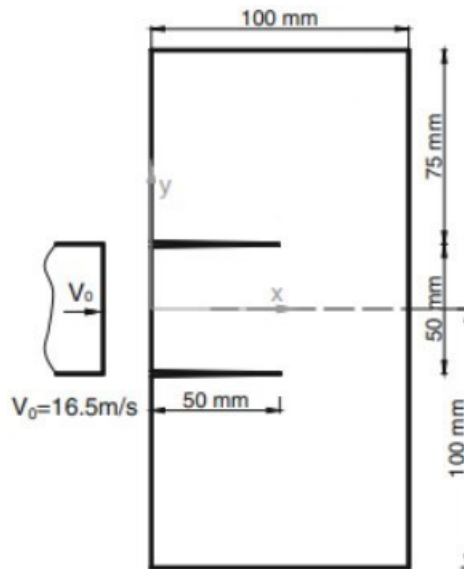


Figura 5.15: Dimensioni globali modello intero. Tratto da [16].

Partendo dal modello di base, fig. 5.15 la riproduzione dell'esperimento di Kalthoff e Winkler è avvenuta sfruttando la simmetria del problema rispetto ad un asse sul piano orizzontale; si è quindi andata a modellare solamente la metà superiore del sistema, assumendo che per la metà inferiore

i risultati siano simmetrici. Questa considerazione è stata fatta dopo aver visto che l'esempio precedente non aveva alcuno dei problemi di simmetria nella definizione dei nodi e dei bond tra di essi, come era invece stato presentato da Ha e Bobaru in [10], e poiché l'algoritmo utilizzato in Matlab per la costruzione e numerazione dei bond è lo stesso, si è ritenuto superfluo andare a simulare l'intero corpo, visti anche i costi computazionali elevati rispetto al problema della piastra sottoposta a trazione.

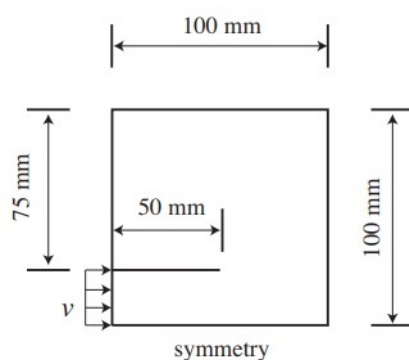


Figura 5.16: Dimensioni modello utilizzato nelle simulazioni sfruttando la simmetria. Tratto da [4].

La simulazione in questo caso è stata trattata come una 2D plane strain, come suggerito anche dalle simulazioni di altri autori, poiché l'assunzione di piastra sottile non è utilizzabile in un problema in cui si vuole simulare l'effetto di impatto di un proiettile.

Il materiale utilizzato come già presentato nella sezione 4.2 è un Maraging Steel 18Ni1900 come da dicitura tecnica, con le caratteristiche presentate precedentemente, tuttavia trattandosi di teoria peridinamica Bond-Based c'è stata una limitazione in termini di modulo di Poisson utilizzabile, che è vincolato nel caso plane strain ad essere pari a 0.25, contrariamente al valore proprio dell'acciaio in oggetto che è pari a 0.3. Di questi parametri quello che verrà fatto variare per studiarne la dipendenza è l'Ultimate strength, ovvero quella proprietà che incide principalmente nel trovare lo stretch per cui si ha la massima pairwise force e dopo cui il bond tende a degradare.

Materiale	Densità [kg/m^3]	Modulo di Young [GPa]	Modulo di Poisson	Energia di frattura [J/m^2]	Ultimate strength [MPa]
Maraging Steel 18Ni1900	8000	190	1/4	22170	844

Per riprodurre le simmetrie del problema sono state applicate delle condizioni ai nodi. Tutti i nodi ad una distanza dallo spigolo inferiore minore o uguale all'orizzonte sono stati vincolati ad avere solo spostamenti lungo l'asse x , poiché uno spostamento y verso l'alto avrebbe significato nella simulazione completa una separazione di materiale lungo l'asse di simmetria, mentre uno spostamento in y verso il basso significava una compenetrazione di materiale.

Il carico esterno deve simulare un proiettile che colpisce il lato sinistro della struttura nella zona che è possibile vedere dalla fig. 5.16, quindi si è optato per dare un carico in termini di velocità imposta ai nodi ad una profondità pari all'orizzonte rispetto al lato di impatto. Tutti questi nodi a cui è stato applicato il carico sono stati anche vincolati tramite codice Matlab a non poter subire danno, perché altrimenti risulterebbe falsata poi la direzione di applicazione della velocità delle condizioni iniziali. Tuttavia è richiesto poi a colui che legge i risultati valutare se questi hanno senso, e capire se questa assunzione imposta ha influenzato i risultati, cosa che vedremo non avviene.

Il carico esterno non è stato applicato in maniera impulsiva subito pari a $v_0 = 16.5 \text{ m/s}$ alla prima iterazione, ma è stato applicato un carico "a rampa" ovvero è stato fatto variare in maniera lineare da 0 al valore finale v_0 in un intervallo pari a $1 \mu\text{s}$ e poi mantenuto costante per il resto della simulazione come si vede in fig. 5.17.

Tenendo conto che negli studi preparatori si era previsto di utilizzare come passo di griglia più piccolo in queste simulazioni un passo di 0.0005, lo step temporale di conseguenza utilizzabile in questo caso secondo la semplice equazione 2.82 doveva essere inferiore a $1.025 \cdot 10^{-7} \text{ s}$, tuttavia è stato preso più piccolo, e pari a $1.25 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, poiché era lo step temporale utilizzato da Borden in [4], e quindi si è deciso di mantenere tale valore, che gli autori avevano trovato utilizzando un metodo alternativo che utilizza una teoria diversa. Se in un secondo momento si fosse reso necessario diminuire il passo di griglia si sarebbe tornati a verificare se anche lo step temporale fosse adeguato. Per ottenere uno studio per un tempo di $87 \mu\text{s}$, sono state impiegate 6960 iterazioni.

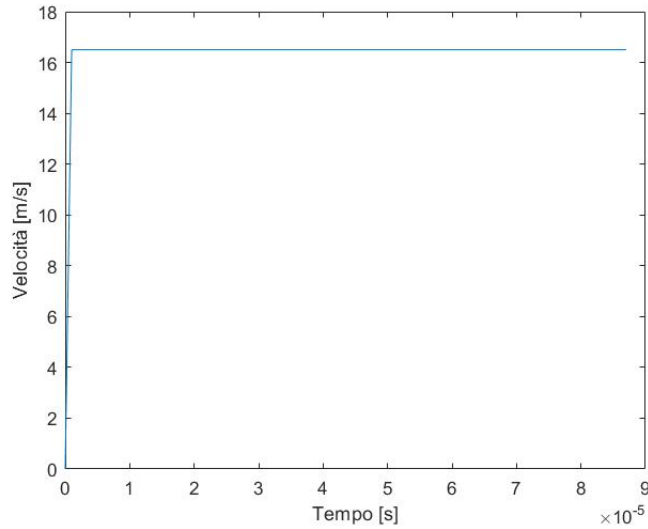


Figura 5.17: Velocità iniziale imposta ai nodi.

5.2.1 Delta-convergenza modello lineare

Come già visto per l'esempio precedente si parte l'analisi con una delta convergenza, per testare il comportamento dei risultati al variare dell'orizzonte, poiché è necessario che il passo di griglia non sia una variabile che influenza i risultati. In questo caso per ogni modello sono stati riportati 3 diversi valori di orizzonte via via più piccolo poiché le variazioni sui risultati risultano già poco dipendenti dall'orizzonte. I tre orizzonti utilizzati sono:

- $h = 0.004 \text{ m}$, con un passo di griglia $dx = 0.001 \text{ m}$, ottenendo un modello di 10201 nodi disposti in 101 file di 101 nodi (si noti che il modello che si va a simulare è quadrato per la simmetria del modello totale, quindi il numero di colonne è uguale al numero di righe). Tuttavia è stato necessario fare attenzione alla posizione della cricca che con alcuni orizzonti scelti finiva per non cadere a metà tra due righe di nodi, e quindi la posizione è stata di volta in volta leggermente corretta;
- $h = 0.0032 \text{ m}$, con un passo di griglia $dx = 0.0008 \text{ m}$, ottenendo un modello di 15876 nodi disposti in 126 file di 126 nodi;
- $h = 0.002 \text{ m}$, con un passo di griglia $dx = 0.0005 \text{ m}$, ottenendo un modello di 40401 nodi disposti in 201 file di 201 nodi.

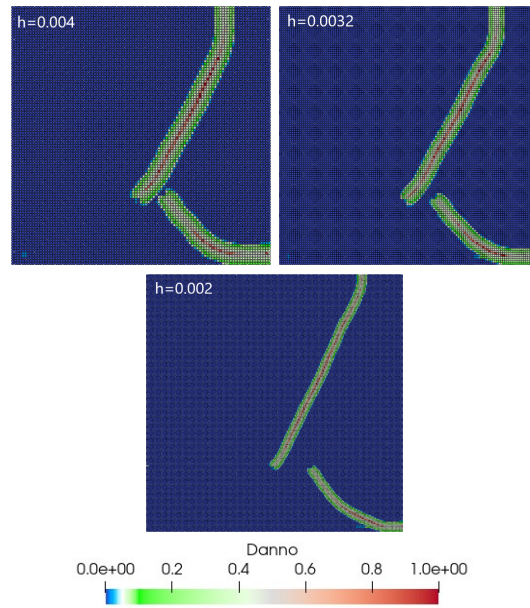


Figura 5.18: crack path dopo $87 \mu s$.

L'angolo che formano queste cricche con l'orizzontale secondo gli esperimenti di Kalthoff si attesta intorno ai 70° , o leggermente meno. Nelle simulazioni effettuate qui sono stati rilevati:

- angolo per $h = 0.004 m$ tra i 62° ;
- angolo per $h = 0.032 m$ tra i 61° ;
- angolo per $h = 0.002 m$ tra i 66° .

Tutte le simulazioni sottostimano l'angolo di cricca principale, ma come si può vedere i risultati non variano molto e le forme assunte dalle cricche sono molto simili e si possono quasi sovrapporre, se non che andando a passi di griglia più piccoli la zona interessata da cricca risulta più stretta. Proprio per questa ragione, e per i costi computazionali molto elevati si è ritenuto utilizzare un orizzonte di $h = 0.0032 m$, con $m - ratio = 4$ e quindi un passo di griglia $dx = 0.0008 m$ anche per le simulazioni successive.

Velocità di propagazione

Dal momento che erano a disposizione le velocità di propagazione delle cricche per altri metodi di simulazione, è stato possibile per la simulazione con

orizzonte di $h = 0.002 \text{ m}$ andare a calcolare la velocità di propagazione nel modello dell'elaborato, e confrontarla con i profili altrui.

Per calcolare tale velocità si è deciso di andare a cercare la posizione degli ultimi legami ad essersi rotti ad intervalli regolari, ma diversi dagli step interattivi, poiché il grafico sarebbe stato di difficile lettura se si ammette che in alcuni step iterativi nessun legame si sarebbe rotto, e quindi in quel preciso step la velocità di propagazione sarebbe stata nulla, ottenendo dunque un grafico di continue alternanze di velocità nulle e velocità positive.

Oltre questo problema ad essere influente sarebbe stato anche il fatto che le nostre sono simulazioni discretizzate nel tempo e nello spazio, quindi la velocità di propagazione, calcolata come *spazio/tempo* risulta fortemente influenzata dai valori utilizzati, e quindi considerando la posizione della punta tra due iterazioni questa varia in maniera discreta, e non continua come nella realtà, introducendo un errore sulla velocità calcolata; ci si attende infatti che la velocità non superi mai quella di propagazione delle onde di Rayleigh, come le teorie precedenti già verificavano, cosa che tale approccio rischia di non soddisfare.

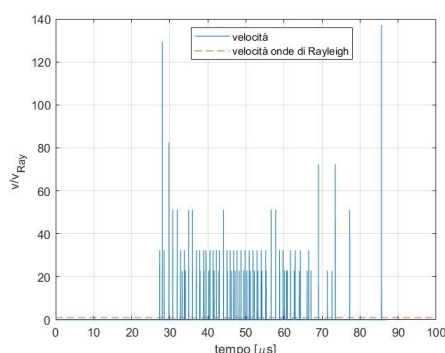


Figura 5.19: profilo velocità propagazione cricca calcolata ad ogni step temporale.

Un altro errore di approssimazione che si commette nel primo step temporale in cui avviene la prima propagazione di cricca, è che il codice Matlab calcola la distanza tra 2 nodi come distanza tra propagazione di cricche, ma in prima iterazione la cricca sta in uno spazio compreso tra due nodi, per cui la prima volta in cui la velocità è diversa da zero si può presentare un dato anomalo di velocità di propagazione in rapporto alla velocità di Rayleigh maggiore di 1.

Per completezza è stato riportato come sarebbe stato il grafico della velocità di propagazione andando a calcolare la velocità ad ogni step iterativo, dove sono presenti i problemi sottolineati in precedenza, fig. 5.19.

Come si vede la comprensione è complicata e presenta errori, si passa dunque al campionamento ad intervalli regolari ogni 200 iterazioni della simulazione, ovvero ogni $2.5e - 6$ s.

Negli step prestabiliti, la velocità di propagazione della cricca veniva calcolata andando a trovare la posizione della punta della cricca in quello step iterativo, e poi riprendendo la posizione all'intervallo precedente si calcolava la distanza percorsa dalla cricca e la si divideva per l'intervallo di tempo trascorso tra i due campionamenti.

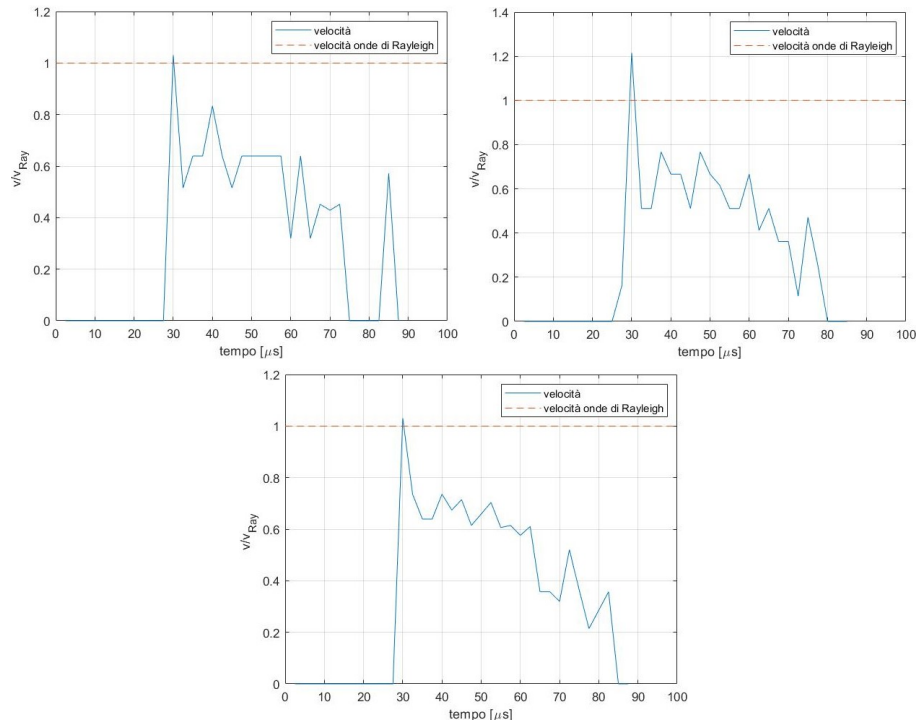


Figura 5.20: profilo velocità propagazione cricca calcolata ogni 200 step temporali, ovvero $2.5 \cdot 10^{-6}$ s con orizzonte rispettivamente di: 0.004 m, 0.0032 m, 0.002 m .

Come si può vedere in questo caso l'andamento è un po' più comprensibile e corretto, sebbene sia sempre presente un acuto iniziale in cui il rapporto supera il valore unitario, ovvero la velocità di propagazione supera quella di Rayleigh; tuttavia se si andasse a ridurre ulteriormente l'intervallo tra due acquisizioni anche questa punta verrebbe eliminata, però si avrebbero un numero di acquisizioni troppo basso, e quindi si è preferito tenere questo intervallo, accettando l'errore iniziale, dovuto alle motivazioni sopracitate. Confrontando inoltre con le altre simulazioni con altri modelli presentati in fig. 4.14 alla fine del paragrafo 4.2, possiamo vedere come nella simulazione di questo elaborato la cricca inizi a propagare a circa $27.5 \mu s$, in perfetto accordo con tutti i risultati delle altre teorie, e segua un andamento molto simile.

5.2.2 Modello bilineare

Anche per questo modello è stata effettuata una delta convergenza, per verificare il comportamento delle cricche al variare dell'orizzonte e del passo di griglia. In questo secondo caso la ultimate strength non è stata scelta in maniera arbitraria, ma è stata recuperata dai documenti di altri autori, come Huespe et al. [13], oppure Kosteski et al. [16] pari a $\sigma_u = 844 \text{ MPa}$.

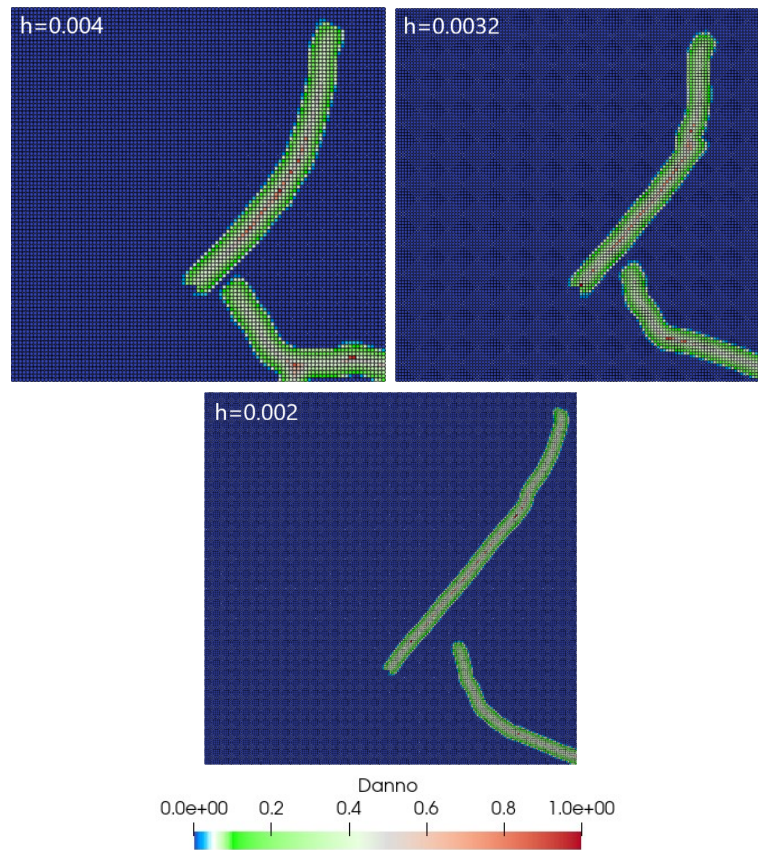


Figura 5.21: crack path dopo $87 \mu s$.

5.2.3 Modello trilineare

Per il modello trilineare la teoria è già stata completamente presentata, quindi ci si limita a riportare i risultati ottenuti.

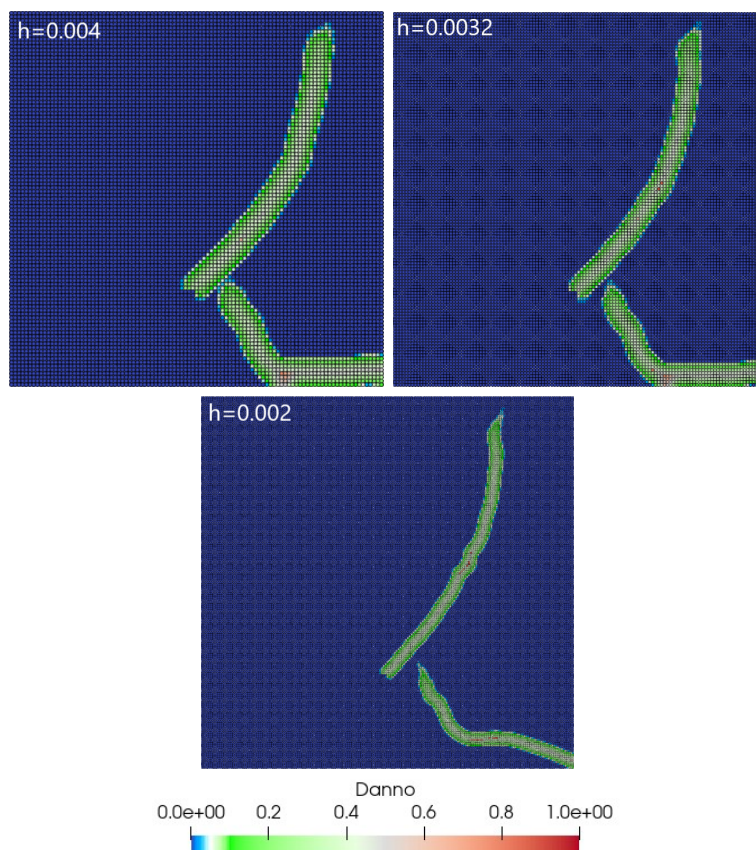


Figura 5.22: crack path dopo $87 \mu s$.

Come si può vedere tutti i modelli riportano i problemi legati alla cricca secondaria che si viene a formare opposta alla cricca primaria, anche riducendo il passo di griglia il problema non accenna a ridursi ed eliminarsi.

Come già scritto nel paragrafo 4.2.2, di questo fenomeno si trova riscontro in molte simulazioni con teorie diverse, in alcune riducendo la mesh si risolve, mentre in altri non si risolve e al massimo viene sostituito da una zona di danneggiamento diffuso, tuttavia l'esperimento stesso è stato eseguito una sola volta da Kalthoff e quindi non c'è alcuna evidenza abbastanza consolidata da definire questo come un errore della simulazione, ma è probabile sia causa di un problema di natura altamente instabile.

Anche il modello trilineare sembra aver già raggiunto la convergenza al diminuire dell'orizzonte, infatti non si notano grandi cambiamenti nel crack path, quindi per il resto delle simulazioni con questo modello si procederà ad utilizzare un orizzonte di 0.0032 m .

5.2.4 Confronto risultati con leggi costitutive diverse

Per quanto riguarda lo studio del confronto tra leggi costitutive diverse è stato effettuato uno studio simile a quanto già fatto precedentemente per l'altro esempio, con risultati ottenuti che confermano la bontà dei modelli non lineari costruiti, infatti utilizzando sempre come indicatore l'area sotto la curva di pairwise force al variare dello stretch del bond, i risultati sono quelli attesi, con un errore maggiore sempre nel modello lineare dovuto come già detto alla discretizzazione del problema dal punto di vista temporale.

	Area [N/m^6]	Errore percentuale
teorico	4.2286e+14	
lineare	4.4354e+14	4.891 %
bilineare	4.2286e+14	0.0014 %
trilineare	4.2289e+14	0.007 %

In questo caso gli errori nei modelli non lineari sono ancora più contenuti, quasi da essere nulli, questo probabilmente è dovuto al fatto che in questa simulazione si è utilizzato un passo di integrazione temporale molto più piccolo, quindi tra due step temporali la variazione di stretch è più contenuta e ciò permette di meglio seguire la legge con cui è definito il modello, avvicinandosi al comportamento continuo reale del fenomeno.

Per quanto riguarda le velocità di propagazione della cricca, utilizzando le leggi costitutive bilineare e trilineare, come si può vedere in 5.23 il comportamento è anomalo e in entrambi si supera anche di molto la velocità di propagazione delle onde di Rayleigh, tuttavia è molto probabile che prendere quella velocità come riferimento non sia corretto, in quanto il materiale ha cambiato comportamento.

Ciò che però è importante sottolineare è che la cricca, utilizzando leggi costitutive che a parità di energia di frattura tardano la rottura completa del legame, tende a propagare più tardi, e nel caso estremo della legge trilineare ha una prima fase in cui propaga velocemente tra i $50\mu s$ e i $60\mu s$ e

poi si arresta nuovamente e rallenta. Questo comportamento probabilmente è dovuto al fatto che i legami tendono a danneggiarsi, ma non rompersi completamente, e una volta che un primo legame si rompe gli altri legami del nodo tendono a velocizzare la loro rottura, e quindi ecco che si spiega la rottura contemporanea di molti legami in un breve lasso temporale, che fa propagare la cricca velocemente.

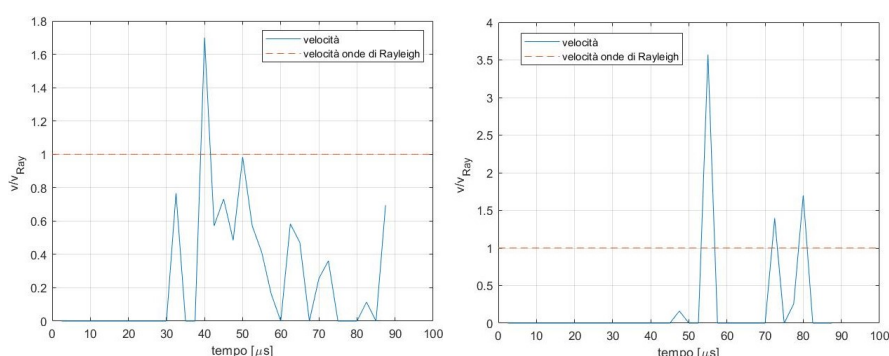


Figura 5.23: Velocità di propagazione della cricca con leggi costitutive: bilineare a sinistra e trilineare a destra.

5.2.5 Confronto risultati al variare della Ultimate Strength del materiale

A questo punto, dopo aver verificato che i modelli ben rappresentavano il problema, è possibile passare alla seconda parte delle analisi per l'esperimento di Kalthoff, ovvero quello di far variare la Ultimate Strength associata al materiale per vedere come si comporta.

C'è da tenere in considerazione che la grandezza del materiale σ_u è utilizzata nel modello per definire il punto in cui avviene l'inizio del danneggiamento, ed è quindi utilizzato solamente nei casi bilineari e trilineari, non andando in alcun modo a variare i risultati ottenuti nei casi lineari, che per questo non verranno simulati.

Sono stati scelti tre diversi valori di σ_u : oltre al valore predefinito di 844 MPa già utilizzato, si è scelto in maniera arbitraria di dimezzare tale valore, andando a fare una simulazione a 422 MPa , e raddoppiare tale valore, simulando a 1688 MPa .

Modello Bilineare

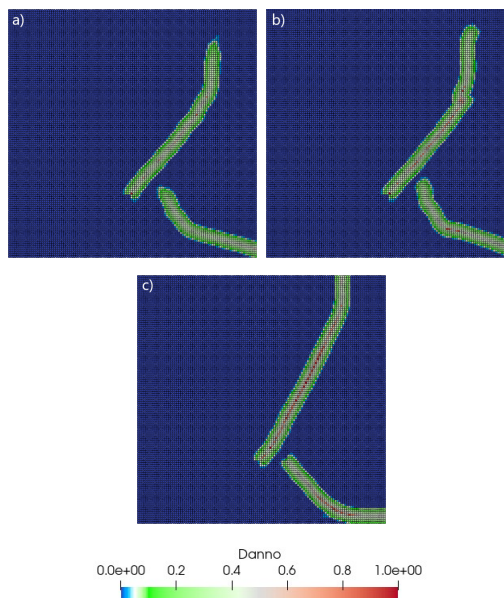


Figura 5.24: crack path dopo $87 \mu s$ con a) $\sigma_u = 422 \text{ MPa}$ b) $\sigma_u = 844 \text{ MPa}$ c) $\sigma_u = 1688 \text{ MPa}$.

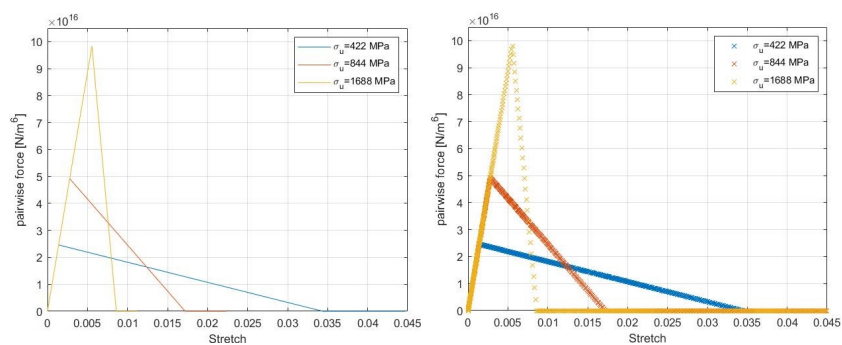


Figura 5.25: Legge Costitutiva teorica e ottenuta dalle simulazioni.

Modello Trilineare

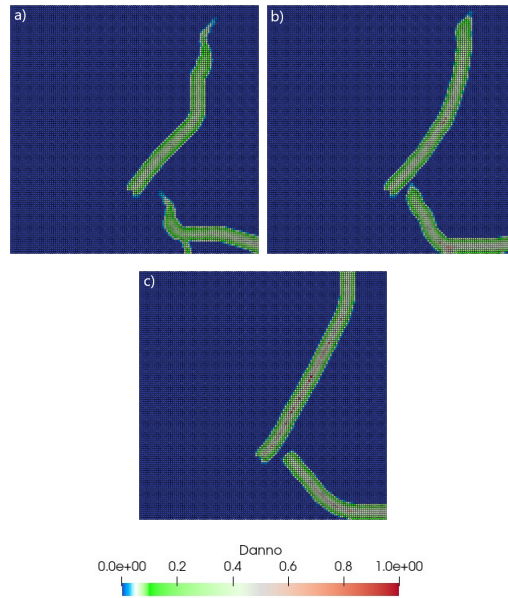


Figura 5.26: crack path dopo $87 \mu s$ con a) $\sigma_u = 422 \text{ MPa}$ b) $\sigma_u = 844 \text{ MPa}$ c) $\sigma_u = 1688 \text{ MPa}$.

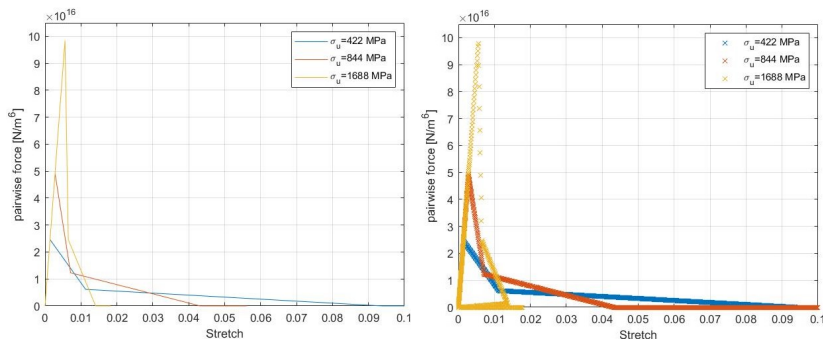


Figura 5.27: Legge Costitutiva teorica e ottenuta dalle simulazioni.

In tutte queste simulazioni il parametro G_0 è stato mantenuto costante, per cui ci si aspetta che l'area di tutte le simulazioni non abbia subito variazioni, ma a variare sia come essa è distribuita sotto le curve.

	$\sigma_u = 422MPa$		$\sigma_u = 844MPa$		$\sigma_u = 1688 MPa$	
	Area [N/m^6]	Errore[%]	Area [N/m^6]	Errore[%]	Area [N/m^6]	Errore[%]
teorico	*		4.2286e+14		*	
lineare	*		4.4354e+14	4.891	*	
bilineare	4.2288e+14	0.004	4.2286e+14	0.0014	4.2287e+14	0.002
trilineare	4.2287e+14	0.003	4.2289e+14	0.007	4.2301e+14	0.036

Nella tabella le caselle con gli asterischi indicano delle simulazioni che non sono state svolte poiché non avrebbero rappresentato nulla di diverso di quanto già fatto con il modello di partenza utilizzando il materiale "Maraging Steel 18Ni1900", e come si può vedere le aspettative sono state soddisfatte, in quanto le aree sotto le curve si mantengono pressoché costanti.

Osservazioni

- In questo secondo esempio di simulazioni si nota come in realtà la propagazione di cricca poco è influenzata dalle variazioni di leggi costitutive o dalla variazione di grandezze fisiche del materiale, in quanto la cricca ha un comportamento sempre molto simile e si sviluppa sempre con un angolazione quasi costante;
- Un aumento di σ_u , tensione ultima, porta ad un incremento di s_u , ovvero lo stretch per cui il bond inizia a danneggiarsi, ma poi per soddisfare il fatto che G_0 si mantiene costante, il danneggiamento è più repentino e si ottiene un s_0 di rottura totale inferiore;
- Variando σ_u è ovvio che la pairwise force massima calcolata come $c \cdot \cdot \cdot u$ debba variare, per cui anche i valori di f_2 che sono legati dal parametro arbitrario $\beta = 0.25$ alla condizione $f_u(i) = 4 \cdot f_2(i)$ devono adattarsi.
- Per tensioni ultime molto elevate il primo tratto di danneggiamento è praticamente verticale, questo mi ha portato a chiedermi se c'è un limite superiore ai valori che si possono assegnare a σ_u perché sia soddisfatta la condizione per la legge trilineare con $s_2 > s_u$, e ho trovato

una relazione:

$$\sigma_u < \sqrt{\frac{2\pi G_0}{3h(1+\beta\gamma)} \frac{8E}{5 \left(1 - \frac{\beta\gamma}{1+\beta\gamma}\right)}}$$

che nel nostro caso risulta essere pari a 2100.6 MPa, ma come si può notare è dipendente dall'orizzonte, che è un parametro arbitrario della simulazione, tanto più piccolo è l'orizzonte tanto maggiore sarà la tensione ultima associabile al materiale;

- Al diminuire di σ_u il secondo tratto di danneggiamento ha una pendenza molto più soft e questo fa avvicinare il rapporto $\frac{s_0}{s_2}$ al valore di $\gamma = 28/3$ che è come sarebbe definito idealmente.

Capitolo 6

Conclusioni

Nell'elaborato ci si era posti l'obiettivo in prima battuta di replicare con la teoria peridinamica quanto meglio degli esperimenti svolti fisicamente, e successivamente di andare a modificare le leggi costitutive e alcuni parametri che le caratterizzano e vedere come questo aveva effetti sui risultati e sulla propagazione di cricche.

Per quanto riguarda il replicare gli esperimenti non c'è stato alcun problema, si è riusciti nell'obiettivo, la criticità più grande è stata legata all'esperimento di Kalthoff, in cui il blocco veniva colpito da un proiettile, infatti nello spigolo opposto a quello di impatto dalle simulazione insorge la generazione di una cricca che dai risultati sperimentali non prevedono, tuttavia come già ampiamente descritto questo non è un fenomeno isolato, dal momento che altri autori con altre teorie si sono ritrovati in questa cricca che si viene a generare, e si è arrivati alla conclusione che probabilmente i risultati su un singolo provino non siano abbastanza esaustivi per definire "errato" il risultato da noi trovato, e sarebbe necessario effettuare analisi ulteriori del problema.

Una volta verificata la bontà dei modelli è stato possibile utilizzare delle leggi costitutive bilineari e trilineari, e anche qui i risultati hanno seguito le attese, e i modelli hanno perfettamente seguito le nuove leggi. Come si può vedere il percorso delle cricche è variato notevolmente a parità di passo di griglia e a parità di energia di frattura, infatti le leggi bilineari e trilineari prevedono un inizio danneggiamento dei legami già ad allungamenti inferiori rispetto al caso lineare, salvo poi che prima di raggiungere rottura hanno uno stretch maggiore. Una particolarità che si può notare nei risultati non

lineari della piastra in trazione, è come questo danneggiamento anticipato provochi un gran numero di innesti di nuove cricche secondarie a partire dalla primaria, dopo che questa ha biforcato una prima volta, ma poi queste cricche non si sviluppano per lunghi tratti, ma si arrestano quasi immediatamente.

Andando a variare l'energia di frattura si è potuto constatare come questa abbia una grande influenza sul percorso di cricca, infatti ad una energia di rottura inferiore si associa una forte tendenza della cricca a ramificare in tante piccole cricche oltre ad una cricca principale che si riesce sempre a riconoscere. Questo riguarda un po' tutte le leggi costitutive utilizzate, la particolarità della legge trilineare nel caso di energia di rottura più bassa, $G_0 = 80 \text{ J/m}^2$ è che nel lato opposto a quello dove c'era la cricca in origine viene a svilupparsi dal nulla una cricca nuova che poi si sviluppa e incontra la cricca preesistente ad un certo punto portando ad una separazione completa del provino in due metà perfettamente simmetriche, questo è dovuto probabilmente al fatto che il carico applicato è troppo grande per l'energia di frattura del materiale, per cui si innesta una cricca. Nelle leggi non lineari inoltre è ben evidente come la variazione di energia di frattura non vada in alcun modo ad influenzare la prima parte delle legge, in cui il legame non è danneggiato, dal momento che nella definizione di s_u non rientra l'energia di frattura.

Nel modello che riproduceva l'esperimento di Kalthoff e Winkler invece si è andati a modificare l'ultimate strength ovvero la forza per unità d'area associata all'inizio di danneggiamento delle leggi bilineari e trilineari; dal momento che non interveniva in alcun modo nella definizione della legge costitutiva lineare le simulazioni per essa non sono state effettuate, ma per le altre due leggi i risultati hanno avuto degli effetti non tanto dal punto di vista "estetico" della forma della cricca che in questo esempio non risultava particolarmente condizionata, in quanto la cricca propaga sempre ad un'angolazione molto simile, quanto più dal punto di vista di costruzione della legge costitutiva andando a vedere come si comportava un legame al variare degli allungamenti. Si è infatti messo in luce come la legge trilineare prevedesse l'utilizzo di due parametri scelti arbitrariamente, e mentre il parametro β per come era stato definito veniva ben riprodotto dai risultati, si era notato che γ invece non veniva ben riprodotto se non a patto di scendere a passi di griglia e orizzonti molto piccoli che però avrebbero richiesto tempi non proibibili di simulazione. Tuttavia si è visto come per ultimate strength più

piccole ci si avvicini ad un comportamento di γ in linea con le aspettative, infatti il rapporto $\frac{s_0}{s_2}$ si avvicina a quel valore arbitrario di $\gamma = \frac{28}{3}$ assegnato.

Uno sviluppo futuro potrebbe essere legato all'utilizzo di leggi costitutive ancora più complesse per adattarsi a tutti i tipi di materiale, tenendo come base per la determinazione dei punti notevoli l'energia di frattura che ha un ruolo centrale, ma ammettendo anche delle curve con equazioni diverse da quelle di una linea spezzata, oppure uno sviluppo sarebbe quello di andare a rifare degli studi simili anche per la teoria state based, che è più generale e quindi si presta meglio a descrivere il comportamento di materiali generici, con comportamenti differenti da quello di semplice legge costitutiva composta da una linea spezzata.

Appendice A

Schema script Matlab

In questa appendice viene rappresentato come è stato sviluppato lo script Matlab per le simulazioni degli esperimenti, lo schema descrive tutti i passaggi utilizzati, dalla definizione dei parametri esterni che replicano quelli utilizzati dall'esperimento originale, alla definizione di alcuni parametri del modello peridynamico utilizzato, come step size di iterazione e passo di griglia tra due nodi. Il metodo di risoluzione come già detto utilizza un metodo di integrazione esplicito Velocity-Verlet che è molto pratico se viene verificata la condizione di stabilità introdotta nel paragrafo di interesse "Discretizzazione temporale". Nello schema sono presenti anche dei blocchi in cui il percorso da seguire varia in base al passo integrativo, infatti ad intervalli regolari si è deciso di creare un documento con estensione .vtk da utilizzare in Paraview per la visualizzazione dei risultati.

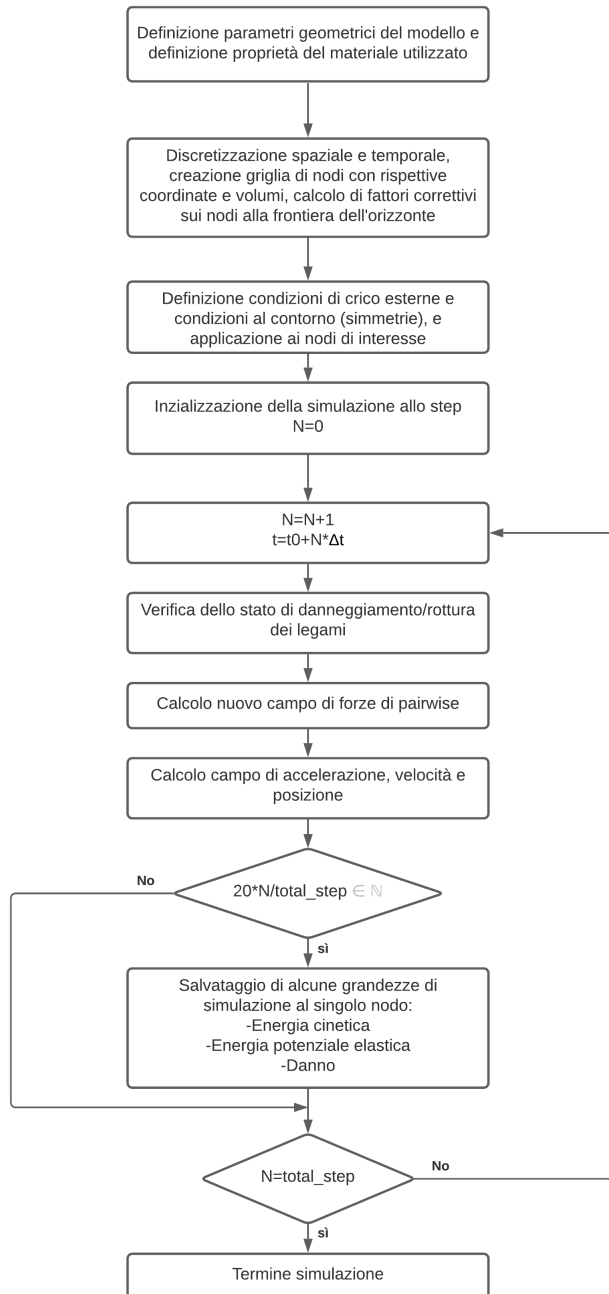


Figura A.1: Schema di riassunto delle simulazioni in Matlab.

Appendice B

Script creazione file con estensione .vtk

Vista la difficoltà incontrata per la produzione dei file con estensione .vtk in Matlab utili per la visualizzazione dei risultati in Paraview, e vista anche la scarsità di documenti nell'argomento reperibili in rete riporto uno script Matlab scritto da me che permette di generare file che poi Paraview è in grado di leggere. Con questo file è possibile generare un file con una griglia di punti con delle proprietà associate.

Nella prima parte vengono definite le coordinate della lista di punti, nella riga che inizia "output=[griglia....". Successivamente viene definito un tipo di dati di tipo "SCALARS" quindi successivamente è necessario inserire un vettore di valori associati uno ad ogni nodo.

Attenzione che il vettore deve avere un numero di componenti pari al numero di nodi nella lista precedente, altrimenti il file non verrà generato.

Così andando avanti è possibile associare diversi vettori rappresentativi di grandezze fisiche scalari o vettoriali, cambiando il comando in VECTORS come si vede nell'ultimo esempio generale dello script.

Si noti che questo è un esempio da inserire in un ciclo di iterazioni e produce un file all'iterazione (q), ma se si vuole creare un singolo file tutti i comandi "fid(q)" devono essere sostituiti con il rispettivo comando "fid".

```

    fid(q)=fopen(sprintf('vtk/fileresult%i.vtk',q), 'w'); % nome file generato
% 1. VTK DataFile Version
fprintf(fid(q), '# vtk DataFile Version 3.0\n');
% 2. Title
fprintf(fid(q), 'peridynamic dataset\n');
fprintf(fid(q), 'ASCII\n');
fprintf(fid(q), 'DATASET UNSTRUCTURED_GRID\n');
fprintf(fid(q), ['POINTS ' num2str(tot_nodes) ' double \n']);
output=[griglia(:,1); griglia(:,2); pos(:,3)]; % vettore coordinate in riga
fprintf(fid(q), '%8.7f %8.7f %2.1f \n \n', output);
fprintf(fid(q), [' POINT_DATA ' num2str(tot_nodes) ' \n']);
fprintf(fid(q), ' SCALARS K_Kin double 1 \n');
fprintf(fid(q), 'LOOKUP_TABLE default \n');
output=K_kin(:,q+1);
fprintf(fid(q), '%12.6f \n', output);
fprintf(fid(q), 'SCALARS Danno double 1 \n');
fprintf(fid(q), 'LOOKUP_TABLE default \n');
output=Danno(:,q+1);
fprintf(fid(q), '%12.6f \n', output);
fprintf(fid(q), 'SCALARS En_potenziale double 1 \n');
fprintf(fid(q), 'LOOKUP_TABLE default \n');
output=W_pot(:,q+1);
fprintf(fid(q), '%12.6f \n', output);

```

Qui di seguito riporto in generale come scrivere per ogni grandezza scalare o vettoriale le righe di codice.

```

    fprintf(fid(q), 'VECTORS nome grandezza vettoriale float \n');
output=[ matrice Nx3 con le coordinate dei vettori ];
fprintf(fid(q), '%12.6f \n', output);

```

```

    fprintf(fid(q), 'SCALARS nome grandezza double 1 \n');
fprintf(fid(q), 'LOOKUP_TABLE default \n');
output=vettore contenente la grandezza scalare per ogni nodo;
fprintf(fid(q), '%12.6f \n', output);

```


Bibliografia

- [1] Ted Belytschko, Hao Chen, Jingxiao Xu, and Goangseup Zi. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. *International journal for numerical methods in engineering*, 58(12):1873–1905, 2003.
- [2] Florin Bobaru, John T Foster, Philippe H Geubelle, and Stewart A Silling. *Handbook of peridynamic modeling*. CRC press, 2016.
- [3] Florin Bobaru and Guanfeng Zhang. Why do cracks branch? a peridynamic investigation of dynamic brittle fracture. *International Journal of Fracture*, 196(1-2):59–98, 2015.
- [4] Michael J Borden, Clemens V Verhoosel, Michael A Scott, Thomas JR Hughes, and Chad M Landis. A phase-field description of dynamic brittle fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 217:77–95, 2012.
- [5] FP Bowden, JH Brunton, JE Field, and AD Heyes. Controlled fracture of brittle solids and interruption of electrical current. *Nature*, 216(5110):38–42, 1967.
- [6] M Braun and J Fernández-Sáez. A new 2d discrete model applied to dynamic crack propagation in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 51(21-22):3787–3797, 2014.
- [7] M Braun and J Fernández-Sáez. A 2d discrete model with a bilinear softening constitutive law applied to dynamic crack propagation problems. *International Journal of Fracture*, 197(1):81–97, 2016.
- [8] W Döll. Investigations of the crack branching energy. *International Journal of Fracture*, 11(1):184–186, 1975.

- [9] Youn Doh Ha and Florin Bobaru. Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics. *International Journal of Fracture*, 162(1):229–244, 2010.
- [10] Youn Doh Ha and Florin Bobaru. Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(6):1156–1168, 2011.
- [11] Martina Hofacker and Christian Miehe. Continuum phase field modeling of dynamic fracture: variational principles and staggered fe implementation. *International journal of fracture*, 178(1):113–129, 2012.
- [12] W Hu, YD Ha, and Florin Bobaru. Numerical integration in peridynamics. *Department of*, 2010.
- [13] AE Huespe, J Oliver, PJ Sanchez, S Blanco, and V Sonzogni. Strong discontinuity approach in dynamic fracture simulations. *Mecánica Computacional*, pages 1997–2018, 2006.
- [14] JF Kalthoff and S Winkler. Failure mode transition at high rates of shear loading. *DGM Informationsgesellschaft mbH, Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials*, 1:185–195, 1988.
- [15] Joerg F Kalthoff. Modes of dynamic shear failure in solids. *International Journal of fracture*, 101(1):1–31, 2000.
- [16] Luis Kosteski, Ricardo Barrios D’Ambra, and Ignacio Iturrioz. Crack propagation in elastic solids using the truss-like discrete element method. *International journal of fracture*, 174(2):139–161, 2012.
- [17] Erdogan Madenci and Erkan Oterkus. Peridynamic theory. In *Peridynamic theory and its applications*, pages 19–43. Springer, 2014.
- [18] Sina Niazi, Ziguang Chen, and Florin Bobaru. Crack nucleation in brittle and quasi-brittle materials: A peridynamic analysis. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 112:102855, 2021.
- [19] Timon Rabczuk and T Belytschko. Cracking particles: a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks. *International journal for numerical methods in engineering*, 61(13):2316–2343, 2004.

- [20] Edmund F Rybicki and Melvin F Kanninen. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Engineering fracture mechanics*, 9(4):931–938, 1977.
- [21] Pablo Seleson. Improved one-point quadrature algorithms for two-dimensional peridynamic models based on analytical calculations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 282:184–217, 2014.
- [22] Stewart A Silling. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(1):175–209, 2000.
- [23] Stewart A Silling and Ebrahim Askari. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics. *Computers & structures*, 83(17-18):1526–1535, 2005.
- [24] Stewart A Silling, M Epton, Olaf Weckner, Jifeng Xu, and E23481501120 Askari. Peridynamic states and constitutive modeling. *Journal of elasticity*, 88(2):151–184, 2007.
- [25] Soda-Lime (Float) Glass, www.makeitfrom.com/material-properties/Soda-Lime-Float-Glass, retrieved 2021-12-20.
- [26] Jeong-Hoon Song, Pedro MA Areias, and Ted Belytschko. A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(6):868–893, 2006.
- [27] Jeong-Hoon Song, Hongwu Wang, and Ted Belytschko. A comparative study on finite element methods for dynamic fracture. *Computational Mechanics*, 42(2):239–250, 2008.
- [28] Natarajan Sukumar, Nicolas Moës, Brian Moran, and Ted Belytschko. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International journal for numerical methods in engineering*, 48(11):1549–1570, 2000.
- [29] P Underwood. Dynamic relaxation computational methods for transient analysis, vol. 1, 245–265, 1983.

- [30] Dong Yang, Wei Dong, Xuefeng Liu, Shenghui Yi, and Xiaoqiao He. Investigation on mode-i crack propagation in concrete using bond-based peridynamics with a new damage model. *Engineering Fracture Mechanics*, 199:567–581, 2018.
- [31] Kebin Yu. *Enhanced integration methods for the peridynamic theory*. Kansas state university, 2011.
- [32] M Zaccariotto and U Galvanetto. Modeling of fatigue crack propagation with a peridynamics approach. In *8 th European Solid Mechanics Conference*, 2012.
- [33] Mirco Zaccariotto, Teo Mudric, Davide Tomasi, Arman Shojaei, and Ugo Galvanetto. Coupling of fem meshes with peridynamic grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 330:471–497, 2018.