



Università degli studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

**Meccanica quantistica in sistemi di riferimento non  
inerziali**

**Laureando:** Viola Massimo

**Relatore:** Prof. Marco Matone

Anno accademico 2015-2016



*Lottare per far del mondo  
un aperto stellato  
rende l'animo inquieto,  
lancia il cuore, all'orizzonte,  
di un maestoso buco nero.*

## Introduzione

In meccanica classica l'equazione di Newton può essere adottata per descrivere l'evoluzione temporale di un punto: definito il vettore  $\vec{F}$  come somma di tutte le forze agenti su un punto, il punto si muove lungo una curva per la quale accelerazione  $\vec{a}$  ha una precisa proporzionalità con  $\vec{F}$ . Il fatto che si suppone l'esistenza di sistemi di riferimento inerziali e sistemi di riferimento non inerziali e che osservatori in questi due sistemi debbano osservare il medesimo fenomeno fisico, conduce all'evidenza che le forze agenti su un punto dipendano dal sistema di riferimento stesso in cui si trova l'osservatore. In altre parole le misure di posizioni, velocità e accelerazioni dipendono dal sistema di riferimento in cui si è situati e di conseguenza le forze agenti su un punto dipendono da esso. Per quanto detto si parla di non covarianza delle equazioni di Newton, scritte come equazioni vettoriali cartesiane, e di forze fittizie. Nel passaggio tra meccanica newtoniana a quella lagrangiana e hamiltoniana, le equazioni del moto diventano covarianti rispetto ad un'arbitraria trasformazione tra sistemi di riferimento inerziali e non inerziali. Le forze fittizie in questi formalismi possono essere interpretate nient'altro che come una conseguenza del fatto che una hamiltoniana o una lagrangiana siano scritte per un dato sistema di riferimento non inerziale.

Si prenda in esame, ad esempio, la descrizione di un sistema meccanico relativo ad un sistema di riferimento non inerziale  $\Sigma$ . Una tale descrizione si può effettuare in due modi perfettamente equivalenti, ma distinti. Analizzando infatti il caso di un punto materiale sul quale agiscono, in un sistema di riferimento inerziale  $\Sigma'$ , delle forze che ammettono energia potenziale. E' possibile:

- *Considerare il sistema in  $\Sigma$  tenendo conto delle forze d'inerzia:* Si può esprimere la lagrangiana nelle coordinate affini  $x$  di  $\Sigma$ . L'energia cinetica pertanto risulta semplicemente  $T = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2$ , mentre le forze d'inerzia ammettono un potenziale dipendente dalle velocità che è somma di termini dipendenti da  $t$ .
- *Descrivere il sistema in  $\Sigma'$ , facendo impiego di coordinate dipendenti dal tempo:* Se si scelgono le coordinate  $x'$  di  $\Sigma'$  la lagrangiana del sistema è  $\frac{1}{2}m|\dot{x}'|^2 - V'(x', t)$ , ove  $V'$  è l'energia potenziale delle forze (non di inerzia) che agiscono sul punto. La lagrangiana del sistema può essere però descritta da un qualsiasi altro sistema di coordinate, in particolare si possono utilizzare la coordinate affini  $x$  del riferimento non inerziale  $\Sigma$ . Queste sono collegate a quelle di  $\Sigma'$  dalla relazione

$$x'(x, t) = R(t)x + a(t)$$

dove per ogni  $t$ ,  $R(t) \in SO(3)$  e  $a(t) \in \mathbb{R}^3$ . Scritta in queste coordinate la lagrangiana ha energia cinetica con termini dipendenti dal tempo, ma le forze agenti sul punto sono descritte da  $V$ , che non è altro che  $V'$  espresso nel nuovo sistema di coordinate<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Non si pretende ora di dare la forma esplicita della lagrangiana, tanto meno dei termini cinetici che appaiono in essa. Queste si possono trovare in qualsiasi trattato di fisica matematica, in particolare nella referenza [5].

Le due lagrangiane trovate nei differenti modi conducono naturalmente alle stesse equazioni di Lagrange poiché il moto  $t \rightarrow x(t)$  è unico. La differenza sta nel modo in cui i termini, causa delle forze d'inerzia, compaiono in esse. Nella prima analisi questi termini appaiono nella parte cinetica della lagrangiana e sono diretta conseguenza della dipendenza temporale delle coordinate. Nella seconda appaiono nell'espressione del potenziale dipendente dalle velocità. Queste considerazioni, con la trasformazione di Legendre, possono essere traslate in ambito hamiltoniano dov'è l'hamiltoniana a giocare il ruolo della lagrangiana.

Per avere un'idea di quanto esposto si consideri un punto materiale di massa  $m$  in caduta libera lungo l'asse  $x'$  di un sistema di riferimento inerziale  $\Sigma'$ . E' possibile descrivere il suo moto sia in un sistema di riferimento solidale al punto, denotato al solito con  $\Sigma$ , su cui agisce una forza  $-mg$  diretta lungo l'asse  $x$ , sia nel sistema  $\Sigma'$  attraverso le coordinate affini di  $\Sigma$ .

In un caso, sottraendo al termine cinetico quello potenziale  $V = mgx$ , si ottiene una lagrangiana:

$$\mathcal{L}_1(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx \quad (1)$$

Nell'altro caso, a partire da una lagrangiana che scritta nelle coordinate  $x'$  di  $\Sigma'$  risulta

$$\mathcal{L}'_2(x', \dot{x}') = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2$$

si ottiene la lagrangiana nelle coordinate affini di  $\Sigma$ , legate a quelle di  $\Sigma'$  dalla relazione  $x = x' - \frac{1}{2}gt^2$ :

$$\mathcal{L}_2(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m(\dot{x} + gt)^2 \quad (2)$$

Quest'ultima può essere riscritta come:

$$\mathcal{L}_2(x, \dot{x}) = \left[ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx \right] + \frac{d}{dt} \left( mxgt + \frac{1}{6}mg^2t^3 \right)$$

dove il secondo componente del secondo membro non è altro che un termine di Gauge che non influisce sulle equazioni del moto. Pertanto le lagrangiane in Eq: (1) e Eq: (2) si dicono equivalenti e le loro equazioni di Lagrange sono identiche<sup>2</sup>. Inoltre effettuando la trasformazione di Legendre per ambo le lagrangiane si ricava la medesima hamiltoniana

$$H(p, x) = \frac{1}{2m}p^2 + mgx \quad (3)$$

Riepilogando quanto detto, in un primo caso si è introdotto il potenziale di trascinamento, in un secondo si è effettuato semplicemente una trasformazione tra sistemi di riferimento traendone il termine cinetico  $T_1 := -mgx$ . In altre parole si è mostrato

<sup>2</sup>Il fatto che due lagrangiane siano equivalenti non implica che le equazioni del moto siano necessariamente le stesse, ma solo che queste differiscono per un termine di Gauge.

---

come sia equivalente introdurre un campo di forza gravitazionale o una forza di trascinamento dovuta al sistema di riferimento, il che non è che un altro modo di esprimere il principio di equivalenza debole. Questo asserisce che la massa inerziale, cioè la proprietà intrinseca del corpo materiale di opporsi alle variazioni di moto, e la massa gravitazionale, che rappresenta la proprietà di un corpo di essere sorgente e di subire l'infusso di un campo gravitazionale, sono numericamente uguali. Verrebbe allora spontaneo, in meccanica quantistica, associare all'hamiltoniana in Eq: (3) il rispettivo operatore, risolvere l'equazione agli autovalori per quest'ultimo e trovare una funzione d'onda che esprima sia la caduta libera di un oggetto quantistico, sia il suo moto di caduta in un sistema di riferimento che stia accelerando lungo la verticale con accelerazione costante  $g$ . In realtà la situazione è ben più complessa e la validità del principio di equivalenza debole in meccanica quantistica deve essere soggetto ad una verifica teorica.

Nella seguente esposizione si vuole indagare proprio questo aspetto. Per farlo si dovrà ridefinire il concetto di trasformazione tra sistemi di riferimento introducendo quello di *simmetria* che sarà tema centrale del primo capitolo. Sempre nel primo capitolo si studierà come variano funzione d'onda e equazione di Schrödinger se si effettua una trasformazione, mostrando come a questa si debba far corrispondere un operatore unitario su un opportuno spazio di Hilbert. Nel secondo capitolo si esporranno i preliminari matematici che consentiranno nel terzo capitolo di trovare il suddetto operatore unitario associato alla trasformazione tra sistemi inerziali e quelli che stanno accelerando linearmente lungo un asse. Si vedrà come l'operatore così trovato, agendo sull'hamiltoniana<sup>3</sup>, dia luogo a termini analoghi alle forze fittizie nell'equazione di Schrödinger. Si confronterà infine l'hamiltoniana ottenuta in tal modo con quella costruita a partire dall'Eq: (3), verificando in tal modo se anche in ambito quantistico sia valido il principio di equivalenza debole.

---

<sup>3</sup>In questo caso come spesso accade in meccanica quantistica, con abuso del termine, si denota con *hamiltoniana* l'operatore hamiltoniano.

## Capitolo 1

Nell'introduzione si è accennato al concetto di *simmetria* come "ridefinizione" di quello di trasformazione. In realtà l'idea di simmetria ricopre un ruolo fondamentale in meccanica quantistica come in altre branche della fisica. Prima di dare una definizione di simmetria si riportano alla memoria alcune nozioni proprie della meccanica quantistica.

In meccanica quantistica gli *stati* (o *stati puri*) di un sistema sono descritti da raggi vettori in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , complesso e separabile. In particolar modo in uno spazio di Hilbert astratto, definito a meno di isomorfismi, un generico vettore è espresso in notazione di Dirac dal *Ket*  $|\psi\rangle$ . Con il *Bra*  $\langle\psi|$  si denota invece il funzionale lineare associato dal *Lemma di Riesz*<sup>4</sup>. In generale, salvo indicazione contrarie, si assume  $|\psi\rangle$  normalizzato, ossia  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ .

Per quanto concerne le grandezze fisiche di un sistema quantistico queste sono descritte da operatori autoaggiunti  $A = A^\dagger$  di  $\mathcal{H}$ , con dominio in ivi denso. Senza scendere in dettaglio nelle conoscenze che si suppongono appartenere al lettore, si indicherà con  $\sigma(A)$  lo *spettro* di  $A$ , ovvero l'insieme dei possibili valori che si possono ottenere da una misura della grandezza associata all'operatore  $A$ , il quale prende così il nome di *osservabile*. Le osservabili generano poi un'algebra di operatori  $\mathcal{A}$  non commutativa su  $\mathbb{C}$ , ottenibile nel caso di particelle con analogo classico<sup>5</sup> dalle regole di commutazione di Heisenberg

$$\begin{aligned} [q_i, q_j] &= 0 \\ [p_i, p_j] &= 0 \\ [q_i, p_j] &= i\hbar\delta_{ij} \end{aligned}$$

dove  $q_i$  e  $p_j$  sono operatori. Le osservabili risultano allora elementi autoaggiunti dell'algebra  $\mathcal{A}$ . In particolare, dati  $A$  e  $B \in \mathcal{A}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , con  $A = A^\dagger$  e  $B = B^\dagger$ , si ha:

$$\begin{aligned} \alpha A + \beta B &\in \mathcal{A} \\ AB &\in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Ad ogni modo sono *osservabili* solo le combinazioni  $\alpha A + \beta B$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . I prodotti  $AB$  in generale non sono *osservabili*, ma lo sono i loro commutatori  $[A, B]$ .

Si daranno ora tre nozioni di *simmetria* in fisica che si definiranno in modo più generale possibile, in modo da poterne far uso eventualmente anche in ambito classico. Queste sono le nozioni di *simmetria algebrica*, *simmetria fisica* e *simmetria dinamica*.

**Definizione 1** (Simmetria algebrica). *Si dice simmetria algebrica di un sistema fisico una mappa invertibile dell'algebra  $\mathcal{A}$  generata dalle osservabili in sé stessa che preserva*

<sup>4</sup>Se si vuole approfondire ulteriormente l'argomento si veda la referenza [7].

<sup>5</sup>Per *particelle quantistiche con analogo classico* si intende particelle la cui dinamica può essere analizzata in ambito classico con i mezzi forniti dalla meccanica hamiltoniana e lagrangiana. Non serve specificare che i metodi di analisi rimangono pur sempre differenti e i risultati indipendenti.

le relazioni algebriche e i loro limiti. In altre parole, per ogni  $A$  e  $B \in \mathcal{A}$  e per ogni  $\alpha, \beta \in K$ , dove  $K$  è il corpo su cui è definita l'algebra, chiamando  $A'$  e  $B'$  i trasformati di  $A$  e  $B$  si ha,  $A', B' \in \mathcal{A}$  e

$$\begin{aligned}\alpha A + \beta B &\rightarrow \alpha A' + \beta B' \in \mathcal{A} \\ AB &\rightarrow A'B' \in \mathcal{A} \\ A^\dagger &\rightarrow (A')^\dagger \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Si noti che la definizione implica che siano preservate le equazioni del moto. In ambito classico questo equivale alla preservazione delle parentesi di Poisson, ossia

$$\{A, B\} = \{A', B'\}$$

dove  $A'$  e  $B'$  sono intese come funzioni di  $A$  e  $B$ . In meccanica quantistica la definizione è soddisfatta da una generica trasformazione se preserva le regole di commutazione di Heisenberg, come si mostrerà più avanti.

**Definizione 2** (Simmetria fisica). *Si dice simmetria fisica di un sistema fisico una mappa invertibile dall'algebra degli operatori  $\mathcal{A}$  in sé stessa, e dallo spazio degli stati puri  $\mathcal{I}$  in sé, che preserva relazioni algebriche e i loro limiti, oltre che i valori medi. Precisamente, se  $A \in \mathcal{A}$  e  $\Sigma \in \mathcal{I}$ , si ha:*

$$\begin{aligned}A &\rightarrow A' \in \mathcal{A} \\ \Sigma &\rightarrow \Sigma' \in \mathcal{I} \\ \langle A' \rangle_{\Sigma'} &= \langle A \rangle_{\Sigma}.\end{aligned}$$

Dalla definizione è chiaro come ogni simmetria fisica sia anche una simmetria algebrica, ma non il viceversa.

**Definizione 3** (Simmetria dinamica). *Si dice simmetria dinamica di un sistema fisico una mappa invertibile dall'algebra generata dalle osservabili  $\mathcal{A}$  in sé che preserva le relazioni algebriche e i loro limiti, e l'hamiltoniana  $H$  del sistema.*

Si noti dalla definizione come una simmetria dinamica sia anche algebrica e fisica, se oltre a preservare l'hamiltoniana del sistema preserva anche i valori medi. Si dice inoltre che c'è una *rottura spontanea di simmetria* quando una simmetria dinamica non ammette una realizzazione come simmetria fisica, ovvero quando una simmetria algebrica con  $H' = H$  non ammette una mappa da  $\mathcal{I}$  in sé che preservi i valori medi.

In base a quanto esposto si hanno a disposizione tutti gli strumenti per trattare da un punto di vista formale le simmetrie in meccanica quantistica, restringendo al solito l'analisi a particelle quantistiche con analogo classico. Per iniziare il percorso che condurrà a



due importanti risultati quali il teorema di Von Neumann e il teorema di Wigner, occorre descrivere le simmetrie algebriche in meccanica quantistica. In base alla definizione risulta naturale descriverle con un insieme di mappe:

$$\begin{cases} q \rightarrow q'(q, p) \\ p \rightarrow p'(q, p) \end{cases} \quad (4)$$

tali che:

$$[q'_i(q, p), p'_j(q, p)] = i\hbar\delta_{ij}$$

Prendendo poi come hamiltoniana un certo osservabile  $H(q, p)$ . Una simmetria algebrica come quella in Eq: (5) risulta anche dinamica se preserva l'hamiltoniana, ovvero se:

$$H(q, p) \rightarrow H'(q, p) \equiv H'(q', p') = H(q, p)$$

Sempre considerando la definizione data una simmetria fisica è una trasformazione:

$$\begin{cases} q \rightarrow q' \\ p \rightarrow p' \\ |\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle \end{cases} \quad (5)$$

che mappa un'osservabile  $A$  in un'osservabile  $A'$ , in modo tale da preservare il valore medio. In altre parole deve essere soddisfatta la condizione:

$$\langle\psi' | A' | \psi'\rangle = \langle\psi | A | \psi\rangle$$

Quest'ultima condizione può essere espressa in modo differente se, invece di considerare un generico operatore si considerano una particolare classe di osservabili, ovvero i *proiettori*. Questi sono della forma

$$P_\phi := |\phi\rangle \langle\phi|$$

mentre il trasformato di un proiettore sotto una mappa  $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle$  non è nient'altro che

$$P_{\phi'} = |\phi'\rangle \langle\phi'|$$

Si introduce questa classe di operatori poiché vale la *decomposizione spettrale*, ovvero ogni osservabile può essere espresso come combinazione lineare di proiettori. Alla luce di ciò l'invarianza dei valori medi si traduce nell'invarianza dei valori medi dei proiettori

$$\begin{aligned} \langle\psi' | P_{\phi'} | \psi'\rangle &= \langle\psi' | \phi'\rangle \langle\phi' | \psi'\rangle = |\langle\psi' | \phi'\rangle|^2 \\ &= \langle\psi | P_\phi | \psi\rangle = |\langle\psi | \phi\rangle|^2. \end{aligned}$$

La condizione di uguaglianza dei valori medi viene esplicitata pertanto imponendo che  $\forall |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$

$$|\langle\psi | \phi\rangle|^2 = |\langle\psi' | \phi'\rangle|^2$$

il che equivale ad affermare che una simmetria fisica in meccanica quantistica preserva le probabilità di transizione.

Tenendo presente questo presupposto, si può enunciare il primo dei risultati a cui si è accennato in precedenza.

**Teorema 1** (di Wigner). *Ogni mappa*

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\rightarrow |\psi'\rangle \\ \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \end{aligned}$$

che preserva le probabilità di transizione  $|\langle\psi|\phi\rangle|^2 = |\langle\psi'|\phi'\rangle|^2$  per ogni  $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , è generata<sup>6</sup> da un operatore unitario  $U$  come  $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$ , o da un operatore antiunitario  $\bar{U}$  come  $|\psi'\rangle = \bar{U}|\psi\rangle$  con  $U$  e  $\bar{U}$  definiti a meno di una fase<sup>7</sup>.

Si presti attenzione al fatto che operatori unitari e antiunitari possono definire una trasformazione anche degli operatori  $A$  come  $A' = UAU^\dagger$  (o come  $A' = \bar{U}A\bar{U}^\dagger$ ). Combinata con la trasformazione tra stati descritta dal teorema tale mappa produce una simmetria fisica, dal momento che preserva il valore medio degli osservabili<sup>8</sup>

$$\langle\psi'|A'|\psi'\rangle = \langle U\psi|UAU^\dagger|U\psi\rangle = \langle\psi|U^\daggerUAU^\dagger U|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle.$$

Si verifica che la simmetria fisica generata da  $U$  o  $\bar{U}$  è anche una simmetria algebrica. Definendo infatti per  $U$  unitario

$$\begin{aligned} q'_i &= Uq_iU^\dagger \\ p'_j &= Up_jU^\dagger \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} [q'_i, p'_j] &= [Uq_iU^\dagger, Up_jU^\dagger] \\ &= U[q_i, p_j]U^\dagger \\ &= i\hbar\delta_{ij}UU^\dagger = i\hbar\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Si vorrebbe ora verificare il viceversa, ossia che ogni simmetria algebrica in meccanica quantistica è una simmetria fisica generata da un opportuno operatore unitario o antiunitario. Ciò è assicurato sotto specifiche condizioni dal secondo risultato a cui si è fatto cenno.

**Teorema 2** (di Von Neumann). *Una simmetria algebrica  $(q, p) \rightarrow (q', p')$  con  $[q'_i, p'_j] = i\hbar\delta_{ij}$  per particelle con spazio delle configurazioni  $\mathbb{R}^n$ , con  $n$  finito, è necessariamente indotta da un operatore unitario  $U$ , attraverso le relazioni:*

$$q'_i = Uq_iU^\dagger \quad p'_j = Up_jU^\dagger. \quad (6)$$

<sup>6</sup>Dire che una simmetria è generata da un operatore unitario, nell'ambito della teoria dei gruppi, assume una connotazione diversa. In questo capitolo si farà un impiego del costruito differente da quello futuro.

<sup>7</sup>Un operatore  $U$  si dice unitario se  $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$ , mentre  $\bar{U}$  si dice antiunitario se unitario e se antilineare ovvero se per ogni  $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$  vale  $\langle\psi|\bar{U}^\dagger|\phi\rangle = \langle\phi|\bar{U}|\psi\rangle$ .

<sup>8</sup>Si dimostra per operatori unitari, per operatori antiunitari la verifica è identica a meno di scambiare  $U$  con  $\bar{U}$ .

Riassumendo quindi, il teorema di Von Neumann assicura che ogni simmetria algebrica è generata da un operatore unitario  $U$  e, dal momento in cui un operatore unitario quale  $U$  preserva i valori medi ogni simmetria algebrica è anche fisica e viceversa. Considerando poi che l'operatore hamiltoniano, essendo un'osservabile, trasforma come

$$H \rightarrow UHU^\dagger =: H',$$

l'equazione di Schrödinger non varia *in forma*, ossia:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle \rightarrow i\hbar \frac{\partial |\psi'\rangle}{\partial t} = H'|\psi'\rangle$$

Per concludere la dissertazione si vuole mostrare come l'equazione di Schrödinger risponda ad una simmetria  $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle$ .

Si possono infatti sfruttare i risultati ottenuti in questo capitolo per studiare il moto di caduta libera di un oggetto quantistico in un potenziale gravitazionale  $V = -mgx$  con  $g$  costante. Per capire come affrontare il problema si ripercorrono i passi fatti nell'introduzione; si considerano, innanzitutto, due sistemi di riferimento:

- $\Sigma$  solidale al punto,
- $\Sigma'$  inerziale.

Supposto che gli assi  $x$  e  $x'$  dei due sistemi di riferimento giacciono sulla stessa retta, si è ricavato il moto unidimensionale in  $\Sigma'$  usando le coordinate affini di  $\Sigma$ , correlate a quelle di  $\Sigma'$  dalla relazione<sup>9</sup>

$$x = x' - \frac{1}{2}gt^2, \quad (7)$$

trovando così l'hamiltoniana dell'Eq: (3)

$$H(p, x) = \frac{1}{2m}p^2 + mgx.$$

Facendo impiego del principio di corrispondenza si trova l'operatore hamiltoniano indotto dalla simmetria (7) e di conseguenza l'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + mgx \right] \psi(x, t), \quad (8)$$

dove  $X$  è l'usuale operatore posizione.

Mentre in ambito classico la simmetria è esplicitata dall'Eq: (7), nel caso della meccanica quantistica sarà la stessa relazione espressa in forma operatoriale che sarà generata da un operatore unitario  $U_t$ .

---

<sup>9</sup>La mappa che si sta trattando non modifica la coordinata temporale, ovvero  $t' = t$ .

Per trovare l'operatore che genera la simmetria si estende la trasformazione nello spazio delle fasi in Eq: (7) a quella dallo spazio degli stati puri in sé  $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle$  espressa dalla generica relazione:

$$\psi'(x', t) = e^{ig(x(x', t), t)} \psi(x(x', t), t)$$

con  $g$  incognita e  $x(x', t) = x' - \frac{1}{2}gt^2$ . La funzione d'onda  $\psi$  deve poi soddisfare l'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t}(x', t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2}(x', t).$$

Esplicitando allora  $\psi'$  come sopra, si ha

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - \hbar \frac{\partial g}{\partial t} \psi - gt \left( i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} - \hbar \frac{\partial g}{\partial x} \psi \right) = \\ = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 \psi + 2i \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \psi \right]. \end{aligned}$$

Per riuscire a dedurre la forma esplicita di  $g$  si impone che l'operatore hamiltoniano debba essere quello che si trova con il principio di corrispondenza dall'Eq: (3), o, in altri termini, si impone che debba essere soddisfatta l'equazione di Schrödinger in Eq: (8). Con questo procedimento si ottiene

$$g(x, t) = \frac{mgt}{\hbar} \left( x + \frac{gt^2}{6} \right)$$

e pertanto la funzione d'onda trasforma come

$$\psi'(x, t) = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} mgt \left( x + \frac{gt^2}{6} \right) \right] \psi \left( x + \frac{1}{2}gt^2, t \right).$$

Mentre il generatore della simmetria fisica e algebrica si può definire come

$$U_t := \exp \left[ \frac{i}{\hbar} mgt \left( X + \frac{gt^2}{6} \right) \right], \quad (9)$$

Si vorrebbe ora procedere con il secondo metodo di indagine mostrato in introduzione, ma per attuare questo proposito si dovrebbero ricavare gli operatori che realizzano trasformazioni tra sistemi di riferimento, senza pensare di dover conoscere l'hamiltoniano del sistema. Ad un primo sguardo ai successi teorici esposti nel capitolo, sembrerebbe alquanto semplice ottenere gli operatori unitari che realizzano una trasformazione quale quella tra un sistema di riferimento inerziale ed uno che sta accelerando lungo un asse. Si potrebbero infatti impostare le trasformazioni nello spazio delle fasi, utilizzare il principio di corrispondenza per elevare ad operatori posizione ed impulso ricavati dalla simmetria desiderata e, infine, sfruttare le relazioni tra operatori presenti nel teorema di Von Neumann per calcolare la forma esplicita dell'operatore unitario. Eppure il procedimento non è semplice; si potrebbe infatti supporre che l'operatore unitario  $U$  sia

della forma  $U = e^{\frac{i}{\hbar}S}$ , dove  $S$  è un secondo operatore incognito, ma anche in tal caso un calcolo risulta impraticabile dato che si dovranno sviluppare in serie i secondi membri delle Eq: (6). E' necessario allora cambiare approccio al problema e introdurre i risultati di due importanti teorie quali la *teoria dei gruppi* e la *teoria delle rappresentazioni* che si esporranno nel successivo capitolo.

## Capitolo 2

Come è già stato anticipato in questo capitolo si tratteranno due teorie che permetteranno l'analisi del problema posto nell'introduzione. Non si pretenderà totale completezza per gli argomenti che si affronteranno, ma si cercherà di istituire un linguaggio e fornire strumenti analitici al fine di comprendere una futura esposizione.

Per cominciare occorre notare come dalla definizione di simmetria algebrica che è stata proposta emerga la nozione di *gruppo* e *sottogruppo*.

**Definizione 4** (Gruppo). *Un gruppo  $(G, \cdot)$  è un insieme  $G$  con la legge di composizione  $\cdot$ , detta anche moltiplicazione, tra i suoi elementi*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longrightarrow g_1 \cdot g_2 \quad \forall g_1, g_2 \in G \end{aligned}$$

che soddisfa:

1.  $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3), \forall g_1, g_2, g_3 \in G$ ;
2.  $\exists! e \in G \mid e \cdot g = g \cdot e = g, \forall g \in G$ ;
3.  $\forall g \in G, \exists! g^{-1} \in G \mid g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ .

Dalla definizione si vede che le traslazioni in  $\mathbb{R}^3$  formano il gruppo  $(\mathbb{R}^3, +)$  e sono simmetrie algebriche in meccanica hamiltoniana. In questo caso, come in altri, si dirà che il gruppo  $(G, \cdot)$  è un *gruppo di simmetria*.

**Definizione 5** (Sottogruppo). *Un sottoinsieme  $H$  di  $G$  si dice sottogruppo di  $G$  se  $H$  è un gruppo con la legge di composizione di  $G$ . In tal caso si scrive*

$$H < G.$$

Se poi  $H \neq \{e, G\}$  allora si dice che  $H$  è un sottogruppo proprio di  $G$ .

Due gruppi  $G_1$  e  $G_2$  possono essere definiti in modo diverso ma avere la stessa struttura. Si vorrebbero allora identificare questi due gruppi, ovvero trovare una mappa tra gli elementi dell'uno e dell'altro che preservi la struttura di ciascuno dei due. Si danno per questo tre definizioni di *morfismi* tra gruppi.

**Definizione 6** (Omomorfismo tra gruppi). *Una mappa  $h : G_1 \rightarrow G_2$  tra due gruppi che preserva la legge di composizione dei gruppi è detta omomorfismo. In altre parole, denotando con  $e_{1,2}$  l'elemento neutro di  $G_{1,2}$ , si deve avere<sup>10</sup>*

$$h(e_1) = e_2 \quad h(g_1^{-1}) = (h(g_1))^{-1}, \forall g_1 \in G_1.$$

<sup>10</sup>In questo caso come in altri, quando non necessario, non si indicherà la legge di composizione per non appesantire la notazione.

**Definizione 7** (Isomorfismo tra gruppi). *Due gruppi  $(G_1, \cdot)$  e  $(G_2, *)$  si dicono isomorfi se esiste un omomorfismo biiettivo*

$$i : G_1 \longrightarrow G_2$$

*tale che  $\forall g_1, g_2 \in G_1$*

$$i(g_1) * i(g_2) = i(g_1 \cdot g_2)$$

*e  $i$  è invertibile. Se le premesse sono soddisfatte si indica  $G_1 \simeq G_2$ .*

Si dimostra ad esempio che il gruppo *unitario* delle matrici complesse  $n \times n$ , denotate con il simbolo  $U$ , che soddisfano  $U^\dagger U = \mathbb{I}$  nel caso  $n = 1$  è isomorfo alla sfera  $S^1$ . In maniera analoga si può appurare che il gruppo *speciale unitario*, ovvero il gruppo di matrici unitarie con determinante uguale ad uno, se  $n = 2$  è isomorfo a  $S^3$ . Si da poi la seguente necessaria nel successivo capitolo.

**Definizione 8** (Automorfismo). *Un isomorfismo di  $G$  in sé è detto automorfismo e l'insieme degli automorfismi di  $G$  è detto  $\text{Aut } G$ .*

Le ultime definizioni, in particolare quella di isomorfismo, arricchiscono i modi in cui si possono esaminare le simmetrie sia in meccanica classica, quanto più in meccanica quantistica. Eppure sino ad ora si sono considerati i gruppi come *insiemi*. Urge allora l'esigenza di espandere l'idea di gruppo arricchendolo di una struttura topologica, o meglio, differenziale. Si danno perciò due enunciati<sup>11</sup>.

**Definizione 9** (Gruppo topologico). *L'insieme  $G$  con la legge di composizione  $\cdot$  è detto gruppo topologico se:*

1.  $G$  è un gruppo;
2.  $G$  è uno spazio topologico;
3. le mappe  $g \rightarrow g^{-1}$  e  $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 \cdot g_2$  sono continue  $\forall g, g_1, g_2 \in G$ .

**Definizione 10** (Gruppo di Lie). *Un gruppo topologico  $G$  è un gruppo di Lie (reale o complesso) di dimensione  $n$  se lo spazio topologico  $G$  è una varietà differenziale di dimensione  $n$  e le mappe di composizione e di inversione sono mappe analitiche per ogni elemento del gruppo.*

Dalla definizione di sottogruppo e sottovarietà si ha poi la seguente:

**Definizione 11** (Sottogruppo di Lie). *Un sottogruppo topologico  $H$  di un gruppo di Lie  $G$  è un sottogruppo di Lie (reale o complesso) di  $G$  se  $H$  è una sottovarietà di  $G$ .*

<sup>11</sup>Le definizioni di varietà differenziale, sottovarietà e topologia si possono trovare nei trattati di analisi e teoria dei gruppi così come nelle referenze [10] e [11].

Dai complementi di geometria differenziale se  $M$  è una varietà di dimensione  $n$ , si può definire su di essa una *curva* passante per un punto  $p \in M$  come una mappa continua

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} \supset I &\rightarrow M \\ t &\rightarrow \gamma(t) \end{aligned}$$

con  $\gamma(0) = p$ . Da una curva su  $M$  si può costruire localmente un vettore tangente al punto  $p$  in  $\mathbb{R}^n$  e da questo definire lo *spazio tangente* ad  $M$  in  $p$  come spazio vettoriale di dimensione  $n$ , denotato con  $T_pM$ .

Il concetto di spazio tangente è stato introdotto poiché, nel caso dei gruppi di Lie, dato un gruppo  $G$ , lo spazio tangente  $T_eG$  dove  $e$  è l'elemento neutro di  $G$ , è oltre che uno spazio vettoriale, anche un'algebra. Vale infatti il seguente:

**Teorema 3.** *Se  $a$  e  $b$  sono i vettori tangenti in  $T_eG$  corrispondenti alle curve  $A(t)$  e  $B(t)$  in  $G$  di Lie, allora il commutatore*

$$[a, b] := ab - ba$$

*è un vettore in  $T_eG$ .*

Il teorema enunciato è particolarmente importante perché, come già detto, permette di identificare lo spazio tangente in  $e$  come un'algebra di Lie, di cui si dà la definizione.

**Definizione 12** (Algebra di Lie). *Un'algebra di Lie è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  (o su  $\mathbb{C}$ ), denotato con  $L$ , dotato di una mappa*

$$\begin{aligned} [ \quad , \quad ] : L \times L &\rightarrow L \\ (a, b) &\rightarrow [a, b] \end{aligned}$$

*detta moltiplicazione di Lie, che rende  $L$  un'algebra su  $\mathbb{R}$  (o su  $\mathbb{C}$ ), ossia per ogni  $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in L$  e per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ :*

1.  $[a_1 + a_2, b] = [a_1, b] + [a_2, b]$ ,
2.  $[a, b_1 + b_2] = [a, b_1] + [a, b_2]$ ,
3.  $\alpha[a, b] = [\alpha a, b] = [a, \alpha b]$ ,
4.  $[a, b] + [b, a] = 0$ ,
5.  $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ .

Dove la condizione 4 e 5 della definizione non sono altro che la condizione di *antisimmetria* e l'*identità di Jacobi* rispettivamente. L'algebra di un gruppo di Lie è denotata con  $LieG$  e detta *algebra di Lie di  $G$* .

Per ora sembra ignoto il motivo di questa divagazione sull'algebra di Lie, eppure il seguente teorema ne mostra l'importanza.



**Teorema 4.** *Sia  $a \in \text{Lie}G$ , con  $G$  di Lie, allora<sup>12</sup>*

$$A(t) = e^{ta} \in G, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il teorema chiarisce quale sia la relazione tra elementi dell'algebra di Lie e il rispettivo gruppo di Lie: da un elemento dell'algebra, mediante una mappa  $t \rightarrow e^{ta}$  con  $a \in \text{Lie}G$ , si ricava un elemento del gruppo. Il viceversa è meno ovvio e per dimostrarlo è necessario definire la mappa  $t \rightarrow e^{ta}$ .

**Definizione 13** (Sottogruppo ad un parametro). *Una mappa  $A : \mathbb{R} \rightarrow G$  con  $G$  gruppo di Lie è detta sottogruppo ad un parametro di  $G$  se*

- $A$  è continua;
- $A(0) = \mathbb{I}$ ;
- $A(t)A(s) = A(t + s)$ ,  $\forall t, s \in \mathbb{R}$ .

Quindi se  $a \in \text{Lie}G$  la mappa  $t \rightarrow e^{ta}$  è un sottogruppo ad un parametro di  $G$ . Per il viceversa si ha il seguente:

**Teorema 5.** *Se  $A$  è un sottogruppo ad un parametro di un gruppo  $G$  di Lie, allora esiste  $a \in \text{Lie}G$ , detto generatore del gruppo ad un parametro, tale che  $A(t) = e^{ta}$ .*

In base al teorema di Wigner in meccanica quantistica è possibile associare ad ogni simmetria fisica un operatore unitario (o antiunitario) che agisce sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Al fine di trovare un modo di correlare i fondamenti di teoria dei gruppi con lo studio delle simmetrie in ambito quantistico si danno alcune nozioni di teoria delle rappresentazioni.

**Definizione 14** (Rappresentazione). *Sia  $G$  un gruppo e  $X$  uno spazio vettoriale. Denotiamo con  $\mathcal{L}(X)$  lo spazio degli operatori lineari in  $X$ . Una mappa*

$$D : G \longrightarrow \mathcal{L}(X)$$

*è detta rappresentazione (lineare) di  $G$  in  $X$ , detta sede della rappresentazione, se valgono*

1.  $D(e) = \mathbb{I}$ ;
2.  $\forall g_1, g_2 \in G \quad D(g_1)D(g_2) = D(g_1 \cdot g_2)$ ;

in altre parole  $D$  è un omomorfismo di  $G$  nel gruppo degli operatori lineari invertibili di  $\mathcal{L}(X)$ ,  $\text{Aut}(X)$ . Infatti, dalla definizione segue che  $D(g^{-1}) = [D(g)]^{-1}$ . Inoltre  $\dim X$  è detta *dimensione della rappresentazione* e denotata con  $\dim D$ .

Un'altra definizione utile nello sviluppo della trattazione e di frequente utilizzo in meccanica quantistica è la seguente:

<sup>12</sup>Implicitamente si suppone che  $\text{Lie}G$  sia definita su  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 15** (Rappresentazione unitaria). *Se  $X$  hilbertiano e  $D(g)$  è unitario  $\forall g \in G$ , allora  $D$  è detta rappresentazione unitaria.*

Dunque, in meccanica quantistica le simmetrie risultano in corrispondenza con un gruppo  $G \ni g$  di Lie e gli operatori unitari associati alle simmetrie sono rappresentazioni unitarie  $U(g)$  su uno spazio di Hilbert. Gli operatori unitari che rappresentano la simmetria sono però definiti a meno di una fase, questa ambiguità *di fase* deriva dal fatto che gli stati puri sono raggi vettori e non vettori e si può eludere tale plurivalenza definendo, in analogia alla definizione dei raggi vettori, i *raggi operatori*

$$\hat{U}(g) = \{U' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : U' = e^{i\alpha(g)}U(g), e^{i\alpha(g)} \in U(1), U'U'^{\dagger} = UU^{\dagger} = \mathbb{I}\}$$

In analogia con il raggio vettore, la composizione di due simmetrie corrispondenti a  $g_1, g_2 \in G$  sarà descritta da:

$$\hat{U}(g_1)\hat{U}(g_2) = \hat{U}(g_1 \cdot g_2). \quad (10)$$

Una rappresentazione che soddisfa questa condizione si chiama *rappresentazione unitaria proiettiva* ed è la rappresentazione naturale delle simmetrie in meccanica quantistica proprio perché gli stati puri sono raggi vettori. In particolare si può scegliere un rappresentativo  $U(g)$  dei raggi operatori e riscrivere la relazione (10) come

$$U(g_1)U(g_2) = e^{i\beta(g_1, g_2)}U(g_1 \cdot g_2)$$

con  $e^{i\beta(g_1, g_2)} \in U(1)$  una fase dipendente in generale sia da  $g_1$  che  $g_2$ .

Per andare ad enunciare quello che è uno dei maggiori risultati in ambito di teoria dei gruppi si richiede, con motivazione fisica, che per ogni raggio vettore  $\hat{\psi}$  le mappe  $\hat{U}(g) \rightarrow \hat{U}(g)\hat{\psi}$  siano continue. Si dimostra però che si può scegliere  $U(g)$  tale che per ogni  $\psi \in \mathcal{H}$ ,  $U(g)\psi$  sia fortemente continua in  $g$ , ovvero se  $g_n$  è una successione di elementi del gruppo che tende a  $g$ , allora

$$\|(U(g_n) - U(g))\psi\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$$

e le fasi dipendono con continuità dalle  $g$ .

Con le premesse fatte sino ad ora si può comprendere la portata del seguente:

**Teorema 6** (di Stone). *Sia  $\{U(t), t \in \mathbb{R}\}$  la rappresentazione unitaria fortemente continua di un gruppo ad un parametro. Allora esiste un operatore autoaggiunto  $A$ , detto generatore di  $U(t)$ , tale che*

$$U(t) = e^{itA}$$

*Viceversa, se  $A$  è un operatore autoaggiunto,  $e^{itA}$  è un gruppo unitario ad un parametro fortemente continuo in  $\mathcal{H}$  e nel dominio  $\mathcal{D}(A)$  di  $A$ . Vale inoltre:*

$$\frac{1}{i} \left[ \frac{d}{dt} U(t) \right]_{t=0} \psi := \frac{1}{i} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t) - \mathbb{I}}{t} \psi = A\psi \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A) \quad (11)$$

Il teorema di Stone afferma dunque che i gruppi ad un parametro di simmetria in meccanica quantistica sono in corrispondenza biunivoca con gli operatori autoaggiunti: *dato un gruppo ad un parametro di operatori unitari, c'è un generatore che è un operatore autoaggiunto; viceversa dato un operatore autoaggiunto  $A$ ,  $e^{itA}$  è un gruppo ad un parametro fortemente continuo.*

Un esempio dell'impiego del teorema consiste nel mostrare come il generatore delle traslazioni in  $\mathbb{R}$  rappresentate in  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ , sia l'operatore impulso. Sia infatti  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , definendo  $U(t)\psi(x) = \psi(x+t)$ , la derivata operatoriale definita in Eq: (11) risulta

$$\frac{1}{i} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t) - \mathbb{I}}{t} \psi(x) = \frac{1}{i} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(x+t) - \psi(x)}{t} = -i \frac{d}{dx} \psi(x)$$

dove si è posto  $\hbar = 1$ . Dunque l'operatore impulso è generatore del gruppo di simmetria delle traslazioni e in modo analogo, effettuando una traslazione della funzione d'onda nella rappresentazione  $p^{13}$ , si vede come l'operatore posizione sia generatore del gruppo di simmetria dei boost nello spazio tridimensionale.

Nel prossimo capitolo si applicheranno le conoscenze acquisite per studiare le forze che agiscono su una particella libera in un sistema di riferimento  $\Sigma$  che si sta muovendo con una determinata accelerazione lungo la verticale  $x'$  di un secondo sistema inerziale  $\Sigma'$ . Questo consentirà di paragonare i risultati che si otterranno con quelli presentati nella parte conclusiva del primo capitolo, in particolare si vedrà come le forze fittizie che compariranno nel calcolo dell'equazione di Schrödinger non consentano una sovrapposibilità dei due metodi d'indagine. Questa incongruenza sarà interpretabile come una violazione del principio di equivalenza debole in meccanica quantistica, come esposto nell'introduzione.

L'obiettivo che si prefigura richiede che si possano costruire delle rappresentazioni unitarie proiettive di un gruppo ad un parametro a partire da un elemento dell'algebra di Lie del gruppo, e dunque si dovrà trovare una strategia non banale per affrontare il problema.

---

<sup>13</sup>Dire che una funzione d'onda è espressa nella *rappresentazione p* equivale a dire che una funzione d'onda  $\psi(x)$  è sviluppata secondo le autofunzioni dell'operatore quantità di moto. Quest'ultimo processo non è nient'altro che lo sviluppo in integrale di Fourier della  $\psi$ .

### Capitolo 3

Ci si prefigge ora l'obiettivo di trovare le rappresentazioni unitarie proiettive del gruppo di trasformazioni tra sistemi di riferimento non inerziali.

Come sede delle rappresentazioni si considererà lo spazio di Hilbert per una particella non-relativistica di massa  $m$  e spin  $s$ , ossia il prodotto tensore tra  $L^2(\mathbb{R}^3)$  e uno spazio vettoriale complesso di dimensione  $2s + 1$ . Nella prima parte di questo capitolo si vuole indagare la struttura di questo gruppo, chiamato *gruppo lineare euclideo* e denotato con il simbolo  $\mathcal{E}(3)$ , mentre nella seconda parte si restringerà l'analisi allo studio di trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali e quelli che stanno traslando lungo un asse, la cui traslazione è definita non da una costante, ma da una generica funzione del tempo  $a(t)$ . Il gruppo la cui azione realizza queste ultime trasformazioni sarà chiamato *gruppo delle accelerazioni lineari* e denotato con  $\mathcal{A}$ . In tal caso la sede delle rappresentazioni si limiterà al solo  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Si cercheranno in seguito i generatori del gruppo delle accelerazioni lineari da cui ricavare le rappresentazioni unitarie associate alla simmetria e, infine, si applicheranno questi operatori unitari all'equazione di Schrödinger.

Per iniziare la trattazione è utile la seguente:

**Definizione 16** (Prodotto semidiretto). *Siano  $N$  e  $H$  due gruppi e sia  $\varphi$  una mappa da  $H$  negli automorfismi di  $N$ :*

$$\begin{aligned} \varphi: \quad h \in H &\longrightarrow \varphi_h: N \longrightarrow N \\ & \qquad \qquad \qquad n \longrightarrow \varphi_h(n) \end{aligned}$$

*Il prodotto semidiretto di  $N$  e  $H$  determinato da  $\varphi$  è denotato come  $N \rtimes_{\varphi} H$ , ed è definito come il gruppo che ha come elementi*

$$(n \in N, h \in H)$$

*con la legge di composizione:*

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \varphi_{h_1}(n_2), h_1 h_2)$$

*mentre detti  $e_N \in N$  e  $e_H \in H$  gli elementi neutri di  $N$  e di  $H$  rispettivamente, valgono:*

$$e_{N \rtimes_{\varphi} H} = (e_N, e_H), \quad (n, h)^{-1} = (\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$$

In base alla definizione, il gruppo euclideo o delle rototraslazioni, denotato con  $\mathcal{E}_3$ , si definisce come prodotto semidiretto di  $\mathbb{R}^3$  e del gruppo delle matrici ortogonali reali  $SO(3)$ . Infatti dato un punto  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ , applicando consecutivamente due elementi del gruppo  $(\vec{a}_2, R_2)$  e  $(\vec{a}_1, R_1)$  a  $\vec{x}$ , si ottiene l'automorfismo di  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \vec{x} &\longrightarrow \vec{x}' = R_2 \vec{x} + \vec{a}_2 \\ \vec{x}' &\longrightarrow \vec{x}'' = R_1 \vec{x}' + \vec{a}_1 \end{aligned}$$

Dunque  $\vec{x}$  viene mandato dalla composizione delle due rototraslazioni in

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}'' = R_1 R_2 \vec{x} + R_1 \vec{a}_2 + \vec{a}_1$$

Perciò la legge di composizione risulta

$$(\vec{a}_1, R_1) \cdot (\vec{a}_2, R_2) = (\vec{a}_1 + R_1 \vec{a}_2, R_1 R_2)$$

e l'automorfismo di  $\mathbb{R}^3$  è  $\varphi_R(\vec{a}_2) = R\vec{a}_2$ . Per quanto detto il gruppo euclideo si denota con  $\mathbb{R}^3 \rtimes_{\varphi_R} SO(3)$ .

La struttura di questo gruppo suggerisce di poter estendere  $\mathcal{E}_3$  al gruppo lineare euclideo  $\mathcal{E}(3)$ . Osservando infatti alcune trasformazioni che si desiderano far corrispondere all'azione di  $\mathcal{E}(3)$  su un punto  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \vec{x} &\rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \frac{1}{2}\vec{a}t^2, & \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} &\rightarrow \vec{x}' = R(t)\vec{x}, & R(t) \in SO(3) \end{aligned}$$

è naturale generalizzare l'azione del gruppo lineare euclideo sullo spazio tridimensionale, come l'azione di un elemento  $(\vec{a}(t), R(t))$  su un punto di  $\mathbb{R}^3$

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = R(t)\vec{x} + \vec{a}(t) \tag{12}$$

dove come prima  $R(t) \in SO(3)$  e  $\vec{a}(t) \in \mathbb{R}^3$ . Per quanto detto è chiaro che  $\mathcal{E}(3)$  consiste in una mappa  $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}_3$ , dalla retta reale al gruppo euclideo, che preserva la distanza tra due punti in  $\mathbb{R}^3$ . Applicando due volte la trasformazione (12) si ottiene la legge di composizione del gruppo, che risulta la medesima del gruppo euclideo a meno di considerare matrici di  $SO(3)$  e elementi di  $\mathbb{R}^3$  come dipendenti da un parametro:

$$(\vec{a}'(t), R'(t)) \cdot (\vec{a}(t), R(t)) = (\vec{a}'(t) + R'(t)\vec{a}(t), R'(t)R(t)) \tag{13}$$

Questa osservazione consente di definire il gruppo lineare euclideo come un gruppo i cui elementi sono  $(\vec{a}(t) \in \mathbb{R}^3, R(t) \in SO(3))$  con la legge di composizione (13).

Notando poi che il gruppo delle rotazioni dipendenti dal tempo  $\mathcal{R} := \{(\vec{0}, R(t))\}$ , e il gruppo delle accelerazioni lineari  $\mathcal{A} := \{(\vec{a}(t), \mathbb{I})\}$  sono sottogruppi di  $\mathcal{E}(3)$ , si giunge alla definizione di gruppo lineare euclideo come prodotto semidiretto di  $\mathcal{A}$  ed  $\mathcal{R}$  determinato da  $\varphi_{R(t)}(\vec{a}(t)) = R(t)\vec{a}(t)$ <sup>14</sup>.

Si è parlato poi di gruppo lineare euclideo come estensione del gruppo euclideo. Questa affermazione è giustificata dal fatto che il gruppo delle accelerazioni lineari contiene le traslazioni, oltre a contenere i boost di Galileo

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a} \quad (\text{traslazioni})$$

<sup>14</sup>Si indica spesso un gruppo con i suoi elementi tra parentesi graffe, una volta specificata la legge di composizione.

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t \quad (\text{boost di Galileo}).$$

Mentre il gruppo delle rotazioni dipendenti dal tempo contiene le rotazioni, oltre a contenere rotazioni con velocità angolare costante

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = R\vec{x} \quad (\text{rotazioni})$$

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = R(\hat{n}, \omega t)\vec{x} \quad (\text{rotazioni a } \omega \text{ costante}),$$

dove  $\hat{n}$  è l'asse di rotazione e  $\omega t$  è l'angolo di rotazione.

Dato il gruppo delle accelerazioni  $\mathcal{A}$  si desiderano trovare le rappresentazioni unitarie proiettive sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_m = L^2(\mathbb{R}^3)$  per una particella non-relativistica di massa  $m$ .

Guardando alla legge di composizione di  $\mathcal{E}(3)$  definita in Eq: (13) si vede come scegliendo opportunamente  $R(t) \in SO(3)$  si abbia  $\forall t$ :

$$\vec{a}(t) = R(t) \begin{pmatrix} a(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque è sufficiente considerare il gruppo delle accelerazioni lineari lungo l'asse  $x$ :

$$x \rightarrow x' = x + a(t). \quad (14)$$

Si denoterà questo gruppo con  $\mathcal{A}_x$ .

Come accennato nell'introduzione le equazioni di Hamilton, così come quelle di Lagrange risultano covarianti rispetto a un'arbitraria trasformazione tra sistemi di riferimento non inerziali. Questa covarianza si traduce nell'esistenza di una funzione generatrice delle trasformazioni (14). Si cerca allora una funzione  $S \equiv S(x, p'; t)$  tale che:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial S}{\partial p'} = x + a(t) \\ p &= \frac{\partial S}{\partial x} = p' - m\dot{a}(t) \\ H'(x', p') &= H'(x, p) + \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned} \quad (15)$$

Dove  $\dot{a}(t) := \frac{da}{dt}(t)$ ; dall'integrazione si trova la funzione richiesta:

$$S(x, p'; t) = (x + a(t))p' - mx\dot{a}(t) \quad (16)$$

Sviluppando in serie di potenze di  $t$  il termine di accelerazione lineare presente nelle Eq: (15)

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!} t^n \quad (17)$$

si ha, per ogni termine dell'espansione, un sottogruppo ad un parametro del gruppo delle accelerazioni dove i coefficienti  $a_n$  giocano il ruolo di parametri del gruppo. Definendo infatti una funzione

$$\begin{aligned} A_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{A}_x \\ a_n &\rightarrow \left( \frac{a_n t^n}{n!}, \mathbb{I} \right) \end{aligned}$$

questa soddisfa le proprietà richieste per essere definita sottogruppo ad un parametro di  $\mathcal{A}_x$ . Si noti che ciascun  $\mathcal{A}_{x,n}$ , denotato dagli elementi  $((a_n t^n/n!), \mathbb{I})$ , risulta un sottogruppo di  $\mathcal{A}_x$  dato che è un gruppo con la legge di composizione di  $\mathcal{A}_x$ .

Si ottengono allora per ogni  $n$  una funzione generatrice e le rispettive trasformazioni che, guardando all'Eq: (15), risultano:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{a_n t^n}{n!} \\ p' &= p + m \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1} \end{aligned} \tag{18}$$

$$S_n(x, p'; t) = \left( x + \frac{a_n t^n}{n!} \right) p' - m x \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1}$$

Si vuole trovare, per ogni parametro  $a_n$ , il generatore del gruppo ad un parametro il cui operatore unitario associato ha come sede della rappresentazione lo spazio  $L^2(\mathbb{R})$ . In altre parole si desidera ottenere l'algebra di Lie del gruppo  $\mathcal{A}_x$  e di conseguenza le rappresentazioni del gruppo a partire dalle trasformazioni nello spazio delle fasi riportate in Eq: (18).

L'obbiettivo da raggiungere non è triviale, infatti sino ad ora non si è fatto altro che lavorare nell'ambito della meccanica classica, mentre si vorrebbero trovare degli operatori unitari associati alle trasformazioni di cui si è parlato ampiamente. Perciò per proseguire nell'analisi è utile dare alcuni preliminari di fisica matematica, in particolare la seguente:

**Definizione 17** (Azione di un gruppo). *Un'azione di  $G \simeq \mathbb{R}$  su un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  è una funzione differenziabile*

$$\begin{aligned} \varphi : G \times U &\rightarrow U \\ (\lambda, q) &\rightarrow \varphi(\lambda, q) \end{aligned}$$

che è tale che le funzioni  $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definite da  $\varphi_\lambda(q) := \varphi(\lambda, q)$ , abbiano le seguenti proprietà:

1.  $\varphi_0 : U \rightarrow U$  è l'identità;

2.  $\forall \lambda, \mu \in G, \varphi_{\lambda+\mu} = \varphi_\lambda \circ \varphi_\mu$ <sup>15</sup>;
3.  $\forall \lambda \in G, \varphi_\lambda : U \rightarrow U$  è un diffeomorfismo.

Dalla definizione risulta che ogni azione di  $\mathbb{R}$  su  $\mathbb{R}^n$  è il flusso di un campo vettoriale su  $\mathbb{R}^n$ . Questo campo vettoriale si chiama *generatore infinitesimo dell'azione* ed è definito come:

$$\xi(q) := \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(0, q) \quad (19)$$

La definizione è particolarmente utile poiché permette di identificare le mappe  $x \rightarrow x'$  e  $p \rightarrow p'$  dell'Eq: (18) come un'azione di  $\mathbb{R}$  sullo spazio delle fasi  $\mathbb{R}^2$  infatti per ogni  $n$  la mappa

$$\varphi_{a_n} : (x, p) \rightarrow (x + a_n \delta x_n(t), p + a_n \delta p_n(t))$$

è un'azione di  $\mathbb{R}$  su  $\mathbb{R}^2$ , con  $\delta x_n(t) := \frac{t^n}{n!}$  e  $\delta p_n(t) := \frac{mt^{n-1}}{(n-1)!}$ . Il generatore infinitesimo risulta:

$$\xi_n(t) = \begin{pmatrix} \delta x_n(t) \\ \delta p_n(t) \end{pmatrix} \quad (20)$$

Il campo vettoriale in Eq: (20) assume una diversa accezione se si considera la seguente:

**Definizione 18** (Funzione generatrice infinitesima). *Data una trasformazione nello spazio delle fasi  $\mathbb{R}^{2n}$  prossima all'identità, del tipo*

$$x'_i = x_i + \lambda \delta x_i, \quad p'_i = p_i + \lambda \delta p_i \quad i = 1, \dots, n$$

dove  $\lambda \ll 1$ . Si definisce come funzione generatrice infinitesima della trasformazione canonica una funzione  $G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  tale che la funzione generatrice della trasformazione canonica sia della forma:

$$S(x, p'; t) = x_i p'_i + \lambda G(x, p'; t)$$

Derivando l'espressione della funzione generatrice data nella definizione per ricavare posizione e momento  $x'$  e  $p'$

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{\partial S}{\partial p'^i} = x + \lambda \frac{\partial G}{\partial p'^i} \\ p_i &= \frac{\partial S}{\partial x^i} = p'_i + \lambda \frac{\partial G}{\partial x^i} \end{aligned}$$

<sup>15</sup>Si noti che la proprietà 2. della definizione implica che le mappe  $\varphi_\lambda$  formano esse stesse un gruppo commutativo omeomorfo a  $G$ .



e uguagliandole alle trasformazioni prossime all'identità, si trovano per  $\lambda$  che tende a zero:

$$\delta x_i = \frac{\partial G}{\partial p^i} \quad \delta p_i = -\frac{\partial G}{\partial x^i} \quad (21)$$

Osservando il generatore infinitesimo dell'azione in Eq: (19) si vede allora come questo coincida con il vettore avente per elementi quelli dell'Eq: (21)<sup>16</sup>.

Guardando invece alle Eq: (18) e Eq: (21), si calcola la funzione generatrice per ogni sottogruppo ad un parametro specificato dal parametro  $a_n$ :

$$\delta x_n := \frac{\partial x'}{\partial a_n} = \frac{\partial G_n}{\partial p} = \frac{t^n}{n!} \quad (22)$$

$$\delta p_n := \frac{\partial p'}{\partial a_n} = -\frac{\partial G_n}{\partial x} = m \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (23)$$

Integrando si ricava:

$$G_n(x, p; t) = \frac{t^n}{n!} p - \frac{mt^{n-1}}{(n-1)!} x \quad (24)$$

Ora si vuole capire come si possano ricavare, dagli strumenti forniti dalla meccanica hamiltoniana, i generatori del gruppo ad un parametro  $\mathcal{A}_x$ , che per ogni  $n$  risultano generatori dei sottogruppi di  $\mathcal{A}_x$  definiti in precedenza come  $\mathcal{A}_{x,n}$ . Questi dovranno essere degli operatori su uno spazio di Hilbert e prendendone l'esponenziale si otterranno le rappresentazioni unitarie dei sottogruppi  $\mathcal{A}_{x,n}$ .

Nel secondo capitolo si è mostrato come ad elementi dell'algebra di Lie di un gruppo  $G$  (o se si preferisce a vettori tangenti in  $T_e G$ ) corrispondano sottogruppi ad un parametro, e, anche in questo caso, essi prendano il nome di generatori.

Anche il generatore infinitesimo dell'azione è un vettore tangente ad una curva nello spazio delle fasi e coincide con il campo vettoriale hamiltoniano della funzione  $G_n$ , definito come:

$$X_{G_n} := \left( \frac{\partial G_n}{\partial p}, -\frac{\partial G_n}{\partial x} \right)$$

In meccanica hamiltoniana si mostra come a partire dal campo vettoriale  $X_{G_n}$  e da una seconda funzione  $G_{n'}$  è possibile costruire la loro parentesi di Poisson. Questa è un'operazione tra funzioni definite sullo spazio delle fasi che a sua volta definisce una struttura di algebra di Lie reale, i cui elementi sono i  $G_n$  stessi. Infatti la scelta di una seconda funzione generatrice infinitesima  $G_{n'}$  non fa altro che restringere il dominio delle parentesi al prodotto tensore degli insiemi:

$$\left\{ G_n(x, p; t) = \frac{t^n}{n!} p - \frac{mt^{n-1}}{(n-1)!} x : n \in \mathbb{N} \right\}$$

<sup>16</sup>Il fatto che questi due oggetti coincidano non è un caso: considerando come funzione generatrice infinitesima l'hamiltoniana  $H$ , con lo stesso procedimento mostrato si arriva alle equazioni di Hamilton, che non sono altro che il generatore infinitesimo dell'azione del gruppo delle traslazioni temporali.

Dunque i generatori del gruppo (nel caso considerato) sono elementi di un'algebra di Lie definita dalla relazione di commutazione mentre i generatori infinitesimi delle trasformazioni sono elementi di un'algebra di Lie definita dalle parentesi di Poisson. Per cui sembra esserci una connessione tra  $G_n$  quale funzione generatrice infinitesima e quale generatore di un gruppo ad un parametro, legame che si cela dietro la relazione tra algebra delle parentesi di Poisson e algebra dei commutatori.

Questo dettaglio è spiegabile se si ricorre all'operazione di *limite classico*: la regola di commutazione tra due operatori associati alle grandezze, argomento delle parentesi, non è altro che il limite classico per  $\hbar \rightarrow 0$  delle parentesi di Poisson <sup>17</sup>. Nel limite per  $\hbar \rightarrow 0$  la corrispondenza tra i generatori infinitesimi dell'azione e i generatori del gruppo, si riduce a

$$i[G_n, G_{n'}] \longrightarrow \hbar \{G_n, G_{n'}\}$$

e si esprime nella pratica associando tramite il principio di corrispondenza all'elemento delle parentesi di Poisson il rispettivo operatore. Dunque si associa ad ogni  $G_n$  il rispettivo operatore che è, per il teorema di Stone, generatore del rispettivo gruppo ad un parametro  $\mathcal{A}_{x,n}$  rappresentato in  $L^2(\mathbb{R})$ .

Dall'Eq: (18) e dalla definizione dei sottogruppi di  $\mathcal{A}_x$ , si può notare come  $\mathcal{A}_{x,0}$  coincida con il gruppo delle traslazioni mentre  $\mathcal{A}_{x,1}$  con quello dei boost di Galileo. Al termine del secondo capitolo si è mostrato come il generatore delle traslazioni sia l'operatore impulso e quello dei boost di Galileo sia l'operatore posizione. In base a quanto detto in questo capitolo invece, l'operatore associato a  $G_0$  deve essere generatore del gruppo ad un parametro delle traslazioni spaziali e coincidere con l'operatore momento, mentre quello associato a  $G_1$  deve essere generatore dei boost di Galileo e uguagliare l'operatore posizione. Per questo ci si aspetta che le parentesi di Poisson tra  $G_0$  e  $G_1$  dia come risultato l'unità. D'altronde date le parentesi di Poisson

$$\begin{aligned} \{G_n, G_{n'}\} &= \frac{mt^{n+n'-1}}{(n-1)!(n'-1)!} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) \\ \{G_n, G_0\} &= -\frac{mt^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned} \tag{25}$$

<sup>17</sup>Il processo di riduzione da meccanica classica a quantistica è un argomento spinoso: la formulazione di Weyl-Wigner consente di definire il limite classico della dinamica quantistica leggendolo come una deformazione, dipendente da  $\hbar$ , della dinamica classica nella formulazione di Poisson. Formalmente la definizione di limite classico come limite per  $\hbar \rightarrow 0$  è errato, ma se ne fa largo impiego in letteratura. In ogni caso una esposizione più dettagliata sul limite classico in meccanica quantistica si trova nelle referenze [4] e [6].

si ha  $\{G_1, G_0\} = -m$  risultato diverso da quello che ci si aspetta dalla regola di commutazione canonica  $\{X, P\} = 1$ . Si definiscono allora da  $G_1$  e  $G_0$

$$\begin{aligned} B_n &:= -\frac{1}{m}G_n, & n = 1, 2, \dots \\ B_0 &= G_0. \end{aligned} \quad (26)$$

Facendo riferimento alle Eq: (25) si ottengono

$$\begin{aligned} \{B_n, B_{n'}\} &= \frac{t^{n+n'-1}}{m(n-1)!(n'-1)!} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) \\ \{B_n, B_0\} &= \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned} \quad (27)$$

in particolare si verifica  $\{B_1, B_0\} = 1$  come voluto. A partire dalle funzioni definite in Eq: (26), utilizzando la corrispondenza tra parentesi di Poisson e commutatori si scrivono i generatori del gruppo a un parametro che si cercavano:

$$B_n \rightarrow X_n := \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} i\hbar \frac{\partial}{\partial p} - \frac{t^n}{mn!} p, \quad n = 1, 2, \dots \quad (28)$$

$$B_0 \rightarrow P \equiv p$$

e in particolare:

$$X_1 = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} - \frac{t}{m} p = X - \frac{t}{m} p \quad (29)$$

Dove la funzione d'onda è definita nella rappresentazione  $p$  e  $X = i\hbar(\partial/\partial p)$  è l'usuale operatore posizione. Da questi, guardando alle Eq: (27), si ottengono le relazioni di commutazione

$$\begin{aligned} [X_n, X_{n'}] &= \frac{i\hbar t^{n+n'-1}}{m(n-1)!(n'-1)!} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) \\ [X_n, P] &= \frac{i\hbar t^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned} \quad (30)$$

Dalle relazioni (28) si ha subito  $[X_1, P] = i\hbar$  con  $X_1$ , dato dall'Eq: (29), diverso dall'operatore posizione  $X = i\hbar(\partial/\partial p)$ . Occorre pertanto dimostrare l'esistenza di una simmetria fisico e algebrica tra queste due osservabili.

Si prova allora che gli operatori  $X$  e  $X_1$  sono *unitariamente equivalenti*, ossia che esiste una simmetria fisica e algebrica, rappresentata da un opportuno operatore unitario, tale che

$$X = UX_1U^\dagger, \quad U^\dagger U = \mathbb{I},$$

mentre lascia l'operatore impulso invariato. Si sceglie per questo scopo un operatore unitario  $U_f = e^{-if(p)}$  il cui generatore è un secondo operatore incognito  $f(p)$  e, imponendo la condizione  $X = U_f X_1 U_f^\dagger$ , si ottiene la forma esplicita della  $f$ <sup>18</sup>:

$$\begin{aligned} X &= U_f X_1 U_f^\dagger \\ &= e^{if(p)} \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial p} - \frac{tp}{m} \right] e^{-if(p)} \\ &= -\hbar f'(p) - \frac{tp}{m} + i\hbar \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned}$$

Prendendo allora  $f'(p) = -(t/m)p$  si ha come voluto  $X = i\hbar(\partial/\partial p)$  con  $f(p) = -(p^2 t/2m\hbar)$ .

La rappresentazione unitaria associata alla simmetria risulta

$$U_f = e^{i(p^2 t/2m\hbar)} = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t},$$

dove  $H_0 = (p^2/2m)$  è l'operatore hamiltoniano di una particella libera. Dunque  $H_0$  è il generatore del gruppo ad un parametro, con parametro  $t$ , che realizza la trasformazione  $X_1 \rightarrow X$ .

Si osservi che  $U_f$  coincide con l'operatore di evoluzione temporale dall'istante  $t$  all'istante 0. Infatti, prendendo un generico stato nella rappresentazione delle  $p$  e denotandolo con  $\psi(p)$ , la funzione d'onda nella rappresentazione delle  $x$  all'istante 0, denotata con  $\varphi_0(x)$ , è data dalla trasformata di Fourier

$$\varphi_0(x) = \mathcal{F}\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar} px} \psi(p) dp.$$

Il pacchetto d'onde descritto da  $\varphi_0$  è combinazione lineare continua di autofunzionali dell'energia, infatti

$$H e^{\frac{i}{\hbar} px} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} e^{\frac{i}{\hbar} px} = \frac{p^2}{2m} e^{\frac{i}{\hbar} px} = E e^{\frac{i}{\hbar} px},$$

dove  $E$  è valore spettrale. Dunque l'evoluto al tempo  $t$  di  $\varphi_0$  è:

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t} e^{\frac{i}{\hbar} px} \psi(p) dp.$$

Tenendo in considerazione l'Eq: (29), si definisce  $x_1 := x - (t/m)p$  e come funzione d'onda al tempo  $t = 0$  per la nuova variabile si ha

$$\varphi_0(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar} px_1} \psi(p) dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{t}{m} p^2} e^{\frac{i}{\hbar} px} \psi(p) dp,$$

<sup>18</sup>Si ricorda che se  $A$  e  $B$  sono due operatori vale il seguente sviluppo:

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2} [A, [A, B]] + \dots$$

che non è altro che l'evolva temporale all'istante  $2t$  di  $\varphi_0(x)$ , risultante dall'applicazione dell'operatore di evoluzione temporale su  $\varphi_0(x)$ .

Pertanto, osservando  $\varphi_0(x_1)$ , non stupisce l'uguaglianza tra  $U_f$  e l'operatore di evoluzione temporale. Questo risultato può essere anche interpretato classicamente: considerando una particella libera che si muove lungo l'asse  $x$  a velocità  $v$  costante, trovare una trasformazione da  $x_1$  a  $x$  (in questo caso visti come quantità reali) significa effettuare un boost  $x \rightarrow x_1 := x - vt$  lungo la linea di volo di una particella con velocità  $v$  propria della particella. Nel caso di una particella libera, che d'altronde è il caso che si sta trattando, il boost coincide allora con l'evoluzione temporale del sistema classico.

Verificato dunque che l'operatore  $X_1$  è un buon operatore posizione, si esponenzializzano i generatori di ciascun sottogruppo  $\mathcal{A}_{x,n}$  e si ricavano i relativi elementi del gruppo ad un parametro

$$\hat{U}_{a_n} := \exp\left(-i\frac{m}{\hbar}X_n a_n\right)$$

che sono rappresentazioni unitarie proiettive di  $\mathcal{A}_{x,n}$ , dunque raggi operatori unitari<sup>19</sup>. L'azione di un elemento del gruppo su  $L^2(\mathbb{R})$ , ricordando le Eq: (24), (26) e (28), risulta pertanto

$$\begin{aligned} (\hat{U}_{a_n}\psi)(p) &= e^{-i\frac{m}{\hbar}X_n a_n} \psi(p) \\ &= e^{i\frac{pt^n}{\hbar n!} a_n} \psi\left(p + \frac{mt^{n-1}}{(n-1)!} a_n\right), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è utilizzato il risultato noto:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\alpha X}|p\rangle = |p - \alpha\rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dall'azione dei raggi operatori unitari in Eq: (31), si ricava l'azione del gruppo  $\mathcal{A}_x$  su  $L^2(\mathbb{R})$  come l'azione del prodotto delle rappresentazioni unitarie proiettive  $\hat{U}_{a_n}$  sullo spazio hilbertiano considerato

$$\begin{aligned} (\hat{U}_{a(t)}\psi)(p) &= \left(\prod_{n=0}^{\infty} \hat{U}_{a_n}\psi\right)(p) \\ &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}\right] \psi\left(p + m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n-1} a_n}{(n-1)!}\right) \\ &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}pa(t)\right] \psi(p + m\dot{a}(t)), \end{aligned} \quad (32)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è tenuta in considerazione l'Eq: (17).

Pertanto come rappresentazione di  $\mathcal{A}_x$  in  $L^2(\mathbb{R})$  si ha

$$\hat{U}_{a(t)} = e^{\frac{i}{\hbar}(a(t)p - m\dot{a}(t)X)}. \quad (33)$$

<sup>19</sup>I raggi operatori sono indicati con l'accento circonflesso posto sopra il simbolo che denota l'operatore.

Si presti attenzione al fatto che l'insieme  $\{\hat{U}_{a(t)} : a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\}$  è un gruppo di Lie con la legge di composizione

$$(\hat{U}_{a(t)}\hat{U}_{a'(t)}\psi)(p) = (\hat{U}_{a(t)+a'(t)}\psi)(p)$$

e trivialmente si mostra che è connesso. Il seguente teorema mostra allora la validità della prima uguaglianza dell'Eq: (32), ovvero mostra come, volendo arrivare ad una rappresentazione di  $\mathcal{A}_x$ , si sia presa la produttoria delle rappresentazioni dei sottogruppi  $\mathcal{A}_{x,n}$ .

**Teorema 7.** *Se  $G$  è un gruppo di Lie connesso,  $\forall g \in G$  esistono  $x_1, \dots, x_n \in LieG$  tali che*

$$g = e^{x_1} \dots e^{x_n}$$

Dunque dai generatori trovati in precedenza si è potuto risalire alla rappresentazione del gruppo  $\mathcal{A}_x$ .

Scegliendo due rappresentative  $U_{a_1(t)}$  e  $U_{a_2(t)}$  dei raggi operatori definiti in Eq: (33) si calcola la fase dipendente da  $a_1(t)$  e  $a_2(t)$ , ossia quella funzione  $\beta(a_1, a_2)$  tale che:

$$U_{a_1(t)}U_{a_2(t)} = e^{i\beta(a_1, a_2)}U_{a_1(t)+a_2(t)} \quad (34)$$

Pertanto considerando l'azione dei due operatori  $U_{a_1(t)}$  e  $U_{a_2(t)}$  su una funzione d'onda  $\psi$  si ha:

$$\begin{aligned} (U_{a_1(t)}U_{a_2(t)}\psi)(p) &= e^{\frac{i}{\hbar}pa_1(t)}(U_{a_2(t)}\psi)(p + m\dot{a}_1(t)) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}pa_1(t)} e^{\frac{i}{\hbar}a_2(t)(p+m\dot{a}_1(t))} \psi(p + m\dot{a}_1(t) + m\dot{a}_2(t)) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}ma_2(t)\dot{a}_1(t)} (U_{a_1(t)+a_2(t)}\psi)(p). \end{aligned} \quad (35)$$

Dunque l'Eq: (35) rende, in base a quanto esposto in Eq: (34), una fase  $\beta(a_1, a_2) = (m/\hbar)\dot{a}_1(t)a_2(t)$ . In particolare si ottiene

$$U_{a(t)}U_{-a(t)} = e^{-i\frac{m}{\hbar}a(t)\dot{a}(t)} \mathbb{I}.$$

Da cui:

$$U_{a(t)}^{-1} = e^{i\frac{m}{\hbar}a(t)\dot{a}(t)} U_{-a(t)}. \quad (36)$$

Si vuole ora trovare per completezza l'azione del gruppo delle accelerazioni lineari nella rappresentazione della posizione.

In questo caso, l'azione del gruppo  $\mathcal{A}_x$  si ricava facendo agire  $\hat{U}_{a(t)} := \mathcal{F}\hat{U}_{a(t)}$  su  $\varphi(x) =$

$(\mathcal{F}\psi)(x)$ , dove  $\mathcal{F}$  indica l'operatore di trasformata di Fourier, e risulta:

$$\begin{aligned}
(\hat{U}_{a(t)}\varphi)(x) &= (\hat{U}_{a(t)}\mathcal{F}\psi)(x) = (\mathcal{F}\hat{U}_{a(t)}\psi)(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}p(x+a(t))} \psi(p+m\dot{a}(t)) dp \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}m\dot{a}(t)(x+a(t))} e^{\frac{i}{\hbar}(p+m\dot{a}(t))(x+a(t))} \psi(p+m\dot{a}(t)) dp \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}m\dot{a}(t)(x+a(t))} \varphi(x+a(t)).
\end{aligned} \tag{37}$$

Si consideri un sistema di riferimento  $\Sigma$  in caduta libera. La simmetria che realizza la trasformazione tra un sistema di riferimento inerziale  $\Sigma'$  e  $\Sigma$  si trova semplicemente prendendo come funzione  $a(t) = \frac{1}{2}gt^2$ , dove  $g$  rappresenta l'accelerazione gravitazionale. La funzione d'onda derivante dalla simmetria è allora data dall'equazione precedente e risulta

$$\varphi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}mgt(x+\frac{1}{2}mgt^2)} \varphi'(x + \frac{1}{2}mgt^2, t).$$

Ricordando il risultato trovato nel primo capitolo, dove si era trovato

$$\phi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}mgt(x+\frac{1}{6}mgt^2)} \phi'(x + \frac{1}{2}mgt^2, t),$$

si vede come i due procedimenti non conducano allo stesso risultato e questo è sintomatico del fatto che non si ricaverà la stessa espressione per l'equazione di Schrödinger.

A questo punto della trattazione si possiedono gli strumenti necessari per calcolare il trasformato dell'operatore hamiltoniano. A priori non si può sapere se la simmetria di cui si è calcolato l'operatore associato sia o meno una simmetria dinamica, dunque al fine di derivare l'hamiltoniano si sfrutta il fatto che la simmetria fisica rappresentata da un generico  $U_{a(t)}$  non modifica in forma l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo

$$H\psi_t = i\hbar \frac{\partial\psi_t}{\partial t}.$$

Infatti, applicando ad ambo i termini dell'equazione  $U_{a(t)}$ , si ottiene

$$\begin{aligned}
U_{a(t)}HU_{a(t)}^{-1}U_{a(t)}\psi_t &= i\hbar U_{a(t)} \frac{\partial\psi_t}{\partial t} \\
&= i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial t} (U_{a(t)}\psi_t) - \frac{\partial U_{a(t)}}{\partial t} \psi_t \right],
\end{aligned} \tag{38}$$

definendo poi come  $\psi'_t := U_{a(t)}\psi_t$  la funzione d'onda della particella in un sistema di riferimento accelerato e denotando con  $H' := U_{a(t)}HU_{a(t)}^{-1}$  l'operatore hamiltoniano associato

alla simmetria, si ricava dall'Eq: (38)

$$H'\psi'_t = i\hbar \frac{\partial \psi'_t}{\partial t} + \frac{\partial U_{a(t)}}{\partial t} U_{a(t)}^{-1} \psi'_t$$

da cui subito:

$$\left[ H' - \frac{\partial U_{a(t)}}{\partial t} U_{a(t)}^{-1} \right] \psi'_t = i\hbar \frac{\partial \psi'_t}{\partial t}. \quad (39)$$

Si calcolano ora separatamente i due termini tra parentesi quadre nel primo membro dell'Eq: (39).

Per il secondo termine, essendo la derivata rispetto al tempo di  $U_{a(t)}$  definita come

$$\frac{\partial U_{a(t)}}{\partial t} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{U_{a(t+\varepsilon)} - U_{a(t)}}{\varepsilon},$$

si ha:

$$\begin{aligned} & \left( i\hbar \frac{\partial U_{a(t)}}{\partial t} U_{a(t)}^{-1} \psi \right) (p) \\ &= i\hbar \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{U_{a(t+\varepsilon)} U_{a(t)}^{-1} - \mathbb{I}}{\varepsilon} \psi \right) (p) \\ &= i\hbar \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{U_{a(t)+\varepsilon \dot{a}(t)} U_{a(t)}^{-1} - \mathbb{I}}{\varepsilon} \psi \right) (p) \\ &= i\hbar \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} m \varepsilon a(t) \ddot{a}(t)} U_{\varepsilon \dot{a}(t)} - \mathbb{I}}{\varepsilon} \psi \right) (p) \\ &= i\hbar \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} m \varepsilon a(t) \ddot{a}(t)} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} (\dot{a}(t)p - m\ddot{a}(t)X)} - \mathbb{I}}{\varepsilon} \psi \right) (p) \\ &= i\hbar \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\left[ 1 + \frac{i}{\hbar} m \varepsilon a(t) \ddot{a}(t) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} (\dot{a}(t)p - m\ddot{a}(t)X) \right] \psi(p) - \psi(p)}{\varepsilon} \\ &= (m\ddot{a}(t)X - \dot{a}(t)p + ma(t)\ddot{a}\mathbb{I})\psi(p). \end{aligned} \quad (40)$$

Dove nella quarta uguaglianza si è fatto uso dell'Eq: (36).

Per il primo termine dell'Eq: (39), prendendo come hamiltoniana  $H = (P^2/2m)$ , ovvero



l'hamiltoniana di una particella libera in un sistema di riferimento inerziale, si ha

$$\begin{aligned}
H' &= U_{a(t)} \frac{P^2}{2m} U_{a(t)}^{-1} \\
&= \frac{1}{2m} \left[ U_{a(t)} P U_{a(t)}^{-1} U_{a(t)} P U_{a(t)}^{-1} \right] \\
&= \frac{1}{2m} (P^2 + m\dot{a}(t)\mathbb{I})^2 \\
&= \frac{P^2}{2m} + \dot{a}(t)P + \frac{m\dot{a}^2(t)}{2}\mathbb{I},
\end{aligned} \tag{41}$$

dove nella terza uguaglianza uguaglianza si è utilizzato il fatto che l'operatore impulso, in analogia al risultato classico in Eq: (15), trasforma come<sup>20</sup>:

$$U_{a(t)} P U_{a(t)}^{-1} = P + m\dot{a}(t)\mathbb{I}.$$

Pertanto, tenendo in considerazione le Eq: (40) e (41), l'Eq: (39) si riscrive come:

$$\left[ \frac{P^2}{2m} + m \left( \ddot{a}(t)X + \left( \frac{\dot{a}^2(t)}{2} + a(t)\ddot{a}(t) \right) \mathbb{I} \right) \right] \psi'_t = i\hbar \frac{\partial \psi'_t}{\partial t}. \tag{42}$$

Nel primo membro tra parentesi quadre compare quello che può essere definito come l'analogo quantistico di un potenziale dovuto a forze fittizie proporzionale ad  $m$

$$V_{fic} := m \left( \ddot{a}(t)X + \left( \frac{\dot{a}^2(t)}{2} + a(t)\ddot{a}(t) \right) \mathbb{I} \right).$$

Nel caso di una particella libera in caduta libera si può ora descrivere il moto nel sistema di riferimento  $\Sigma$  solidale alla particella. Al solito si prende la funzione  $a(t) = \frac{1}{2}gt^2$  e si stima  $V_{fic}$  dall'Eq: (42)

$$V_{fic} := m \left( gX + g^2 t^2 \mathbb{I} \right).$$

Il potenziale presenta un termine aggiuntivo rispetto a quello atteso  $V = mgX$  e, come esposto nell'introduzione, questo è sintomatico del fatto che in meccanica quantistica il principio di equivalenza debole sia violato.

---

<sup>20</sup>Sempre tenendo presente l'Eq: (15) si ottiene per l'operatore posizione:

$$U_{a(t)} X U_{a(t)}^{-1} = X + a(t)\mathbb{I}.$$

Non bisogna confondere questo operatore con l'operatore  $X_1$ , che è generatore di un sottogruppo delle accelerazioni lineari.

## Conclusioni

Nel trattato si sono esposte la basi per effettuare un'analisi della caduta libera di un oggetto quantistico. Questa disquisizione ha avuto principio da una discussione del problema nell'ambito della meccanica lagrangiana e hamiltoniana, per poi essere estesa alla meccanica quantistica tramite il concetto di simmetria. Da qui si sono mossi i passi all'interno della teoria dei gruppi e teoria delle rappresentazioni, che hanno concesso un approfondimento dei concetti di trasformazione. In particolare si sono esposti gli strumenti necessari per descrivere una simmetria in meccanica quantistica, con il fine di trovare una rappresentazione unitaria di un gruppo, denotato come *gruppo delle accelerazioni lineari*, che avesse come sede della rappresentazione uno spazio di Hilbert di una particella di massa  $m$ . Questo gruppo contiene al suo interno quello delle trasformazioni tra un generico sistema di riferimento inerziale e un sistema che sta accelerando lungo un asse con accelerazione costante. Trovando così questa rappresentazione, che non è altro, per il teorema di Wigner, che un operatore unitario, si è ricavata l'equazione di Schrödinger per una particella in caduta libera in un sistema di riferimento solidale ad essa su cui agiscono gli analoghi quanto-meccanici delle forze fittizie. L'equazione contiene un termine di potenziale che differisce da quello ottenuto descrivendo lo stato nel sistema di riferimento inerziale, facendo impiego delle coordinate del sistema solidale alla particella. Dunque il principio di equivalenza risulta generalmente violato in meccanica quantistica; il potenziale fittizio trovato nel terzo capitolo non corrisponde al potenziale gravitazionale.

## Bibliografia

- [1] W.H. Klink, *Quantum Mechanics in Non Inertial Reference Frames*, Annals of Physics, ottobre 1997, Vol.260(1), 27-49
- [2] W.H. Klink, *Quantum Mechanics in Non Inertial Reference Frames and Representation of the Euclidean Line Group*, Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics, 1997, Vol.2, 254-261
- [3] W.H. Klink and S. Wickramasekara, *Quantum Mechanics in Non Inertial Reference Frames: Violations of the Nonrelativistic Equivalence Principle*, Annals of Physics, January 2014, Vol.340(1), 94–109
- [4] E.P. Wigner, *Group Theory and its applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York, 1959
- [5] F. Fassò, *Dispense per il corso di Istituzioni di Fisica Matematica per il corso di laurea in Fisica - a.a. 2015/2016*, CLEUP Italia, 2015
- [6] A.Zampini, *Il Limite Classico della Meccanica Quantistica nella Formulazione alla Weyl-Wigner*, Università degli Studi di Napoli "Federico II", Tesi di Laurea in Fisica, A.A 2000-2001
- [7] C. Rossetti, *Metodi Matematici Della Fisica*, Libreria Editrice Universitaria Levrotto & Bella Torino, 2000
- [8] Lec D. Landau and E. M. Lifshits, *Fisica Teorica 1. Meccanica*, Editori Riuniti university press, 1958
- [9] Lec D. Landau and E. M. Lifshits, *Fisica Teorica 3. Meccanica Quantistica: Teoria Non-Relativistica*, Editori Riuniti university press, 1958
- [10] J.F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Techniques of Physics (Book 1), Academic Press, Abridged edition, 1997
- [11] B.C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2004
- [12] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Westview Press, 1990
- [13] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 1958

## Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il mio relatore Marco Matone, non solo perché mi ha concesso l'opportunità di laurearmi, ma soprattutto perché è stato figura d'ispirazione, facendomi comprendere come si possa fare fisica senza perdere il contatto con una realtà necessaria per compiere dei lavori astrusi e spesso incomprensibili ai più.

Vorrei ringraziare le mie due famiglie, quella di nascita e quella di adozione qui a Padova, perché mi hanno fatto capire il senso stesso della parola *famiglia* come gruppo indivisibile di persone.

Vorrei ringraziare tutti i miei amici di cui non citerò il nome per non commettere l'errore di tralasciarne nessuno.

Vorrei ringraziare i miei *migliori* amici, Alessandra, l'unica persona in cui riesca ad immedesimarmi in ogni situazione, e infine Sami, amico e mentore, che non solo mi è stato sempre vicino, ma mi ha permesso di distinguere felicità e soddisfazione, e la vera amicizia da tutte quelle forme surrogate di fede verso il prossimo.