Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

# Vibrazioni in mezzi continui

Relatore:
Prof. Giulio G. Giusteri

Laureando: Gianluigi Vecchini
Matricola: 2002612

Anno Accademico 2022/2023

15/12/2023

# Indice

# Introduzione

In questo elaborato tratteremo il fenomeno delle vibrazioni nei mezzi continui, ovvero delle onde di piccola ampiezza attorno allo stato d'equilibrio. Nel primo capitolo inizieremo lo studio di questo argomento introducendo alcune nozioni fondamentali della meccanica dei continui, come l'equazione di continuità, il tensore degli sforzi e la deduzione dell'equazione del moto per un continuo, anche chiamata equazione di Cauchy. Successivamente, nel secondo e terzo capitolo, considereremo due diversi tipi di corpi continui e ne studieremo le vibrazioni; questi sono i fluidi Newtoniani comprimibili e i corpi solidi elastici. In entrambi i casi utilizzeremo delle equazioni costitutive per ricavare un tensore degli sforzi adatto al nostro modello fisico. Infine, linearizzando le nuove equazioni del moto ricaveremo le equazioni per le onde, studiando le loro possibili soluzioni ed alcune proprietà fisiche.

# Capitolo 1

# Elementi di meccanica dei continui

Lo scopo di questo capitolo è quello di introdurre alcuni dei risultati principali sui corpi continui, necessari per lo studio delle vibrazioni. Questo materiale è presentato nelle dispense [1, 2].

## 1.1 Cinematica dei corpi continui

Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^3$ delle coordinate su uno spazio affine tridimensionale nel quale avviene il fenomeno fisico e indichiamo con $t \in \mathbb{R}^+$ il paramentro temporale. Definiamo, ora, la *configurazione di riferimento* $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^3$, ovvero l'insieme delle particelle che compongono il corpo considerato in un istante iniziale $t = 0$. Ognuna di queste particelle verrà inidicata con un vettore $\vec{\boldsymbol{X}} = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$. Invece, per indicare la posizione di una particella in un'istante $t$ generico, utiliziamo la notazione $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Possiamo quindi introdurre la funzione che ad ogni coppia $(\vec{\boldsymbol{X}}, t)$ assegna la posizione della particella $\vec{\boldsymbol{X}}$ nell'istante $t$, tale funzione $\vec{\boldsymbol{\varphi}} : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ viene detta *piazzamento.*

Noi supporremo che la funzione piazzamento sia iniettiva per ogni $t$ e quindi invertibile sulla sua immagine e che $\vec{\boldsymbol{\varphi}}, \vec{\boldsymbol{\varphi}}^{-1}$ siano enrambe di classe $\mathcal{C}^3$, così da non avere problemi di regolarità.

**Osservazione 1.** *In generale, le coordinate materiali vengono utilizzate per riferirsi ad uno specifico punto $P$ del corpo $\mathcal{B}$, mentre le coordinate spaziali per parlare della posizione occupata da un punto $P$ nello spazio $\mathbb{R}^3$.*

### 1.1.1 Derivata materiale

Prendiamo in considerazione un campo scalare $F(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$ in coordinate spaziali. A diferenza dei campi in coordinate materiali, per un campo in coordinate spaziali sono definibili due tipi di derivate temporali: una è la *derivata parziale* $\frac{\partial}{\partial t} F(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$ rispetto alla seconda variabile $t$, che rappresenta la variazione del campo nel tempo per un'osservatore fermo in $\vec{\boldsymbol{x}}$; l'altra è la *derivata materiale*, la quale rappresenta la variazione del campo $F(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$ lungo le linee del moto di un punto materiale $\vec{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{B}$. Definiamo quest'ultima derivata nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(\vec{\boldsymbol{x}},t) &\equiv \left(\frac{d}{dt}F(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t),t)\right)_{|\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{\varphi}}^{-1}(\vec{\boldsymbol{x}},t)} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}F(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t),t) + \operatorname{grad}_{\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t)} F(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t),t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t)\right)_{|\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{\varphi}}^{-1}(\vec{\boldsymbol{x}},t)} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}F(\vec{\boldsymbol{x}},t) + \operatorname{grad}_{\vec{\boldsymbol{x}}} F(\vec{\boldsymbol{x}},t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}^{-1}(\vec{\boldsymbol{x}},t),t).
\end{aligned}
$$

### 1.1.2 Velocità ed accelerazione

Possiamo ora introdurre la velocità in coordinate spaziali. Preso in considerazione il campo di velocità in coordinare materiali $\vec{\boldsymbol{V}}(\vec{\boldsymbol{X}},t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t)$ è verificabile che il campo di velocità nelle coordinate spaziali $\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t) \equiv \vec{\boldsymbol{V}}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}^{-1}(\vec{\boldsymbol{x}},t),t)$ sia esprimibile come la derivata materiale dello spostamento. Infatti:

$$
\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{x}} = \left[\frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t)\right]_{|\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{\varphi}}^{-1}(\vec{\boldsymbol{x}},t)} = \vec{\boldsymbol{V}}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}^{-1}(\vec{\boldsymbol{x}},t),t) \Rightarrow \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t) = \frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{x}} \tag{1.1}
$$

Utilizzando questo risultato, siamo in grado di scrivere la derivata materiale di un campo scalare nella sua forma più concisa:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(\vec{\boldsymbol{x}},t) &= \frac{\partial}{\partial t}F(\vec{\boldsymbol{x}},t) + \operatorname{grad}_{\vec{\boldsymbol{x}}} F(\vec{\boldsymbol{x}},t)\frac{\partial}{\partial t}\cdot\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}F(\vec{\boldsymbol{x}},t) + \operatorname{grad} F(\vec{\boldsymbol{x}},t)\cdot\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t).
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Se il campo è vettoriale, essa diventa

$$
\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}},t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}},t) + \operatorname{grad}(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}},t))\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t). \tag{1.3}
$$

Ora, sostituendo a $\vec{\boldsymbol{F}}$ il campo di velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$ possiamo introdurre il *campo di accelerazione*:

$$
\vec{\boldsymbol{a}}(\vec{\boldsymbol{x}},t) \equiv \frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t) + \operatorname{grad}(\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t))\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t). \tag{1.4}
$$

Il termine $\operatorname{grad}(\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t))\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t)$ viene detto *termine convettivo* ed è molto importante, poiché rende le equazioni dei corpi continui non linerari.

## 1.2 Equazione di continuità

Una delle caratteristiche principali dei corpi continui è che essi possiedono massa. In questa sezione introdurremo quindi l'equazione di bilancio legata alla conservazione di quest'ultima. Prima di fare ciò enunceremo un teorema che ci permetterà di calcolare la variazione nel tempo di un integrale definito su un insieme trasportato dal moto.

Supponiamo che $\mathcal{P}$ sia un insieme aperto e limitato di particelle nella configurazione di riferimento e definiamo $\mathcal{P}(t) = \vec{\boldsymbol{\varphi}}(\mathcal{P},t)$ in modo da avere $\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}$.

**Teorema (Teorema del Trasporto).** *Sia $\Phi(\vec{\boldsymbol{x}},t)$ un campo scalare, vale che:*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}(t)}\Phi(\vec{\boldsymbol{x}},t)dV=\int_{\mathcal{P}(t)}\frac{d}{dt}\Phi(\vec{\boldsymbol{x}},t)+\Phi(\vec{\boldsymbol{x}},t)\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t))dV. \tag{1.5}$$

*Dimostrazione.* Poniamo $J(\vec{\boldsymbol{X}},t)\equiv\det(\operatorname{grad}(\varphi(\vec{\boldsymbol{X}},t)))$ e utilizzando un cambio di variabili da coordinate spaziali a materiali otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}(t)}\Phi(\vec{\boldsymbol{x}},t)dV&=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}}\Phi(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t),t)JdV\\&=\int_{\mathcal{P}}\left[\frac{d}{dt}\Phi(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t),t)J+\Phi(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t),t)\frac{\partial}{\partial t}J\right]dV.\end{aligned}$$

Ora, utilizzando la formula di Eulero $\frac{\partial}{\partial t}J(\vec{\boldsymbol{X}},t)=J(\vec{\boldsymbol{X}},t)\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t),t))$ e applicando il cambio di variabili inverso al precedente otteniamo il risultato:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{P}}\left[\frac{d}{dt}\Phi(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t),t)J+\Phi(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t),t)\frac{\partial}{\partial t}J\right]dV=\\&=\int_{\mathcal{P}}\left[\frac{d}{dt}\Phi(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t),t)J+\Phi(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t),t)J\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}},t),t))\right]dV\\&=\int_{\mathcal{P}(t)}\left[\frac{d}{dt}\Phi(\vec{\boldsymbol{x}},t)+\Phi(\vec{\boldsymbol{x}},t)\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t))\right]dV.\end{aligned}$$

□

### 1.2.1 Principio di conservazione della massa

È ora possibile introdurre il concetto di massa. Supporremo che per ogni $t$ esista una funzione *densità di massa* $\rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)$ di classe $\mathcal{C}^1$ ed integrabile, tale che dato un insieme $\mathcal{P}(t)=\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\mathcal{P},t)$ aperto e limitato di particelle, la massa di $\mathcal{P}(t)$ si esprima come

$$M(\mathcal{P}(t))=\int_{\mathcal{P}(t)}\rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)dV. \tag{1.6}$$

**Osservazione 2.** *Facciamo alcune osservazioni su questo nuovo campo scalare:*

- *Il campo $\rho(\cdot,t)$ rappresenta la densità di massa della configurazione all'istante $t$.*
- *L'unità di misura di $\rho$ è necessariamente $[kg/m^3]$.*
- *Vale la seguente proprietà: $\rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)=\lim_{r\to0}\frac{M(B_r(\vec{\boldsymbol{x}}))}{\operatorname{Vol}(B_r(\vec{\boldsymbol{x}}))}$, dove $\operatorname{Vol}(B_r(\vec{\boldsymbol{x}}))$ è il volume della palla di centro $\vec{\boldsymbol{x}}$ e raggio $r$.*
- *Indicheremo con $\rho_0(\vec{\boldsymbol{X}})=\rho(\vec{\boldsymbol{X}},0)$ la densità di massa nella configurazione di riferimento.*

- *La densità $\rho$ è una misura completa, misurabilmente additiva e assolutamente continua rispetto a quella di Lebesgue. In questo modo, se il volume dell'insieme considerato è nullo* ($\mathrm{Vol}(\mathcal{P}) = 0$) *anche la massa deve essere nulla* ($M(\mathcal{P}) = 0$).

Durante il moto di un corpo $\mathcal{B}$, il volume occupato da un suo generico insieme di particelle $\mathcal{P}$ può variare nel tempo, ma la massa no. Esprimiamo quindi il *principio di conservazione della massa* dicendo che la massa di $\mathcal{P}$ si conserva nel moto. Ovvero, per ogni $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ e per ogni tempo $t$ vale

$$M(\mathcal{P}(t)) = M(\mathcal{P}). \tag{1.7}$$

Da questo deduciamo che la densità $\rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$ di $\mathcal{B}(t)$ lungo le linee di moto $\vec{\boldsymbol{x}}$ deve dipendere dal tempo e dalla densità $\rho_0(\vec{\boldsymbol{X}})$ della configurazione di riferimento, infatti:

$$\int_{\mathcal{P}(t)} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) dV = \int_{\mathcal{P}} \rho(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t), t) J(\vec{\boldsymbol{X}}, t) dV = M(\mathcal{P}(t)) = M(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \rho_0(\vec{\boldsymbol{X}}) dV.$$

Per la continuità delle funzioni sotto integrale e per l'arbitrarietà di $\mathcal{P}$ otteniamo la *formulazione lagrangiana* della conservazione della massa:

$$\rho(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t), t) J(\vec{\boldsymbol{X}}, t) = \rho_0(\vec{\boldsymbol{X}}). \tag{1.8}$$

Un'altro modo per esprimere la conservazione della massa è quello di utilizzare il Teorema del Trasporto:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} M(\mathcal{P}(t)) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}(t)} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) dV \\ &= \int_{\mathcal{P}(t)} \left[ \frac{d}{dt} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) + \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)) \right] dV. \end{aligned}$$

Utilizzano di nuovo l'arbitrarietà di $\mathcal{P}$, otteniamo la formulazione locale della conservazione della massa in coordinate spaziali, anche nota come *equazione di continuità* per $\rho$:

$$\frac{d}{dt} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) + \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)) = 0. \tag{1.9}$$

Vediamo ora una terza formulazione del principio di conservazione della massa, questa volta per un volume fisso. Consideriamo una regione dello spazio $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$ non dipendente dal tempo, tale che per un intervallo di tempo $[0, \delta)$ con $\delta > 0$ valga $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(t)$. Integriamo su $\mathcal{R}$ l'equazione di continuità e applichiamo il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{R}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) + \operatorname{div}(\rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)) \right] dV \\ &= \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \cdot n dS. \end{aligned}$$

Ossia:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}(t)} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) dV = - \int_{\partial\mathcal{R}} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} dS.$$

Questo risultato ha il seguente significato fisico: la variazione della massa di $\mathcal{R}$ è uguale al flusso di massa attraverso la frontiera di $\mathcal{R}$.

L'equazione di continuità ci permette di dimostrare la seguente variante del teorema del trasporto:

**Corollario 3.** *Considerato il campo scalare* $\Phi(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$*, abbiamo che:*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}(t)} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\Phi(\vec{\boldsymbol{x}}, t) dV = \int_{\mathcal{P}(t)} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\frac{d}{dt}\Phi(\vec{\boldsymbol{x}}, t) dV \tag{1.10}$$

*Dimostrazione.* Applicando il teorema del trasporto otteniamo

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}(t)} \rho\Phi(\vec{\boldsymbol{x}}, t) dV = \\
&= \int_{\mathcal{P}(t)} \left[\rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\frac{d}{dt}\Phi(\vec{\boldsymbol{x}}, t) + \Phi(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\frac{d}{dt}\rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) + \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\Phi(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t))\right] dV \\
&= \int_{\mathcal{P}(t)} \left[\rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\frac{d}{dt}\Phi(\vec{\boldsymbol{x}}, t) + \Phi(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\left(\frac{d}{dt}\rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) + \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t))\right)\right] dV \\
&= \int_{\mathcal{P}(t)} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\frac{d}{dt}\Phi(\vec{\boldsymbol{x}}, t) dV,
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio, abbiamo utilizzato l'equazione di continuità. □

## 1.3 Dinamica dei corpi continui

In questa sezione affronteremo alcune delle nozioni base della dinamica dei corpi continui; per farlo introdurremo un nuovo tipo di forze: le forze di contatto. Arriveremo poi ad ottenere una delle equazioni fondamentali della meccanica dei continui, l'equazione di Cauchy.

### 1.3.1 Equazioni di bilancio del momento di un corpo continuo

Come prima cosa definiamo il momento lineare ed angolare per un sottoinsieme $\mathcal{P}$ di $\mathcal{B}$ lungo il moto $\vec{\boldsymbol{x}}$. Fissiamo compe polo l'origine $O$ del sistema di riferimento e definiamo:

$$\text{Momento lineare: } \mathcal{Q}(t) = \int_{\mathcal{P}(t)} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) dV \tag{1.11}$$

$$\text{Momento angolare: } \mathcal{M}_O(t) = \int_{\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) dV \tag{1.12}$$

Prima di esprimere le equazioni del moto per un sottoinsieme $\mathcal{P}(t)$ del corpo continuo, analizziamo quali siano le forze che agiscono su $\mathcal{P}(t)$. Esse sono:

1. **Forze di volume**: quelle forze causate dall'interazione a distanza tra $\mathcal{P}(t)$ ed un altro corpo. Un esempio è la forza gravitazionale. Assumeremo che esse ammettano una *densità di forza per unità di massa* $\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$, in modo che la risultante delle forze di volume sul corpo $\mathcal{P}(t)$ sia
$$\int_{\mathcal{P}(t)} \rho \vec{\boldsymbol{b}} dV.$$
2. **Forze esterne di contatto con la superficie**: quelle forze dovute all'interazione di contatto di $\mathcal{P}(t)$ con un altro corpo esterno a $\mathcal{B}(t)$. Assumeremo anche in questo caso che esse ammettano una *densità di forze esterne per unità di superficie* $\vec{\boldsymbol{\Sigma}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$, in modo che la risultante delle forze esterne di contatto su $\mathcal{P}(t)$ sia
$$\int_{\partial\mathcal{P}(t)\cap\partial\mathcal{B}(t)} \vec{\boldsymbol{\Sigma}} dS.$$
3. **Forze interne**: dovute all'interazione tra i punti materiali di $\mathcal{P}(t)$ in contatto tra loro. Considerando i fluidi, un'esempio intuitivo è la pressione subita dalla regione a causa dell'acqua circostante. Assumeremo che esse ammettano una *densità di forze interne per unità di superficie* $\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$, in modo che la risultante delle forze interne di contatto su $\mathcal{P}(t)$ sia
$$\int_{\partial\mathcal{P}(t)\setminus\partial\mathcal{B}(t)} \vec{\boldsymbol{t}} dS.$$

Notiamo che le forze interne sono un nuovo tipo di forze non presenti nello studio della dinamica dei punti. Adotteremo, per questo tipo di forze, il seguente postulato.

**Postulato di Cauchy.** *Consideriamo un sottoinsieme del corpo continuo $\mathcal{P}(t) \subseteq \mathcal{B}(t)$ in un'istante $t$ e una superficie $S$ interna ad esso orientata mediante una normale $\vec{\boldsymbol{n}}$. Esiste una **distribuzione di sforzi** $\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t; S)$ che rappresenta la densità di forza per unità di area esercitata attraverso $S$ dal materiale che sta da una parte di $S$ su quello che sta dall'altra parte. Tale ipotesi afferma in sostanza che le forze interne agiscono come un flusso attraverso la superficie $S$, e sono quindi forze di superficie. Facciamo, inoltre, le seguenti assunzioni sulla distribuzione di sforzi:*

- $\vec{\boldsymbol{t}}$ *si orienta convenzionalmente nella direzione della forza esercitata dalla parte positiva di $S$ (ovvero dalla parte di $\vec{\boldsymbol{n}}$) verso quella negativa (ovvero quella di $-\vec{\boldsymbol{n}}$)*
- $\vec{\boldsymbol{t}}$ *dipende dalla superficie $S$ solo attraverso la normale $\vec{\boldsymbol{n}}$, ovvero $\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t; S) = \vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t; \vec{\boldsymbol{n}})$*
- $\vec{\boldsymbol{t}}$ *dipende dalla normale in modo continuo ed è di classe $\mathcal{C}^1$ in $\vec{\boldsymbol{x}}$*

Prendiamo ora in considerazione le forze sopra introdotte e supponiamo che $\mathcal{P}(t) \cap \partial\mathcal{B}(t) = \varnothing$, in questo modo possiamo ignorare il termine $\boldsymbol{\Sigma}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$. Scriviamo le equazioni di bilancio della quantità di moto e del suo momento:
$$\frac{d}{dt}\mathcal{Q}(t) = \int_{\mathcal{P}(t)} \rho \vec{\boldsymbol{b}} dV + \int_{\partial\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t; \vec{\boldsymbol{n}}) dS,$$
$$\frac{d}{dt}\mathcal{M}_O(t) = \int_{\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \rho \vec{\boldsymbol{b}} dV + \int_{\partial\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t; \vec{\boldsymbol{n}}) dS.$$

**Osservazione 4.** *Utilizzando il corollario (3) abbiamo che*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Q}(t) = \int_{\mathcal{P}(t)} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)dV,$$
$$\frac{d}{dt}\mathcal{M}_O(t) = \int_{\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)dV.$$

*Otteniamo quindi le seguenti equazioni di bilancio:*

$$\int_{\mathcal{P}(t)} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)dV = \int_{\mathcal{P}(t)} \rho\vec{\boldsymbol{b}}dV + \int_{\partial\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t; \vec{\boldsymbol{n}})dS, \tag{1.13}$$
$$\int_{\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}, t)dV = \int_{\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \rho\vec{\boldsymbol{b}}dV + \int_{\partial\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t; \vec{\boldsymbol{n}})dS. \tag{1.14}$$

### 1.3.2 Teorema degli sforzi di Cauchy ed equazione di Cauchy

Possiamo ora introdurre uno dei teoremi fondamentali della meccanica dei continui.

**Teorema** (**Teorema degli sforzi di Cauchy**)**.** *Sia* $(\vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{t}})$ *il sistema di forze che agisce sul corpo* $\mathcal{P}(t) \subset \mathcal{B}(t)$ *durante l'evoluzione del moto* $\vec{\boldsymbol{x}}$*. Le equazioni di bilancio (1.13) e (1.14) valgono durante il moto se e solo se esiste un tensore* $\mathbf{T}$ *di ordine due, chiamato* ***tensore di Cauchy****, tale che:*

1. $\forall\vec{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{S}^2$ *e* $\forall(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$ *vale* $\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t, \vec{\boldsymbol{n}}) = \mathbf{T}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\vec{\boldsymbol{n}}$.

2. *Vale l'equazione di Cauchy*

$$\rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) = \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{x}}) + \mathrm{div}(\mathbf{T}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)). \tag{1.15}$$

3. $\mathbf{T}$ *è un tensore simmetrico.*

*Dimostrazione.* **Necessità**: Suppomiamo che le equazioni di bilancio valgano lungo il moto di $\mathcal{P}(t)$ e fissiamo la coppia ($\hat{\mathbf{x}}$,t), dove $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}(t)$. Possiamo quindi porre $\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{n}}) = \vec{\boldsymbol{t}}(\hat{\mathbf{x}}, t; \vec{\boldsymbol{n}})$. Considerariamo inoltre un sistema di riferimento $\{\hat{\mathbf{x}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ con centro in $\hat{\mathbf{x}}$, in modo da avere $\vec{\boldsymbol{n}} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$.
Possiamo ora definire il tetraedo $\Pi \equiv \Pi(r)$ formato dall'intersezione dei piani del sistema di riferimento con quello ortogonale a $\vec{\boldsymbol{n}}$ e distante $r > 0$ dall'origine. Denoteremo con $S_r$ l'area della faccia inclinata e con $S_r^{\,i}$ l'area della faccia con normale $-\vec{e}_i$. Facciamo delle osservazioni che tornaranno utili per la dimostrazione del teorema:

(i) $S_r^{\,i} = (\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_i)S_r = n_iS_r \Rightarrow \frac{1}{S_r} = \frac{n_i}{S_r^{\,i}}$.

(ii) $\mathrm{Vol}(\Pi) = cost \cdot r^3$, dove con $\mathrm{Vol}(\Pi)$ si intende il volume di $\Pi$.

(iii) $S_r \sim r^2$.

(iv) Dato che lo stress $\vec{\boldsymbol{t}}$ è continuo in $\vec{\boldsymbol{x}}$ per ogni $\vec{\boldsymbol{n}}$, vale il teorema di localizzazione: data una palla $\mathcal{B}(\delta)$ di centro $\vec{\boldsymbol{y}}$ e raggio $\delta$ si ha

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathcal{B}(\delta)} \vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}},t,\vec{\boldsymbol{n}})dS = \vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{y}},t,\vec{\boldsymbol{n}})$$

.

**Primo punto**: consideriamo ora l'equazione di bilancio del momento lineare sostituendo a $\mathcal{P}(t)$ il tetraedo $\Pi$

$$\int_{\Pi}\left[\rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t)-\rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{x}})\right]dV = \int_{\partial\Pi}\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}},t;\vec{\boldsymbol{n}})dS.$$

Dato che $\rho$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ e $\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}$ sono funzioni continue, esse sono limitate in $\Pi$, quindi

$$\left|\int_{\partial\Pi(r)}\vec{\boldsymbol{t}}dS\right| = \left|\int_{\Pi(r)}\rho(\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}-\vec{\boldsymbol{b}})dV\right| \leq \int_{\Pi(r)}\left|\rho(\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}-\vec{\boldsymbol{b}})\right|dV \leq cost\cdot Vol(\Pi(r)) = cost\cdot r^3,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato l'osservazione (ii). Ora, utilizzando anche l'osservazione (iii) e la disuguaglianza appena trovata otteniamo il limite

$$0 \leq \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{S_r}\left|\int_{\partial\Pi(r)}\vec{\boldsymbol{t}}dS\right| = \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{S_r}\left|\int_{\Pi(r)}\rho(\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}-\vec{\boldsymbol{b}})dV\right| \leq \lim_{r\to 0^+}\frac{cost\cdot r^3}{cost\cdot r^2} = 0.$$

Ossia:

$$0 = \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{S_r}\int_{\partial\Pi(r)}\vec{\boldsymbol{t}}dS = \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{S_r}\left[\int_{S_r}\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}},t,\vec{\boldsymbol{n}})dS + \sum_{i=1}^{3}\int_{S_r^i}\boldsymbol{t}(\vec{\boldsymbol{x}},t,-\vec{\boldsymbol{e}}_i)dS\right] = 0.$$

Ora, usando il teorema di localizzazione e la relazione del punto (i), otteniamo la seguente uguaglianza:

$$\lim_{r\to 0^+}\left[\frac{1}{S_r}\int_{S_r}\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}},t,\vec{\boldsymbol{n}})dS\right] = \vec{\boldsymbol{t}}(\hat{\mathrm{x}},t,\vec{\boldsymbol{n}}) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{3}\lim_{r\to 0^+}\left[\frac{n_i}{S_r^i}\int_{S_r^i}\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}},t,-\vec{\boldsymbol{e}}_i)dS\right] = -\sum_{i=1}^{3}n_i\vec{\boldsymbol{t}}(\hat{\mathrm{x}},t,-\vec{\boldsymbol{e}}_i).$$

Quindi per ogni $\vec{\boldsymbol{x}}\in\mathcal{P}(t)$ abbiamo che

$$\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}},t,\vec{\boldsymbol{n}}) = -\sum_{i=1}^{3}n_i\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}},t,-\vec{\boldsymbol{e}}_i).$$

Deduciamo il seguente fatto: assumendo che l'equazione di bilancio del momento lineare valga durante il moto abbiamo che il tensore di Cauchy $\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{n}})$ dipende in modo lineare da $\vec{\boldsymbol{n}}$.

**Osservazione 5.** *Se prendiamo l'equazione appena ottenuta, che vale per ogni $\vec{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{S}^2$, e poniamo $\vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{e}}_i$ otteniamo*

$$\vec{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_j = \delta_{ij} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t, \vec{\boldsymbol{e}}_i) = -\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} \vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t, -\vec{\boldsymbol{e}}_j) = -\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t, -\vec{\boldsymbol{e}}_i),$$

*ovvero:*

$$\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t, \vec{\boldsymbol{n}}) = \sum_{i=1}^{3} n_i \vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t, \vec{\boldsymbol{e}}_i).$$

Esiste quindi un tensore $\mathbf{T}$ di ortine due tale che $\forall \vec{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{S}^2$ e $\forall (\vec{\boldsymbol{x}}, t)$ vale

$$\vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t, \vec{\boldsymbol{n}}) = \mathbf{T}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\vec{\boldsymbol{n}}. \tag{1.16}$$

Abbiamo dimostrato il punto (1).

**Secondo punto**: riscriviamo l'equazione del momento lineare utilizzando il tensore di Cauchy e il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{P}(t)} \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) - \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{x}})dV = \int_{\partial\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t; \vec{\boldsymbol{n}})dS \\ &= \int_{\partial\mathcal{P}(t)} \mathbf{T}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\vec{\boldsymbol{n}}\ dS = \int_{\mathcal{P}(t)} \operatorname{div}(\mathbf{T}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{t}}))dV. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\mathcal{P}(t)$ otteniamo l'eqazione di Cauchy

$$\rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) = \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{x}}) + \operatorname{div}(\mathbf{T}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)). \tag{1.17}$$

**Terzo punto**: iniziamo la dimostrazione di questo punto notando che l'equazione di bilancio del momento angolare vale se e solo se vale la seguente equazione $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\int_{\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \cdot \vec{a}\ dV = \int_{\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \rho\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \cdot \vec{a}\ dV + \int_{\partial\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \mathbf{T}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{a}\ dS.$$

Riscriviamo il termine di superficie utilizzando il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \mathbf{T}\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{a}\ dS = \int_{\partial\mathcal{P}(t)} (\vec{a} \times \vec{\boldsymbol{x}}) \cdot \mathbf{T}\vec{\boldsymbol{n}}\ dS = \\ &= \int_{\partial\mathcal{P}(t)} \mathbf{T}^T(\vec{a} \times \vec{\boldsymbol{x}}) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\ dS = \int_{\mathcal{P}(t)} \nabla \cdot (\mathbf{T}^T(\vec{a} \times \vec{\boldsymbol{x}})\ dV. \end{aligned}$$

Ora utilizzando la formula $\nabla \cdot (\mathbf{T}^T(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{x}})) = div\mathbf{T} \cdot \vec{a} \times \vec{\boldsymbol{x}} + \mathbf{T} \cdot \nabla(\vec{a} \times \vec{\boldsymbol{x}})$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}(t)} \nabla \cdot (\mathbf{T}^T(\vec{a} \times \vec{\boldsymbol{x}})\ dV &= \int_{\mathcal{P}(t)} \operatorname{div}\mathbf{T} \cdot \vec{a} \times \vec{\boldsymbol{x}} + \mathbf{T} \cdot \nabla(\vec{a} \times \vec{\boldsymbol{x}})\ dV \\ &= \int_{\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \operatorname{div}\mathbf{T} \cdot \vec{a}\ dV + \int_{\mathcal{P}(t)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}\ dV. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Dove $\mathbf{A}$ è la matrice antisimmetrica associata alla funzione che manda il vettore $\vec{\boldsymbol{x}}$ nel vettore $\vec{\boldsymbol{x}} \times \vec{a}$. Riconsideriamo tutta l'equazione di bilancio inserendo quanto ottenuto sul termine di superficie:

$$\int_{\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t) \cdot \vec{a}\, dV = \int_{\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \rho\vec{\boldsymbol{b}}\, dV + \int_{\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \vec{a}\, dV + \int_{\mathcal{P}(t)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}\, dV.$$

Utilizzando l'equazione di Cauchy $\rho\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}} = \rho\vec{\boldsymbol{b}} + \operatorname{div}(\mathbf{T})$ otteniamo:

$$\int_{\mathcal{P}(t)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} dV = 0 \ \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3. \tag{1.19}$$

Deduciamo quindi che il tensore $\mathbf{T}$ è simmetrico.

**<u>Sufficienza</u>**: consideriamo un tensore $\mathbf{T}$ che soddisfi i punti (1), (2) e (3) del teorema. Per dimostrare la prima equazione di bilancio (1.13) basta prendere l'equazione di Cauchy (2), integrarla sull'insieme $\mathcal{P}(t)$, utilizzare il teorema della divergenza sull'integrale di forze di superficie ed applicare la sostituzione $\vec{\boldsymbol{t}} = \mathbf{T}\vec{\boldsymbol{n}}$ del punto (1).

Ora, per dimostrare la seconda equazionedi bilancio, prendiamo l'equazione di Cauchy (2) e la moltiplichiamo vettorialmente per $\vec{\boldsymbol{x}}$ e poi scalarmente per $\vec{\boldsymbol{a}}$, ottenendo

$$\left(\rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t)\right) \times \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} = \left(\rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{x}})\right) \times \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} + \operatorname{div}(\mathbf{T}(\vec{\boldsymbol{x}},t)) \times \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}.$$

Integriamo questa equazione su $\mathcal{P}(t)$

$$\int_{\mathcal{P}(t)} \left(\rho\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}\right) \times \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} dV = \int_{\mathcal{P}(t)} \left(\rho\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{x}})\right) \times \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} dV + \int_{\mathcal{P}(t)} \operatorname{div}(\mathbf{T}) \times \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} dV \tag{1.20}$$

e consideriamo l'ultimo termine, riscrivendolo utilizzando i calcoli del punto (1.18) e l'ipotesi di simmetria del tensore $\mathbf{T}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{P}(t)} \operatorname{div}(\mathbf{T}) \times \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} dV &= -\int_{\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \operatorname{div}(\mathbf{T}) \cdot \vec{\boldsymbol{a}} dV \\
&= \int_{\mathcal{P}(t)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}\, dV - \int_{\mathcal{P}(t)} \nabla \cdot (\mathbf{T}^T(\vec{a} \times \vec{\boldsymbol{x}})\, dV \\
&= -\int_{\mathcal{P}(t)} \nabla \cdot (\mathbf{T}^T(\vec{a} \times \vec{\boldsymbol{x}})\, dV = -\int_{\partial\mathcal{P}(t)} \mathbf{T}^T(\vec{a} \times \vec{\boldsymbol{x}}) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, dS \\
&= -\int_{\partial\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \mathbf{T}\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{a}\, dS \\
&= \int_{\partial\mathcal{P}(t)} \mathbf{T}\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{a}\, dS.
\end{aligned}$$

Quindi, inserendo quanto abbiamo trovato nella (1.20), abbiamo il risultato:

$$\int_{\mathcal{P}(t)} \left(\rho\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}\right) \times \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} dV = \int_{\mathcal{P}(t)} \left(\rho\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{x}})\right) \times \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} dV \int_{\partial\mathcal{P}(t)} \mathbf{T}\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{a}\, dS,$$

$$\int_{\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\mathbf{x},t) dV = \int_{\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \rho\vec{\boldsymbol{b}} dV + \int_{\partial\mathcal{P}(t)} \vec{\boldsymbol{x}} \times \vec{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{x}},t;\vec{\boldsymbol{n}}) dS.$$

□

## 1.4 Tensore degli sforzi in coordinate materiali

Dato che nella sezione precedente abbiamo introdotto il tensore degli sforzi in coordinate spaziali, dedichiamo ora qualche riga alla sua formulazione in coordinate materiali.

Consideriamo il tensore degli sforzi di Cauchy $\mathsf{T}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)$ e la funzione piazzamento $\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t)$. Richiamando la notazione $J(\vec{\boldsymbol{X}}, t) \equiv \det(\operatorname{grad}(\varphi(\vec{\boldsymbol{X}}, t)))$ e utilizzando il cambio di variabili da coordinate spaziali a materiali otteniamo che la risultante delle forze interne di contatto su un generico sottoinsieme del corpo continuo $\mathcal{P}(t) \subseteq \mathcal{B}(t)$ per ogni $t \in [0, T)$ può essere scritta come

$$\int_{\partial \mathcal{P}(t)} \mathsf{T}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\vec{\boldsymbol{n}} dS = \int_{\partial \mathcal{P}} \mathsf{T}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t), t) J(\vec{\boldsymbol{X}}, t) \left[ \left( \operatorname{grad} \varphi(\vec{\boldsymbol{X}}, t) \right)^{-T} \vec{\boldsymbol{\nu}} \right] dS,$$

dove $\vec{\boldsymbol{n}}$ e $\vec{\boldsymbol{\nu}}$ sono i vettori unitari normali alla superficie in un generico punto di $\partial\mathcal{P}(t)$ e di $\partial\mathcal{P}$. Ricordando che con Lin si intende l'insieme delle matrici invertibili $3 \times 3$, siamo in grado di definire il tensore degli sforzi $\mathsf{P} : \mathcal{B} \times [0, T) \to$ Lin sulla configurazione di riferimento, noto come *Tensore degli sforzi di Piola–Kirchhoff*:

$$\mathsf{P}(\vec{\boldsymbol{X}}, t) = J(\vec{\boldsymbol{X}}, t) \cdot \mathsf{T}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t), t)(\operatorname{grad} \varphi(\vec{\boldsymbol{X}}, t))^{-T}. \tag{1.21}$$

Possiamo ora scrivere le equazioni di bilancio (1.13) e (1.14) per $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ in coordinate materiali:

$$\int_{\mathcal{P}} \rho(\vec{\boldsymbol{\varphi}}, t)\, J\, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\boldsymbol{\varphi}}\, dV = \int_{\mathcal{P}} \rho(\vec{\boldsymbol{\varphi}}, t)\, J\, \vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}, t)\, dV + \int_{\partial \mathcal{P}} \mathsf{P}(\vec{\boldsymbol{X}}, t)\vec{\boldsymbol{\nu}}\, dS,$$
$$\int_{\mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{\varphi}} \times \rho(\vec{\boldsymbol{\varphi}}, t)\, J\, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\boldsymbol{\varphi}}\, dV = \int_{\mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{\varphi}} \times \rho(\vec{\boldsymbol{\varphi}}, t)\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}, t)\, J\, dV + \int_{\partial \mathcal{P}} \vec{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathsf{P}(\vec{\boldsymbol{X}}, t)\vec{\boldsymbol{\nu}}\, dS.$$

Dove abbiamo utilizzato la notazione $\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t) \equiv \vec{\boldsymbol{\varphi}}$ e $J(\vec{\boldsymbol{X}}, t) \equiv J$. Abbiamo quindi che l'equazione di Cauchy (1.17) in coordinate materiali diventa

$$\rho(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t), t)\, J\, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t) = \rho(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t), t)\, J\, \vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t), t) + \operatorname{div}(\mathsf{P}(\vec{\boldsymbol{X}}, t)). \tag{1.22}$$

# Capitolo 2

# Onde acustiche in fluidi comprimibili

L'obbiettivo di questo capitolo è studiare le piccole oscillazioni nel caso dei fluidi. Parte di quanto verrà affrontato è presentato nelle dispense [1, 2] e nel libro [3].

Partiamo dalle equazioni che abbiamo ricavato nel capitolo precedente:

$$\text{Equazione di continuità:} \qquad \frac{d}{dt}\rho(\vec{\boldsymbol{x}},t) + \rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t)) = 0. \tag{2.1}$$

$$\text{Equazione di Cauchy:} \qquad \rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t) = \rho(\vec{\boldsymbol{x}},t)\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{x}}) + \operatorname{div}(\mathsf{T}(\vec{\boldsymbol{x}},t)). \tag{2.2}$$

Il sitema di equazioni (2.1 – 2.2) è composto da 4 equazioni scalari ed ha un totale di 10 incognite scalari, rispettivamente $\vec{\boldsymbol{x}}, \rho$ e $\mathsf{T}$. Notiamo quindi che senza ulteriori relazioni tra le incognite non si riesce a determinare univocamente la soluzione. Introdurremo, per questo, delle equazioni aggiuntive che ci permetteranno di diminuire il numero di incognite, questo tipo di equazioni vengono chiamate *equazioni costitutive* per il tensore degli sforzi $\mathsf{T}$.

## 2.1 Equazioni costitutive ed equazione di Eulero

Per ricavare le equazioni cositutive è necessario fare delle scelte sul tipo di fluido che vogliamo considerare; faremo le seguenti assunzioni:

1. Consideriamo fluidi a *viscosità nulla*; questo si traduce nel richiedere che la forza che viene applicata su una generica superficie interna al fluido sia sempre perpendicolare a tale superficie. Quindi lo sforzo $\mathsf{T}\vec{\boldsymbol{n}}$ coincide con la sua parte normale, ossia

   $$\mathsf{T}\vec{\boldsymbol{n}} = (\mathsf{T}\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}})\vec{\boldsymbol{n}}.$$

   L'ipotesi di sforzo di taglio nullo implica quindi che ogni vettore è un autovettore per $\mathsf{T}$, e dunque il tensore deve essere un multiplo del tensore identico:

   $$\mathsf{T}\vec{\boldsymbol{n}} = -p(\vec{\boldsymbol{x}},t)\mathbb{I}. \tag{2.3}$$

   Dove $p(\vec{\boldsymbol{x}},t)$ è la *pressione*, che assumiamo essere dipendere da spazio e tempo. Un fluido il cui tensore degli sforzi verifica tale equazione viene chiamato *fluido prefetto.*

Ora, sostituendo l'equazione (2.3) nell'equazione di Cauchy otteniamo la cosìdetta *Equazione di Eulero*:

$$\rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) = \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{x}}) - \operatorname{grad}(p(\vec{\boldsymbol{x}}, t)). \tag{2.4}$$

2. Supponiamo inoltre di lavorare con *fluidi barotropici*; ossia con fluidi che soddisfino un'equazione costitutiva del tipo $\rho = f(p)$ con $f : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[$ funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Ora, considerando una pressione $p_0 \in \mathbb{R}$ fissa, possiamo introdurre la *funzione di pressione*:

$$\mathcal{P}(p; p_0) = \int \frac{1}{\rho} dp = \int_{p_0}^{p} \frac{1}{f(s)} ds \Rightarrow \operatorname{grad}(\mathcal{P}) = \frac{d\mathcal{P}(p; p_0)}{dp} \operatorname{grad}(p),$$

da cui

$$\operatorname{grad}(\mathcal{P}) = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(p). \tag{2.5}$$

Si noti che la funzione di pressione è stettamente crescente e dunque invertibile; nota $\mathcal{P}$ è quindi sempre possibile ricavare la pressione $p$ invertendo la funzione.

Dunque, per i *fluidi perfetti barotropici*, le equazioni che descrivono il moto sono le seguenti:

$$\text{Equazione di continuità:} \qquad \frac{d}{dt}\rho + \rho \operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}}) = 0. \tag{2.6}$$

$$\text{Equazione di Eulero:} \qquad \frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{b}} - \operatorname{grad}(\mathcal{P}). \tag{2.7}$$

## 2.2 Condizioni iniziali ed al contorno

È importante ricordare che al sistema (2.6 – 2.7) devono essere aggiunte delle opportune condizioni iniziali ed al contorno. Per quanto riguarda le *condizioni iniziali* è sufficiente assegnare la funzione $\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, 0)$ e una tra $\rho(\vec{\boldsymbol{x}}, 0)$ e $p(\vec{\boldsymbol{x}}, 0)$; dato che stiamo considerando il caso barotropico, il legame tra la densità e la pressione ci permette di poter assegnare solo una delle due funzioni. Più interessante è l'assegnazione delle *condizioni al contorno*, perchè esse riguardano l'interazione tra il fluido e il contenitore, e tale interazione deve essere in qualche modo modellizzata. Vediamo due casi:

1. Nel caso in cui il fluido è libero di muoversi varrà la condizione (2.8) data dal seguente risultato (valida in generale per un qualsiasi mezzo continuo).

   **Proposizione 6.** *Consideriamo l'insieme $\mathcal{P}(t) \equiv \varphi(\mathcal{P}, t)$ con $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ e $\varphi$ omeomorfismo tale per cui $\partial\mathcal{P}(t) = \varphi(\partial\mathcal{P}, t)$, ovvero le particelle che stanno sulla frontiera di un insieme nella configurazione di riferimento staranno sulla frontiera dell'evoluzione di tale insieme lungo il moto. Supponiamo che la frontiera $\partial\mathcal{P}(t)$ sia esprimibile per ogni $t$ in modo implicito come $F(\vec{\boldsymbol{x}}, t) = 0$ con $F$ di classe $\mathcal{C}^1$. Allora si ha*

$$\frac{d}{dt}F(\vec{\boldsymbol{x}}, t) = 0 \ \forall \vec{\boldsymbol{x}} \in \partial\mathcal{P}(t) \ \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.8}$$

*Dimostrazione.* Consideriamo il punto materiale $\vec{\boldsymbol{X}} \in \partial\mathcal{P}$, poichè la frontiera è composta sempre dalle stesse particelle, si ha che

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{X}}, t) \in \partial\mathcal{P}(t)\ \forall t \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow F(\varphi(\vec{\boldsymbol{X}}, t), t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.9}$$

Quindi la funzione $F(\varphi(\vec{\boldsymbol{X}}, t), t)$ ad $\vec{\boldsymbol{X}}$ fissato è costante nel tempo e dunque $\frac{d}{dt}F = 0$ sulla frontiera $\partial\mathcal{P}$. □

2. Dove al contrario la frontiera della regione di fluido è a contatto con una parete (che a sua volta può essere fissa o mobile), proprio l'assenza dello sforzo di taglio, caratteristica dei fluidi perfetti, impone di assegnare la cosiddetta *condizione di impenetrabilità*

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) = \vec{\boldsymbol{V}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{x}}, t)\ \forall \vec{\boldsymbol{x}} \in \partial\mathcal{P}(t), \tag{2.10}$$

dove $\vec{\boldsymbol{V}}$ è la velocità della parete e $\vec{\boldsymbol{n}}$ è la normale alla parete stessa. Quindi le particelle di fluido a contatto con la parete si possono muovere liberamente lungo la tangente alla parete, mentre devono muoversi solidalmente alla parete per quanto riguarda la direzione normale.

## 2.3 Statica dei fluidi perfetti barotropici

Prima di iniziare lo studio delle piccole oscillazioni dedichiamo questa sezione alla *fluidostatica* dei fluidi perfetti barotropici, ovvero al caso in cui la velocità è nulla: $\vec{\boldsymbol{v}} = 0$. Ricordiamo infatti che le vibrazioni sono delle oscillazioni attorno allo stato di equilibrio, è quindi utile approfondire il caso del fluido in equilibrio.

**Osservazione 7.** *L'ipotesi di viscosità nulla nel caso statico non è restrittiva, in quanto gli effetti di una eventuale viscosità si manifesterebbero solamente in presenza di una frizione tra le varie parti del fluido generata dal moto.*

Introducendo la condizione di velocità nulla abbiamo che l'equazione di Eulero e di continuità diventano rispettivamente

$$\vec{\boldsymbol{b}} - \operatorname{grad}(\mathcal{P}(p)) = 0 \tag{2.11}$$

$$\frac{d}{dt}\rho = 0 \tag{2.12}$$

dove la prima è nota come l'*equazione fondamentale della fluidostatica*.

Osserviamo che la densità non dipende dal tempo e che la pressione dipende da $t$ se e solo se ne dipende $\vec{\boldsymbol{b}}$.

**Teorema** (**Soluzione statica per fluidi perfetti barotropici**). *Per un fluido perfetto barotropico, il problema statico ammette soluzione se e solo se il campo delle forze di volume* $\vec{\boldsymbol{b}}$ *è irrotazionale.*

*Dimostrazione.* Se $p$ è una soluzione della 2.11, allora $\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{b}} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}(\mathcal{P}(p)) = 0$. Quindi $\vec{\boldsymbol{b}}$ è irrotazionale.

Viceversa, se $\operatorname{rot}(\vec{\boldsymbol{b}}) = 0$, per il teorema del potenziale scalare esiste un campo scalare $-\Psi$ tale che $\vec{\boldsymbol{b}} = -\operatorname{grad}(\Psi)$. Quindi la 2.11 diventa

$$\operatorname{grad}(\mathcal{P} + \Psi) = 0. \tag{2.13}$$

Dunque $\mathcal{P}(p(\vec{\boldsymbol{x}}), p_0) + \Psi(\vec{\boldsymbol{x}})$ è una costante su ogni componente connessa della regione $\mathcal{B}$ in cui si muove il fluido. Poiché dalla funzione di pressione si ricava $p$ e la densità si trova dalla relazione costitutiva $\rho = f(p)$, il problema è risolto. □

Dalla dimostrazione possiamo dedurre che se $\vec{\boldsymbol{b}}$ è irrotazionale, allora ogni soluzione $p$ è esprimibile come

$$p(\vec{\boldsymbol{x}}) = \mathcal{P}^{-1}(C - \Psi(\vec{\boldsymbol{x}}), p_0), \tag{2.14}$$

dove C è costante su ogni componente connessa di $\mathcal{B}$.

## 2.4 Onde acustiche di piccola ampiezza

Possiamo ora iniziare lo studio delle onde acustiche, ovvero delle perturbazioni intorno all'equilibrio statico di un fluido comprimibile. Considereremo un fluido perfetto barotropico in assenza di forze esterne, e supporremo che la funzione di barotropicità $\rho = f(p)$ sia strettamente crescente, in modo che si possa esprimere la pressione in funzione della densità con $p = p(\rho)$.

Dato che le oscillazioni rispetto all'equilibrio sono piccole, scriveremo le variabili di pressione e densità nel seguente modo:

$$p(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \equiv p_0 + \tilde{p}(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \qquad \text{e} \qquad \rho(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \equiv \rho_0 + \tilde{\rho}(\vec{\boldsymbol{x}}, t). \tag{2.15}$$

Con $p_0$ e $\rho_0$ costanti di pressione e densità all'equilibrio. Inoltre, linearizzando la funzione di barotropicità $p = p(\rho)$ attorno al punto di equilibrio $\rho_0$, otteniamo

$$p - p_0 \approx \frac{dp}{d\rho}(\rho_0)(\rho - \rho_0) = c_0^2(\rho - \rho_0),$$

dove abbiamo utilizzato la definizione $c_0^2 \equiv \frac{dp}{d\rho}(\rho_0)$, con $c_0$ *velocità del suono* in un fluido di densità $\rho_0$. Dunque, grazie alla (2.15) ricaviamo:

$$\tilde{p} = c_0^2\tilde{\rho} \Rightarrow \operatorname{grad}\tilde{p} = c_0^2 \operatorname{grad}\tilde{\rho}. \tag{2.16}$$

Utilizzando la (2.16) , il sistema di equazioni (2.6) + (2.7) diventa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho} + (\operatorname{grad}\tilde{\rho}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + (\tilde{\rho} + \rho_0)\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}}) = 0,\\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{v}} + (\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{v}})\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{c_0^2}{\tilde{\rho} + \rho_0}\operatorname{grad}\tilde{\rho} = 0.\end{aligned}$$

Ora, sempre per il fatto che le oscillazioni rispetto all'equilibrio sono piccole, possiamo applicare anche le sueguenti ipotesi di linearizzazione:

$$|(\operatorname{grad}\vec{\boldsymbol{v}})\vec{\boldsymbol{v}}| \ll \left|\frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{v}}\right|, \quad |(\operatorname{grad}\tilde{\rho})\cdot\vec{\boldsymbol{v}}| \ll \left|\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho}\right| \;\text{ e }\; |\tilde{\rho}| \ll \rho_0. \tag{2.17}$$

Quindi, utilizzando le ipotesi in (2.17), riscriviamo le equazioni di continuità e di Eulero nel seguente modo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}}) = 0 \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{c_0^2}{\rho_0}\operatorname{grad}\tilde{\rho} = 0. \tag{2.19}$$

Il sistema di equazioni (2.18 – 2.19), con incognite $\vec{\boldsymbol{v}}$ e $\rho$, ci permette di descrivere le onde acustiche.

### 2.4.1 Equazione delle onde

Consideriamo ora il sistema (2.18 – 2.19) e dimostriamo che se $\vec{\boldsymbol{v}}$ e $\rho$ soddisfano tali equazioni, allora ciascuna delle incognite soddisfa un'equazione del second'ordine in tempo e spazio, che è proprio l'equazione delle onde.

- Prendiamo la divergenza dell'equazione di Eulero:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}}) + \frac{c_0^2}{\rho_0}\boldsymbol{\Delta}\,\tilde{\rho} = 0. \tag{2.20}$$

  Ricavando $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{v}}$ dal'equazione di continuità e sostituendola nella (2.20) troviamo

$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\rho} + \frac{c_0^2}{\rho_0}\boldsymbol{\Delta}\,\tilde{\rho} = 0,$$

  da cui

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\rho} - c_0^2\,\boldsymbol{\Delta}\,\tilde{\rho} = 0. \tag{2.21}$$

  Abbiamo ottenuto l'equazione delle onde omogena con velocità $c_0^2$.

- Ricaviamo ora l'equazione per $\vec{\boldsymbol{v}}$. Applichiamo il gradiente all'equazione di continuità e prendiamo la derivata temporale di quella di Eulero:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}(\tilde{\rho}) + \rho_0\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}})) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{v}} + \frac{c_0^2}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\tilde{\rho} = 0.$$

  Sostituendo nella prima equazione il termine $\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}(\tilde{\rho})$ che si ricava dalla seconda otteniamo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{v}} - c_0^2\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{v}})) = 0.$$

Se ora aggiungiamo l'ipotesi di irrotazionalità del moto ($\mathrm{rot}(\vec{\boldsymbol{v}}) = 0$) abbiamo che $\boldsymbol{\Delta}\,\vec{\boldsymbol{v}} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{v}} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}$, quindi vale l'equazione delle onde anche per $\vec{\boldsymbol{v}}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{v}} - c_0^2\,\boldsymbol{\Delta}\,\vec{\boldsymbol{v}} = 0. \tag{2.22}$$

### 2.4.2 Caso unidimensionale

Dedichiamo questa sottosezione al caso unidimensionale, ovvero al caso in cui le quantità dipendono soltanto da $x$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = u(x,t)\vec{\boldsymbol{e}}_1$. Questo equivale a dire che il flusso è omogeno sul piano $yz$; le onde che soddisfano questa caratteristica vengono dette *onde piane*. Iniziamo con un'osservazione:

**Osservazione 8.** *Riscrivendo il sistema di equazioni (2.18 – 2.19) nel caso unidimensionale, è facile mostrare che si possono ricavare le seguenti equazioni delle onde:*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\rho} - c_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{\rho} = 0 \qquad e \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u - c_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 0. \tag{2.23}$$

*Notiamo che non è stata necessaria l'ipotesi di non rotazionalità, infatti siamo nel caso unidimensionale.*

Cerchiamo ora una soluzione per l'equazione delle onde $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - c_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 0$. Applichiamo il cambio di variabili

$$\begin{cases} \xi = x - c_0 t \\ \eta = x + c_0 t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ t = \frac{1}{2c_0}(\eta - \xi) \end{cases}$$

e riscriviamo le derivate nelle nuove variabili:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = c_0(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}) \end{cases}, \qquad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} = c_0^2(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}) \end{cases}.$$

Ora, sostituendo questo cambio di variabili nell'equazione delle onde, otteniamo:

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi}u = 0. \tag{2.24}$$

Integrando rispetto a $\xi$ questa nuova equazione abbiamo $\frac{\partial}{\partial \eta}u = F(\eta)$, dove $F(\eta)$ è una generica funzione dipendente da $\eta$. Integrando nuovamente, rispetto a $\eta$, otteniamo l'equazione

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

con $f_1(\xi)$ e $f_2(\eta)$ due generiche funzioni di classe $\mathcal{C}^2$ che devono essere trovate utilizzando le condizioni iniziali. Natuarlmente anche l'equazione per la densità avrà una soluzione di questo tipo e dunque, per la barotropicità, lo stesso vale anche per la pressione. Quindi abbiamo le seguenti soluzioni:

$$u(x,t) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t), \tag{2.25}$$

$$\tilde{\rho}(x,t) = h_1(x - c_0 t) + h_2(x + c_0 t). \tag{2.26}$$

Consideriamo ora la soluzione (2.26) e supponiamo che la funzione $h_2(x + c_0 t) = 0$ sia nulla. Questo significa che $\tilde{\rho}(x,t) = h_1(x - c_0 t)$. Facciamo ora delle osservazioni su questa soluzione particolare:

- In un qualsiasi piano a $x = costante$ notiamo che la densità dipende dal tempo $t$.
- In un qualsiasi istante di tempo $t$, la soluzione varia in base alla variabile $x$.
- La soluzione $\tilde{\rho}(x,t)$ è costante per quelle coordinate $(x,t)$ tali che $x - c_0 t = costante$.

Questo significa che se a $x = \hat{x}$ e $t = 0$ la densità ha un certo valore $\tilde{\rho}(\hat{x},t) = \tilde{\rho}_0$, allora in un istante $t^*$ lo stesso valore della densità lo si trova in $x = \hat{x} + c_0 t^*$:

$$\tilde{\rho}(\hat{x} + c_0 t^*, t^*) = \tilde{\rho}_0 = \tilde{\rho}(\hat{x}, t).$$

Ciò è vero per ogni quantità dell'onda; possiamo dunque dedurre che il moto si muove lungo la direzione delle x con una velocità $c_0$.

Quindi, la funzione $h_1(x - c_0 t)$ rappresenta un'onda che si propaga nel verso delle $x$ positive ad una velocità $c_0$, un'onda di questo tipo viene detta *onda progressiva*. La soluzione $h_2(x + c_0 t)$ corrisponde invece ad un'*onda regressiva*, cioè un'onda che si propaga inalterata nella direzione negativa dell'asse delle $x$. Dunque le soluzioni generali (2.25) e (2.26) corrispondono ad una sovrapposizione di questi due tipi di onde.

**Osservazione 9.** *Se si considera solo la parte progressiva si ha* $\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = f_1'(x - c_0 t)$ *e* $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = -c_0 f_1'(x - c_0 t)$*. Dunque l'approssimazione* $\left|u\frac{\partial}{\partial x}u\right| \ll \left|\frac{\partial}{\partial t}u\right|$ *del punto (2.17) significa che* $|u|$ *deve essere piccola rispetto a* $c_0$*. Ovvero la velocità del fluido deve essere bassa rispetto a quella del suono affinché abbia senso la linearizzazione del sistema.*

### 2.4.3 Onde monocromatiche

Consideriamo ora un particolare tipo di onde, le onde monocromatiche. In questo caso tutte le quantità delle onde dipendono in modo periodico (armonico) dal tempo. Scriveremo queste funzioni come la parte reale di una funzione complessa. Per esempio scriviamo la velocità nel seguente modo:

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{x}},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{v}}_0(\vec{\boldsymbol{x}})e^{-i\omega t}\right]. \tag{2.27}$$

Dove $\omega$ è la *frequenza* dell'onda e $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ deve soddisfare l'equazione

$$\boldsymbol{\Delta}\,\vec{\boldsymbol{v}}_0 + \left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\right)\vec{\boldsymbol{v}}_0 = 0, \tag{2.28}$$

che si ottiene sostituendo la (2.27) nell'equazione delle onde (2.22). Supponiamo ora che l'onda sia, oltre che monocromatica, anche piana e che si propaghi nel verso delle $x$ positive. In un'onda di questo tipo tutte le quantità sono funzione solo di $x - c_0 t$, quindi la soluzione è del tipo

$$u(x,t) = \mathrm{Re}\left[Ae^{-i\frac{\omega}{c_0}(x - c_0 t)}\right], \tag{2.29}$$

dove $A$ è una costante chiamata *ampiezza complessa*. Se poniamo $A = ae^{i\alpha}$ otteniamo:

$$u(x,t) = \mathrm{Re}\left[ae^{-i\omega(x-c_0t)+i\alpha}\right] \Rightarrow u(x,t) = a\cos\left(\omega\frac{x}{c_0} - \omega t + \alpha\right), \tag{2.30}$$

dove $a$ è l'*ampiezza* e l'argomento del coseno è la $fase$.

Se ora consideriamo il vettore unitario $\vec{\boldsymbol{n}}$ che indica la direzione di propagazione, possiamo definire il *vettore d'onda*

$$\vec{\boldsymbol{k}} \equiv \frac{\omega}{c_0}\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{\boldsymbol{n}}, \tag{2.31}$$

con $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}c_0$ lunghezza d'onda. Il modulo $\frac{|\vec{\boldsymbol{k}}|}{2\pi}$ viene chiamato *numero d'onda*, e rappresenta il numero di oscillazioni dell'onda nell'unità di lunghezza. Possiamo ora utilizzare questo vettore per riscrivere la (2.29):

$$u(x,t) = \mathrm{Re}\left[Ae^{-i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}-\omega t)}\right]. \tag{2.32}$$

Ricordiamo che le onde monocromatiche sono di grande importanza, infatti ogni onda può essere scritta come sovrapposizione di onde piane monocromatiche di frequenze e vettori d'onda diversi. Questo tipo di decomposizione è una decomposizione in serie di Fourier (caso periodico) o mediante trasformata di Fourier (caso generale).

## 2.5 Proprietà delle onde acustiche

Chiudiamo ora questo capitolo con una sezione dedicata allo studio di alcune proprietà delle onde acustiche.

### 2.5.1 Riflessione e rifrazione

I fenomeni della riflessione e della rifrazione avvengono quando un'onda acustica attraversa uno starato che separa due fluidi diversi. Questo significa che quando *l'onda incidente* giunge alla superficie di separazione, appaiono due nuove onde: l'*onda riflessa*, che si propaga indietro da dove arriva l'onda incidente; e l'*onda rifratta*, la quale si propaga nel secondo fluido. Quindi nel primo fluido il moto è una combinazione di due onde, quella incidente e quella riflessa; mentre nel secondo mezzo il moto è composto da un'unica onda, quella rifratta.

La relazione tra queste tre onde è determinata dalle condizioni al contorno, che in questo caso sono quelle di avere la pressione e la componente normale di velocità uguali sulla superficie di separazione dei due fluidi.

Studiamo ora questo fenomeno per un'*onda piana monocromatica longitudinale*, supponendo che la superficie che separa i due fluidi sia data dall'equazione $x = 0$ (ovvero è il piano $yz$).

**Proposizione 10.** *Le tre onde hanno tutte la stessa frequenza $\omega$ e le stesse componenti $k_y$, $k_z$ del vettore d'onda, ma non la stessa componente $k_x$ perpendicolare al piano di separazione tra i due fluidi.*

*Dimostrazione.* La presenza della superficie di separazione ci porta a delle condizioni al contorno, le quali varranno solamente a $x = 0$, quindi non dipenderanno né da $t$ né dalle coordinate $y$ e $z$. Dunque, la dipendenza da $t$, $y$ e $z$ della soluzione rimane uguale in tutto lo spazio e per ogni $t$. Da questo deduciamo che $\omega$, $k_y$ e $k_z$ sono uguali a quelle dell'onda incidente. □

Grazie a questo risultato, possiamo ricavare la relazione che esprime la direzione di propagazione dell'onda riflessa e di quella rifratta. Supponiamo che il piano alla quale appartiene l'onda incidente sia il piano $xy$, allora la componente $z$ del vettore d'onda deve essere nulla ($k_z = 0$) e lo stesso deve valere per i vettori d'onda delle altre due. Quindi le direzioni di propagazione delle tre onde sono complanari.

Sia $\vartheta_1$ ($\vartheta_2$ , $\vartheta_3$) l'angolo tra la direzione di propagazione dell'onda incidente (riflessa, rifratta) e l'asse delle $x$. Allora, per la proprosizione dimostrata, abbiamo che $k_y = (\frac{\omega}{c_0})\sin(\vartheta_1) = (\frac{\omega}{c_0})\sin(\vartheta_2)$, quindi l'angolo di incidenza $\vartheta_{\text{inc}}$ è uguale all'angolo di riflessione $\vartheta_{\text{rifl}}$:

$$\vartheta_{\text{inc}} = \vartheta_{\text{rifl}}. \tag{2.33}$$

Invece, per quanto riguarda l'onda rifratta, abbiamo una simile equazione ma con una velocità del suono diversa, in quanto per l'onda rifratta stiamo considerando un fluido differente: $(\frac{\omega}{c_0})\sin(\vartheta_1) = (\frac{\omega}{c_r})\sin(\vartheta_3)$. Ovvero:

$$\frac{\sin(\vartheta_1)}{\sin(\vartheta_3)} = \frac{c_0}{c_r} \Rightarrow \frac{\sin(\vartheta_{\text{inc}})}{\sin(\vartheta_{\text{refr}})} = \frac{c_0}{c_r}. \tag{2.34}$$

### 2.5.2 Propagazione in un fluido in movimento, effetto Doppler

La relazione $\omega = c_0 k$, che abbiamo introdotto nella sezione precedente, è valida solo per onde acustiche monocromatiche che si propagano in un fluido a riposo. In questa sottosezione otterremo una simile relazione per un'onda che si propaga in un fluido in movimento.

Consideriamo un flusso omogeneo di velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_f$ con $v_f \ll c_0$ e due sistemi di riferimento: il sistema fisso $K$ di coordinate $x$, $y$, $z$ e il sistema $K'$ di coordinate $x'$, $y'$, $z'$ che si muove con velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_f$ rispetto a $K$. Osserviamo che nel sistema in movimento $K'$ il fluido è fermo e, ricordando che l'equazione delle onde mantiene la propria forma sotto cambi di sistemi di riferimento inerziali, abbiamo che l'onda acustica monocromatica in $K'$ ha la sua forma usuale $u = \mathit{cost} \times e^{i[\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}' - kc_0 t]}$. Dove il vettore $\vec{\boldsymbol{x}}'$ nel sistema $K'$ può essere espresso dal vettore $\vec{\boldsymbol{x}}$ nel sistema $K$ con relazione $\vec{\boldsymbol{x}}' = \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{v}}_f t$. Quindi, nel sistema di riferimento fisso, l'onda ha la forma $u = \mathit{cost} \times e^{i[\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}} - (kc_0 + \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_f)t]}$. Dove il termine che moltiplica $t$ è la frequenza angolare dell'onda. Deduciamo quindi che in un fluido in movimento, la frequenza $\omega$ e il vettore d'onda $\vec{\boldsymbol{k}}$ soddifano la seguente relazione:

$$\omega = kc_0 + \vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_f. \tag{2.35}$$

La velocità di propagazione delle onde acustiche è quindi data da

$$\frac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}} = c_0\frac{\vec{\boldsymbol{k}}}{k} + \vec{\boldsymbol{v}}_f;$$

questa è una somma vettoriale tra la velocità $c_0$ nella direzione di propagazione e la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_f$ del fluido nella quale si propaga il suono.

Ora, grazie alla (2.35), siamo in grado di studiare l'*effetto Doppler*: la frequenza di un suono ricevuto da un osservatore in movimento rispetto alla sorgente, non è uguale alla frequenza emessa dalla sorgente.

Consideriamo il seguente caso: un'onda acustica emessa da una sorgente a riposo (rispetto al fluido) viene ricevuta da un osservatore in movimento con velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{obs}}$. Nel sistema di riferimento $K'$ fermo rispetto al fluido abbiamo $k = \frac{\omega_0}{c_0}$, dove $\omega_0$ è la frequenza di oscillazione della sorgente. Invece, nel sistema $K$ che si muove insieme all'osservatore, il fluido si muove con velocità $-\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{obs}}$, quindi, utilizzando la (2.35), abbiamo che la frequenza è $\omega = kc_0 - \vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{\text{obs}}$. Introduciamo ora l'angolo $\vartheta$ tra i vettori $\vec{\boldsymbol{k}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{obs}}$; ponendo $k = \frac{\omega_0}{c_0}$ otteniamo che la frequenza del suono per l'osservatore in movimento è

$$\omega = \omega_0 \left[ 1 - \frac{v_{\text{obs}}}{c_0} \cos(\vartheta) \right]. \tag{2.36}$$

Analizziamo ora il caso opposto, consideriamo un fluido a riposono nella quale si propaga un'onda acustica generata da una sorgente in movimento. Sia ora $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{srg}}$ la velocità della sorgente e $K'$ il sistema di coordinate che si muove insieme alla sorgente, in tale sistema il fluido si muove a velocità $-\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{srg}}$. Nel sistema $K'$ la frequenza dell'onda sonora $\omega_0$ è uguale a quella di oscillazione della sorgente. Utilizzando sempre la (2.35) e l'angolo $\vartheta$ tra i vettori $\vec{\boldsymbol{k}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{srg}}$ otteniamo $\omega_0 = kc_0[1 - \frac{v_{\text{srg}}}{c_0} \cos(\vartheta)]$. Nel sistema $K$ fissato, tuttavia, la frequenza e il vettore d'onda sono correlati dalla relazione $\omega = c_0 k$, quindi:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v_{\text{srg}}}{c_0}}. \tag{2.37}$$

Questa formula esprime la relazione tra la frequenza $\omega_0$ di oscillazione di una sorgente in movimento con la frequenza $\omega$ dell'onda acustica percepita da un'osservatore fermo.

**Osservazione 11.** *Utiliziamo le (2.37) per le seguenti osservazioni:*

- *Se la sorgente si sta allontanando dall'osservatore, l'angolo $\vartheta$ (tra la sua velocità e la direzione verso l'osservatore) soddisfa $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$, ovvero $\cos(\vartheta) < 0$. Quindi in questo caso la frequenza percepita dall'osservatore è minore di $\omega_0$.*

- *Se invece la sorgente si sta avvicinando all'osservatore, l'angolo $\vartheta$ soddisfa $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, ovvero $\cos(\vartheta) > 0$. Quindi in questo caso la frequenza percepita dall'osservatore è maggiore di $\omega_0$.*

# Capitolo 3

# Corpi elastici

Iniziamo ora lo studio dei corpi elastici. Faremo, come nel caso dei fluidi, delle ipotesi per adattare il tensore degli sforzi al problema fisico che vogliamo studiare. Successivamente introdurremo l'equazione di Cauchy linearizzata per un corpo elastico isotropo e ne studieremo le soluzioni.

Consideriamo la deformazione $\vec{\boldsymbol{\varphi}}$ e scriviamola come $\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t) = \vec{\boldsymbol{X}} + \vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t)$, dove $\vec{\boldsymbol{u}}$ è lo *spostamento* ed è necessariamente $\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t) \equiv \vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t) - \mathrm{id}(\vec{\boldsymbol{X}})$. In questo modo possiamo scrivere il gradiente della deformazione nel seguente modo:

$$\mathsf{F} \equiv \mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbb{I} + \mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}}). \tag{3.1}$$

## 3.1 Teorema di decomposizione polare

Introduciamo ora un teorema necessario per poter scomporre il gradiente $\mathsf{F}$ come prodotto di una rotazione e una matrice simmetrica definita positiva.

**Teorema** (Teorema di decomposizione polare)**.** *Sia $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tale che $m \geq n$ allora:*

1. *Esiste una decomposizione polare*
$$A = RV,$$
*con $R \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ortogonale ($RR^T = \mathbb{I}$) e $V \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica semidefinita positiva.*

2. *$V$ è univocamente determinata e vale $A^T A = V^2$*

3. *Se $\mathrm{rg}(A) = n$ allora $V$ è definita positiva e anche $R$ è univocamente determinata.*

*Dimostrazione.* **Primo punto**: Per il teorema di decomposizione a valori singolari possiamo scomporre
$$A = U\Sigma P^T,$$
con $U \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ ortogonale, $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ortogonale e $\Sigma \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ matrice pseudosiagonale dei valori singolari $s_1 \geq \cdots \geq s_k > 0$. Osserviamo che possiamo scrivere

la matrice pseudodiagonale come $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_0 \\ \mathbb{O}_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$, dove $\Sigma_0 \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ è una matrice diagonale con diagonale composta dai valori singolari e da $n-k$ zeri. Definiamo inoltre $J \equiv \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n\times n} \\ \mathbb{O}_{(m-n)\times n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tale che $J\Sigma_0 = \Sigma$ e $JJ^T = \mathbb{I}_{m\times m}$. Quindi:

$$A = U\Sigma P^T = UJ\Sigma_0 P^T = UJP^T P\Sigma_0 P^T = \left(UJP^T\right)\left(P\Sigma_0 P^T\right) = RV.$$

Dove abbiamo posto $R \equiv UJP^T$ e $V \equiv P\Sigma_0 P^T$.

**Secondo punto**: Abbiamo che $A^TA = (V^TR^T)(RV) = V^TV = V^2$, quindi $V$ è la radice quadrata di $A^TA$ (matrice semidefinita positiva). Per il seguente risultato abbiamo quindi che $V$ è unica.

**Corollario 12.** *Sia $A$ una matrice simmetrica semidefinita positiva, allora esiste un'unica matrice semidefinita positiva $V$ tale che $V^2 = A$. $V$ viene detta radice quadrata di $A$.*

**Terzo punto**: Se $\mathrm{rg}(A) = n$ allora anche $\mathrm{rg}(V) = \mathrm{rg}(P\Sigma_0 P^T) = n$. Quindi $V$ è una matrice invertibile e possiamo scrivere $R = AV^{-1}$, per il punto precedente vale l'unicità di $R$. □

Possiamo quindi decomporre il gradiente (3.1) come $\mathbf{F} = \mathbf{RV}$, con $\mathbf{R}$ tensore ortogonale di rango 2 e $\mathbf{V}$ tensore di rango 2 simmetrico e definito positivo.

## 3.2 Linearizzazione del tensore di deformazione

Introduciamo ora la prima ipotesi che vogliamo fare sul corpo considerato: supponiamo che esso sia un *corpo omogeneo*; ovvero che il comportamento meccanico del mezzo sia identico in tutti i suoi punti. Formalmente ciò equivale a dire che il tensore degli sforzi non dipende dalle coordinate del punto ma solo dal gradiente di spostamento $\mathbf{F}$.

Ora, poiché la rotazione non deve cointribuire agli sforzi elastici, $\mathbf{T}$ dipenderà solo dalla parte simmetrica $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F}^T\mathbf{F}}$. Per semplicità, noi supporremo che dipenda da $\mathbf{V^2}$ e scriveremo quindi $\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{V^2})$. Facciamo dunque un'osservazione sul tensore $\mathbf{V^2}$.

**Osservazione 13.** *Linearizzando $\mathbf{V^2}$ attorno all'identità otteniamo*

$$\begin{aligned} \mathbf{V^2} &= (\mathbb{I} + \mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}}))^T(\mathbb{I} + \mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}})) \\ &= \mathbb{I} + \mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}}) + \mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}})^T + \mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}})\,\mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}})^T \\ &\approx \mathbb{I} + \mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}}) + \mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}})^T = \mathbb{I} + 2\,\mathrm{Sym}(\mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}})) \\ &\equiv \mathbb{I} + 2\mathbf{E}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

*Dove con* $\mathrm{Sym}(\mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}})) = \frac{1}{2}(\mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}}) + \mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}})^T)$ *si intende la parte simmetrica di* $\mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}})$.

Noi d'ora in avanti consideremo $\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E})$. Tale assunzione è lecita, dato che studieremo l'equazione di Cauchy linearizzata.

### 3.2.1 Rappresentazione di Voigt normalizzata

Possiamo notare che i tensori con cui proseguiremo lo studio tutti simmetrici; per questo motivo dedichiamo ora un paragrafo alla *rappresentazione di Voigt normalizzata* [4], la quale ci permetterà di esprimere questo tipo di tensori del secondo ordine come vettori a sei componenti.

Consideriamo una base ortonormale $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ dello spazio $\mathbb{R}^3$ e il prodotto diadico

$$\vec{a} \otimes \vec{b} \equiv \vec{a} \left(\vec{b}\right)^T \quad \text{con } \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3.$$

Tramite questi, possiamo intodurre una base ortonormale per lo spazio lineare dei tensori simmetrici; essa è $\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_5, \mathbf{Z}_6\}$, con

$$\mathbf{Z}_1 \equiv \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1, \quad \mathbf{Z}_2 \equiv \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2, \quad \mathbf{Z}_3 \equiv \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3, \quad \mathbf{Z}_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2\right),$$
$$\mathbf{Z}_5 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1\right), \quad \mathbf{Z}_6 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1\right).$$

**Osservazione 14.** *La base appena introdotta è ortonormale rispetto al prodotto scalare tensoriale* $\mathbf{A} : \mathbf{B} \equiv \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$.

Quindi, se consideriamo i tensori simmetrici $\mathbf{T}$ ed $\mathbf{E}$, possiamo usare la seguente rappresentazione in coordinate rispetto alla base introdotta:

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{6} \tau_k \mathbf{Z}_k, \quad \text{dove} \quad \vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6) \in \mathbb{R}^6, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^{6} \varepsilon_k \mathbf{Z}_k, \quad \text{dove} \quad \vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6) \in \mathbb{R}^6. \tag{3.4}$$

**Osservazione 15.** *Abbiamo dunque la seguente relazione tra le componenti del tensore* $\mathbf{T}$ *e quelle del vettore* $\vec{\tau}$*:*

$$\tau_1 = T_{1,1}, \quad \tau_2 = T_{2,2}, \quad \tau_3 = T_{3,3}, \quad \tau_4 = \sqrt{2} \cdot T_{2,3}, \quad \tau_5 = \sqrt{2} \cdot T_{1,3}, \quad \tau_6 = \sqrt{2} \cdot T_{1,2}.$$

### 3.2.2 Legge costitutiva lineare

Nel caso lineare postuliamo che:

1. $\hat{\mathbf{T}}$ si annulli quando $\mathbf{V^2} \approx \mathbb{I}$, ovvero se $\mathbf{E} = 0$.
2. $\hat{\mathbf{T}}$ sia lineare in $\mathbf{E}$: $\hat{\mathbf{T}}(\lambda \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}) = \lambda \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E_1}) + \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E_2})$.

Utilizzando la rappresentazione di Voigt (3.3) e le ipotesi appene enunciate possiamo dedurre che il tensore degli sforzi $\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E})$ dovrà avere la rapresentazione di Voigt data della relazione $\vec{\tau}(\vec{\varepsilon}) = \mathbf{C}\vec{\varepsilon}$, dove $\vec{\tau}$ e $\vec{\varepsilon} \in \mathbb{R}^6$ sono le rappresentazioni di Voigt dei tensori $\mathbf{T}$ ed $\mathbf{E}$, mentre $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ è una matrice costante che rappresenta le proprietà elastiche del materiale. Quindi, utilizzando i tensori, abbiamo l'equazione costitutiva $\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{6} (\mathbf{C}\vec{\varepsilon})_k \mathbf{Z}_k$.

## 3.3 Tensore degli sforzi per un corpo omogeneo ed isotropo

Facciamo ora un'ulteriore ipotesi per semplificare il problema che vogliamo studiare, chiediamo che il mezzo considerato sia *isotropo*, ovvero che le proprietà meccaniche non dipendano dalla direzione considerata. Vediamo come tradurre questa condizione in linguaggio matematico: si consideri la rotazione $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, è possibile ottenere una nuova base di tenosri simmetrici $\mathbf{Z}_1' = S\mathbf{Z}_1 S^T$ e quindi una matrice $\hat{S} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ che rappresenti la rotazione nella rappresentazione di Voigt. Dunque, chiedere che il corpo sia isotropo equivale ad imporre che lo sforzo causato da una deformazione $\hat{S}\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ sia uguale a quello causato da $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ e ruotato da $\hat{S}$ , cioé

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}(\hat{S}\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \hat{S}\vec{\boldsymbol{\tau}}(\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}\hat{S} = \hat{S}\mathbf{C}. \tag{3.5}$$

**Osservazione 16.** *Si può dimostrare che, posta la matrice $S = S_{ij}$ con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, si ha la seguente relazione tra la matrice $S$ e la sua rappresentazione di Voigt:*

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} S_{11}^2 & S_{12}^2 & S_{13}^2 & \sqrt{2}S_{12}S_{13} & \sqrt{2}S_{11}S_{13} & \sqrt{2}S_{11}S_{12} \\ S_{21}^2 & S_{22}^2 & S_{23}^2 & \sqrt{2}S_{22}S_{23} & \sqrt{2}S_{21}S_{23} & \sqrt{2}S_{21}S_{22} \\ S_{31}^2 & S_{32}^2 & S_{33}^2 & \sqrt{2}S_{32}S_{33} & \sqrt{2}S_{31}S_{33} & \sqrt{2}S_{31}S_{32} \\ \sqrt{2}S_{21}S_{31} & \sqrt{2}S_{22}S_{23} & \sqrt{2}S_{23}S_{33} & S_{22}S_{33}+S_{23}S_{32} & S_{23}S_{31}+S_{21}S_{33} & S_{21}S_{32}+S_{22}S_{31} \\ \sqrt{2}S_{31}S_{11} & \sqrt{2}S_{32}S_{12} & \sqrt{2}S_{33}S_{13} & S_{32}S_{13}+S_{33}S_{12} & S_{33}S_{11}+S_{31}S_{13} & S_{31}S_{12}+S_{32}S_{11} \\ \sqrt{2}S_{11}S_{21} & \sqrt{2}S_{12}S_{22} & \sqrt{2}S_{13}S_{23} & S_{12}S_{23}+S_{13}S_{22} & S_{13}S_{21}+S_{11}S_{23} & S_{11}S_{22}+S_{12}S_{21} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

È noto che, per soddisfare la condizione (3.5) con qualunque rotazione $\hat{S}$ , la *matrice di elasticità* deve avere la seguente forma

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & a-b & a-b & 0 & 0 & 0 \\ a-b & a & a-b & 0 & 0 & 0 \\ a-b & a-b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

dove $a$ e $b$ sono due costanti indipendenti.

Ora, calcolando $\vec{\boldsymbol{\tau}}(\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathbf{C}\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ siamo in grado di trovare $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ in funzione di $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\begin{cases} \tau_1 = a\varepsilon_1 + (a-b)\varepsilon_2 + (a-b)\varepsilon_3 + (+b\varepsilon_1 - b\varepsilon_1) \\ \tau_2 = (a-b)\varepsilon_1 + (a-b)\varepsilon_2 + (a-b)\varepsilon_3 + b\varepsilon_2 \\ \tau_3 = (a-b)\varepsilon_1 + (a-b)\varepsilon_2 + (a-b)\varepsilon_3 + b\varepsilon_3 \\ \tau_4 = b\varepsilon_4 \\ \tau_5 = b\varepsilon_5 \\ \tau_6 = b\varepsilon_6 \qquad . \end{cases}$$

Passando alla notazione per tensori otteniamo quindi il tensore degli sforzi

$$\mathbf{T} = (a-b)\,\mathrm{tr}(\mathbf{E})\mathbb{I} + b\mathbf{E} \equiv (\lambda + \mu)\,\mathrm{tr}(\mathbf{E})\mathbb{I} + 2\mu\mathbf{E}, \tag{3.8}$$

dove abbiamo introdotto le cosidette costanti di Lamé $\lambda$ e $\mu$.

## 3.4 Onde elastiche

Possiamo ora riscrivere l'equazione di Cauchy (1.15) utilizzando la formulazione (3.8) del tensore segli sforzi. Prima di fare ciò osserviamo che:

- Stiamo considerando il caso in cui la deformazione $\vec{\boldsymbol{\varphi}}$ è prossiama all'identità, ovvero $\vec{\boldsymbol{u}} \ll 1$. Possiamo quindi approssimare la derivata materiale $\frac{d}{dt}$ a quella parziale $\frac{\partial}{\partial t}$, e scrivere il termine di accellerazione come la derivata parziale seconda dello spostamento $\vec{\boldsymbol{u}}$: $\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{u}}$.
- $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}}) + \mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}})^T)$.
- $\mathrm{tr}(\mathbf{E}) = \mathrm{tr}(\frac{1}{2}(\mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}}) + \mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}})^T)) = \mathrm{div}(\vec{\boldsymbol{u}})$.
- $\mathrm{div}((\mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}}) + \mathrm{Grad}(\vec{\boldsymbol{u}})^T) = \boldsymbol{\Delta}(\vec{\boldsymbol{u}}) + \mathrm{Grad}(\mathrm{div}(\vec{\boldsymbol{u}}))$.

Utilizzando queste osservazioni otteniamo quindi l'equazione di Cauchy linearizzata per un corpo elastico isotropo ed omogeneo:

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{u}} = \rho\vec{\boldsymbol{b}} + (\lambda + 2\mu)\,\mathrm{Grad}(\mathrm{div}(\vec{\boldsymbol{u}})) + \mu\,\boldsymbol{\Delta}(\vec{\boldsymbol{u}}) \tag{3.9}$$

**Teorema.** *L'equazione (3.9) con $\vec{\boldsymbol{b}} = 0$ ammette come soluzione le onde elastiche*

$$\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{X}}, t) = \vec{\boldsymbol{A}} f(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct), \tag{3.10}$$

*dove l'ampiezza $\vec{\boldsymbol{A}} \in \mathbb{R}^3$ è autovettore del tensore acustico*

$$\mathbf{S}(\vec{\boldsymbol{m}}) \equiv \frac{1}{\rho}[(\lambda + 2\mu)(\vec{\boldsymbol{m}} \otimes \vec{\boldsymbol{m}}) + \mu\mathbb{I}_3],$$

*$c$ è la velocità e il vettore unitario $\vec{\boldsymbol{m}} \in \mathbb{S}^2$ è la direzione. L'onda $\vec{\boldsymbol{u}}$ si dice longitudinale se $\vec{\boldsymbol{A}} \parallel \vec{\boldsymbol{m}}$ e trasversale se $\vec{\boldsymbol{A}} \perp \vec{\boldsymbol{m}}$.*

*Dimostrazione.* Iniziamo la dimostrazione osservando che:

1. $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{A}}c^2 f''(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct)$ .
2. $\frac{\partial^2}{\partial (X_i)^2}u_k = a_k(m_i)^2 f''(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct)$ .
3. $\boldsymbol{\Delta}(u_k) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial (X_i)^2}u_k = a_k(\sum_{i=1}^3 (m_i)^2) f''(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct) = a_k f''(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct)$ .
4. $\boldsymbol{\Delta}(\vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\boldsymbol{A}} f''(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct)$ .
5. $\mathrm{div}(\vec{\boldsymbol{u}}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial (X_i)^2}u_i = (\sum_{i=1}^3 (m_i)(a_i)) f'(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct) = \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} f'(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct)$ .
6. $(\mathrm{Grad}(\mathrm{div}(\vec{\boldsymbol{u}})))_i = \frac{\partial}{\partial (X_i)}\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} f'(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct) = \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} f''(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct) m_i$ .
7. $(\mathrm{Grad}(\mathrm{div}(\vec{\boldsymbol{u}}))) = (\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}})\vec{\boldsymbol{m}} f''(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct) = f''(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct)(\vec{\boldsymbol{m}} \otimes \vec{\boldsymbol{m}})\vec{\boldsymbol{A}}$ .

Quindi, se $f''(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct)$ non è nulla, $\vec{\boldsymbol{u}}$ è soluzione se e solo se

$$\rho c^2 \vec{\boldsymbol{A}} f''(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct) = (\lambda + 2\mu)\vec{\boldsymbol{A}} f''(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct)(\vec{\boldsymbol{m}} \otimes \vec{\boldsymbol{m}}) + \mu \vec{\boldsymbol{A}} f''(\vec{\boldsymbol{X}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}} - ct)$$
$$\rho c^2 \vec{\boldsymbol{A}} = (\lambda + 2\mu)(\vec{\boldsymbol{m}} \otimes \vec{\boldsymbol{m}})\vec{\boldsymbol{A}} + \mu \vec{\boldsymbol{A}}$$
$$c^2 \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{\rho}\left[(\lambda + 2\mu)(\vec{\boldsymbol{m}} \otimes \vec{\boldsymbol{m}}) + \mu \mathbb{I}_3\right] \vec{\boldsymbol{A}}.$$

Ovvero se e solo se $\vec{\boldsymbol{A}}$ è autovettore del *tensore acustico* $\mathsf{S}$ con autovalore $c^2$. □

**Osservazione 17.** *Se si considera la base ortonormale $\{\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ con il vettore direzione $\vec{\boldsymbol{m}} = \vec{\boldsymbol{e}}_1$, si ha:*

$$\mathsf{S}(\vec{\boldsymbol{e}}_1) = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} \lambda + 3\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

*Quindi gli autovettori sono $\{\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3\}$ con rispettivi autovalori $\{\frac{\lambda+3\mu}{\rho}, \frac{\mu}{\rho}, \frac{\mu}{\rho}\}$. Dunque le possibili velocità sono:*

- $c^2 = \frac{\lambda+3\mu}{\rho}$ *se $\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{e}}_1$ (onda longitudinale).*
- $c^2 = \frac{\mu}{\rho}$ *se $\vec{\boldsymbol{A}} \in \langle \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3 \rangle$ (onda trasversale).*

*Ossserviamo inoltre che nei casi in cui l'onda è trasversale si ha $(\vec{\boldsymbol{m}} \otimes \vec{\boldsymbol{m}})\vec{\boldsymbol{A}} = 0$, quindi la (1.15) diventa l'equazione*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\mu}{\rho}\, \boldsymbol{\Delta}\, \vec{\boldsymbol{u}},$$

*che è proprio l'equazione delle onde tridimensionale.*

È importante notare che le onde elastiche trasversali in un solido si propagano con velocità finita anche nel caso di materiale incomprimibile ($\lambda \to +\infty$).

# Bibliografia


[1] G. G. Giusteri ed A. Musesti (2015) *Dispense del corso di Fluidodinamica*, per la facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali dell'Università Cattolica del Sacro Cuore.

[2] M. Favretti (2023) *Models of mathematical physics*, dispense per il corso di modelli fisico-matematici della facoltà di scienze matematiche all'Università di Pavoda.

[3] L. D. Landau ed E. M. Lifshitz (1959) *Fluid mechanics*, Pergamon press.

[4] G. G. Giusteri e R. Penta (2022) Periodic rhomboidal cells for symmetry-preserving homogenization and isotropic metamaterials. *Mechanics Research Communications*, 126, 104001.

*Dedico questo lavoro al Maestro, Franco Battiato.*