

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
“Galileo Galilei”

Tesi di Laurea in Fisica

Composti dionici in Meccanica Quantistica

**Relatore:**

Prof. Pieralberto Marchetti

**Laureando:** Eugenia Boffo

**Matricola:** 1027122

---

Anno Accademico 2013/2014

# Indice

|     |  |           |
|-----|--|-----------|
| 1   | Introduzione . . . . .                                     | 3         |
| 2   | Dualità e monopoli . . . . .                               | 5         |
| 3   | Dioni nel fibrato con gruppo di struttura $U(1)$ . . . . . | 8         |
| 4   | Formulazione Hamiltoniana . . . . .                        | 13        |
| 4.1 | $N > 1$ composti dionici . . . . .                         | 15        |
| 5   | Quantizzazione Canonica . . . . .                          | 17        |
| 6   | Momento angolare di un composto dionico . . . . .          | 19        |
| 7   | Statistica dei composti dionici . . . . .                  | 21        |
| 8   | Conclusioni . . . . .                                      | 26        |
| 9   | Appendice . . . . .  | 27        |
| 9.1 | Dimostrazioni . . . . .                                    | 28        |
|     | <b>Bibliografia</b>  | <b>31</b> |

## 1 Introduzione

Paul Dirac, in un articolo pubblicato nel 1931, mostrò che supporre l'esistenza del monopolo magnetico non solo è una richiesta sul rispetto della simmetria delle equazioni di Maxwell per scambio di campo elettrico e magnetico anche in presenza delle sorgenti, simmetria detta dualità elettromagnetica, ma presenta anche una conseguenza fisicamente rilevante. Se ci fosse anche un solo monopolo, allora tutte le cariche elettriche delle particelle osservate nell'universo dovrebbero essere multipli interi di una carica fondamentale, come in effetti realmente si osserva.

La simmetria di dualità delle equazioni di Maxwell nel vuoto infatti è perduta quando si considerano presenti le sorgenti: densità di carica e di corrente elettrica non avrebbero un corrispettivo magnetico se non si supponesse il contrario, e campo elettrico e magnetico risulterebbero, quindi, differenti.

Una volta ammessa l'esistenza di un monopolo magnetico, nulla vieta di porre una carica elettrica nello stesso punto in cui esso è localizzato. Il composto che così si forma viene detto dione.

L'importanza dei dioni è dovuta alla loro comparsa in teorie di grande unificazione. In senso ampio, chiameremo dioni o composti dionici anche configurazioni in cui i due tipi di carica sono separati spazialmente di poco.

In questo breve testo, seguendo i precursori Wu e Yang (1975), e l'articolo successivo di Friedman e Sorkin (1979), si presenterà un'analisi delle proprietà quantistiche di un composto dionico utilizzando la formulazione con fibrati principali di gruppo di struttura  $U(1)$ , l'insieme dei numeri complessi di modulo 1.

Per effetto della presenza del monopolo magnetico, dal punto di vista fisico le proprietà topologiche di  $\mathbb{R}^3$  subiscono una modifica sostanziale: è anzitutto necessario escludere dalle considerazioni il punto in cui è situato il monopolo. Solo in questo modo è possibile definire nello spazio così modificato un potenziale elettromagnetico o campo di gauge. Esso sarà definito soltanto localmente su aperti, per comodità assunti contraibili, e nell'intersezione tra due aperti le espressioni del campo di gauge differiranno per una trasformazione di gauge proporzionale alla carica magnetica.

Queste considerazioni motivano, per la descrizione matematica del sistema con il monopolo localizzato nell'origine, l'introduzione su  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  di un fibrato principale con gruppo di struttura  $U(1)$  (si veda l'appendice per le definizioni).

Successivamente, si discuterà l'effetto di quantizzazione del prodotto tra i due tipi di carica e, riferendosi alla pubblicazione di Goldhaber (1976) e, nuovamente, a quella di Friedman e Sorkin, si mostrerà che si presenta un effetto di trasmutazione congiunta dello spin e della statistica.

Infatti, partendo da un composto con costituenti privi di spin, lo spettro del momento angolare totale presenterà valori non nulli dipendenti dall'intero  $n$  che caratterizza la rappresentazione del gruppo  $U(1)$  legata alla carica magnetica; addirittura i valori consentiti al momento angolare saranno seminteri (in unità di  $\hbar$ ) per  $n$  dispari.

Invece la statistica consentita ad un insieme di composti dionici subirà delle modifiche, anch'esse dipendenti da  $n$ , che comporteranno la validità della relazione spin-statistica anche per i dioni. Il teorema che associa allo spin intero una statistica di Bose-Einstein e allo spin semintero una statistica di Fermi-Dirac rimarrà infatti provato anche in presenza di un momento angolare aggiuntivo per il composto.

La trattazione seguirà lo schema descritto qui sotto.

Nel capitolo 2 si presenterà la dualità elettromagnetica in presenza di cariche e monopoli in contesto classico.

Nel capitolo 3 si presenteranno dettagliatamente il fibrato  $P$ , utilizzato per descrivere la meccanica dei composti dionici (d'ora in poi denominati anche per semplicità dioni). La definizione generale di fibrato

e quella di fibrato principale, utilizzate nella tesi, sono presentate in appendice.

Il quarto capitolo verterà sulla formulazione lagrangiana ed hamiltoniana, passo indispensabile per la quantizzazione, che occuperà il quinto capitolo.

Nel sesto capitolo verranno indagate le proprietà della rappresentazione (proiettiva) del gruppo  $SO(3)$  sullo spazio delle funzioni d'onda a valori nel fibrato  $P$ ,  $L^2(P)$ : questo equivarrà ad analizzare lo spettro dell'osservabile momento angolare totale per i dioni.

Per la statistica, dapprima si definirà un'azione del gruppo delle permutazioni di due insiemi di oggetti sulla varietà di base. Essa indurrà un automorfismo del fibrato. Si osserverà che due automorfismi del fibrato coincideranno modulo una fase globale, e quindi sarà possibile confrontare la generica rappresentazione di un elemento di  $S_N$  (gruppo delle permutazioni dei composti dionici) per il settore bosonico delle funzioni d'onda con la rappresentazione associata alla realizzazione di uno scambio asintotico di due dioni, trovando che non coincideranno per  $n$  dispari, nel qual caso la statistica dei dioni sarà fermionica.

## 2 Dualità e monopoli

Prima di iniziare la trattazione vera e propria, qui di seguito si presentano alcune nozioni indispensabili per il prosieguo dell'analisi del composto monopolo magnetico-carica elettrica.

Con composto dionico s'intende, nello specifico, un monopolo magnetico ed una carica elettrica, mantenuti ad una distanza fissa da un potenziale che si può sempre ammettere esista.

Anzitutto si discuterà in dettaglio cosa s'intende per simmetria di dualità.

Se la densità di carica elettrica  $\rho_e = 0$ , le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo sono:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1}$$

Evidentemente le equazioni sono invarianti per lo scambio tra campo elettrico e magnetico (a meno di un segno)  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$  e  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ .

Se si considera presente la carica elettrica, la simmetria per tale scambio non è più verificata. Tuttavia, inserendo nella teoria il monopolo magnetico, ed indicando la sua carica con  $g$  (corrispondentemente  $\rho_g$  è la densità di carica magnetica,  $\mathbf{j}_g$  la densità di corrente), le equazioni mutano in

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_e \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mathbf{j}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \rho_m \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{j}_e + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{2}$$

e la simmetria è rispettata se alla trasformazione dei campi suddetta si accompagna quella delle sorgenti:

$$\begin{aligned}\rho_e &\rightarrow \rho_m, & \rho_m &\rightarrow -\rho_e; \\ \mathbf{j}_e &\rightarrow \mathbf{j}_m, & \mathbf{j}_m &\rightarrow -\mathbf{j}_e.\end{aligned}$$

La teoria elettromagnetica classica resta consistente anche con l'introduzione dei monopoli magnetici, sebbene, in conseguenza di quest'ipotesi, sia necessario introdurre delle modifiche alle proprietà geometriche dello spazio.

In particolare ora non è possibile definire un potenziale vettore  $\mathbf{A}$  globale su  $\mathbb{R}^3$  neppure escludendo il punto in cui è localizzato il monopolo, perché  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  solo se lo spazio è contraibile (lemma di Poincaré per l'esattezza delle forme chiuse) ed escludendo  $\{0\}$  dallo spazio tridimensionale esso non è più contraibile, ossia deformabile con continuità in un punto. Soltanto rimuovendo una stringa di singolarità  $\Delta$  dal punto in cui è localizzata la carica magnetica fino all'infinito il potenziale è globalmente definito, perché allora il risultante spazio è contraibile.

$\mathbb{R}^3 \setminus \Delta$  infatti è isomorfo ad  $\mathbb{R}^2$ . È possibile, allora, usare un ricoprimento di  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  costituito da due aperti ottenuti rimuovendo due stringhe disgiunte. In ciascuno di questi aperti (o carte) è possibile definire  $\mathbf{A}$  e per un punto nell'intersezione un cambio di carta in  $\mathbf{A}$  equivale ad una trasformazione di gauge. La struttura geometrica che descrive questa condizione corrisponde a quella di un fibrato principale  $P(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, U(1))$ , dettagliatamente discusso in appendice.

Introducendo la curvatura  $F$ , che è la 2-forma differenziale  $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$  di componenti  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , in un'opportuna carta locale, date da

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

è facile vedere che  $F$  è globalmente definita in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

Si presentano, ora, le equazioni per la dinamica di una particella carica nel contesto non-relativistico in cui si svilupperà tutta la tesi, ricordando che le soluzioni di queste equazioni sono definite in un'opportuna trivializzazione del fibrato principale con gruppo di struttura  $U(1)$ . La forza di Lorentz generalizzata e la legge di potenza sono date, nel formalismo vettoriale consono agli scopi del testo, da:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) + g(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}), \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= \mathbf{v} \cdot (e\mathbf{E} + g\mathbf{B}), \end{aligned} \quad (3)$$

la cui derivazione è presentata nella sezione Dimostrazioni dell'appendice.

In approssimazione non-relativistica servirà considerare, in via del tutto generale, solamente lo sviluppo al prim'ordine in  $o(\frac{1}{c})$  dei campi di Lienard-Wiechert generati da un dione con cariche  $(e, g)$  concentrate nello stesso punto,  $E_i = F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i$  e  $B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}$ , ove  $A_\mu$  è il potenziale ritardato, la soluzione delle equazioni ottenuta applicando il calcolo dei residui ed il metodo della funzione di Green, nonché imponendo la sua finitezza e il rispetto dell'invarianza di Lorentz:

$$A_{\mu(\text{ret})}(x) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{j_\mu(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

L'apporto del contributo magnetico si ricava per dualità: se  $\tilde{F}$  indica la 2-forma elettromagnetica duale di  $F$ , che in componenti vale  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ , l'equazione di Maxwell corrispondente è proprio  $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = j_m^\nu$ , con  $j_m^\nu = \int g \delta^4(x - y) dy^\nu$  densità di corrente magnetica.

Le espansioni dei campi richieste sono, quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{y}) &= \frac{e}{4\pi} \frac{\mathbf{y}}{y^3} - \frac{g}{4\pi c} \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{y}}{y^3} \\ \mathbf{B}(\mathbf{y}) &= \frac{g}{4\pi} \frac{\mathbf{y}}{y^3} + \frac{e}{4\pi c} \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{y}}{y^3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Date queste equazioni, per gli scopi successivi sarà necessaria soltanto la forza, al prim'ordine dello sviluppo relativistico in  $o(\frac{1}{c})$ , avvertita rispettivamente da una carica (da un monopolio) di massa  $m_e$  ( $m_g$ ) nel campo generato dall'altra particella localizzata nel punto  $\mathbf{y}_g$  ( $\mathbf{y}_e$ ):

$$\begin{aligned} m_e \ddot{\mathbf{y}}_e &= \frac{eg}{4\pi c} (\dot{\mathbf{y}}_e - \dot{\mathbf{y}}_g) \times \frac{(\mathbf{y}_e - \mathbf{y}_g)}{|\mathbf{y}_e - \mathbf{y}_g|^3} \\ m_g \ddot{\mathbf{y}}_g &= -\frac{ge}{4\pi c} (\dot{\mathbf{y}}_g - \dot{\mathbf{y}}_e) \times \frac{(\mathbf{y}_g - \mathbf{y}_e)}{|\mathbf{y}_g - \mathbf{y}_e|^3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Infatti, in questo contesto, la particella di massa  $m_e$  elettricamente carica situata nel punto  $\mathbf{y}_e$  risente, al prim'ordine in  $\frac{v}{c}$ , del campo elettrico  $\mathbf{E}$  generato dal monopolio di massa  $m_g$  situato in  $\mathbf{y}_g$ , che vale

$\mathbf{E}(\mathbf{y}_e) = -\frac{g}{4\pi c} \dot{\mathbf{y}}_g \times \frac{\mathbf{y}_e - \mathbf{y}_g}{|\mathbf{y}_e - \mathbf{y}_g|^3}$ , mentre il contributo alla forza di Lorentz da parte del campo magnetico del monopolo è  $\mathbf{B}(\mathbf{y}_e) = \frac{g}{4\pi} \frac{\mathbf{y}_e - \mathbf{y}_g}{|\mathbf{y}_e - \mathbf{y}_g|^3}$ .

Le due espressioni per i campi, sostituite nella prima equazione in (3), riproducono esattamente l'equazione di Lorentz per la particella elettricamente carica (prima equazione in (5)). Un discorso analogo consente di verificare l'esattezza della seconda espressione di quello stesso gruppo di equazioni.

Per trattare il caso di N composti dionici è sufficiente estendere la (5) per linearità, sommando su tutte le cariche presenti, senza dimenticare i termini di interazione tra carica elettrica (magnetica) e campi elettrici (magnetici) dovuti agli altri composti dionici.

### 3 Dioni nel fibrato con gruppo di struttura $U(1)$

In questa sezione si adattano le definizioni generiche sui fibrati principali e sui gruppi di Lie presentate in appendice al caso specifico dell'elettromagnetismo in presenza del monopolo magnetico, in cui lo spazio delle configurazioni di un particella puntiforme carica elettricamente che risente di un monopolo è descrivibile come un fibrato principale con gruppo di struttura  $U(1)$ . Storicamente furono Wu e Yang, nel 1975, i primi ad effettuare un'analisi di questo tipo sul monopolo magnetico.

La varietà di base  $M$  per il fibrato è  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , dove  $\{0\}$  è il punto in cui si suppone localizzato il monopolo. Tuttavia non è necessario considerare questa varietà come base del fibrato principale perché, per gli scopi successivi, considerare un fibrato con lo stesso gruppo di struttura e con base  $\mathbb{S}^2$ , la sfera, è completamente equivalente (e si utilizzerà, quindi, il secondo). Ciò si spiega con il fatto che  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  e  $\mathbb{S}^2$  condividono lo stesso tipo di omotopia.

La definizione di omotopia riguarda la possibilità di deformare con continuità due differenti circuiti sullo stesso spazio: se  $X$  è uno spazio topologico e  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$  sono circuiti basati ad  $x_0 \in X$ , allora essi sono detti circuiti omotopi se esiste una mappa continua  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tale che  $F(t, 0) = \alpha(t)$ ,  $F(t, 1) = \beta(t) \quad \forall t \in [0, 1]$ , con  $F(0, s) = F(1, s) = x_0 \quad \forall s \in [0, 1]$ . L'essere circuiti omotopi è una relazione di equivalenza.

L'insieme delle diverse classi di omotopia dei circuiti basati ad  $x_0$  di uno spazio topologico  $X$  è il gruppo fondamentale di omotopia, indicato con  $\pi_1(X)$ . L'insieme delle classi di omotopia per mappe  $\mathbb{S}^2 \rightarrow X$ ,  $\mathbb{S}^3 \rightarrow X$ , fino a  $\mathbb{S}^n \rightarrow X$ , costituisce rispettivamente il secondo, il terzo e l' $n$ -esimo gruppo di omotopia, indicato con  $\pi_2(X)$ ,  $\pi_3(X)$ ,  $\pi_n(X)$ .

È facile provare che  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) = \pi_1(\mathbb{S}^2) = 0$  e che  $\pi_2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) = \pi_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$ , ma con maggiori difficoltà si può dimostrare che i gruppi di omotopia per lo spazio tridimensionale bucato e per la sfera coincidono tutti.

Due carte locali, definite nell'emisfero superiore ed inferiore di  $\mathbb{S}^2$  e che s'intersecano in una striscia stretta di larghezza  $\epsilon$ , sono date, in coordinate sferiche, da:

$$\begin{aligned} \tau_N : \{ \phi, \theta \in \mathbb{S}^2 \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon, 0 \leq \phi < 2\pi \} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \tau_N(\phi, \theta) &= (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_S : \{ \phi, \theta \in \mathbb{S}^2 \mid \frac{\pi}{2} - \epsilon < \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi \} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \tau_S(\phi, \theta) &= \tau_N(\phi, \theta) \end{aligned}$$

Invece il fibrato principale con gruppo di struttura  $U(1)$  è rappresentato nel diagramma sottostante:

$$\begin{array}{ccc} P & \supset & \pi^{-1}(V_i) \xrightarrow{\phi^{-1}} \phi^{-1}(\pi^{-1}(V_i)) \simeq V_i \times U(1) \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ \mathbb{S}^2 & \supset & V_i \end{array} \quad \swarrow \pi_1$$

Fibrato per il monopolo con gruppo di struttura  $U(1)$



Riferendosi alla pagina precedente, si consideri il fibrato principale  $P(\mathbb{S}^2, U(1))$  su  $\mathbb{S}^2$  con fibra il gruppo  $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Un punto  $u \in P$  con  $\pi(u) = p$ ,  $p \in \mathbb{S}^2$ , è dato da  $(p, g)$  dove  $g$  è un elemento del gruppo  $U(1)$ .

Per la varietà differenziabile associata al gruppo di Lie generico  $G$  del fibrato principale è possibile definire un'applicazione canonica, l'azione sinistra (destra) sulla varietà  $G$  stessa  $L_a (R_a) : G \rightarrow G$  ( $g, a \in G$ ), con  $L_a g = ag$  ( $R_a g = ga$ ).

Nel caso del gruppo  $U(1)$  l'azione sinistra  $\Gamma$  (equivalente, in questo caso, all'azione destra) su un elemento del fibrato  $P(\mathbb{S}^2, U(1))$  in una banalizzazione locale  $\pi^{-1}(V_i)$  è, per definizione ( $\Gamma : U(1) \times \pi^{-1}(V_i) \rightarrow \pi^{-1}(V_i)$ ):

$$\Gamma(z)(p, g) = (p, zg),$$

corrisponde, cioè, ad un'azione (si consulti l'appendice) di  $U(1)$  su  $U(1)$  stesso, ed ha l'effetto di mescolare la fibra.

Le azioni (sinistra e destra) inducono anche delle mappe  $L_{a*}$  e  $R_{a*}$  negli spazi tangenti, da  $T_g G \rightarrow T_{ag} G$  nel primo caso e da  $T_g G \rightarrow T_{ga} G$  nel secondo. Con queste è possibile denotare, in via del tutto generale, un campo vettoriale  $X$  invariante a sinistra:  $X \in \mathcal{T}(G)$ , ove  $\mathcal{T}(G)$  denota lo spazio delle sezioni  $\sigma$  o applicazioni da  $G$  in  $TG$  con  $\pi \circ \sigma = id_G$ , per il quale vale, se  $a, g \in G$ ,

$$L_{a*} X|_g = X|_{ag}.$$

Solitamente l'esistenza di un campo vettoriale invariante a sinistra,  $X_V$ , consente di definire un unico vettore  $V \in T_e G$ , spazio vettoriale tangente all'identità del gruppo, come:

$$V = X|_e.$$

Viceversa, per  $V \in T_e G$ ,  $\exists! X_V$  invariante a sinistra dato da:

$$X_V|_g = L_{g*} V.$$

La presenza, dunque, di una corrispondenza biunivoca tra vettori dello spazio tangente all'identità del gruppo e l'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra (indicato con  $\mathfrak{g}$ ) consente di caratterizzare in maniera geometrica la cosiddetta algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  del gruppo di Lie  $G$  mediante l'isomorfismo  $T_e G \rightarrow \mathfrak{g}$ .  $\mathfrak{g} \simeq T_e G$  è, effettivamente, un'algebra: ha struttura di spazio vettoriale ed è dotato dell'operazione di commutazione tra campi vettoriali. È, infatti, chiuso rispetto alle parentesi di Lie:

$$L_{a*}[X, Y]|_g = [L_{a*}X|_g, L_{a*}Y|_g] = [X, Y]|_{ag}$$

per linearità dell'azione sinistra.

L'oggetto geometrico fondamentale per qualsiasi fibrato principale è la connessione, formalmente definita come la separazione unica dello spazio tangente in  $u \in P$  in spazio orizzontale  $H_u P$  e verticale  $V_u P$ , ove  $V_u P \subset T_u P$  è lo spazio vettoriale tangente alla fibra  $G_p$  sopra  $p = \pi(u)$ :

$$V_u P = T_u G_p.$$

L'isomorfismo  $\# : \mathfrak{g} \rightarrow V_u P$ , che ad  $A \in T_e G$  associa  $A^\#$ , consente una caratterizzazione di  $V_u P$  per mezzo di un'applicazione  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ .

Infatti, se si definisce un vettore dello spazio tangente a  $P$  in  $u$  con la derivata di  $f$  rispetto a  $t$ , per

$t = 0$ , nel punto dato dall'azione destra su  $u$  dell'elemento  $e^{tA} \equiv \phi_A(t)$ , è facile rendersi conto che questo vettore appartiene, in realtà, a  $T_u G_p$ . Quindi:

$$A^\# f(u) \equiv \frac{d}{dt} f(u \exp(tA))|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(R_{\exp(tA)} u)|_{t=0}$$

ben caratterizza il vettore  $A^\#$  di  $V_u P$  cui corrisponde un vettore  $A$  in  $T_e P$ .

Dunque per una connessione su un fibrato principale devono valere le tre seguenti proprietà:

1. )  $T_u P = H_u P \oplus V_u P$ ;
2. )  $X \in \mathcal{T}(P)$  si scompone come  $X = X^H + X^V$  con  $X^H|_p \in H_u P$  e con  $X^V|_p \in V_u P$ ;
3. )  $H_{ug} P = R_{g*} H_u P \quad \forall u \in P, g \in G$ .

Per mezzo di un'importante teorema che garantisce l'associazione univoca, ad ogni applicazione  $\mathcal{C}^\infty$  multilineare da  $\mathcal{T}(M)$  nello spazio delle funzioni  $\mathcal{C}^\infty$  sullo spazio totale del fibrato, di un campo tensoriale  $\in \Lambda(M)$ , la presenza della connessione, come regola per suddividere lo spazio tangente, induce l'esistenza della 1-forma di connessione  $\omega : \mathfrak{g} \otimes T^*P$ , che ai vettori del tangente di  $P$  associa i vettori dell'algebra di Lie che sono pure (per l'esistenza dell'isomorfismo  $\#$ ) vettori dello spazio verticale. Quest'applicazione multilineare  $\omega$ , dunque, proietta  $T_u P$  in  $V_u P$ .

La scrittura in coordinate locali nell'intorno aperto di un punto in  $P$  della 1-forma di connessione  $\mathcal{A} \equiv \sigma^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i)$ , se  $\sigma$  è una sezione locale per il fibrato nell'aperto  $i$ -esimo e  $\Omega^1(U_i)$  lo spazio delle 1-forme sugli aperti che ricoprono  $M$  e con  $*$  s'indica il pull-back, si ottiene dal prodotto tensore tra una base per  $\mathfrak{g} \simeq T_e G$ ,  $\{t_n, n = 1, 2, \dots\}$ , e una base di  $\Omega^1(U_i)$ ,  $\{e^i = \beta_k^i dx^k, i = 1, 2, \dots\}$ .

La scelta canonica per la 1-forma di connessione per il fibrato  $P(\mathbb{S}^2, U(1))$ , che in coordinate locali dev'essere una forma differenziale su  $P$  a valori nell'algebra di Lie di  $U(1)$  ( $\mathfrak{u}(1)$ , isomorfa ai complessi immaginari puri) è:

$$\mathcal{A}_N = i d\eta + i\tilde{g}(1 + \cos \theta) d\phi \quad (6)$$

$$\mathcal{A}_S = i d\eta + i\tilde{g}(-1 + \cos \theta) d\phi \quad (7)$$

con  $\tilde{g}$  per ora numero reale, che s'identificherà con la carica del monopolo a meno di rinormalizzazioni, ed  $\eta$  che parametrizza  $U(1)$ . Si noti che valutando  $A = -i\mathcal{A}$  in  $\xi$ , generatore di  $\mathfrak{u}(1)$ ,  $A(\xi) = 1$  poiché  $d\eta(\xi) = 1$ ,  $d\phi(\xi) = 0$ . Il vettore  $\xi$  appartiene, dunque, allo spazio verticale: questa è una proprietà di fondamentale importanza dovuta alla particolare scelta della connessione.

Se  $e^{i\varphi(\phi)}$  è una funzione dall'intersezione dell'emisfero superiore ( $V_N$ ) con quello inferiore ( $V_S$ ) della sfera al gruppo  $U(1)$ ,  $e^{i\varphi(\phi)} : V_N \cap V_S \rightarrow U(1)$ , con  $\varphi : V_N \cap V_S \equiv \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $e^{i\varphi(\phi)}$  è detta funzione di transizione per il fibrato  $P(\mathbb{S}^2, U(1))$ . Si dimostra che le forme locali nell'intersezione dei domini di due carte della 1-forma di connessione devono rispettare la condizione:

$$\mathcal{A}_S = e^{-i\varphi(\phi)} \mathcal{A}_N e^{i\varphi(\phi)} + e^{-i\varphi(\phi)} d e^{i\varphi(\phi)}$$

la quale, essendo  $U(1)$  abeliano, corrisponderebbe, in componenti, a:

$$A_{S\mu} = A_{N\mu} + \partial_\mu \varphi \quad (8)$$

cioè ad una consueta trasformazione di gauge in elettromagnetismo.

Per chiarire il significato generale di curvatura sono necessari i seguenti due elementi:

- differenziale esterno: operazione  $\mathcal{C}^\infty$  che, agendo su  $j - 1$ -forme, restituisce  $j$ -forme, e soddisfa una regola di Leibniz per il prodotto esterno di forme differenziali con un segno dipendente dall'ordine della permutazione che riordina la base;
- derivata covariante: operatore differenziale che si applica alle  $r$ -forme differenziali a valori in  $V$  (spazio vettoriale di dimensione  $k$ ),  $\phi \in \Omega^r(P) \otimes V$  tramite il differenziale esterno su  $\phi$ , valutata, però, sulla componente lungo il sottospazio orizzontale dei vettori tangenti,

$$D\phi(X_1, \dots, X_{r+1}) \equiv d_P\phi(X_1^H, \dots, X_{r+1}^H)$$

La 2-forma  $\Omega$  data dalla derivata covariante della 1-forma di connessione,  $\Omega = D\omega$ , è l'oggetto geometrico che prende il nome di curvatura.

Localmente, detta  $\mathcal{F} \equiv \sigma^*\Omega$  la curvatura valutata su  $\sigma^*$ , si dimostra che essa assume l'espressione:

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$$

La forma locale della curvatura  $\mathcal{F}$  associata alla 1-forma di connessione in (6)-(7), essendo le costanti di struttura coinvolte in  $\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$  banalmente nulle in quanto il gruppo  $U(1)$  è abeliano, si ricava semplicemente dal differenziale esterno di  $\mathcal{A}$ .

In coordinate sferiche per qualsiasi aperto si ha allora  $\mathcal{F} = i\tilde{g} \sin\theta d\theta \wedge d\phi$ , che si può dimostrare coincidere con la scrittura in coordinate cartesiane,

$$\mathcal{F} = i \frac{\tilde{g}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (z dx \wedge dy - y dx \wedge dz + x dy \wedge dz).$$

La condizione di compatibilità nel cambio di carta dato dalla funzione di transizione  $t_{ij} \equiv \phi_i^{-1} \circ \psi_j$  tra gli aperti  $i$ -esimi e  $j$ -esimi con le due trivializzazioni  $\phi_i^{-1}$  e  $\psi_j^{-1}$  per un generico gruppo di struttura è:

$$\mathcal{F}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{F}_i t_{ij}$$

che non dipende dal differenziale delle funzioni di transizione, come vi dipendeva, invece,  $\mathcal{A}_i$ .

Per il fibrato principale  $P(\mathbb{S}^2, U(1))$  la richiesta precedente corrisponde ad una trasformazione di gauge della curvatura, che nel caso mostra esplicitamente l'invarianza di  $\mathcal{F}$  per trasformazioni di gauge:

$$\mathcal{F}_j = e^{-i\varphi(\phi)} \mathcal{F}_i e^{i\varphi(\phi)} = d\mathcal{A}_j$$

perché il differenziale esterno su un elemento di  $U(1)$  (l'immagine di una funzione di transizione è sempre un elemento del gruppo di struttura) prodotto esterno con lo stesso differenziale è nullo, e tutti gli altri elementi presenti si annullano perché  $U(1)$  è abeliano.

Si rammenti che il coefficiente immaginario  $i$ , dovuto alla scelta per le parentesi di Lie dell'algebra, non è presente nell'elettromagnetismo, e pure le costanti di accoppiamento: la corrispondenza è  $\mathcal{F} = 4\pi F$ .

È possibile vedere (equazioni 6 e 7) che nel passaggio attraverso l'origine di  $\phi$  la funzione  $\varphi(\phi)$  presenta una discontinuità data dall'integrale lungo l'equatore di  $d\varphi = i(\mathcal{A}_N - \mathcal{A}_S) = 2\tilde{g} d\phi$ , cioè

$$\Delta\varphi = 4\pi\tilde{g}$$

La funzione di transizione  $t_{NS} : \mathbb{S}^1 \rightarrow U(1)$ ,  $t_{NS} = e^{i\varphi(\phi)}$  deve assumere valori univoci al variare dei punti nell'intersezione degli aperti che ricoprono  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{S}^1$  per  $\epsilon$  piccolo.

La variazione di  $\varphi(\phi)$  dovrà, perciò, essere un multiplo intero di  $2\pi$ ,  $\Delta\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Questa condizione si traduce nel vincolo di discretizzazione  $2\tilde{g} \in \mathbb{Z}$ . In seguito, quindi, si utilizzeranno in maniera indistinta  $\tilde{g}$  (semintero) o  $\frac{n}{2}$  (con  $n$  intero) come coefficienti per i potenziali.

Il particolare vincolo, qui ricavato, sui valori che la carica magnetica può assumere è direttamente relazionato con l'appartenenza di  $t_{NS}$  al primo gruppo di omotopia di  $U(1)$ ,  $t_{NS} \in \pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ . Questa è una diretta conseguenza della struttura non triviale del fibrato.

Si noti che anziché un generico  $n \in \mathbb{Z}$  si sarebbe potuto scegliere direttamente 1. Questo corrisponde ad identificare ogni fibra che differisce nella coordinata che parametrizza  $U(1)$  non solo di  $2\pi$ , ma di  $\frac{2\pi}{n}$ , e si dimostra che la quotizzazione con  $\mathbb{Z}$  non procura alcun problema: il fibrato con gruppo di struttura  $U(1)$  che si ottiene è completamente equivalente al precedente con  $n$  volte il gruppo fondamentale di omotopia del primo.

Quest'imposizione d'interezza ha ulteriori implicazioni fisiche esplicitate nel contesto della formulazione hamiltoniana quantistica per il problema di una particella carica nel campo di un monopolo, prima fra tutte la condizione di quantizzazione di Dirac, che a sua volta implica l'esistenza di cariche primitive discretizzate. Nel quinto capitolo il risultato suddetto sarà ricavato in maniera rigorosa a partire da queste considerazioni.

Riassumendo, in questo primo paragrafo si è assegnato un fibrato principale con gruppo di struttura  $U(1)$  ad  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , si è stabilito che è del tutto equivalente ad un fibrazione sopra  $\mathbb{S}^2$ , si è fornita un'espressione per il potenziale e si è controllata la suddivisione dello spazio tangente. Si è, successivamente, effettuato un cambio di gauge: la 2-forma di curvatura ne è risultata indipendente, la connessione no, e questo, unitamente alla presenza di un numero non banale di carte per ricoprire la varietà base, ha procurato la discontinuità della funzione di gauge.

Si è infine fornito un argomento per spiegare, in maniera approssimativa, come emerga la condizione di quantizzazione di Dirac per il prodotto delle cariche di un composto dionico. Nel capitolo 5 la condizione di discretizzazione verrà ricavata in modo più rigoroso.

## 4 Formulazione Hamiltoniana

Cerchiamo, ora, di dotare il fibrato di una dinamica lagrangiana con lo scopo di passare, con la trasformata di Legendre, alla funzione di Hamilton e di effettuare la quantizzazione canonica. S'indicheranno in minuscolo gli indici per l'espressione locale delle grandezze sullo spazio di base, in maiuscolo quelle per le grandezze sullo spazio totale.

L'equazione non relativistica del moto di una carica nel campo di un monopolo, e viceversa per dualità quelle di un monopolo nel campo di una carica elettrica, dev'essere soluzione della minimizzazione del funzionale azione, l'integrale in  $dt$  di una funzione lagrangiana definita sulla traiettoria  $\gamma$  della particella nello spazio di base,

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t).$$

Poiché, però, il potenziale per il monopolo magnetico non è globalmente definito sulla varietà di base, il termine che descrive l'interazione tra la particella e il monopolo dev'essere fornito tramite una funzione lagrangiana definita sul sollevamento orizzontale della curva  $\gamma$ .

Se  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  è una curva sulla base del fibrato a molti composti dionici,  $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$  è il sollevamento orizzontale di  $\gamma$  se soddisfa la relazione  $\pi \circ \bar{\gamma} = \gamma$  e  $\forall t \in [0, 1]$  i vettori  $\bar{X}$  di  $T_{\bar{\gamma}(t)}P$  sono tutti in  $H_{\bar{\gamma}(t)}P$ .

Inoltre  $\bar{\gamma}$  può essere anche ottenuto dalla condizione, fornita per definizione dalla 1-forma di connessione che  $\omega(\bar{X}) = 0 \forall \bar{X} \in H_{\bar{\gamma}(t)}P$ . Infatti, per il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale, assegnata la condizione iniziale  $\bar{\gamma}(0) = u_0$ ,  $\exists!$  il sollevamento orizzontale.

In una delle carte locali per la varietà di base, l'equazione di Lorentz per la componente  $\alpha$ -esima, soggetta al campo generato dal monopolo  $\hat{b}$ -esimo di carica magnetica elementare  $g$  si scrive:

$$m\ddot{x}_a^\alpha = \frac{eg}{c} \check{F}^\alpha{}_\beta(x_a - x_{\hat{b}})[\dot{x}_a - \dot{x}_{\hat{b}}]^\beta,$$

con  $\check{F}^\alpha{}_\beta(x_a - x_{\hat{b}}) = \frac{1}{4\pi} \delta^{\alpha\phi} \epsilon_{\phi\beta\gamma} \frac{(x_a - x_{\hat{b}})^\gamma}{|x_a - x_{\hat{b}}|^3}$ , si confronti l'equazione (5) ricordando che la contrazione degli indici con lo pseudotensore di Levi-Civita corrisponde, in notazione vettoriale, ad un prodotto esterno, mentre  $x_a, x_{\hat{b}}$  indicano rispettivamente le coordinate di  $\mathbb{R}^3$  per la carica elettrica e quelle della carica magnetica.

$S[\gamma]$  ha l'espressione richiesta se l'equazione variazionale  $\delta S = 0$  dà luogo all'equazione precedentemente scritta.

Allora la parte cinetica dovrà necessariamente essere del tipo

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} m g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b dt,$$

con  $g_{ab}$  metrica euclidea e  $\dot{x}$  velocità della particella elettricamente carica.

Indicando con  $A_A$  l'espressione, in un'opportuna trivializzazione, della 1-forma di connessione del monopolo, con  $j^A$  la densità di corrente unitaria della particella elettricamente carica supportata sul sollevamento orizzontale  $\bar{\gamma}$  di  $\gamma$ , con  $t$  parametro per la curva:

$$\int_{t_0}^{t_1} A_A j^A dt,$$

è il contributo fondamentale della parte potenziale che, per proiezione dell'espressione che si ottiene dalla variazione, definisce un'equazione sulla base del fibrato. Non è possibile infatti integrare direttamente la

connessione lungo l'ipotetica traiettoria nella base del fibrato perché essa è una 1-forma  $\in \Lambda(P)$  a valori in  $\mathfrak{u}(1)$ .

Scegliendo di accorpare le costanti moltiplicative per il termine di potenziale indicandole con il simbolo  $\lambda$ , dal calcolo delle variazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} dt m g_{ab} \dot{x}^a \delta \dot{x}^b + \lambda \int_{t_0}^{t_1} dt \partial_A A_B \delta X^A \dot{X}^B + A_A \delta \dot{X}^A \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} dt m g_{ab} \ddot{x}^a \delta x^b + \lambda \int_{t_0}^{t_1} dt (\partial_A A_B - \partial_B A_A) \delta X^A \dot{X}^B + m g_{ab} \dot{x}^b \delta x^a \Big|_{t_0}^{t_1} + \lambda A_A X^A \Big|_{t_0}^{t_1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Imponendo che queste variazioni siano nulle al bordo si ha:

$$m g_{ab} \ddot{x}^b = \lambda F_{ab} \dot{x}^b,$$

dove si è proiettato sulla varietà di base il sollevamento orizzontale della 2-forma lungo la curva del moto, essendo la curvatura orizzontale per definizione.

Poiché  $F_{ab} = (dA)_{ab} = \frac{n}{2} \check{F}_{ab}$ , si confronti l'espressione per  $\check{F}_{ab}$  all'inizio del capitolo con quella per  $F = -\frac{i}{4\pi} \mathcal{F}$  nel capitolo precedente, dall'equazione di Lorentz per la componente  $\alpha$ -esima è possibile determinare  $\lambda$ , che è dato, quindi, da  $\lambda F_{ab} = \frac{eg}{c} \check{F}_{ab}$ . Si ottiene:

$$\lambda = \frac{2eg}{nc}$$

con  $n$  intero per quanto osservato nel capitolo 3 sulla discontinuità del potenziale nell'origine di  $\varphi$ .

Quindi il funzionale azione, se per comodità da questo punto in poi si assorbe  $\lambda$  nella definizione di  $j$  è esattamente:

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} m g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b dt + \int_{t_0}^{t_1} A_A j^A dt;$$

perché l'azione sia definita sullo spazio totale è necessario che venga dotato di metrica (quella prodotto non è corretta perché dipende dalla forma locale della trivializzazione): nel paragrafo 4.1 si osserverà che una qualsiasi forma bilineare  $g_{AB}$  sui vettori dello spazio tangente  $TP$  può essere scelta come metrica su  $P$  se soddisfa un'unica condizione.

È risaputo, inoltre, che con la formulazione lagrangiana resta ben definito il momento coniugato  $\tilde{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = m \dot{X} + \frac{2eg}{nc} A$ .  $\tilde{P}$  è una 1-forma (vettore di  $T^*P$ ) dipendente dalla connessione. Quindi esso, in realtà, una volta valutato sui vettori dello spazio tangente, deve fornire vettori di  $VP$  modulo funzioni  $\mathcal{C}^\infty$  dovute al primo termine, la quantità di moto. Detto  $\xi$  il vettore verticale generatore di  $\mathfrak{u}(1)$ , valutare  $\tilde{P}$  in  $\xi$  fornisce

$$\tilde{P}(\xi) = \frac{2eg}{nc}. \quad (10)$$

Una volta quantizzato  $\tilde{P}$ , questa relazione rappresenterà un vincolo all'espressione dei kets  $|\Psi\rangle$  del sistema.

Quanto discusso sin dall'inizio del capitolo concerne soltanto la lagrangiana del sistema. Si presenterà ora la funzione di Hamilton che si può ricavare con la trasformata di Legendre, ma solamente dopo aver generalizzato la struttura di fibrato ad un numero non banale di composti dionici.

#### 4.1 $N > 1$ composti dionici

Per descrivere un insieme di  $N_e$  cariche e di  $N_g$  monopoli interagenti si utilizza come varietà di base  $M$  lo spazio delle configurazioni  $\mathbb{R}^{3(N_e+N_g)}$  escludendo quelle configurazioni in cui almeno una carica è localizzata nello stesso punto in cui è situato un monopolo,

$$M = \{x = (x_1, \dots, x_{N_e}, x_{\hat{1}}, \dots, x_{N_g}) \in \mathbb{R}^{3(N_e+N_g)} \setminus \Delta\}$$

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^{3(N_e+N_g)} \mid \exists p, \exists \hat{q}, x_p = x_{\hat{q}}\},$$

ove s'indicano le coordinate di  $\mathbb{R}^3$  afferenti ad una carica elettrica con un pedice generico  $p$ , e con un pedice incappucciato  $\hat{q}$  quelle per una qualsiasi carica magnetica.

Una scelta di aperti per ricoprire  $M$  può essere effettuata tramite le configurazioni in cui si sfila, di volta in volta, una stringa tra la coordinata della carica  $p$ -esima e del polo  $\hat{q}$ -esimo, lungo l'asse  $\hat{z}$  con verso assegnato per ogni coppia  $p, \hat{q}$ . In altri termini, si scelgono i

$$V_\sigma = \{x \in M \mid \forall p, \hat{q}, x_p - x_{\hat{q}} = k\hat{z} \text{ implica } \text{sign } k = \sigma(p, \hat{q})\},$$

dove  $\sigma : \{p\} \times \{\hat{q}\} \rightarrow \{\pm 1\}$  definisce il verso opposto a quello della stringa.

In coordinate locali il fibrato a molti composti dionici è, quindi, localmente isomorfo a  $V_\sigma \times U(1)$ .

La 1-forma di connessione (6)-(7) si generalizza, allora, tramite

$$A = d\eta + \frac{1}{2} \sum_{p\hat{q}} n(p, \hat{q}) (\sigma(p, \hat{q}) - \cos \theta_{p\hat{q}}) d\phi_{p\hat{q}}.$$

ove  $\phi_{p\hat{q}}$  è la coordinata azimutale in  $\mathbb{R}^3$  per la direzione data da  $x_p - x_{\hat{q}}$ . Le funzioni di transizione, per esempio nell'intersezione tra  $V_{\sigma'}$  e  $V_{\sigma''}$ , in notazione additiva per il gruppo  $U(1)$ , sono generalizzate (rispetto al caso di un singolo dione) da:

$$\eta_{\sigma'\sigma''} = \frac{1}{2} \sum_{p\hat{q}} n(p, \hat{q}) [\sigma''(p, \hat{q}) - \sigma'(p, \hat{q})] \phi_{p\hat{q}}, \quad (11)$$

con  $n$  intero dipendente dalla scelta di una specifica carica e di uno specifico monopolo. Si verifica direttamente che con l'applicazione per la coordinata su  $U(1)$ ,  $\eta' - \eta'' = \eta_{\sigma'\sigma''}$ , il potenziale  $A_{\sigma'} + d\eta_{\sigma'\sigma''}$  coincide con  $A_{\sigma''}$  nell'intersezione tra gli aperti  $V_{\sigma'}$  e  $V_{\sigma''}$ ,  $\forall \sigma', \sigma''$ .

Congiuntamente all'ovvia estensione della metrica euclidea  $g_{ab}$  ad  $N_e + N_g$  particelle e all'espressione del potenziale  $\Phi$  tra termini dello stesso tipo:

$$\Phi = \begin{cases} \sum_{p < q} \frac{e_p e_q}{|x_p - x_q|} & \text{su una carica elettrica} \\ \sum_{\hat{p} < \hat{q}} \frac{g_{\hat{p}} g_{\hat{q}}}{|x_{\hat{p}} - x_{\hat{q}}|} & \text{su una carica magnetica} \end{cases}$$

la 1-forma di connessione permette di scrivere il funzionale azione per molti accoppiamenti dionici nella forma più generale ( $\dot{x}$  si riferisce sempre alla particella  $p$ -esima elettricamente carica):

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1}{2} g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b - \Phi \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} A_A j^A dt, \quad (12)$$

con  $g_{ab}$  dato, questa volta, dalla matrice diagonale delle masse delle cariche elettriche e magnetiche e con  $j$  che denota l'opportuna corrente.

Le arbitrarie cariche  $e_p$  e  $g_{\hat{q}}$ , come nel caso di un singolo composto dionico, dovranno sottostare alla relazione che generalizza la (10) data da:

$$\tilde{P}_{p, \hat{q}}(\xi) = \frac{2e_p g_{\hat{q}}}{n(p, \hat{q})c}.$$

In un passo successivo di quantizzazione del sistema, a partire da questa relazione si può dimostrare che dall'esistenza della carica magnetica consegue la quantizzazione delle cariche elettriche, cioè è implicata l'esistenza di cariche elettriche primitive discretizzate, dal valore delle quali, per multipli interi, è possibile ritrovare l'intensità di tutte le cariche presenti in natura.

Infine, è consentito ottenere la hamiltoniana che si ricava tramite:

$$H(X^A, \tilde{P}_A) = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^A} \dot{X}^A - L.$$

Dal sollevamento della lagrangiana, osservando che i tensori presenti sono anch'essi orizzontali, e dal valore del momento coniugato, l'espressione corretta per  $H$ , nel caso generale, è

$$H = \frac{1}{2} g^{AB} (\tilde{P}_A - \frac{2eg}{nc} A_A) (\tilde{P}_B - \frac{2eg}{nc} A_B) + \bar{\Phi}, \quad (13)$$

con  $\bar{\Phi}$  sollevamento allo spazio totale del fibrato del potenziale  $\Phi$ . Invece,  $g^{AB}$ , la metrica sullo spazio totale, può essere una qualsiasi applicazione bilineare sui vettori dello spazio cotangente a  $P$ , non degenera e positiva, soddisfacente la condizione:

$$g_{CA} g^{AB} g_{BD} = g_{CD}, \quad (14)$$

opportunamente scelta per il suo successivo utilizzo.

Aver stabilito questa determinata espressione per  $g^{AB}$  ha due conseguenze principali: la prima è che il tensore  $g^{AB}$ , dipendendo da  $g_{CD}$ , è nullo se valutato sul vettore verticale  $\xi$ , mentre la seconda è che la differenza tra due possibili tensori metrici sullo spazio totale deve ammontare ad una combinazione simmetrica di  $\xi \in V_u P$  e di un altro vettore dello spazio tangente a  $P$  nel suo punto  $u$ :  $\forall g^{AB}, \hat{g}^{AB}$  per cui vale (14),  $g^{AB} - \hat{g}^{AB} = \zeta^A \xi^B + \xi^A \zeta^B$

Infatti se si completa  $\xi^A$  ad una base  $\xi^A, \sigma^A, \dots, \tau^A$  di vettori dello spazio tangente a  $P$  in un suo punto  $u$ ,  $\sigma_B = g_{AB} \sigma^A, \dots, \tau_B = g_{AB} \tau^A$  sono un set di covettori ortogonali a  $\xi^A$ , in quanto elementi di  $H_u^* P$ . Un qualsiasi tensore simmetrico 2-controvariante  $k^{AB}$  si può scrivere come  $k^{AB} = (\xi^A \zeta^B + \zeta^A \xi^B) + a \sigma^A \sigma^B + \dots + b(\sigma^A \tau^B + \tau^A \sigma^A) + c \tau^A \tau^B = \hat{g}^{AB} - g^{AB}$ , per cui  $g_{AC} k^{CD} g_{BD} = 0$ . Questo implica che  $a, \dots, c = 0$  perché i vettori scelti sono una base (invece  $g_{AC} \xi^C$  è banalmente nullo per verticalità), dunque  $g^{AB} - \hat{g}^{AB} = \zeta^A \xi^B + \xi^A \zeta^B$ .



## 5 Quantizzazione Canonica

Si procede ora con la sostituzione, delle grandezze classiche presenti nella funzione a valori reali  $H(X, \tilde{P})$ ,  $X \in P$  e  $\tilde{P} \in T^*P$ , con i corrispondenti operatori  $B$  che siano anche degli osservabili, come prescritto da uno dei postulati della meccanica quantistica, e che agiscono nel caso in esame su  $\mathcal{H} = L^2(P)$ .

Un osservabile è un operatore hermitiano  $B^\dagger = B$  il cui insieme di autovettori, eventualmente generalizzati, fornisce una completezza per lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Denotando con  $\sigma_d$  e  $\sigma_c$  rispettivamente la componente discreta e continua dello spettro di  $B$ , quest'ultimo si definisce in modo matematico con

$$\sigma(B) = \{\lambda_n \in \sigma_d(B), \lambda \in \sigma_c(B)\},$$

la completezza dell'insieme degli autovettori equivale alla richiesta

$$\sum_{\lambda_n \in \sigma_d(B)} |\lambda_n\rangle \langle \lambda_n| + \int_{\sigma_c(B)} dB |\lambda\rangle \langle \lambda| = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}.$$

I kets che s'intendono considerare appartengono ad uno spazio di Hilbert equipaggiato ove denotiamo con  $\mathcal{S}$  un opportuno spazio di funzioni di prova e con  $\mathcal{S}'$  il suo spazio duale delle distribuzioni.

Dunque non si utilizzeranno semplicemente elementi dello spazio vettoriale delle funzioni a quadrato sommabile  $L^2(P)$  ma elementi dello spazio dei funzionali lineari continui su funzioni di prova su  $P$ . La metrica, con la quale la definizione di spazio dei funzionali dal fibrato a  $\mathbb{C}$  è ben posta, è quella che soddisfa le condizioni esposte nel paragrafo 4.1, capitolo Formulazione Hamiltoniana.

Convieni anzitutto notare che il vincolo dato da (10) a livello quantistico è da interpretare come un'equazione agli autovalori per la versione quantistica di  $\tilde{P} \in T^*P$ . Il membro sinistro di (10) è, allora,  $\frac{\hbar}{i} \partial_I |\psi\rangle$ , ed è equivalente, soltanto per la parte verticale, con la derivazione fornita dal generatore di  $\mathbf{u}(1)$  su  $|\psi\rangle$ : in coordinate locali,  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \eta} |\psi\rangle = \frac{2eg}{nc} |\psi\rangle$ .

Quindi le funzioni d'onda devono essere proporzionali a  $e^{\frac{i}{\hbar} \frac{2eg}{nc} \eta}$ .

La presenza di questo vincolo ha una particolare conseguenza sulla forma che la funzione d'onda può assumere: infatti, se  $e^{i\alpha} \in U(1)$  e  $X \in P$ ,  $\psi(e^{i\alpha} X) = e^{i\alpha} \psi(X)$ . La dipendenza dalla coordinata angolare è, cioè, sempre fattorizzabile con un esponenziale complesso: le funzioni d'onda fisiche che verranno utilizzate in seguito seguiranno sempre tale prescrizione.

La modifica di  $|\psi\rangle$  in  $e^{\frac{i}{\hbar} \frac{2eg}{nc} \eta} |\psi\rangle$  corrisponde ad effettuare un cambio di gauge sul sistema. Per richiesta di univocità dei valori della funzione d'onda quando è valutata nello stesso punto del fibrato, essendo  $\eta$  una variabile angolare, si ottiene

$$\frac{2eg}{nc} = \hbar, \tag{15}$$

che è la condizione di quantizzazione di Dirac: il doppio del prodotto delle cariche elettrica e magnetica, a meno di rinormalizzazioni con le costanti fondamentali  $\hbar$  e  $c$ , è un numero intero. La relazione, per una carica nel campo di un monopolo, è stata dimostrata in maniera rigorosa a partire dal metodo variazionale ed ha validità generale. Nel caso usuale dell'elettromagnetismo senza cariche magnetiche il cambio di gauge non impone alcuna condizione ulteriore.

La (15) asserisce esattamente quanto anticipato nel capitolo 4: l'esistenza della carica magnetica primitiva  $g$  procura la presenza, nell'universo, di cariche elettriche che siano soltanto multipli interi di  $\frac{\hbar c}{2g}$ .

Si osservi che non è necessario che l'uguaglianza di  $\frac{2eg}{nc}$  si abbia per un numero intero di volte  $\hbar$  in base a quanto asserito sull'equivalenza tra fibrati modulo  $\mathbb{Z}$  nella sezione Dioni nel fibrato con gruppo di

struttura  $U(1)$ .

La funzione di Hamilton quantistica si ottiene, a questo punto, dalla sostituzione operatoriale, considerando gli accorgimenti già presentati. Per la parte cinetica  $T$ , dopo aver sostituito il risultato (15), è conveniente presentare un'espressione covariante, in modo che nel cambio di carta la scrittura si mantenga identica:

$$T = \frac{1}{2} \rho^{-1} (\tilde{P}_A - \hbar A_A) \rho g^{AB} (\tilde{P}_B - \hbar A_B)$$

dove  $\rho$  è l'elemento di volume nelle coordinate scelte, la cui presenza rimuove la dipendenza dal sistema di coordinate in uso. La corrispondenza per la quantità di moto  $\tilde{P}_I \rightarrow \frac{\hbar}{i} \partial_I$  fornisce:

$$T = \frac{1}{2} \hbar^2 \rho^{-1} (i\partial_A + A_A) \rho g^{AB} (i\partial_B + A_B)$$

operatore differenziale chiaramente positivo,  $\langle \psi | T | \psi \rangle \geq 0$ .

L'operatore associato al potenziale è quello moltiplicativo:

$$\langle X | \bar{\Phi} | \psi \rangle = \bar{\Phi}(X) \psi(X)$$

nella rappresentazione delle coordinate del fibrato per  $|\psi\rangle$ .

## 6 Momento angolare di un composto dionico

In questa sezione si analizzerà la rappresentazione (si veda l'appendice) del gruppo di Lie  $SO(3)$  sugli elementi di  $\mathcal{S}' \supset L^2(P)$ . In un secondo momento si stabilirà la statistica di due composti dionici. La contemporanea presenza di uno stesso numero per la statistica e per lo spin fornirà un interessante legame spin-statistica.

Anzitutto si noti che non è necessario controllare la rappresentazione di tutto il gruppo euclideo delle rototraslazioni perché, con il cambio di coordinate canonico che consente il passaggio nel centro di massa del sistema formato da un unico composto dionico, un osservatore non distingue le traslazioni in quanto queste coinvolgono il centro di massa. Le rotazioni costituiscono una simmetria per il sistema nel centro di massa, come si può facilmente verificare effettuando una rotazione delle coordinate nell'equazione del moto (equazione di Lorentz) una volta effettuato il passaggio nel riferimento del centro di massa.

I generatori di  $\mathfrak{so}(3)$  possono essere rappresentati su  $\mathcal{S}$ , e per estensione su  $\mathcal{S}'$ , come gli operatori quantistici  $J_k$  del momento angolare totale lungo una direzione. Si può dimostrare, però, che in generale la rappresentazione unitaria dell'elemento di  $SO(3)$  che procura una rotazione di  $\beta$  radianti,  $U = e^{\frac{i\beta}{\hbar}J_k}$ , è proiettiva.

In generale, una rappresentazione proiettiva del gruppo di Lie  $G$ , chiuso per l'operazione  $\cdot$ , è una  $U : G \rightarrow GL(V)$ ,  $V$  spazio vettoriale,  $g_1, g_2 \in G$ , per la quale:

$$U(g_1)U(g_2) = e^{i\alpha(g_1, g_2)}U(g_1 \cdot g_2).$$

con  $\alpha(g_1, g_2)$  opportuna funzione reale di  $g_1$  e  $g_2$ . Le rappresentazioni proiettive sono in corrispondenza biunivoca, tuttavia, con le rappresentazioni unitarie (per le quali  $\alpha(g_1, g_2)$  è nullo) del gruppo di ricoprimento di  $G$ ,  $\tilde{G}$ , definito come il più piccolo gruppo di Lie, localmente omeomorfo a  $G$ , semplicemente connesso. Questo è quanto assicura il teorema di Bargmann in teoria dei gruppi.

$SU(2)$  è il gruppo di ricoprimento di  $SO(3)$ ; la sua algebra di Lie soddisfa  $\mathfrak{su}(2) \simeq T_e(SU(2)) = T_e(SO(3))$  perché  $SU(2)$  ed  $SO(3)$  sono localmente omeomorfi. Dunque i generatori sono gli stessi.

Sia allora  $\zeta$  il generatore della realizzazione (si veda, al riguardo, l'appendice) di  $SO(3)$  nel sollevamento di diffeomorfismi per  $\mathbb{S}^2$ , varietà di base del fibrato principale  $P$  con gruppo di struttura  $U(1)$ ,  $\zeta(u) \in T_uP$ ,  $u \in P$ . La condizione che l'intero gruppo delle rotazioni sia realizzato tramite automorfismi del fibrato  $P$  implica che  $\zeta$  preservi la connessione, cioè la derivata di Lie della forma differenziale  $A$  lungo  $\zeta$  dev'essere nulla.

Detto  $g(t)$  un sottogruppo ad un parametro di  $G$  (in appendice), per derivata di Lie  $\mathcal{L}_X Y$ , ( $X, Y \in \mathfrak{g} \simeq T_eG$ ) s'intende il campo vettoriale dato dalla variazione infinitesima dell'azione destra  $R_{g(t)*}$  sul campo  $Y$  rispetto al valore del campo  $Y$ , dove s'intende che  $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) \rightarrow u \in G$ , mentre  $X$  è il campo vettoriale su  $g(t)$ :

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(R_{g(t)*} Y|_e) - Y|_u}{t}$$

Si definisce anche la derivata di Lie  $\mathcal{L}_X \omega$  di  $r$ -forme differenziali  $\omega$ , sezioni di una varietà differenziabile  $M$  a valori nella  $r$ -esima algebra esterna del fibrato cotangente ad  $M$ ,  $\Omega^r(M)$ .

Detta  $i_X : \Omega^r(Y) \rightarrow \Omega^{r-1}(Y)$  la contrazione tra una  $r$ -forma ed un campo vettoriale  $Y$ ,

$$(i_X \omega)_Y(Y_2, \dots, Y_r) \equiv \omega_Y(X(Y), Y_2, \dots, Y_r),$$

$\mathcal{L}_X \omega$  corrisponde al differenziale della contrazione applicata alla  $r$ -forma, somma con la contrazione applicata al differenziale della  $r$ -forma:

$$(\mathcal{L}_X \omega)(u) = d(i_X \omega) + i_X(d\omega).$$

Per  $\zeta$  e  $A$  vale, allora,

$$\mathcal{L}_\zeta A = \partial_A(A_B \zeta^B) - \zeta^B \partial_{[A} A_{B]} = 0,$$

ovvero

$$\partial_A(A_B \zeta^B) = F_{AB} \zeta^B, \quad (16)$$

da cui risulta ben definita la contrazione tra  $\zeta$  ed  $A$  sullo spazio totale del fibrato, a partire dalla conoscenza di  $F_{AB}$  che è orizzontale.

Infatti, su  $\mathbb{S}^2$  il generatore della realizzazione delle rotazioni è  $\zeta = \mathbf{v} \times \mathbf{y}$ , con  $\mathbf{v}$  vettore unitario lungo l'asse di rotazione e  $\mathbf{y}$  posizione.

Il valore su tutto il fibrato si ottiene sostituendo al membro destro dell'equazione (16) le espressioni esplicite di  $F_{ab}$  (fornita nel capitolo 4) e di  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} F_{ab} \zeta^b &= \frac{1}{2} n \epsilon_{abc} y^c |y|^{-3} \delta^{b\alpha} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v^\beta y^\gamma \\ &= \frac{1}{2} n (y_a v_c y^c |y|^{-3} - v_a y^c y_c |y|^{-3}) \\ &= -\frac{1}{2} n \partial_a (v \cdot \hat{y}). \end{aligned}$$

Si ottiene, dunque,

$$A_B \zeta^B = -\frac{1}{2} n (v \cdot \hat{y}), \quad (17)$$

con  $n$  intero della condizione di quantizzazione di Dirac.

Si consideri  $J_v = -i\hbar \mathcal{L}_\zeta$ .  $J_v$  corrisponde all'operatore momento angolare totale su  $L^2(P)$  (e per estensione su  $\mathcal{S}'$ ) perché al fibrato principale  $P$  è consentito associare uno spazio  $L^2(P)$  e la realizzazione di una rotazione, generata da  $\zeta$ , corrisponde ad un operatore autoaggiunto in questo contesto.

Prendendo un composto dionico, inizialmente privo di spin, con il monopolio nell'origine e la carica elettrica a distanza  $l$  lungo  $\hat{z}$ , nell'aperto banalizzante  $V_+ \times U(1)$  con coordinate  $(\eta, x, y, z)$ , la funzione d'onda generalizzata per la carica elettrica può essere presa  $\psi = e^{i\eta} \delta(x) \delta(y) \delta(z-l)$ . Si scelga  $\mathbf{v}$ , vettore che definisce l'asse di rotazione, dato da  $(0, 0, 1)$ .

Un  $\zeta$  su tutto il fibrato, soddisfacente l'equazione (17) con  $A_+$  espresso in coordinate sferiche da  $\mathcal{A}_N = iA_+$  come in (7), ha componenti  $(-\frac{1}{2}n \cos \theta, -y, x, 0)$ . Dal calcolo esplicito, infatti, si ottiene  $\zeta A_+ = -\frac{1}{2}n (v \cdot \hat{y}) = -\frac{1}{2}n$ .

Con questi elementi ed effettuando le derivate nel senso delle distribuzioni si ottiene allora:

$$J_z \psi = -i\hbar \zeta^A \partial_A \psi \quad (18)$$

$$= -i\hbar \left( -\frac{1}{2}n \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad (19)$$

$$= -\frac{1}{2}n \hbar \psi \quad (20)$$

Evidenziando che  $n$  è l'intero della condizione di quantizzazione di Dirac, si è giunti ad un risultato inaspettato:

*il sistema, anche se privo di struttura interna, presenta un momento angolare totale non nullo, intero o semintero a seconda che  $n$  sia pari o dispari.*

Si noti che, se  $n$  fosse nullo (impossibile nella teoria considerata) si troverebbe che lo spettro di  $J$  è quello atteso in base alle ipotesi iniziali sul composto. Questo momento angolare aggiuntivo è dovuto alla struttura non globalmente triviale del fibrato.

## 7 Statistica dei composti dionici

Una volta osservato che lo spettro del momento angolare totale quantistico  $J$  non coincide con quello atteso, è lecito domandarsi se il teorema spin-statistica, che assegna statistica di tipo Fermi-Dirac a sistemi con spin semintero, e viceversa a sistemi con spin intero assegna statistica di tipo Bose-Einstein, mantenga validità anche per i composti dionici.

Manca quindi un controllo sulla statistica: ovviamente, al contrario di quanto fatto col calcolo dello spin, bisognerà supporre sempre presente un numero non banale di composti dionici. Il riferimento è al paragrafo 4.1 del presente testo.

Innanzitutto, per effettuare l'analisi della statistica, considereremo l'azione su  $M$ , lo spazio delle configurazioni considerato nel paragrafo 4.1, del gruppo delle permutazioni che mescolano separatamente i due insiemi di oggetti, le cariche elettriche e i monopoli magnetici, e che si sceglie di denotare con  $S_{N_e, N_g}$ .

Sia allora  $N_e = N_g = N$  e si indichino le quantità riferite alle cariche elettriche con gli indici  $p$ , le quantità riferite ai monopoli magnetici con gli stessi indici incappucciati,  $\hat{p}$ . Si assuma che il prodotto tra  $e$  e  $g$  sia uguale a  $\frac{n}{2} \hbar c \forall p, \hat{q}$ , ove  $n$  è fissato poiché si considereranno solamente composti identici (l'intensità della carica elettrica e di quella magnetica è la medesima per tutte le particelle dello stesso tipo).

Detto  $S_{N, N}$  il gruppo delle permutazioni congiunte di  $N$  cariche elettriche e  $N$  cariche magnetiche, sia  $\theta$  un'azione destra di  $\tau \in S_{N, N}$  su  $M$ , dove il generico elemento dello spazio delle configurazioni viene indicato per brevità con  $(x_p, x_{\hat{q}})$ :

$$\begin{aligned} \theta : S_{N, N} \times M &\rightarrow M \\ (\tau, (x_p, x_{\hat{q}})) &\rightarrow (x_{p\tau}, x_{\hat{q}\tau}) \end{aligned}$$

All'azione  $\theta$  si può pensare assegnata una realizzazione (si veda l'appendice) per  $\tau \in S_{N, N}$ ; essa è certamente un'isometria di  $M$  rispetto alla metrica euclidea perché mescola tra loro le singolarità senza spostarle. Inoltre è una simmetria perché lascia invariate le equazioni del moto di una carica, in cui i contributi alla forza sommano semplicemente su tutte le singole coppie (l'interazione è a due corpi).

Soprattutto, essa induce una mappa tra gli aperti trivializzanti del capitolo 4.1, genericamente  $V_\sigma, V_{\theta\sigma} \subset M$ , corrispondente all'applicazione  $f : V_{\sigma(p, \hat{q})} \rightarrow V_{\sigma(p\tau, \hat{q}\tau)}$ .

La mappa di  $P$  in se stesso che, chiamata  $\eta$  la coordinata che parametrizza  $U(1)$  e  $x$  l'elemento di  $M$ , agisce in questo modo:

$$\pi^{-1}(V_{\sigma(p, \hat{q})}) \ni (\eta, x) \rightarrow (\eta, x\tau) \in \pi^{-1}(V_{\sigma(p\tau, \hat{q}\tau)}) \quad (21)$$

corrisponde ad un sollevamento della realizzazione di  $\tau \in S_{N, N}$  come applicazione ed isometria per  $M$ . La caratteristica principale della mappa (21), però, discende dalla proprietà di preservare le funzioni di transizione (per l'uguaglianza di tutti gli  $n(p, \hat{q})$ ) e la connessione: essa è, quindi, un automorfismo per il fibrato,  $f^*$ . Il diagramma sottostante, infatti, commuta.

$$\begin{array}{ccc} P \supset \pi^{-1}(V_{\sigma(p, \hat{q})}) & \xrightarrow{f^*} & \pi^{-1}(V_{\sigma(p\tau, \hat{q}\tau)}) \subset P \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ M \supset V_{\sigma(p, \hat{q})} & \xrightarrow{f} & V_{\sigma(p\tau, \hat{q}\tau)} \subset M \end{array}$$

Un automorfismo di questo tipo per il fibrato non modifica le funzioni di transizione  $t_{\sigma, \sigma\tau} : V_\sigma \cap V_{\sigma\tau} \rightarrow U(1)$  perché queste dipendono da  $n$ , il quale però è identico per tutti i  $p, \hat{q}$ . Anche la connessione si mantiene identica dopo l'applicazione dell'automorfismo perché, per definizione stessa di automorfismo, l'informazione globale contenuta nella connessione non può subire modifiche.

Si può dimostrare che tutti gli automorfismi del fibrato che preservano la metrica in  $M$  sono in realtà equivalenti a meno di una fase, perché vale la seguente proposizione, di cui viene fornita una dimostrazione in appendice.

**Proposizione:**

*due qualsiasi automorfismi del fibrato che inducono la stessa isometria differiscono al massimo per un'azione di  $U(1)$  su  $P$ .*

**Corollario:** se  $f_1, f_2$  sono automorfismi che inducono la stessa isometria, e per un qualsiasi  $X \in P$   $f_1(X) = f_2(X)$ , allora  $f_1 = f_2$ .

Di conseguenza, se  $f_3 = f_1 \cdot f_2$  sulla base, allora  $f_3^* = f_1^* \cdot f_2^*$  a meno di un fattore di fase complessivo sul fibrato. E qualora si riesca a provare che  $\exists X$  t.c.  $f_3^*(X) = f_1^* \cdot f_2^*(X)$ , automaticamente la fase è nulla su ogni punto di  $P$ . La rappresentazione delle permutazioni allora è unitaria non proiettiva anche su  $L^2(P)$ . Questo è esattamente quello che succede anche per l'automorfismo definito in (21).

Era indispensabile che esistesse un'azione di  $S_{N,N}$  di questo tipo, perché rimuovendo a distanze  $r$  arbitrariamente grandi tutti i poli si deve sapere quale sia la rappresentazione, sullo spazio delle funzioni d'onda delle restanti cariche elettriche, di una permutazione. In questo scenario in cui tutti i poli magnetici sono asintoticamente distanti dalle cariche elettriche, infatti, la rappresentazione di una permutazione, che è un operatore su  $L^2(P)$ , non è mai proiettiva.

Con una tale rimozione, il fibrato (diciamo  $P_\Omega$ ) diventa globalmente banale; infatti per la curvatura  $F = dA$ , con l'espressione di  $A$  fornita nel capitolo 4.1, vale

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F \rightarrow 0 \left( \propto \frac{1}{r^2} \right),$$

e la 1-forma di connessione è allora integrabile,  $A = d\eta$ .

Giustificata la possibilità di effettuare univocamente la scelta della realizzazione di  $S_{N,N}$  non proiettiva risulta perfettamente sensato considerare il sottospazio "bosonico" delle funzioni d'onda appartenenti a  $\mathcal{H} = L^2(P)$

$$\mathcal{B} = \{\psi \in \mathcal{H} | \bar{\tau}\psi = \psi \forall \tau \in S_{N,N}\}.$$

Rispetto al capitolo 4.1, la varietà di base va specificatamente presa come l'insieme delle configurazioni in cui  $2N$  particelle formano  $N$  composti dionici; si scelga pure di porre gli elementi della coppia al massimo ad una distanza  $r_0$  piccola a piacere e i centri di massa di due composti ad almeno  $3r_0$ . Sia detta  $M'$  questa specifica varietà di base per il fibrato.

Si supponga, coerentemente a quanto appena enunciato, di considerare solo funzioni d'onda bosoniche su  $P$  ma con supporto in  $P'$ , spazio totale per  $M'$

$$\mathcal{B}' = \{\psi \in \mathcal{B} | \text{supp}(\psi) \subset P'\}.$$

$P'$  ha  $N!$  componenti connesse, dette  $P_R$ ,  $R = 1, \dots, N!$ , il cui numero è dovuto al conteggio dei modi in cui si possono accoppiare  $N$  cariche elettriche con  $N$  cariche magnetiche. Non è possibile passare con continuità tra le diverse scelte con le quali formare la varietà di base perché, una volta strutturati

i composti tramite un qualsiasi potenziale attrattivo (che esiste sempre), gli accoppiamenti sono rigidi ( $|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{\hat{p}}| < r_0, \forall p, \hat{p} \wedge |\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{\hat{q}}| > 3r_0 \forall p, \hat{q}$ , dove si utilizza la stessa lettera alfabetica per indicare che le due cariche formano una coppia).

È sufficiente utilizzare solo l'insieme delle funzioni d'onda  $\mathcal{B}_R = \mathcal{B}' \cap L^2(P_R)$  per le quali vale anche la condizione che la dipendenza dalla coordinata  $\eta$  per la varietà  $U(1)$  sia del tipo  $e^{i\eta}$ .

Si dimostra che il sottogruppo  $S_N$  di  $S_{N,N}$  che scambia le coppie dioniche lascia  $P_R$  invariato. Una rappresentazione di  $S_N$  su  $\mathcal{B}_R$  costituisce effettivamente una simmetria per la dinamica cui è soggetta la funzione d'onda.

Si sa, inoltre, che i sollevamenti di due diverse realizzazioni dell'elemento  $T \in S_N$  su  $M_R$ , essendo ciascuna in corrispondenza con una rappresentazione sullo spazio vettoriale delle funzioni d'onda in  $L^2(P_R)$ ,  $\mathcal{R}(T)$  ed  $\mathcal{R}'(T)$ , differiranno tra loro per una fase. Poiché le rappresentazioni irriducibili di  $S_N$  unidimensionali sono solo quella simmetrica e quella antisimmetrica, due realizzazioni diverse coincidono se sono uguali per una permutazione dispari, e in seguito si controllerà, appunto, se tra due diverse realizzazioni si presenta, eventualmente, questa uguaglianza per una qualsiasi permutazione dispari. Si ricordi che è sufficiente effettuare l'analisi solo su una qualsiasi configurazione  $X$  in una certa componente connessa di  $P$  (per il corollario alla dimostrazione).

Si prosegue, quindi, realizzando in maniera concreta lo scambio asintotico tra due coppie dioniche (permutazione dispari). Per scambio asintotico s'intende che soltanto due coppie dioniche saranno vicine tra loro, le altre  $N - 2$  verranno distanziate lungo un asse.

Convieni trovare una mappa su  $M_R$  che scambi tra loro i due composti, controllando se il sollevamento orizzontale della mappa è una realizzazione di  $S_N$  in corrispondenza con una rappresentazione che sia identica alla rappresentazione standard  $\mathcal{R}(T)$  sullo spazio delle funzioni d'onda di tipo "bosonico" in esame,  $\{|\psi\rangle \in \mathcal{H} \mid \mathcal{R}(T)|\psi\rangle = |\psi\rangle, \forall T \in S_N\}$ .

Preliminarmente si facciano alcune assunzioni necessarie per procedere.

Si consideri la distanza tra un monopolo ed una carica data da  $y_{p\hat{p}} = x_p - x_{\hat{p}} \equiv r_0 v \quad \forall p, \hat{p}$  dove  $v$  è un vettore unitario fisso,  $r_0 \in \mathbb{R}^3$ . Per  $y_{p\hat{q}}$  vale dunque  $y_{p\hat{q}} = y_{pq} + y_{q\hat{q}} = y_{pq} + r_0 v$ ; a loro volta, i differenziali soddisfano  $dy_{p\hat{q}} = dy_{pq} = -dy_{qp}$ .

Si prenda, poi, il comportamento asintotico della 2-forma di curvatura, in un'opportuna carta trivializzante, espresso solo in funzione delle distanze tra cariche elettriche:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \mathfrak{n} \sum_{p\hat{q}} \frac{1}{2} [\check{F}(y_{p\hat{q}}) + \check{F}(y_{q\hat{p}})]_{\iota\kappa} dy_{p\hat{q}}^\iota \wedge dy_{p\hat{q}}^\kappa \\ &= \frac{1}{2} \mathfrak{n} \sum_{pq} \frac{1}{2} [\check{F}(y_{pq} + r_0 v) - \check{F}(y_{qp} - r_0 v)]_{\iota\kappa} dy_{pq}^\iota \wedge dy_{pq}^\kappa \end{aligned}$$

(la prima è valida per antisimmetria di  $\check{F}$ , la seconda per le relazioni tra le distanze e i differenziali delle medesime).

Il campo asintotico di dipolo è, ricordando l'espressione esplicita di  $\check{F}$ :

$$F = \frac{1}{2} \mathfrak{n} \sum_{pq} \frac{1}{2} [\epsilon_{\iota\kappa c} \frac{(y_{pq} + r_0 v)^c}{|y_{pq} + r_0 v|^3} - \epsilon_{\iota\kappa c} \frac{(y_{pq} - r_0 v)^c}{|y_{pq} - r_0 v|^3}] dy_{pq}^\iota \wedge dy_{pq}^\kappa, \quad (22)$$

di ordine  $\frac{r_0}{r^3}$ .

Convieni utilizzare come spazio totale del fibrato quello corrispondente a  $\pi^{-1}(M_\epsilon = \{x \in M_R \mid x_p - x_{\hat{p}} = r_0 v \wedge \min_{p \neq q} |x_p - x_q| > \frac{r_0}{\epsilon}\})$ . Di conseguenza, per cammini generici  $\gamma_a(t)$  e  $\gamma_b(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , con  $\gamma_a(0) = \gamma_b(0) = x_i$ ,  $\gamma_a(1) = \gamma_b(1) = x_f$ , la distanza tra i sollevamenti orizzontali  $\bar{\gamma}_a(1)$  e  $\bar{\gamma}_b(1)$  va a

zero con  $\epsilon$ .

Infatti questa si può calcolare integrando la 1-forma di connessione lungo il percorso e quindi, per il teorema di Gauss-Green, con l'integrale di superficie della curvatura sullo spazio di base (perché  $F_{AB}$  è orizzontale)

$$\int_{\Sigma} F_{ab} dS^{ab}$$

dove  $\Sigma$  è la superficie con bordo  $\partial\Sigma = \gamma_a - \gamma_b$ ,  $F_{ab}$  in (22).

Tuttavia, come suddetto,  $F_{ab} \sim \frac{r_0}{|y_{pq}|^3}$ , dunque l'integrale va a 0 come  $\frac{r_0}{|y_{pq}|} = \epsilon$ . Il fibrato è triviale a seconda del valore di  $\epsilon$ .

È possibile considerare, pertanto, un cammino generico che esegua lo scambio.

Si assegnino, ora, dei valori specifici. Si supponga, per esempio, che  $v = (0, 0, 1)$  e di conseguenza,

$$\begin{aligned} x_1 &= (a, 0, 0), \quad x_{\hat{1}} = x_1 - r_0 v = (a, 0, -r_0); \\ x_2 &= (-a, 0, 0), \quad x_{\hat{2}} = x_2 - r_0 v = (-a, 0, -r_0); \\ x_j &= \left(0, 0, -\frac{ja}{\epsilon}\right), \quad x_{\hat{j}} = \left(0, 0, -\frac{ja}{\epsilon} - r_0\right) \quad j = 3, \dots, N, \end{aligned}$$

con  $2a > \frac{r_0}{\epsilon}$ , in modo che  $x = (x_1, \dots, x_{\hat{N}}) \in M_{\epsilon}$ .

Si utilizzino gli aperti trivializzanti  $V_{\sigma} \times U(1)$ , in cui il segno, in base alla disposizione delle coppie dioniche, è:

$$\sigma(p, \hat{q}) = \begin{cases} -1, & (\hat{q} < p) \text{ e } (2 < p) \\ 1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Chiaramente la realizzazione di  $S_N$  lascia gli aperti trivializzanti invariati.

Si effettui lo scambio dei due composti dionici tramite il cammino  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (a \cos(\pi t), a \sin(\pi t), 0) \\ \gamma_2(t) &= -\gamma_1(t) \\ \gamma_j(t) &= \gamma_j(0) \quad j = 3, \dots, N \end{aligned}$$

Si vuole sapere se  $\psi(\eta, y_{1\hat{1}}, y_{2\hat{2}}, \dots, y_{N\hat{N}}) = e^{i\eta\psi(y_{1\hat{1}}, y_{2\hat{2}}, \dots, y_{N\hat{N}})}$  subisca modifiche a seguito della permutazione dispari sulla varietà delle configurazioni con punto generico  $(y_{1\hat{1}}, y_{2\hat{2}}, \dots, y_{N\hat{N}})$ , per indicare che la scelta di accoppiamento è stata effettuata. La presenza di un'eventuale modificazione si ricava dalla variazione infinitesima di  $\eta$  integrata lungo il cammino  $\bar{\gamma}: e^{i\int d\eta}$ . Se la differenza di fase tra la configurazione iniziale e quella finale è nulla, la rappresentazione è direttamente collegata alla realizzazione dell'elemento dispari di  $S_N$  in questione (si tenga presente che esso non è un ciclo, in virtù del fatto che il fibrato è stato predisposto per essere asintoticamente triviale) e coincide con la rappresentazione che per definizione lascia invariata la funzione d'onda associata a (21). Allora,

$$\alpha = \int_{\bar{\gamma}} d\eta,$$

tuttavia, essendo la curva orizzontale, l'integrale si può riscrivere sfruttando l'espressione della connessione e valutare, quindi, sullo spazio di base perché privo di contributi verticali:

$$\alpha = -\frac{1}{2}n \int_{\gamma} \sum_{p\hat{q}} [\sigma(p, \hat{q}) - \cos \theta_{p\hat{q}}] d\phi_{p\hat{q}}.$$



L'apporto dei  $p, \hat{q} \geq 3$  è nullo (sono infinitamente distanti dall'origine del sistema di riferimento scelto,  $\phi_{p\hat{q}}$  è trascurabile). I termini forniti da  $p \leq 2 < \hat{q}$  oppure  $\hat{q} \leq 2 < p$  hanno l'andamento  $|\sigma(p, \hat{q}) - \cos \theta_{p, \hat{q}}| = \frac{1}{r^2} \sim \epsilon^2$  quindi sono altrettanto trascurabili.

Per le coppie  $\{1, \hat{1}\}$  e  $\{2, \hat{2}\}$   $d\phi$  è altrettanto nullo perché entrambe le cariche sono sullo stesso angolo azimutale  $\phi$ . Rimangono soltanto  $d\phi_{1\hat{2}}, d\phi_{2\hat{1}}$  che valgono entrambi  $\pi dt$ ;  $\theta_{1\hat{2}}$  e  $\theta_{2\hat{1}}$  tendono a  $\frac{\pi}{2}$  se  $\epsilon \rightarrow 0$ , per cui ( $\sigma$  è +1 per le due coppie):

$$\alpha = -\frac{n}{2} \left( \int d\phi_{1\hat{2}} + \int d\phi_{2\hat{1}} \right) = -\frac{n}{2} \left( \int_0^1 \pi dt + \int_0^1 \pi dt \right) = -\frac{1}{2} n 2\pi = -n\pi.$$

$e^{i\alpha} \in U(1)$  è positivo o negativo in base al valore dell'intero della condizione di quantizzazione di Dirac: +1 per  $n$  pari e -1 per  $n$  dispari, fino all'ordine  $\epsilon^2$ . A quest'ordine di approssimazione si presenta, dunque, un'anomalia: il controllo sulla fase procurata dal sollevamento allo spazio totale del circuito nello spazio delle configurazioni (e questo circuito è associato ad una rappresentazione di  $S_N$  su  $\mathcal{B}_R$ ) presenta un risultato dipendente da  $n$  che procura l'effetto di *rovesciare la statistica, da bosonica in fermionica, per  $n$  dispari*.

In questa visuale non relativistica e approssimata del comportamento dei composti dionici avviene un fenomeno fisico non ordinario. Pur stabilendo di considerare i componenti privi di spin, i composti presentano un momento angolare intero ( $n$  pari) o semintero ( $n$  dispari) dovuto alla struttura non triviale del fibrato. Questo è quanto emerso dal controllo dello spettro degli operatori quantistici del momento angolare.

Dal successivo controllo sulla statistica è emerso esattamente che in presenza di spin semintero ( $n$  dispari) la statistica è quella di Fermi-Dirac. Ciò ha assicurato la validità del teorema spin-statistica anche per i composti dionici non relativistici.

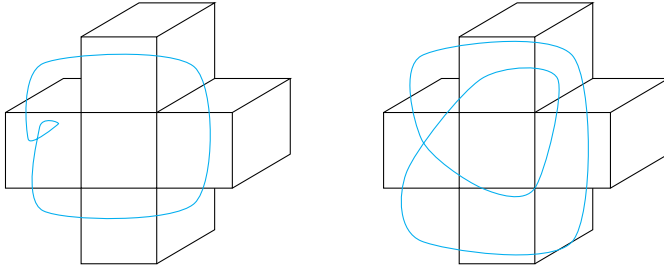


figura 1a, 1b

Le figure mostrano che una rotazione di  $2\pi$  (a sinistra),  $\varphi(x, y, t)$ , e uno scambio di due elementi (a destra),  $\phi(x, y, t)$ , sono entrambi omotopi all'identità. I cubi ad estrema sinistra e destra corrispondono rispettivamente ad  $(x, y, t, 0)$  e ad  $(x, y, t, 1)$ . Quelli disegnati sono i supporti delle funzioni, rispettivamente:

$$f(x, y, t, s) = \begin{cases} f(x, y, t, 0) = \varphi(x, y, t) \\ f(x, y, t, 1) = id \end{cases} \quad g(x, y, t, s) = \begin{cases} g(x, y, t, 0) = \phi(x, y, t) \\ g(x, y, t, 1) = id. \end{cases}$$

Da quest'osservazione si può dimostrare la validità del teorema spin-statistica. Lo spazio di definizione è stato aperto per essere immerso in  $\mathbb{R}^3$ .

## 8 Conclusioni

In queste poche pagine si è svolta un'analisi di un sistema di composti dionici, che può apparire come conseguenza dell'introduzione della carica magnetica per il rispetto della simmetria di dualità delle equazioni di Maxwell anche in presenza di sorgenti.

Si è reso necessario il ricorso ad una formulazione tramite fibrati con gruppo di struttura  $U(1)$  per tenere conto della struttura non topologicamente banale dello spazio indotta dalle singolarità associate ai monopoli, e questo ha consentito di introdurre, nonostante le problematiche topologiche, un potenziale per il campo elettromagnetico.

Dalla discontinuità del potenziale nel cambio di carta locale si è potuto concludere che per i dioni occorre imporre, per consistenza, un requisito di quantizzazione (condizione di Dirac) del prodotto tra la carica elettrica e la carica magnetica del composto.

Gli effetti della presenza del monopolio non si limitano solo a questo: infatti, è stato possibile dimostrare che composti privi di spin nei loro costituenti elementari presentano un momento angolare totale non nullo dipendente dallo stesso intero della condizione di quantizzazione di Dirac, e questo momento angolare ulteriore è semintero per  $n$  dispari.

Il teorema spin-statistica, tuttavia, è ancora valido. In concreto, si sono scambiati asintoticamente due composti dionici ruotandoli attorno all'asse  $\hat{z}$  e si è calcolato il contributo di fase alla fibra sopra il punto finale del circuito.

Inaspettatamente, si è ricavato che, solamente per  $n$  dispari, la rappresentazione coincide con quella inversa rispetto a quella attesa, dunque il composto ha presentato comportamento fermionico, e questo è bastato ad asserire che il teorema spin-statistica non è smentito dai dioni.

## 9 Appendice

Per analizzare gli effetti dell'introduzione della carica magnetica, la forma che assumono il potenziale ed il campo elettromagnetico di un monopolo è conveniente utilizzare oggetti geometrici su fibrati principali, che sono caratterizzati di seguito.

### GRUPPI ED ALGEBRE DI LIE

Una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $m$  è uno spazio topologico provvisto di struttura differenziabile, nel senso che  $\forall V_1, V_2$  coppia di aperti in  $M$  con  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$  esistono omeomorfismi con aperti di  $\mathbb{R}^m$ ,  $\phi : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\psi : V_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\psi \circ \phi^{-1}$  è un diffeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} (V_1 & \cap & V_2) \subset M \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^m \supset \phi(V_1 \cap V_2) & \xrightarrow{\psi \circ \phi^{-1}} & \psi(V_1 \cap V_2) \subset \mathbb{R}^m \end{array}$$

Un gruppo di Lie è un gruppo  $G$  dotato anche di una struttura di varietà differenziabile tale che il prodotto, come mappa  $G \times G \rightarrow G$ , e l'inverso, come mappa  $G \rightarrow G$ , siano applicazioni  $C^\infty$ .

Qualora esista un'applicazione  $\theta : G \times M \rightarrow M$  di classe  $C^\infty$  tale che

$$\theta(g_1, \theta(g_2, p)) = \theta(g_1 g_2, p) \quad \theta(e, p) = p$$

dove  $g_1, g_2 \in G$  ed  $e \in G$  elemento neutro,  $p \in M$  varietà differenziabile, questa prende il nome di azione differenziabile di  $G$  su  $M$ .

Di immediata utilità sono la realizzazione, applicazione tra il gruppo  $G$  e l'insieme (che a sua volta costituisce un gruppo con la legge di composizione) degli autodiffeomorfismi di una varietà differenziabile  $M$  ( $G \rightarrow \{\sigma \mid \sigma : M \rightarrow M, \exists \sigma^{-1}, \sigma^{-1} \text{ e } \sigma \text{ sono differenziabili}\}$ ), e la rappresentazione del gruppo, realizzazione di  $G$  nel gruppo delle trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale  $V$  ( $G \rightarrow GL(V)$ ).

In presenza di un campo vettoriale su una varietà è definita un'applicazione  $C^\infty$ , il flusso  $\Theta : \mathcal{U} \rightarrow M$ ,  $\mathcal{U} = I \subset \mathbb{R} \times M$ , che a  $p \in M$  fissato soddisfa  $\frac{d\Theta(t,p)}{dt} = X(\Theta(t,p))$ ,  $X \in \mathcal{T}(M)$ , mentre a  $t \in \mathbb{R}$  fissato è un diffeomorfismo per  $M$  in sé.

In maniera analoga, per i gruppi e le algebre di Lie, se si ha un sottogruppo ad un parametro, curva  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$  con  $\phi(s)\phi(t) = \phi(t+s)$ , allora esiste un campo vettoriale invariante a sinistra.

Si verifica, perciò, che il campo vettoriale dato da

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = X(\phi(t))$$

è invariante a sinistra. Viceversa, dato un campo vettoriale invariante a sinistra esiste sempre un sottogruppo ad un parametro.

Con un sottogruppo ad un parametro e mediante l'applicazione detta mappa esponenziale  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  con

$$\exp V \equiv \phi_V(1),$$

dove  $\phi_V(1)$  è originato dal campo vettoriale invariante a sinistra  $X_V|_g = L_{g*}V$ , è consentito passare in maniera continua tra gli elementi del gruppo connesso e semplicemente connesso che ha quella determinata algebra, una volta che questa è nota.

## FIBRATO PRINCIPALE E STRUTTURE CARATTERISTICHE

Un *fibrato* (differenziabile) è costituito con diversi elementi: tre varietà differenziabili dette spazio totale  $P$ , spazio di base  $M$  e fibra tipica  $F$ , ed un gruppo di Lie  $G$ , detto gruppo di struttura del fibrato, che agisce su  $F$  a sinistra. I diversi oggetti sono in relazione tra loro in più modi:

- tra  $P$  e  $M$  esiste un'applicazione differenziabile suriettiva  $\pi : P \rightarrow M$  per cui, se  $p \in M$ , l'immagine inversa  $\pi^{-1}(p)$  è data da  $\pi^{-1}(p) = F_p \simeq F$  ( $F_p$  è chiamata la fibra sopra  $p$ );
- detta  $\{U_i\}$  la collezione di aperti che ricopre  $M$ , esiste un diffeomorfismo  $\phi_i$  (la cosiddetta banalizzazione locale)  $\phi_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$  per il quale  $\pi \circ \phi(p, f) = p$  (dove  $p \in U_i$ ), cioè:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\phi_i^{-1}} & \phi_i^{-1}(\pi^{-1}(U_i)) \simeq U_i \times F \\ \downarrow \pi & \swarrow \pi \circ \phi & \\ U_i & & \end{array}$$

commuta;

- se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  la funzione  $t_{ij}(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} : F \rightarrow F$ , detta funzione di transizione, è un elemento di  $G$ , ovvero  $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ .  $\phi_i$  e  $\phi_j$  sono quindi legate da:

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f)$$

Un *fibrato principale* è un fibrato  $\pi : P \rightarrow M$  la cui fibra sopra  $p \in M$  è data dal gruppo di struttura  $G$ . Se  $\phi_i^{-1} : \pi^{-1}(V_i) \rightarrow V_i \times G$  con  $V_i$  intorno aperto di  $M$  in un suo punto  $u = \pi^{-1}(p)$  è la trivializzazione, allora su  $u$  assume l'espressione:

$$\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$$

È ben definita l'azione destra di  $G$  stesso sulla fibra  $G_p$ :  $ua = \phi_i(p, g_ia)$ .

## 9.1 Dimostrazioni

### Derivazione dell'equazione di Lorentz e della legge di potenza con il formalismo vettoriale

Si considerino le espressioni, ricavate in ambito relativistico, dei tensori energia-impulso per il campo e per le particelle

$$T_{em}^{\mu\nu} = F_\alpha^\mu F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (23)$$

$$T_{part}^{\mu\nu} = m \int u^\mu u^\nu \delta^4(x - y(s)) ds; \quad (24)$$

$T^{\mu\nu}$  totale è invariante per dualità, quindi anche in presenza della carica magnetica questo tensore soddisfa un'equazione di continuità.

Nota la definizione di tensore elettromagnetico duale e l'equazione di Maxwell da esso soddisfatta si può ricavare, dal calcolo della derivata covariante di  $T_{em}^{\mu\nu}$ , la forma non relativistica che l'equazione di Lorentz e la legge di potenza assumono in presenza del monopolo magnetico (3):

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu T_{em}^{\mu\nu} &= j_{\alpha e} F^{\alpha\nu} + F_\alpha^\mu \partial_\mu F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu F^{\alpha\beta}) F_{\alpha\beta} \\
 &= j_{\alpha e} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} F_\alpha^\mu \partial_\mu F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} F^{\alpha\mu} \partial_\alpha F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu F^{\alpha\beta}) F_{\alpha\beta} \\
 &= j_{\alpha e} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} F_{\mu\alpha} \partial^\mu F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} F_{\alpha\mu} \partial^\alpha F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial^\nu F^{\alpha\beta}) F_{\alpha\beta} \\
 &= j_{\alpha e} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} (-\partial^\beta F^{\alpha\nu} + \partial^\alpha F^{\beta\nu} + \partial^\nu F^{\alpha\beta}) \\
 &= j_{\alpha e} F^{\alpha\nu} + F_{\alpha\beta} (\epsilon_{i\alpha\beta\nu} \partial^\alpha F^{\beta\nu}) \\
 &= j_{\alpha e} F^{\alpha\nu} - \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} j_{\mu m} \\
 &= j_{\alpha e} F^{\alpha\nu} - \tilde{F}^{\nu\mu} j_{\mu m}
 \end{aligned}$$

Dev'essere  $\partial_\mu (T_{em}^{\mu\nu} + T_{part}^{\mu\nu}) = 0$  quindi, indicando con  $T^{\mu\nu}$  il tensore totale:

$$\begin{cases} \partial_i T^{i0} + \partial_0 T^{00} = 0 \\ \partial_0 T^{0j} + \partial_i T^{ij} = 0 \end{cases}$$

la prima fornisce

$$\begin{aligned}
 0 &= -F^{0i} j_{ie} - \tilde{F}^{0i} j_{im} + \partial_0 \int mu^0 u^0 \delta^4(x-y(s)) ds + \partial_i \int mu^i u^0 \delta^4(x-y(s)) ds \\
 &= -(eE^i + gB^i) \int u_i \delta^3(x-y(t)) dt + \frac{d\varepsilon}{dt} \int \delta^3(x-y(t)) dt
 \end{aligned}$$

che è esattamente la legge di potenza ( $\varepsilon$  è l'energia)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (e\mathbf{E} + g\mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} \quad (25)$$

La seconda, se  $c = 1$ , procura

$$\begin{aligned}
 0 &= -F^{i\alpha} j_{\alpha e} - \tilde{F}^{i\mu} j_{\mu m} - F^{i0} j_{0e} - \tilde{F}^{i0} j_{0m} + \partial_0 \int mu^0 u^i \delta^4(x-y(s)) ds + \partial_j \int mu^j u^i \delta^4(x-y(s)) ds \\
 &= \epsilon^{ijk} B^k j_{je} - \epsilon^{ijk} E^k j_{jm} + \partial_0 \int mu^0 u^i \delta^4(x-y(s)) ds \\
 &= \int ((g\mathbf{v} \times \mathbf{E} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - e\mathbf{E} - g\mathbf{B} + \frac{d\mathbf{p}}{dt}) \delta^3(x-y(t)) dt
 \end{aligned}$$

che è l'equazione di Lorentz in presenza di un monopolo.

**Dimostrazione del lemma di pagina 17:** due qualsiasi automorfismi che inducono la stessa isometria differiscono al massimo per un'azione di  $U(1)$  su  $P$ .

Premettiamo la definizione di isometria, qualora non fosse nota: un'applicazione  $f$  tra due fibrati su cui è stata assegnata una metrica, diciamo  $(P, g)$ ,  $(\tilde{P}, \tilde{g})$ , è un'isometria in  $p \in M$  se, chiamata  $Tf : T_u P \rightarrow T_{f(u)} \tilde{P}$  la mappa indotta da  $f$  sullo spazio tangente ad  $u$ ,  $\forall v, w \in T_u P$  si ha

$$\tilde{g}_{f(u)}(Tf_u(v), Tf_u(w)) = g_u(v, w)$$

Siano  $f_1$  e  $f_2$  gli automorfismi dell'enunciato. Entrambi preservano le distanze originarie (precedenti all'aver applicato  $f_1$  ed  $f_2$ ) a meno di traslazioni rigide, quindi le distanze tra gli angoli della fibra rimangono invariate. Le immagini di  $f_1$  ed  $f_2$ , perciò, possono differire tra loro al massimo per un fattore di fase, che altro non è che  $\mathcal{U} : M \rightarrow U(1)$ . Detto in altri termini, se  $\Gamma(\mathcal{U})$  è una rappresentazione dell'elemento  $\mathcal{U}(p)$ ,  $p \in M$ , del gruppo  $U(1)$ ,  $f_2 = \Gamma(\mathcal{U}) \circ f_1$ .

$f_1$  e  $f_2$ , in quanto automorfismi, non modificano la connessione: allora pure  $f_2 \circ f_1^{-1} = \Gamma(\mathcal{U})$  non la cambia. Però  $\Gamma(\mathcal{U})$  è la funzione di transizione e trasforma  $\mathcal{A}_I$  in  $\mathcal{A}_I + i\mathcal{U}^{-1} d\mathcal{U}$ , per cui, per preservare la connessione, deve aversi  $\mathcal{U}$  costante  $\forall p$ .

# Bibliografia

- [1] Abate M., Tovena F. (2011) *Geometria Differenziale*, Springer-Verlag
- [2] Cohen-Tannoudji C., Diu B., Laloë F. (1977) *Quantum Mechanics, Volume One* WILEY-VCH
- [3] Dirac P. A. M. (1948) *The Theory of Magnetic Poles*, Physical Review, 817
- [4] Finkelstein D., Rubinstein J. (1967) *Connection Between Spin, Statistics, Kinks*, Journal of Mathematical Physics, 1762
- [5] Friedman J. L., Sorkin R. D. (1979) *Dyon spin and statistics: A fiber-bundle theory of interacting magnetic and electric charges*, Physical Review D, 2511
- [6] Goldhaber A. (1976) *Connection of Spin and Statistics for Charge-Monopole Composites*, Physical Review Letters, 1122
- [7] Marchetti P. A. (2009) *Spin-Statistics Transmutation in Quantum Field Theory*, Foundation of Physics, 746
- [8] Nakahara M. (2003) *Geometry, topology and physics*, IOP Publishing
- [9] Rebbi C., Soliani G. (1984) *Solitons and Particles*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd
- [10] Wu T. T., Yang C. N. (1975) *Concept of non integrable fase factor and global formulation of gauge fields*, Physical Review D, 3845